Actes

XXXVIIIème Colloque COPIRELEM

colloque international francophone des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques

22 - 23 - 24 JUIN 2011

IUFM de Bourgogne - site de Dijon

Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants

Ateliers

DES VIDÉOS SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODÉLISATION EN CP ET CM1 : DE L'ACTIVITÉ DE L'ÉLÈVE À LA FORMATION

Richard CABASSUT
PIUFM, IUFM d'Alsace
LDAR, Université Paris 7
richard.cabassut@unistra.fr

Résumé

De 2007 à 2008, quatre séquences de résolution d'un problème ouvert, à plusieurs étapes et complexe, en lien avec la réalité, appelé encore problème de modélisation, ont été mises en œuvre, deux dans une classe de CP, et deux dans une classe de CM1, dans le cadre du projet européen LEMA[1]. L'atelier a proposé d'étudier dans ces vidéos l'activité de l'élève et de réfléchir à leur utilisation en formation. Le visionnage des vidéos devrait permettre de dégager des invariants pour la formation. Quelle activité de l'élève apparaît ? Est-elle spécifique à la vidéo (tâche, classe...) présentée ou commune à toutes les vidéos ? Est-elle spécifique de la modélisation ? Quelles retombées peuvent être utiles pour la formation ? On rend compte des difficultés à analyser l'activité de l'élève au travers des comptes rendus des groupes et de la discussion.

I - CONTEXTE DES VIDÉOS

1 Le projet LEMA

De 2006 à 2010, le projet européen LEMA a conçu et expérimenté un cours de formation à l'enseignement de la modélisation. Ce cours est destiné à des enseignants de mathématiques, de l'école primaire ou de l'école secondaire. Comme ressources à disposition des formateurs, des vidéos de mise en œuvre de séances de modélisation ont été réalisées. Certains extraits de ces vidéos ont été mis en ligne sur le site internet du projet (www.lema-project.org), parmi lesquels un extrait réalisé en France dans une école primaire : le bouchon. Les autres réalisations sont accessibles de manière restrictive sur l'intranet du site de l'IUFM d'Alsace. Chaque mise en œuvre a été montée en une vidéo de 20 à 30 minutes, découpée en épisodes jugés intéressants pour la formation de futurs professeurs. Il est donc important de noter que ces vidéos n'ont pas été conçues à l'origine comme ressources pour analyser l'activité de l'élève. On demande donc aux membres de l'atelier d'essayer de dépasser les biais introduits par le montage, ou par le fait que certains épisodes sont concentrés sur l'activité du professeur, pour analyser l'activité de l'élève présente dans la vidéo, ou au contraire absente.

2 La modélisation

Une autre caractéristique de ces vidéos est qu'elle concerne la mise en œuvre de tâches de modélisation. (Kuzniak & al., 2008) rappelle que plusieurs conceptions de la notion de modélisation existent. Nous adoptons ici le cycle de modélisation proposé par l'étude (PISA, 2006), elle-même inspirée par les travaux de Blum, Schupp, Niss, Neubrand et Pollak.

1 Une présentation du projet est accessible sur www.lema-project.org ou dans (Cabassut, 2008).

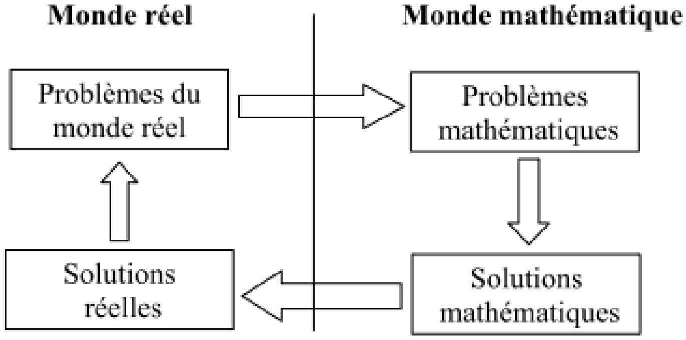


Figure 1 - cycle de modélisation

En utilisant les notions de problèmes complexes et à plusieurs étapes proposées par les programmes français de 2008 de l'école primaire, on peut considérer qu'un problème de modélisation est un problème ouvert, à plusieurs étapes, complexe, en lien avec la réalité. L'ouverture du problème réside dans les données qui ne sont pas explicitement fournies par l'énoncé de la tâche, dans la procédure de résolution du problème qui n'est pas imposée par l'énoncé et qui nécessite souvent des hypothèses supplémentaires, et enfin dans la question posée, qui n'est pas toujours précisée ou précise. La résolution du problème a plusieurs étapes : il ne s'agit pas de l'application d'une procédure à une étape, comme l'est par exemple l'application d'une formule de calcul. La complexité est liée, non seulement à l'existence de plusieurs étapes de résolution, mais également au fait que l'on doit chercher les données du problème, les compléter par des hypothèses et qu'une solution n'est pas une solution familière, ce qui distingue notamment le problème d'application où le modèle est fourni et doit être appliqué, du problème de modélisation où le modèle du problème est à construire. Enfin, le lien avec la réalité caractérise notre conception de la modélisation, à la différence d'une conception d'une modélisation intra-mathématique qui n'exige pas de lien avec la réalité.

3 Initialisation de la réflexion et consignes pour le travail en groupe

Quatre tâches de modélisation ont été mises en œuvre entre mars et juin 2007 dans une école primaire d'application de Strasbourg, dans des classes de maîtres formateurs, une classe de CP et une classe de CM1. Des vidéos de 20 à 30 min ont été montées. L'atelier propose d'étudier dans ces vidéos l'activité de l'élève et de réfléchir à leur utilisation en formation. Le visionnage des vidéos est fait séparément (une vidéo par groupe). Le bref descriptif suivant des tâches de modélisation mises en œuvre dans les vidéos est communiqué aux participants pour qu'ils puissent se répartir dans les groupes.

CP : la file d'attente. Vous arrivez à Europapark et il y a une file d'attente de 20 m pour rentrer dans le parc. Combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ?

CP : lecture à la maternelle. La classe de CP va lire un nouveau livre à la maternelle. Combien de pages chaque enfant va-t-il lire ?

CM1 : le géant. Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo[2] a été prise dans un parc de loisirs.

CM1 : le bouchon. Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre les sorties La Vigie et Baggersee. (Combien de véhicules sont bloqués ?)[3]

Le cahier des charges du colloque 2011 de la Copirelem propose de distinguer la dimension fonctionnelle de l'activité et sa dimension structurante et de faire ressortir les thèmes, les obstacles,

---

[2] La photo est proposée plus loin dans l'article.

[3] La question entre parenthèse n'est pas communiquée au début de la tâche mais devra être construite dans une première phase de travail des élèves sur l'énoncé sans question de la tâche.

difficultés et erreurs rencontrées par l'élève, de préciser les méthodes d'observation et d'analyse de l'activité, d'étudier les processus de différenciation. (Robert 2003, p.2) proposent de décrire et justifier « *ce qui est retenu dans les activités des élèves. Ce sont des variables dont nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent influencer les apprentissages : elles sont liées aux contenus mathématiques abordés - scénario global et tâches précises, formes de travail et accompagnements en classe* ». L'analyse se centre sur le couple (tâche prescrite, déroulement). Dans l'analyse du déroulement on observe le scénario, le contrat (temps, recherche collective, individuelle …), la production attendue, les formes de travail des élèves, les accompagnements… Les éléments du cahier des charges du colloque de la Copirelem, de (Robert, 2003) et de (Roditi, 2006) permettent d'initier la réflexion en proposant la diapositive suivante aux membres de l'atelier.

Initialisation de la réflexion a priori
Faire avec les vidéos proposées (déjà montées) qui n'ont pas été conçues pour cet atelier.
Décrire ce qu'on voit et ce qu'on ne voit pas (ce qui manque) dans l'activité de l'élève : quels critères de description et d'analyse partageons-nous a priori ?
Fonctions de l'activité, structure de l'activité, prescription, initiatives, aides, difficultés, obstacles, erreurs, différenciation... (On pourra en rajouter a posteriori après visionnage)
Quelles variables de l'activité de l'élève ? Contenu mathématique, scénario global, tâches précises, formes de travail, accompagnements en classe...
Qu'est-ce qui est spécifique à la modélisation ? Qu'est-ce qui est générique ?
Quelles retombées pour la formation ?

Au cours de cette initiation de la réflexion, aucune autre proposition d'analyse de l'activité de l'élève n'est ajoutée, ce qui est peut-être un premier signe de la difficulté à analyser cette activité.

4 Consigne de travail en groupe

La présentation de la consigne de travail des groupes et des objectifs de production de chaque groupe est précisée par la diapositive suivante.

Analyse de la vidéo au regard de deux questions
Quelle analyse de l'activité de l'élève ?
Quelles retombées pour la formation ?
Rédaction d'un texte présentant l'analyse (sur support numérique) (illustré éventuellement par des extraits de la vidéo repérés avec l'horloge)
Critères partagés ?
Présentation de chaque groupe (10 min par groupe soit 40 min)
Discussion générale (20 min)

Chaque groupe est muni d'un ordinateur permettant le visionnage de la vidéo et d'une feuille présentant les découpages de la vidéo en épisodes repérés par le temps de début de l'épisode, afin de permettre un retour en arrière plus facile. Rendons compte des différentes présentations des travaux des groupes et des discussions. Les premiers comptes rendus seront plus précis ; les suivants seront plus concis pour ne pas reprendre des éléments de discussions des premiers.

II - PRÉSENTATIONS DES TRAVAUX DES GROUPES ET DES DISCUSSIONS

1 La file d'attente

Dans le cadre du projet LEMA, il était important de vérifier si une tâche de modélisation pouvait être proposée dès le début de l'école primaire, ici une classe de CP. Ce type de tâche, détermination de la longueur d'une file d'attente, a été proposé à différents niveaux de l'enseignement primaire et secondaire. Elle a donc été négociée avec le professeur en charge de la classe. Pour rendre le contexte de la tâche familier aux élèves, il a été choisi de la situer dans un parc d'attraction régional, connu des élèves de la classe. L'énoncé de la tâche est le suivant. " Vous arrivez à Europapark et il y a une file d'attente de 20 m pour rentrer dans le parc. Combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ? " La vidéo dure 26'48 pour l'ensemble des deux séances mises en œuvre début juin. La description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Première séance

Présentation de la tâche (0'28)

20 m c'est quoi ? (2'42)

Dans la cour (4'25)

Représentation d'une file d'attente.

Retour en classe (5'57)

Travail en groupes (7'33)

Dans un groupe avec le professeur (8'05)

Groupe sans le professeur (9'04)

Retour du professeur (9'20)

Mise en commun (10'29)

Compter les personnes.

Mesurer les personnes

Dessiner des personnes, des ronds dehors

Se mettre sur la ligne d'attente pour jouer la queue et faire venir les autres classes

Retour dans la cour (13'41)

Mise au point dans la cour (14'31)

Compter le nombre de ronds personnes

Regarder comment on a tracé les ronds

Double comptage du nombre de ronds (14'57)

70 ronds 75 ronds

Densité de la file (15'57)

Des élèves serrés et des élèves écartés

Durée d'attente (16'31)

Combien de temps les 75 personnes mettent pour passer ?

Modèle pour mesurer la durée (17'29)

Chronométrage d'un passage de 75 personnes

On mesure le temps que prennent 5 personnes pour passer : 10 secondes

Quand on est passé on continue la file des ronds en se plaçant au premier rond inoccupé

Mise en œuvre du modèle (21'09)

Premier passage à l'avant de la file (21'15)

Autre passage à l'avant (21'25)

Prolongement de la file à l'arrière (21'39)

Synthèse collective (21'48)

Selon qu'on marche et qu'on court

Selon qu'on est serré ou écarté

Donc on a trouvé une solution mais il peut y en avoir plusieurs

Deuxième séance (22'33)

Schématisation de la file d'attente (22'40)

« Voici la reproduction de la ligne de 20 mètres tracée sur le sol. Nous avons replacé les ronds représentant les personnes qui sont dans la file d'attente ». La reproduction a été faite par la maîtresse.

Schématisation tactile (22'58)

Techniques de groupement en base 10 (23'07)

Comptage des ronds : il y a 77 ronds

Association constellation écriture chiffrée (23'17)

Utilisation d'une bande numérique pour représenter le nombre de personnes de la file d'attente (23'24)

Vers le comptage (23'42)

Comptage 1 par 1 (2''10)

Comptage 10 par 10 (24'19)

Surcomptage à l'unité (24'34)

Détermination de la durée d'écoulement de la file d'attente (24'54)

Regroupement des enfants par paquet de 5 (25'28)

5 enfants passent en 10 secondes

Bon de commande de cartes de 10 secondes (25'39)

Combien de cartes de 10 secondes dois-je commander ? 16 cartes donc environ 160 secondes

Autre méthode : appariement de paquets de 10 secondes et de paquet de 5 personnes (25'58)

15 cartes de 10 secondes et il reste 2 enfants à rentrer

Fin (26'48)

Analyse de la vidéo

Concernant l'action de l'enseignante, l'enseignante donne la consigne, puis la classe se déplace dans la cour pour modéliser la file d'attente ; l'enseignante a visiblement une idée préconçue sur la manière de résoudre le problème ; c'est elle qui apporte la modélisation et le problème d'écoulement. Mais elle différencie et aide les élèves en difficulté. Elle a coupé le problème en petits morceaux ; les élèves ont été très dynamiques, répondent bien mais semblent avoir perdu le but global.

Concernant la formation, la séance est bien structurée ; la différenciation apparaît, les problèmes de vocabulaire peuvent être illustrés. Mais quel est objectif réel de la séance ?

Concernant l'activité de l'élève, les élèves apparaissent dynamiques, volontaires, réagissant aux questions de l'enseignante. Mais les réalisations restent locales, avec peu d'initiatives. Y a-t-il eu appropriation du problème par les élèves ? L'enseignante a guidé les élèves, a extrait des éléments qu'elle attendait d'une élève en particulier, a structuré différents moments où les élèves n'ont eu que des tâches locales à traiter : un problème déstructuré au final.

Il reste des points positifs pour l'enseignante : différenciation, en particulier, pour un public spécifique. Comme retombées pour la formation, on observe les éléments suivants : une enseignante qui structure les séances, gère la classe, différencie ; les problèmes avec le vocabulaire, par exemple temps/durée ou compter/dénombrer ; les problèmes avec la gestion du tableau : des informations de natures différentes sont mises au même niveau. Quels sont les objectifs pour les deux séances ? Modélisation ? Groupements par 10 ?... Concernant le problème posé et son usage en formation, quels sont les objectifs et pour quels niveaux ?

En formation, quel est le statut de l'observateur qui visionne la vidéo ? Ce statut conditionne la façon dont on regarde la vidéo. Tout ne peut pas être pris en compte et analysé en un visionnage.

Il y a un temps relativement long passé dans la cour pour travailler la modélisation : mais la modélisation de l'écoulement est délicate et problématique. Il est possible que le passage par la cour vise à aider les élèves à représenter des objets (longueur de 20 m, file d'attente, écoulement de la file d'attente) pour ensuite aider à construire une modélisation empirique du problème. Le problème de l'activité des élèves dans ces passages par la cour est difficile à évaluer : certains élèves paraissent inactifs ; que retiennent-ils vraiment de ces moments dans la cour ?

Dans l'atelier le regard est orienté, plutôt critique et négatif, alors qu'il y avait quand même des choses positives dans l'action enseignante.

Le problème aurait pu être résolu entièrement par empirisme, donc il y a questionnement sur la nécessité d'une résolution mathématique. La question posée (temps d'attente) n'en est pas une, c'est un problème à part entière nécessitant la mise en place de sous-problèmes. La légitimité de la résolution mathématique n'est pas évidente. L'aller-retour entre problème et réalité ne permet-il pas de se passer d'une modélisation mathématique ? En modélisation, il n'y a pas toujours nécessité d'une résolution mathématique. D'abord, qu'est-ce qu'une résolution mathématique ? On peut comparer des résolutions qui utilisent les mathématiques ou pas.

La mise en œuvre de la première tâche " la file d'attente " montre que cette tâche est peut-être trop complexe pour une classe de CP (difficulté à concevoir l'écoulement de la file d'attente) et trop ouverte (beaucoup de données sont à préciser à partir d'hypothèses qu'il faudrait valider, ce qui n'est pas toujours aisé pour des élèves de CP). Examinons une autre tâche qui pourrait paraître plus simple.

2 Lecture à la maternelle

La classe de CP est la même que la classe précédente. La tâche proposée ici a été mise en œuvre après la tâche présentée précédemment. L'énoncé de la tâche précédente avait été négociée avec l'équipe du projet LEMA : la tâche est apparue trop complexe pour une classe de CP. L'énoncé de cette nouvelle tâche a été conçue entièrement par le professeur en charge de la classe : elle apparaît plus simple (ce qui n'empêche pas cette tâche de rester complexe et à plusieurs étapes) et mieux ancrée dans la vie de la classe. La vidéo rend compte de la tâche suivante effectuée fin juin : "La classe de CP va lire un nouveau livre à la maternelle. Combien de pages chaque enfant va-t-il lire ? " Il est à noter que les élèves avaient l'habitude d'aller lire une histoire dans la classe maternelle voisine mais c'était la première fois qu'était explicitement posé le problème du partage des pages à lire. Les objectifs visés par les séances sont : résoudre un problème de modélisation. La vidéo dure 22'23 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Présentation de la tâche (0’20)

Vérification de la compréhension de la tâche (0’50)

Consignes de travail en groupes (1’54)

Que chercher dans le groupe ? (2’02)

Matériel pour élève malvoyant (2’53)

Travail en groupes

Comptage des pages en groupes (3’02)

Nombre de pages à lire (3'51)
Nombre d'enfants (4'45)
Comment partager ?
Représentation par un dessin (4'55)
Représentation avec des cubes (5'03)
Représentation par un calcul (5'12)
Dans un groupe : partager 48 pages entre 17 enfants (6'38)
Comment distribuer les pages aux enfants ? (6'43)
Cubes pour représenter la distribution (1 cube = 1 page) (7'24)
Distribution 2 par 2 (8'06)
Traitement du reste (8'41)
Distribution 3 par 3 (8'59)
2 pages chacun : il en reste 3 pages chacun : il n'y en a pas assez. (10'05)

Autre groupe distribuant 48 pages à 17 enfants (10'25)
Chaque enfant commence par lire 1 page (10'26)
Utilisation de cubes pour distribuer les pages (11'30)
3 distributions de 1 page par enfant (12'20)
Il manque des pages (13'38)

Groupe utilisant la bande numérique (14'46))
Un élève propose de distribuer 4 pages par élève (14'50)
Utilisation de la bande numérique et de cubes (1 cube marque 1 nouvel élève sur la bande numérique qui compte les pages) (15'33)
Il reste 5 enfants sans pages à lire (15'53)
Distribution de 2 pages par élève (16'50)
Il reste des pages sans élèves pour les lire (17'00)
Distribution de 3 pages par élève (17'07)
Il reste 1 enfant sans pages à lire (17'23)

Travail collectif : bilan des groupes (17'32)
Nombre de pages (17'35)
Phase de validation d'une distribution de 2 pages par enfants (18'39)
Phase de validation d'une distribution de 3 pages par enfants (19'53)
Fin (22'23)

Analyse de l'activité de l'élève

En remarque initiale nous regrettons notre tendance à observer plutôt le travail de l'enseignante que celui des enfants ; et l'autre tendance qui consiste à chercher d'abord les défauts. Une lecture va être organisée par les CP pour les maternelles. Cela a déjà été fait, mais cette fois-ci, les enfants vont devoir se les partager eux-mêmes : la situation est pleine de sens.

La consigne orale est la suivante : " Combien de pages chaque enfant va lire ? Est-ce que certains vont lire beaucoup, d'autres moins ? "

Il y a vérification de la compréhension de la consigne. Les enfants suggèrent de compter le nombre de pages pour se les répartir. Un élève est non-voyant et dispose d'une version braille reproduite en photocopies : la modélisation est déjà faite, elle dit : « Si j'ai trois pages, est-ce qu'il y en aura assez pour que les autres aient trois pages ? »

Pauline a dit que ce n'était pas juste que certains en aient plus que d'autres avec forte induction de la maîtresse. Le montage ne fait pas apparaître la discussion sur un partage équitable ou non : pourquoi ceux qui aiment lire ne pourraient-ils pas lire davantage de page que les autres ? Finalement, la maîtresse suggère de choisir l'équirépartition. On voit ici un des problèmes du montage : on ne connaît pas le vrai minutage de l'activité (certainement des choix éditoriaux faits et des « sacrifices »).

Les élèves comptent les pages et obtiennent des résultats différents.

Des procédures de comptage différentes, utilisant ou non des cubes, qui représentent pour certains les enfants et pour d'autres les pages. La maîtresse induit fortement que le cube est le modèle de l'enfant. Et elle dirige le travail du jeune garçon. Est-ce parce que le groupe a du mal à commencer ?

En termes d'apprentissage, quel est le bilan pour les élèves ? Qu'ont-ils compris ? Qu'ont-ils appris ?

Conséquences sur la formation

Des questions surgissent pour la formation.

Il y a des changements importants entre la question initiale et la suite des activités : il faut se mettre d'accord pour répartir, pour partager équitablement. Comment négocier ces changements ?

On peut se demander ce qui est induit par la maîtresse : par exemple, la distribution des cubes pour représenter les pages et mettre en œuvre la procédure de distribution, le choix de la quatrième de couverture pour qu'il n'y ait pas de reste dans le partage équitable.

Concernant les groupes travaillant avec des cubes : tous les élèves travaillent-ils ? Comment est-ce choisi ?

Les étudiants seraient sans doute étonnés de voir qu'une telle activité peut être menée et en plus qu'il y a diverses manières de mener les groupes.

Quelle longueur maximale d'une vidéo à regarder avec des étudiants ? Vaut-il mieux un extrait entier et complet sans montage ? Un montage avec des choix de sacrifices et d'intitulés des épisodes ? Le montage n'aide pas à savoir d'où viennent les procédures observées, induites ou pas par l'enseignante.

Dans la réalité, il y avait deux maîtres, le maître formateur et le professeur qui partage la classe avec le maître formateur lorsque celui-ci assure des formations. Dans les différentes utilisations de cette vidéo, on pourrait axer l'observation sur les différentes « postures » de l'enseignante. Il paraît souhaitable de fractionner la vidéo en plusieurs extraits pour un total maximal de 15 minutes. Concernant le partage, l'enseignante insiste trop sur le fait qu'il faut absolument que ça tombe juste. En formation on peut illustrer la nécessité de prévoir des aides.

3 Le géant

La tâche du géant est la première tâche mise en œuvre par le groupe français du projet LEMA. Cette tâche a été mise en œuvre en mars dans une classe de CM1 où la proportionnalité n'a pas encore été abordée. L'énoncé de la tâche est le suivant :

" Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo[4] a été prise dans un parc de loisirs. "

Les objectifs visés par les séances sont : résoudre un problème en lien avec la réalité pour lequel les élèves doivent formuler des hypothèses pour construire un modèle ; utiliser le modèle de proportionnalité. La vidéo dure 17'47 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Support de l'énoncé du problème (0'40)

Le professeur distribue cette photo aux élèves accompagnée de la question écrite suivante :

Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo a été prise dans un parc de loisirs.

Prise de connaissance du support du problème avec notamment pris en compte de handicaps (1'02).

Préparer le matériel tôt à l'avance (ici le centre braille).

Essayer d'anticiper les problèmes que peut poser le matériel.

Compréhension du problème (1'23)

Reformulation précise.

Ne pas orienter les élèves

Travail individuel (2'40)

Mise en commun (3'00)

Reprises du travail de groupes (5'45)

Rôle du professeur dans le groupe (8'19)

Travail autonome sans le professeur (10'25)

Le professeur dans un autre groupe (11'00)

Présentation des solutions trouvées (11'58)

Difficulté des élèves à communiquer leurs solutions (confusion)

Reformulation du professeur (12'48)

Une autre solution (13'34)

Le lendemain synthèse des solutions précédentes (15'08)

Rédaction écrite individuelle (16'40)

Analyse de la vidéo

La vidéo présente des phases uniquement positives : on ne voit pas de phases de recherches improductives. La modélisation est imposée par l'enseignant. L'objectif de la séance n'est pas clair : proportionnalité ? modélisation ? Les débats entre élèves sont riches et montrent leur capacité à mobiliser leurs connaissances. En formation on peut travailler sur l'ouverture des problèmes et éventuellement sur la problématique de la proportionnalité. Il faut également clarifier le lien entre mathématiques, réalité et pseudo réalité. Dans l'activité des élèves, un moment important apparaît lorsque les élèves demandent dans leur groupe une preuve formelle d'une réponse plutôt qu'aléatoire, à propos d'un pied de 45 m. On trouvera une analyse approfondie de cette mise en œuvre dans (Cabassut, 2009).

4 Le bouchon

La tâche du bouchon est proposée dans la même classe de CM1 que la tâche précédente, mais en fin d'année au mois de juin. L'énoncé de la tâche est le suivant. " Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre La Vigie et Baggersee. "

[4] Photo publiée avec Copyright Richard Phillips 2001/2009 www.problempictures.co.uk

Dans un premier temps il n'est pas précisé de question mais la question attendue par le professeur est : Combien de véhicules sont bloqués ? Les objectifs visés de la séance sont : résoudre un problème en lien avec la réalité pour lequel les élèves doivent formuler des hypothèses pour construire un modèle ; utiliser le modèle multiplicatif. La vidéo dure 25'51 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Présentation de l'énoncé (0'42)

Recherche de questions (1'02)

Travail individuel sur le cahier d'essais (1'21)

Mise en commun des questions trouvées (1'35)

Travail individuel (2'51)

Mise en commun des idées (3'12)

Travail en groupe (3'52)

Autres groupes (4'14)

Recherche de la longueur d'une voiture (13'30)

Recherche de la distance entre les deux sorties (14'38)

Relance collective (15'02)

Travail en groupes (16'06)

Comparaison des affiches des groupes (16'44)

Bilan (24'54)

Analyse de la vidéo

Ici le choix initial du maître est de ne pas poser de question et de demander aux élèves de rechercher des questions relatives à la situation, la question attendue concernant le nombre de voiture prises dans le bouchon. Ce type d'activité de l'élève peut l'entraîner à repérer la problématicité d'une situation et à prendre conscience de la diversité des points de vue sur cette problématicité. Cette mise en activité des élèves autour de la question est intéressante. La difficulté est qu'il n'est pas sûr que la question attendue sorte, et que dans le cas où plusieurs questions sortent, ce sera au professeur d'orienter vers la question attendue, en opposition au principe de dévolution du choix de la question aux seuls élèves. On peut également adopter la question choisie par les élèves après débat, mais ce choix peut engager le maître dans un scénario qu'il peut ne pas avoir anticipé, avec les risques de déstabilisation du professeur. On voit bien qu'aucun choix n'est idéal. Le choix de la question est une option du degré d'ouverture de la situation de modélisation. De manière plus générale, l'ouverture d'une situation peut s'effectuer au niveau de la question, au niveau des données, au niveau de la procédure de résolution.

Dans la situation du bouchon, l'ouverture au niveau des données se caractérise ici par le fait que la seule information donnée concernant le bouchon est qu'il se situe sur l'autoroute, entre les sorties La Vigie et Baggersee et dans la direction La Vigie et Baggersee. Dans la vidéo, on voit des élèves en activités pour rechercher la distance Baggersee - La Vigie : la procédure trouvée pour obtenir cette distance est de consulter le site internet Mappy. Une autre procédure avait été envisagée mais non retenue : consulter une carte routière.

Le choix de la question est également déterminant et peut être une variable importante de la situation. Dans les mises en œuvre de la tâche proposée en Allemagne décrites dans (Cabassut, 2007), la question était " combien de voitures y a-t-il dans le bouchon ? " à l'école primaire et " combien de personnes sont prises dans le bouchon ? " à l'école secondaire. Pour l'école secondaire, la complexité est augmentée. On remarquera que pour le problème de la file d'attente au CP, on aurait pu poser la question " combien de personnes sont dans la file d'attente ? ". En posant la question " combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ? " on oblige non seulement à modéliser une file d'attente mais également son écoulement, ce qui augmente la complexité du problème.

III - DISCUSSION GÉNÉRALE

1 La modélisation comme objectif visée pour l'activité des élèves

Un des objectifs du projet LEMA est de promouvoir un enseignement de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques dès l'école primaire, en considérant qu'un problème de modélisation est un problème ouvert, à plusieurs étapes et complexe, en lien avec la réalité, et utilisant les mathématiques pour sa résolution. Conformément au cycle de modélisation évoqué précédemment, il s'agit donc de promouvoir dans les activités des élèves les activités de construction d'un modèle mathématique, de résolution du problème du modèle mathématique, d'interprétation de la solution mathématique, et de validation de la solution réelle du problème réel, avec comme activités transversales des activités de communication. Les programmes français de l'école primaire ne placent pas la résolution de problèmes complexes ou à plusieurs étapes comme une compétence exigible dès le CP, ce qui signifie que les compétences travaillées sont d'abord des compétences fréquentées et qu'elles deviendront exigibles plus tard en fin de cycle 3. On garde également à l'esprit que l'objectif de maîtrise de la preuve mathématique se situe au collège, mais il paraît intéressant de le préparer dès l'école primaire, dans les activités des élèves, en différenciant les modèles mathématiques des modèles non mathématiques, les arguments mathématiques des arguments non mathématiques. Certains pensent que les activités transversales du type résolution de problèmes, modélisation ou démonstration n'ont pas à être des objets d'enseignements, même si elles sont présentes dans l'enseignement : le débat reste ouvert en l'absence de programmes scolaires explicites sur cette question.

Il n'y a pas d'objectif d'apprentissage d'une notion mathématique nouvelle, même si dans le problème du géant les élèves découvrent des situations de proportionnalité non encore étudiées en classe, et même si dans chaque vidéo, des notions mathématiques anciennes sont mobilisées et exercées, par exemple les problèmes multiplicatifs dans le bouchon, ou la lecture à la maternelle. Il est délicat d'évaluer l'atteinte de ces objectifs et un travail intéressant de formation serait de travailler sur des critères opérationnels d'évaluation comme suggérés dans (Cabassut, Villette, 2010). On peut observer dans la vidéo sur le bouchon que des élèves font référence au problème du géant, travaillés précédemment dans l'année. Ces élèves ont donc bien repéré les caractéristiques de ce type de tâche et ont bien compris un contrat didactique implicite, avec la mise en jeu de compétences distinctes des compétences habituelles mises en œuvre par exemple dans des situations d'application directe de connaissances.

2 La distinction entre fait et hypothèse à travers l'activité de l'élève

Commençons par préciser que les choix de terminologie sont toujours délicats car suivant le " monde ", mathématique ou réel, le même mot peut avoir des sens différents. D'abord le mot " fait " est plutôt relié à la réalité, à une action ou un état réalisés. Par exemple sur la photo l'homme à l'avant mesure environ 7 cm. Ou encore, dans la tâche de la file d'attente, la file d'attente a 20 m de longueur. On pourrait définir un fait comme une donnée imposée par la situation initiale, et qui n'est pas contestable, c'est-à-dire qui est considérée comme vraie par tous. On voit qu'on peut pinailler sur cette définition, en remarquant que ce qui n'est pas contestable dans une première approche, peut le devenir après une réflexion plus approfondie, ou encore qu'il faudrait définir la notion de vérité, que ce qui s'impose à un professeur ne s'impose pas toujours à un élève et réciproquement.

On appelle hypothèse une donnée sur la situation initiale, qu'on suppose vraie, sans que cette vérité s'impose incontestablement. Par exemple, dans la situation du géant, une hypothèse est qu'un géant est un agrandissement d'un homme, ou encore que dans l'ensemble des hommes, la proportion d'un pied par rapport à la taille est approximativement constante. Dans la tâche du bouchon, le nombre de voies de l'autoroute peut constituer une hypothèse, ou la répartition des camions par rapport aux voitures. Des élèves font l'hypothèse de trois voies de circulation. Il n'y a pas validation de cette hypothèse si ce n'est par recours à des témoignages (souvenirs des élèves ayant parcouru l'autoroute). On aurait pu valider en utilisant un logiciel du type Googlemaps qui permet de visualiser des photographies aériennes de tronçons d'autoroute. Ce qui est typique des activités des élèves en situations de modélisation, c'est qu'ils doivent trouver les données manquantes en développant des procédures qui ne sont pas de type mathématique (mais plutôt du type de celles des sciences expérimentales) ou en posant des hypothèses (qui sont la plupart du temps validées par des procédures non mathématiques). Dans les formations ou débats avec des enseignants ou des mathématiciens, l'ouverture de la situation quant aux données déstabilise : on qualifiera souvent ces situations de modélisation de mal posées ou ne relevant pas de problèmes mathématiques, pour lesquels certains considèrent que toutes les données doivent être précisées tout comme les questions. Dans les activités des élèves observées dans la vidéo, une difficulté récurrente est relative à la collecte des données. La plupart du temps la validation de la collecte est pragmatique : les faits rassemblés ou les hypothèses posées sont bonnes puisqu'elles permettent d'avancer dans la résolution du problème. C'est le cas pour le choix du nombre de voies sur l'autoroute, ou encore sur le fait que sur une des voies il n'y a que des camions et sur les autres des voitures, ou encore sur la longueur d'un camion ou d'une voiture. Il faut donc apprendre à valider les données, souvent par des arguments et des procédures extra-mathématiques relevant essentiellement des validations expérimentales ou par débat.

IV - CONCLUSION

Pour la création et la diffusion de ressources vidéos centrées sur l'activité de l'élève

L'atelier a montré que les participants étaient très centrés sur l'analyse de l'activité de l'enseignant dans les extraits vidéos utilisés. Pour justifier cette difficulté à analyser l'activité de l'élève, il a été remarqué que les ressources proposées dans l'atelier présentent un montage d'extraits de séances, permettant d'avoir un aperçu global d'une séance, en privilégiant les moments productifs des élèves et en centrant souvent sur l'activité de l'enseignant. Il manque donc, pour la formation, des vidéos qui permettent de suivre la genèse des procédures des groupes d'élèves. Avec le montage des extraits de leur travail, il manque le déroulement complet d'une idée, de sa naissance à sa mise en œuvre. Il serait donc intéressant de collecter ou de créer des ressources disponibles à tous[5] dont la fonction principale serait d'observer et d'analyser l'activité de l'élève.

Pour une formation à des cadres théoriques et méthodologiques partagés pour analyser l'activité de l'élève

Les participants devaient partager des critères de description et d'analyse de l'activité de l'élève, en précisant les fonctions de l'activité, la structure de l'activité, les prescriptions, les initiatives, les aides, les difficultés, les obstacles, les erreurs. Ils devaient préciser des variables de l'activité de l'élève : contenu mathématique, scénario global, tâches précises, formes de travail, accompagnements en classe. Il a été difficile de trouver des éléments communs de description de cette activité. Ceci montre le besoin de formation à l'analyse de cette activité. Les cadres généraux de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations didactiques ou de la double approche, mentionnés par (Robert 2004) ou (Roditi, 2006), pourraient être utilisés pour cette formation. Les productions récentes des colloques de la

5 Une autre difficulté est l'accès restreint de certaines ressources, comme par exemple les ressources vidéos qui ne sont disponibles que dans l'intranet d'une université, ce qui limite l'accès aux membres de cette université. Cette restriction s'explique par la volonté des familles d'élèves de protéger l'image de leurs enfants.

CORFEM[6] et COPIRELEM[7], et du symposium CADIVAM[8] seront à étudier et à adapter éventuellement à l'enseignement primaire pour proposer cette formation à l'analyse de l'activité de l'élève.

Éléments génériques de l'activité de l'élève

Les activités d'élèves observées sont illustrées dans trois modalités de travail : individuelle, en groupe, et en collectif. On peut y observer des élèves dynamiques et productifs. Sans l'intervention de l'enseignant, l'auto-validation peut apparaître : élève annulant sa production en barrant ce qu'il a inscrit sur sa feuille de papier, position contestée ou défendue en groupe. Dans ces cas, du fait de la non intervention de l'enseignant, certains arguments ne sont pas suffisamment explicites et il est difficile de les reconstituer. Lorsque l'enseignant intervient dans l'activité de l'élève, il est difficile de limiter son intervention à une régulation du débat ou à une demande d'explicitation d'arguments, qui laisserait la dévolution du problème aux élèves. Il peut parfois paraître nécessaire à l'enseignant de réorienter ou d'accélérer l'activité des élèves pour respecter notamment les contraintes de temps qu'il s'est fixées, ou de maintien de la participation et de l'attention des élèves. Il serait intéressant, pour la formation, de pouvoir illustrer ces différents moments, qu'ils soient positifs ou négatifs pour le déroulement de l'activité de l'élève, afin d'étayer les formations à la préparation, au déroulement et à l'évaluation de l'activité de l'élève. On revient au besoin en ressources vidéos spécifiques à une formation à l'analyse et au développement de l'activité de l'élève.

Éléments spécifiques à la modélisation

Les activités d'élèves doivent gérer les validations extra-mathématiques inhérentes au cycle de modélisation. La double transposition de la validation mathématique et de la validation extra-mathématique (décrite dans Cabassut - 2009) devient donc un enjeu de formation : préparer des scénarios d'activités d'élèves intégrant cette double transposition, la réguler lors du déroulement de l'activité et l'évaluer. D'autres éléments qui conditionnent l'activité de modélisation de l'élève doivent être développés : l'ouverture de l'activité (données, questions, procédures), le lien avec la réalité, la familiarité avec le contexte de la tâche, la complexité de la tâche, et la disponibilité de modèles mathématiques qui permettront de décomposer la tâche. À l'instar du projet de formation LEMA (www.lema-project.org), il faut donc développer et évaluer des formations à la modélisation qui prennent en compte ces éléments favorisant l'activité de modélisation de l'élève.

Le prochain colloque de la Copirelem pourrait être l'occasion d'étudier ces formations au développement de l'activité de l'élève et leurs évaluations.

V - BIBLIOGRAPHIE

CABASSUT R. (2007) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? in *Actes du XXXIII^{ème} Colloque Copirelem*, IREM de Paris 7.

CABASSUT R. (2008) Problèmes dans un exemple de formation continue à la modélisation, in *Actes du 35e Colloque Copirelem*. IREM de Bordeaux.

[6] Le colloque de la CORFEM s'est réuni à Besançon les 16 et 17 juin 2011 sur le thème « L'enseignement des grandeurs au collège et au lycée. Quelle utilisation des vidéos dans la formation initiale ou continue ? » http://www.fcomte.iufm.fr/conferences_colloques_seminaires/colloque_corfem_2011/annonce_corfem_besancon_2011.pdf

[7] Le colloque de la COPIRELEM s'est réuni à Dijon des 22 au 24 juin 2011 sur le thème " Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants" http://www.copirelem.free.fr/presentation.php

[8] Le symposium CADIVAM s'est réuni à Lausanne du 23 au 25 juin 2011 sur le thème "Filmer en classe, et après ? La vidéo dans les leçons de maths et de sciences" http://www.hepl.ch/fileadmin/promcom/images/Actualites/cadivam/HEP_CADIVAM_LIVRET_DEF_TC_DEF.pdf

CABASSUT R.(2009) Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation, in *Actes du colloque Didirem " Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? "* Université Paris 7.

CABASSUT R. VILLETTE J.-P. (2010) Evaluation en formation de professeurs sur l'enseignement de la modélisation, in *Actes du 37ème Colloque Copirelem.* IREM de Montpellier.

KUZNIAK A. & al. (2008) Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique. *Cahier Didirem n°58.* IREM de Paris 7.

PISA (2006) *Assessing scientific, Reading and mathematical literacy: a framework for PISA.*OECD.

ROBERT A. (2003) *Analyses de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités de l'élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré).* Cahiers Bleus n°2. IREM de Paris 7.

ROBERT A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspectives en formation d'enseignants. *Petit x* 65, 52-79. IREM de Grenoble.

RODITI E. (2006) Les analyses de vidéos : outils de recherche et moyens de formation, in *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

SITUATIONS DE « RÉFÉRENCE » POUR ENSEIGNER LE NUMÉRIQUE AU CYCLE 2

Laetitia BUENO-RAVEL
MCF, IUFM DE BRETAGNE-UBO
CREAD – IREM de Rennes
Laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr

Gabriel LE POCHE
PIUFM, IUFM DE BRETAGNE-UBO
IREM de Rennes
Gabriel.le-poche@bretagne.iufm.fr

Résumé

L'atelier s'appuie sur le travail d'un groupe de l'IREM de Rennes dont l'objectif est de construire une ingénierie (Artigue, 1990 et 2011) d'enseignement du numérique au cycle 2. L'ensemble des dix situations (reprises d'anciens travaux de l'IREM, de l'INRP, ou de l'IUFM de Bretagne) constituant cette ingénierie ont été retravaillées afin d'être mises en œuvre selon un dispositif original.
Deux situations devaient être soumises à l'analyse des participants (appui sur des travaux d'élèves ou d'extraits vidéos de séances) : « La Marionnette », portant sur la perception par paquets des éléments d'une collection en GS et en CP (Le Poche, 1993 ; Hili et Ruellan-Le-Coat, 2009) et « Règles et réglettes », portant sur des procédures de calculs de sommes ou de différences en CE1 (Oyallon, 1991). Seule la seconde a fait l'objet d'une analyse.
Ces analyses et les échanges qui suivent s'attachent à questionner principalement les points suivants : l'adéquation entre le dispositif choisi et les objectifs de différenciation affichés ; le fait que ces situations puissent être qualifiées de situations de« référence » ; etc. Nous ouvrons la discussion sur les modalités de formation continue qu'il conviendrait de mettre en œuvre si l'on souhaite diffuser de telles situations.

Nous débutons ce texte par une brève présentation de l'ensemble des dix situations de « référence » que nous avons retenues car nous permettant d'aborder les aspects essentiels de l'enseignement du numérique au cycle 2. Nous revenons à cette occasion sur les raisons de ce choix de situations, ce point ayant été discuté lors de l'atelier. Nous exposons ensuite la situation « Règles et réglettes », appelée « Jeu des règles et des bracelets » par Oyallon (1991), qui a servi de base au travail dans l'atelier. Nous commençons par donner des éléments d'analyse de cette situation travaillant un des aspects de la soustraction. Nous montrons ensuite comment nos conceptions sur l'enseignement–apprentissage (Brousseau, 1998) des mathématiques, notamment au sujet de la différenciation et du rôle de l'enseignant, nous ont conduits à adopter un dispositif de mise en œuvre original de cette situation ainsi que de l'ensemble des dix situations de « référence ». Le travail de l'atelier s'est appuyé sur la description du « Jeu des règles et des bracelets » d'Oyallon (1991), des extraits vidéos de la situation « Règles et réglettes » expérimentée en 2010-2011 dans une classe de CE1 ainsi que les travaux des élèves de la classe filmée.

Le texte ci-dessous prend en compte les réactions des participants à l'atelier. Nous remercions d'ailleurs particulièrement les deux rapporteurs de l'atelier pour leur travail enrichissant.

I - LES DIX SITUATIONS DITES DE « RÉFÉRENCE »

Le groupe « Situations de référence pour enseigner le numérique en cycle 2 » a été créé en 2009-2010 à l'IREM de Rennes avec un double objectif de formation et de recherche. Il s'agit d'examiner les potentialités de dix situations dites de « référence » pour favoriser l'enseignement–apprentissage du numérique en cycle 2, afin d'aboutir à une ingénierie (Artigue 1990, 2011) pour l'enseignement du numérique en cycle 2 et à une version de cette ingénierie « communicable » en formation continue des professeurs des écoles. Ces dix situations faisaient déjà l'objet d'une diffusion en formation initiale et continue par l'un des membres du groupe IREM. Nous avons voulu, par le travail du groupe, les décrire et les analyser finement tout en les expérimentant dans des classes ordinaires pour voir si ces situations méritaient d'être portées en formation et, si cela est le cas, produire des ressources pour accompagner ces formations.

Les dix situations sont les suivantes : S1 : Voitures et Garages ; S2 : Le TGV ; S3 : La marionnette ; S4 : Carrelage ; S5 : Trésor ; S6 : Calculette ; S7 : Cartoucherie ; S8 : La boîte ; S9 : Règles et réglettes et S10 : Grilles. Une présentation des objectifs de ces dix situations, de la programmation ainsi que de leur origine est donnée en annexe 1[1].

1 Comment ces situations ont-elles été choisies ?

Ces dix situations ne sont pas des situations nouvelles. Certaines sont anciennes et tirées de travaux de l'IREM de Bordeaux, d'ERMEL ou de la COPIRELEM. D'autres n'ont pas été publiées mais diffusent parfois en formation. Ce choix de situations est bien évidemment discutable. Comme cela a été souligné lors de l'atelier, il peut donner l'effet d'un patchwork plus ou moins cohérent. En effet, dans les publications de chacune de nos trois sources principales (IREM de Bordeaux, Équipe ERMEL, COPIRELEM), on trouve un ensemble de situations permettant de travailler les objectifs de l'annexe 1. Mais le choix de ces dix situations a été fait en liaison avec le dispositif de mise en œuvre particulier[2] que nous souhaitions expérimenter. Ces dix situations ont été choisies car elles sont toutes des situations de construction de connaissance auto-validantes. Le fait que ces situations soient auto-validantes s'inscrit dans une position didactique assumée sur le rôle de l'enseignant en classe : selon nous, lors de situations de construction de connaissance, l'enseignant doit être disponible pour les élèves ayant le plus besoin de soutien, les autres travaillant en autonomie, sous son contrôle. Ainsi, pour les dix objectifs retenus, nous avons choisi les situations qui s'adaptaient le mieux à notre dispositif.

2 Pourquoi ces situations sont-elles dites de « référence » ?

Nous avons choisi le terme de « référence » pour qualifier ces situations car il nous semble qu'il permet de désigner le rôle que peuvent avoir ces situations pour l'enseignant ainsi que pour les élèves.

Pour l'enseignant, ces dix situations sont dites de « référence » car en mettant en place ces dix situations, il traite la quasi-totalité des connaissances à construire en numérique en cycle 2.

Pour les élèves, ces dix situations sont dites de « référence » car ce sont celles auxquelles on se réfère en classe, pendant l'ensemble du cycle 2, pour la quasi-totalité des connaissances à construire en numérique. Ces situations ont également un statut particulier pour les élèves car, comme nous le verrons lors de la description du dispositif, ces derniers possèdent pour chacune d'elles un dossier spécifique.

[1] La programmation de ces situations est en cours de travail et leurs noms ne sont pas encore fixés, notamment pour les situations non publiées.

[2] Pour une description détaillée du dispositif, voir partie II.

Pour les formateurs et chercheurs en didactique des mathématiques, l'analyse des dix situations de « référence » montre que celles-ci ont un fort potentiel adidactique (Brousseau, 1998). Nous préférons cependant éviter ce terme : « adidactique » en formation car il véhicule malheureusement souvent beaucoup d'idées fausses sur le rôle de l'enseignant lors de la gestion de ce type de situations en classe.

Nous avions initialement prévu de présenter deux situations pendant l'atelier : « La marionnette » et « Règles et réglettes ». Mais du fait des débats nourris suite à la présentation et à l'analyse de la situation « Règles et réglettes » et du dispositif de mise en œuvre, la situation « La marionnette » n'a pas été analysée. Nous renvoyons donc les lecteurs aux publications de Le Poche (1993) et de Hili et Ruellan-Le-Coat (2009) pour une analyse de cette situation et à la future brochure du groupe IREM en cours de rédaction pour une description de mise en œuvre de cette situation selon le dispositif travaillé par le groupe.

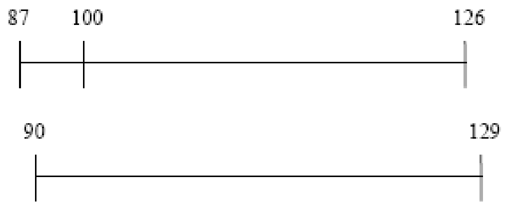
Nous allons maintenant faire une brève analyse de la situation « Règles et réglettes » avant d'exemplifier le dispositif sur une mise en œuvre de cette situation dans une classe de CE1 en 2010-2011.

II - LA SITUATION « RÈGLES ET RÉGLETTES »

La situation « Règles et réglettes » a été construite à partir de la situation « Jeu des règles et des bracelets » décrite par J-L. Oyallon (1991). Il s'agit, comme le souligne Oyallon, de travailler sur « l'aspect écart » de la soustraction. Cet aspect est présenté dans le contexte des nombres comme repères. Par ailleurs, « le jeu décrit ne nécessite pas la production d'une écriture (additive ou soustractive) de la part des joueurs. Il faudra transformer la situation de base (communication, abandon de la manipulation) pour nécessiter des écritures additives ou soustractives des nombres en jeu » (ibid., p. 34).

L'objectif est de faire acquérir aux élèves une procédure de calcul des écarts ; ici les « petits sauts ». Cette situation permet également, en prolongement, de travailler sur l'invariance de l'écart par translation. Nous faisons l'hypothèse que ces procédures de calcul pensé ne peuvent apparaître chez les élèves sans enseignement.

- le calcul de 126 – 87 peut s'effectuer, à l'aide d'un support écrit :



- en **calculant, à l'aide de « petits sauts », l'écart** entre les 2 repères 87 et 126 : 13 + 26 = 39

- en **effectuant une translation de l'écart** qui rend le calcul plus aisé : écart entre 129 et 90 soit 39.

Fig. 1 : Deux procédures de calcul pensé de 126 – 87 (Le Poche, 2010, p. 44)

Le matériel avec lequel les élèves travaillent est constitué d'une grande règle graduée, appelée règle, et d'une petite règle graduée, appelée réglette.

Sur la règle, se trouvent deux élastiques déplaçables. Pour reprendre l'exemple ci-dessus, pour l'écart entre 126 et 87, un élastique est placé sur 87 et l'autre sur 126. La règle sert donc à matérialiser l'écart.

Sur la réglette, il y a également deux élastiques mais l'un est fixé sur la graduation « 0 », le second est déplaçable. Dans le cas du calcul de l'écart entre 126 et 87, le second élastique de la réglette doit être mis sur la graduation « 39 ». Ensuite, les deux règles sont rapprochées et les écarts matérialisés sur les deux règles doivent coïncider. La réglette permet donc de mesurer l'écart marqué sur la règle et de valider le calcul de cet écart.

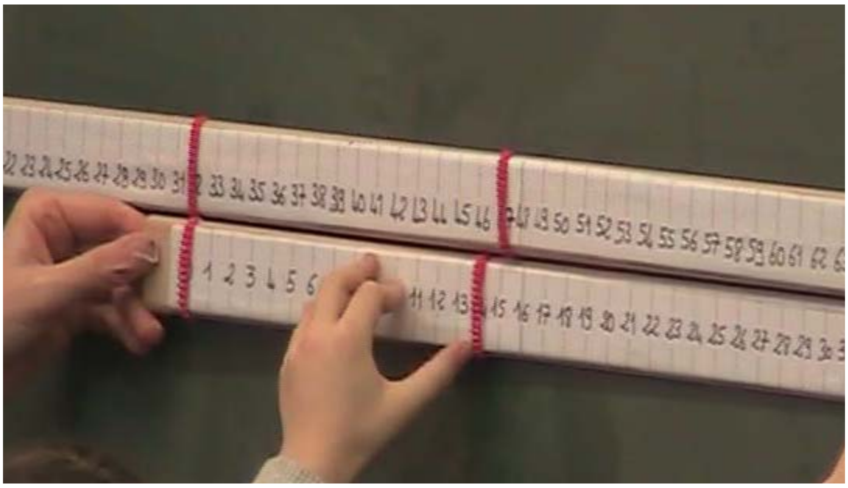


Fig. 2 : Exemple de validation au tableau avec la réglette du calcul d'un écart (ici, écart entre 32 et 47 ; écart trouvé par l'élève : 14 ; les élastiques de la règle et de la réglette ne coïncident pas)

Le jeu initial décrit par Oyallon (1991) se décline en quatre situations qui sont présentées en annexe 2. Dans la suite du texte, nous centrerons nos analyses sur la reprise par le groupe IREM de la situation 1.

1 Éléments d'analyse – Procédures d'élèves

Les participants à l'atelier devaient trouver des procédures élève pour la situation 1 (voir annexe 2) : il s'agit de déterminer l'écart entre 27 et 52.

Cinq procédures ont été proposées :

Procédure 1 : Essai-ajustement. Les élèves positionnent visuellement l'élastique mobile sur la réglette puis le déplacent pour faire correspondre les élastiques de la règle et ceux de la réglette.

Procédure 2 : Comptage de un en un des graduations entre 27 et 52 sur la règle. Soit l'élastique mobile de la réglette est déplacé progressivement (au fil du comptage), soit il est positionné sur la réglette à la fin du comptage.

Procédure 3 : Les élèves partent du « 0 » de la réglette et comptent (en déplaçant l'élastique) de la façon suivante : 0-27, 1-28, 2-29, …, 15-52

Procédure 4 : Procédure mixte de comptage et calcul.

Soit avec passage à la dizaine supérieure : $27 \xrightarrow{+3} 30 \xrightarrow{+10} 40 \xrightarrow{+10} 50 \xrightarrow{+2} 52$

Soit en ajoutant 10 puis en complétant de 47 à 52 : $27 \xrightarrow{+10} 37 \xrightarrow{+10} 47 \xrightarrow{+5} 52$

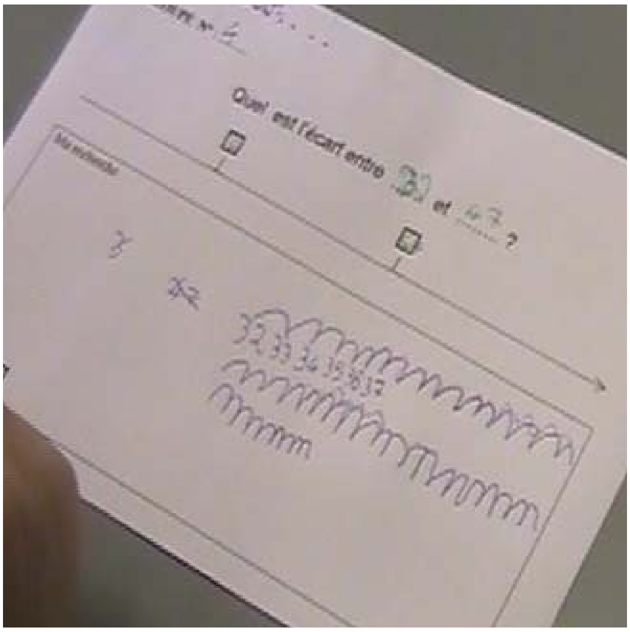
Procédure 5 : Procédure plus experte débouchant sur l'addition à trou : 27 + ? = 52. Que faut-il rajouter à 27 pour arriver à 52 ?

Il faut tout d'abord souligner que cette situation n'a pas été construite pour introduire une technique opératoire de la soustraction. La procédure experte attendue est la procédure 4 que l'on nommera par la suite procédure par « petits sauts ».

Les procédures 1, 2 et 3 ont permis d'entamer la discussion sur le rôle du matériel dans cette situation. La description du jeu produite par Oyallon (1991) ne précise pas explicitement à quel moment du jeu les joueurs ont accès aux règles et réglettes, même si l'extrait ci-dessous laisse supposer que le matériel n'est utilisé que lors de la validation du résultat :

> « Dans le jeu, l'enfant est autonome et peut faire évoluer ses procédures puisque la validation de son résultat est immédiate (situation adidactique, situation d'action, situation « fondamentale » pour la notion d'écart). » (Ibid, p. 34)

Dans la situation retravaillée par le groupe de l'IREM de Rennes, la consigne est écrite au tableau par l'enseignant et les élèves reportent les nombres proposés sur une fiche de recherche individuelle (voir fig. 3 ci-dessous). Ils ne doivent pas manipuler les règles et les réglettes avant d'avoir un résultat à proposer. Ils écrivent le résultat auquel ils sont arrivés sur leur fiche puis ils peuvent manipuler le matériel. Ils inscrivent alors les deux nombres proposés avec les élastiques mobiles sur la règle. Puis ils inscrivent leur résultat sur la réglette en déplaçant l'élastique mobile. Enfin, ils mettent bord à bord la règle et la réglette pour vérifier si leur résultat correspond à l'écart entre les deux nombres proposés.



Cette photo montre une fiche de recherche individuelle d'un élève ayant à trouver l'écart entre 32 et 47. Il fait des petits sauts de un à partir de 32 matérialisés par des petits ponts et inscrit à l'extrémité droite des ponts le nombre atteint. Il arrête d'écrire les nombres à 37 mais dessine 45 petits ponts.

Fig. 3 : photo d'une fiche de recherche individuelle d'élève.

Le fait de ne donner accès au matériel que pour la validation du résultat bloque les procédures 1, 2 et 3. Les élèves peuvent cependant utiliser des procédures utilisant les mêmes connaissances en dessinant les graduations sur leur fiche de recherche individuelle (la procédure 2 revient à faire des petits sauts de un). Cependant, nous faisons l'hypothèse que ces procédures se révèlent vite coûteuses et sources d'erreur lorsque l'écart à calculer est grand. L'analyse des travaux d'élèves distribués aux participants à l'atelier a confirmé cette hypothèse (voir notamment Fig. 3, ci-dessus). Après deux séances, l'ensemble des élèves utilise la procédure 4, avec quasi unanimement le passage par la dizaine supérieure comme le montre la photo ci-dessous et quelques élèves font parfois des sauts de 20 ou plus.

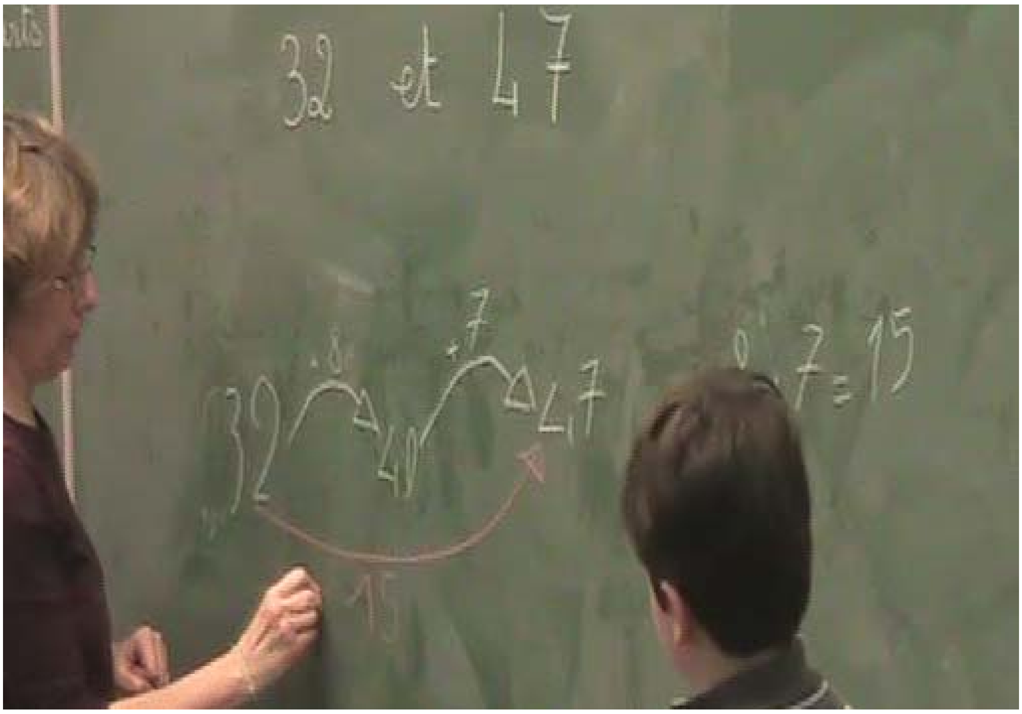


Fig. 4. : La procédure 4 avec passage à la dizaine supérieure faite au tableau par un élève, aidé de l'enseignante, pour le calcul de l'écart entre 32 et 47.

2 Le dispositif de mise en œuvre

Nous allons maintenant détailler le dispositif particulier que nous adoptons pour l'ensemble des dix situations. Cette présentation prend appui sur la situation « Règles et réglettes » expérimentée dans une classe de CE1 en 2010-2011 ; la séquence est brièvement décrite en annexe 3. Nous rappelons que le dispositif choisi nous permet de faire en sorte que lors de situations de construction de connaissance, l'enseignant soit disponible pour les élèves ayant le plus besoin de soutien, les autres travaillant en autonomie, sous son contrôle.

Les dix situations proposées sont à peu près toutes mises en œuvre lors de séquences de huit séances. Les séquences sont organisées schématiquement en trois phases : une phase d'approche, une phase de construction de connaissance et une phase de consolidation qui occupe la moitié du temps consacré à la séquence.

2.1 Phase d'approche

Lors de cette phase, l'enseignant est amené à faire passer aux élèves une évaluation diagnostique avec obstacle afin de déterminer d'une part, quels élèves constitueront le groupe de soutien qu'il encadrera et d'autre part, les rôles à attribuer aux élèves qui seront dans les groupes travaillant en relative autonomie.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », l'évaluation diagnostique consiste à demander aux élèves de trouver, par exemple, l'écart entre 20 et 26, puis entre 42 et 57 et enfin entre 36 et 72. Les réponses des élèves permettent à l'enseignant de voir si tous les élèves comprennent ce qu'est un écart et quelles sont leurs procédures. L'enseignante a ainsi pu faire son groupe de soutien et prévoir les rôles (manipulateur, secrétaire et vérificateur) des élèves.

Cette phase peut également être l'occasion d'un temps de familiarisation avec le matériel qui va être utilisé dans la situation si cela est nécessaire.

Il est important de souligner que certaines de ces situations gagnent à être anticipées pour favoriser la compréhension des élèves.

Par exemple, dans le cas de la situation « Règles et réglettes », l'enseignante qui a expérimenté cette situation dans sa classe de CE1, a spécifiquement travaillé ce que signifie « être écarté », qu'il y a des « grands écarts » et des « petits écarts ». Elle avait demandé aux élèves de trouver des nombres qui ont pour écart 2, ou 5, etc. Par ailleurs, elle avait fait un travail important sur les compléments à dix en amont de la situation « Règles et réglettes » pour que les élèves puissent mettre en œuvre la procédure 4. Pendant la situation « Règles et réglettes », « la maison du dix » (voir ci-contre) était affichée dans la classe.

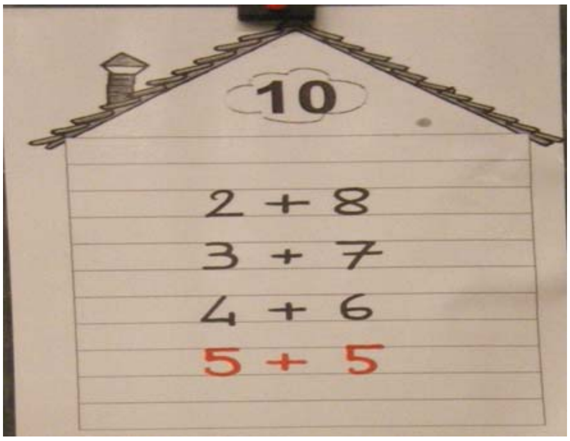


Fig. 5 : Affichage de la « maison du 10 » dans la classe de CE1 observée

2.2 Phase de construction de connaissance

Avant d'expliciter le contenu de cette phase, il faut préciser que lors des temps de construction de connaissance, les élèves travaillent par groupe[3] (en binôme en CP et en trinôme en CE1). Ils ont également un ensemble de fiches sur lesquelles ils auront à travailler : une fiche blanche (par exemple) de recherche individuelle, une fiche verte de réponse du groupe et un dossier ayant pour titre le nom de la situation dans lequel ils placeront leurs fiches de recherche individuelle ainsi que les synthèses et leurs fiches d'exercices d'entraînement.

La phase de construction de connaissance est organisée en trois temps : un temps d'appropriation de la tâche, un temps d'apprentissage et un temps de synthèse.

L'appropriation de la tâche est d'abord vécue de manière collective puis individuelle. Lors de **l'appropriation collective**, un groupe d'élèves réalise la tâche, sans obstacle, devant l'ensemble de la classe. Ils remplissent exactement les mêmes fiches que celles qu'ils auront à remplir lors de la phase d'apprentissage, ils vivent toutes les étapes de l'activité, en respectant les rôles prévus tout en utilisant un matériel grand format pour que les élèves observateurs puissent voir. Il s'agit d'amorcer la dévolution du problème aux élèves et de faire en sorte qu'ils s'approprient le dispositif et le matériel pour que cela ne fasse pas obstacle lors de la phase d'apprentissage.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », la consigne donnée était de trouver l'écart entre 10 et 17. Ce choix de valeurs numériques n'est pas un obstacle pour les élèves. Trois d'entre eux sont allés résoudre ce problème au tableau devant les autres élèves. Ils ont chacun rempli leur fiche de recherche individuelle (en inscrivant la date, leur prénom, leur recherche, leur réponse), puis ils ont discuté pour se mettre d'accord sur le résultat au tableau, devant les autres élèves. Le secrétaire a rempli la fiche verte du groupe. Ensuite le manipulateur a placé les élastiques mobiles de la règle grand format (voir fig.2 pour le matériel collectif) sur 10 et 17 puis l'élastique mobile de la réglette grand format sur 7 puis a rapproché les deux règles pour voir si les élastiques coïncidaient. Cette manipulation s'est faite sous l'œil du vérificateur qui doit vérifier si les élastiques ont été bien positionnés. Ensuite, ils constatent à trois que leur résultat est correct et le secrétaire marque sur la fiche du groupe qu'ils ont trouvé le bon résultat.

L'appropriation collective est suivie d'une **appropriation individuelle**. Il s'agit là encore de faire vivre aux élèves la tâche sans obstacle mais contrairement à l'appropriation collective, tous les élèves vivent la situation lors de l'appropriation individuelle. Cela permet de continuer la dévolution du problème et de s'assurer que tous les élèves se repèrent bien dans les différents temps de l'activité, comprennent leur

[3] La modalité de travail est un peu différente en maternelle (cf. situations 1 et 2). La phase de construction de connaissance de ces situations se fait généralement en atelier principal dirigé par l'enseignant.

rôle et savent quand remplir les différentes fiches. La classe est alors organisée en petits groupes qui seront ceux de la phase d'apprentissage et l'enseignant reste principalement avec le groupe de soutien.

Suite à l'appropriation collective puis individuelle de la tâche, les élèves sont confrontés à la même tâche mais avec obstacle : il s'agit de la **phase d'apprentissage**. Il est important que la tâche proposée aux élèves soit identique à celles qu'ils ont vues ou vécues lors de l'appropriation. Par un jeu sur les variables de la situation, ils sont confrontés à l'obstacle et doivent faire évoluer leurs procédures initiales pour pouvoir répondre à la question posée. Les valeurs des variables peuvent être différentes d'un groupe à l'autre, en fonction des résultats des élèves à l'évaluation diagnostique. Par exemple, les élèves du groupe de soutien ont souvent des nombres appartenant à un domaine numérique moins grand que le reste de la classe mais ils réalisent la même tâche, ce qui peut permettre à l'enseignant de prendre appui sur leur travail lors des mises en commun ou des synthèses. Une mise en commun est organisée au tableau ; l'enseignant ne fait pas passer tous les groupes, il favorise ceux ayant trouvé le bon résultat et les procédures permettant de faire évoluer celles des élèves n'ayant pas réussi à résoudre le problème.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », les variables pertinentes à modifier sont la taille de l'écart (au dessus ou au dessous de 10) et le choix des deux nombres dont il faut trouver l'écart (ont-ils le même nombre de dizaines ? le chiffre des unités du nombre a est-il inférieur ou supérieur à celui du nombre b ?). Dans la classe observée, l'enseignante a choisi de demander aux élèves quel est l'écart entre 32 et 47. Parmi les 6 groupes de 3 élèves travaillant en autonomie, un groupe n'a pas réussi à trouver 15 comme écart. Dans les autres groupes en autonomie, les élèves n'ayant pas trouvé le résultat ont été aidés par les autres. Le groupe en soutien a réussi à trouver le résultat avec un étayage fort de la part de l'enseignante. Lors de mise en commun du premier temps d'apprentissage, l'enseignante a fait passer deux élèves au tableau. Un des élèves a expliqué sa procédure (procédure 4 avec passage à la dizaine supérieure ; voir fig. 4) puis un second élève est venu présenter la sienne (procédure 4 avec ajout de 10).

Chaque temps d'apprentissage se termine par une **synthèse** qui s'appuie sur le travail fait en classe. Cette synthèse est menée soit à la suite du temps d'apprentissage, soit en différé afin de sélectionner les travaux significatifs. Elle est écrite ou complétée par les élèves et collée dans le dossier de la situation.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », la synthèse faite après le premier temps d'apprentissage reprend la procédure que l'on voit écrite au tableau dans la fig. 4 ci-dessus. Les deux procédures expliquées au tableau ont fait l'objet d'un affichage dans la classe et sont restées affichées lors du second temps d'apprentissage pour que les élèves qui en avaient besoin puissent s'y référer et s'en inspirer pendant leur recherche individuelle.

La phase de construction de connaissance ne se limite pas à un temps d'appropriation, suivi d'un temps d'apprentissage puis enfin d'un temps de synthèse. En effet, après la première synthèse, la situation est reprise, généralement avec une appropriation individuelle, etc. Si l'enseignant s'aperçoit que cela est nécessaire, il refait également une appropriation collective. Plusieurs temps d'apprentissage (et donc plusieurs synthèses) sont nécessaires pour arriver à ce que la plupart des élèves réussissent la tâche avec obstacle.

2.3 Phase de consolidation

Cette phase occupe près de la moitié du temps consacré à la séquence portant sur une situation. Les élèves ont à faire des exercices d'entraînement sur les connaissances construites. Ils se détachent progressivement du matériel utilisé lors de la phase d'apprentissage. Enfin chaque séquence se termine par une institutionnalisation et une évaluation.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », les élèves ont eu des écarts à calculer. Les règles et les réglettes étaient tout d'abord à disposition des élèves s'ils souhaitaient vérifier leurs résultats puis les règles et les réglettes n'ont plus été distribuées.

III - CONCLUSION

Pour conclure, nous souhaitons revenir sur deux points qui ont donné lieu à des échanges nourris lors de l'atelier : l'intérêt de la situation « Règles et réglettes » pour des classes de CE1 et l'intérêt du dispositif particulier décrit précédemment.

La situation « Règles et réglettes » a été diversement accueillie par les participants de l'atelier. En effet, certains trouvaient que cette situation n'avait pas sa place en cycle 2 car, à ce niveau, il faudrait favoriser l'aspect cardinal des nombres. Il a alors été précisé que les situations S4 « carrelage » et S4bis « carrelage groupé » (voir annexe 1) permettaient le travail indispensable sur cet aspect quantité du nombre en utilisant du matériel de type groupement.

Cette situation a été alors vue comme intéressante en cycle 3, avec les nombres décimaux. D'autres participants estimaient au contraire que cette situation avait plutôt sa place en fin de C.P. Nous pensons que cette situation a l'avantage de prendre en charge la construction d'une procédure de calcul pensé pour calculer des différences « les petits sauts », qui n'est pas toujours présentée dans les manuels de cycle 2 et qui nécessite une bonne compréhension de la numération décimale ainsi qu'une structuration de la droite numérique. Si ces procédures de calcul pensé ne sont pas enseignées, il y a peu de chances que les élèves les développent seuls.

Le dispositif a été plus favorablement reçu car il permet d'apporter des éléments de réponse à une demande forte des enseignants d'avoir une organisation pédagogique et des gestes professionnels favorisant la prise en compte de l'hétérogénéité des classes. Nous tenons ici à en rappeler les caractères essentiels.

Le fait que les dix situations proposées soient auto-validantes libère l'enseignant pour qu'il puisse faire avancer les élèves les plus fragiles à l'aide d'une conception plus transmissive des apprentissages.

La mise en œuvre proposée, qui débute par une phase d'approche, permet à l'enseignant de repérer, dès le départ, les élèves qui devront bénéficier de son étayage. Par ailleurs, le fait que les élèves dans le groupe de soutien travaillent sur la même tâche que le reste de la classe, leur permet de participer activement aux synthèses car l'enseignant sait de façon précise ce qu'ils ont collectivement vécu et quel a été son apport. C'est ainsi que les choix des supports faits lors de la gestion des mises en commun et des synthèses par l'enseignante qui avait mis en place la situation « règles et réglettes » dans sa classe ont été particulièrement appréciés.

Ce temps de mise en commun et de synthèse est une étape fondamentale dans le dispositif car c'est un temps collectif fort, après un long travail en autonomie, pendant lequel il s'agit pour l'enseignant de faire avancer l'apprentissage de tous les élèves. Pour gérer l'hétérogénéité de la classe et viser une plus grande efficacité, le choix est fait de ne s'appuyer que sur les procédures les plus proches des procédures expertes visées auxquelles l'ensemble des élèves doit parvenir en fin d'apprentissage. Au cours de ce moment, l'apport de l'enseignant n'est pas négligeable : il s'agit pour lui de s'appuyer sur des travaux d'élèves qui ont conduit à un bon résultat tout en les structurant davantage et en pointant l'essentiel. Ce moment de synthèse fait l'objet, comme nous l'avons dit, d'une trace écrite individuelle qui sert d'appui aux recherches futures et qui fait l'objet d'une reprise collective à la séance suivante.

Il reste maintenant au groupe à analyser comment diffuser ces situations et le dispositif associé auprès des enseignants. C'est un travail difficile car l'expérience montre que cela nécessite une longue fréquentation de ce type de dispositif afin d'en comprendre tous les enjeux pas toujours abordés au cours de la formation initiale. Faute de temps, ce point n'a pas été abordé au cours de l'atelier.

Le groupe compte s'appuyer sur des vidéos commentées qui mettront en évidence les moments les plus délicats comme par exemple : l'appropriation des tâches par chacun des élèves de la classe, le rôle particulier du maître en action auprès d'un groupe d'élèves ayant besoin de son apport et lors des moments de synthèse destinés à tous. Il espère pouvoir les présenter lors d'un prochain colloque.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, ***9(3)***, 281-308.

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vanderbrouck & F. Wozniak (Eds), *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HILI, H. & RUELLAN-LE-COAT, J. (2009). « Freddy la grenouille », ou la notion de groupement en CP. *Grand N*, ***83***, 97-116.

LE POCHE, G. (1993). La marionnette. In Commission Inter-Irem Copirelem (Eds), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, T2* (pp.77-82) IREM de Bordeaux.

LE POCHE, G. (2010). Débuter la numération. In J.-L. Durpaire et M, Mégard (Coord), *Le nombre au cycle 2*, *Ressources pour faire la classe* (pp.39-49), Scérén - CNDP-CRDP.

MARGOLINAS, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* ***12(1)***, 113-158.

OYALLON, J.-L. (1991). Jeu des règles et des bracelets. In Commission Inter-Irem Copirelem (Eds), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques T1* (pp 33-36) IREM de Paris 7.

V - ANNEXE 1 - LES DIX SITUATIONS DITES DE « RÉFÉRENCE » POUR ENSEIGNER LE NUMÉRIQUE EN CYCLE 2

Les nombres comme outil			
S1	Nombre mémoire de la quantité	Voitures et Garages MS et GS (Périodes 1 et 2 en GS)	Nombre de voitures à chercher : supérieur à 6, collection non organisée, on peut aller jusqu'à 12. Source : IREM de Bordeaux
S2	Nombre mémoire de l'ordre (de la position)	Le TGV GS (Périodes 3 et 4)	Le train est une bande qui va jusqu'à 31 cases. On place un voyageur dans l'une des cases, autour de la 12ième position. Le train modèle est observable aussi longtemps que souhaité, à distance des trains des élèves. Puis l'élève va devant son train et doit placer un voyageur à la même place (Appropriation : mettre un objet sur la 2ième case) Source : IREM de Bordeaux
Comprendre l'écriture du nombre (Numération)			
S3	Passer d'une perception élément par élément à une perception par groupement	La marionnette GS (Période 5) CP pour signe « + » (Période 1)	Le signe « + » est introduit dans le codage des commandes. Source : publication Copirelem de G. Le Poche
S4	Aspect sémantique de la numération, matériel type groupement	Carrelage CP (Période 3)	Source : Équipe ERMEL, INRP
S5	Aspect sémantique de la numération, matériel type échange	Trésor CP (Période 3)	Il s'agit d'amener les élèves à différencier valeur et quantité.
S6	Aspect algorithmique de la numération	Calculette CP (Période 2)	Il s'agit de comprendre le procédé de fabrication de la suite des écritures chiffrées et en particulier, celui du successeur d'une écriture chiffrée quelconque. Cette suite est régulière, contrairement à la suite orale. On peut utiliser la calculatrice pour travailler sur ce procédé de fabrication.

Calculer (Transformer des désignations orales ou écrites cf. « 9 c'est 4 et 5 », « 2 et 2 » calcul à l'oral)			
S7	Calcul écrit additif (appui sur le 5 puis sur le 10)	Cartoucherie CP (Périodes 2 et 4)	Il s'agit d'apprendre à calculer, c'est-à-dire transformer des écritures symboliques, sans avoir recours aux représentations des quantités, en travaillant les décompositions et recompositions additives par rapport au nombre 5, puis au nombre 10. Ce que l'on souhaite, c'est arriver à des transformations d'écritures additives par ligne (1 transformation par ligne) et aboutir à un arbre de calcul.
S8	Donner du sens aux opérations (structures additives)	La boîte CE1 (Période 2) Matériel de type groupement	Source : IREM de Bordeaux
S9	Donner du sens aux opérations (structures additives), au calcul pensé	Règles et réglettes CE1 (Période 3)	L'objectif est de faire acquérir une méthode de calcul des écarts : méthode des « petits sauts ». On met deux élastiques sur 2 graduations d'une règle en bois graduée et on demande quel est l'écart entre les élastiques (ex : un élastique placé sur 17 et un autre sur 43) Source : publication Copirelem de J.-L. Oyallon
S10	Structures multiplicatives	Grilles CE1 (Période 4)	Source : publication Copirelem, brochure Elem Math2

Remarque :

Il existe une situation **S4-bis** : « Carrelage groupé » pour travailler sur une technique opératoire de l'addition, à faire en CP (Période 5) et en CE1 (Période 1).

Ce n'est pas une nouvelle situation de référence car la situation « Carrelage » a déjà été faite avec les élèves pour travailler sur l'aspect sémantique de la numération, avec du matériel de type groupement (voir tableau ci-dessus). « Carrelage groupé » sert à introduire une technique opératoire de l'addition.

VI - ANNEXE 2 - LE JEU DES RÈGLES ET DES BRACELETS (OYALLON 1991, PP. 33-34)

Situation 1 :

Les bracelets sont fixés sur la règle, le joueur doit positionner le bracelet mobile sur la réglette. (Ex : élastiques sur les graduations 27 (ou **a**) et 52 (ou **b**). de la règle). Le joueur gagne s'il positionne le bracelet mobile de la réglette sur 25 (ou **e**)

« **objectif** » : déterminer l'écart entre deux nombres.

Situation 2 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **gauche** est positionné sur la règle en **a**. Le joueur doit positionner le bracelet de **droite** sur la règle.

« **objectif** » : trouver la somme des deux nombres **a** et **e**.

Situation 2' :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **droite** est positionné sur la règle en **b**. Le joueur doit positionner le bracelet de **gauche** sur la règle.

« **objectif** » : trouver la différence des deux nombres **b** et **e**.

Situation 3 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, pas de bracelet positionné à l'avance sur la règle. Le joueur doit trouver une position possible des deux bracelets (parmi beaucoup).

« **objectif** » : produire deux nombres dont l'écart est **e**.

Savoirs visés : distance – soustraction (sens)

VII - ANNEXE 3 - LA SITUATION RÈGLES ET RÉGLETTES VÉCUE DANS UNE CLASSE DE CE1 EN 2010-2011

Séance 1 :
Évaluation diagnostique et appropriation collective

Séance 2 :
Appropriation individuelle : écart entre 20 et 24
Apprentissage (obstacle) : écart entre 32 et 47

Séance 3 :
Appropriation collective : écart entre 10 et 17
Apprentissage (obstacle) : écart entre 43 et 72

Séance 4 :
Apprentissage (obstacle) : écart entre 34 et 91

Entraînement :
Écarts entre 24 et 73, 47 et 92, 31 et 89, 17 et 65

Évaluation :
Écarts entre 18 et 73, 32 et 97

DES CAHIERS D'ÉLÈVES POUR ANALYSER LA PRATIQUE DU MAÎTRE ET QUESTIONNER LA FORMATION

Agnès BATTON
PIUFM Mathématiques, IUFM de Versailles, site de Cergy,
Université Cergy-Pontoise, Copirelem
agnes.batton@laposte.net

Pierre DANOS
PIUFM Mathématiques, IUFM Midi-Pyrénées, site d'Auch,
Université Toulouse 2 Le Mirail, Copirelem
pierre.danos@toulouse.iufm.fr

Résumé

L'atelier tente de montrer ce qu'il est possible ou non d'inférer des pratiques enseignantes à partir de l'analyse de différents types de cahiers d'élèves. L'étude des cahiers se centre sur la notion de fractions en CM1-CM2.
Les points suivants ont été abordés :
- la progression envisagée par l'enseignant sous l'éclairage du cadrage institutionnel et le respect de la programmation du manuel,
- la place, le rôle des cahiers et des traces écrites dans l'apprentissage des élèves,
- le lien entre les informations issues de tels documents et la pratique supposée de l'enseignant,
- un retour sur la notion mathématique abordée, du point de vue de l'enseignant et des élèves.

L'atelier s'est déroulé suivant le plan suivant :

1- Présentation de l'atelier

2- Mise au point sur un vocabulaire commun

3- Autour des traces écrites à regarder en visite

4- Informations à inférer ou non sur les pratiques et conceptions des enseignants à partir des traces écrites de cahiers d'élèves.

5- Application à la notion de fraction sur des cahiers d'élèves de CM2.

I - PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Cet atelier est une deuxième version d'un atelier déjà présenté par la Copirelem en janvier 2011 à l'ESEN (École Supérieure de l'Éducation Nationale) lors d'une formation d'IEN « missions Maths ». Il a pour objectif de questionner les écrits de la classe, en particulier les écrits d'élèves.

En introduction, une première mise au point est faite sur des termes nécessaires à la discussion.

Pour la suite le travail s'effectue en six groupes. Un premier temps d'échanges a lieu autour des écrits que l'on trouve en classe lors d'une visite. Un deuxième temps de travail se fait autour de cahiers de neufs élèves de CM2. Il s'agit de voir quelles informations on peut tirer de ces cahiers sur ce qui se passe en classe, de manière générale, mais aussi de regarder plus particulièrement ce que l'on peut déduire du travail fait en classe sur une notion particulière, la notion de fraction.

II - MISE AU POINT D'UN VOCABULAIRE COMMUN

Il s'agit dans un premier temps, avant de commencer toute discussion, de se mettre d'accord sur une série de termes qui, selon les auteurs, n'ont pas toujours le même sens. Une fois ce glossaire mis en commun, le travail de réflexion peut débuter.

1 Séquence :

Une séquence est définie dans cet atelier comme une unité d'objectif, une unité d'apprentissage.

2 Séance

Une séance est utilisée dans l'atelier comme une unité de temps.

3 Progression

Nous définissons la progression ici comme un enchainement logique de séquences.

Citons par exemple une progression possible sur les décimaux : commencer par les écritures fractionnaires des rationnels (« fractions ») puis les écritures fractionnaires des décimaux (fractions décimales) pour ensuite arriver à l'écriture décimale (écriture à virgule)

4 Programmation

Lorsque nous parlons dans l'atelier de programmation, il s'agit de découpage fixé selon les périodes de l'année.

5 Types de séance

De même lorsque nous parlons des séances nous utilisons la typologie suivant l'objectif :

- évaluation diagnostique préalable,
- construction de nouvelle(s) connaissance(s),
- consolidation :
    - de type entraînement,
    - de type réinvestissement,
- évaluation sommative.
-

III - QUELLES TRACES ÉCRITES MATHÉMATIQUES PEUT-ON OBSERVER LORSQUE L'ON EST EN VISITE DANS UNE CLASSE ?

Arrivé en visite en classe, le formateur va consulter plus systématiquement le cahier journal et la programmation. Le visiteur s'attend, du côté du maître, à trouver dans le classeur de préparations la programmation, les progressions sur les différentes notions : séquences, séances accompagnées de bilans *a posteriori* jusqu'à l'évaluation sommative, les consignes, les institutionnalisations. Reste à regarder ce que les élèves ont à leur disposition.

Il s'agit, lors de cet atelier, de questionner les écrits auxquels les élèves ont accès, autres que le cahier-journal et les progressions et programmations de l'enseignant. Les groupes discutent puis une synthèse est faite. Les différents écrits sont organisés de l'écrit public à l'écrit privé de l'élève :

- les affichages de la classe :
    - écrits de référence ;

- écrits intermédiaires (traces temporaires de résolution de problèmes, procédures de calcul réfléchi ou autres plus ou moins contextualités) ;

- le tableau de la classe ;
- cahier-outil ou cahier de leçons (de la classe, sur le cycle) ;
- cahier (ou dossier) de situations de référence ;
- cahiers du jour et/ou cahiers de mathématiques, fichier ;
- cahiers d'évaluation ;
- cahiers de recherche et d'expérience ;
- cahier de brouillon ;
- ardoises ou autres écrits éphémères …

La synthèse se poursuit par une référence au rapport des IGEN de juin 2006 ***L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.*** Les différents types d'écrit y sont référés :

- les écrits pour chercher ;
- les écrits pour communiquer une démarche, un résultat ;
- les écrits de référence.

Ce rapport précise la faible utilisation du cahier de brouillon. Sur ce cahier, « on trouve plutôt des activités que des règles ou des références. L'habitude de noter des résultats ou des démarches est trop rare. »

L'examen des travaux écrits des élèves met en évidence que chaque élève dispose d'un cahier de mathématiques ou d'un cahier du jour ou encore d'un classeur pour les mathématiques. Le rapport fournit un tableau de fréquence d'utilisation des différents types de cahiers.

La description de ces différents types d'écrits se retrouve dans les programmes de collège 2008.

La programmation peut se repérer dans le cahier journal du maître mais également dans le cahier du jour élève au regard des dates.

Le cahier du jour n'est qu'une trace écrite parmi d'autres, dans lequel on retrouve essentiellement des exercices de type consolidation et pas ou peu d'information sur la façon dont l'apprentissage des notions est abordé, la construction des connaissances...

Cependant lorsqu'un visiteur arrive dans une classe en observation, il prend au hasard en général quelques cahiers du jour d'élèves.

Une discussion s'ensuit concernant le terme « brouillon » mais également les supports destinés à des premières recherches. Certaines collègues proposent de ne pas utiliser le mot « brouillon » avec les élèves car il induit dans ce cas une idée de non propreté, de travail négligé, bâclé. « Cahier d'essais » semble plus judicieux et plus « pédagogiquement correct ». Dans les programmes de 2002 les textes officiels préconisaient l'utilisation de « cahiers d'expérience » ; en 2008 en Arts Visuels les programmes parlent de « cahiers de croquis » ce qui semble être la version artistique du cahier d'essais.

Des collègues proposent de ne pas donner un cahier mais des feuilles recyclées, des feuilles de brouillon (un recto utilisé, le verso reste vierge pour y écrire ses recherches), sans ligne. Ainsi il apparait que les élèves se trouvent plus libres de se laisser aller à écrire ce qui leur passe par la tête, ils se sentent moins contraints par un support apparemment moins scolaire. On s'accorde à bien insister sur l'aspect privé de ce type d'écrit afin que les élèves puissent entrer sans contrainte dans leurs recherches en mathématiques.

D'autres collègues ont remarqué que certains professeurs d'école font mettre entre parenthèses les erreurs et ne les font pas barrer. D'autres encore proposent de ne travailler qu'avec les crayons papier, de prohiber l'encre.

Des questions se posent concernant le rôle des cahiers du jour : servent-ils de trace écrite aux élèves, leur permettant de s'y référer afin de refaire les exercices, de s'entraîner ?… en général non. Ces cahiers servent de façon beaucoup plus sûre aux remplaçants, à l'institution, aux parents …

D'autres questions sont posées concernant l'existence de « cahier de texte virtuel » sur lequel sont indiqués les « devoirs » mais également les chroniques des journées. A la rentrée 2011, ce « cahier de texte virtuel » est rendu obligatoire dans les collèges et lycée. Certains collègues de classes élémentaires s'en servent également.

IV - À PARTIR D'EXTRAITS DE CAHIERS D'ÉLÈVES DE TROIS CLASSES DIFFÉRENTES DE CM2.

Ces extraits de cahiers proviennent de trois classes de trois écoles différentes. Dans le panel, il y a pour chaque classe un bon élève, un moyen, un élève en difficultés (ou du moins étiquetés comme tels par les maîtres ou maîtresses qui nous ont confié leurs écrits). Notre demande était d'avoir tous les écrits qu'avaient en main les élèves : il y a donc au moins le cahier du jour.

Les documents en notre possession sont :

- pour la classe de l'école 1, des extraits de « cahier de mathématiques », des extraits du DicoMaths CapMaths CM1-CM2 (2010), des extraits du manuel utilisé « CapMaths CM2 » (2010) ;
- pour la classe de l'école 2, des extraits de cahier du jour, des extraits du cahier outil et des extraits du manuel utilisé « A nous les maths » version 2001 ;
- pour la classe de l'école 3, des extraits de « cahiers du jour » et du « cahier de leçon ».

Dans un premier temps, seuls les extraits de cahier du jour des différents élèves sont distribués aux différents groupes (deux groupes sur une même classe). Les autres documents leur seront distribués à la demande, selon les questions posées par les différents groupes.

1 Quelles informations nous fournissent ces cahiers ? Quelles questions pourrait-on poser à l'enseignant(e) pour compléter ces informations ?

1.1 À partir des cahiers du jour, on peut avoir accès à :

- la programmation des notions (en se référant aux dates) ;
- la progression (spiralaire ou non) ;
- la fréquence d'apparition des exercices sur une même notion ;
- la nature et les supports de certaines activités ;
- des conceptions privilégiées sur les notions (cadres et aspects concernant les rationnels et décimaux ici) ;
- des procédures et erreurs d'élèves (et leur utilisation en classe)

La progression est plus difficile à repérer sur les cahiers d'élèves mais on peut également les confronter au manuel, au fichier, au classeur de préparation du maître.

Le cahier permet également de repérer s'il y a variété des tâches et des situations proposées : des séances de calcul mental, la place du calcul posé, des situations-problèmes.

On peut avoir accès à quelques détails sur le traitement de l'erreur : ratures ou non, erreurs soulignées, utilisation de plusieurs couleurs (en général vert ou rouge) mais il faut un entretien avec le maître pour que l'on sache exactement la manière dont la correction se fait, et par qui. On voit dans certains cahiers des annotations (B, TB, vu, à revoir...), des notes (sur 5, sur 10…). Qui les écrit ?

On y repère également d'éventuelles références au manuel de la classe, des photocopies de documents issus d'autres manuels…

On peut aussi parfois y repérer des stigmates de différenciation : des exercices différents selon les élèves, plus d'exercices pour certains mais cela doit se confirmer lors d'un entretien.

1.2 À partir des cahiers du jour, on peut (se) questionner sur :

- l'existence d'une différenciation ;
- l'utilisation des procédures élèves en classe ;
- le traitement de l'erreur ;
- la place des activités de recherche ;
- la place et la nature des activités de calcul mental (uniquement sur des nombres ou dans des problèmes ;
- la mise en place d'une aide individualisée ;
- les conceptions sur une notion privilégiées par l'enseignant ;
- les compétences privilégies sur la notion ;
- l'utilisation de matériel en classe (lequel ? comment ?)

…

Concernant le traitement de l'erreur, on peut se demander qui corrige ? Quel type de correction a lieu ? La correction est-elle collective, individuelle ou personnelle ? De quelle nature sont les commentaires ? Qui les écrit ? Y a-t-il des possibilités d'autocorrection ? Si oui quand et comment ?

V - FRACTIONS ET DÉCIMAUX DANS LES CAHIERS PRÉSENTÉS

1 Mise au point sur les aspects et composantes concernant les nombres rationnels

Trois composantes nécessaires et complémentaires sont utilisés pour les fractions dans la brochure de l'IREM de Rennes, De *l'écriture fractionnaire à la multiplication des décimaux*, *Liaison Cycle3 – 6ème*, :

- « partage d'une grandeur » : partage d'une grandeur en *b* parts égales, sans référence à la mesure ; les objets à partager sont des grandeurs continues, le quotient d'une grandeur par un nombre est une grandeur ;
- « mesures » : il permet de travailler sur les nombres , il faut se donner un étalon (unité de mesure), le résultat de la mesure d'une grandeur dans l'unité donnée est un nombre ;

- « graduations » : le repérage est en jeu.

Ces trois composantes se conjuguent avec trois origines possibles de la fraction $\frac{a}{b}$:

- « a-bièmes » : $\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{b}\ (a\ fois)$
- « a divisé par b » : $\frac{a}{b}\times b=a$
- Notation fonctionnelle : $\frac{a}{b}\ de$ … (prendre les a-bièmes de…)

2 Exemples

2.1 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « partage de grandeurs »

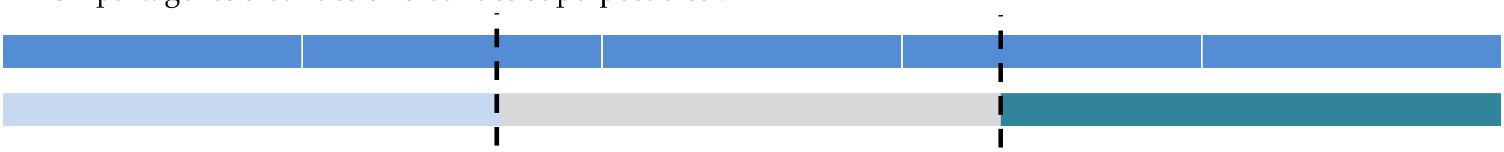
On considère cinq bandes, chacune de longueur L.

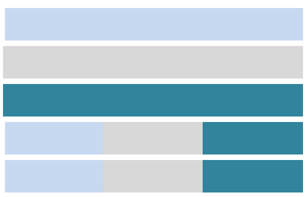
On partage chacune des bandes en trois bandes superposables

Par définition, la longueur de chacune de ces petites bandes est donnée par $\frac{L}{3}$ noté aussi $\frac{1}{3}L$. La longueur de la bande obtenue en mettant bout à bout cinq petites bandes est donnée par $\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}=5\times\frac{L}{3}$.
On notera alors que c'est $\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L=\left(5\times\frac{1}{3}\right)L=\frac{5}{3}L$ soit « cinq tiers L » noté $\frac{5}{3}L$.

2.2 Aspect « 5 divisé par 3 » dans le champ « partage de grandeur »

On partage les 5 bandes en 3 bandes superposables :



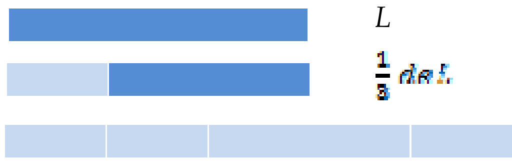


Chacune des trois bandes superposables a pour longueur $L+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}=L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L=\left(1+\frac{2}{3}\right)L=\frac{5}{3}L$

On posera et lira alors « cinq divisé par trois L », soit $\frac{5}{3}L$, (5 : 3) L

2.3 Aspect fonctionnel dans le champ « partage de grandeur » (« cinq tiers de… »)

Cette définition se traduit dans le langage courant par « prendre les *cinq tiers* **de** la longueur de la bande ».



$5 \text{ fois } \frac{1}{3} \text{ de } L = \frac{5}{3} \text{ de } L$

La bande de longueur L est partagée en 3 bandes superposables et on prend 5 morceaux de ce type (la fonction d3 – diviser par 3 – est suivie de la fonction m5 – multiplier par 5 – ou alors on prend 5 fois L que l'on partage en 3 morceaux superposables.

2.4 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « mesure »

Il s'agit ici de mesurage de la bande B par fractionnement de l'unité U

On veut mesurer la longueur *B* d'une bande avec comme unité la longueur *U*.

Par abus de langage, on parle de fractionnement de l'unité : partition de l'unité puis multiplication.

On fractionne l'unité *U* en trois.

Par définition, la mesure de la longueur de chacune de ces parties, en prenant comme unité *U*, est $\frac{1}{3}$.

La mesure de la longueur *B* (*U étant l'unité*) est

$$5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{3}$$

2.5 Aspect « 5 divisé par 3 » dans le champ « mesure »

Il s'agit ici de mesurage par « commensuration ».

On considère les bandes de longueurs *B* et *U*.

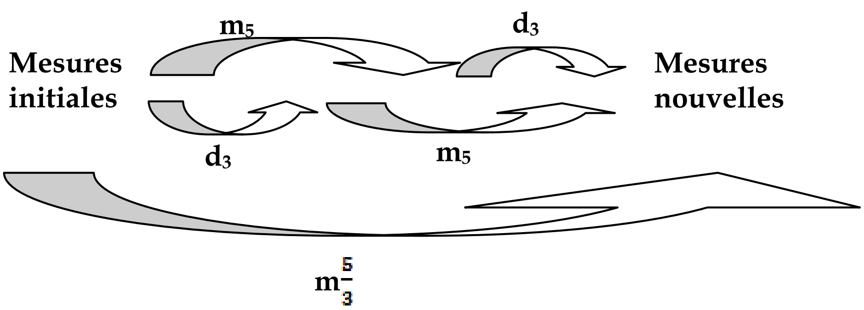
On cherche une « commune mesure » des longueurs *B* et *U*, c'est-à-dire que l'on cherche à faire coïncider un nombre entier de *B* avec un nombre entier de *U*.

On constate que 3B = 5U soit $B = \frac{5}{3} U$

$\frac{5}{3}$ est défini comme le rapport des longueurs *B* et *U* : c'est le nombre qui, multiplié par 3, donne 5.

2.6 Aspect fonctionnel dans le champ « mesure » (« cinq tiers de… »)

On considère un agrandissement avec un coefficient de proportionnalité $\frac{5}{3}$



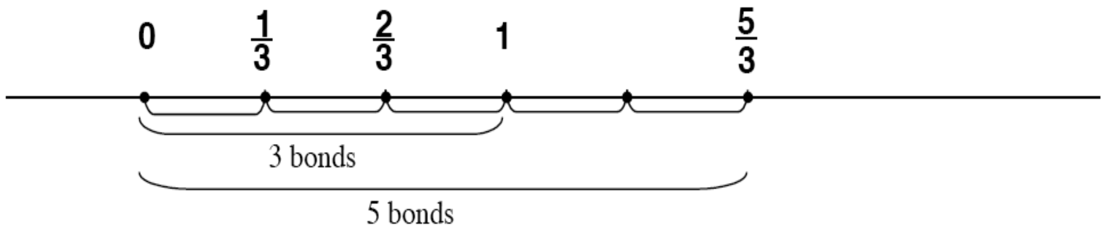
Il y a proportionnalité entre les mesures : multiplier par 5 tiers.

2.7 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « graduations »

On considère un robot qui se déplace sur la droite numérique par bonds réguliers en partant du nombre-repère 0.

Sachant qu'il parvient au nombre-repère 1 au bout du troisième bond :

- Le nombre-repère atteint à l'issue du premier bond est $\frac{1}{3}$;
- Le nombre-repère de la graduation atteint à l'issue du cinquième bond est $\frac{5}{3}$.

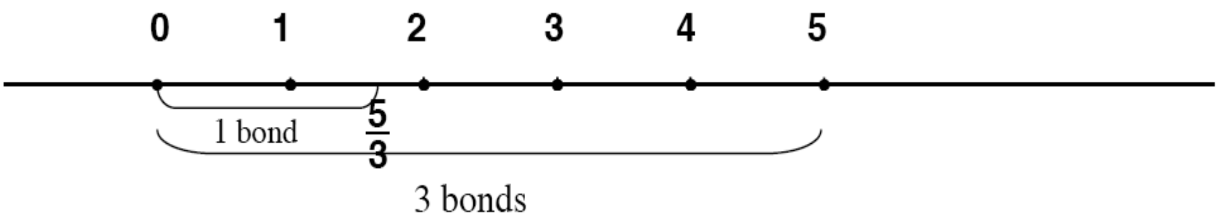


2.8 Aspect « cinq divisé par 3 » dans le champ « graduations »

On considère un robot qui se déplace sur la droite numérique par bonds réguliers en partant du nombre-repère 0.

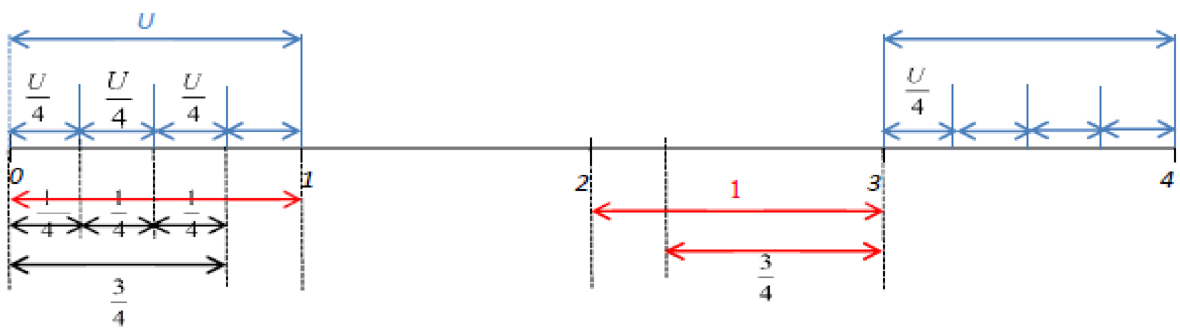
Sachant qu'il parvient au nombre-repère 5 au bout du troisième bond :

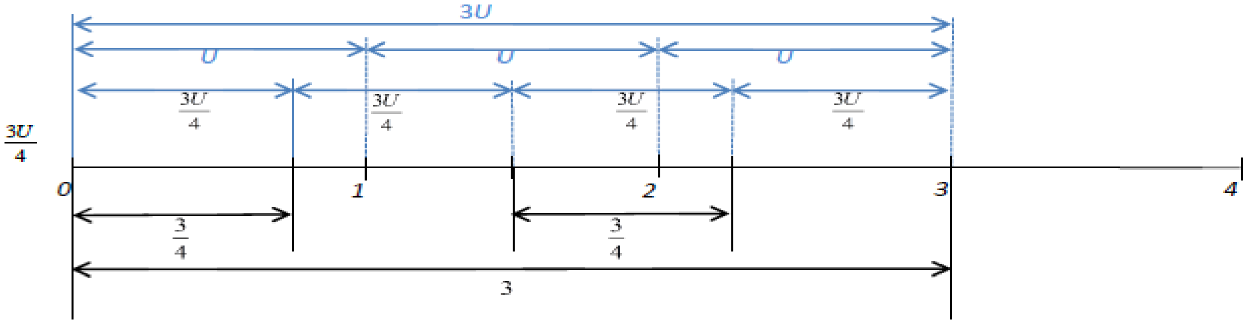
- Le nombre-repère atteint à l'issue du premier bond est $\frac{5}{3}$;
- $\frac{5}{3}$ apparaît comme le nombre qui, multiplié par 3, donne 5.



2.9 Synthèse dans le champ « graduations »

Voici différentes façons de « voir » $\frac{3}{4}$:





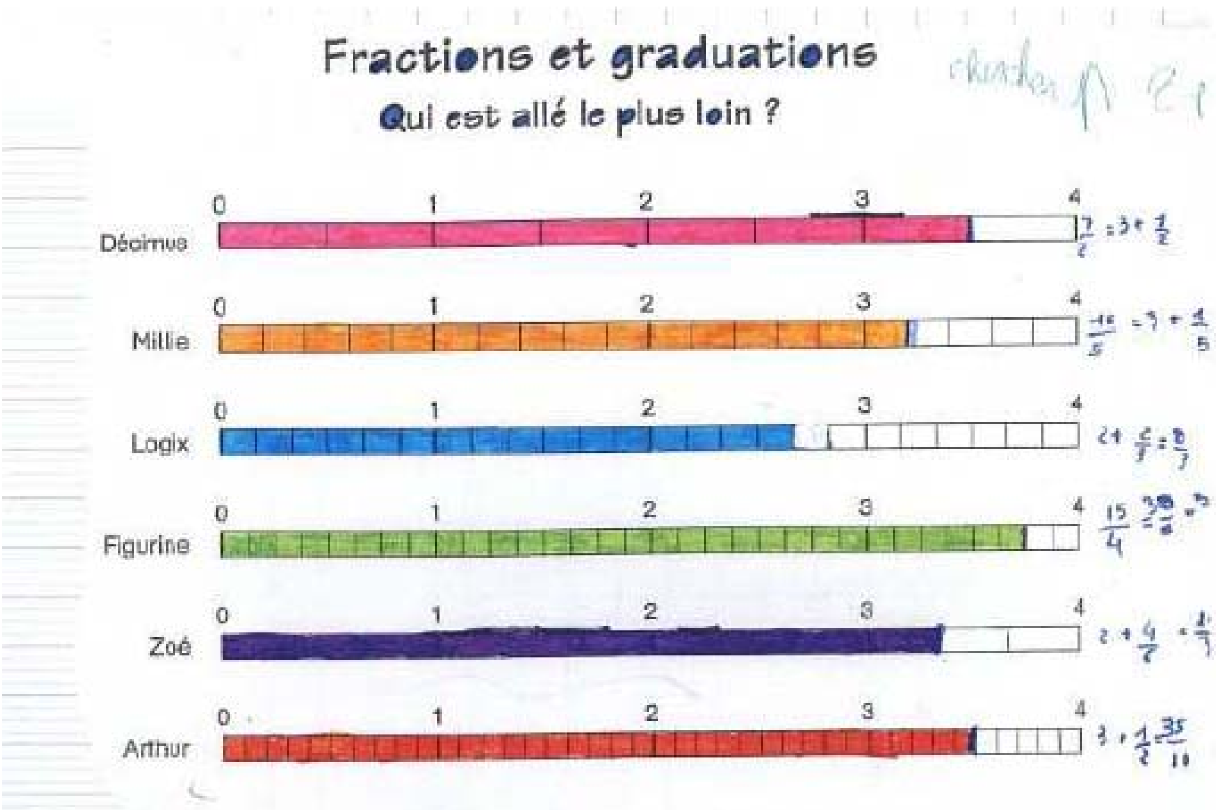
Même si ce champ n'est pas retenu pour l'introduction de la notion, il s'avère indispensable car il permet de traiter convenablement les problèmes d'intercalation (décimal entre deux entiers, décimal entre deux décimaux), de comparaison et de rangement des fractions et des décimaux.

Sur une droite graduée, peuvent apparaître les nombres-repères (abscisses) et les nombres-mesures.

3 Pour l'enseignement des rationnels et décimaux, quels sont les champs de problèmes et les aspects qui semblent privilégiés par cet(te) enseignant(e) ?

3.1 École 1 :

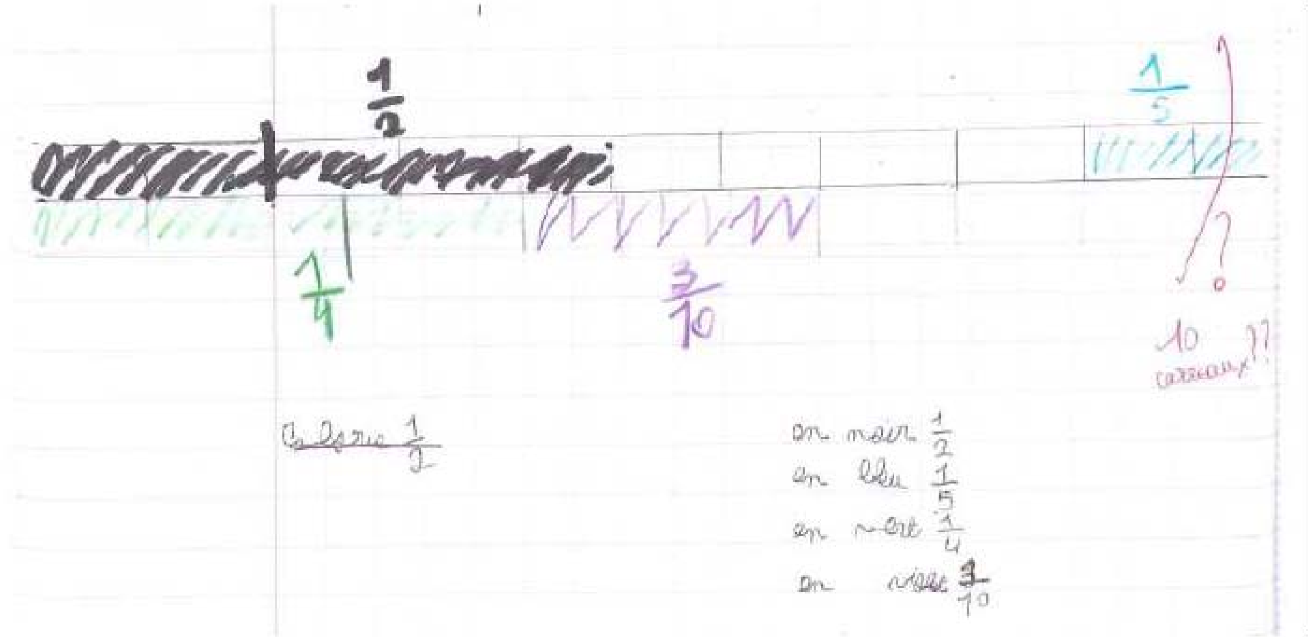
Les activités sont étroitement liées au manuel utilisé. Les aspects « outil » et « objet »[1] sont travaillés, le champ de problèmes est celui des mesures et graduations, le sens a bièmes est privilégié.

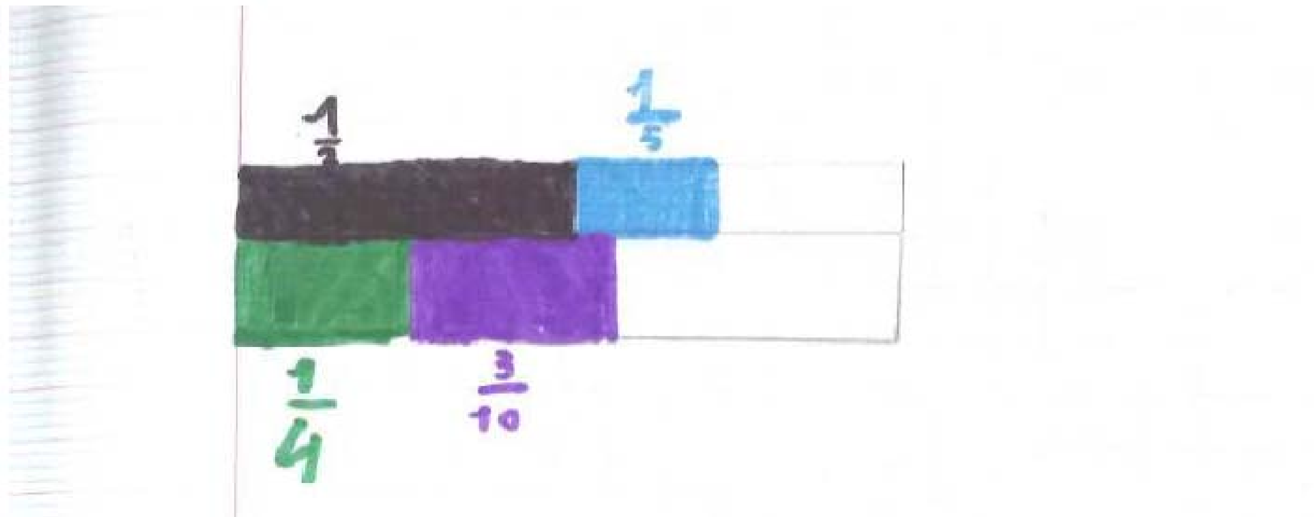


[1] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady

3.2 École 2 :

L'aspect « objet »[2] est privilégié, les exercices semblent travailler des techniques sans les justifier. Il n'y a pas de champ de problème privilégié, l'aspect fonctionnel d'une grandeur est retenu pour le premier exercice.





3.3 École 3 :

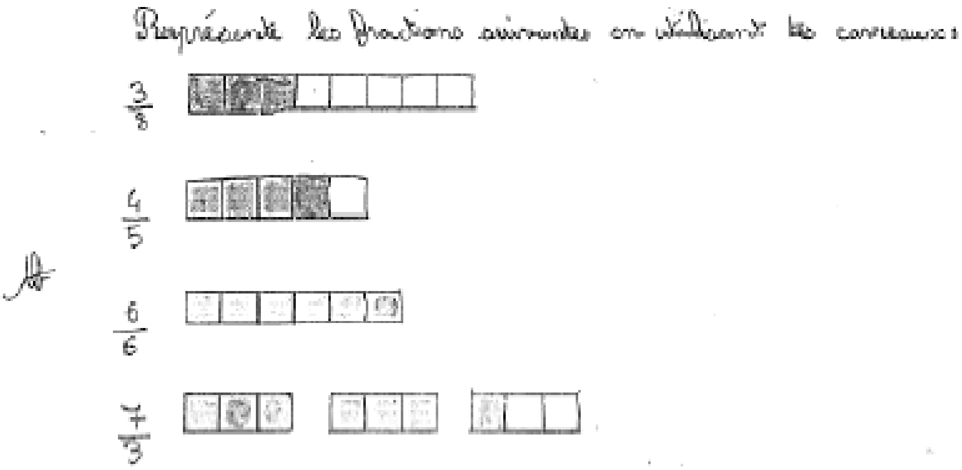
Les décimaux apparaissent comme outils dans les conversions de grandeurs, avant le travail sur les rationnels. L'aspect « outil » [3]est privilégié. L'enseignant n'utilise manifestement pas de manuel.

On trouve une trace écrite pour le moins ambigüe, qui laisse penser que toute fraction de l'unité est représentée par un carreau.

---

[2] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady

[3] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady



VI - CONCLUSION

Cet atelier a permis d'engager un débat autour des pratiques de formateurs lors des visites de stagiaires en classe. Pour rendre compte du travail engagé en classe avec les élèves, le formateur va naturellement examiner l'ensemble des écrits à disposition, tant du côté élève que de celui de l'enseignant, des écrits publics aux écrits privés de l'élève lorsque c'est possible. Ces écrits doivent permettre de mettre en évidence les choix pédagogiques et didactiques de l'enseignant, ainsi que l'activité des élèves. On peut y repérer la programmation des notions (en se référant aux dates) , la progression (spiralaire ou non), la fréquence d'apparition des exercices sur une même notion, la nature et les supports de certaines activités, des conceptions privilégiées sur les notions, des procédures et erreurs d'élèves, des références à des manuels, des traces (ou non) de différenciation…

Ensuite le formateur questionnera probablement le stagiaire afin d'affiner certains points. Ainsi il est intéressant de demander des précisions sur la manière dont se fait la validation des résultats produits, correction collective, individuelle ou personnelle, savoir ce qui est à la charge de l'élève en terme de correction. En effet, on peut s'interroger sur le réel aspect réflexif de ces écrits pour les enfants. Ce questionnement portera aussi sur l'utilisation pédagogique des erreurs d'élèves, de leurs procédures, sur la façon dont le maître différencie son enseignement…

Lors de cet atelier a clairement été évoquée l'utilisation qui peut être faite de ces écrits en formation de formateurs. Mais ce questionnement peut également être appliqué en formation continue lors d'un travail sur les différents types d'écrit existant en classe mais aussi pour amener les collègues à réfléchir aux différentes approches possibles d'une notion (ici les rationnels et décimaux).
On peut imaginer, en adaptant le scénario et les supports, transférer ce travail de réflexion en formation initiale notamment sur des temps de préparation au métier et aux gestes professionnels, au sein des masters de formation des futurs enseignants.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BELLIAN C., BOUYAUX T., DENMAT M-N., GIORGUITTI I., KHLIFI L., LE POCHE A., LE POCHE G., LOHYN M., METAYER M., TETARD P., (2002) De l'écriture fractionnaire à la multiplication des décimaux, *Liaison Cycle3 – 6ème*, IREM de Rennes.

DOUADY R., (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, RDM vol 7-2, La pensée sauvage.

DURPAIRE JL., (2006) L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire, *Rapport des IGEN*.

VIII - ANNEXE

Extrait du rapport IGEN, juin 2006

L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire

Traces				
Support	Présence	Utilisation		
	Oui	Quotidienne	Régulière	Ponctuelle
Cahier de brouillon	87 %	69 %	26 %	5 %
Cahier du jour	66 %	74 %	20 %	6 %
Cahier de maths	63 %	43 %	26 %	31 %
Cahier d'évaluations	58 %			100 %
Classeur	45 %	30 %	10 %	60 %
Fichier	8 %	50 %	35 %	15 %

DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DE JEUX TRADITIONNELS À LA CONCEPTION DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE POUR L'ÉCOLE PRIMAIRE

Pierre EYSSERIC
PIUFM, Université de Provence
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Pascale MASSELOT
Maître de Conférence, IUFM de l'académie de Versailles - UCP
LDAR
PMasselot@aol.com

Claire WINDER
PIUFM, Université de Nice Sophia Antipolis
claire.winder@free.fr

Résumé

Lors de cet atelier, les animateurs ont présenté ce qu'ils désignent par « architecture mathématique d'un jeu », à partir de l'exemple du jeu de loto. Ce type d'analyse, précisé dans la première partie de ce compte-rendu, constitue un approfondissement des travaux sur les jeux réalisés par Bolon (1994), en particulier le repérage des variables d'un jeu. Il affine certains apports de Rodriguez (1993), avec la reprise de la notion de trame des apprentissages proposée par Descaves (1992) en substitution à celle de progression, pour définir le rôle du jeu dans les apprentissages mathématiques. Il prolonge également les premiers travaux d'Eysseric (1999) sur ce sujet.
Les participants, répartis en groupe, ont été conduits à dégager l'architecture mathématique de trois jeux traditionnels : le jeu de bataille, le jeu des dominos et le jeu de l'oie. Ce premier travail a permis de faire émerger une catégorisation de ces jeux du point de vue des mathématiques sous-jacentes. Dans un deuxième temps, cette analyse a été réinvestie dans l'élaboration de variantes de ces jeux, puis de pistes pour la conception des situations d'apprentissage.
La dernière partie de cet article est consacrée à la présentation de scénarios de formations.

Les jeux sont des supports souvent utilisés par les professeurs des écoles dans leur pratique professionnelle (pas seulement en mathématiques…), et leur usage est d'ailleurs explicitement cité dans les programmes de maternelle[1]. Le jeu permet l'implication du joueur, il est un lieu où l'enfant décide ; il lui permet d'essayer quelque chose sans risque… C'est un lieu de gestion de la communication. Lors d'un jeu, perdre n'est pas synonyme de manque de connaissances.

Or, même dans de récentes Instructions Officielles[2], la confusion pratique du jeu/apprentissage existe. L'objectif des animateurs de cet atelier est d'organiser un dispositif de formation permettant de conduire à la réflexion suivante : « Comment transformer un jeu en un élément du milieu constitutif d'une situation d'apprentissage ? ».

L'objectif de l'atelier se décline alors en deux points :

[1] B.O. hors série n°3 ; 18 juin 2008

[2] Une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'école ; dossier de presse - 31 janvier 2011 ; http://www.education.gouv.fr/cid54824/une-nouvelle-ambition-pour-les-sciences-et-les-technologies-a-l-ecole.html et circulaire n° 2011-038 du 4-3-2011, Promotion des disciplines scientifiques et technologiques, BO n°10 du 10 mars 2011.

- le premier concerne les domaines qu'il est possible d'aborder avec un jeu ; il s'agit d'apporter des réponses à la question : « En quoi un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? » ;

- le second point concerne la mise en œuvre dans une classe et tente de répondre à la question : « Comment un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? ».

Chacune de ces deux interrogations a fait l'objet d'une présentation collective s'appuyant sur l'exemple du jeu de loto, suivie par une mise en activité en petits groupes des participants de l'atelier ; chaque groupe ayant à sa charge un jeu « traditionnel » particulier (jeu de dominos, jeu de bataille ou jeu de l'oie). Pour ne pas multiplier les contextes, seuls des jeux comportant une part de hasard ont été analysés au cours de l'atelier. Une mise en commun globale des réflexions et productions des groupes a conclu l'atelier.

La première partie de cet article présente le cadre d'analyse, comportant deux temps, proposé aux participants : définition des différents points qui constituent « l'architecture mathématique » d'un jeu et pistes pour la mise en œuvre de situations d'apprentissage à partir d'un jeu.

Dans les parties suivantes, en liaison avec les productions des groupes, quatre jeux traditionnels sont analysés : le jeu de loto, le jeu de dominos, le jeu de bataille et le jeu de l'oie. Les jeux sélectionnés font partie de notre patrimoine culturel, ce qui permet de limiter le travail nécessaire d'appropriation des règles. Cependant, il est apparu nécessaire au cours de l'atelier de se mettre d'accord sur les règles ou le vocabulaire employé, car ceux-ci peuvent varier d'une région à l'autre… C'est pourquoi, pour chaque jeu, une règle « usuelle » est énoncée. L'architecture mathématique du jeu est ensuite mise en évidence, puis des conditions de mise en œuvre de ce jeu dans une classe sont déclinées. Enfin, des exemples de jeux, variantes ou non, mais qui lui sont proches au niveau de l'architecture, sont donnés.

Nous ajoutons une dernière partie (non présentée au cours de l'atelier), consacrée à la description de modules de formation de professeurs des écoles dans lesquels ces points d'analyses sont intégrés.

I - CADRE D'ANALYSE PROPOSÉ

1 Architecture mathématique d'un jeu

Le premier temps de l'analyse est lié à la question : « En quoi un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? ». Il s'agit de dégager les éléments génériques d'un jeu, c'est-à-dire à la fois *la structure mathématique sous-jacente* et ses *modalités caractéristiques*. Ces deux éléments constituent ce que nous nommons *architecture* du jeu. Un tel modèle d'analyse conduit à un regroupement des jeux en fonction de leur architecture, et par suite permet à l'enseignant le choix d'un jeu particulier comme support d'apprentissage *en fonction* des objectifs d'apprentissage visés.

Ainsi, selon l'enjeu qu'il souhaite privilégier, le professeur pourra choisir parmi des jeux construits selon la même architecture. En effet, la structure mathématique sous-jacente conduit à identifier les différents domaines mathématiques dans lesquels on peut proposer ce jeu à des fins d'apprentissage, et les modalités caractéristiques permettent d'accéder aux variables du jeu qui selon leurs valeurs, conduisent à la déclinaison de différentes variantes utiles pour adapter ce jeu en fonction des compétences visées et des divers types de publics.

Ces deux notions sont exemplifiées dans les parties suivantes.

2 Intérêt pour une mise en œuvre dans la classe

Pour que les jeux deviennent de véritables outils au service des apprentissages à l'école, il est nécessaire de surmonter la contradiction apparente entre le jeu dont la vocation première est le loisir, la distraction, … et les pratiques scolaires centrées sur l'apprentissage avec des contraintes, des règles à respecter.

Le simple repérage de connaissances mathématiques intervenant dans la pratique d'un jeu ne garantit pas un apprentissage de savoirs mathématiques en jouant. Tout au plus aura-t-on une mobilisation dans le jeu de connaissances mathématiques que l'élève sera ensuite incapable de réutiliser en dehors du contexte de jeu. Il est nécessaire de procéder à un minimum de « didactisation » du jeu afin que chacun des acteurs de la situation ait conscience que certes on joue, mais qu'on joue pour apprendre et qu'on apprend en jouant le jeu !

Pour cela, il faut dans un premier temps adapter le jeu au temps de la classe, ainsi qu'aux apprentissages visés : partir du savoir mathématique pour proposer un jeu adapté et non l'inverse. La connaissance de l'architecture de différents jeux favorisera un choix de jeu en cohérence avec les savoirs visés et permettra d'agir de façon pertinente sur les variables disponibles.

Le jeu pourra être utilisé à différents moments de l'étude : découverte d'une notion au travers d'un jeu dans lequel elle intervient ; entraînement à l'utilisation de certaines techniques, au réinvestissement ; confrontation au travers d'un jeu à des problèmes …

Dans tous les cas, l'efficacité du jeu pour provoquer des apprentissages va résider dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu « pur » qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les *exercices de jeu* qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés, voire même de travailler des compétences complémentaires à celles introduites travaillées dans le jeu, le jeu n'étant plus qu'un prétexte à de nouvelles interrogations. Ces exercices de jeu vont se matérialiser dans la classe par des écrits collectifs et/ou individuels que nous qualifierons de *mémoire de jeu*.

La mémoire de jeu

Nous reprenons cette expression utilisée, il y a quelques années, par Rodriguez dans un dossier du Journal des Instituteurs[3] analysant les conditions pour mettre un jeu au service des apprentissages mathématiques ; cette analyse s'appuyait sur le concept de *trame* proposé par Descaves[4] pour remplacer, avec un gain de souplesse, celui de progression.

Une mémoire de jeu sera une trace écrite qui rendra compte :

- soit de tous les instants du jeu ;
- soit de certains moments décisifs : lorsqu'un choix doit être fait par le joueur, par exemple pour décider du gagnant en fin de partie…

Elle est élaborée par chaque joueur et lui permet de revenir en arrière au cours d'un jeu pour analyser ses choix et leur impact : analyse d'erreurs, comparaison et formulation de stratégies…

Elle peut s'appuyer dans un premier temps sur des exercices de jeu (notion que nous précisons dans la suite du texte) proposés par l'enseignant qui conduisent à mettre en lumière certaines procédures ou certaines stratégies.

Elle peut ensuite déboucher sur des exercices de jeu dont l'objectif est d'améliorer certaines stratégies, ou de s'entraîner à la mise en œuvre de techniques dont la maîtrise s'est avérée importante dans la pratique du jeu.

Les mémoires de jeux pourront aussi être utilisées en classe comme illustrations lors des phases d'institutionnalisation des savoirs mathématiques rencontrés dans les jeux, qui donneront lieu ensuite à des décontextualisations avec des exemples pris en dehors des jeux.

En maternelle, le recours à des mémoires de jeu sera très limité. En revanche, les exercices de jeu, sous la forme de *jeu interrompu* au sens de Bolon[5] sont parfaitement adaptés : à partir d'une disposition des

[3] RODRIGUEZ A. (1993) Dossier Mathématiques : jouez le jeu !, Journal des Instituteurs, 49-63.

[4] DESCAVES A. (1992) Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes. Hachette.

[5] BOLON J. (1994) Comment analyser un jeu mathématique. Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques tome III, COPIRELEM, 57-60.

éléments du jeu, comme une sorte de jeu interrompu, il s'agit dans les jeux de hasard, de faire parler les élèves sur ce qui serait favorable ou défavorable et d'expliquer en quoi, et dans les jeux de stratégie, de demander ce qu'ils aimeraient jouer et pourquoi.

II - LE JEU DE LOTO

1 Règle usuelle

Le jeu de loto est un jeu de société fondé sur le hasard.

Le nombre de joueurs n'est pas limité.

Chaque joueur dispose d'un ou plusieurs cartons.

Sur chaque carton figure une grille comportant trois lignes et neuf colonnes. Parmi les cellules qui en résultent, quatre, dans chaque ligne, sont vides alors que cinq comportent un nombre (de 1 à 90). Notons que dans chaque colonne figurent un à trois nombres ayant le même chiffre des dizaines mais non ordonnés. Ainsi chaque carton affiche 15 numéros.

Un jeu de loto traditionnel

Des jetons sur lesquels figurent chacun des 90 nombres sont placés dans un sac opaque. Un meneur de jeu prélève au hasard dans ce sac un jeton désignant l'un des nombres. Si ce nombre est présent sur le carton d'un joueur, celui-ci dépose une graine sur l'emplacement correspondant de son carton.

Le gagnant est celui qui remplit le premier une ligne ou un carton. Il remporte alors un lot.

2 Analyse du jeu de loto

2.1 Architecture du jeu de loto

Dégager l'architecture du jeu revient à passer du particulier au générique :

Un jeton est le support d'un élément d'une collection.

Un nombre est un élément ou une représentation d'un élément de cette collection.

Le sac opaque permet de masquer cette collection et le tirage introduit le hasard dans le jeu.

Chaque carton correspond à un espace support d'une deuxième collection.

Les graines permettent le repérage sur l'espace support.

Le meneur peut être vu comme le vecteur d'information conduisant à relier les éléments des deux collections.

La plaque de vérification, trace des éléments déjà tirés au sort, permet la validation.

Les lots correspondent aux enjeux de ce jeu.

Finalement, le jeu de loto est un jeu de **mise en relation** : il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, un élément d'une première collection à un élément d'une deuxième collection.

- La règle d'association peut être définie mathématiquement par une relation d'équivalence entre les éléments des deux collections (celle des jetons et celle des cases de la grille).

- Les collections peuvent être présentes ou représentées.

- Les éléments de la deuxième collection sont répartis entre les joueurs en sous-collections non forcément disjointes, organisées spatialement ou non.

À partir de l'architecture du jeu, il est possible de dégager les variables du jeu. Elles sont liées au type de jeu, il s'agit de ce sur quoi on peut « jouer », des choses à propos desquelles les choix à effectuer devront être « conscients », par rapport à leur incidence sur le jeu.

2.2 Variables du jeu de loto

Dans le cas de ce jeu, différentes variables peuvent être identifiées ; elles concernent :

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Statut du meneur : maître ; élève ; absence de meneur.

Tirage des éléments de la première collection : aléatoire ou non.

Exhibition de l'élément de la première collection : montrer ; nommer ; montrer et nommer ; décrire par une paraphrase avec ou sans contrainte.

Éléments des collections : réels ; représentés.

Nature de la relation d'équivalence : identité ; équipotence ; équivalence de grandeur ; équivalence de forme ; désignation du même objet …

Nombre d'éléments par sous-collection (deuxième collection).

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de loto sont liés à la nature des éléments des collections et à celle de la relation d'équivalence.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les éléments des collections sont des nombres représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non.

Géométrique : les éléments des collections sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou par la description…

Grandeurs : les éléments sont des objets réels ou représentés à comparer par rapport à leurs longueurs, leurs masses, leurs contenances…

Logique (classements) : les éléments sont des objets réels ou représentés, classés selon un critère (couleur, taille, …).

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Une mémoire de jeu peut être un tableau de correspondance entre les éléments de la première collection et ceux de la deuxième, ou un extrait de ce tableau.

Le jeu de loto est un jeu de hasard. Le jeu interrompu est l'exercice de jeu qui consiste à faire verbaliser les élèves, au cours d'une partie, sur les nombres qu'ils souhaiteraient voir tirer. On peut aussi proposer une grille de jeu partiellement remplie et solliciter l'élève pour anticiper l'élément qui doit être tiré au sort pour qu'il gagne au coup suivant.

4 Jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de loto traditionnel

4.1 Les lotos dans ERMEL[6]

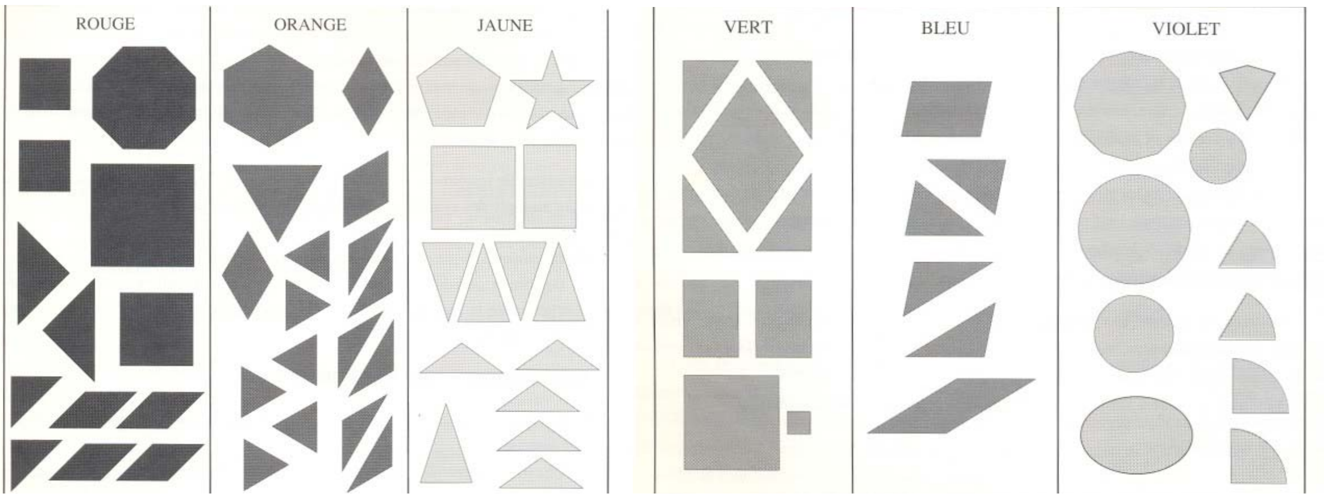
Pour l'entraînement à la mémorisation des répertoires et au calcul rapide, divers jeux de loto ont été proposés dans les travaux de l'équipe ERMEL[7]. Dans ces jeux, la collection de référence est un ensemble

[6] *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes* ; ERMEL ; Hatier,

de nombres choisis en fonction des apprentissages visés ; l'écriture chiffrée usuelle est remplacée soit sur les jetons, soit sur les cartons par une écriture mettant en jeu l'addition, la soustraction, la multiplication … selon le type de calculs dont on vise l'entraînement.

4.2 Le loto des formes avec le matériel « La moisson des formes »

La moisson des formes est un ensemble instrumental d'expression géométrique créé par Bernard Bettinelli[8].



Vue du matériel « La moisson des formes »

Les principales variables du jeu du loto des formes sont les suivantes :

Collections : un lot de formes géométriques ou des représentations dessinées de ces formes.

Meneur = Enseignant

Montre
Montre et nomme
Nomme seulement — des formes géométriques

Meneur = élève

Montre
Montre et nomme
Nomme
Décrit — des formes géométriques

Pas de meneur

Le joueur prend → sans déplacement
→ avec déplacement
→ en aveugle

Le joueur demande → sans déplacement
→ avec déplacement

Demande orale Demande dessinée

---

[7] Les éditions Hatier proposent plusieurs valisettes contenant le matériel nécessaire à la mise en œuvre de ces jeux dans les classes de cycle 2 et 3 ; il est aussi possible de fabriquer soi-même le matériel en s'appuyant sur les propositions faites dans les ouvrages d'ERMEL.

[8] http://une.education.pour.demain.pagesperso-orange.fr/materiels_pedago/mathematiques/moisson.htm pour plus d'informations sur ce matériel.

Nom
Description

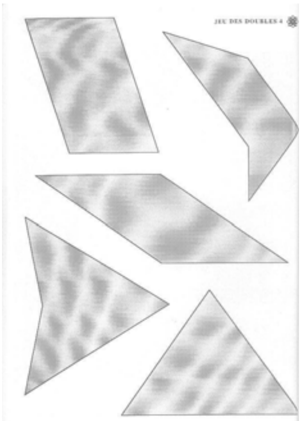
Représentation des formes

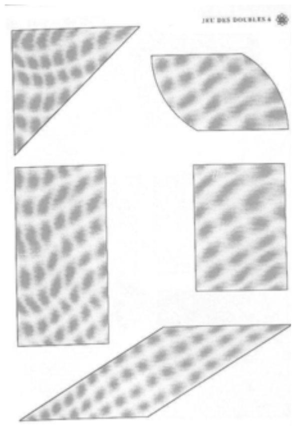
Tailles identiques dans les deux collections
Tailles différentes
Représentation partielle (par exemple figure à compléter par symétrie axiale)
Forme superposable (par exemple deux figures inscrites l'une dans l'autre)

Nombre de formes pour gagner

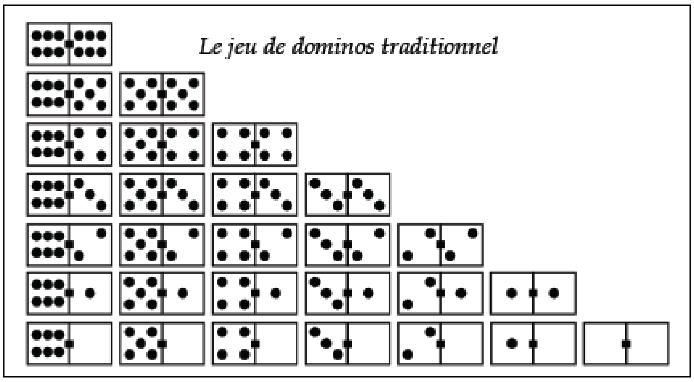
Forme unique ou assemblage

Exemples de cartons de jeu :





III - LE JEU DE DOMINOS



1 Règle usuelle

Le jeu de dominos est un jeu de société d'origine chinoise, mélangeant hasard et stratégie. Il comporte 28 pièces, réparties en nombre égal entre les joueurs (entre deux et sept joueurs). Au besoin, une pioche est ménagée avec quelques dominos (lorsque le nombre de joueurs n'est pas 4, ni 7 !).

Les joueurs cherchent à former une ligne en plaçant à tour de rôle un domino. Deux dominos se touchent à la seule condition de représenter la même image de la quantité de points. Quand un joueur ne peut pas poser de domino dans la chaîne, il pioche ou passe son tour.

Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a posé tous ses dominos ou lorsque le jeu est complètement bloqué. Le gagnant est le joueur qui totalise le moins de points avec ses dominos restants.

2 Analyse du jeu de dominos

2.1 Architecture du jeu de dominos

Un domino correspond à un espace support de représentations de plusieurs éléments d'une collection : on parlera dorénavant de « plaque ».

Le jeu de dominos est un jeu de **mise en relation** : il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, une représentation à une autre. Chaque représentation se trouvant sur une plaque, cette mise en relation doit traduire par concaténation des deux plaques concernées.

À la différence du jeu de loto, la règle d'association peut prendre différentes formes.

L'architecture de ce jeu, très proche de celle du jeu de loto puisque c'est un jeu de mise en relation, permet une transposition de l'un à l'autre, de la plupart des situations construites. Le loto sera davantage utilisé dans des modalités en collectif ou en petit groupe, alors que les dominos seront plus adaptés à un travail par deux ou en individuel.

2.2 Variables du jeu de dominos

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

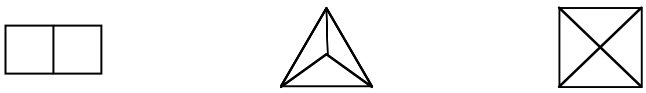
Nature de la règle d'association : règle d'équivalence : identité, équipotence, équivalence de grandeur, équivalence de forme ; règle de désignation du même objet ; complémentarité (par exemple compléments à 10) ; relation fonctionnelle (exemples : associer un nombre à son suivant, associer un nombre à son double, …) ; relation d'ordre…

Les dominos permettent ainsi un travail centré sur des relations fonctionnelles entre éléments d'une collection qui est plus pertinent qu'avec le loto : le fait que les deux éléments soient accolés permet de mettre en évidence la relation fonctionnelle et rend plus aisée la vérification des mises en relation.

Éléments des collections : réels ; représentés.

Forme des plaques : dominos (deux possibilités pour associer), « triminos » (trois possibilités pour associer), « quadriminos » (quatre possibilités pour associer), hexaminos…

Exemples de formes :



Domino *« Trimino »* *« Quadrimino »*

Nombre de plaques : nombre total et nombre par joueur.

Opacité du jeu : plaques visibles des autres joueurs ou non.

Tirage des plaques déposées : aléatoire ou non.

Règles à respecter : dans la « fabrication » du chemin… taille du support, espace ouvert ou limité, silhouette des pièces dessinées ou pas, nombres d'emplacements, nombre d'entrées « possibles », disposition des doubles…

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de dominos sont les mêmes que pour le jeu de loto et sont liés à la nature des éléments des collections et à la règle d'association.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les éléments des collections sont des nombres représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non.

Géométrique : les éléments des collections sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou par la description…

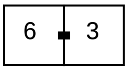
Grandeurs : les éléments sont des objets réels ou représentés à comparer selon leurs longueurs, leurs masses, leurs contenances…

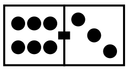
Logique (classements, rangements) : les éléments sont des objets réels ou représentés, classés selon un critère (couleur, taille, …).

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu[9]

Les mémoires de jeu peuvent être produites à partir de dominos fixés sur un support mobile à la gomme adhésive, ou de dominos collés si le jeu est reproduit sur papier ou carton. Il est également possible de compléter des chemins (vierges) sur fiches par le schéma des dominos utilisés.

En cycle 2, on peut envisager des changements de représentation sémiotique, en retranscrivant les dominos avec des écritures chiffrées.

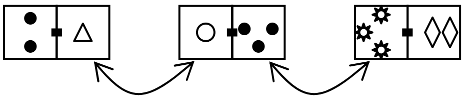
Exemple : 

pour 

Les exercices de jeux peuvent consister en :

- des jeux interrompus ;
- des jeux imposés où la forme et la longueur du chemin, ainsi que le nombre de dominos, sont fournis ; avec une seule manière d'optimiser…
- des jeux de devinettes à partir d'une chaîne terminée dont on vient de retirer deux ou trois dominos à identifier (par le schéma, par une description…).
- des jeux dont les dominos n'ont pas le graphisme usuel des constellations : motifs variés, dispositions spatiales quelconques ou couleurs distinctes (seul le paramètre « même nombre d'éléments » permettant alors d'associer deux dominos).

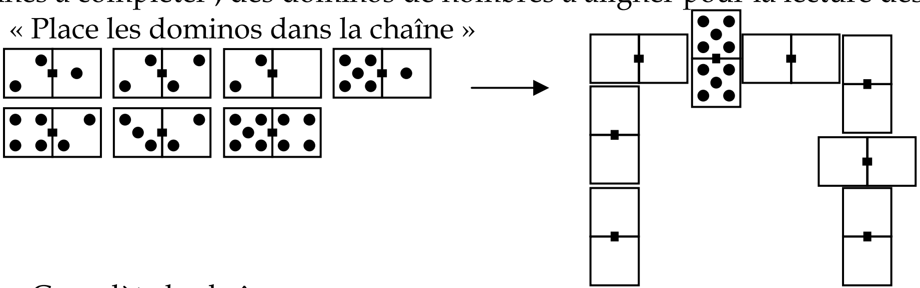
Exemple :



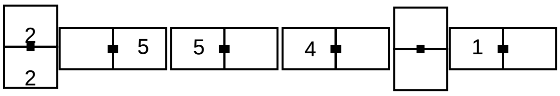
Il est possible de mettre en place les évaluations à partir des interventions orales des élèves dans les temps de rétroactions. Des pistes possibles :

- des fiches-mémoires de jeux réels ;
- des fiches de jeux fictifs à vérifier (*exemple* : « Barrer ce qui ne convient pas ») ;
- des fiches de jeux fictifs à terminer (*exemple* : « Dessiner les dominos manquants ») ;
- des chaînes à compléter ; des dominos de nombres à aligner pour la lecture des chiffres.

Exemples : 1) « Place les dominos dans la chaîne »

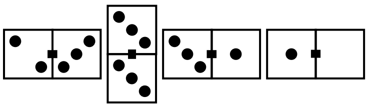


2) « Complète la chaîne » :

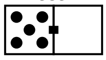


[9] D'après le dossier *Mathématiques : jouez le jeu !* in JDI ; A. RODRIGUEZ ; 10/1993, 93/94-02.

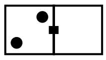
3) Jeu interrompu : « Quelles sont les différentes possibilités pour jouer, si on dispose des pièces A, B et C ? »



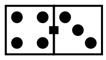
Pièce A



Pièce B

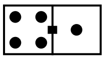
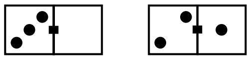


Pièce C



4) Une mémoire de jeu s'appuyant sur un moment décisif et mettant en lumière une stratégie :

« Les jeux des deux joueurs étant visibles, on est dans la situation suivante :

Jeu du joueur A :  Jeu du joueur B : 

Sur la table : 

Si le joueur B joue sa première pièce à gauche, le joueur A peut jouer à droite sa dernière pièce et il gagne. Si le joueur B joue sa deuxième pièce à droite, le joueur A ne peut pas jouer et c'est le joueur B qui gagne au coup suivant en plaçant sa dernière pièce à gauche. »

Cette mémoire de jeu pourra conduire à l'élaboration d'une stratégie gagnante sous forme de raisonnement inductif : « *Si j'ai la possibilité de poursuivre la chaîne aux deux extrémités, je choisis celle qui à la fois m'ouvre des placements de dominos et ferme le jeu pour les autres* ».

4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de dominos

Les variantes du jeu de dominos correspondent à des jeux pour lesquels la mise en relation de deux éléments se traduit par la concaténation des deux plaques sur lesquelles figurent ces éléments. Elles ont donc toutes la même architecture. Plusieurs sont présentés dans ce qui suit, correspondant à différents domaines mathématiques et différentes règles d'associations.

Il existe également d'autres jeux de mise en relation, comme le loto précédemment étudié : leur architecture est donc proche de celle du jeu de dominos, sans être exactement la même. D'autres exemples sont donnés ci-dessous.

4.1 Quelques variantes

Parmi les variantes du jeu de dominos, on pourra citer :

Le domino des cartes de Noël[10]

16 cartes portant chacune une demi-image, coupée selon l'axe de symétrie de la figure.

Deux dominos peuvent s'associer si les deux demi-images forment une image complète.

Domaine mathématique : géométrie

Règle d'association : relation de symétrie.

Exemple de carte

---

[10] In *Maths en pousse - 17 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER, E. GÉROME ; collection Diagonale MS ; Nathan ; 1994 ; p. 13

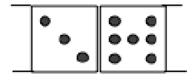
Les dominos-points[11]

36 pièces sans double, représentant les constellations de 1 à 9.

Deux dominos peuvent s'associer si les nombres en contact totalisent 10.

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.



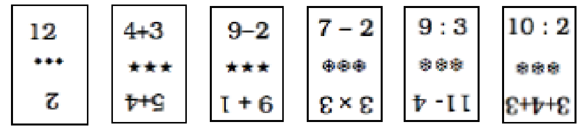
Exemple

Les dominos numériques[12]

Deux dominos sont accolés si les cases en contact portent le même nombre (sous deux écritures différentes).

Domaine mathématique : numérique ; sont en jeu les nombres de 1 à 12, sous forme chiffrée simple, ou de décomposition additive ou soustractive, ou encore multiplicative.

Règle d'association : identité.



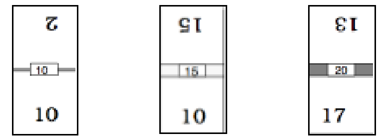
Exemple de dominos numériques

Faire dix, quinze ou vingt[13]

Trois familles de 35 plaques portant les nombres écrits en chiffres. Deux plaques sont accolées si les nombres en contact totalisent 10 (première famille), 15 (deuxième famille), ou 20 (troisième famille).

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.



faire dix faire quinze faire vingt

Exemples de dominos-nombres

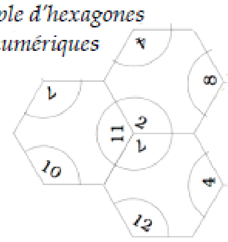
Hexagones numériques[14]

19 hexagones portant chacun 3 nombres. Les secteurs en contact se raccordent s'ils font un total de 20.

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

Exemple d'hexagones numériques



Faire cent[15]

48 carrés portant un nombre en chaque sommet. Lorsque quatre sommets sont associés, le total en ces quatre sommets doit être 100.

Domaine mathématique : numérique , calcul mental

Règle d'association : complémentarité.

Exemple d'agencement

Le jeu des trentaines[16]

25 carreaux sur lesquels sont inscrits quatre nombres entiers, à placer sur une grille.

La somme des deux nombres situés sur les côtés en contact de deux carreaux doit être égale à 30.

Domaine mathématique : numérique

---

[11] in *Faites vos jeux* ; F.BOULE ; Editions Didier ; 2005 ; p.35

[12] Ibid ; p. 39

[13] Ibid ; p.40

[14] Ibid ; p. 39

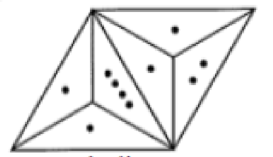
[15] Ibid p.40

[16] Voir http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/07_Trentaines_p_26.pdf

Règle d'association : complémentarité.

Les triminos numériques[17]

20 triangles partagés en 3 parties, chaque partie comportant une constellation de points. Deux côtés sont accolés si le total de leurs points est égal à 5.


Exemple d'agencement

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

D'autres jeux…

Solitaire, boîtes de rangements[18],…

4.2 Jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de dominos

Comme explicité précédemment, d'autres jeux possèdent une architecture proche de celle du jeu de dominos. Citons par exemple :

Tous les jeux de Mémory : dans ces jeux la mise en relation se traduit par l'association de deux plaques qu'il faut retrouver parmi d'autres, faces cachées. Dans ce type de jeu de mémoire, des compétences du domaine de la structuration de l'espace interviennent également (repérage dans un plan).

Les jeux de mariages, comme le « pouilleux », le « jeu des mariages de la table de Pythagore »[19]…

Comme évoqué précédemment à propos du jeu de loto, la plupart des situations construites pourront dans une certaine mesure être transposées des unes aux autres.

IV - LE JEU DE BATAILLE

1 Règle usuelle du jeu de bataille

Ce jeu de hasard se joue habituellement à deux joueurs (mais le nombre de joueurs peut être supérieur).

On distribue l'ensemble d'un jeu de cartes (52 ou 32) aux joueurs, qui n'en prennent pas connaissance.

À chaque tour, chacun des joueurs retourne simultanément la carte du haut de son paquet. Celui qui possède la carte de la plus haute valeur — selon la hiérarchie : As, Roi, Dame, Valet, dix... jusqu'au deux — gagne les cartes posées sur la table, qu'il place sous son paquet.

En cas d'égalité de valeurs, les joueurs en ballottage disent « bataille ! » et commencent par placer une première carte face cachée puis une seconde carte face visible pour décider qui gagnera le tour. En cas de nouvelle égalité, la procédure est répétée.

Le jeu se termine quand un des joueurs a épuisé son paquet et le gagnant est celui qui a en sa possession toutes les cartes du jeu.

---

17 In *Maths en herbe - 20 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER ; collection Diagonale GS ; Nathan ; 1994 ; p. 24. D'autres jeux du commerce se sont développés, comme Triominos©, jeu édité par Goliath.

18 In Jeux 5 ; brochure APMEP n° 119; 1998

19 Sur chaque carte, un produit est écrit ; il s'agit, par exemple, d'associer deux cartes dont la somme des résultats est un multiple de dix. ERMEL Mariages

2 Analyse du jeu de bataille

2.1 Architecture du jeu de bataille

Une carte correspond à un espace support de représentation d'un élément d'une collection.

Le jeu de bataille est un **jeu de comparaison**.

- La règle de comparaison peut être définie mathématiquement par une relation d'ordre soit entre des objets, soit entre des grandeurs, soit entre des collections, soit entre des quantités, soit entre des nombres.

- Le joueur qui possède l'élément le plus grand au sens de cette relation d'ordre, gagne tous les éléments comparés.

À partir de l'architecture du jeu, il est possible de dégager les variables du jeu.

2.2 Variables du jeu de bataille

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Nature de la relation de comparaison : comparaison de quantités ; comparaison de grandeurs (longueurs ; périmètres ; aires ; masses ; durées (et aussi avant, après…)…) ; comparaison de nombres ou de mesures.

Nature des objets comparés : collections ; formes géométriques ; objets ; désignations ; résultats de calculs.

Collections ou objets : peuvent être réels ou représentés.

Obtention des objets à comparer : choix délibéré ou hasard.

Validation : qui ? comment ? éventuellement à l'aide de quel outil ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Seuls deux domaines mathématiques peuvent être abordés : le domaine des nombres et calculs, ainsi que celui des grandeurs et des mesures.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les nombres sont énoncés, ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées (constellations, matériel de numération…) ou non.

Grandeurs et mesures : les éléments sont des objets ou des assemblages d'objets, des représentations de ces objets ou assemblages ; on utilise la comparaison directe ou on a recours à la mesure ; dans ce dernier cas, les mesures peuvent être exprimées dans la même unité ou dans des unités différentes.

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Pour le jeu de bataille, les reproductions de différentes situations de jeu avec le résultat de la comparaison serviront de mémoires du jeu ; elles seront aussi utilisées pour proposer aux élèves divers exercices de jeu destinés à renforcer l'appropriation des techniques rencontrées.

Jeux interrompus :

- Une situation de jeu étant donnée, déterminer le gagnant ; par exemple :

  Joueur A : 7 Joueur B : 6

- La carte du joueur A étant connue, il est possible d'amener les élèves à rechercher (en général ou dans un lot de cartes) toutes les cartes qui permettraient au joueur B de l'emporter.

Exercices de jeu :

- Les reproductions de diverses situations de jeu étant données, déterminer le gagnant.

- Rechercher les erreurs dans des situations de jeu proposées pour lesquelles on indique le gagnant.
-

4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de bataille

4.1 Variantes de la bataille

La batawaf© (Djeco)

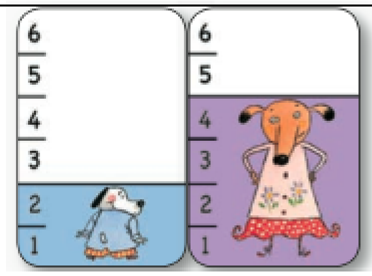
La carte sur laquelle est représenté le chien le plus grand l'emporte.

Cette variante est adaptée aux élèves de petite et moyenne section.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de longueurs.

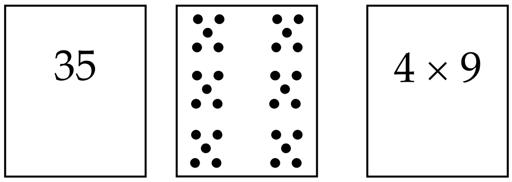
Dans ce jeu, on peut s'interroger sur la présence et le rôle des nombres et des graduations qui risquent de faire basculer la tâche vers une comparaison de nombres, la comparaison directe des longueurs étant rendue difficile du fait que les objets sont représentés et non manipulables.



Des cartes de la Batawaf

La bataille des constellations[20]

Trois types de cartes présentant différents types de désignations des nombres sont mélangés : des cartes sur lesquelles figurent des nombres, des cartes sur lesquelles figurent des produits ainsi que des cartes-constellations (rendant possibles plusieurs lectures des collections selon le point de vue adopté). Cette variante est adaptée à des élèves de cycle 3.



Cartes de la bataille des constellations

Domaine mathématique : domaine numérique. Il s'agit de travailler à la fois sur la compréhension de la multiplication (comme addition réitérée ou dans le cadre de la configuration rectangulaire) et d'œuvrer à la mémorisation de certains faits numériques.

Relation de comparaison : comparaison de nombres entiers naturels.

La bataille des masses[21]

Une boîte ouverte contient un lot de dix objets différents dont deux seulement de même masse. Douze cartes représentent ces objets : les deux objets de même masse sont représentés sur deux cartes chacun ; les autres objets sur une seule carte. Les douze cartes sont mélangées et distribuées également aux deux joueurs, qui les placent en pile devant eux, faces cachées.

Les deux joueurs retournent en même temps leur première carte. Ils choisissent chacun dans la boîte l'objet représenté sur leur carte et le posent sur un plateau d'une balance pour déterminer le plus lourd. Celui qui possède la carte représentant l'objet le plus lourd ramasse les deux cartes et les place sous sa pile. L'autre enfant replace les objets dans la boîte.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de masses (sans recours à la mesure).

---

[20] Travail du groupe IREM de Draguignan ; 2009/2010.

[21] Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur, coordonné par Nicolas Rouche, collection "De la prime enfance à l'âge adulte", CREM, 2002 - document téléchargeable à l'adresse http://www.crem.be/index.php/Publications/dl/?Id=4.

La bataille des longueurs[22]

On s'affranchit ici du support des cartes.
Les joueurs disposent d'un même lot de 8 à 10 baguettes de longueurs différentes et d'un pot rempli de sable ou de semoule dans lequel ses baguettes sont plantées de façon à masquer les différences de longueurs.

Les deux joueurs choisissent une baguette dans leur pot et comparent ensuite les longueurs des deux baguettes tirées. Celui qui a la baguette la plus longue garde devant lui les deux baguettes. En cas d'égalité, chaque joueur choisit une autre baguette dans son pot ; la comparaison des longueurs de celles-ci permet de déterminer celui qui emporte les quatre baguettes.
On continue ainsi jusqu'à ce que les pots soient vides.

Deux règles sont alors possibles pour déterminer le gagnant de la partie :
Règle 1 : le gagnant est celui qui a emporté le plus grand nombre de baguettes.
Règle 2 : le gagnant est celui qui, en plaçant les baguettes gagnées bout à bout, obtient la plus grande longueur totale.

Afin de décontextualiser et de faire comprendre que le concept de longueur n'est pas attaché aux objets rectilignes rigides, on peut remplacer les baguettes par des bouts de laine ou de ficelle, placés dans une enveloppe opaque pour masquer les différences de longueur. Afin de prendre en compte les difficultés liées aux manipulations plus complexes dans ce cas, on prendra un lot de 5 à 7 bouts de laine et on se limitera à la règle 1 pour déterminer le vainqueur.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de longueurs.

La bataille des évènements[23]

Les cartes reproduisent les pages d'un album connu des élèves ou une partie de ces pages permettant de repérer des évènements marquants de l'histoire ; chaque page (ou évènement) figure sur une ou deux cartes ; on constitue ainsi un jeu de 12 à 20 cartes que l'on répartit équitablement entre les joueurs.

Les joueurs retournent en même temps une de leurs cartes. Pour déterminer celui qui emporte les cartes, on compare les évènements : celui dont l'évènement se situe après emporte les deux cartes ; on peut recourir à l'album pour valider : en général, la structuration temporelle de l'histoire correspond à l'ordre des pages de l'album.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : ordre chronologique.

4.2 Jeux d'architecture proche

Les jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de bataille correspondent à des jeux de comparaison.

Le jeu des boîtes empilées[24]

Des boîtes contiennent un certain nombre d'objets (3, 5, 4, 1, 2, 4, par exemple) ; ces objets peuvent être des jetons, des billes… ; les boîtes sont empilées, seul le contenu de la boîte du dessus est visible.

À tour de rôle, chaque joueur lance le dé. Il prend la boîte du dessus de la pile si le nombre d'objets de la boîte est plus petit que le nombre représenté sur le dé. S'il ne peut pas prendre la boîte, c'est au joueur suivant de lancer le dé. Le gagnant est le joueur qui possède le plus d'objets.

Domaine mathématique : domaine numérique.

---

22 D'après une idée de P. Eysseric.

23 Ibid.

24 In *Apprentissages numériques* ; ERMEL GS ; Hatier ; pp 68-76

Relation de comparaison : comparaison de nombres entiers naturels inférieurs à 10.

Le jeu des boîtes alignées[25]

Cette situation d'apprentissage fait suite au jeu des boîtes empilées. Le principe reste le même, le choix de la boîte parmi un lot de boîtes revenant cette fois au joueur.

V - LE JEU DE L'OIE

1 Règle usuelle du jeu de l'oie

La première mention du jeu de l'oie provient de la cour des Médicis à Florence, vers 1580. Traditionnellement, ce jeu de hasard comprend un plateau sur lequel figure une piste de 63 cases disposées en spirale enroulée vers l'intérieur et comportant un certain nombre de cases pièges et de cases chance et deux dés. À tour de rôle, chaque joueur lance les deux dés, et fait le total des points. Il avance alors son pion du nombre de cases correspondant au nombre obtenu, puis doit respecter les consignes de la case sur laquelle il arrive. Le gagnant est le premier joueur exactement arrivé à la case 63[26].

2 Analyse du jeu de l'oie

2.1 Architecture du jeu de l'oie

Le jeu de l'oie est un **jeu de parcours**, il est d'ailleurs considéré comme l'ancêtre des jeux actuels de parcours et de plateau.
Il s'agit de déplacer un (ou plusieurs) pion(s) **sur une piste orientée**, en fonction d'indications données par le jet de dés et/ou par les cases du parcours. Ces indications prennent des formes différentes :

- les constellations des dés indiquent le nombre de cases d'un déplacement en avançant ;
- le codage des cases peut indiquer un nouveau déplacement, en avançant ou en reculant, le nombre de cases étant soit défini par le jet de dés (*exemple :* si un joueur arrive sur la case 27, il avance de nouveau du même nombre de cases), soit prédéfini dans le jeu (*exemple :* si un joueur arrive sur la case 42, alors il retourne sur la case 30) ;
- le codage des cases peut également indiquer une action (*exemple :* si un joueur arrive sur le puits, case 31, alors il devra attendre qu'un autre joueur le délivre en prenant sa place).

2.2 Variables de jeux de parcours

Nombre de pions : un ou plusieurs pions par joueur.

Nature du(des) pion(s) : le joueur ; une figurine (bonhomme, cheval… soulignant l'orientation) ; un pion ou un jeton (non orienté).

Nature de la piste : piste simple ou parcours de plusieurs pistes possibles dont le choix est laissé au joueur ; la piste peut être orientée ou non.

Nombre de plans de jeu et partage de la piste de jeu : une seule piste partagée par tous les joueurs sur un unique plan de jeu ; une piste par joueur sur un support de jeu partagé ; une piste et un support de jeu par joueur.

Espace de jeu : micro ou méso espace.

Longueur de la piste : nombre de cases.

---

[25] Ibid.

[26] La règle traditionnelle accompagnée du plateau est présentée en annexe.

Nature des cases : avec ou sans consignes ; avec ou sans codage.[27]

Nature du déplacement : déplacement d'un nombre de cases donné ; déplacement jusqu'à une case contenant un élément déterminé par le jet de dé (exemple : forme présente sur la face supérieure du dé).

Ce qui provoque le déplacement : une consigne du maître ; un ou plusieurs dés ; une ou plusieurs cartes…

Présence ou pas d'un déplacement « blanc » : par exemple le dé tombe sur une face blanche qui oblige à attendre le tour suivant pour se déplacer.

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Quel que soit le domaine mathématique dans lequel on peut proposer ce jeu à des fins d'apprentissage, des compétences de l'ordre de la structuration de l'espace, liées au déplacement sur une piste orientée, sont mises en œuvre.

Numérique (nombres et/ou calculs) : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre numérique ; les nombres sont énoncés ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non sont proposées… ou enfin des signaux sonores sont donnés.

Géométrique : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre géométrique ; des informations d'ordre géométrique figurent sur les cases du parcours ; ce sont des formes ou des assemblages de formes ; des noms de formes ; des représentations par le dessin ou des descriptions de formes…

Logique (classements) : le déplacement est indiqué par un critère ; la case de destination doit être conforme à celui-ci (couleur, taille, ouvert/fermé…).

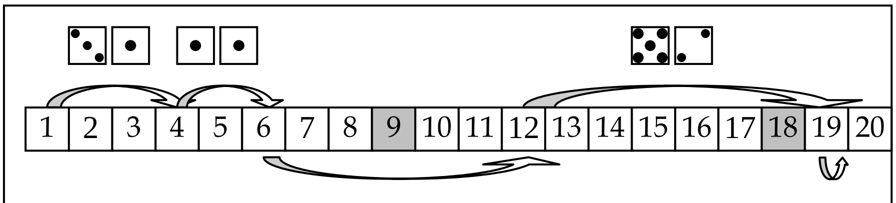
3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Le jeu de l'oie est un jeu de hasard. Le jeu interrompu consiste à faire parler les enfants, au cours d'une partie, sur ce qui serait favorable ou défavorable, c'est-à-dire leur faire préciser quelle face du dé ils souhaiteraient obtenir et les raisons de ce souhait. Dans le jeu interrompu, le nombre devient un outil qui permet d'anticiper les déplacements.

Un premier exercice de jeu peut être un jeu durant lequel la mémoire de jeu est constituée. En cycle 2, une mémoire de jeu peut prendre plusieurs formes :

[27] Dans le jeu de l'oie, les nombres ont deux statuts : « nombre repère » et « nombre quantité ».

- à partir de la représentation de la piste



Exemple d'un début de partie

- sous forme d'un tableau

Exemple d'un début de partie :

Jets de dés obtenus				-
Cases atteintes à chaque tour	4	6 → 12	19	19

D'autres exercices de jeu peuvent s'appuyer sur l'une ou l'autre de ces mémoires de jeu. Par exemple :

- Deux données étant connues (la case sur laquelle se trouve le pion avant le déplacement ; celle sur laquelle il se trouve après ; ou le jet de dés), il faut trouver la troisième donnée. Il s'agit de problèmes du champ additif, de type transformation d'état (selon la typologie de G. Vergnaud), la transformation étant positive, avec recherche de l'état final, de l'état initial ou de la transformation elle-même.

- On connaît la case sur laquelle se trouve le pion, il s'agit de proposer un jet de dés le plus (ou le moins) favorable possible en tenant compte des contraintes de la piste. Il s'agit ici de mettre en œuvre un raisonnement logique consistant à examiner tous les possibles.

Un troisième type d'exercices de jeu peut consister en une variante du jeu de l'oie, par exemple en introduisant un deuxième pion par joueur, le déplacement de l'un ou de l'autre (ou des deux) en fonction des dés étant laissé à la charge du joueur. Ici on introduit un choix.

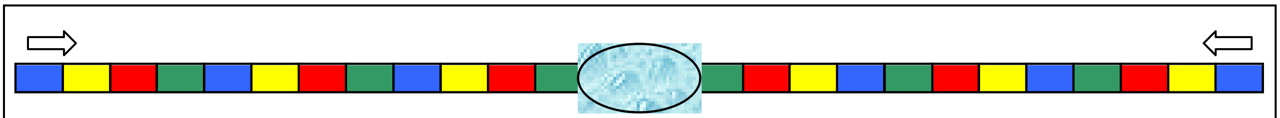
4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de l'oie

Il existe une grande variété de jeux de parcours, certains traditionnels, d'autres plus modernes. Nous en citons quelques-uns.

4.1 Des variantes du jeu de l'oie

La mare aux canards[28]

La piste, formée de cases de couleur, mène à une mare dans laquelle s'ébattent trois canards.



Piste de la mare aux canards

À tour de rôle, les joueurs déplacent leur bonhomme jusqu'à la prochaine case de la couleur indiquée par le dé. Lorsque le bonhomme se trouve sur la dernière case avant la mare, le joueur prend un canard et replace son bonhomme au départ.

Domaine mathématique : logique

Règle de déplacement : critère de conformité à la couleur.

Ce jeu de hasard est adapté à la petite section.

[28] In *Les mathématiques par les jeux - PS* ; L. CHAMPDAVOINE ; Nathan ; 1992 ; p.20

Le chemin des formes [29]

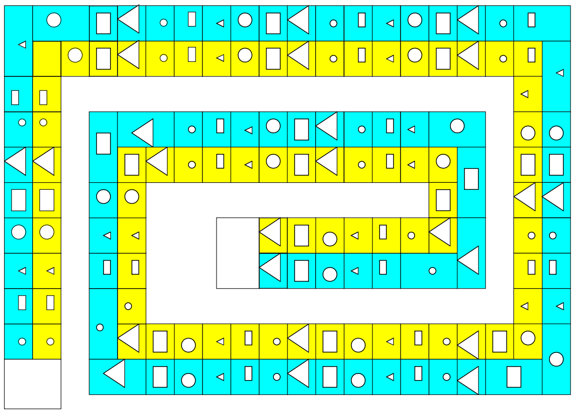
La piste est formée de cases dans lesquelles des formes de différentes tailles sont représentées. Les mêmes figurent sur les faces du dé.

A tour de rôle, chaque joueur lance le dé et déplace son pion jusqu'à la prochaine case correspondant à la face du dé.

Domaine mathématique : logique (taille) et géométrie (formes).

Règle de déplacement : critère de conformité à la taille et à la forme.

C'est un jeu de hasard, adapté à moyenne section.



Piste du chemin des formes

Le jeu des petits chevaux

Ce jeu de parcours traditionnel allie hasard (jet de dés) et stratégie (choix du pion à déplacer) dans le domaine numérique (nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 12).

Cartagena[30]

C'est un jeu de stratégie (choix des pions à déplacer et choix du déplacement) avec une part de hasard (tirage des cartes), dans le domaine de la logique (motif).

Les cartes du jeu et un segment du plateau de Cartagena

Ce jeu est adapté à des élèves de cycle 3.

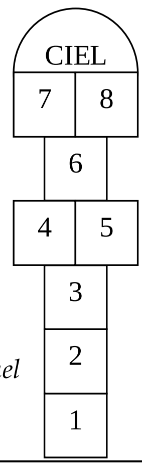
4.2 Jeux de marelle

C'est un jeu de cours très ancien, que l'on retrouve sur le forum de Rome.
Au Moyen Âge, ce jeu est très pratiqué et le dessin rappelle celui des églises.

Dans le jeu traditionnel, un parcours est dessiné sur le sol et va de terre (1) à ciel (9). Après avoir lancé un jeton (souvent un caillou), les joueurs progressent dans les différentes cases à cloche-pied, tout en évitant les cases où se trouvent les pierres, ainsi que d'empiéter sur les lignes du tracé.
Le gagnant est celui qui le premier arrive à placer son jeton sur le 9 (ciel) et à effectuer le parcours.

L'architecture des jeux de marelle est proche de celle du jeu de l'oie, puisqu'il fait intervenir un déplacement sur une piste.

Les domaines mathématiques cités précédemment sont tous envisageables.



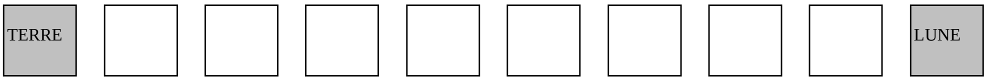
Jeux de marelle traditionnel

[29] In *Les mathématiques par les jeux - MS* ; L. CHAMPDAVOINE ; Nathan ; 1995 ; p.22

[30] L. COLOVINI ; Venice Connection, Winning Moves ; Rio Grande Games ; 2000

Les jeux de marelle, à vivre dès la petite section, sont transposables dès la moyenne section en jeux de parcours dans le micro-espace.

Exemple de jeu de marelle en PS[31] : En salle de motricité, les élèves doivent avancer d'une case à cloche-pied quand l'enseignant tape une fois dans ses mains.

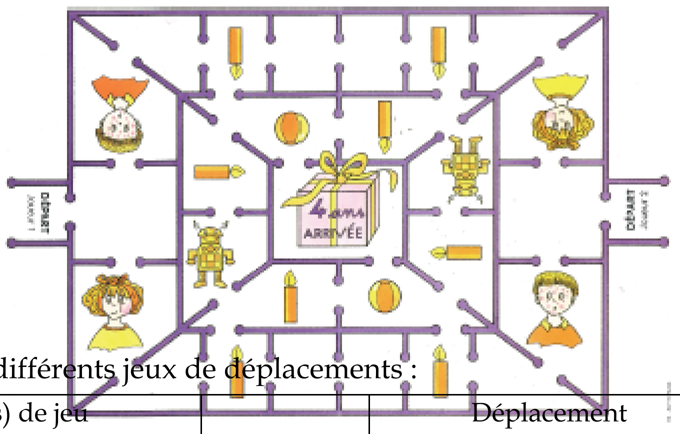


Piste d'un jeu de marelle pour la salle de motricité

4.3 Jeux de labyrinthe

Dans les jeux de labyrinthe, il s'agit de se déplacer sur un parcours non orienté. L'architecture de tels jeux est donc proche de celle du jeu de l'oie.

Exemple : Plateau du « Cadeau d'anniversaire »[32]



Le tableau ci-dessous synthétise l'analyse de ces différents jeux de déplacements :

Nom du jeu	Pion(s)		Piste(s) et plan(s) de jeu					Déplacement	
	Nombre par joueur	Nature	Espace	Partage	Nature	Longueur	Nature des cases	Provoqué par…	Nature
La mare aux canards	1	Bon-homme	Micro-espace	1 piste par joueur. Plan de jeu pour tous	Piste simple orientée	12	Codage couleur	Jet d'un dé à couleur	Jusqu'à une case de même couleur
Le chemin des formes	1	Pion	Micro-espace	1 piste par joueur. Plan de jeu pour tous	Piste simple orientée	73	Codage forme et taille	Jet d'un dé avec formes petites et grandes	Jusqu'à une case de même forme et même taille
Les petits chevaux	4	Che-vaux	Micro-espace	Une piste pour tous	Piste simple orientée	56	-	Jet de 2 dés constellation	Nombre de cases
Cartagena	6	Pions	Micro-espace	Une piste pour tous	Piste simple orientée	36	Codage motif	En avançant un pion de son choix : choix d'une carte parmi	Jusqu'à une case libre de même motif

[31] Voir *Des jeux et des mathématiques de la PS au CM2* ; P. EYSSERIC ; Bulletin APMEP ; 420 ; 1999 ; pp. 5-14

[32] In *Maths en pousse - 17 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER ; collection Diagonale MS ; Nathan ; 1994 ; p. 17

								plusieurs déjà tirées ou En reculant un pion de son choix	Jusqu'à la première case occupée par 1 ou 2 pions
La marelle tradition-nelle	1	Joueur	Méso-espace	Une piste pour tous, chacun son tour	Piste simple orientée	9	Codage numérique	Le signal de départ	Toutes les cases sauf celle sur laquelle se trouve le caillou
Le cadeau d'anniver-saire	1	Person-nage	Micro-espace	Une piste pour tous	Laby-rinthe	26	Consignes d'actions (déplace-ments, gestion du stock de bougies)	Jet d'un dé avec choix du parcours	Nombre de cases

VI - DES EXEMPLES DE MODULES DE FORMATION

En tant que formateurs d'enseignants du premier degré, nous avons décidé de mettre en œuvre en partie et « en accéléré » dans cet atelier une stratégie de type homologie (Kuzniak 1994). Ce dispositif est caractérisé par le fait que, proposant une mise en situation sur un temps court, pour sensibiliser les participants simultanément aux apports mathématiques et didactiques qu'elle est susceptible de provoquer, nous les confrontons à une situation qu'ils pourront apprêter pour la proposer à des étudiants ou des stagiaires.

Les étudiants ou stagiaires, à qui serait proposée une telle mise en situation, s'approprient ainsi l'intégralité de la démarche d'intégration d'un jeu aux apprentissages mathématiques :

Analyse du jeu et mise en évidence de son architecture mathématique ;

Exploration des différentes variables pour passer du jeu de société particulier envisagé au départ aux caractéristiques génériques du jeu ;

Inventaire des domaines mathématiques dans lesquels le jeu générique pourra être décliné ;

Situation d'homologie autour de certains de ces jeux permettant de construire et de s'approprier mémoires de jeu et exercices de jeu ;

Construction de nouveaux scénarios pour la classe en jouant sur les variables pour des déclinaisons par niveau de classe et des progressions dans l'utilisation d'un jeu.

Nous complétons le travail présenté en atelier par des exemples de déroulements de modules de formation pour préciser l'intérêt, d'un point de vue mathématique et didactique, de ces mises en situations.

1 Un module de formation continue d'enseignants du cycle 1 au cycle 3

Contrairement à la demande régulièrement formulée par les enseignants de « jeux nouveaux », « inédits », il nous semble particulièrement fécond, dans le cadre d'une formation initiale et/ou continue, dans un premier temps, de proposer à des groupes un jeu de société usuel et de leur demander de dégager l'architecture mathématique du jeu ainsi que les cadres d'apprentissage dans lesquels il pourra être utilisé à l'école. La confrontation des différentes analyses permet alors d'élaborer des scénarios pour la classe adaptés aux différents apprentissages visés. Cette approche leur permet ensuite de mener des analyses « pointues » des nouveaux jeux dont ils découvrent les règles en les situant par rapport à ces « références ». Ils sont également plus armés pour repérer les différentes phases (les différents moments) à gérer dans la classe.

Durée du module : 12 heures

Public : PE du cycle 1 au cycle 3

Trame du déroulement de la formation :

1. Analyse du jeu de loto : du particulier au générique
   Objectif : Découvrir l'architecture et l'intérêt de ce jeu dans les apprentissages mathématiques.
2. Déclinaison du jeu dans le domaine géométrique
   Objectif : Travail autour des variables du jeu.
3. Compléments : les lotos de la « moisson des formes » (information, documentation).
4. Conclusion : intérêt et richesse des jeux du patrimoine
   - Utilisation possible dans de nombreux contextes.
   - Pas de temps perdu dans l'appropriation de règles nouvelles.
   - Temps du jeu adaptable au temps de la classe.
   - De bons supports pour l'entraînement.
5. Expérimentation par groupes d'autres jeux
   Objectif : Vivre la situation de jeu pour repérer les pré-requis mathématiques, les utilisations possibles en classe, l'architecture et les variantes.
6. Jeux de stratégie et résolution de problèmes
   Objectif : Expliciter le traitement et le codage de l'information, le rôle de l'anticipation et de la formulation[33].

2 Un travail autour du jeu des maisons[34] en formation initiale ou continue

Dans ce jeu, chaque joueur déplace un pion à son tour, sur une piste orientée, du nombre de cases indiqué par un jet de dé. En fonction de la case sur laquelle il va poser son pion, il emporte une carte représentant un toit, un premier étage ou un rez-de-chaussée d'une maison.

Lorsqu'un des joueurs est parvenu sur la case Arrivée, chacun des joueurs essaie de reconstituer le plus grand nombre possible de maisons complètes à l'aide des cartes remportées. Pour cela, il peut éventuellement échanger certaines de ses cartes auprès d'un banquier en respectant des règles d'échange : deux étages contre un rez-de-chaussée, cinq étages contre un toit.

L'architecture de ce jeu est celle du jeu de l'oie : c'est un jeu de parcours. Cependant par rapport au jeu de l'oie traditionnel, on a renoncé à beaucoup d'éléments : le nombre n'intervient plus que pour indiquer le nombre de cases correspondant à la longueur du déplacement (les cases de la piste ne sont

---

[33] *Apprentissage à la résolution de problèmes au CE* ; CRDP de Grenoble ; 1988

[34] *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* ; CP ; ERMEL ; Hatier, 1991 et *Chacun, tous… différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages,* Rencontres pédagogiques n° 34, INRP, 1995 - téléchargeable à l'adresse http://lara.inist.fr/handle/2332/1260.

pas numérotées) ; les cases ne donnent pas de consignes d'action, mais indiquent seulement la carte que le joueur emporte. Ces simplifications, permettent de recentrer le jeu sur l'objet de l'apprentissage visé.

On a ici utilisé l'architecture du jeu de l'oie pour construire une situation d'apprentissage, mise en scène par le jeu : le jeu des maisons est un **jeu pour apprendre** à distinguer valeur et quantité, puisque le joueur gagnant ne sera pas celui qui atteint la case Arrivée en premier, ni celui qui a emporté le plus grand nombre de cartes, mais celui qui, en prenant en compte la valeur de chaque carte, aura réussi à construire le plus grand nombre de maisons complètes.

Contrairement à beaucoup d'autres jeux, le jeu des maisons n'est pas à utiliser seulement dans des phases d'entraînement.

En formation, la vidéo de l'INRP, un peu « ancienne », permet de présenter différents moments de la vie de ce jeu dans une classe de CP. Les stagiaires doivent repérer dans le film :

- les différents moments de l'utilisation du jeu et la forme des différentes activités de la classe autour de ce jeu : ces observations peuvent ensuite être formalisées en les identifiant comme des mémoires de jeu et des exercices de jeu ;
- les différentes modalités de différenciation utilisée par l'enseignante dans sa classe.

Le document permet aussi de revenir sur l'importance de certains éléments du matériel et de sa préparation par l'enseignant : jeu de grand format pour le travail en classe entière ; plateau de jeu de taille standard pour le jeu à trois ou quatre ; reproductions des cartes du jeu comme matériel d'aide lors des phases d'exercices d'entrainement.

Il est aussi l'occasion de s'interroger sur l'intérêt de certains travaux proposés dans des fichiers au cycle 2. On donne la règle d'un jeu auquel - nous dit-on - ont joué plusieurs enfants ; le fichier représente la situation à laquelle ils sont arrivés dans le jeu et la tâche des élèves est de déterminer le gagnant.

Ces fiches pourraient constituer d'excellents exercices de jeu si les élèves avaient au préalable effectivement pratiqué le jeu en question.

Malheureusement, ce n'est pas ce qui se passe dans beaucoup de classes dans lesquelles les fiches sont utilisées sans pratique du jeu. L'habillage de l'exercice mathématique par le jeu devient alors pour certains élèves un obstacle supplémentaire : ils doivent se représenter une situation parfois complexe qui leur est présentée à l'aide de mots et d'images, mais à laquelle ils n'ont pas réellement été confrontés.

3 Un module de formation continue en ASH

Durée du module : 6 heures

Public : PE en formation CAPASH option D

Objectifs : - Découvrir et analyser des jeux conçus pour des apprentissages mathématiques ;
- Déterminer les différentes phases d'une mise en œuvre dans une classe ;
- Mettre en place des situations d'apprentissage basées sur ces jeux.

Trame du déroulement de la formation :

1. Introduction à la journée de formation : partir des représentations des stagiaires
   Objectif : Définitions, codification, classification des jeux
2. Situation d'homologie à partir du jeu Magix 34[35]
   - Mise en situation des stagiaires
   - Analyse mathématique du jeu, émergence des changements de cadre
   - Analyse pédagogique et didactique de la mise en œuvre

   Objectif : mettre en évidence les différents moments d'une situation d'apprentissage (appropriation, action, formulation, institutionnalisation)

[35] *Quelles problématiques pour la formation des enseignants à la pratique du jeu en classe ?* in Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM ; D. FARADJI et C. TAVEAU ; 2005

3. Le point sur les apprentissages par le jeu
   Objectif : notion d'exercice de jeu, de mémoire de jeu
4. Jouer et faire jouer
   Les stagiaires sont mis dans une situation de jouer, puis de construire des mémoires de jeu et enfin d'être confrontés à des exercices de jeu, ce qui leur permet de percevoir compétences et connaissances concernées par ces activités. Ils sont amenés à construire des scénarios pour la classe en jouant sur les valeurs des variables pour des déclinaisons par niveau de classe, ainsi que des progressions dans l'utilisation d'un jeu.

4 Une intervention en master enseignement

Cadre de l'intervention : Unité d'Enseignement sur liste « Mathématiques : utiliser des jeux dans l'enseignement », d'une durée totale de 27 heures.

Public : étudiants de M1, semestre 2.

Objectifs : Savoir utiliser le jeu pour contribuer à développer des savoirs et des savoir-faire dans les différents domaines mathématiques des programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire).

Déroulement d'un TD de 3 h « Du jeu à une situation d'apprentissage en maternelle » :

Les étudiants qui ont suivi ce module ont eu au préalable l'occasion de voir fonctionner des ateliers de jeu en PS/MS. Ils ont pu ainsi prendre conscience de certaines difficultés spécifiques aux enfants de maternelle.

1. Découverte et appropriation de jeux mathématiques
2. Analyse d'un jeu à plusieurs niveaux
   - analyse mathématique ;
   - réflexion sur les modalités d'un jeu interrompu : organisation, objectifs visés, consigne, supports ;
   - proposition d'une évaluation : modalités, supports, compétences évaluées, élaboration d'une grille de critères.

VII - CONCLUSION

Pour terminer, il semble utile de revenir sur la diversité des jeux à proposer dans le cadre d'un travail de formation.

Ces jeux doivent permettre aux (futurs) professeurs de disposer d'un large panorama des structures mathématiques présentes dans le champ des apprentissages mathématiques de l'école :

Les jeux d'association comme le loto, les dominos ou le jeu des mariages qui conduisent à la constitution de couples dont les éléments sont reliés soit par une relation d'équivalence, soit par une relation fonctionnelle, soit par une relation d'opposition (négation).

Les jeux de comparaison comme le jeu de bataille qui mettent en jeu une relation d'ordre total entre les éléments d'une collection.

Les jeux de déplacement sur une piste qui permettent la mise en relation entre le nombre, mémoire d'une position sur la piste, et le nombre, mémoire d'une quantité (le nombre de cases, « longueur » du déplacement) ; ce lien, abordé ici dans un contexte discret, préfigure le rôle de la droite numérique dans la compréhension des nombres.

Les jeux qui, comme le jeu des familles ou le Rami, mettent en jeu simultanément une relation d'équivalence et une relation d'ordre total ou partiel entre les éléments.

Les jeux d'alignement de la famille du morpion[36] en lien avec la structuration spatiale.

Les jeux de « portrait» de la famille du Master Mind en lien avec les activités logiques.

D'autre part, ce choix des jeux permet une économie appréciable dans les classes en ce qui concerne le temps nécessaire à l'appropriation des règles qui sont simples et souvent connues d'une partie des élèves. Il facilite un recentrage de l'activité sur les savoirs mathématiques et évite de transformer le jeu, outil d'apprentissage, en un objet d'étude.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

AYME Y., (2006) Dossier : le jeu en classe, *Cahiers pédagogiques*, **448**, 9-62.

BETTINELLI B., (1995) La moisson des formes : matériel et livret pédagogique. Aléas Editeur.

BOLON J., (1994) Comment analyser un jeu mathématique. *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques tome III*, COPIRELEM, 57-60.

BOULE F., (1985) Manipuler, organiser, représenter. Armand Colin.

BOULE F., (2002) Jeux de calcul à l'école. Bordas.

BOULE F., (2005) Faites vos jeux. Éditions Didier.

BRÉGÉON J-L., MÉTÉNIER G., GÉROME E. (1994) Maths en pousse MS. Collection Diagonale. Nathan.

BRÉGÉON J-L., MÉTÉNIER G. (1994) Maths en herbe GS. Collection Diagonale. Nathan.

BROUSSEAU G., (2002) Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques, *Questions éducatives, l'école et ses marges : didactique des mathématiques*, **22/23**, 83-155.

CHAMPDAVOINE L., (1986) Les mathématiques par les jeux : grande section et CP. Nathan.

CHAMPDAVOINE L., (1992) Les mathématiques par les jeux : PS. Nathan.

CHAMPDAVOINE L., (1995) Les mathématiques par les jeux : MS. Nathan.

CHARNAY R., DOUAIRE J., GUILLAUME J.-C., VALENTIN D., (1995) Chacun, tous... différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages, *Rencontres pédagogiques n° 34*, INRP.

DE GRANDMONT N., (1999) Pédagogie du jeu : jouer pour apprendre. Editions Logiques : Québec.

DESCAVES A., (1992) Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes. Hachette.

EYSSERIC P., (1999) Des jeux et des mathématiques de la maternelle au CM2, *Bulletin de l'APMEP*, **420**, 5-14.

ERMEL (1988). Apprentissage à la résolution de problèmes au CE. CRDP Grenoble.

ERMEL (1990) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Grande Section de maternelle. Hatier.

ERMEL (1991) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours Préparatoire. Hatier.

ERMEL (1993) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours Élémentaire 1. Hatier.

FARADJI D., TAVEAU C., (2005) Quelles problématiques pour la formation des enseignants à la pratique du jeu en classe ?, in *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*. CRDP Versailles.

GREFF E., HELAYEL J., (2009) Situations-jeux pour les apprentissages mathématiques en maternelle, GS. Retz.

GROUPE JEUX APMEP (1982) Jeux 1 : les jeux et les mathématiques, *Brochure APMEP*, **44**.

GROUPE JEUX APMEP (1983) Ludofiches 83, *Brochure APMEP*, **52**.

GROUPE JEUX APMEP (1985) Jeux 2 : jeux et activités numériques, *Brochure APMEP*, **59**.

[36] Puissance 4, Quarto, dames chinoises,…

GROUPE JEUX APMEP (1988) Ludofiches 88, *Brochure APMEP*, **68**.

GROUPE JEUX APMEP (1990) Jeux 3 : jeux pour la tête et les mains, *Brochure APMEP*, **78**.

GROUPE JEUX APMEP (1998) Jeux 5 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **119**.

GROUPE JEUX APMEP (2002) Jeux 6 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **144**.

GROUPE JEUX APMEP (2005) Jeux 7 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **169**.

GROUPE JEUX APMEP (2008) Jeux 8 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **185**.

GROUPE JEUX APMEP (2009) Jeux Ecole, *Brochure APMEP*, **187**.

JULLEMIER G., (2005) Jouer pour apprendre. Hachette.

KRYZWANSKI N., (2004) Apprendre la numération avec des jeux de cartes. Retz.

KRYZWANSKI N., (2007) Jeux de dés et numération. Bordas.

MARTIN F., (2003) Apprentissages mathématiques : jeux en maternelle. CRDP Aquitaine.

NGONO B., PELTIER, M.L., DUBUT A. & AL., (2000) « *Géoloie* » *et autres jeux mathématiques à l'école Clément Maroy*. IREM Rouen.

QUINTRIC C., (1999-2000) Jeux de société et apprentissages mathématiques au cycle 1, *Grand N spécial maternelle*, 145-168.

ROBINET J., (1987) Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématiques, *Cahiers de didactique,* **34**. IREM Paris 7.

ROUCHE N. & AL., (2002) Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur, *collection "De la prime enfance à l'âge adulte"*. CREM, Belgique.

RODRIGUEZ A., (1993) Dossier Mathématiques : jouez le jeu ! *Journal des Instituteurs,* 49-63.

IX - ANNEXE : LA RÈGLE DU JEU DE L'OIE

INTÉRÊTS ET LIMITES POUR LA FORMATION D'UNE SITUATION D'HOMOLOGIE : SITUATION DE COMMUNICATION SUR UN SOLIDE. CONDITIONS POUR UN TRANSFERT DANS LA CLASSE

Annette Braconne-Michoux
Formatrice IUFM Lyon, site de Saint Etienne, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
annette.braconne-michoux@iufm.univ-lyon1.fr
Hélène Zucchetta
Formatrice IUFM Lyon, site du Rhône, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
helene.zucchetta@iufm.univ-lyon1.fr

Résumé

A partir de la description d'une situation vécue lors de l'atelier (tant du point de vue des « enseignants » que de celui des « élèves »), un questionnement sur la formation est proposé : quels sont les éléments de la situation qui relèvent de l'homologie (qui peuvent être repris sans distorsion aucune lors de leur implémentation en classe) et quels sont ceux qui demandent une transposition (annoncée, décrite par le formateur IUFM) ? Quelles sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ? Quels peuvent être les éléments de synthèse pédagogique, didactique et mathématique que la situation permet d'aborder en formation ? Quels sont les apports théoriques, didactiques ou pédagogiques qui pourraient être faits à la suite de cette situation et sa transposition par les maîtres en classe, dans un contexte de formation initiale ou continue ?
En s'appuyant sur les échanges entre les participants à l'atelier, des éléments de réponses aux questions posées sont apportés.

I - INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Le groupe école collège de l'IREM de Lyon conçoit des formations « clés en main » adaptables à différents publics (formateurs, conseillers pédagogiques, stage REP, liaison école-collège, formation T1-T2, FC 2nd degré collège…). Ces formations sont construites généralement à partir d'une situation problème à faire vivre aux stagiaires pour questionner les modalités de sa mise en œuvre éventuelle dans une classe. Cela nous a conduit à travailler sur la gestion de classe et en particulier le rôle du maître dans la phase de recherche et la phase de mise en commun. Pour ce faire, après avoir vécu une situation en tant qu'apprenant, le stagiaire est amené à s'interroger sur :

- les aides à apporter aux élèves,
- la gestion de l'activité et les interventions du maître,
- l'utilisation des productions des élèves et donc leur rôle en vue d'en débattre et d'en tirer une synthèse…

La question de la validation est aussi un point important à aborder en formation.
Ainsi, dans des modalités similaires, pendant le temps de l'atelier, nous avions l'ambition d'apporter le questionnement suivant : à quelles conditions les démarches impliquées dans la situation proposée sont-elles transférables en classe et en formation ? Quels sont les éléments de la situation qui relèvent de l'homologie (qui peuvent être repris sans distorsion aucune lors de leur implémentation en classe) et quels sont ceux qui demandent une transposition (annoncée, décrite par le formateur IUFM) ? Quelles

sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ? Quels peuvent être les éléments de synthèse pédagogique, didactique et mathématique que la situation permet d'aborder en formation ?
Dans cet atelier, nous nous proposons, dans un premier temps, de faire vivre une situation bien connue : « le solide caché » et de faire réfléchir les participants sur leur vécu. Dans un deuxième temps, nous posons la question aux formateurs des apports théoriques, didactiques ou pédagogiques qui pourraient être faits à la suite de cette situation et sa transposition par les maîtres en classe, dans un contexte de formation initiale ou continue.

Dans cet article nous décrirons dans un premier temps, l'activité et le déroulement de l'atelier et dans un deuxième temps, nous reviendrons sur nos choix, sur les limites de l'homologie et la transposition nécessaire dans le cadre d'une formation.

II - DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ, DE SON DÉROULEMENT ET DU VÉCU DES PARTICIPANTS

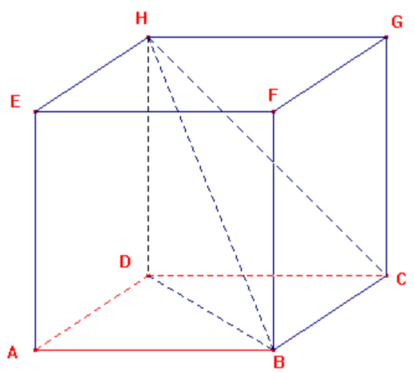
Dans cette partie, nous décrirons en détails nos objectifs pour le premier temps de l'atelier, le déroulement tel que nous l'avions prévu puis ce qui s'est effectivement passé pendant l'atelier.

1 Description de l'activité

L'activité est proposée aux participants à l'atelier dans les conditions où elle est mise en œuvre dans le contexte de la formation ou en classe de cycle 3 : deux des participants deviennent « animateurs » et ont en charge la gestion de la situation à partir d'un canevas, comme s'il s'agissait d'une situation « clé en main », les autres participants deviennent « élève » ou « stagiaire ».

La situation choisie et bien connue du « solide caché » (jeu du « qui est-ce ? ») consiste à faire deviner les caractéristiques d'un solide que les « élèves » ne voient pas et à leur demander d'en faire un patron. Les « élèves » posent des questions auxquelles un « animateur » ne répond que par « oui » ou « non ».

Le solide choisi dans l'atelier est le tétraèdre HBCD où H, B, C et D sont quatre sommets d'un cube : la base BCD est la moitié d'une face du cube et la hauteur correspondante [HD] est l'arête du cube perpendiculaire à la diagonale [BD] de la face du cube (voir dessin ci-dessous). Ce tétraèdre sera nommé « pyramide-sixième de cube[1] ».



[1] On obtient cette pyramide à partir de la « pyramide tiers-cube » (dont la base est une face d'un cube et la hauteur une arête du cube) et on sectionne suivant un plan perpendiculaire à la base suivant sa diagonale. En fait, on obtient deux « pyramides-sixième de cube » symétriques par rapport à ce plan.

2 Mise en œuvre de l'activité (Déroulement et consignes)

Deux participants « enseignants » ou « animateurs » sont désignés pour mener la séance : c'est-à-dire gérer les phases de présentation, les phases de recherche, le temps, les mises en commun qui suivent et la synthèse finale. (Ils disposent d'environ une heure pour mener à bien l'ensemble de l'activité).

Un seul « enseignant » met la situation en œuvre comme elle pourrait l'être dans une classe de cycle 3, avec un autre solide. Est fournie aux « enseignants » une fiche de préparation (voir annexe 1) qu'ils ne sont pas obligés de suivre à la lettre. La consigne suivante, présente dans la fiche de préparation, est donnée oralement par l' « enseignant »:

Consigne : « *Dans cette boîte un solide est caché. Vous allez devoir* ***construire à main levée*** *un patron de ce solide (règle et ciseaux interdits), puis le construire en vraie grandeur. Pour cela vous pourrez poser des questions auxquelles l'enseignant ne répondra que par « oui » ou par « non »*.

Une précision au déroulement est aussi apportée : dès qu'ils pensent que c'est possible parce qu'ils ont suffisamment d'informations, les stagiaires « élèves » par groupes de 2 doivent produire un patron à main levée du solide caché, sur une feuille A3.

Pendant que les meneurs de séance prennent connaissance du solide (à l'extérieur de la salle), les autres participants « élèves » commencent à préparer individuellement des questions.

Nos prévisions de déroulement :

Une première mise en commun autour des productions à main levée vise à valider les patrons : l'« enseignant » a toute liberté dans la gestion du débat autour des productions de patrons. Cette gestion sera analysée dans un deuxième temps de l'article.

Quand « l'enseignant » juge que les informations indispensables ont été données et que le débat autour de la validation des patrons à main levée peut être clos, les affiches sont décrochées et « l'enseignant » demande à chaque groupe, de produire un patron du solide en grandeur réelle, toujours sans modèle du solide réel mais en sachant que le côté [HD] mesure 6 cm. Pour la phase de construction en vraie grandeur, des aides possibles sont suggérées dans la fiche de préparation.

Elles sont de plusieurs types et l'enseignant peut les fournir, ou non, aux « élèves » :

- faces du solide préalablement découpées qu'il peut distribuer en totalité ou en partie, à la demande ou non des stagiaires ;
- patrons à main levée validés au cours de la mise en commun ;
- description des faces avec leurs dimensions (toutes ou partiellement données) ;
- dessin en perspective de la pyramide dans le cube (voir schéma ci-dessus) ;
- indication sur la forme du solide (1/6 du cube : tétraèdre inscrit dans un cube qui a pour sommet un sommet du cube et pour base la moitié d'une face du cube).

La pertinence des aides et de leur utilisation sera analysée dans le deuxième temps.

La validation des productions de patrons en vraie grandeur peut se faire par comparaison du solide construit avec la pyramide contenue dans la boîte.

La conclusion est laissée à l'initiative de l' « animateur ». La validation des productions est suivie d'une éventuelle synthèse.

Nous avions prévu que le second « animateur » observe en s'interdisant toute intervention et qu'il repère :

- La nature des interventions de son collègue ou des « élèves »,
- La nature des aides apportées par l' « enseignant » et les difficultés ou blocages auxquels ces aides sont peut-être des réponses.

Durant l'atelier nous avons préféré laisser plus de liberté au 2ème « animateur » tout en lui précisant qu'il était plutôt observateur.

3 Déroulement effectif et vécu des participants

Pour nous permettre de savoir comment les participants à l'atelier ont vécu les différentes phases de la situation, deux questionnaires différents sont distribués aux participants : un pour les « animateurs » et un pour les « élèves » (voir annexe n°2). Lors d'un débat, nous reprenons les réponses de l' « animateur » puis celles de l'observateur qui donnent leur point de vue sur les différents temps de l'activité (questions ; patron à main levée, débat autour des patrons, construction du patron en vraie grandeur ; validation des patrons), les autres participants complètent. Notre intention, en tant que responsables de l'atelier, est de faire en sorte que le groupe reste centré sur la gestion de cette séance, sur les choix faits par l'animateur (interventions orales en particulier) et leurs incidences sur la tâche et l'activité des « élèves ».

3.1 Le vécu et les réactions des « animateurs »

Le témoignage des animateurs est important et précis. En dépit du fait qu'ils aient eu dans les mains le solide en vraie grandeur, ils ont été surpris par le solide choisi et, l'identification de ses caractéristiques géométriques n'a pas été rapide ni assurée. En particulier, le fait que les quatre faces soient des triangles rectangles dont deux sont aussi des triangles isocèles a été difficile à appréhender. Ils ont eu aussi beaucoup de difficultés à repérer les quatre angles droits et à retrouver le cube dont le solide représente 1/6 du volume. La fiche de préparation qui donnait aussi une vue en perspective de la pyramide dans le cube a permis de lever certains doutes et de voir qu'une seule mesure allait pouvoir être donnée pour construire le patron en vraie grandeur. Bien que les deux volontaires « animateurs » aient déjà proposé ce genre de situation à leurs étudiants en IUFM, une inquiétude est apparue concernant le temps et la difficulté pour les « élèves » à trouver les informations nécessaires et suffisantes. Ils diront avoir été surpris de la rapide convergence dans l'identification des caractéristiques du solide et de la difficulté à noter au tableau l'ensemble des questions sans reformuler pour aller plus vite.

Nous avions prévu que le second « animateur » observe en s'interdisant toute intervention.

En fait, durant l'atelier, l'un a été plutôt « animateur » pendant que l'autre a noté au tableau les questions et la réponse correspondante. Cette répartition des rôles n'était pas prévue dans la fiche de préparation fournie mais cela devait certainement correspondre à des habitudes de la prise en charge de la gestion des informations.

La deuxième question posée[2] par un « élève » : « s'il y a N sommets, y a-t-il (N-1) sommets coplanaires ? » a déstabilisé à la fois les « animateurs » et les autres participants, car bien que correspondant à une pyramide, elle n'était pas attendue sous cette forme (elle ne fait pas partie des questions habituelles). Il s'est révélé parfois délicat de ne répondre que par « oui » ou par « non » à certaines questions ; certaines d'entre elles étant même indécidables. Des questions ont dû être précisées. Par exemple, la question « est-ce que les triangles sont superposables ? » (sous-entendu « tous ») est devenue « est-ce qu'il y a des triangles superposables ? » puis « est-ce que les 4 faces sont superposables ? ». La question « y-a-t-il des triangles rectangles ? » ayant obtenu une réponse positive, a été suivie de la question « Est-ce exactement 3 (puis 2) triangles rectangles ? » qui admet une réponse négative. La précision de la question a donc été ici déterminante. En effet, la même question posée avec « au moins » au lieu de « exactement », aurait donnée lieu à une réponse positive. La nécessité de la précision dans la formulation a surpris les « apprenants » qui ont formulé deux autres questions sur la nature des faces (triangles isocèles et existence d'une face non triangulaire) avant de reprendre la question « Est-ce qu'il y a 4 triangles rectangles ? ».

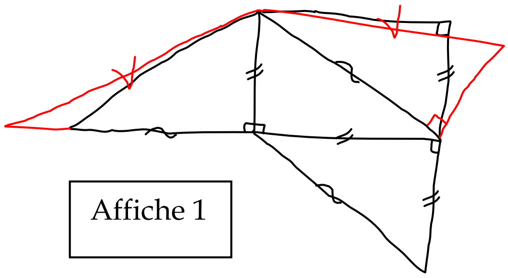
Un autre moment délicat pour les « animateurs » a été celui où ils ont pris la décision d'arrêter la période de questions : les participants avaient-ils un nombre suffisant d'informations pour élaborer un patron de solide ? En effet, chaque participant ayant préparé des questions en fonction de sa procédure d'élaboration du patron, certains n'ont pas pu utiliser avec pertinence certaines des réponses données. Pour autant, il a fallu arrêter le temps des questions, à la fois parce que les informations nécessaires

[2] La liste des questions et des réponses est en annexe 3

étaient déjà données (certaines étant redondantes) mais aussi pour ne pas déborder du temps alloué à l'atelier.

L'observation des « apprenants » en train de dessiner les patrons à main levée s'est révélée importante dans la mesure où, pour chaque groupe, il a fallu décider d'intervenir ou non. Les animateurs ont plutôt eu tendance à ne pas intervenir. Mais dans chaque groupe, des questions se sont posé~~es~~ et les animateurs y ont en général répondu. Des demandes de temps supplémentaire pour continuer à chercher ont permis aux « enseignants » de remarquer des réticences chez les « élèves » à produire une solution incomplète ou invalidée. Peut-être l'une des plus grandes difficultés des participants a consisté à trouver comment assembler les triangles et où placer les angles droits. Bien que la règle et les ciseaux aient été interdits, un binôme a découpé grossièrement des triangles rectangles pour essayer de les assembler dans l'espace. On peut conjecturer que dans un groupe d'étudiants d'IUFM ou de professeurs des écoles ou dans une classe de cycle 3, les réticences seraient moindres parce que les étudiants ou des élèves ne contrôleraient pas aussi rigoureusement leur production. L'homologie dans la formation trouve là une de ses limites : la durée de recherche dépend de cette opiniâtreté des « élèves » du jour. Le déroulement de l'activité et le choix de l'objet ne seraient pas forcément les mêmes que durant l'atelier.

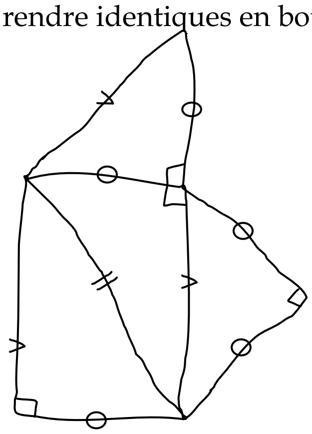
La gestion du débat sur les productions des participants n'a pas été simple non plus : certains patrons[3] justes avaient des aspects tellement différents que tous les participants (« élèves » ou « animateurs ») ont contribué à leur validation. La première affiche a été déclarée d'emblée erronée par ses auteurs.



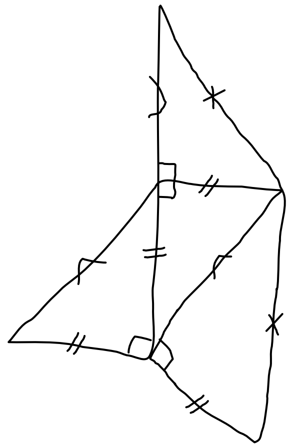
Affiche 1

A la demande de justification de l' « animateur », le binôme a donné deux raisons : ce ne sont pas les bons triangles car les triangles sont tous superposables et quand on relève les angles droits, cela ne se rejoint pas en un sommet. Cela a été aussi repris par le deuxième binôme qui dit « imaginer les cercles dans l'espace pour voir si les sommets des triangles se rejoignent dans l'espace ». Un apport important de l' « enseignant » a porté sur la trajectoire d'un point du patron, candidat à être un sommet de la pyramide dont la projection sur le plan est une droite perpendiculaire au côté opposé. Cet apport ~~a~~ certainement permis de valider ou invalider plus facilement certaines propositions de patrons. L'autre « animateur » a fait part de sa difficulté à valider ou invalider les patrons proposés par les élèves et par conséquent de la nécessité d'une analyse a priori du solide avec une préparation de tous les patrons possibles. À la 3è affiche, s'est posée la question de la comparaison des deux patrons des affiches 2 et 3 et de savoir comment les rendre identiques en bougeant une des faces.

Affiche 2



Affiche 3



[3] Les patrons produits sont en annexe 4 dans l'ordre de leur présentation. Les corrections ont été apportées en rouge.

La comparaison a été rendue difficile par la présence de codages différents sur les deux patrons. Les triangles ont été numérotés au moment de la mise en commun pour faciliter la comparaison. Un essai de retournement de la feuille a aussi été fait pour mettre un triangle isocèle rectangle dans la même position sur les deux patrons, en vue de repérer les autres faces par rapport à ce triangle. En fait, on obtient deux pyramides distinctes mais symétriques selon le sens dans lequel on plie le patron. En utilisant la transparence de la feuille, on peut repérer la pertinence d'un patron, à une symétrie près. A l'opposé les invalidations ont été faciles à gérer : chacun ayant compris où était l'erreur dans le dessin du patron. Le nombre limité de participants (et leur personnalité) n'a pas permis de mettre en évidence les difficultés de distribution de la parole au sein d'une classe.

Avant la réalisation du patron en vraie grandeur, les « animateurs » ont décroché les affiches du tableau. Un groupe a demandé à récupérer son affiche pour reprendre son patron en tenant compte des corrections apportées lors du débat. Dans la plupart des autres groupes, les « étudiants » avaient gardé des traces des ébauches de leurs dessins et ont pu aborder la construction sans difficulté. A part l'affiche avec le patron à main levée (pour ne pas refaire de mémoire la même chose), aucune des aides prévues n'a été sollicitée ni proposée. Cette phase s'est déroulée très rapidement et a plutôt été l'occasion de voir enfin le solide, les difficultés de construction du patron ayant été surmontées.

3.2 Le vécu et les réactions des « élèves »

La dévolution du problème a été très rapide ; les « élèves » se sont organisés pour préparer des questions de façon à identifier rapidement le solide à partir d'une seule information : il s'agit d'un polyèdre. Les questions ont évidemment porté sur le nombre et la nature des faces. Les précisions relatives au nombre exact de faces triangulaires, superposables ou à leur nombre minimum étaient révélatrices du fait que les connaissances mathématiques des participants sont bien supérieures à celles de la plupart des étudiants de M1 ou M2 ou des enseignants en formation continue, ou encore des élèves de l'école primaire. Les réponses aux questions ont été notées au tableau, ce qui a été déclaré avoir été très utile par les participants (malgré une certaine redondance pour trouver le nombre de chaque face). Les « élèves » ont eu des difficultés à formuler leurs questions pour obtenir une réponse exploitable et ont pris conscience de la précision à laquelle ils étaient contraints. Ce point peut être mis en avant dans une formation d'étudiants souvent peu conscients des difficultés de formulation par les élèves.

Chaque participant a pris note des réponses aux questions et des commentaires faits par les animateurs, en particulier, à propos des questions sans réponses ou pour lesquelles les animateurs n'avaient pas de réponse immédiate. Certains « élèves » se sont sentis frustrés quand l'ordre leur a été donné de dessiner le patron à main levée ; ils auraient aimé poser d'autres questions pour conforter l'idée qu'ils se faisaient du solide en question. Une synthèse s'est faite un peu en aparté entre un « élève » et un des « animateurs » sous la forme de conclusion : « c'est un solide dont les quatre faces sont des triangles rectangles et deux d'entre eux sont aussi isocèles ». L'animateur a fait le choix d'acquiescer sans reprendre pour l'ensemble du groupe, ni l'écrire au tableau et cela n'a pas été diffusé dans le groupe. Le dessin du patron s'est effectué en binôme et en collaboration étroite entre les deux membres. La préoccupation a été de faire un dessin qui soit compatible avec toutes les informations données : 4 triangles rectangles dont deux sont isocèles. Les discussions dans les groupes ont porté sur l'organisation des faces les unes par rapport aux autres avec des productions identifiées d'emblée comme fausses par leurs producteurs. Pour la plupart des « élèves », il a été difficile de sortir de la première représentation qu'ils s'étaient faite, en particulier changer la position des angles droits ou trouver comment placer les deux triangles isocèles et rectangles. Quelques-uns ont élaboré une représentation en perspective du solide et cette représentation a facilité le passage au patron.

Chaque binôme ayant produit au moins un patron, la confrontation d'affiches a été un moment important pour tous les participants. Pour ceux qui savaient que leur production était fausse, la discussion avec l'ensemble des participants a permis d'identifier et de corriger les erreurs. Pour ceux qui avaient des productions exactes, il a été intéressant de repérer en quoi ces productions d'aspects très différents étaient toutes des patrons du même solide. Les critères mathématiques nécessaires à la validation de ces productions exactes témoignent du fait que leurs analyses ne sauraient être transférées telles quelles dans une classe de cycle 3. Des gestes de «levage de sommet» ont accompagné cette discussion, en particulier pour montrer que deux points du soi-disant patron ne pouvaient correspondre à un sommet du solide. La justification s'appuyait sur la rotation dans l'espace autour de l'axe porté par le côté commun des deux triangles et sur le déplacement de chaque point dans un plan perpendiculaire à cet axe. Ces mots introduits par l'animateur, en particulier le plan perpendiculaire, ont permis de modéliser les gestes correspondants à ce passage du plan à l'espace. Certains « élèves » ont trouvé que le débat avait été un peu long. La difficulté due aux différents codages utilisés sur les dessins ou à des longueurs non respectées a été soulignée souvent comme ne facilitant pas la comparaison des patrons ; chaque participant se retrouvant en position de juger d'un patron comme un nouvel objet à valider ou invalider.

Le dessin du patron en vraie grandeur (à partir d'une arête de cube de 6 cm) n'a pas posé de problème particulier. En effet chaque groupe avait gardé son brouillon de dessin à main levée et noté les corrections à y apporter le cas échéant. Seul un groupe a demandé à récupérer son affiche corrigée pour faire le dessin du patron en vraie grandeur. La mise en commun des patrons ayant été très approfondie, les participants ont déclaré que le dessin du patron en vraie grandeur les a confortés dans leurs conceptions et leur a permis de voir à quoi ressemblait ce solide qui leur avait posé tant de problèmes à imaginer. Les validations des dessins se sont faites par pliage et construction du solide. Comme chaque participant avait construit sa pyramide, nous avons expliqué comment à partir de la « pyramide-tiers-cube » nous avions choisi de construire cette « pyramide-sixième-du-cube ». Nous avons fait remarquer qu'il faut trois pyramides identiques et trois autres symétriques obtenues en pliant le patron dans l'autre sens (ce qui revient à faire un patron symétrique du premier).[4]

En situation de classe ou en situation de formation avec un public moins particulier que celui de formateurs, la réalisation du patron est souvent difficile même après la mise en commun et ceci permet d'interroger le rôle de cette mise en commun. Souvent une aide mais pas forcément pour tous et non nécessairement la même, permet aussi d'interroger les conditions de la réussite mais aussi de justifier la nécessité d'apport d'autres aides différenciées. Ici la situation d'homologie n'a pas rendu le réel de la situation transposée en classe ou en formation. Dans la problématique de notre article, cela nous parait être important à souligner car nous nous sommes trouvés dans une situation plutôt d'homologie contrairement à d'autres situations de formation avec des professeurs de mathématiques où il est vrai que pour la mise en commun le temps accordé avait été moindre et le but assigné différent.

3.3 Discussion autour des réponses aux questionnaires

La mise en commun des patrons à main levée a été jugée très importante par tous les participants ; pour autant, tous ont convenu de la grande difficulté à valider ces patrons. Cette validation aboutie, la réalisation en vraie grandeur du patron n'avait plus autant d'enjeu mais seulement un rôle de vérification du patron et de visualisation du solide.

D'autres commentaires ont été faits :

- l'identification du solide en termes de description ne garantit pas que l'on sache répondre avec assurance à toutes les questions,
- il est délicat de décider du moment où les informations sont suffisantes pour que les élèves se lancent dans un premier dessin,
- la validation des patrons à main levée a été rendue aussi difficile car les codages choisis n'étaient pas les mêmes et cela a compliqué la comparaison.

[4] Nous avons essayé de savoir s'il y a une définition d'un patron qui indiquerait dans quel sens plier mais pour l'instant nous n'avons pas trouvé de réponse à cette question (à part les codages en origami de plis-montagne et plis-vallée mais non utilisés usuellement dans les patrons).

Selon le solide choisi, il n'est pas rare que la gestion des productions des élèves pose un problème du point de vue mathématique et que l'enseignant ait des difficultés dans les validations de certaines. La gestion des productions d'élève peut aussi poser problème d'un point de vue pédagogique quand il s'agit de distribuer la parole dans la classe et d'organiser les débats sur les productions. Un piège serait de distribuer la parole pour aller systématiquement d'une production fausse ou inaboutie vers la production la plus proche d'une production experte. Quand il reste des propositions fausses ou inabouties à étudier alors qu'une solution experte a été validée, l'enseignant peut demander à la classe ou aux auteurs des productions concernées, de préciser en quoi ces productions sont fausses ou inabouties et comment on pourrait les corriger.

3.4 Aides à la représentation

Nous avions prévu des aides qui n'ont pas du tout (ou presque) été demandées. Cette question nous intéressait particulièrement lors de la conception de l'atelier, par conséquent nous avons relancé les participants sur ce qui les avait aidés. Une intervention de l' « animateur », au moment de la fabrication du patron à main levée a été décisive pour un groupe : « c'est vous qui avez mis les angles droits, là ? ». En effet, plusieurs binômes peinaient à placer les quatre angles droits et à sortir d'une représentation en trièdre (s'appuyant sur trois arêtes d'un cube de même sommet). Avec des étudiants de niveau M1 et M2, prévoir des aides pourrait s'avérer essentiel, en particulier dans un contexte de différenciation. Le rôle des aides est aussi un élément de distinction entre transposition et homologie.

III - ANALYSE DES PRINCIPALES VARIABLES ET EXPLICITATION DE NOS CHOIX

Peix et Tisseron (2005) relatant une recherche par une formation sur le problème ouvert, mettent en garde :

> *Si la description des dispositifs et de leurs modalités de gestion fournit des techniques enrichissant l'outillage pédagogique de l'enseignant, le problème de la formation est de permettre l'intégration d'attitudes et de compétences nouvelles qu'implique une complexification des rôles à tenir par les enseignants au sein de ces nouvelles tâches.*
>
> *Cette évolution ne va pas de soi : beaucoup d'enseignants de mathématiques ont encore du mal à intégrer des problèmes de recherche dans leur pratique usuelle d'enseignement […]*
>
> *[…] l'expérimentation de problèmes ouverts est l'occasion de poser des questions génératrices de la pratique professionnelle (Chevallard) à travers son utilisation comme lieu de travail (observation, mise en œuvre et/ou construction) de gestes et savoirs professionnels génériques et occasion de retour réflexif sur la pratique.*

Ils dressent ensuite :

> *une liste de gestes et/ou connaissances professionnels travaillés dans la situation problème ouvert et décontextualisables :*
>
> *Sur la notion de situation*
>
> - *importance fondamentale de l'analyse a priori pour structurer avant, piloter pendant, analyser après ;*
> - *passer de l'observation de l'élève à l'observation des effets d'un dispositif spécifié sur les comportements et connaissances ;*
> - *notion de situation comme organisation théorique structurée, cohérente et finalisée ;*
> - *mise en cohérence entre objectifs, types de tâches, dispositif, rôles et attitudes du maître, effets produits ;*
> - *rôle du milieu, dévolution, implication et travail autonome.*
>
> *Sur le rapport au savoir*

- *travail sur des variables du rapport au savoir de l'élève, sur ses capacités suivant la situation ;*
- *travail sur les rapports aux mathématiques et à l'erreur (de l'élève et aussi du professeur).*

Sur les modalités d'intervention et les dimensions en jeu

- *aides versus médiation, respect de positions ;*
- *rôle du débat, argumentation, rapport à l'erreur versus attitudes et valeurs sociales.*

Sur des aspects techniques des modalités de conclusion

- *modalités de la validation ;*
- *gestion de phases de conclusion.*

La reconnaissance du caractère générique des gestes professionnels que le problème ouvert permet d'expérimenter doit aussi passer par une situation de formation appropriée. Il s'agit de permettre la construction de schèmes dont la signification est donnée par les transformations qu'ils permettent sur les formes d'activités et d'interactions enseignant-élève.

Bien que notre situation ne soit pas un problème de recherche, ni un problème ouvert, mais plutôt une situation complexe, nous nous sommes aidées de l'analyse de ce type de situations pour effectuer nos choix.

Ainsi, nous allons examiner les différentes variables didactiques et pédagogiques que sont la forme du solide, l'organisation de l'activité et sa synthèse, et le rôle des aides qui sont des éléments qui nous semblent a priori importants de reprendre dans une formation.

1 Choix du solide

Suivant les publics en formation, le solide choisi peut être différent : avec un public de Professeurs des Écoles ou de Conseillers Pédagogiques nous choisissons en général une « pyramide-tiers-cube » (pyramide ayant comme base une face d'un cube et le sommet étant un autre sommet du cube). Avec des enseignants de mathématiques notre choix se porte plutôt sur la « pyramide-sixième du cube » moins connue. Dans les deux cas l'assemblage des quatre triangles rectangles pour en faire un patron de la pyramide n'est pas évident si on ne connaît pas les dimensions ou si on ne se représente pas le solide dans le cube. Pour autant le solide à proposer ne doit pas être trop familier des stagiaires sinon le travail de recherche sur le nombre et la nature des faces, le nombre d'arêtes, de sommets, etc. ne serait pas un véritable défi.

Notre choix de solide pour la situation n'est généralement pas le même que celui qui sera fait par l'enseignant dans sa classe et ce point doit être discuté en particulier dans le cas de la « pyramide-tiers-cube » que des enseignants pourraient utiliser avec des élèves de cycle 3.

2 Choix de l'organisation de l'activité

Nous avons choisi de solliciter deux « animateurs » parmi les participants à l'atelier et de leur donner une fiche de préparation indiquant les différentes phases de la situation et les aides possibles. Cela nous a permis de voir l'importance et le temps donnés par les « animateurs » à la réalisation et à la confrontation des patrons à main levée. Au cours de l'atelier, le temps de familiarisation avec le solide et la fiche de préparation pour les deux « animateurs » a été le même que celui pendant lequel les « élèves » ont préparé leurs questions. Celles-ci étaient donc déjà assez abouties et leurs auteurs avaient souvent des attentes assez grandes liées à la description du solide caché. La même activité pourrait être menée de façon individuelle où l'enseignant répond aux questions de l'élève jusqu'à ce que ce dernier juge qu'il a suffisamment d'informations pour envisager le dessin du patron à main levée. Dans ce cas une gestion de classe par binôme permettrait de limiter le nombre de questions.

Le patron est d'abord demandé à main levée pour retarder la validation par découpage et pliage et donner un enjeu à la mise en commun. Celle-ci a pour but de remettre à jour les critères de réussite d'un patron pour permettre aux « élèves » d'améliorer leurs représentations du solide et, par conséquent, constitue aussi une aide à la représentation de l'image mentale du solide (la construction du patron à main levée est une tâche surajoutée au problème de base qui serait de construire le même solide que celui qui est dans la boîte). Le dessin à main levée permet aussi de contrôler le rôle de chaque information donnée au tableau. Nous avons vu dans certains groupes, des participants en difficulté avec la gestion de toutes les informations. On peut penser que celles-ci étaient en contradiction avec le solide auquel ils pensaient a priori et qu'ils se sont retrouvés en conflit avec ce qu'ils savaient et ce qu'ils avaient imaginé.

Les modalités de mise en œuvre sont aussi des éléments qui ont une influence sur les réponses proposées par les élèves : la production du patron à main levée par groupe de deux plutôt qu'en individuel a été source de discussions qui ont enrichi le débat qui a suivi sur la validation des différents patrons. Les affiches A3 sur lesquelles les « apprenants » avaient dessiné les patrons à main levée ont été étudiées, commentées et corrigées dans un ordre aléatoire. Ceci a permis entre autres de constater que deux patrons d'aspects très différents étaient exacts : le solide associé à chacun de ces patrons apparaissant dans des conditions différentes pour chacun des participants. Les six « pyramides-sixième-de-cube » ne sont pas toutes identiques, elles sont symétriques deux à deux et cela se retrouve dans le patron car il a fallu un retournement de la feuille pour mieux reconnaître deux patrons presque superposables.

Une construction directe du patron aux instruments inciterait les « élèves » à le valider directement par pliage et retirerait l'enjeu des échanges. Il est important de noter que tous les participants avaient gardé une trace écrite de leur dessin et l'ont annotée au fur et à mesure du débat.

3 Rôle des aides

La seule aide qui ait été demandée par l'un des participants a été de reprendre son affiche dans la mesure où les erreurs qu'elle contenait avaient été annotées et donc corrigées.

Nous avions imaginé diverses formes d'aides à la construction du patron en vraie grandeur :

- une description ou une représentation en perspective,
- des aides à la construction du patron : deux ou quatre faces à assembler,
- une description d'un patron.

Elles se sont révélées quasi inutiles dans le cadre de cet atelier. L'expérience montre que dans le contexte d'une autre formation, il en va tout autrement, en particulier si on réduit le temps de la mise en commun et le nombre d'affiches examinées, mais aussi si on interdit tout brouillon au moment de la production du patron à main levée. Nous n'avons donc pas pu aborder le problème de l'adéquation de l'aide à apporter à un étudiant ou un stagiaire en fonction de ses besoins. Mais, cela peut indiquer des directions de travail pour les étudiants Professeur des Ecoles : tant qu'on n'a pas fait la séance une fois, il est difficile de savoir quelles aides pourraient être utiles.

Un type d'aide qui a été plus efficace que nous le pensions : un commentaire fait à un groupe au cours de sa recherche à main levée a été entendu et pris en compte par d'autres groupes. Le commentaire portait sur l'organisation des triangles rectangles les uns par rapport aux autres : « êtes-vous certains que les angles droits sont là ? » le doute s'est installé et les « élèves » ont imaginé que les triangles rectangles n'étaient peut-être pas disposés de manière à former un trièdre droit.

4 Choix des objectifs et de la synthèse

Notre choix de ne pas donner d'objectifs à l'activité dans la fiche de préparation laissait une liberté aux « animateurs » concernant la synthèse possible de l'activité. Nous pensions que celle-ci pouvait porter sur des points plutôt notionnels comme :

- les critères de réussite d'un patron (nécessité d'égalité des longueurs des arêtes qui se correspondent par pliage, bon positionnement des faces, pas de chevauchement…). Il s'agit d'un retour sur ces critères.
- les difficultés rencontrées ;

sur des points plutôt méthodologiques comme :

- les raisons de demandes d'aide ;
- l'éventuelle insuffisance de prise de notes ou d'implication dans la mise en commun ;

sur des points plutôt métacognitifs comme :

- les éléments aidant à la résolution dans le déroulement de la situation (replacer la mise en commun comme première aide dont l'efficacité est conditionnée par la participation effective des apprenants),
- les éléments de stratégies de résolution de problème retenus.

La synthèse des « animateurs » est apparue dans la phase de mise en commun pour valider ou non un patron : elle portait plutôt sur des points notionnels.

Une activité comme celle-ci peut être exploitée avec des objectifs de formation très variables et ce sont ces objectifs qui déterminent la synthèse que l'on peut faire.

IV - IMPLICATION PROFESSIONNELLE : HOMOLOGIE OU TRANSPOSITION ?

Cette partie vise à se poser la question du point de vue de la formation : homologie ou transposition ?

A partir du vécu de chaque participant, on se propose maintenant de repérer les objets de formation dont cette activité peut être une illustration ou un exemple. La question qui se pose au formateur IUFM est de savoir jusqu'à quel point ses interventions relèvent soit de l'homologie (le formé devenu enseignant pourra reproduire la situation sans qu'aucune distorsion d'aucune sorte n'apparaisse), soit de la transposition.

Pour se projeter dans la réalisation de cette situation dans des formations diverses, un nouveau questionnement est lancé dans le deuxième temps de l'atelier :

Selon les publics auxquels la situation est proposée quels sont les objets de formation (pédagogique, didactique et mathématique) que l'on peut traiter ? Quels objectifs peuvent être visés, pour quelle évolution des pratiques des enseignants et quels éléments issus de la didactique peut-on introduire ?

À quelles conditions les démarches impliquées dans la situation proposée sont-elles transférables en classe et en formation ? Quelles sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ?

Ce deuxième temps a été un peu court pour permettre l'organisation par groupes de discussion telle que nous l'avions prévu et par conséquent le questionnement est loin d'être abouti tant du point de vue théorique que pratique.

A priori, nous pensions que différents points associés à cette activité pourraient aider à distinguer l'homologie de la transposition, en s'appuyant sur les échanges. En particulier des apports ou discussions à la suite de l'activité pourraient porter sur :

- la mise en œuvre de la situation et en particulier la mise en commun, la gestion de classe,
- les variables didactiques,
- la différenciation, les aides,
- les différents types de problèmes de géométrie : représenter, décrire, construire …

Pour avoir des éléments de réponses, il est sans doute pertinent de rappeler les distinctions à faire entre les situations d'homologie et les situations de transpositions, telles que Houdement et Kuzniak ont pu les proposer.

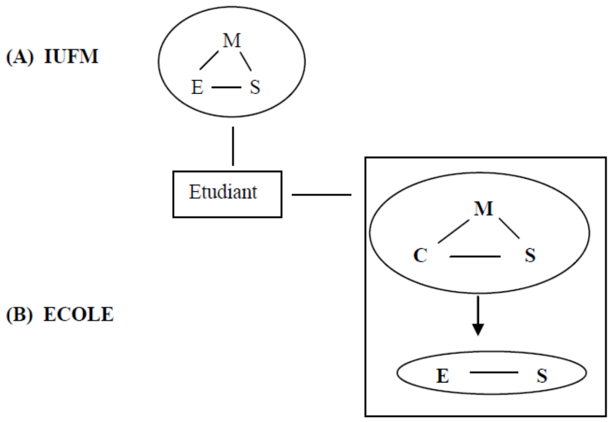
1 Définitions

Houdement-Kuzniak (1996) ont dégagé quatre stratégies de formation des enseignants :

- les *stratégies culturelles* qui privilégient l'accroissement des connaissances des étudiants dans un domaine précis sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes [par les mêmes étudiants devenus enseignants]
- les *stratégies basées sur la monstration* qui privilégient la transmission d'un modèle par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes
- les *stratégies basées sur l'homologie* [qui sont aussi des stratégies basées] sur l'imitation mais une imitation complexe et transposée par l'étudiant. […] Les formateurs enseignent conformément à leur conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.
- les *stratégies basées sur la transposition* se différencient des précédentes par l'insistance qu'elles accordent à la transmission d'un savoir de référence. Elles prennent en compte la professionnalisation des étudiants à la différence des [stratégies culturelles] uniquement fixées sur les connaissances mathématiques.

Dans l'atelier nous nous sommes essentiellement centrés sur les temps d'homologie et de transposition. Quels temps dans le déroulement de l'activité relèvent de l'homologie ? Quels temps demandent à l'enseignant une part de transposition ? Comment le formateur IUFM peut-il anticiper ou annoncer la transposition que l'enseignant devra opérer devant ses élèves ?

Kuzniak (Chantilly 1994) avait déjà évoqué ce problème du double milieu : d'une part un milieu A, l'IUFM, où se situe la formation des enseignants et d'autre par un milieu B, l'école, où l'étudiant devient enseignant.

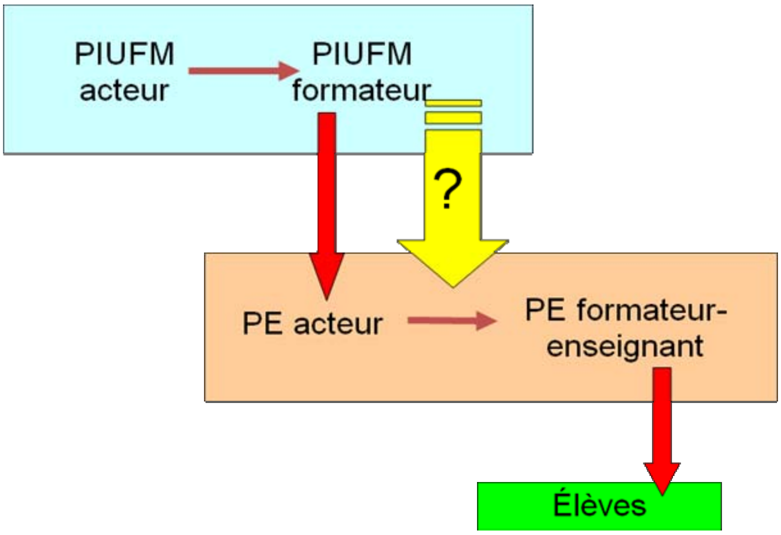


D'un système didactique à l'autre, la même personne change de rôle (l'étudiant E du milieu A devient maître du milieu B). Quels sont alors les éléments de la situation vécue en formation (en tant qu'étudiant) qu'elle peut reproduire à l'identique et sans distorsion en tant qu'enseignant ? Quels sont ceux pour lesquels il doit y avoir une part de transposition ? Qui prend en charge cette transposition ?

Le schéma ci-dessous reprend la situation vécue au cours de l'atelier où les PIUFM (professeurs d'IUFM) participants se sont dans un premier temps approprié la situation. De participants (acteurs de la situation) ils allaient devenir formateurs en proposant cette situation du solide caché à leurs étudiants.

Mais pouvaient-ils proposer la même situation ? Dans les mêmes conditions ? Leurs étudiants acteurs de la situation, vont devenir enseignants à leur tour. Comment vont-ils pouvoir proposer une telle situation à leurs élèves de cycle 3 ? Quelles précautions le PIUFM doit-il prendre en proposant une telle activité à ses étudiants ? Nous rajoutons un niveau supplémentaire au schéma précédent qui pourrait être « formateur de formateurs », en plus de « formateur d'étudiants ou stagiaires enseignants » et « enseignant à des élèves ».

Nous avons essayé de schématiser en mettant l'accent sur les interventions où le formateur doit porter son attention pour permettre au mieux au formé de changer de rôle.



2 L'homologie

La question de l'homologie dans les différents contextes de formation se pose sans doute à nouveau aujourd'hui dans la mesure où l'accès au métier d'enseignant a drastiquement changé sur certains lieux de formation. Et, pour reprendre les mots de Kuzniak (1994), il n'est pas rare de voir le formateur IUFM

> … choisir de transmettre sa forme préférée d'enseignement en la mettant lui-même en œuvre dans son enseignement à ses étudiants. Nous avons introduit le terme d'homologie pour désigner les stratégies où le professeur utilise (ou tente d'utiliser) un mode de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci enseignent dans des classes élémentaires.

Dans les conclusions du colloque de Bombannes (1979), à propos de l'enseignement de la géométrie, en 1994, Kuzniak retenait :

> On pourra simuler un apprentissage aves les F.P. (étudiants) et le reprendre avec les élèves de l'école primaire. Il importe que la situation se transfère facilement.

Kuzniak poursuit en ces termes :

> Ainsi les stratégies d'homologie se trouvent être bien définies par deux types de ressemblance :
>
> - *La ressemblance des démarches pédagogiques qui doit permettre d'assurer la cohérence entre le discours et les actes du formateur,*
> - *La ressemblance des situations proposées aux enfants et aux étudiants.*
>
> […]

> En fait le choix des situations dépendra de l'appréciation par le formateur [IUFM] des difficultés liées à la notion abordée. On peut ici formuler deux hypothèses (…)
>
> - *H1 : une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.*
> - *H2 : une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche suivie.*
>
> Les stratégies basées sur l'homologie supposent implicitement que le transfert opéré par l'étudiant n'est pas problématique. (p. 17)

Prenant en compte le fait que le niveau de connaissances et de compétences en mathématiques des étudiants en formation professeurs des écoles est généralement plutôt fragile, les stratégies de formation basées sur l'homologie « *tentent de montrer que chaque étudiant peut avec des moyens limités mener une activité mathématique, le primat étant donné à l'approche pédagogique.* » Ainsi l'étudiant a un ressenti qu'il peut apparenter à celui de ses futurs élèves et appréhender la complexité de la situation qu'il pourrait mettre en œuvre. Mais ces stratégies semblent atteindre rapidement leurs limites si l'on ne prend pas en compte la part de transposition inhérente au phénomène selon que la même situation est vécue dans un contexte de formation ou dans un contexte de classe élémentaire. Dans le contexte des stratégies d'homologie, cette part de transposition semble aller d'elle-même voire n'est pas évoquée. Ceci est source de simplifications que Kuzniak appelle la « dénaturation simplificatrice ». En effet, Kuzniak a remarqué que :

> Les étudiants opèrent une simplification qui leur permet de préparer des séances que leur savoir mathématique suffira à dominer.
>
> Il y a dénaturation à partir du moment où la simplification transforme la nature du savoir mis en jeu ou modifie radicalement les démarches pédagogiques initiales. (p. 17)

La question se pose donc aujourd'hui comme hier de savoir pour quelles situations, jusqu'à quel point et dans quelles conditions les stratégies de formation de type homologie sont pertinentes. Nous avons pu constater au cours de l'atelier que les participants étaient d'autant plus productifs que la situation ne mettait pas en jeu d'apprentissage mathématique et que tous maîtrisaient les mathématiques nécessaires à la résolution du problème. On peut donc penser que, du point de vue des connaissances mathématiques, les PIUFM participant à l'atelier ont vécu cette situation comme relevant de l'homologie. Dans la mesure où les « animateurs » ont reconnu que certaines décisions avaient été difficiles à prendre : quand arrêter le temps de questions ? Comment décider qu'un patron est juste ou non ? etc., on peut penser qu'avant de la proposer à leurs étudiants, ils devront y réfléchir à nouveau, se l'approprier et éventuellement l'adapter. On a bien vu qu'une telle situation est riche d'éléments de formation et qu'il est indispensable que le formateur précise quels sont les objets de formation qu'il vise pour que le réinvestissement de la situation ne subisse qu'un minimum de dénaturation.

Kuzniak (1994) avait déjà des soucis qui redeviennent d'actualité dans le nouveau contexte de la formation initiale des enseignants :

> Ensuite, elles sont sensibles à toute réduction de la durée de la formation car la mise en action des étudiants suppose un temps de formation non négligeable. Et enfin, le développement de la recherche pédagogique et didactique fournit le cadre théorique nécessaire à d'autres conceptions de la formation des enseignants plus axées sur la transposition. (p. 18)

Quelle transposition reste à la charge du formateur IUFM ?

3 Les transpositions

A propos des stratégies de transposition, Houdement-Kuzniak (1996) insistent sur le fait qu'il est

> … important de préciser les savoirs retenus et les modes de transposition mis au point. De plus les stratégies de transposition, très dépendantes de savoirs non figés, sont des stratégies en évolution et d'une certaine façon, des stratégies transitoires susceptibles de se transformer si le processus de transposition s'achève.

D'une part Houdement-Kuzniak distinguent

> … deux niveaux de transposition.
>
> Le premier concerne le passage du savoir savant de référence au savoir enseigné par les formateurs. Il s'agit ici du processus standard de transposition didactique.
>
> Le second niveau concerne le passage de ce savoir enseigné au savoir appliqué par les étudiants. Il prend en compte le phénomène de transfert et d'adaptation opéré par les étudiants.
>
> Les stratégies les plus complexes envisagent les deux niveaux de transposition. » (p. 18)

Houdement-Kuzniak distinguent aussi

> … deux catégories de stratégies établies sur deux corpus de savoirs, non spécifiquement mathématiques et différents : un corpus « pédagogique » et un corpus « didactique »

L'ouvrage de référence de corpus pédagogique est la collection ERMEL, tous les savoirs présentés peuvent être mis en œuvre dans les classes de l'école élémentaire. A l'opposé,

> Le corpus didactique théorise davantage les phénomènes d'enseignement et n'a pas pour préoccupation première une application dans les classes. L'effort de transposition effectué par les formateurs est donc plus important. Ce corpus didactique donne lieu à deux grands types de transmission qui reposent sur la dialectique outil/objet.
>
> La didactique, *objet* d'enseignement ou la didactique, *outil* pour le futur enseignant

Dans le premier cas, on peut trouver le cours magistral sur la didactique ou des stratégies basées sur l'homologie, enrichies par la didactique. Une illustration étant la séquence à propos de la boîte du « pâtissier » telle que décrite par Houdement, Peltier (1991) et dans laquelle, les formateurs terminent par une institutionnalisation didactique.

Dans le second cas, le formateur peut proposer aux étudiants d'analyser des séances ou les aider à construire des séquences dans le « *projet ambitieux qui vise à fonder une pratique du métier d'enseignant de type didactique* ».

D'après Houdement-Kuzniak,

> dans les stratégies de transposition, le formateur retrouve une plus grande liberté pédagogique puisque l'enjeu essentiel est la transmission d'un savoir professionnel de référence.(p. 309)

Mais cet avantage est contrebalancé par deux difficultés non négligeables :

> Dans l'approche pédagogique …, il nous est apparu que le formateur devait avoir une expérience professionnelle de la formation des maîtres qui lui donne le savoir empirique nécessaire pour gérer les situations de discussion avec les étudiants, fréquentes dans ce modèle. L'approche didactique, si elle peut éventuellement dispenser le formateur de ce savoir empirique, nécessite en revanche un investissement en tant que chercheur dans le domaine de la didactique des mathématiques (p. 309)

Au cours de l'atelier, nous n'avons pas été confrontées au premier niveau de transposition : les participants étant eux-mêmes experts en mathématiques. En revanche la question a bien été soulevée de savoir ce que, de cette situation d'enseignement, les PIUFM allaient retenir ou mettre en avant, transposer avant de la proposer à leurs étudiants. Ceci est sans doute d'autant plus nécessaire que les étudiants PE (M1 et M2) sont rarement face aux élèves (peu de stages) avant d'être nommés stagiaires et n'ont pas la possibilité de prendre de distance ou de recul par rapport à ce qui leur a été proposé en formation.

4 Cette activité au regard de l'homologie et de la transposition :

Au cours de l'atelier et de la brève discussion qui s'en est suivie, nous avons retrouvé tous les arguments développés par Houdement-Kuzniak.

Où y a-t-il homologie ? Qu'est-ce que les étudiants peuvent reprendre à l'identique ?

Où y a-t-il transposition ? Que doivent-ils changer, modifier, supprimer, ajouter ? Peuvent-ils prendre en charge ces modifications ? Doit-on, en tant que PIUFM, les guider, suggérer certaines modifications ou adaptations ? Dans quelles conditions ? etc.

Du côté de l'homologie, nous pourrions dire que, dans sa forme, la situation proposée avec sa règle du jeu du « solide caché » et les 5 étapes de son déroulement sont directement utilisables en classe (plutôt en CM2) par l'étudiant devenu professeur des écoles :

- un groupe de deux élèves repèrent les caractéristiques du solide pendant que le reste de la classe par groupes de deux, cherche à retrouver le solide ;
- les élèves posent leurs questions jusqu'à être capables de dessiner un patron ;
- les élèves dessinent à main levée une proposition du patron du solide ;
- les élèves débattent des propositions ;
- les élèves construisent le patron et vérifient par pliage.

Du côté de la transposition on trouve les mêmes rubriques avec un contenu mathématique, pédagogique ou didactique :

- le choix du solide adapté aux connaissances des élèves de cycle 3, suffisamment complexe pour que la description des faces soit un facteur de discrimination entre les solides connus ;
- la gestion des questions posées par les élèves et les réponses données par les élèves qui connaissent le solide : faut-il les écrire au tableau ? Laisser chaque groupe d'élèves noter ses propres réponses ? Qui décide que le temps des questions est terminé ?
- la gestion du débat sur la pertinence des patrons. Les élèves de cycle 3 ont-ils les connaissances suffisantes pour apprécier deux patrons d'aspects différents d'un même solide ? Est-ce qu'un patron peut rester indécidable ?
- la construction du solide. Quelles aides apporter aux élèves en difficulté ?

Dans les différents types de formation où nous avons utilisé cette situation, les objectifs n'étaient pas les mêmes suivant le public.

L'activité du « solide caché » pratiquée dans les classes d'école primaire indique qu'il s'agit de deviner un solide mais les conditions et la consigne donnée peuvent être très variables. Par exemple, si l'objectif est de « reconnaître un solide parmi d'autres visibles », il peut s'agir de discriminer par un jeu de questions-réponses ou une description fournie, un solide parmi les solides présents. Cela nécessite un choix de solides qui ne se différencieraient pas seulement par leur nombre de faces, d'arêtes et de sommets mais aussi par la nature des faces.

Dans un contexte de formation initiale, la question se pose toujours de savoir à quel moment et sous quelle forme le PIUFM intervient pour répondre aux diverses questions qui précèdent, et comment il gère la transposition de la situation. Selon les objectifs de formation qu'il se donne, le PIUFM privilégiera d'intervenir immédiatement ou de façon différée.

Avec des étudiants qui préparent le concours, cela a été l'occasion de faire de la géométrie dans l'espace tout en gardant un temps pour évoquer le « jeu du portrait », les variables didactiques (et pédagogiques) : les choix possibles de solides à l'école primaire, les difficultés de gestion des questions, les différents déroulements de l'activité comme celui où tous les solides sont visibles, manipulables ou pas, l'organisation en groupes ou en individuel, … le choix des personnes qui doivent deviner et celles (ou celui) qui donnent les réponses est aussi important : on peut par exemple faire sortir deux élèves qui devront deviner le solide choisi parmi un lot par la classe avec l'enseignant et les réponses aux questions sont faites sur l'ardoise par les autres élèves : cela nécessite une bonne étude et connaissance du solide par l'ensemble des élèves et cela permet aussi de repérer des questions ambigües comme celles où il n'était pas précisé si c'était « exactement » ou « au moins » un nombre de faces.

Avec un public connaissant plus la pratique de classe, cela permet de discuter de la mise en commun et de son rôle qui pourrait être ici de relancer l'activité en cas de blocage et de permettre une meilleure vision des patrons et en particulier d'éliminer des patrons faux sans forcément aller jusqu'à étudier des patrons justes. Suite à cette première mise en commun, des aides peuvent être apportées de différentes natures comme un dessin en perspective (dans le cube ou pas), deux faces différentes sur les quatre.

V - CONCLUSION

Il semble que les participants à cet atelier ont apprécié cette répartition en deux temps : l'action puis la réflexion sur l'action. Les échanges au demeurant fort riches, ont permis de mettre en évidence les différents phases d'une telle situation et l'utilité de chacune d'entre elles. Le caractère homologique ou de transposition de chacune de ces phases a été lui aussi discuté. Il est indéniable que les participants à l'atelier avaient un niveau de connaissances mathématiques tel que les aides que nous avions imaginées n'ont pas été utilisées. Néanmoins en situation de formation initiale, par exemple, où les connaissances des étudiants sont plus faibles, de telles aides seront nécessaires. A cette occasion, le formateur pourra mettre en évidence à la fois l'importance dans la préparation d'une séance de mathématique, de l'anticipation des difficultés des élèves et la différenciation que l'on peut mettre en place dans la classe pour favoriser les apprentissages de tous les élèves. La comparaison de la situation « clé en main » vécue en formation, avec d'autres propositions extraites de manuels ou trouvées sur Internet permettra aussi aux étudiants de Master de se poser des questions relatives à une mise en œuvre en classe. Cependant, le caractère homologique de ce type d'activités reste limité en situation de formation initiale : il ne s'applique partiellement qu'aux étudiants qui jouent le rôle de l'enseignant ; les autres, ceux qui jouent le rôle des élèves, ont certes l'opportunité d'appréhender les difficultés que leurs futurs élèves peuvent rencontrer mais ils risquent de ne pas percevoir toute la complexité de la gestion d'une telle situation en tant qu'enseignant. Dans la formation, le débat qui suit l'action n'est pas seulement important pour l'aspect mathématique mais il doit mettre en évidence le vécu de tous les participants dans le rôle joué par chacun. Ces témoignages permettent de prendre conscience des éléments qui relèveraient de l'homologie comme le déroulement de la séance et ceux qui relèveraient de la transposition comme les choix à effectuer dans une préparation pour la classe (choix du solide, aides, différenciation, …).

Toute situation d'homologie ne permet d'avoir qu'un aperçu de ce que pourrait être le déroulement de la même situation reprise ou transposée en classe ou dans un groupe en formation. Du fait même du statut des participants, certaines réactions au milieu n'apparaissent pas. Ainsi, l'expérimentation et l'échange de témoignages sont alors les seuls moyens de pointer d'autres aspects importants de la situation que les stagiaires n'ont pas vécus.

La situation vécue par les participants à l'atelier a bien été une source de réflexion (et de formation). Aussi nous pouvons être confiantes que cette même situation pourra être reproduite sans distorsion à l'IUFM avec les étudiants parce que ces formateurs ont eux-mêmes une très bonne maîtrise théorique de l'enseignement que ce soit du point de vue mathématique, didactique ou pédagogique.
Il semble que dans la plupart des situations de formation où les stagiaires sont acteurs de leur propre formation, il y ait toujours une part d'homologie (« je ferai ça dans ma classe ») mais celle-ci doit être nuancée par l'information donnée par le formateur (transposition). Dans cet atelier, nous avons manqué un peu de temps pour discuter des conditions de transfert dans la classe. Cependant, il nous semble que le choix d'une situation d'homologie doit être pensé pour permettre d'apporter des éléments didactiques et pédagogiques et même de les provoquer : les choix du formateur dans l'organisation de sa formation sont essentiels (par exemple réduire le temps de recherche pour amener des demandes d'aides). Dans le contexte de la formation des enseignants en Master, il nous semble important que les formateurs explorent ce questionnement que nous avons esquissé dans cet atelier.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ERMEL Apprentissages géométriques et résolution de problèmes.

FÉNICHEL M., PAUVERT M., PFAFF N. (2004) *Donner du sens aux mathématiques, Tome 1 Espace et géométrie*. Bordas.

Groupe IREM Lille (2000). *Travaux géométriques - Apprendre à résoudre des problèmes*. SCéREN CRDP Nord Pas de Calais.

GOSSET H, TAVEAU C. (2010) Activités géométriques autour des solides Cycle 3. CRDP Paris.

HOUDEMENT & PELTIER (1992) LE SOLIDE CACHÉ. IN *LA BOITE DU PATISSIER*. IREM DE ROUEN.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **Vol.16 (3)**, Grenoble : la Pensée Sauvage.

HOUDEMENT, C. (2003) : Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. *Carnets de route de la COPIRELEM, T.3 ; pp. 23- 33.*

KUZNIAK A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Actes du XXIème COPIRELEM*, Chantilly.

KUZNIAK A. (2003). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Carnets de route de la COPIRELEM. T. 3, p. 7-22.*

PEIX A, PLANCHETTE P, ZUCCHETTA JF (2001) Analyse d'une formation en mathématiques en licence de sciences de l'éducation. T. 1 et 2. IREM de Lyon.

PEIX A, TISSERON C (2005) Penser la formation avec des concepts issus de la didactique. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM, Strasbourg.*

VII - ANNEXES

1 Annexe 1 Fiche de préparation fournie à l'animateur (« professeur »)

Pyramide 1/6 de cube

Avertissement : aucune information relative à cette activité et à sa fiche de préparation ne doit être communiquée aux autres participants de l'atelier

Temps de la mise en œuvre de la situation 1H15 maximum

Consigne :

« Un solide est enfermé dans cette boîte. Vous allez devoir construire à main levée (la règle est interdite, ciseau aussi) un patron de ce solide[5]. Pour cela vous pourrez poser des questions auxquelles je ne répondrai que par « oui » ou par « non ». Quand vous estimerez avoir assez d'informations, par deux, vous ferez une affiche du patron à main levée suffisamment grande pour être visible par tous.

Après une mise en commun des affiches, vous construirez un patron en vraie grandeur de ce solide. »

Quelques indications pour la gestion de la situation :

1° Phase de questionnement

Dans le cas d'une question où il ne serait pas possible de répondre par « Oui » ou « Non », faire préciser la question.

Les informations récoltées pourront être écrites au tableau.

2° Réalisation d'un patron à main levée

Dès qu'ils pensent que c'est possible les participants par groupe de 2 sont invités à produire un patron à main levée et au feutre sur une feuille A3 (patron suffisamment grand pour pouvoir être vu du fond de salle).

3° Première mise en commun

Les patrons produits à main levée sont affichés au tableau, mis en débat et validés. Une sélection d'affiches peut être envisagée. L'enseignant, ne fait pas référence à une éventuelle prise de notes par les élèves durant cette phase, celle-ci est laissée à leur initiative.

4° Réalisation d'un patron avec les instruments de géométrie

Les affiches sont ensuite décrochées.

Les « élèves » doivent alors construire l'objet en vraie grandeur avec les instruments de géométrie, mais sans modèle.

L'enseignant observe les élèves.

---

[5] Le patron est d'abord demandé à main levée pour retarder la validation par découpage et pliage et donner un enjeu à la mise en commun. Celle-ci a pour but de remettre à jour les critères de réussite d'un patron pour permettre aux « élèves » d'améliorer leurs représentations du solide.

Une construction directe du patron aux instruments inciterait les « élèves » à le valider directement par pliage et retirerait l'enjeu des échanges.

En fonction des difficultés ou blocages qu'il observe, l'enseignant décide d'apporter une aide au groupe, choisie parmi celles listées en page suivante ou une autre aide à son initiative.

5° Validation des solides construits

Par comparaison à la pyramide cachée

6° Conclusion

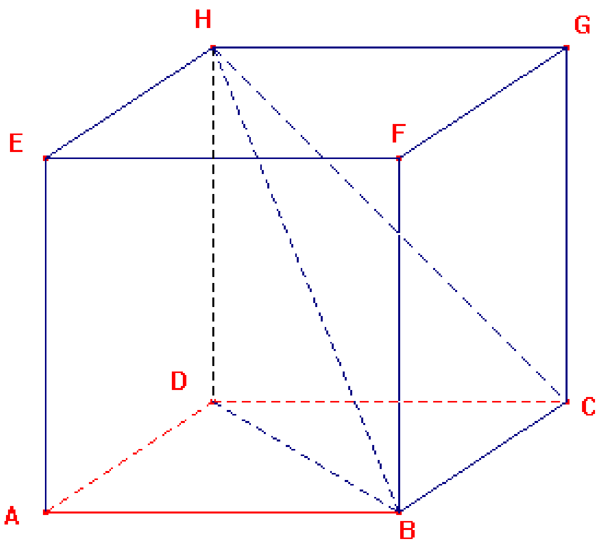
La synthèse est laissée à l'initiative de l'animateur. Elle peut pointer les obstacles, les difficultés rencontrées durant la phase de construction instrumentée….

Aides possibles :

1) Redonner une des affiches (patrons à main levée qui ont été validés).

2) Les quatre faces découpées de la pyramide ou seulement deux d'entre elles.

3) La figure en perspective :



4) Indication :

1/6 du cube : tétraèdre inscrit dans un cube qui a pour sommet un sommet du cube et pour base la moitié d'une face du cube.

5) Les triangles formant un des patrons s'assemblent sous forme d'un parallélogramme.

6) La description des faces avec leurs dimensions (toutes ou partiellement données).

Pour ceux qui ont trouvé un patron : leur en demander un autre (par exemple prenant moins de place sur la feuille) Retour texte

2 Annexe 2 : Retour sur l'activité : Consigne pour les apprenants

En tant qu'« élève » vous allez essayer de revenir sur votre vécu de la situation.

1. *Dans chacune des différentes phases :*
   Qu'est-ce qui vous été utile à la réalisation de la tâche ?
   Qu'est-ce ce qui vous a posé difficulté ?

Phase de questionnement initial :

Phase de construction du patron à main levée :

Phase de mise en commun de ces patrons :

Phase de réalisation du solide :

2. *Dans la phase de réalisation du patron.*
   Quelles aides éventuelles avez-vous reçues ?
   Vous ont-elles été utiles ? En quoi ?

Retour sur l'activité : Consigne pour les animateurs

En tant qu'animateur ou observateur vous allez essayer de revenir sur votre vécu de cette activité.

1. *Pour chacune des différentes phases :*
   - *Qu'est-ce ce qui vous a surpris ou posé difficulté ?*
   - *Si c'était à refaire, que modifieriez-vous ?*

Phase de questionnement initial :

Phase de construction du patron à main levée :

Phase de mise en commun de ces patrons :

Phase de réalisation du patron :

- *Quels ont été vos critères pour décider d'apporter une aide et décider du choix de cette aide ?*

Retour texte

3 Annexe 3 : Notes au tableau des questions et des réponses

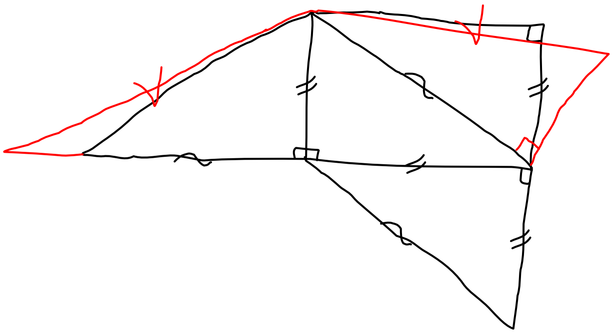
Questions	Réponses
Faces toutes des polygones	Oui
N sommets (N-1) sommets coplanaires	Oui
Compétences BO	Oui
Solide convexe	Oui
5 triangles	Non
4 triangles	Oui
Triangles superposables	Oui
4 faces superposables	Non
1 face rectangulaire	Oui
Triangles équilatéraux	Non
Triangles rectangles	Oui
3 exactement triangles rectangles	Non
2 exactement triangles rectangles	Non
Triangles isocèles	Oui
Existe une face non triangulaire	Non
4 triangles rectangles	Oui
4 triangles rectangles sont-ils isocèles ?	Non
3 triangles isocèles	Non
3 triangles superposables	Non
2 superposables	Oui
Superposables 2 à 2	Oui
2 triangles rectangles isocèles	Oui
2 triangles rectangles	Oui
Superposables 2 à 2	Oui

Le raisonnement et la conclusion donnés par un participant ne sont pas notés au tableau : 2 triangles rectangles isocèles et 2 triangles rectangles non isocèles.

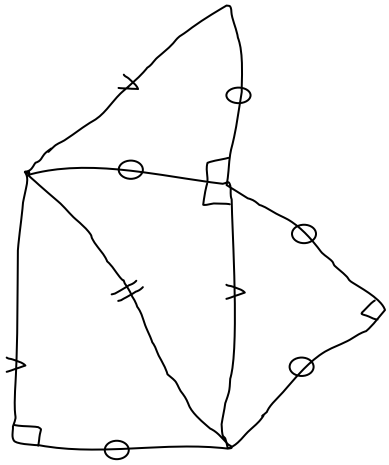
Retour texte

4 Annexe 4 : Affiches des patrons à main levée

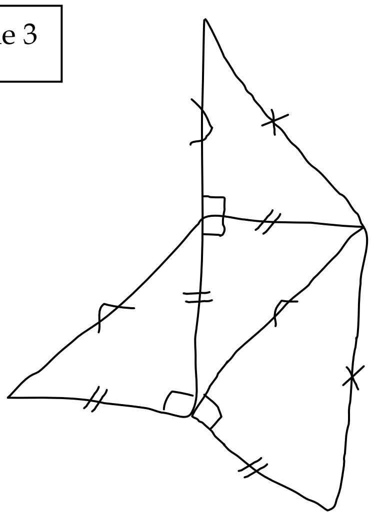
Affiche 1



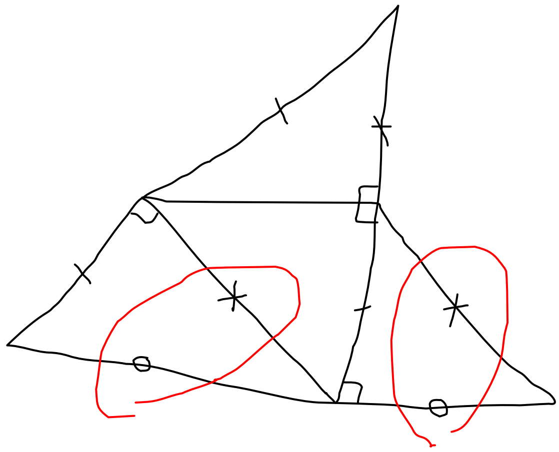
Affiche 2



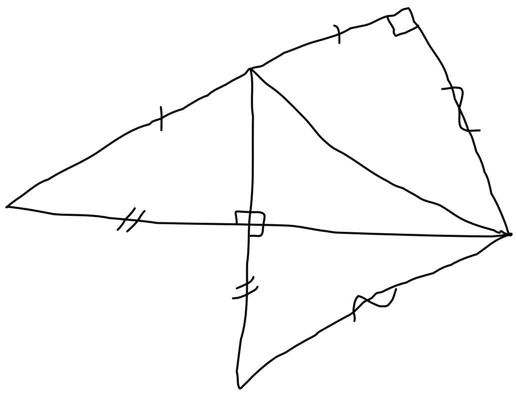
Affiche 3

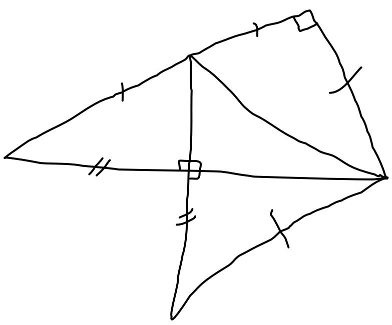


Affiche 4

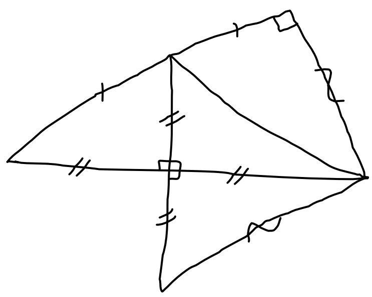


Affiche 5





NON



NON

Retour texte

EVALUATION DIAGNOSTIQUE POUR ASH ET AIDE INDIVIDUELLE

François BOULE
Maître de conférences retraité
INSHEA Suresnes
francois.boule@neuf.fr

Résumé

Les épreuves d'évaluation sont généralement établies selon des normes propices à la sommation ; elles neutralisent un grand nombre d'éléments significatifs concernant les difficultés rencontrées. Le but ici recherché est **complémentaire** : non pas un bilan de connaissances ou de savoir faire mathématiques mais un repérage des obstacles liés *aux moyens d'apprendre* : construction de l'espace, logique, mémoire, attention. Il s'agit donc d'une approche dirigée vers les fonctions cognitives du sujet, à partir de son comportement, de ses actions, de son langage en vue de construire une aide adaptée. L'atelier propose à la discussion un ensemble d'items visant à repérer et interpréter les obstacles que peut rencontrer un enfant à un moment donné.

I - LES ÉPREUVES D'ÉVALUATION

Les épreuves d'évaluation, à l'école, tendent à prendre une importance que l'on peut trouver excessive quant à leur prescription et l'usage qui en est fait. C'est pourquoi il semble opportun d'interroger d'abord leurs objectifs et leurs modalités.

1 Fonctions

Il y a trois sortes d'utilisation de l'évaluation, dont devraient découler les modalités de l'épreuve.

• L'une des exploitations possible est **longitudinale**. C'est le cas des évaluations nationales depuis 1989. Comment évolue la population scolaire ? On a pu lire dans un rapport de la DEP : "*en mathématiques, les performances globales des élèves ont augmenté d'environ 3% entre 1991 et 1992, en particulier dans les domaines de la numération, du sens des opérations, de la résolution de problèmes.*"
L'interprétation de ce résultat prête à discussion. Si la représentativité de l'échantillon n'est guère susceptible d'être mise en doute, il en est autrement de la signification du taux de réussite. Comment être assuré que l'épreuve est d'une égale difficulté, qu'elle a une égale signification par rapport au champ visé, que la population est placée dans les mêmes conditions d'une année à l'autre ? S'il s'agit de la même épreuve, les deux premières questions ne se posent pas, mais une réponse négative à la troisième s'impose : on ne peut exclure l'hypothèse d'une préparation plus ou moins explicite ; si l'épreuve est *assez différente* de la précédente pour ne pas avoir donné lieu à une préparation qui la rende insignifiante, comment être assuré qu'elle évalue *la même chose*, avec une précision telle qu'une variation de score de 3% ait un sens ?
Des conclusions "longitudinales" sont à émettre avec d'extrêmes précautions.

• Une autre exploitation est **transversale**. On le voit dans les commentaires de l'enquête PISA : comparaison d'un groupe à un autre, ou bien d'un groupe à l'*état des lieux* national, ou d'un pays à un autre. On voit sans peine les problèmes déontologiques que le premier usage ne manquerait pas de soulever. Selon un rapport 2009 de l'OCDE, le taux des élèves en *très grande difficulté de calcul* est très faible (<4%) dans 11 pays sur les 65 pays de l'étude, faible (de 4 à 7%) dans 14 pays. La France (9,5%) serait au 21° rang des pays européens (sur 25), au 36° rang des pays de l'OCDE (à égalité avec la Russie,

juste devant l'Azerbaïdjan, Dubaï, la Croatie…).
C'est pourquoi l'évaluation nationale **était** clairement tournée vers le second usage ; il s'agit d'abord de donner aux enseignants un moyen de situer leur classe, en début d'année, par rapport à la moyenne nationale, et de les inviter ainsi à adapter à cette classe leurs objectifs et leurs méthodes.

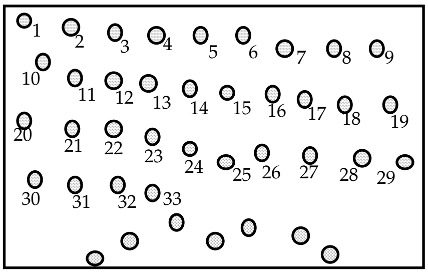
• Enfin, il peut s'agir d'une interprétation individuelle.
Il ne s'agit plus d'une exploitation **statistique** des résultats ; dans ce cas le dépouillement d'un item par VRAI/FAUX se révèle très insuffisant, et la cumulation de points obtenus dans des domaines différents est faiblement interprétable : il n'y a pas compensation d'un domaine à l'autre. Au moins doit-on imaginer un dépouillement selon plusieurs échelles, par exemple : numération, calcul, logique, problèmes, géométrie, mesure. En revanche l'analyse des **erreurs** prend toute son importance. Cette finalité implique également que soit mises au clair la fonction de chaque item et son interprétation. Mais il y a encore une distinction à faire, selon qu'il s'agit de dresser un **bilan** (en fin de cycle par exemple), relativement à un champ de compétence donné, ou bien une **évaluation diagnostique** préliminaire à la définition d'une aide. S'agissant d'une *orientation* de l'enfant, de la détermination d'une *aide*, ou d'une *prédiction* d'évolution individuelle, il est essentiel d'élucider la contribution de chaque item.
C'est ici l'objet qui va nous occuper.

2 Modalité de l'épreuve

Nous examinons ici quelques exemples d'épreuves en essayant de déterminer ce qu'elles permettent ou non d'élucider quant aux compétences mathématiques de l'enfant.

2.1. Exemples du dénombrement et du calcul

Exemple cité par J. Briand, IUFM & LADIST, Bordeaux
La question est posée à un enfant, à l'école maternelle, d'énumérer les objets qui sont représentés sur la feuille. L'enfant commence oralement l'énumération comme il est indiqué ci-dessous, puis s'interrompt.



L'analyse de cette démarche doit commencer par celle de la tâche : de quoi se compose une tâche d'énumération ? Elle comporte une composante numérique (connaissance de la suite ordonnée des *noms de nombres*) mais aussi une composante spatiale : choisir un "chemin" exhaustif parmi les objets, ainsi qu'un lien entre les deux (pour chaque objet successivement désigné, énoncer un mot de la liste numérique). Le processus peut s'interrompre pour plusieurs raisons :

- numérique : la disponibilité de la liste est insuffisante,
- spatiale : le "chemin" est interrompu ou incertain
- la correspondance mot-objet n'est pas assurée
- l'arrêt n'est pas opéré sur le "dernier" objet
- l'enfant est capable d'accomplir **chacune** des tâches précédentes, mais non de les assurer **ensemble**

(On reconnaît l'interprétation de R. Gellman).
Cet exemple montre que l'on ne peut conclure avec assurance à une difficulté d'ordre numérique, et qu'il faut probablement sonder d'autres compétences, par exemple liées à la continuité d'un chemin, la correspondance terme à terme, l'organisation du plan…
Exemple 2 : voici quelques résultats d'enfants de Sixième de SEGPA à des opérations proposées par écrit, en ligne, à calculer sans poser l'opération.

23+5	40+11	31+9	33+19
73	50	12	412

résultats de Pie

70-19	50-37	19 × 3	2×5×3
69	27	32	13

résultats de Bou

Que peuvent révéler ces résultats sur les capacités de calcul des deux enfants, et par conséquent sur les *remédiations* à entreprendre ? Il ne suffit évidemment pas d'évaluer ces résultats en terme VRAI/FAUX. Quelques résultats se laissent aisément interpréter : « 23+5 = 73 » et « 33+19 = 412 » procèdent tous deux d'un traitement *en colonne* ; dans le premier cas, l'enfant a ajouté 5+2, en calant les deux nombres à gauche, dans le second, Pie a ajouté séparément la somme des dizaines, puis la somme des unités et juxtaposé les deux résultats. On peut imaginer que «31+9 = 12» procède de la même démarche, mais que la procédure a été interrompue ; c'est ainsi également que l'on peut interpréter « 40+11 = 50 » C'est ici la **numération** qui est en cause, c'est-à-dire la hiérarchie entre unités et dizaines, et le passage des unes aux autres.
Dans le cas de Bou les différentes erreurs sont de types variés. « 50–37 = 27 » témoigne d'un algorithme illicite assez répandu (“*0–3, on ne peut pas ; alors 3–0=3*”), qui “explique” probablement aussi « 70-19 = 69 » ; il s'agit clairement d'un algorithme de calcul écrit, transposé mentalement ; tandis que « 2×5×3 = 13 » indique clairement que l'enfant a lu « 2 × 5 + 3 » qu'il a interprété : « (2×5) +3 ». En revanche « **19**×**3** = 32 » semble plus difficile à interpréter, au seul examen de la réponse. Cet exemple montre que les niveaux de difficultés de ces deux enfants sont nettement distincts.

Mais il montre aussi qu'une épreuve *écrite collective* est surtout propre à révéler une réussite, beaucoup moins à poser un diagnostic individuel précis en cas de difficulté. En effet, une épreuve réussie, c'est à dire le résultat croisé de plusieurs items réussis laisse à penser que les démarches employées sont correctes et bien maîtrisées. En revanche, une épreuve non réussie (et en particulier une non-réponse) renseigne peu sur les causes : s'agit-il de la longueur de l'épreuve, ou de la forme de l'épreuve, ou de la compréhension de la consigne ? Quel est le niveau de difficulté qui fait obstacle ?
C'est ici que l'analyse d'erreur prend sa pleine dimension car elle renseigne sur les procédures disponibles et la localisation des obstacles rencontrés par l'enfant. Van Lehn (1983) les interprète en terme de ***bugs*** : en cas d'impasse, l'enfant *inventerait* une procédure de substitution. Ce qui, d'une part, rendrait compte de certains types d'erreurs systématiques, et d'autre part permettrait une simulation assez simple des comportements observés. Il isole par exemple quatre grands types d'erreurs systématiques à propos de la soustraction écrite en colonne :

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 162 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 40 \end{array}$

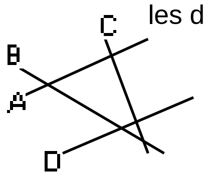
Les quatre types d'erreurs systématiques pour la soustraction (Van Lehn)

Le type A revient à dire : je ne peux enlever 9 de 7, ***alors*** j'enlève 7 de 9; id° pour dizaines.
C'est une démarche que l'on rencontre classiquement au long du cycle 3.
Type B : 7–9 pas possible ***donc c'est 0***.
Type C : on ne peut “emprunter” une dizaine (il n'y en a pas) => même réponse qu'en A ; mais on peut emprunter une centaine => retenue
Type D : on ne peut emprunter une dizaine => même réponse qu'en B ; etc.

Plus les enfants sont jeunes, moins il est satisfaisant de s'en tenir simplement à une forme papier-crayon, telle que sont les évaluations CE2/Sixième. On risque ainsi de laisser inaperçus ou de brouiller nombre de paramètres significatifs.

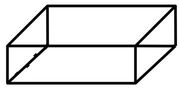
2.2. Exemples géométriques

Exemples :



les droites parallèles sont :
A et B ☐
A et C ☐
A et D ☐

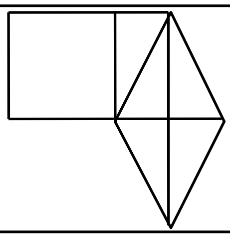
T.A.S. CE2/CM1



Cette brique a :
4 faces et 8 arêtes ☐
6 faces et 8 arêtes ☐
6 faces et 12 arêtes ☐

T.A.S. CE2/CM1

Que révèlent ces items ? En premier lieu la connaissance d'un vocabulaire (droite, parallèle, face, arête). Toutefois le repérage de la connaissance de ces termes risque d'être occulté par plusieurs facteurs. A l'école élémentaire, il n'est sans doute pas usuel (et certainement pas pertinent) de raisonner sur des *droites*, (représentées de surcroît par un segment), ni de les désigner par des lettres majuscules (cette notation, quand elle est employée, est plutôt réservée aux *points*). S'agit-il de vérifier que des droites sont parallèles ? Que l'on connaît cette définition ? Que l'on dispose d'une *procédure* de vérification ? D'une procédure de construction ?
Autre exemple (plus récent)



Repasse en bleu les côtés d'un carré de cette figure.
Repasse en rouge les côtés d'un rectangle de cette figure.
Repasse en vert les côtés d'un losange de cette figure.
Repasse en jaune les côtés d'un triangle isocèle de cette figure.

entrée en 6ème 2005

3 Visée de l'épreuve

L'épreuve peut viser le contrôle d'un niveau de connaissances ou de savoir-faire ; elle ressemble alors à un examen de passage. Mais s'il s'agit d'élaborer une aide, il ne convient pas de rajouter « *plus de la même chose* » (Watzlawiczk) mais de repérer non pas les éléments absents ou mal connus mais les éléments stables des connaissances de l'enfant, ses capacités propres et les difficultés particulières qui peuvent affecter, non seulement un domaine d'apprentissage, mais plusieurs.
Les difficultés ou les obstacles rencontrés dans l'apprentissage des mathématiques, de la lecture, de l'écriture peuvent provenir de l'objet de l'apprentissage lui-même mais aussi de la représentation que l'enfant s'en fait (doutes sur l'intérêt de l'objet, manque de confiance en soi, représentation inadéquate). Mais ces obstacles peuvent provenir, non seulement des objets de l'apprentissage eux-mêmes, mais des *conditions* de cet apprentissage. Dans ce champ se rencontrent les activités assez vaguement désignées par « structuration de l'espace et du temps », auxquelles on prête beaucoup d'attention à l'école maternelle et plus guère ensuite. On peut y ajouter ce qui concerne la **mémoire de travail** et **l'attention**. Il s'agit d'un déficit, non de savoirs ou de procédures, mais des **moyens** de développer ces savoirs et procédures. Par nature même, ce déficit n'est lisible qu'à travers des effets de surface, par exemple les apprentissages des mathématiques, de la lecture ou de l'écriture.

C'est pourquoi il semble nécessaire lors d'une évaluation d'explorer en premier lieu ces domaines quelles que soient les difficultés aperçues.
Les activités transversales décrites ci-dessous, qui conditionnent l'efficacité des apprentissages concernent les domaines suivants :

1. Construction de l'espace : repérage et orientation
2. Mémoire de travail : empan mnésique, organisation des actions
3. Champ attentionnel : étendue du champ, inhibition des éléments parasites.

II - ACTIVITÉS TRANSVERSALES

1 Construction de l'espace

Les apprentissages de la lecture, de l'écriture, du dénombrement, de la numération, du calcul font appel à des capacités de repérage et d'orientation dans le plan faute desquelles ces apprentissages seront ralentis ou empêchés.
Ces activités peuvent faire appel à la reconnaissance globale d'une situation, à une représentation en mémoire d'une situation, à une description verbale. Les matériaux utilisés pourront être neutres (jetons…) ou imagés, ou encore spécifiquement liés à des supports de lecture.

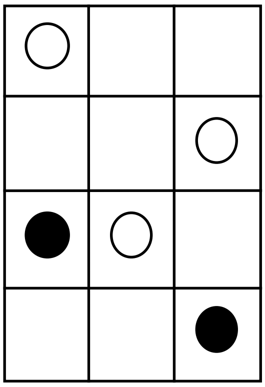
1.1. Repérage dans le plan

On utilise deux grilles 3 x 4 des jetons blancs ou de couleur. Disposer 3 jetons blancs et 2 jetons de couleur (exemple ci-contre).

Consigne *: Regarde bien ces jetons, je vais les cacher.*

Après 5 ou 6 secondes d'observation, poser un carton sur la première grille.

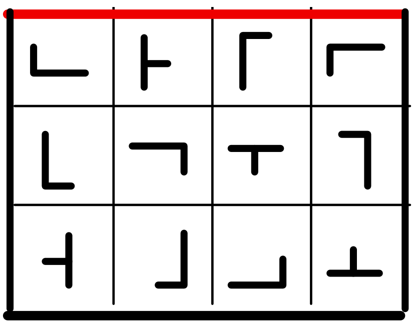
Consigne *: Place des jetons dans la deuxième grille, de la même façon que dans la première.*

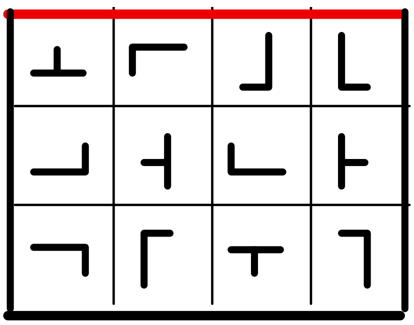


Relever le nombre de jetons bien placés, éventuellement les erreurs systématiques.
Variante : pendant la phase d'observation, demander à l'enfant de décrire la disposition.
Quels sont les mots employés ? Sont-ils pertinents ? Cette description (non contrôlée) améliore-t-elle le résultat ?
L'expérience montre l'importance des gestes manuels, la reproduction éventuelle du geste de dépôt, l'utilisation (ou non) de l'organisation en tableau, le repérage (éventuel) de « bonnes formes » ou la formulation d'éléments langagiers.
De façon plus générale, on doit s'interroger sur le rôle du langage dans une « mise à distance » par l'élève, c'est-à-dire le passage d'une solution occasionnelle à une méthode. C'est l'une des fonctions de l'accompagnement de l'adulte ; cette mise à distance est-elle possible dès le cycle 2, à quelles conditions ?
Il est clair qu'une inscription dans la durée (rappel de l'activité d'une séance précédente, formulation d'une synthèse, projection vers une séance ultérieure…) est l'une des conditions nécessaires.

1.2. Symétrie/rotation

On utilise deux grilles, comportant les mêmes figures mais selon des emplacements différents.
Le maître désigne une figure de la première planche. Consigne : où se trouve cette figure sur l'autre planche ?





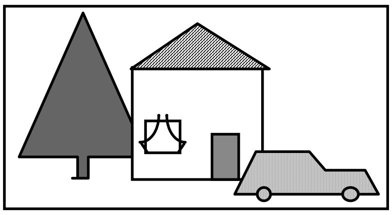
Ce qui est visé ici c'est la possible confusion de deux figures ne différant que par une symétrie ou une rotation. C'est évidemment un déficit perceptif qui retentit sur les apprentissages de l'écriture et de la lecture. C'est pourquoi on peut travailler aussi avec des tableaux de lettres ou de syllabes :

da	pa	ba
ab	ad	ap
do	po	bo
ed	eb	ep

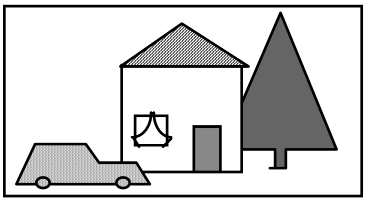
ed	da	po
do	ab	eb
pa	bo	ap
ad	ep	ba

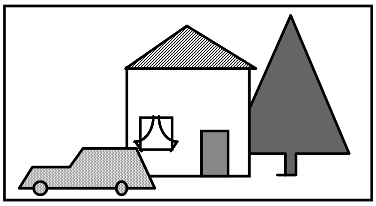
1.3. repérage/description

Le matériel est composé de 12 cartes à découper, portant chacune les trois objets : Arbre, Maison, Voiture. Le maître pose une carte devant l'enfant. Exemple :



Consigne : « *que vois-tu sur cette image ?* » Réponse possible : — *un arbre, une maison, une voiture…*
Le maître pose alors par-dessus la carte ci-dessous à gauche :





Question : — *est-ce la même image ?* Réponse possible : —*non, ici la voiture est à gauche…*
Le maître pose alors par-dessus la carte ci-dessus, à droite.
–*Ici aussi, la voiture est à gauche ; est-ce la même carte que la précédente ?* etc.
On note le degré de précision de la description : les objets pouvant être : à **gauche**, au **centre**, à **droite**, **en avant** ou **en arrière** d'un autre objet, la voiture **dirigée vers** la gauche ou vers la droite.

2 Mémoire

La psychologie cognitive, depuis une trentaine d'années, décrit les démarches de pensée et leurs limitations en termes de traitement d'information, de capacité, d'économie. Ceci concerne aussi bien la symbolisation, l'élaboration de schéma, le classement que la planification d'actions ou l'anticipation. Ce peut être l'une des causes des incompréhensions de consignes, de l'incapacité à dépasser le décodage grapho-phonologique, des interruptions de calcul.
Le concept de mémoire de travail postule trois composantes (Baddeley, 1993) :

- un **administrateur central** qui accomplit des « fonctions exécutives » : anticipation d'un but à atteindre, planification des actions, sélection des informations pertinentes et inhibition des informations parasites, application des procédures, contrôle de l'action…
- une « boucle phono-acoustique » (stockage temporaire de l'information verbale),
- un « calepin visuo-spatial » (stockage temporaire d'informations visuelles).

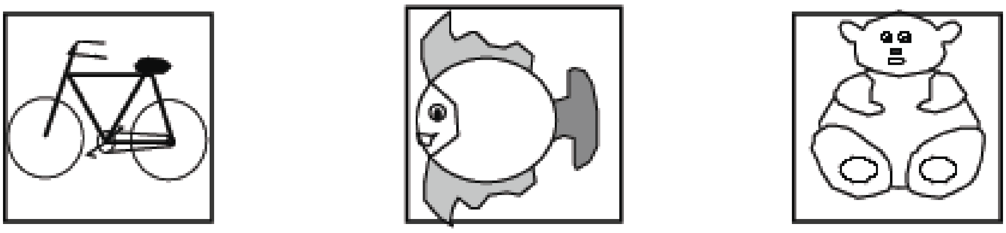
On voit par là l'intérêt pédagogique de l'évaluation de la mémoire de travail. Le repérage (sinon la mesure) d'un *empan* mnésique est un élément d'évaluation, l'amélioration de la *gestion* de la mémoire de travail une composante de la remédiation.

2.1 Empan

Matériel : un jeu de cartes, battu, sans les figures. Le maître montre une carte (p. ex 3♣), énonce « *Trois* », et la pose dos en l'air. L'enfant doit répéter « *Trois* ». Le maître montre une deuxième carte (p. ex 7♥), énonce « *Sept* » et la pose dos en l'air sur la précédente ; l'enfant doit répéter « ***Trois, Sept*** », etc.
Noter la liste des séquences émises par l'enfant, puis relever les cartes dans l'ordre :
Exemple : [3] ; [3 – 7] ; [3 – 7 – 5] ; [3 – 7 – 5 – 1] …
On note la longueur de la liste la plus longue sans erreur. Ceci donne une indication sur l'empan mnésique. Il ne s'agit probablement pas d'une *mesure*, pour plusieurs raisons. Cette longueur de séquence dépend du matériel utilisé (chiffres, lettres, syllabes, mots…), mais aussi de l'entraînement. La littérature évoque le « *nombre magique 7 (± 2)* » ; mais en fait, après quelques séances d'entraînement, des enfants de cycle 3 arrivent à reproduire une séquence de 10, 15, voire 20 chiffres. Ceci ne signifie pas une extension de l'empan, mais une meilleure gestion des « paquets » (*chunk*), faisant intervenir des repères visuels, des blocs, des rythmes. C'est pourquoi il est imprudent de parler d'une mesure. Par ailleurs cette indication s'est révélée très faiblement corrélée aux erreurs de calcul mental ; ce qui ne signifie pas que la taille de l'empan soit sans conséquence, mais que bien d'autres facteurs interviennent.
La prise de conscience des moyens d'améliorer la gestion de la mémoire de travail (qui ne sont pas sans rapport avec l'*attention*), est certainement un facteur utile dans la remédiation.

2.2 Mémorisation d'une séquence

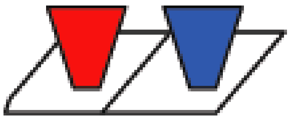
Une série de trois images est présentée à l'enfant, puis recouverte.
On donne ensuite les trois images séparées qu'il s'agit de replacer dans le même ordre.



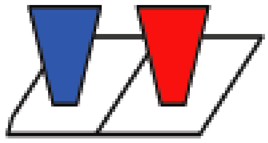
Suite : quatre images à ordonner, ou bien quatre images parmi cinq ou six, qu'il faut d'abord choisir, puis ordonner.

2.3 Mémorisation d'une suite d'actions

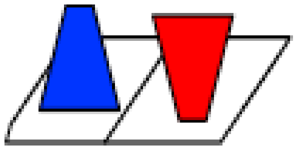
On attribue à l' « administrateur central » de la MdT la responsabilité de l'organisation dans la durée (planification, anticipation). Il semble probable que cette « fonction exécutive » a de l'importance dans l'acquisition des apprentissages ; c'est pourquoi il importe de l'évaluer. L'épreuve suivante consiste à exécuter devant l'enfant *une suite d'actions* (en les décrivant) et à lui demander ensuite de reproduire cette séquence.



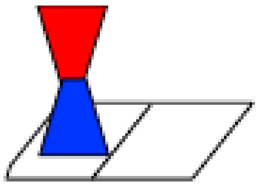
Situation de départ (deux gobelets)



Erreur !1- Echanger les gobelets



2 - Retouner le bleu



3 – Poser le rouge sur le bleu

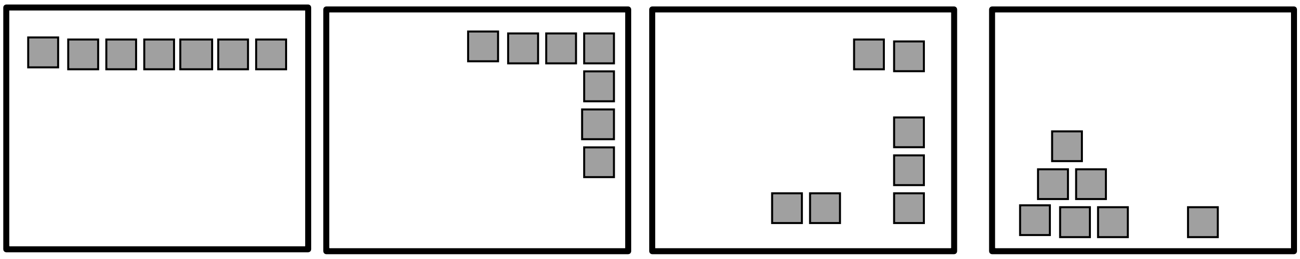
L'un des éléments significatifs est celui-ci : l'enfant s'appuie-t-il sur la séquence gestuelle, sur la séquence imagée, ou sur la mémorisation langagière (description) ? Plus généralement, on peut s'interroger sur le *type de représentation* que le sujet utilise (il a été beaucoup question naguère des « habitudes évocatives ») ; un modèle psychologique dominant semble considérer qu'un « codage propositionnel » fédère les représentations en mémoire à long terme. Il n'appartient pas au pédagogue de prendre parti sur un modèle, mais de considérer que celui-ci constitue, à un moment donné, une hypothèse destinée à diriger l'investigation vers des objets significatifs, et pas nécessairement à traduire une réalité neuropsychologique ; ainsi la « représentation sémantique » du nombre est un élément d'un modèle explicatif, mais pas nécessairement une entité « réelle ».

3 Attention

Une autre « fonction exécutive » de l'*administrateur central* consiste à centrer le champ attentionnel et à inhiber les informations périphériques ou parasites. Plusieurs épreuves sont susceptibles de repérer cette capacité, voire de l'entraîner. L'atelier propose plusieurs exemples sous forme de diaporamas (PowerPoint, disponibles sur demande) ; l'ordinateur permet en effet de prendre en compte plusieurs paramètres intéressants : durée d'exposition de chaque image, modification du sujet central, apparition de perturbations, etc.

3.1 Chenille

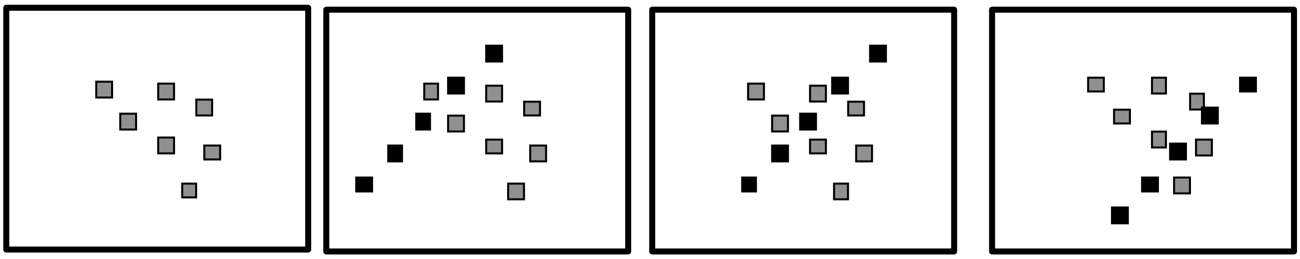
Ces images apparaissent à l'écran successivement, pendant une durée (très) courte. **Combien de carrés** ? (la question est posée au début et à la fin de la séquence).



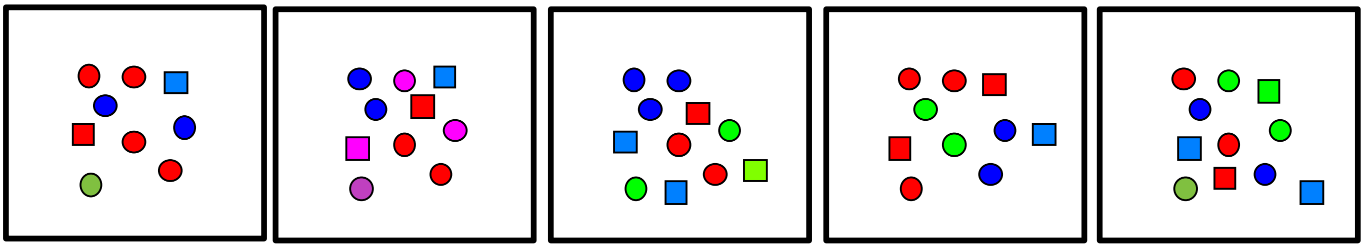
La durée d'exposition est trop courte pour permettre un dénombrement un par un ; il s'agit donc de trouver et d'exécuter une *stratégie perceptive* (repérage de blocs) permettant de répondre.

3.2 Perturbation

Même principe. Il s'agit de dénombrer les carrés gris ; mais une vague de carrés noirs traverse l'écran.



Autre exemple, même principe. Il s'agit de dénombrer les ronds ; quelques carrés perturbent l'image.



Conclusion

Ces quelques exemples n'ont pas l'ambition de recouvrir tout le champ des obstacles possibles *aux moyens d'apprendre*. L'atelier a pour objectif d'attirer l'attention sur des éléments qui ne semblent pas pris en compte par les didactiques disciplinaires (puisqu'ils ne concernent pas l'apprentissage d'un objet particulier), et de fournir aux enseignants quelques outils, ici à l'état d'ébauche. Une mise en réseau des essais et des résultats permettrait d'établir et de diffuser des outils visant le diagnostic, la construction de l'aide, et des remédiations adaptées.

III - BIBLIOGRAPHIE

BADDELEY, A. (1993) La Mémoire humaine, Théorie et pratique, Presses universitaires de Grenoble.

BOULE, F. (1999) L'évaluation en mathématiques, *Nouvelle Revue AIS n°5, mars 1999.*

HERREMAN, S. [dir], BOULE, F., BRETON, L., GRAFTO, M. *Les Aides personnalisées*, Hachette (à paraître 2011).

NOEL, M-P. dir (2005) *La dyscalculie*, Solal.

POJE, J. & SEL,ADKE, J dir. (2001) *Elèves en difficulté : les aides spécialisées à dominante pédagogique*, CNEFEI & CRDP Lille.

SIEGLER, R.S. (2001) *Enfant et raisonnement (développement cognitif de l'enfant)*, De Boeck.

MATH & MANIPS : INTRODUCTION DE MANIPULATIONS DANS LES CLASSES POUR FAVORISER LA CONSTRUCTION DES APPRENTISSAGES

Valérie HENRY
Directrice de recherche, CREM
Chargée de cours, FUNDP, ULG
V.Henry@ulg.ac.be

Pauline LAMBRECHT
Chercheur, CREM
Doctorante, FUNDP
PaulineL@crem.be

Patricia VAN GEET
Chercheur, CREM
VanGeetP@crem.be

Résumé

Cet atelier rend compte d'une recherche actuellement en cours au CREM[1]. Les *Math & Manips* sont des activités conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des expérimentations. Nous proposons trois séquences d'apprentissage intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement élémentaire voire du début du collège. Pour les enfants de 6 à 8 ans, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence. Pour les élèves de 8 à 10 ans, il s'agit de faire découvrir l'utilité d'un étalon conventionnel en travaillant les capacités. Pour ceux de 10 à 12 ans, nous proposons une séquence visant l'appropriation de la notion de volume. La discussion avec les participants s'oriente principalement sur les concepts mis en place au cours de chaque activité.

Le CREM est actuellement engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves. Ces activités, appelées *Math & Manips*, sont destinées à améliorer l'apprentissage de certaines matières du cursus. Dans l'esprit des travaux précédents du CREM, la présente recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début du primaire jusqu'à la fin du secondaire. Nous espérons provoquer chez certains élèves de la curiosité par des manipulations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener tout naturellement à entrer dans des démarches où le processus de modélisation prend tout son sens.

L'atelier se concentre sur trois séquences d'apprentissage destinées aux élèves de l'école élémentaire. La présentation a pour objectif non seulement de partager nos travaux, mais surtout de favoriser le dialogue avec les participants et de recueillir leurs réactions. Cet article présente un compte-rendu succinct de ces trois activités (dans la forme où elles se trouvaient en juin 2011) et des réactions que leur présentation a suscitées lors du colloque. Les activités I et III ont été encore peu testées à ce jour. Elles continueront donc à évoluer suite à de prochaines expérimentations dans des classes. L'activité II a été élaborée pour sa part suite à de nombreuses expérimentations au cours desquelles l'activité des élèves a été observée.

---

[1] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – Nivelles, Belgique.

La répartition des activités en fonction des années d'étude est prévue pour l'enseignement belge qui est constitué de trois cycles au primaire. Nous avons choisi d'indiquer les niveaux équivalents en France même si ces groupements sont parfois inadaptés pour le système français.

I - LE GOÛTER D'ANNIVERSAIRE (CP-CE1)

Avec les enfants de 6 à 8 ans, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence.

Les activités sont présentées autour d'un thème : un goûter pour le septième anniversaire de la mascotte de la classe (habituellement une peluche). Au cours de la séquence d'apprentissage, les élèves sont amenés à choisir l'objet de plus grande capacité, le plus long, le plus lourd ou celui de plus grande aire selon une méthode efficace. Ces manipulations ne nécessitent aucun recours aux mesures (Rouche, 1992).

Une activité préliminaire est proposée afin de permettre à l'enseignant de s'assurer que le principe de conservation du volume est acquis par la plupart des élèves. Pour cela, chacun d'eux apporte un verre. L'enseignant verse dans chaque verre, devant tous les élèves, le contenu d'un petit carton de jus, puis leur demande si l'un d'eux a plus à boire que les autres. Si les enfants affirment qu'ils ont tous la même quantité à boire malgré la diversité des formes de leurs verres, les manipulations du goûter d'anniversaire peuvent être commencées. Sinon, nous conseillons avant cette *Math & Manip* d'autres activités qui permettent de développer l'acquisition du principe de conservation du volume (voir par exemple CREM, 2002).

1 Comparaison de longueurs de segments : les bougies

La classe est divisée en sept groupes et chacun d'eux reçoit un lot identique de bougies coupées à différentes longueurs. Les élèves doivent présenter à l'enseignant la bougie la plus longue de leur lot. Les sept bougies rassemblées, l'enseignant demande à un élève de vérifier qu'elles ont toutes la même longueur, puisqu'il s'agit de la bougie la plus longue de chacun des lots identiques. Ces bougies les plus longues peuvent être de couleurs différentes.

Cette activité très simple, où la comparaison des longueurs se limite à une comparaison de segments, prépare la comparaison des ficelles (activité 5).

2 Comparaison de capacités : les moules à gâteau

Cette manipulation, menée par l'enseignant devant toute la classe, consiste à installer avec les élèves une méthode permettant de reconnaître le récipient de plus grande contenance.

Pour ce faire, l'enseignant présente trois moules différents. Notre choix s'est porté sur les trois moules illustrés. En les manipulant, les élèves observent leurs particularités, par exemple, un moule peut être placé à l'intérieur d'un autre. Ils doivent alors prendre conscience que ce moule ne sera pas celui qui peut contenir le plus de pâte et qu'il faut donc l'écarter. Pour comparer les deux autres moules, l'un plus haut et l'autre plus large, l'enseignant, suite à une discussion avec les élèves, remplit d'eau un premier moule puis transvase son contenu dans le second. Les élèves sont amenés à se rendre compte que, s'il n'est pas possible de verser toute la quantité d'eau du premier moule dans le second, cela signifie que le premier moule a une capacité supérieure au second. De même si, ayant versé toute l'eau du premier moule dans le second, ce dernier n'est pas rempli, cela signifie que le second moule a une capacité supérieure au premier.

L'expérience fait donc appel à deux modes de comparaison. Tout d'abord, observer qu'un moule est inclus dans un autre suffit à décider qu'on peut l'écarter. Une technique plus fine est nécessaire pour comparer les deux moules restants, le plus haut n'étant pas celui de plus grande contenance comme les élèves pourraient avoir tendance à le croire. L'enseignant propose donc une technique de transvasement. Une seule personne réalise l'expérience devant la classe afin que chacun soit attentif au déroulement. Cette technique sera travaillée individuellement par les élèves lors de la comparaison des gobelets[2] (activité 4).

3 Comparaison de masses : les boîtes à bonbons

La manipulation suivante amène les élèves à comparer des masses sans les mesurer.

Elle s'effectue avec des petits groupes d'élèves, à tour de rôle. Pendant ce temps, ceux qui ne sont pas occupés sont invités à réaliser des décorations pour garnir la table le jour de la fête.

L'enseignant présente aux élèves quatre boîtes identiques et opaques contenant les mêmes bonbons. Dans chacune, il y en a un nombre multiple de trois. Il explique qu'il a préparé ces boîtes pour différents groupes d'enfants, en comptant trois bonbons par enfant. Parmi les quatre boîtes, l'une d'elles est destinée à ses élèves qui constituent le groupe d'enfants le plus nombreux. Mais l'enseignant a oublié de noter les destinataires de chaque boîte. La tâche des élèves consiste à retrouver, sans l'ouvrir, la boîte qui leur est attribuée. La première étape est de comprendre que, comme la classe représente le groupe le plus nombreux, leur boîte est celle qui contient le plus grand nombre de bonbons, et est donc la plus lourde.

Nous faisons vivre cette manipulation aux participants. Les premières réactions d'ordre sensoriel consistent à soupeser les boîtes ou à les secouer pour « entendre » si l'une d'elles contient un nombre significativement différent de bonbons. Les boîtes sont remplies de manière à ce que l'une de ces techniques ou les deux permettent aux élèves d'exclure une boîte. Pour comparer les trois boîtes restantes, nous avons choisi d'utiliser une balance à deux plateaux (balance de Roberval). Cet instrument, utilisé fréquemment en Belgique dans les classes maternelles, ne semble pas faire partie du matériel habituel dans les classes de CP, selon les participants. Il est cependant assez facile d'en fabriquer une soi-même puisque le but est de comparer les masses et non de les mesurer.

Lorsque chaque groupe d'enfants a mis au point une technique pour trouver la boîte la plus lourde, une mise en commun permet de confronter les choix. Si tous les groupes n'ont pas sélectionné la même boîte, la balance à plateaux est utilisée devant l'ensemble des élèves pour les mettre d'accord. Il s'ensuit une vérification : l'enseignant ouvre la boîte choisie unanimement et chaque enfant prend trois bonbons. Si le choix de la boîte est correct, il doit y en avoir pour tout le monde.

La boîte la plus légère a été placée intentionnellement pour permettre d'écarter une première boîte par une expérience purement sensorielle. Cette technique a ses limites et ne permet pas de comparer les trois boîtes restantes. La balance à plateaux ne permet que des comparaisons deux à deux, c'est donc la transitivité de l'ordre sur les grandeurs qui est implicitement travaillée ici.

[2] Par le mot « gobelet », nous désignons tout récipient qui permet à l'élève de boire.

4 Comparaison de capacités : les gobelets

Les élèves comparent la capacité de quatre gobelets et ont la consigne de choisir celui qui peut contenir le plus de grenadine. Les gobelets sont choisis de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui contient le plus, conception très prégnante dans l'esprit des élèves de cet âge. Comme lors de comparaisons précédentes, une première analyse purement visuelle permet de mettre sur le côté un gobelet de contenance visiblement plus petite que les autres. Ensuite, comme pour les moules à gâteaux, la comparaison s'effectue par transvasements d'eau. Les élèves comparent les récipients deux par deux et conservent, après chaque transvasement, le gobelet ayant la plus grande capacité. Ils devraient encore ici appliquer spontanément le principe de transitivité. Cette activité permet donc le réinvestissement des apprentissages réalisés précédemment.

5 Comparaison de longueurs : les ficelles d'emballage

L'enseignant explique aux élèves qu'il souhaite emballer le gâteau d'anniversaire dans une boîte fermée à l'aide d'une ficelle d'emballage. Il présente un ensemble de ficelles : les unes sont enroulées, les autres torsadées et les dernières déroulées. Les longueurs à comparer ne se présentent plus d'emblée comme des segments rectilignes. Les ficelles proposées ont une longueur de plus d'un mètre cinquante afin d'éviter au maximum la tentation d'utiliser la règle pour les mesurer. La classe est partagée en plusieurs groupes pour travailler. L'enseignant remet à chacun d'eux un lot de ficelles différentes et leur demande de sélectionner la ficelle la plus longue après avoir donné une estimation.

Les ficelles ont été choisies de façon à ce que la plus longue soit celle qui prend le moins de place. Ainsi, nous prévoyons l'apparition de trois types de réponse :
- une estimation au hasard ;
- une estimation (erronée) basée sur l'espace occupé par les ficelles, avant étirement ;
- une réponse (correcte) de type : « Je ne peux pas le dire dans l'état actuel ».

La deuxième devrait mener au conflit cognitif visé. La troisième témoignerait d'une maîtrise importante des apprentissages ciblés puisqu'elle requiert, en plus des connaissances proprement dites, d'entrer en rupture avec le contrat didactique.

6 Comparaison d'aires : set de table ou serviette?

Les participants ont été mis en activité sur cette comparaison, dont la situation est la suivante.

L'enseignant souhaite protéger les bureaux des élèves pour le goûter et donne le choix entre des sets de table ou différentes sortes de serviettes. Il présente aux élèves des lots identiques d'éléments et leur demande de déterminer celui qui recouvre la plus grande surface de leur table.

Comme prévu pour les manipulations précédentes, l'impression visuelle permet d'écarter un élément. Il s'agit d'une petite serviette. Pour comparer les trois éléments restants, la première idée est de les superposer pour « voir » si l'un d'eux dépasse des autres. En superposant la grande serviette et le set de table, certains constatent que la serviette est légèrement plus large que le set et que ce dernier est bien plus long que la serviette. Pour d'autres, qui jouent le jeu des élèves, le découpage du surplus et la superposition des morceaux sont nécessaires. Le matériel apporté était légèrement différent du matériel prévu pour les élèves, les participants ont donc parfois reçu des pièces dont il était difficile de distinguer celle de plus grande aire.

Une question s'est posée : la majorité des enfants de 6 et 7 ans ont-ils acquis le principe de conservation des aires ? Les découpages sont alors remis en question et certains participants pensent qu'il serait souhaitable de proposer des éléments qui se comparent uniquement par superposition.

Au moment où nous rédigeons cet article, l'activité a été repensée pour éviter le recours à des découpages et sera testée prochainement.

7 La synthèse… et le goûter !

Après ces manipulations, une institutionnalisation est organisée sous forme de synthèse, comprenant à la fois l'ensemble des démarches effectuées par les élèves et des éléments plus théoriques. Elle se fait en deux temps : oralement lorsque les élèves expliquent ce qu'ils ont découvert au fil de la *Math & Manip* et ensuite par écrit. Cette dernière partie est laissée à l'initiative des enseignants étant donné que le matériel utilisé et les réflexions proposées par les élèves peuvent varier d'une classe à l'autre. Toutefois, des pistes seront données dans les fiches qui accompagneront cette activité lors de la publication.

L'ensemble des activités se termine par le goûter d'anniversaire.

II - DES ÉTALONS (CE2-CM1)

Cette activité consiste à proposer aux élèves de 8 à 10 ans une situation où le choix d'un étalon apparaît comme une nécessité.

1 Comparaison directe de deux capacités

Pour commencer, on demande aux élèves de comparer les capacités de deux récipients de formes telles qu'on ne puisse préjuger de celui dont le volume est le plus grand. Avant toute manipulation, il est demandé aux élèves d'avancer une estimation. Lors de cette phase, certains élèves pourraient avancer des justifications basées sur des conceptions erronées telles que « le récipient le plus haut a la plus grande capacité ». Afin de créer un conflit, les deux récipients sont choisis de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui peut contenir le plus. Les élèves peuvent alors procéder à la comparaison par transvasement. Le but de cette première phase est également de vérifier leurs méthodes de comparaison et de les corriger si nécessaire.

2 Étalons non conventionnels

Dans la deuxième partie de cette *Math & Manip*, l'enseignant raconte une histoire qui place les élèves dans un contexte où la comparaison directe n'est plus possible, mais où ils ont la possibilité de choisir un étalon non conventionnel commun. Nous avons pris le temps de faire vivre cette partie d'activité aux participants.

Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous faites vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, les équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. Chaque équipe estime avoir découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Afin de déterminer l'amphore de plus grande capacité, vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les capacités de vos amphores et les résultats de la comparaison.

Après s'être répartis en deux équipes et s'être assuré, comme les élèves, que leurs valisettes comportaient le même matériel, les participants se rendent sur leurs « sites de fouilles ». Ces derniers sont situés en des endroits suffisamment distants pour simuler l'éloignement géographique et empêcher toute comparaison directe. Ils sont signalés au moyen d'une représentation d'un monument du pays en question. Les équipes trouvent sur leur site un récipient représentant une amphore ainsi qu'une réserve d'eau.

Face à la diversité du contenu de leur valisette, les « archéologues » sont confrontés au choix d'un étalon approprié à la mesure de la capacité de leur amphore. Certains objets sont très petits (bouchon, cuillère, etc.), ce qui rend fastidieux le remplissage du récipient. D'autres sont plus grands (gobelet, tasse, etc.), ce qui manque de précision mais permet néanmoins de mesurer par encadrement. De plus, des objets inadaptés à la mesure de la capacité ont été placés, avec pour possible effet de focaliser l'attention des élèves sur la hauteur, la largeur, la longueur, … de l'amphore.

Certains élèves pourraient se servir d'étalons variés, plus grands et plus petits (bol et louche, etc.), ce qui pourrait introduire la notion de sous-étalon et amener une plus grande précision. Les équipes doivent, dans tous les cas, prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un récipient commun. L'enseignant, qui joue le rôle de l'expert et ne valide le rapport que si la méthode est correcte, peut alors parler d'étalon. Il reste aux élèves à procéder, une nouvelle fois si nécessaire, à la mesure de la capacité de leur amphore avec cet étalon. Les mesures ainsi obtenues sont finalement comparées et permettent la détermination de l'amphore de plus grande capacité.

3 Étalons conventionnels : le litre et ses sous-multiples

Ensuite, l'enseignant annonce qu'une troisième amphore a été découverte sur un site en Turquie. Sa capacité est donnée à l'aide d'un étalon qui ne se trouve pas dans les valisettes. Les élèves se rendent compte qu'il est difficile de trouver exactement les mêmes étalons d'un pays à l'autre. Une discussion s'engage autour des étalons utilisés et de ce qu'ils représentent. Un étalon commun universel apparaît, dès lors, comme une nécessité.

Une fois le litre ou un de ses sous-étalons mentionnés, l'enseignant donne la capacité de l'amphore turque en litre et demande aux élèves de classer les trois amphores selon leur capacité. Il reste alors aux élèves de chaque groupe à recommencer leurs mesures à l'aide d'un récipient gradué.

Au travers de cette activité, les élèves ont l'occasion de vivre la nécessité du choix d'un étalon commun dans un premier temps et de comprendre la nécessité d'un étalon commun universel dans un deuxième temps.

Le travail se poursuit par la sériation de plus de trois récipients, la découverte des équivalences entre les sous-unités de mesure et l'étude des relations entre sous-étalons. Cette dernière partie s'effectue à partir d'une série de récipients sur lesquels la capacité est mentionnée.

Des participants ont souligné que ce genre d'activité était intéressante également pour que les élèves découvrent que, par exemple, un récipient de 500 ml a une capacité plus petite qu'un autre de 2 litres, bien que 500 soit un nombre plus grand que 2.

III - VOLUMES (CM2-6^{e})

L'ensemble des manipulations destinées aux élèves de 10 à 12 ans a pour objectif l'appropriation de la notion de volume, plus particulièrement dans le cas des parallélépipèdes rectangles, ainsi que la construction de liens entre quelques unités de volume.

Cette activité, encore en construction, a été présentée lors de l'atelier sous une forme provisoire que nous décrivons en annexe. Nous remercions les participants pour leurs réflexions qui seront prises en compte dans l'évolution de notre travail.

IV - CONCLUSION

Cet article a été l'occasion de présenter principalement deux activités que nous avons développées au CREM. Dans ces activités, l'accent est mis sur l'introduction de manipulations dans la classe afin de favoriser l'apparition de conflits cognitifs relativement au savoir visé.

Dans la première *Math & Manip*, les enfants découvrent diverses méthodes de comparaison en fonction des grandeurs avec lesquelles ils travaillent et se forgent des intuitions relativement aux domaines de validité des techniques qu'ils possèdent déjà, ce qui crée l'espace nécessaire à la mise en place de nouvelles techniques, plus efficaces.

La deuxième *Math & Manip*, quant à elle, place les élèves dans une situation dans laquelle ils vivent la nécessité de la détermination d'un étalon commun. Ce sont les rétroactions du milieu au fil de l'activité qui les guident vers le besoin de s'accorder sur un étalon commun universel.

Les différents conflits rencontrés au cours de ces séquences d'apprentissage (généralement : le récipient le plus haut n'est pas nécessairement celui qui peut contenir le plus) incitent les élèves à remettre en question les impressions visuelles, à se convaincre de la nécessité de la vérification et à mettre en œuvre des méthodes efficaces de comparaison.

L'investissement personnel des élèves dans les activités nous semble de nature à favoriser l'acquisition des concepts liés aux grandeurs. Toutefois, une analyse portant sur la mesure des effets d'une telle ingénierie n'a pas encore été réalisée.

Pour terminer, soulignons que, en ce qui concerne le primaire, l'objectif n'est pas tant l'introduction de manipulations dans les classes car celles-ci y ont généralement déjà leur place mais bien la mise en évidence, pour l'enseignant, des savoirs mathématiques impliqués et des conditions nécessaires à leur mobilisation.

V - POUR EN SAVOIR PLUS

Pour tout renseignement complémentaire concernant la recherche ou l'une des *Math & Manips* présentées, nous sommes à votre disposition. Vous pouvez prendre contact avec nous via l'adresse suivante :

info@crem.be

Pour plus d'information concernant les activités du CREM, consultez le site :

www.crem.be

VI - BIBLIOGRAPHIE

APMEP (2002-2003) Projet de création d'un laboratoire de mathématiques. *Lycée Mas de Tesse*, *Montpellier*. http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Asm19_2002-2003_Projet_labo_de_Math_de_Tesse_Annexe_Asm19.pdf

BKOUCHE R. (2008) Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM*, **70**, 33-76.

BOREL É. (1904) *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Conférence prononcée le 3 mars 1904, Musée Pédagogique, Paris. http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

CARON-PARGUE J. (1981) Quelques aspects de la manipulation. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2/1**, 5-35.

CASTELNUOVO E., BARRA M. (1980) *La mathématique dans la réalité*. IREM Univ. Paris 7, CEDIC, Bruxelles.

COMMISSION SCIENTIFIQUE D'ÉTUDE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES (1990) *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*. Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation, Belgique.

CREM (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur*. Rouche N. coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

DIAS T., DURAND-GUERRIER V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, **60**, 61-78.

ERMEL (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Hatier Pédagogie, Paris.

GATTEGNO C., SERVAIS W., CASTELNUOVO E., NICOLET J.L., FLETCHER T.J., MOTARD L., CAMPEDELLI L., BIGUENET A., PESKETT J.W., PUIG ADAM P. (1958) *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

GEM (2007) *Des laboratoires pour construire des mathématiques*. Louvain-la-Neuve.

GUISSARD M.-F., HENRY V., AGIE S., LAMBRECHT P. (2010) Math & Manips, *Losanges*, **7**, 39-46.

JAQUET F. (2007) *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel*. ARMT, Italie.

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE (1999) *Socles de compétences* (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire). Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, Bruxelles.

ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Didier Hatier.

VII - ANNEXE

Avant même de présenter cette *Math & Manip* aux participants, la notion de volume a été discutée. Le mot « volume » est utilisé pour indiquer tant la grandeur que la mesure.

1 Découverte du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle

Chaque groupe reçoit 4 boîtes et 38 cubes de 2 cm d'arête. La consigne donnée est la suivante : combien de cubes sont nécessaires pour remplir chaque boîte ?

Les boîtes ont été pensées pour que le nombre de cubes donnés permette de remplir entièrement la première boîte et de remplir une base ainsi qu'une partie d'un second « étage » de la deuxième. Pour la troisième boîte, il est possible de remplir une base et de construire une hauteur. Quand à la quatrième boîte, il y a assez de cubes pour construire une longueur, une largeur et une hauteur. Cette progression dans la difficulté nous paraît justifiée mais tous les participants à l'atelier ne sont pas d'avis d'imposer que le remplissage se fasse dans cet ordre.

Connaissant l'aire d'un rectangle, les élèves trouvent assez vite que le nombre de cubes nécessaires à remplir la base correspond au nombre de cubes mis dans la longueur multiplié par le nombre de cubes mis dans la largeur. Ce nombre trouvé, ils le multiplient par le nombre d'étages qu'ils peuvent construire. Il est très important que les élèves notent, pour chaque boîte, la démarche qu'ils ont utilisée. Celle-ci sera expliquée lors de la mise en commun et, par la suite, lors de la synthèse construite avec eux.

Cette activité met en exergue deux manières de calculer le volume d'un parallélépipède, soit en multipliant la base par la hauteur, soit en multipliant les trois dimensions entre elles. Suite à une discussion avec les participants, il nous paraît important de privilégier la première façon car elle restera valable pour calculer le volume de n'importe quel prisme, contrairement à la multiplication des trois dimensions.

Certains élèves (et participants) ont remarqué qu'une boîte dont le volume était déjà connu pouvait se placer dans une autre plus grande. Ceci débouche sur une autre façon de calculer le volume en ajoutant le nombre de cubes manquants.

Les participants ont également souligné que cette activité est proche d'une activité de la série ERMEL dans laquelle il s'agit de trouver combien il y a de morceaux de sucre dans une boîte. Certains objectifs sont communs aux deux activités qui amènent cependant des apprentissages différents.

2 Calcul du volume d'un parallélépipède rectangle en cm³

Il s'agit à présent de suivre la même consigne que précédemment mais les élèves reçoivent 50 cubes de 1 cm d'arête. Ils ne remplissent plus systématiquement les boîtes mais comptent le nombre de cubes qu'ils peuvent aligner sur chaque dimension. Si le volume – en tant que mesure – d'une boîte correspond au nombre de cubes que l'on peut y ranger, nous obtenons deux volumes différents par boîte en fonction des cubes utilisés. Une discussion est engagée avec les élèves afin de se mettre d'accord sur le choix du cube à utiliser et les raisons de ce choix (arbitraire). L'introduction de la nécessité d'un cube étalon universel, le cm^3, trouve ici tout son sens.

L'enseignant fait chercher le lien existant entre le cube de 2 cm d'arête et celui de 1 cm d'arête. Les élèves sont évidemment tentés de dire qu'il est de volume double puisque l'arête est multipliée par deux mais la manipulation permet de trouver et de comprendre que le rapport est 8.

3 Une boîte particulière

Une nouvelle boîte est proposée aux élèves, il s'agit d'un décimètre cube. L'enseignant demande aux élèves de calculer son volume. Vu le choix de l'étalon, la plupart des élèves trouvent 1000 cm³. C'est le moment d'établir l'égalité 1 dm³ = 1000 cm³. Certains élèves choisissent le cube de 2 cm d'arête et trouvent que 125 cubes sont équivalents au volume de la boîte particulière. Il est alors opportun de remarquer avec eux qu'un unique cube de 1 dm d'arête contient 125 cubes de 2 cm d'arête (qui contiennent chacun 8 cubes de 1 cm d'arête) et prend autant de place que 1000 cubes de 1 cm d'arête.

4 Lien entre deux unités de mesure de volume

L'enseignant propose aux élèves de chercher le volume d'une boîte dont une dimension est donnée en décimètres et deux en centimètres (ces deux dernières étant représentées par des nombres multiples de 10). Diverses réponses peuvent surgir dont deux solutions nécessitent une conversion des mesures de longueur en une même unité. C'est la situation idéale pour réfléchir ensuite à l'équivalence des réponses exprimées en cm³ et en dm³.

5 Remarque

Contrairement à l'approche de la notion de volume proposée par de nombreux livres scolaires, nous avons choisi de commencer par des boîtes de forme parallélépipédique et non cubique. Le parallélépipède rectangle met davantage en exergue l'existence des trois dimensions.

CONSTRUIRE UN OUTIL DE FORMATION À PARTIR DE L'ANALYSE D'UNE SÉANCE AUTOUR D'UN *PROBLÈME OUVERT* AU CYCLE 3.

Christine CHOQUET
PIUFM, IUFM des Pays de La Loire, site Le Mans
Doctorante CREN, Université de Nantes
christine.choquet@univ-nantes.fr

Résumé

L'atelier s'est appuyé sur des résultats issus de notre travail de thèse en cours qui traite de l'activité d'enseignants du cycle 3, en mathématiques, lorsqu'ils proposent à leur classe des *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). L'objectif était, à partir de quelques éléments de notre corpus -vidéogramme d'une séance, transcriptions de travaux d'élèves- d'amener les participants à réfléchir à l'utilisation de l'analyse de ces données dans la formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles. Pour cela, après avoir brièvement présenté notre étude, nous avons proposé aux participants de résoudre le problème et d'en faire une analyse *a priori* afin de déterminer les savoirs en jeu. Le travail a ensuite consisté à analyser les productions des élèves puis le scénario proposé par l'enseignant. L'atelier a permis de réfléchir à l'élaboration d'un outil de formation à la gestion de situations *problème ouvert* en identifiant leurs spécificités mais également à la gestion des séances de mathématiques en général.

Cet atelier est en lien avec notre travail de recherche dans le cadre de la rédaction d'une thèse. Cette recherche vise à comprendre et définir la place que des professeurs des écoles français accordent, dans leur enseignement des mathématiques, à l'étude de *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). Pour mémoire la caractérisation de ces problèmes, proposée par les auteurs, est la suivante :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre exemples.*

Nous avons observé puis analysé, lors d'une année scolaire complète, dans les classes de six enseignants, des séances portant sur des *problèmes ouverts* afin d'étudier les choix que font ces enseignants. Les analyses des pratiques enseignantes sont complétées par des analyses de l'activité des élèves et par une réflexion sur les savoirs en jeu avec ce type de problèmes. L'ensemble de cette étude nous permet également de questionner la formation des professeurs des écoles.

Pour l'atelier, une séance intitulée « les balances » a été isolée parmi toutes celles que nous avons observées et l'objectif de cet atelier concerne la construction d'un outil de formation initiale et/ou continue à partir de l'analyse de cette séance - formation à la gestion de situations *problème ouvert* et formation à la gestion de séances de mathématiques en général -. Plus généralement, nous avons, comme de nombreux formateurs-chercheurs, observé puis analysé des séances ordinaires et nous nous sommes interrogés sur l'utilisation possible de ces analyses en formation des professeurs des écoles.

I - PRÉSENTATION DU CORPUS UTILISÉ DANS L'ATELIER

Dans ce premier chapitre, nous présentons d'abord brièvement notre recherche, entreprise dans le cadre de la préparation de notre thèse ainsi que la méthodologie choisie pour répondre à nos questions. Nous présentons ensuite le corpus qui est plus particulièrement étudié dans l'atelier.

1 Présentation de notre recherche

1.1 Problématique et cadre théorique

Par notre étude, nous cherchons à comprendre pourquoi et comment des enseignants du cycle 3 proposent à leurs élèves des *problèmes ouverts* pendant les séances de mathématiques. Nous analysons également ces pratiques afin de déterminer l'impact de telles séances sur les apprentissages des élèves, afin de préciser les savoirs en jeu dans ce type de problèmes.

Afin de répondre aux questions concernant la pratique des enseignants, nous utilisons le cadre théorique de la « double approche didactique et ergonomique » (Robert & Rogalski, 2002).

1.2 Méthodologie

Nous avons choisi d'observer le travail de six professeurs des écoles pendant une ou deux années scolaires. Ces observations se font dans des classes de cycle 3, avec des élèves de 8 à 10 ans. Ce niveau a été choisi car les *problèmes ouverts* proposés aux élèves nous semblent plus intéressants (par rapport au cycle 1 et au cycle 2) du point de vue des connaissances qui peuvent être abordées et nous permettent d'approfondir des réflexions déjà engagées en didactique des mathématiques sur les savoirs en jeu avec ce type de problèmes (Douaire, Hubert, 1999, Hersant & Thomas, 2008, Hersant, 2010, Houdement, 2009).

Afin de pouvoir observer des séances les plus ordinaires possibles, nous ne sommes intervenus ni dans le choix du problème, ni dans la préparation de la séance. L'ensemble des choix a été laissé à l'initiative des enseignants.

Les séances portant sur des *problèmes ouverts* ont été observées, filmées puis transcrites. Certains travaux de groupes d'élèves ont également été enregistrés et transcrits. Les travaux des élèves ont été récoltés (brouillons, feuilles de recherche ou affiches). Des entretiens avec les enseignants, avant et après les séances ont été transcrits.

Chaque séance fait l'objet d'une analyse *a priori* puis *a posteriori*. Nous avons cherché à déterminer en particulier pour chaque séance, si les problèmes étaient réellement *ouverts* pour la classe concernée et quels savoirs pouvaient être objet d'institutionnalisation.

Nous utilisons dans notre étude, la répartition de l'activité de l'enseignant, établie par Robert et Rogalski (2008), en cinq composantes -cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle-. Nos analyses permettent de renseigner chacune des composantes afin d'obtenir des réponses de plus en plus précises sur la pratique des enseignants observés, afin d'expliquer les choix qu'ils font pour leur classe.

1.3 Présentation de la séance proposée dans le cadre de l'atelier

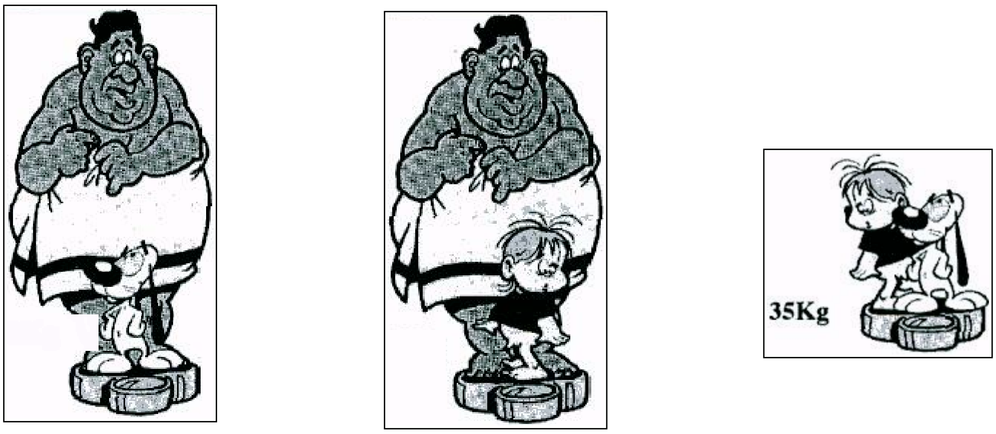
Pour le travail de l'atelier, nous avons choisi une séance parmi toutes celles que nous avons analysées. L'enseignant qui a préparé cette séance, est âgé d'une quarantaine d'années et travaille avec des élèves de CM2 depuis plus de cinq ans dans la même école. Nous l'avons choisi car il ne débute pas dans le métier et a une bonne expérience du cycle 3.

La séance qui sert de support à cet atelier, est la première de ce type, dans l'année pour cette classe de vingt élèves. Avec cet enseignant, les élèves sont habitués à travailler en groupes mais jamais pendant les cours de mathématiques.

Nous précisons que cette séance n'a pas la vocation d'être une séance type, ce n'est en aucun cas un modèle. Nous l'avons choisi car, d'après nous, son analyse permet d'aborder un nombre important de questions ayant trait à l'étude de *problèmes ouverts* dans des classes de cycle 3 ainsi qu'à l'enseignement des mathématiques en général à l'école primaire. Cette séance nous semble riche de par son caractère ordinaire, parce qu'elle montre des aspects positifs dans la façon dont l'enseignant gère cette séance et également parce qu'elle fait apparaître à d'autres moments des difficultés, même des manques qu'il faut interroger en formation.

2 Le problème « les balances »

Le problème[1] est choisi par l'enseignant, son but est de déterminer la masse de chacun des personnages.



140 kg **145 kg**

En utilisant les informations données par ces trois dessins, détermine combien pèsent le gros Dédé, le petit Francis et le chien Boudin.

3 Le corpus utilisé dans l'atelier

Dans le cadre de l'atelier, plusieurs éléments du corpus sont étudiés. Des éléments concernent la pratique de l'enseignant et d'autres concernent plus particulièrement l'activité des élèves. Cependant, même si pour des facilités de présentation des analyses pendant l'atelier, nous sommes amenés à séparer les deux, nous avons conscience que lorsque nous étudions l'activité des élèves, nous apportons en même temps des éléments de réponse sur la pratique de l'enseignant ; les deux études, de la pratique de l'enseignant et de l'activité des élèves étant liées et indissociables.

3.1 Concernant l'enseignant

La séance est filmée puis le film est transcrit. Nous avons choisi de présenter aux participants deux extraits du vidéogramme avec leur transcription, les deux extraits sont bruts, aucun montage n'a été réalisé afin de suivre le déroulement en temps réel de la séance. Le premier extrait, de 4 minutes, montre le début de la séance. Il permet de visualiser la classe, les élèves et leur enseignant. Il rend compte des consignes qui sont données aux élèves et de la mise en route d'un temps de recherche individuelle. Le deuxième extrait, de 12 minutes, correspond à la mise en commun des résultats. Il permet de voir comment l'enseignant organise cette mise en commun, comment les responsabilités vis à vis de l'avancement de cette mise en commun sont réparties entre lui et les élèves. L'extrait montre également comment l'enseignant conclut cette séance.

1 Deledicq A., Missenard C. (1996), *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège*, ACL éditions, p.46.

Un plan de la classe (disponible en annexe 1) sur lequel sont notés les déplacements de l'enseignant pendant la phase de recherche en groupe est également présenté. Il permet d'obtenir des renseignements sur la position et l'attitude qu'a choisi d'adopter l'enseignant pendant cette phase de recherche.

3.2 Concernant les élèves

Nous proposons aux participants la transcription des cinq affiches (disponible en annexe 2) rédigées par les cinq groupes et présentées à la classe lors de la mise en commun.

II - ETAPE 1 : TRAVAIL CONCERNANT L'ANALYSE *A PRIORI*

Lors de ce premier temps de travail, les participants résolvent individuellement le problème « les balances » et résument par une phrase leur démarche. Ils sont invités ensuite à en faire une analyse *a priori* afin de répondre toujours individuellement à deux questions :

- Comment les élèves de cycle 3 peuvent-ils résoudre ce problème ?
- Quels savoirs sont alors en jeu ?

Un temps de travail en binôme est ensuite proposé afin de permettre une première comparaison des résultats. Les échanges entre les participants ont permis de lister des procédures possibles pour résoudre le problème ainsi que certains savoirs en jeu. Nous avons complété ce premier bilan avec nos propres résultats.

1 Les procédures de résolution envisageables

Dédé pèse 125 kilogrammes, le chien Boudin pèse 15 kilogrammes et Francis pèse 20 kilogrammes.

Une première procédure (notée P1) pour atteindre ces résultats, consiste à mettre en équation le problème puis à résoudre le système de trois équations à trois inconnues ainsi obtenu.

Une autre procédure (P2) revient à ajouter les masses inscrites sur deux balances et à soustraire la masse indiquée sur la troisième balance pour obtenir ensuite, en divisant par deux, la masse de l'un des personnages. Les masses des deux autres personnages sont finalement obtenues par soustraction.

Il est possible également d'ajouter les trois masses, de diviser par deux puis de soustraire une des masses indiquées sur l'une des trois balances pour obtenir la masse d'un des personnages (P3). Les masses des deux autres personnages sont ensuite obtenues par soustraction.

Une quatrième procédure (P4) s'appuie sur des essais et ajustements. Ces essais tiennent compte de la différence de cinq kilogrammes entre Francis et le chien (une décomposition additive de 35 est envisagée) mais également d'hypothèses issues de la « vie courante » (par exemple : « Gros Dédé » doit peser dans les cent kilogrammes ou un chien est moins lourd qu'un enfant comme Francis).

Les essais peuvent être essentiellement inspirés par la « vie courante », la différence de cinq kilogrammes entre le garçon et le chien n'est pas utilisée. Cela constitue dans notre étude et pour l'atelier, une cinquième procédure (P5).

2 Les savoirs en jeu

2.1 Des savoirs curriculaires revisités

La procédure P1 n'est pas envisageable avec des élèves de cycle 3. Ce problème permet donc dans tous les cas, à des élèves de ce niveau, de remobiliser l'addition et la soustraction. Certaines procédures (P4, P5) font appel également à la décomposition additive de 35 (avec des entiers mais aussi des décimaux puisque rien ne dit au départ, que les masses sont des nombres entiers). D'autres procédures (P2, P3) incitent à partager en deux des entiers (par division, par addition).

Ce problème est bien l'occasion de retravailler le calcul avec des nombres entiers.

2.2 Est-ce réellement un problème ouvert ?

Le texte est court, l'énoncé est accompagné d'un dessin expliquant clairement la situation des trois pesées. Aucune indication ne donne d'information sur la méthode à employer pour résoudre le problème. Il n'y a pas notamment, de questions intermédiaires qui pourraient guider les élèves vers telle ou telle procédure. Malgré cela, l'énoncé est accessible, il peut être compris par des élèves de 9-10 ans et la présentation, sous forme de dessins, leur permet de faire rapidement quelques essais.

Nous pouvons donc affirmer que ce problème est pour des élèves de cycle 3 un *problème ouvert* selon la caractérisation proposée par Arsac & Germain (2007).

2.3 Des savoir faire utiles pour faire des mathématiques

Arsac et al. (2007) pour justifier de l'intérêt de proposer des *problèmes ouverts* en classe, insistent sur le fait que ces problèmes permettent de développer *la démarche scientifique*. Ils précisent qu'il s'agit pour un élève d'apprendre à « *faire des essais pour produire une conjecture, tester sa conjecture en faisant d'autres essais, prouver la validité de sa conjecture.* ». Ils expliquent également qu'un élève, avec ce type de problèmes, apprend à faire preuve d'imagination, de créativité étant donné que les énoncés ne proposent pas de démarches à suivre.

(Douaire, Hubert 1999), (Houdement 2009) montrent que certains de ces problèmes peuvent être choisis pour enseigner différentes formes de raisonnements et pour développer chez un élève des capacités à prouver des résultats mathématiques.

Hersant & Thomas (2008) puis Hersant (2010) prouvent que l'étude de certains problèmes de type *ouvert* sont l'occasion de développer des savoir faire utiles ensuite aux élèves pour résoudre des problèmes mathématiques. Il s'agit par exemple que « *les élèves ressentent l'intérêt et les limites de leurs expériences empiriques* » ou encore d'apprendre aux élèves à « *bien distinguer ce dont on est sûr (le possible, l'impossible qu'on a réussi à prouver) et ce dont on doute (la part indéterminé du problème)* » afin de les rendre capables d'organiser au mieux leurs recherches.

Dans le cas du problème « les balances » étudié dans l'atelier, les élèves apprennent que, même si un seul résultat existe, plusieurs procédures pour l'atteindre sont envisageables. Les participants pensent que les élèves vont ainsi prendre conscience que pour résoudre un problème mathématique, un raisonnement par essais et ajustements peut convenir. Les élèves vont également découvrir qu'il est indispensable de vérifier la validité d'un résultat. La question s'est ensuite posée sur la gestion efficace des essais : il semble utile, afin de ne pas multiplier les essais, de mettre en relation les données de l'énoncé, de faire appel à des connaissances extérieures aux mathématiques, telles que la masse d'un enfant, d'un chien. L'atelier a conclu que tous les élèves ne vont pas, à partir de l'étude d'un seul problème de ce type, apprendre à organiser les données. Pour cela, d'autres problèmes devront être proposés à la classe.

3 Et pour la formation ?

Après avoir réfléchi aux savoirs en jeu dans le problème, les participants se sont demandés ce qu'il était possible de proposer en formation. Le premier point soulevé concerne la question de l'analyse *a priori* du problème. Notre expérience de formateur, notre recherche en cours ainsi que les expériences de chacun des participants montrent que cette étape n'est pas toujours envisagée par les enseignants ou seulement très rapidement. De la discussion dans l'atelier, il ressort comme indispensable dans un premier temps de formation, de réfléchir à une analyse *a priori* afin de définir, tout au moins, des objectifs d'apprentissage précis.

Dans le but d'apprendre à mener à bien une analyse *a priori*, les participants ont évoqué l'idée d'aider les enseignants en formation à mieux caractériser les problèmes qu'ils rencontrent. Il semble possible d'établir avec eux des classifications selon, par exemple, les objectifs d'apprentissage visés ou selon le type de problèmes afin de comprendre ce qu'est un problème *ouvert* par rapport à un problème d'application, de prendre conscience également qu'un problème est *ouvert* pour un élève à un certain moment de sa scolarité mais ne l'est plus à un autre moment.

Le travail présenté ici, se basant sur l'analyse de la séance « les balances », permet de répondre à certaines questions et de préciser quelques réponses sur les savoirs en jeu et les raisons qui peuvent pousser un enseignant à proposer un problème ouvert à sa classe. Cependant pour une étude plus complète des choix que sont amenés à faire des enseignants de cycle 3 et des raisons menant à ces choix, nous invitons le lecteur à consulter (Choquet, 2010).

III - ETAPE 2 : QUE FAIRE DES RECHERCHES ET DES RÉSULTATS DES ÉLÈVES ?

Dans le deuxième temps de l'atelier, les participants prennent connaissance de la transcription des affiches rédigées par la classe et d'un plan de la salle résumant les déplacements effectués par l'enseignant pendant la phase de recherche (annexes 1 et 2). Il s'agit pour eux, à la lumière de ces différents documents de penser à une mise en commun possible pour cette classe, avant de découvrir le scénario élaboré par l'enseignant observé.

1 Déroulement de la séance observée

Les élèves sont installés par groupes de quatre, chaque groupe dispose d'une affiche qui servira à présenter à la classe les résultats du groupe. Après avoir distribué à chaque élève un énoncé du problème « les balances », l'enseignant demande aux élèves d'y réfléchir seuls pendant quelques minutes. Au bout de 2 minutes, il leur annonce qu'ils peuvent commencer à travailler en groupe, se mettre d'accord pour, quand ils auront trouvé un résultat, compléter leur affiche. Ce travail de groupe dure 40 minutes, pendant lesquelles l'enseignant n'intervient pas auprès des élèves. Il reste alors 15 minutes pour la mise en commun des résultats.

2 L'activité de l'enseignant pendant la phase de recherche

En visionnant le début de la séance, nous observons que le processus de dévolution de la recherche aux élèves est réussi. Chaque élève individuellement puis chaque élève dans chaque groupe se met au travail et tient à déterminer les masses des personnages. Par la suite (nous le constatons en particulier avec le plan), l'enseignant choisit de ne pas circuler entre les groupes, de se mettre à l'écart, de presque disparaître de la vue des élèves en restant derrière son bureau. Cette attitude a surpris et interrogé les participants à l'atelier et deux questions sont apparues : pourquoi l'enseignant ne va-t-il pas voir ce que font ses élèves pendant la phase de recherche en groupes ? Et pourquoi décide-t-il de ne pas les aider ?

Brousseau (1998) souligne que l'enseignant « *doit, par son attitude, convaincre les enfants de sa neutralité […] afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.* ». Cet enseignant (que nous avons interrogé juste après la séance) nous confie qu'il a du mal à ne pas répondre à certaines sollicitations des élèves, il considère que régulièrement, il les « aide trop ». En restant loin d'eux, il veut ainsi leur montrer qu'ils doivent chercher entre eux, qu'ils ne doivent pas attendre une aide de sa part. Son objectif prioritaire est « *d'apprendre aux élèves à chercher* », la recherche doit donc se faire sans lui.

Cependant, même si l'enseignant justifie ce retrait, les participants sont d'accord pour penser que cette attitude pose réellement problème. L'enseignant voit les élèves chercher, discuter dans les différents groupes mais ne peut pas prétendre suivre de près ces recherches. Il ne peut pas se faire une idée, en temps réel, des raisonnements mobilisés dans chacun des groupes. Il ne voit peut-être même pas qui a trouvé des solutions correctes et, au contraire, qui a fait des erreurs. Il est clair que ce défaut de repérage du travail accompli par les élèves, constitue un manque pour la suite de la séance. Nous le constatons d'ailleurs plus loin dans la séance, lorsque les élèves viennent exposer leurs résultats à toute la classe.

3 Les procédures des élèves

Comme Orange (2005), nous pensons qu' « *une analyse didactique des pratiques enseignantes est une analyse qui porte sur les relations entre ces pratiques et les apprentissages réalisés par les élèves.* ». Cette « *analyse didactique des pratiques enseignantes se doit donc d'interroger ces pratiques selon l'activité intellectuelle des élèves* ». Dans notre étude, nous analysons donc le travail accompli par les élèves afin d'obtenir des renseignements concernant la pratique de l'enseignant.

Orange confirme que l'« *activité intellectuelle n'est bien sûr pas directement observable* ». Cependant, « *les productions sont considérées comme des traces de l'activité intellectuelle des élèves* ». L'activité intellectuelle des élèves va donc devoir être reconstruite lors des analyses, grâce aux productions des élèves ; ces productions, écrites, orales ou matérielles, étant intermédiaires tout au long de la séance ou finales. C'est pourquoi nous analysons des brouillons d'élèves, les discussions entre les élèves lors de travaux de groupes ainsi que les affiches que chaque groupe produit. A partir de toutes les données concernant les élèves pour la séance « les balances », nous retraçons l'historique de chaque affiche en retrouvant les démarches, les raisonnements de chaque groupe. L'intérêt de l'analyse réside ensuite dans le repérage des diversités de procédures et dans leur comparaison.

Les participants ont travaillé à partir du document présent en annexe 2, afin d'identifier les différentes procédures des élèves puis nous les avons regroupées donc selon deux types :

Des procédures plutôt de caractère mathématique (que nous notons PMv) : la différence de cinq kilogrammes est remarquée et, après avoir compris avec l'énoncé, qui du chien ou de l'enfant est le plus lourd, les élèves trouvent la masse de Dédé par soustraction.

Des procédures plutôt liées à la vie courante (que nous notons PVm) : la masse des personnages sont estimées (autour de 100 kilogrammes pour une personne comme Dédé, autour de 30 kilogrammes pour un enfant comme Francis, …), des essais et ajustements permettent de trouver les masses de chaque personnage.

Une certaine hétérogénéité des procédures apparaît dans cette classe, avec une majorité du type PVm.

Le groupe 2 utilise une procédure de type PMv, ces élèves n'ont pas de difficultés en mathématiques, ils justifient la différence de cinq kilogrammes entre le chien et l'enfant mais ensuite, pour expliquer que Francis est le plus lourd, ils font appel à leurs connaissances de la vie courante, ils font des hypothèses hors du champ des mathématiques. Ils trouvent la masse des trois personnages.

Le groupe 5 mobilise aussi une procédure du type PMv, différente cependant de la précédente. Les élèves ne voient pas la différence de cinq kilogrammes mais décomposent 35 en plusieurs sommes de deux entiers et vérifient la cohérence des résultats avec les autres masses indiquées sur les balances. Avec quelques essais et ajustements, ils trouvent la masse des trois personnages.

Le groupe 3 utilise une procédure du type PVm. Même si les élèves voient la différence de cinq kilogrammes, ils ne parviennent pas à l'expliquer clairement et font des suppositions issues de la vie courante (« *une personne comme Dédé doit peser dans les 100 kilogrammes* »), qui dirigent alors leurs essais et ajustements. Ils trouvent la masse des trois personnages.

Les groupes 1 et 4 utilisent une procédure PVm, sans remarquer la différence de cinq kilogrammes entre le chien et l'enfant. Les élèves font des essais avec plusieurs masses pour le chien, l'enfant et Dédé qu'ils ajustent puis vérifient en tenant compte des autres masses indiquées sur les balances. Le groupe 1 trouve la masse des trois personnages mais le groupe 4, n'allant pas au bout de toutes les vérifications nécessaires, fait une erreur de calcul et ne trouve pas les bons résultats.

4 Quelle mise en commun est-elle possible ?

Avec les participants, nous avons évoqué plusieurs façons d'organiser la mise en commun des résultats, avant de regarder ce que propose l'enseignant dans sa classe.

De notre étude, nous retirons deux résultats : les marges de manœuvre pour organiser une mise en commun ne sont pas très importantes et, une mise en commun ne semble pertinente que si l'enseignant a une idée des savoirs en jeu et une bonne représentation, avant celle-ci, des procédures utilisées par les élèves. Nous considérons que les marges de manœuvre ne sont pas très vastes dans le sens où un temps doit forcément être consacré à la prise de connaissance de toutes les procédures des élèves, de tous leurs résultats avant de se consacrer à une réelle réflexion sur les travaux de chacun.

Les échanges entre les participants ont permis d'envisager plusieurs façons de gérer la mise en commun des résultats :

Chaque groupe passe exposer son affiche et le résultat est discuté par la classe et l'enseignant (Pr1).

Les affiches sont regroupées par l'enseignant, par procédures identiques, un groupe seulement présente alors les résultats. Cette façon de faire permet de montrer les travaux de tous, en gagnant un peu de temps sur la présentation vu que tous les groupes ne viennent pas au tableau (Pr2).

Les résultats qui semblent faux à l'enseignant, sont présentés en premier par les élèves puis viennent ensuite les résultats corrects sur lesquels l'enseignant peut choisir de passer moins de temps (Pr3).

Cette liste ne se veut pas exhaustive mais permet de montrer qu'en fait la question se pose plus en terme d'objectifs que l'enseignant vise pour cette mise en commun qu'en terme de simple présentation aux autres élèves de différentes procédures et de résultats. Les participants sont d'accord sur le fait que la mise en commun des résultats est importante pour les élèves cependant les modalités de présentations (Pr1, Pr2 et Pr3) ont été un sujet de discussion afin de répondre aux questions suivantes : comment faire pour que les élèves s'interrogent sur les procédures de leurs voisins ? Et est-ce utile pour eux de s'approprier les procédures des autres élèves ?

Lors de la présentation Pr1, un temps important est consacré au « passage » de tous les groupes au tableau. C'est l'attitude de l'enseignant qui va faire que les élèves vont décider de valider ou pas telle ou telle procédure. S'il ferme trop les questions, la mise en commun se résumera à une présentation des résultats et à une correction habituelle en terme de c'est bon ou c'est faux.

La présentation Pr2 en regroupant les procédures identiques permet de gagner du temps. Cependant là encore, c'est le questionnement de l'enseignant qui permettra de transformer cette présentation en réelle discussion entre les élèves : pourquoi ces affiches semblent-elles identiques à l'enseignant, en quoi les autres sont-elles différentes ? Les élèves sont alors amenés à distinguer les différents raisonnements et à mieux les comprendre, à y relever éventuellement des erreurs. Si ce questionnement n'a pas lieu, car l'idée était seulement de faire une mise en commun plus rapide, là encore, cette mise en commun est une correction bien orchestrée par l'enseignant, avec même visuellement au tableau, d'un côté les affiches qui sont incomplètes et d'un autre, les affiches qui donnent un résultat correct.

Des enseignants après un travail de recherche dans leur classe, proposent de discuter d'abord à propos de procédures incorrectes ou incomplètes pour passer ensuite à des procédures qui fonctionnent, c'est la présentation Pr3. Le questionnement permet aux élèves de réfléchir aux erreurs commises, aux éléments qui ont manqués pour conclure. Cependant, nous avons observé dans plusieurs classes que les élèves s'habituent vite à cette façon de faire et les commentaires des participants l'ont confirmé. Quand un tel enseignant demande à un groupe de passer en premier, toute la classe en déduit tout de suite que la procédure est incorrecte, même avant de prendre connaissance du travail du groupe, l'attention des élèves et la réflexion sur les erreurs commises ne sont plus aussi satisfaisantes et même si l'enseignant questionne la classe, seulement les élèves ayant réalisé l'affiche essaient de comprendre pourquoi ils n'ont pas correctement abouti.

Finalement, même si les réflexions précédentes apportent quelques réponses, il a été noté dans l'atelier qu'aucune présentation n'est complètement satisfaisante et que la question de la dévolution aux élèves de cette mise en commun reste un sujet d'étude.

5 Et pour la formation ?

5.1 Concernant l'analyse des productions des élèves

L'analyse des productions des élèves est source d'apprentissage pour des professeurs des écoles en formation initiale et/ou continue. Les éléments détaillés dans le paragraphe 3 sont à reconstruire avec eux. Cependant afin d'être pertinente en formation, cette analyse doit être guidée, accompagnée par le formateur. En effet, plusieurs participants ont remarqué dans leur expérience personnelle qu'étudier les procédures des élèves revient souvent pour des enseignants en formation, à seulement se demander si elles sont correctes ou pas. Les procédures sont seulement évaluées et les enseignants ne cherchent pas forcément à approfondir la question de l'activité intellectuelle des élèves au delà de leur écart à la bonne réponse. C'est pourquoi l'ensemble des participants conclut sur un accompagnement nécessaire de cette analyse par un questionnement, concernant la diversité des procédures. A la manière de Orange (2005), nous proposons par exemple de faire repérer, par les professeurs en formation, « *l'existence ou non d'une diversité dans ce que produisent les élèves […]* » et de leur demander en quoi ces procédures sont réellement diverses. Dans le cas où il n'y aurait pas de réelle diversité, il peut être demandé en formation, d'expliquer si c'était attendu ou pas par l'enseignant qui propose le problème ; si c'était prévisible ou pas (ce qui implique un retour sur l'intérêt de l'analyse *a priori* déjà abordé dans la partie II).

5.2 Concernant la gestion de la mise en commun

Les questions soulevées dans le paragraphe 4 et les éléments de réponses que les participants ont apportés constituent de réels sujets d'étude en formation d'enseignants. Afin de les compléter, nous avons évoqué quelques documents abordant des situations *problème ouvert*. Un document d'accompagnement[2] de 2005, propose l'exemple de la gestion d'une séance autour d'un *problème pour chercher* qui s'apparente au *problème ouvert*. Ce document accompagnait les instructions officielles de 2002, il peut faire l'objet d'une relecture et d'une analyse en formation continue avec des professeurs des écoles qui, comme l'enseignant qui propose la séance « les balances », le connaissent plus ou moins.

Les ouvrages Ermel (Hatier) insistent également beaucoup sur la mise en œuvre des séances et proposent aux enseignants des façons de faire très détaillées. En reprenant les éléments proposés dans ces ouvrages et que nous ne détaillerons pas ici, des réponses peuvent être apportées en formation.

Certaines épreuves de rallye mathématique (le rallye mathématique de La Sarthe[3], le rallye mathématique transalpin[4] –RMT- par exemple) sont accompagnées de propositions, à destination des enseignants, pour gérer les séances dédiées à la recherche des problèmes qu'ils proposent et qui

[2] MEN, Les problèmes pour chercher, 2005, disponible à l'adresse http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/92785336/0/fiche___pagelibre/&RH=1160078984984, consulté le 15 août 2011.

[3] http://sarthe.cijm.org/index.php?option=com_content&task=view&id=2&Itemid=5, consulté le 15 août 2011.

[4] http://www.math-armt.org/index.php, consulté le 15 août 2011.

s'apparentent également le plus souvent à des *problèmes ouverts*. Il est demandé par exemple aux élèves de chercher ensemble, de se répartir les tâches dans la classe et surtout de ne fournir qu'un seul document-réponse pour toute la classe. Cette façon de travailler ne peut-elle pas être reprise dans le cadre d'une séance autour d'un *problème ouvert*, afin de favoriser un débat entre les élèves, autour des procédures possibles sans forcément passer par la rédaction d'affiches ?

IV - ETAPE 3 : ANALYSE *A POSTERIORI* DE LA MISE EN COMMUN OBSERVÉE

Lors du troisième et dernier temps de travail, les participants visionnent l'extrait du vidéogramme de la séance, correspondant au temps de mise en commun des résultats dans la classe. Il s'agit de s'interroger sur ce que propose l'enseignant, sur les choix qu'il fait lors de cette mise en commun afin de penser à des alternatives possibles. Les participants réfléchissent également à l'utilité ainsi qu'à la pertinence d'un tel extrait vidéo dans une formation.

1 La mise en commun proposée par l'enseignant

Au bout d'une quarantaine de minutes après le début de la séance, l'enseignant annonce qu'il est temps de mettre en commun les résultats.

1.1 Une présentation non organisée à l'avance

Les élèves vont se succéder au tableau, installer leur affiche et commenter leurs résultats. La présentation des résultats n'est pas hiérarchisée par l'enseignant, ce sont les groupes qui au fur et à mesure se manifestent en levant la main et viennent au tableau présenter leur travail, les uns après les autres.

Cette façon de faire peut être gênante puisque, lors de la séance « les balances », la plupart des groupes qui ont un résultat correct, vont exposer avant le groupe 4 qui, lui, a fait une erreur. Il est clair que dès la première affiche, toute la classe connaît la masse des personnages, la question du bon résultat ne se pose plus. Cependant, nous le voyons lors de cette séance, ce n'est pas si simple dans l'esprit de tous les élèves et cette façon de faire n'est pas forcément négative pour cette séance-là en particulier : le groupe 4 va venir proposer un résultat différent en pensant qu'il est quand même juste, la question va alors être posée : peut-il y avoir ici deux réponses différentes possibles ? Certains élèves répondent que oui, c'est une élève qui décèle une erreur de calcul dans l'affiche du groupe 4, qui va convaincre la classe que le résultat proposé par ce groupe est faux. Le vidéogramme permet de voir ensuite que le groupe 4 a compris son erreur de calcul mais n'a pas compris comment trouver les trois masses. En effet, juste après leur exposé et jusqu'à la fin de la séance, ils se remettent en groupe et reprennent leur recherche.

Le fait de ne pas organiser la présentation n'est pas forcément gênant non plus, dans le cas du problème des balances, parce que ce qui intéresse l'enseignant, ce sont les différentes procédures employées par les élèves et non le résultat chiffré. Le bon résultat est donc donné en début de mise en commun, l'intérêt est de découvrir et de partager différentes procédures, de voir et d'apprendre que pour résoudre un tel problème, plusieurs méthodes sont envisageables et peuvent être correctes même si elles n'aboutissent pas complètement au résultat.

1.2 Un questionnement trop fermé

Cet extrait de séance montre la façon de faire de l'enseignant pour interroger les élèves, pour gérer les réactions face aux affiches et aux résultats des élèves. L'enseignant souhaite que les élèves présentent leurs résultats et les expliquent clairement à leurs camarades. Il questionne plusieurs fois dans ce sens, le groupe qui est tableau, afin d'aller plus loin que la simple lecture de l'affiche. Ce qui paraît intéressant.

Cependant, c'est ce même questionnement qui appauvrit la mise en commun. En effet, les questions ne s'adressent pas à chaque fois à la classe entière mais à des groupes d'élèves en particulier :

-lorsque le résultat présenté est correct, l'enseignant ne s'adresse qu'au groupe qui est au tableau et ne fait pas participer le reste de la classe. Il demande aux quatre élèves, par exemple, de comparer leur procédure avec celles déjà affichées, sans le demander aux autres élèves, en leur tournant presque le dos.

-lorsque le résultat semble faux, il se tourne vers la classe et demande : « *Commentaires, est-ce que c'est bon ?* ». La discussion ensuite pour savoir où se trouve l'erreur ne se fait pas avec le groupe qui expose -il est presque ignoré- mais avec le reste de la classe.

La mise en commun, d'après les réflexions des participants à l'atelier, est appauvrie puisque les élèves ne se demandent jamais si une procédure est correcte ou pas, il leur suffit de regarder à qui s'adresse l'enseignant. De plus, les élèves qui ont obtenu un résultat faux, ne sont pas assez intégrés dans la correction et, même s'ils affirment que oui, ils n'ont pas toujours été convaincus par les procédures de leurs camarades, ils n'ont pas forcément tout compris. Nous le constatons quand nous voyons dans l'extrait vidéo, le groupe 4, essayer de finir la résolution du problème, alors que la séance se termine et que toutes les procédures ont déjà été présentées.

2 Des alternatives possibles

Dans la séance « les balances », la recherche d'une solution est bien l'affaire des élèves et d'eux seuls, le processus de dévolution pendant cette première phase est réussi. Par contre, même si ces élèves écoutent leurs camarades pendant la mise en commun des résultats, il semble que les élèves ne soient pas tous investis dans la discussion concernant les différentes procédures exposées. C'est pourquoi, lors de la discussion dans l'atelier, les participants ont évoqué quelques alternatives envisageables pour organiser une séance autour d'un *problème ouvert* que nous avons complétées avec nos résultats.

Une première idée est de proposer à la classe un même type de problème mais avec des énoncés différents suivant les groupes. Il peut s'agir du problème « les balances » pour quelques groupes et du problème suivant pour les autres groupes :

La scène se passe dans un magasin qui vend des CD, des livres et des DVD. Vincent achète un CD et un livre pour 29,80 € ; Richard achète le même CD et un DVD. Il dépense 45,20 €. Michel achète le même DVD que Richard et le même livre que Vincent pour 35 €. Trouver le prix de chaque article séparément. (problème adapté du manuel de 6ème, Hatier, 2005)

Les élèves du primaire ayant un rapport particulier avec les problèmes liés à des prix et à des nombres décimaux, nous pouvons penser que les représentations du problème, les procédures envisagées ne seront sans doute pas les mêmes que celles utilisées pour calculer la masse de Francis, de Dédé et celle du chien. Cet énoncé fera sans doute encore plus appel à la vie quotidienne des enfants que l'énoncé avec des balances, il est possible par exemple que des élèves aient en tête le prix approximatif d'un CD ou d'un DVD et s'en servent pour orienter leurs recherches.

Les deux énoncés étant différents, il nous semble que la mise en commun pourra gagner en intérêt pour les différents groupes et permettre également à l'enseignant de plus facilement engager une discussion concernant la comparaison des procédures.

Une deuxième idée consiste à faire écrire les élèves sur leurs procédures de recherche :

- rédiger rapidement une phrase résumant leur procédure ou leurs difficultés juste après la recherche individuelle ; le but étant de garder en mémoire ces premières idées qui souvent n'apparaissent plus toutes dans les travaux de groupes.
- rédiger une phrase ou deux à la fin de la recherche en groupe (cela revient à préciser ce qui doit être écrit sur les affiches à savoir pas seulement des résultats mais des éléments sur la ou les procédures utilisées). L'objectif est d'apprendre à rédiger une affiche pertinente pour les autres lors de la mise en commun et pas seulement une affiche pour soi.

Il est possible également de réserver du temps pour étudier individuellement chaque affiche : au fur et à mesure de leur présentation au tableau ou à la fin de la présentation de tous les résultats, l'enseignant peut demander aux élèves d'écrire une phrase à propos de l'affiche qui lui semble la plus pertinente, sur des améliorations possibles ou alors au contraire sur l'affiche qui ne permet pas de bien comprendre la procédure afin là aussi de prévoir des améliorations possibles.

L'enseignant peut décider de demander à sa classe de ne fournir qu'une seule feuille-réponse pour toute la classe afin d'obliger les élèves à discuter entre eux des différentes procédures et à se mettre d'accord pour en choisir une qui leur semble pertinente.

Ces quelques exemples ne constituent bien sûr pas une liste exhaustive des façons de faire pour conclure au mieux une séance de type *problème ouvert*. Le but est, en formation, de permettre à chaque participant à partir des exemples fournis, de réfléchir sur sa propre pratique et de partager des points précis de leur expérience (même si cette expérience est relativement pauvre en formation initiale) afin d'entrevoir des possibilités d'évolution, de changements.

V - CONCLUSION

Nous avons, dans le cadre de notre recherche, pu observer, en cycle 3, la séance intitulée « les balances », séance dédiée à l'étude d'un *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007). De l'analyse de cette séance, nous avons isolé des éléments qui nous permettent d'envisager la construction d'un outil de formation à destination des professeurs des écoles : il s'agit de deux extraits du vidéogramme de la séance, des transcriptions des productions finales écrites des élèves ainsi que d'un plan résumant les déplacements de l'enseignant pendant la recherche.

Nous avons explicité tout au long de l'atelier et de ce texte, les étapes qui nous semblent importantes à développer dans le cadre d'une formation initiale et/ou continue, à partir des différents éléments fournis : un travail sur l'analyse *a priori*, une analyse de la diversité des procédures des élèves, une réflexion sur les mises en commun envisageables à partir des résultats d'élèves et une analyse *a posteriori* de la mise en commun observée dans la classe.

Nous pensons que ces différentes étapes de travail, lors d'une formation, peuvent également s'organiser autour de l'analyse d'une autre séance.

Il doit être précisé aux enseignants en formation qu'il ne s'agit pas de montrer et d'étudier des séances qui deviendraient pour eux des modèles. Ce point a été évoqué dans l'atelier. Le plus important est, d'après les participants, de montrer qu'en formation initiale et/ou continue, une discussion doit, à partir de ces quelques propositions, s'engager entre les enseignants et le formateur (mais aussi entre les enseignants sans le formateur) afin de faire le point sur leurs propres pratiques et sur des pratiques possibles. Tout cela afin de permettre à chaque enseignant, après avoir identifier individuellement sa propre manière de faire, d'envisager des changements et d'accepter de faire évoluer sa pratique. Nous avons conscience que cette dernière étape qui concerne une remise en question et un changement éventuel, est difficile pour des enseignants et c'est pourquoi nous poursuivons notre étude afin de répondre au mieux aux besoins en formation initiale et/ou continue.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. & MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHOQUET C. (2010) « Problèmes ouverts » au cycle 3 : quelques résultats sur les choix de professeurs des écoles, in *Actes du XXXVII^e colloque COPIRELEM,* Arpeme.

DOUAIRE J., HUBERT C. (1999) *Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, Ermel, INRP.

HERSANT M. & THOMAS Y. (2008) Quels savoirs dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas des problèmes d'optimisation au cycle 3, in *Actes du XXXV^e colloque COPIRELEM,* Arpeme.

HERSANT M. (2010) *Empirisme et rationnalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*, mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches, https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches, consulté le 11 novembre 2011.

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol.14, p.31-59, IREM de Strasbourg.

ORANGE C. (2005) Une forme d'analyse des pratiques didactiques : l'analyse centrée sur les productions des élèves dans leur diversité, in *L'analyse de pratiques en questions*, Collection ressources, n°8, p.43-49, IUFM des Pays de la Loire.

ROBERT A. & ROGALSKY J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, in *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2, n°4, p.505-528.

ROBERT A. (2003) Analyses de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré), IREM de Paris 7.

ROBERT A. & al. (2003) Scénarios de formation des enseignants de mathématiques de second degré, un zoom sur l'utilisation de vidéo en formation ; un exemple de formation, IREM de Paris 7.

ROBERT A. (2004) Des analyses d'une séance en classe (à partir d'une vidéo) aux analyses des pratiques des enseignants de mathématiques : perspectives en formation d'enseignants, IREM Paris 7.

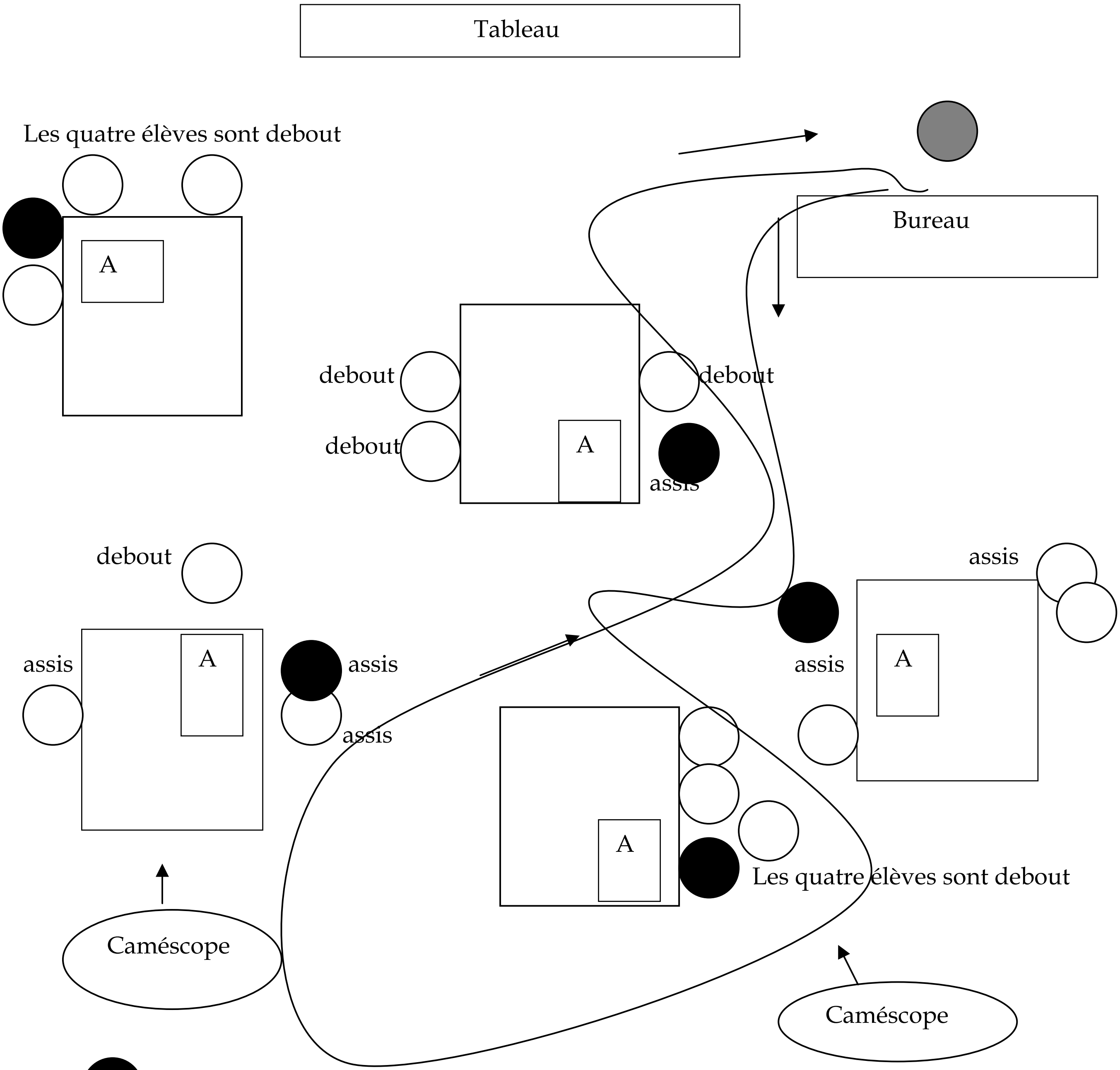
ROBERT A. (2008), Le cadre général de nos recherches en didactiques des mathématiques, in *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octares éditions, p.11-22.

ROGALSKY J. (2008), Le cadre général de la théorie de l'activité : une perspective de psychologie ergonomique, in *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octares éditions, p.23-30.

VII - ANNEXE

1 Le plan de la classe

Le plan de la classe est reproduit. La position de chaque élève pendant la phase de recherche est reportée ainsi que le déplacement de l'enseignant (symbolisé par la courbe) :



: cet élève écrit et sera ensuite le rapporteur du groupe

A : position de l'affiche sur la table

: position de l'enseignant

2 Les affiches de chaque groupe

Groupe 1 :

On a imaginées que Gros Dédé pesait 125 kg. De 125 kg à 145 kg il y a 20 kg, donc on a mis 20 kg au petit Francis.
De 125 kg à 140 kg il y a 15 kg, donc on a mis 15 kg au chien Boudin.

Conclusion :

- le gros Dédé pèse : 125 kg
- le petit Francis pèse : 20 kg
- le chien Boudin pèse : 15 kg

Les calculs :

$$\begin{array}{r} 145 \\ -\ 125 \\ \hline 020 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ -\ 125 \\ \hline 015 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ +\ 15 \\ \hline 35 \end{array}$$

35 kg = le poids du petit Francis et de Boudin.

Groupe 2 :

145 kg → Dédé + enfant + 5 kilos

140 kg → Dédé + chien

$$\begin{array}{r} 145 \\ -\ 20 \\ \hline 125 \end{array}$$

Francis Poids de

Poids de Dédé

35 kg → Francis, Boudin

Francis ← 20 kg

Boudin ← 15 kg

$$\begin{array}{r} 140 \\ -\ 15 \\ \hline 125 \end{array}$$

Poids de Boudin

Poids du gros Dédé

Francis pèse 5 kilos de plus que le chien.

Poids du gros Dédé : 125 kg
Poids de Boudin : 15 kg
Poids de Francis : 20 kg

Groupe 3 :

Gros dédé = 125
Françis = 20
Boudin = 15

Nous savons que Francis pesait 5 kg de plus que Boudin.
Et que gros dédé pèserait dans les 100 kg.
Nous avons essayer 130 + 15 = 145
Après on a refais la même opération mais nous avons trouver que sa faisait 145 au lieu de 140, donc nous avons essayer 125 pour dédé 20 pour Francis et 15 pour Boudin
Et c'était bon.

$$\begin{array}{rl} 125 & /\ \text{dédé} \\ +\ 20 & /\ \text{Francis} \\ \hline 145 & \text{kg} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 125 & /\ \text{dédé} \\ 15 & /\ \text{Boudin} \\ \hline 140 & \text{kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 20 & /\ \text{Francis} \\ 15 & /\ \text{Boudin} \\ \hline 35 & \text{kg} \end{array}$$

Groupe 4 :

On a fait plusieurs essais.

Sur la première balance de Francis et Boudin nous avons trouvé que Boudin pesait 10 kg et donc le reste c'est le poids de Francis, c'est à dire 25 kg.

La 2ème balance de Francis et ~~Boudin~~ Dédé était 25 kg pour Francis comme la première, et donc le reste est le poids de Dédé qui est 130 kg.
Ensuite on a vérifié que les 2 poids étaient possibles pour la 3ème balance et ils étaient possibles.

Francis : pèse 25 kg
Boudin : pèse 10 kg
Dédé : pèse 130 kg

Groupe 5 :

Dédé pèse : 125 kg

Francis pèse : 20 kg

Boudin pèse : 15 kg

$$\begin{array}{r} 125 \\ +\ 20 \\ \hline 145 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ +\ 20 \\ \hline 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ +\ 125 \\ \hline 140 \end{array}$$

QUOI DE NEUF DANS LA NUMÉRATION AU CP ?

Eric MOUNIER
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Les élèves doivent résoudre au CP des problèmes qui mettent en jeu les nombres. Certaines procédures sont susceptibles de faire écho à des propriétés relatives à la numération écrite chiffrée, d'autres à la numération orale. On pourrait penser qu'il y a une certaine perméabilité entre ces deux numérations, mais la thèse d'Eric Mounier (2010) indique que les mathématiques sous-jacentes diffèrent plus sensiblement que des travaux antérieurs pouvaient le laisser penser. Cette analyse a été faite en considérant les signes des numérations et a permis d'établir des interprétations théoriques. Elle constitue un outil pour comprendre les procédures des élèves. C'est cet outil qui a été testé dans l'atelier. Grâce à des vidéos d'élèves, il a été possible de relier les procédures à des propriétés de telle ou telle interprétation théorique des numérations. Ceci conduit à poser un nouveau regard sur les questions afférentes à la place de la numération parlée dans l'apprentissage des aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

L'atelier s'est déroulé en trois temps : une présentation d'une problématique concernant la numération au CP et menant à deux questions (à l'initiative des auteurs de l'atelier), une analyse de vidéos d'élèves (effectuée par les participants de l'atelier) afin de fournir des éléments de réponse à ces deux questions et enfin une nouvelle orientation du questionnement (proposée par les auteurs de l'atelier) qui a été support à des débats.

Dans ce compte rendu, nous reprenons ce déroulement de manière chronologique.

I - DES QUESTIONS SUR LA NUMERATIONS AU CP

L'ensemble de cette première partie reprend la présentation faite dans l'atelier par ses auteurs, y compris les questions qui y sont étudiées. Des précisions sont consultables dans la thèse d'Eric Mounier (2010).

1 Des questions initiales

Les élèves utilisent différentes procédures pour résoudre des problèmes mettant en jeu l'écriture chiffrée du nombre. Les aspects positionnels de cette écriture sont objet d'enseignement au CP. Prenons en exemple la tâche consistant à indiquer le cardinal d'une collection d'objets figurés sur une feuille par son écriture chiffrée. Plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves. En voici deux qui mènent à une réponse exacte (on prend l'exemple de 42) :

- un comptage de paquets de dix formés au fur et à mesure puis d'unités restantes : « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » suivi de la transcription de la désignation orale obtenue en l'écriture chiffrée « 42 ».

- l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) et ensuite l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » puis du nombre d'unités par le chiffre « 2 » qui est écrit à la droite de « 4 ».

Au-delà des procédures d'énumération, Briand (1999), une première analyse permet d'inférer des liens entre les deux numérations. La première procédure utilise une « double » structuration de la comptine numérique, celle des dizaines (les mots, « dix », « vingt », « trente », « quarante ».), celle des unités (les mots, « un », « deux »). Le dénombrement y est effectué au fur et à mesure. Ensuite est utilisée une traduction de la désignation parlée « quarante-deux » en l'écriture chiffrée « 42 ». La deuxième procédure utilise la comptine numérique jusqu'à dix pour organiser la collection en différents paquets de dix. Une fois l'organisation faite, il s'agit alors de la coder par écrit : le nombre de dizaines ainsi que celui d'unités étant indiqués par un chiffre de graphie conventionnelle (les chiffres de « 0 » à « 9 »), la disposition spatiale de ces chiffres étant aussi conventionnelle (ici en ligne avec un ordre).

La question est alors de savoir reconnaître dans les procédures observées en quoi les mathématiques à l'œuvre sont liées à la numération écrite dans son aspect positionnel.

2 Une analyse des numérations en jeu au CP

L'analyse qui suit est une manière de répondre à la question concernant le lien entre les mathématiques et chacune des numérations. Celle-ci est extraite de la thèse d'Eric Mounier (2010). Elle a été présentée au début de l'atelier.

Tableau 1: les interprétations

	Principes mathématiques	Mise en signes
Ecriture chiffrée	4x10+2	42
Arithmétique multiplicative	Quatre fois dix plus deux	Quatre dix deux
Arithmétique additive	Quarante plus deux	Quarante deux
Ordinale avec repérants	Deux après quarante	Quarante deux
Ordinale sans repérant	Quarante-deux ième	Quarantedeux

Ce premier tableau donne, à partir de l'exemple du nombre désigné par quarante-deux/42, les différentes interprétations issues d'une analyse à partir des signes. La première ligne concerne l'écriture chiffrée, les quatre suivantes la numération parlée de type indo-européen (français, allemand, italien, espagnol, anglais, latin …). Ce sont des modèles théoriques qui distinguent les principes mathématiques et leur mise en signes. Si on considère l'ensemble des modèles mathématiques que permettent les décompositions $\sum a_i d_i$ selon les échelles de numération d_i , seul le modèle indiqué dans la première ligne convient pour l'écriture chiffrée. Ainsi, la décomposition dite polynomiale d'un nombre constitue les fondements mathématiques de cette dernière. Les autres modèles (indiqués dans les quatre lignes suivantes) peuvent servir à modéliser la numération parlée en France. Ils ont été obtenus à l'aide d'une analyse linguistique. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée) emprunte des principes mathématiques identiques à la numération écrite chiffrée, mais obtenus par une méthodologie d'analyse différente (une analyse linguistique). Le modèle arithmétique additif se distingue du modèle multiplicatif du fait par exemple de voir dans « trente » non pas « dix plus dix plus dix » (trois fois dix) mais « vingt plus dix » (on rajoute dix au dernier appui additif obtenu, ici « vingt »). Il se distingue du modèle ordinal avec repérants du fait que dans ce dernier « trente » est atteint après avoir énoncé les mots de la comptine numérique « un, deux, …, huit, neuf » après le dernier repérant prononcé « vingt ».

Tableau 2 : les comparaisons

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Coefficients
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Ordre et coefficients
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Appuis et appuyants additifs
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Repérants et comptants
Ordinale sans repérant				Succession de noms

Ce tableau permet de comparer chacun des quatre modèles possibles pour la numération parlée en France avec l'interprétation de l'écriture chiffrée (qualifiée de référence et indiquée dans la première ligne), suivant les principes mathématiques puis leur mise en signes.

La graphie des chiffres et la disposition linéaire pour l'écriture chiffrée, le choix des phonèmes et de l'ordre d'énonciation des différents mots composant le nom des nombres pour la numération parlée en France (par exemple quarante/deux, au lieu de deux/quarante) sont des éléments conventionnels du point de vue des mathématiques. Ces derniers peuvent être compris comme des choix culturels ou pragmatiques qui peuvent être reliés à des contraintes dues à la forme orale (contraintes linguistiques) ou écrite de la numération. Cependant certains éléments de la mise en signes sont directement reliés aux principes mathématiques. C'est le cas de l'utilisation des coefficients de la décomposition dite polynomiale pour l'écriture chiffrée ou de la composition des noms de certains nombres pour la numération parlée. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée en France) est le modèle le plus proche de l'interprétation de référence (modèle adopté pour l'écriture chiffrée) puisque les principes mathématiques sont les mêmes. Seule la mise en signes diffère, puisqu'en particulier l'une n'utilise que les coefficients de la décomposition dite polynomiale tandis que l'autre utilise les coefficients et les ordres. Le nombre « dix » a un statut à part : son emploi est attesté dans la majorité des modèles sans qu'il soit mathématiquement nécessaire (ni comme choix de base, ni comme appui arithmétique ou repérant).

Tableau 3 : pertinence suivant les nombres

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Pour les entiers naturels
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Pour n>cent (mille)
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Pour seize<n<cent
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Pour seize<n<cent
Ordinale sans repérant				Pour n<dix-sept

Ce tableau présente finalement la « pertinence » de l'interprétation (ie : le choix d'un modèle) suivant le champ numérique. Il permet en particulier de comparer chacune des interprétations de la numération parlée en France avec l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.

En ce qui concerne la numération parlée en France, cette pertinence est évaluée selon le degré d'analyse qui permet de retrouver le modèle. Ainsi elle prend en compte la distance entre « quarante-deux » et « quatre dix deux » et celle entre « deussan » et « deux cents » (« deussan » indiquant qu'il est analysé comme un repérant ou appuis additif, « deux cents » soulignant l'appui multiplicatif – l'ordre/puissance de dix - « cent »). Pour les nombres inférieurs à cent, on n'entend pas l'appui multiplicatif (« dix ») alors qu'il est présent (« cent ») pour les nombres entre cent et mille. Pour les nombres inférieurs à cent (et strictement supérieurs à seize), on entend les appuis additifs vingt, trente, etc., qui sont aussi les repérants si on utilise l'interprétation ordinale avec repérants. Ces remarques sont traduites dans la colonne de droite du tableau ci-dessus. Cette présentation met l'accent sur les différences entre les modèles, au-delà des « irrégularités » propres au français de France, en particulier pour les nombres entre soixante et cent (l'utilisation d'une comptine numérique jusqu'à « dix-neuf » ou, dans une perspective arithmétique, d'un ajout de vingt). Pour les nombres inférieurs à cent (ceux du CP), ce n'est donc pas l'interprétation multiplicative qui est la plus pertinente pour la numération parlée en France, alors que cette interprétation est la plus proche de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée.

3 Les questions que les auteurs de l'atelier proposent d'étudier

3.1 De l'analyse des mathématiques en jeu à l'analyse des procédures des élèves

L'étude précédente est une réponse à la question concernant les liens entre les mathématiques et les numérations, et par voie de conséquence entre les deux numérations en jeu au CP, écrite chiffrée et orale. Mais comment relier les mathématiques et les procédures des élèves ? Dans l'atelier on fait l'hypothèse, couramment admise en didactique, que les mathématiques à l'œuvre peuvent être relevées en analysant l'activité des élèves. De manière plus précise, on peut se référer à la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1991). Pour résoudre un problème, les élèves utilisent des schèmes dans lesquels les théorèmes et concepts peuvent être validés grâce à des propriétés mathématiques. Certains emplois sont « -en-acte » dans la mesure où la propriété utilisée n'est pas explicite pour l'élève. Par exemple lorsqu'un comptage de un en un est considéré comme menant à la même réponse qu'un comptage de dix en dix, un comptage des dizaines ou encore un calcul mental. En CP ce sont surtout des théorèmes-en-acte qui sont à l'œuvre car le niveau de connaissance des élèves permet difficilement de formuler des propriétés.

3.2 Des questions spécifiques à la numération au CP

Il s'agit d'aborder les liens entre les propriétés des différentes interprétations et les procédures des élèves. Ces derniers abordent au CP une certaine variété de problèmes. Fénichel et Pfaff (2004, 2005) proposent un classement de ces problèmes dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (voir aussi la thèse de Nathalie Pfaff). Ce classement se base sur les relations entre les signifiants, par exemple dire une écriture chiffrée ou transcrire une désignation parlée à l'aide de chiffres, et les liens entre le signifié (le nombre) et un signifiant, par exemple indiquer la désignation parlée du cardinal d'une collection d'objets. Ainsi l'exemple précédent, indiquer le cardinal d'une collection (d'objets figurés sur une feuille) par son écriture chiffrée, est à situer dans les problèmes consistant à donner un signifiant (ici l'écriture chiffrée) du nombre (signifié).

A la maternelle, l'écriture des nombres avec des chiffres a été introduite en tant que version écrite des désignations de la numération parlée en France : l'écriture (chiffrée) « 23 » est synonyme de l'écriture (littérale) « vingt-trois ». L'apprentissage nouveau au CP concerne les propriétés liées à l'aspect positionnel des écritures chiffrées. Dans l'exemple donné au début, la deuxième procédure consiste en l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) puis de l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » et du nombre d'unités par le chiffre « 2 » à la droite de « 4 ». Au regard de l'étude des signes des numérations indiquée précédemment, cette procédure peut être analysée comme mettant en jeu des propriétés relatives à l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Ce n'est pas le cas de la première procédure. Pourtant l'une et l'autre mènent à une réponse exacte. L'atelier s'est proposé d'aborder deux questions :

- Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ?

- Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ?

Dans l'atelier les élèves concernés sont ceux de fin de CP, c'est-à-dire ayant reçu un enseignement sur les aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

II - LE DISPOSITIF DE L'ATELIER

Le but de l'atelier est de donner dans le cadre d'analyse proposé un aperçu qualitatif des réponses que l'on peut donner aux questions précédentes. <u>Il se centre sur des tâches ne requérant pas nécessairement l'emploi de la numération parlée</u> (si ce n'est pour un comptage jusqu'à dix) <u>afin de comprendre son rôle dans les procédures d'élèves qui utilisent les écritures chiffrées</u>.

Sa faisabilité repose sur l'hypothèse (à tester) qu'il est possible d'inférer des procédures des élèves les éléments qui ont caractérisé les différentes interprétations des numérations.

1 Le choix des observations

Comme il s'agit essentiellement d'une étude prospective, qui pourrait permettre d'entreprendre une étude descriptive plus complète, seule l'activité de trois élèves sur quatre tâches a été étudiée.

Limiter les paramètres influant sur l'usage de telle ou telle procédure

Afin de répondre aux deux questions posées, un certain nombre d'éléments doivent être pris en compte concernant la nature des tâches proposées aux élèves et les contextes dans lesquels elles ont été proposées. Voici les éléments retenus par les auteurs de l'atelier :

- Des tâches comprises par les élèves (habillage et contexte familier).

- Des tâches « simples et isolées », au sens d'Aline Robert (2008), afin de pouvoir repérer les propriétés en jeu sans que des étapes intermédiaires empêchent les élèves de s'y être confrontés.

- Des tâches impliquant la numération « en unités », Chambris (2008), c'est-à-dire qui requièrent un emploi du concept d'unité et de dizaine (comme unité d'un ordre supérieur), mais aussi un choix de tâches pour lesquelles il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la numération parlée usuelle. Les deux premières tâches consistent à donner un signifiant du nombre (quantité) : une écriture chiffrée pour la première, une désignation en unités et dizaines pour la seconde. Les deux autres tâches concernent le lien entre ces deux signifiants (des précisions sont données dans la suite de l'article).

- Des vidéos d'élèves de fin de CP (mois de juin) issus de la même classe et ayant suivi un manuel scolaire afin de limiter des effets dus à un enseignement différent. Tous les élèves savent dire les écritures chiffrées des nombres jusqu'à cent et retranscrire les désignations orales par une écriture chiffrée. Une erreur est cependant à relever pour la première élève, Nadjma, concernant la correspondance entre la désignation écrite chiffrée et la désignation orale des nombres de la dizaine des soixante-dix (associée à une écriture chiffrée commençant par un « 6 » au lieu d'un « 7 »).

Dans les extraits proposés à l'analyse, le champ numérique est constitué des nombres de treize à quatre-vingt-onze, mais il n'est pas le même pour toutes les tâches, ni même parfois pour tous les élèves (cf. la tâche 4). Ce choix est contraint par les observations effectivement recueillies mais aussi par la durée de l'atelier.

Les éléments recueillis, les tâches des élèves et le contexte de passation

Les participants de l'atelier disposaient de vidéos de trois élèves et des photocopies de leur production. Ces vidéos ont été réalisées la même matinée. Dans chaque cas l'élève était seul à une table au fond de la classe (qui continuait à fonctionner comme d'habitude). Le chercheur leur proposait différentes tâches. Les quatre tâches étudiées sont extraites d'une série plus importante. Le contexte est celui des séances « Grand Ziglotron » de la collection « Cap Maths » (édition Hatier 2005), séances que les élèves ont suivies pendant l'année. La séquence du manuel comporte quatre séances qui ont toutes le même contexte. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » figurés par des carrés sur une fiche « Ziglotron », ce dernier étant un robot d'une histoire racontée aux élèves. Cette commande permet de réparer des Ziglotrons. La commande se fait via un bon à remplir : il s'agit d'inscrire un nombre de dizaines de boutons et un nombre de boutons isolés (« tout seuls ») limité à neuf par commande. Ce contexte est repris dans les tâches 2, 3, 4 analysées dans l'atelier. Le bon de commande est constitué d'une première ligne dans laquelle est demandé le nombre de boutons « tout seuls » et d'une deuxième dans laquelle est demandé un nombre d'enveloppes de dix. Ces enveloppes ont été constituées auparavant avec les élèves. Ils ont pu vérifier que toutes contenaient dix boutons (qu'ils ont pu compter) : « une dizaine » a été écrit sur chaque enveloppe avec l'accord et l'aide des élèves.

<u>Tâche 1</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.

Quarante-trois petits ronds sont dessinés sur une feuille A4, sans organisation particulière. Les élèves ont un crayon à papier et une gomme. On leur demande d'inscrire au bas de la feuille l'écriture chiffrée du nombre de petits ronds.

<u>Tâche 2</u> : Indiquer par une dénomination en dizaines et unités le cardinal d'une collection non manipulable.

Les élèves ont devant eux, dessiné sur une feuille A4, un « Ziglotron » qui comporte treize boutons à réparer (c'est donc une collection non manipulable de treize petits carrés figurés). Ils ont un crayon à papier et une gomme. Ils doivent remplir le bon de commande, c'est-à-dire indiquer le nombre d'enveloppes et le nombre de boutons « tout seuls », sachant qu'il n'est pas possible de demander plus de neuf boutons « tout seuls ».

<u>Tâche 3</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.

Les élèves ont huit enveloppes « une dizaine » et six boutons isolés (boutons « tout seuls »). Sur un petit morceau de papier il leur est demandé d'inscrire l'écriture chiffrée du nombre total de boutons.

<u>Tâche 4</u> : Donner une quantité sous forme de dizaines et d'unités, quantité indiquée sous la forme d'une écriture chiffrée.

Il est présenté aux élèves successivement les écritures chiffrées suivantes : 13, 27, 42, 58, 91. On leur demande à chaque fois de donner le nombre d'enveloppes et de boutons « tout seuls » pour honorer la commande.

2 Bilan des procédures relevées selon les élèves et les tâches

La grille qui suit permet une double lecture :

- horizontale, pour donner des éléments de réponse à la première question « Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? »

- verticale, pour la seconde question « Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ».

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 1 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.	L'élève compte un à un les éléments de la collection en les numérotant successivement avec des écritures chiffrées. Le dernier nombre est dit et écrit (écriture chiffrée « 43 ») en même temps sur le dernier élément énuméré. Il est reporté en bas de la feuille. La procédure est réussie via une double erreur d'énumération : oubli d'un objet et oubli d'un numéro dans la comptine des écritures chiffrées (= la comptine parlée qui est notée à l'écrit)	Trois groupes de dix sont entourés, puis l'élève écrit « 43 ». Quand on lui demande comment il le sait, il dit qu'il a entouré des dizaines, il y en a trois. Ensuite il a compté un par un les éléments restants « j'ai pu compter plutôt qu'entourer ». Puis il dit « j'ai mis treize avec trente pour faire quarante, treize c'est trois unités, donc j'ai mis le trois (en montrant le « 3 » de « 43 ») ».	La collection est organisée en groupements (tous de dix) et de manière maximale (les objets sont numérotés de « 1 » à « 10 »). Ensuite l'élève inscrit « 42 ». Quand on lui demande comment il le sait, il indique : « dix plus dix ça fait vingt, trente, quarante, et là deux ça fait quarante-deux». L'oral « quarante-deux » est transcrit directement par l'écriture chiffrée « 42 » au bas de la feuille. La procédure a échoué car un des trois éléments restant n'a pas été pris en compte.
Tâche 2 Indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non	L'élève compte un à un les éléments de la collection puis inscrit 13 (et dit « treize ») sur le bon sur la ligne réservée aux boutons « tout seuls ». Quand on lui rappelle qu'on ne peut pas donner plus de neuf boutons, il inscrit « dix » (puis « 10 » quand on lui demande d'écrire avec des	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit 13 sur le bon (devant un bouton). Quand on lui rappelle qu'il n'a a pas plus de 9 boutons, il regarde l'écriture « 13 » et à partir de cette écriture dit « une dizaine et trois unités ». Il écrit alors la bonne réponse 3 « tout seuls » et 1 enveloppe « une dizaine »	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit « 3 » sur le bon (devant un bouton) et « 10 » pour le nombre d'enveloppes. Il dit ensuite que cela ne convient pas mais ne sait pas comment faire

manipulable.	chiffres) pour le nombre d'enveloppes, sans effacer le « 13 ».		pour répondre correctement.

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 3 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.	L'élève compte les enveloppes une par une, inscrit « 8 », puis compte les boutons « tout seuls » un par un et inscrit « 6 » à côté du « 8 » pour obtenir la réponse exacte « 86 ».	L'élève énonce « dix, vingt, trente, …, quatre-vingts » puis compte les boutons «tout seuls ». Et dit « quatre-vingt-six ». Il écrit alors la réponse exacte « 86 ».	L'élève compte huit enveloppes (il dit « huit ») et six boutons « tout seuls ». Il dit alors la bonne réponse « quatre-vingt-six » puis l'écrit « 86 ». Quand on lui demande des explications, il indique avoir transformé huit enveloppes en « huit dizaines » puis en « quatre-vingts ». Il dit ensuite : « avec ces six boutons, ça fait « quatre-vingt-six ».
Tâche 4 Exprimer une quantité sous forme de dizaine(s) et d'unité(s), cette quantité étant indiquée par une écriture chiffrée.	Pour 13, l'élève donne les éléments exacts : trois boutons « tout seuls » et une enveloppe, mais indique donner quatre enveloppes. Pour 27, l'élève inverse les éléments à donner : deux boutons « tout seuls » et sept enveloppes. Les autres nombres n'ont pas été testés.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas. Quand on lui demande des explications, pour « 58 », il indique relier « cinquante » à « cinq dizaines » et pour « 91 » il dit (directement) « neuf dizaines et un bouton » en pointant les deux chiffres.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas.

III - LES APPORTS DE L'ATELIER

1 Analyse interprétative des résultats constatés

L'analyse présentée ici est une synthèse de celle entreprise par les participants de l'atelier. Elle a fait consensus ou tout au moins été largement partagée. Les points qui ont été source de discussion sont relatés dans les paragraphes III. 3 et IV. Elle utilise l'étude de la numération qui a été présentée dans le paragraphe I. On a relevé dans des tâches qui ne la nécessitent pas *a priori* la mise en jeu de propriétés relatives à la numération parlée. On a relevé aussi les propriétés afférentes à la numération écrite chiffrée.

1.1 Par tâche

Les nombres en jeu sont susceptibles d'influencer les procédures au moins autant que la nature de la tâche elle-même. Cependant, dans ce qui a été observé, pour chacune des tâches on peut inférer des procédures des propriétés de différentes interprétations.

Dans la tâche 1, les procédures font échos aux propriétés d'une interprétation ordinale sans repérant (Nadjma) ou d'une interprétation ordinale avec repérants ou arithmétique additive (Thomas et Sofiane). Il n'est pas aisé de distinguer ces deux dernières. Cependant, bien qu'ils ne soient pas encore très familiers de tous les problèmes de la structure additive, il semble que Thomas et Sofiane conçoivent des réunions de collections et utilisent les appuis additifs dix, vingt, trente, quarante.

Dans la tâche 2, c'est l'interprétation ordinale qui est toujours est en jeu, ce qui peut être relié au champ numérique spécifique dont fait partie le nombre « 13 ». Comme tous les élèves ont compté le nombre d'objets, la tâche a donc finalement consisté à relier deux signifiants, la désignation parlée et celle « en unités et dizaines ». Un des élèves (Sofiane) a réussi à donner la bonne réponse en utilisant alors l'écriture chiffrée comme relais, sans que l'on puisse affirmer qu'il ait utilisé l'aspect positionnel. Les autres ont échoué.

Dans la tâche 3, deux élèves sollicitent la numération parlée en France : Sofiane utilise des propriétés d'une interprétation ordinale avec repérants (ou additive ?), Thomas celles d'une interprétation multiplicative. Nadjma fait directement le lien entre l'écriture chiffrée et une désignation « en unités et dizaines ».

Dans la tâche 4, réciproque de la précédente, ce dernier lien semble utilisé préférentiellement par les trois élèves et ceci de manière plus probante pour les grands nombres, si on considère leur rapidité d'exécution et la fiabilité de leur réponse. Cette tâche semble donc moins solliciter des propriétés des interprétations de la numération parlée puisque les élèves utilisent un lien direct, des chiffres de l'écriture chiffrée vers la désignation « en unités et dizaines ». Cependant, contrairement à la précédente, l'écriture chiffrée est donnée. Sa lecture permet à la quantité d'être immédiatement désignée par un nom de la numération parlée. Est-ce que cela pourrait contribuer à comprendre les différences remarquées entre les procédures de ces deux dernières tâches, réciproques l'une de l'autre ?

Ce n'est que dans la tâche 1, un dénombrement « classique », que l'écriture chiffrée est pour tous les élèves la version écrite de la désignation parlée. On observe que l'interprétation multiplicative n'y est cependant pas en jeu. Ainsi, dans les procédures observées, relativement peu d'éléments de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée interviennent (cf. le tableau 2 sur la comparaison des interprétations). Dans les autres tâches, l'écriture chiffrée garde aussi (souvent) ce statut de version écrite de la désignation parlée, avec parfois l'utilisation (en-acte) de certaines autres propriétés de l'interprétation de référence. On note ici cependant des échecs au niveau de la mise en signes (inversion des chiffres). En outre, lorsque l'interprétation multiplicative est apparue elle est le fait du même élève, ce qui relativise l'influence que l'on pourrait donner à la nature de la tâche.

1.2 Par élève

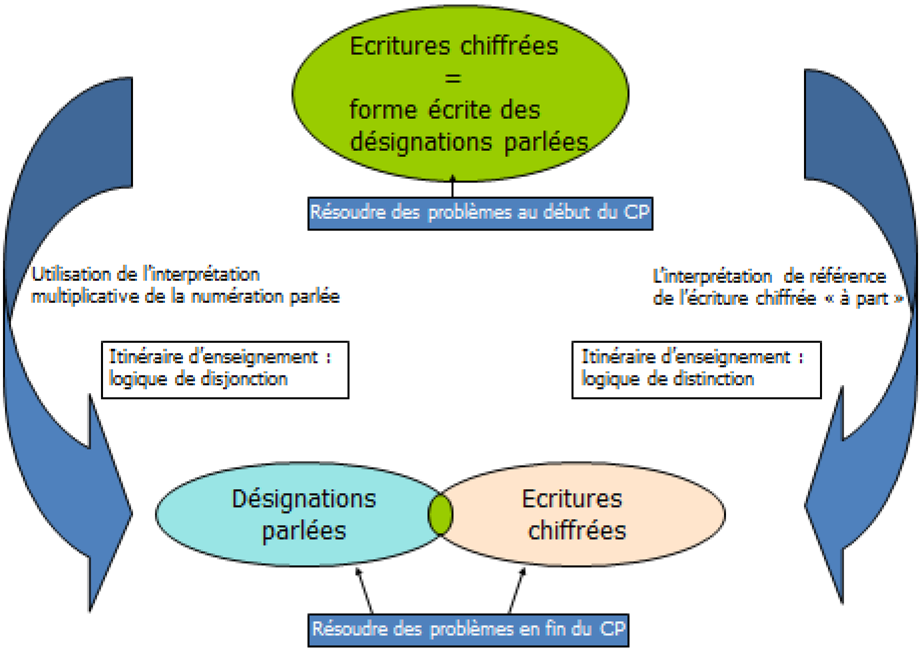
Les élèves utilisent des procédures qui peuvent être analysées comme mettant en jeu des propriétés des interprétations des numérations faites au paragraphe I. Chaque élève utilise préférentiellement des propriétés relative à une interprétation, et ceci quelle que soit la tâche. Nadjma utilise des éléments d'une interprétation de référence et d'une interprétation ordinale tandis que Sofiane et Thomas privilégient l'interprétation ordinale avec repérants ou/et additive, Thomas mettant en outre en jeu des propriétés d'une interprétation multiplicative dans la tâche 3 (mais pas dans la 2). Des évolutions sont cependant à signaler selon les nombres proposés aux élèves ou selon les tâches (voir la tâche 4 et le traitement différent de Thomas pour les tâches 2 et 3). Des hypothèses peuvent être formulées sur les rapports qu'entretiennent les élèves avec l'écriture chiffrée.

Aucun élève ne conçoit l'écriture chiffrée, tout au moins directement, comme indiquant le cardinal d'une collection dans l'intégralité des tâches proposées. Dans la tâche 1, l'écriture chiffrée semble la version écrite de la désignation parlée. Dans les autres, qui ne sont pas des dénombrements « classiques », les élèves évoluent différemment. Thomas et Sofiane ne semblent pas changer de conception, mais cela ne va pas les mener à utiliser des procédures identiques. En conséquence on peut y voir des traces d'une évolution des interprétations utilisées. Thomas va ainsi utiliser des éléments d'une interprétation multiplicative pour relier l'écriture chiffrée et la désignation parlée. Ce n'est pas toujours le cas pour Sofiane. En effet, lorsque ce dernier a été confronté à la tâche 2, indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non manipulable, mais cette fois-ci pour une collection de 45 objets, il a échoué. Il les a numérotés de 1 à 45 puis a transcrit « 45 » en l'oral « quarante-cinq ». Il a alors trouvé quatre dizaines (et écrit « 4 enveloppes une dizaine »), mais n'a pas utilisé la désignation orale pour obtenir le nombre de boutons « tout seuls ». Il est reparti de l'écriture chiffrée mais en considérant toutes les écritures chiffrées qui lui ont servies à numéroter les objets. Il a alors tenté de faire la somme des chiffres des unités de tous les nombres à deux chiffres. La désignation parlée n'est donc pas associée à 4 dizaines plus (et encore) 5 : l'interprétation multiplicative n'est pas mobilisée. Pour Nadjma, chaque chiffre indique le nombre d'objets d'un certain type. Les deux chiffres ensemble ne semblent pas indiquer le cardinal (l'exception étant la tâche 1) et quand ils sont considérés simultanément, ils sont ajoutés. Certains contextes, comme celui du dénombrement « classique », lui semblent nécessaires pour concevoir une écriture chiffrée comme un signifiant du nombre. En outre, Nadjma se trompe dans la mise en signes (ordre des chiffres). Ce n'est pas le cas de Thomas et Sofiane.

Ainsi, en relevant les propriétés des interprétations mises en jeu, on peut inférer trois rapports à l'écriture chiffrée différents, mais ce rapport semble encore peu stable et influencé par la tâche et les nombres.

2 Les apports des auteurs de l'atelier : les itinéraires cognitifs d'enseignement

Les auteurs de l'atelier ont fait valoir que l'analyse ci-dessus peut amener à formuler des hypothèses sur la relation entre le nombre et les deux numérations. Les élèves ont des difficultés à concevoir l'écriture chiffrée comme autre que la version écrite de la numération parlée. Lorsqu'ils distinguent cependant les deux chiffres d'une écriture chiffrée sans référence à la numération parlée, non seulement ils prennent en compte difficilement le caractère conventionnel de la position des chiffres, mais plus encore ils n'accordent plus nécessairement à l'écriture le statut de signifiant du nombre (ici de la quantité). Ces hypothèses vont dans le sens de nombreuses recherches en didactique, De Blois (1995), Mounier (2010). Les auteurs de l'atelier ont proposé de regarder le problème précédent en questionnant la place de la numération parlée dans l'apprentissage de la numération écrite de position. Ils ont présenté un bilan de la situation au CP telle qu'elle a été analysée par Mounier (2010). En utilisant la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement, deux logiques pour l'enseignement initial de la numération y sont définies : celle de distinction et celle de disjonction.



Mounier (2010) considère l'objectif d'apprentissage suivant : faire en sorte que les élèves puissent mobiliser des connaissances afférentes aux deux numérations selon les problèmes qu'ils résolvent, voire de disposer de ces connaissances (au sens d'Aline Robert 2008). Il envisage alors deux grandes catégories d'itinéraires cognitifs d'enseignement. A leur entrée en CP, l'écriture chiffrée est pour les élèves la forme écrite du nom du nombre exprimé dans la numération parlée en France. Il s'agit alors soit de disjoindre les deux numérations en faisant apparaître ce qu'il y a de commun aux deux via une interprétation multiplicative (logique de disjonction), soit de « construire » la numération écrite chiffrée sans recourir initialement à ces points communs, puis ensuite de les faire apparaître (logique de distinction).

3 Le débat dans l'atelier sur les itinéraires

Dans la logique de disjonction, la difficulté est tout d'abord de faire émerger l'interprétation multiplicative (ou certaines de ses caractéristiques). Ensuite, l'écriture chiffrée étant donnée *a priori*, certains aspects de la mise en signes (comme le choix de dix, la régularité des types de groupements et leur maximalité) semblent plus difficilement questionnables en tant que choix d'une mise en signes de principes mathématiques. Ceci peut se cristalliser en particulier au moment de la justification du « 0 », par exemple dans « 10 ». Il semble ainsi plus difficile de faire apparaître le système décimal chiffré comme une numération à part entière, c'est-à-dire autre qu'un moyen astucieux d'écrire les nombres « dits ». Dans la logique de distinction, le nombre a été conceptualisé via les désignations de la numération parlée. En conséquence, pour construire la numération écrite chiffrée « à part », comment concevoir des situations d'apprentissage sur le nombre qui ne vont pas la parasiter ? En outre, si cette numération est élaborée, est-ce que l'itinéraire ne va pas permettre (encore) plus difficilement aux élèves de percevoir l'écriture chiffrée comme un signifiant du nombre ?

Par ailleurs, les avantages et les inconvénients des itinéraires d'enseignement peuvent être regardés à d'autres niveaux. Des pistes didactiques ont déjà été ouvertes quant à des possibilités de séquences en classe, y compris pour un itinéraire qui suit une logique de distinction, Chevalier (2008). La question est de savoir comment jouer des connaissances qui sont véhiculées en dehors de la classe (le nombre via la comptine numérique), mais aussi prendre en compte des contraintes institutionnelles (programmes, curricula), des ressources existantes (manuels, fichiers, exercices en ligne) et des habitudes du métier (la prégnance de la comptine numérique, que ce soit sa version orale ou chiffrée dans la « frise » des nombres au-dessus du tableau). En outre, la question se pose d'anticiper dès la maternelle les difficultés conceptuelles des élèves qui ont été signalées. La scolarité obligatoire étant actuellement au niveau du CP, les auteurs de l'atelier font valoir qu'en l'état actuel des choses, il est difficile de ne pas tenir compte d'un contexte culturel qui rend prégnant l'abord du nombre via des tâches de dénombrement à l'aide de la comptine numérique, l'écriture chiffrée restant une version écrite de la désignation orale des nombres. La tâche de dénombrement pouvant être alors source de difficultés pour amorcer en classe un itinéraire d'enseignement qui suit une logique de distinction, une alternative pour l'enseignement est alors le recours à des tâches de comparaison de collections, Mounier (2010).

IV - CONCLUSION

Des apports et des limites.

L'analyse des procédures peut se faire en fonction des interprétations issues de l'analyse des signes des numérations. Ceci constitue un résultat important, en particulier pour la méthodologie de recherches futures. Les participants ont en effet pu retrouver dans les procédures des élèves des propriétés (en-acte) faisant écho à celles des interprétations théoriques des numérations de la thèse d'Eric Mounier. Cependant certains cas étaient plus discutés. Deux raisons peuvent être invoquées.

La première est un manque d'informations. L'analyse des procédures de chaque élève pour une plus grande variété de tâches permettrait d'infirmer ou de confirmer certaines hypothèses sur les élèves. En ce qui concerne chaque tâche, il semble nécessaire de recueillir un plus grand nombre de procédures d'élèves (y compris en proposant différentes variables didactiques, en particulier concernant les nombres). Par ailleurs, les explications données par les élèves *a posteriori* à la demande du chercheur sont à prendre en compte avec des réserves. L'élève peut en effet indiquer une autre procédure que celle qu'il a utilisée ou encore ne pas avoir les connaissances nécessaires pour pouvoir s'exprimer avec précision.

La deuxième raison vient de la nature des interprétations faites dans la thèse d'Eric Mounier. La proximité entre certaines interprétations est source de difficulté quand on essaye de les repérer dans les procédures des élèves de CP. Comment distinguer dans l'emploi de la comptine numérique un, deux, trois, etc. l'interprétation ordinale de celle ordinale avec repérants ? Comment distinguer dans l'emploi de la suite (dix), vingt, trente, l'interprétation additive de celle ordinale avec repérants ? En effet, les élèves de CP ne sont pas encore familiers des problèmes de la structure additive, ni du vocabulaire afférent. Ainsi, en quoi le fait de dire « vingt plus dix » ou d'agir sur les collections (réunions, groupements, organisation) est-il un indice qu'une opération arithmétique est en jeu (en-acte) ? Il en est de même pour l'interprétation arithmétique multiplicative. Qu'y a-t-il d'arithmétique dans « huit dizaines, ça fait quatre-vingts » concernant la procédure de Thomas pour la tâche 3 ? Les problèmes de la structure multiplicative n'étant pas au programme de CP peut-on y reconnaître « huit fois dix » ? La théorie des champs conceptuels permet d'appréhender chez un élève particulier la nature de ce lien, mais ceci nécessite d'avoir la connaissance des classes de problème qu'il rencontre, de ses procédures et des signifiants qu'il met en jeu. Néanmoins, il semble possible d'inférer de l'observation des procédures d'un élève le fait que ce dernier n'utilise pas (en-acte) des propriétés relatives à l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée. Par exemple, dans la tâche 3 Thomas compte <u>huit</u> enveloppes « une dizaine », et <u>six</u> boutons « tout seuls » mais n'utilise pas la transcription de ces deux désignations en chiffre puisqu'il repasse par la désignation orale « quatre-vingt-six ».

De nouvelles questions et des perspectives

« Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ». Les réponses apportées à ces deux questions sont qualitatives et demandent une étude complémentaire portant sur un nombre plus important d'élèves. Il est difficile de faire une « cartographie » des élèves d'un côté et des tâches d'un autre, mais les critères retenus semblent prometteurs pour dégager des profils ou une typologie qui croisent des conceptions personnelles et des catégories de tâches, en particulier selon le champ numérique abordé. Il semble aussi nécessaire de tenir compte de l'influence de certains paramètres comme la nature et l'agencement des tâches proposées aux élèves sur l'année. Ceci peut mener à une étude plus « macro » concernant le rôle joué par des caractéristiques d'itinéraires d'enseignement (distinction, disjonction). Ces deux types d'itinéraires apparaissent comme étant paradigmatiques pour l'enseignement de « la » numération au CP. Il reste que la réalisation en classe d'un itinéraire d'enseignement de type « distinction » pose des problèmes pratiques : sa transposition est une perspective à étudier. Une étude des propositions existantes est un moyen d'aborder certaines de ces questions.

Nathalie Pfaff et Eric Mounier tiennent à remercier tous les participants de l'atelier pour leurs contributions avisées et dynamiques, Nadine Grappin qui a en outre pris des notes, et Hélène Buisson pour ses relectures.

BIBLIOGRAPHIE

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 41-75.

CHAMBRIS C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris.Diderot (Paris 7).

CHEVALIER C. (2008) Entrer dans le code écrit : le système de numération au cycle 2, in *Actes XXXVème colloque COPIRELEM*, Bombannes.

DE BLOIS L. (1995) Le développement de l'écriture des nombres chez Christine, *Revue des sciences de l'éducation*, **XXI-2**, 331-351.

FÉNICHEL M. & PFAFF N. (2004, 2005) Donner du sens aux Mathématiques, 2 tomes, Paris : Bordas.

MOUNIER E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7). Disponible en ligne sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/ (version 2)

PFAFF N. (1995) Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Descartes (Paris 5).

ROBERT A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, F Vandebrouck, Chapitre 2.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10.2/3**, 133-169.