Liste des communications résumées. Les textes complets sont sur le CD.

C11 - Étude comparative de deux situations d'introduction du triangle en cycle 3.
Stéphane FABRE, Brigitte GRUGEON-ALLYS.

C12 - Comparaison franco-espagnole de ressources sur l'enseignement de la modélisation.
Richard CABASSUT, Ferrando Irene

C13 - Expériences spatiales et apprentissages géométriques en GS et au CP : autour de l'appréhension de la rectitude.
Jacques DOUAIRE, Fabien EMPRIN

C14 - Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques visuo-spatiaux.
Edith PETITFOUR

C15 – Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ?
Régis LECLERCQ, Christine MANGIANTE-ORSOLA

C16 – L'enseignement du concept de volume en CM2.
Karine MOLVINGER

C17 – Géométrie dynamique au cycle 3 : instrumentation et ingénierie didactique.
Isabelle PAYET

C18 – A la découverte des triangles :de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques à la construction à la règle et au compas.
Anne VOLTOLINI, Anne CALPE, Sophie SOURY-LAVERGNE

C21 – Un exemple de circulation des savoirs entre recherche et formation.
Monique CHARLES-PEZARD, Pascale MASSELOT, Denis BUTLEN

C22 – Une expérience de formation continue en ligne et à distance en didactique des mathématiques.
Jean-Philippe GEORGET, Avenilde ROMO-VAZQUEZ

C25 - Géométrie et visualisation : une réflexion sur l'importance des processus de médiation dans l'apprentissage et le réinvestissement de notions mathématiques « non géométriques ».
Raquel I. BARRERA CURIN

C26 – Une situation de reproduction de figures au cycle 2 : mises en œuvre et analyses.
Claire WINDER

C28 – Analyse d'un dispositif de formation en géométrie plane pour les futurs professeurs des écoles autour de pliages, de constructions à la règle et au compas, de rédaction de programmes de construction et de justifications de ces programmes.
Françoise JORE

ÉTUDE COMPARATIVE DE DEUX SITUATIONS SUR LES TRIANGLES PARTICULIERS AU CYCLE 3

Stéphane FABRE
MCF, UPJV IUFM AMIENS
CAREF
Stephane.fabre@u-picardie.fr

Brigitte GRUGEON-ALLYS
PU, UNIVERSITE PARIS EST CRETEIL IUFM
LDAR Université Paris Diderot
Brigitte.grugeon@orange.fr

Résumé
Dans un premier temps, nous comparons deux situations d'apprentissage ayant le même objectif : nommer et caractériser des triangles particuliers (triangles isocèles et équilatéraux).
La première situation est extraite du manuel « objectif calcul » de CM2 (page 34, aux éditions Hatier 1996), la deuxième nommée « triangle paille » est une situation que nous avons élaborée dans le cadre de la recherche ORPROF[1]. Ces deux situations mettent en jeu les mêmes supports (des pailles) et les tâches proposées aux élèves sont proches (construire des triangles avec les pailles). Cependant à travers l'étude des différences entre certaines variables (présence de ficelles, constitution des paquets de pailles, longueur et nombre de pailles, organisation du travail..), nous voulons montrer par une analyse *a priori* que le milieu créé dans la situation « triangle paille » semble plus robuste et favorise davantage les interactions élèves/milieu pour permettre aux élèves de valider ou d'invalider leurs procédures.
Ensuite, nous analysons la mise en œuvre de la situation « triangle paille » dans une classe de CE2/CM1. Cette analyse des interactions prend en compte la structuration du milieu (Margolinas 2005).
Elle met en évidence le rôle important du maître pour faire vivre la situation tout en laissant l'activité à la charge des élèves.

I - COMPARAISON DE DEUX SITUATIONS

1 Définition du cadre géométrique

A la suite des travaux de Ferdinand Gonseth, dans leur article « Géométrie et paradigmes géométriques » (1999), Catherine Houdement et Alain Kuzniak définissent trois géométries : *la géométrie naturelle*, *la géométrie axiomatique naturelle*, *la géométrique formaliste*, et, pour chacune d'entre elles, 3 piliers autour desquels elles s'organisent : *l'intuition*, *l'expérience* et *la déduction*. Ils définissent :

L'intuition, comme « une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet » et soulignent que « cette interaction peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori ».

L'expérience qui « permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique ». Les « pliages, découpages et constructions […] constituent la base de cette approche expérimentale qui peut être développée à l'école ».

La déduction qui « permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure ».

[1]Objets et ressources professionnelles à l'école primaire : Quelles références et quels usages pour le enseignants ? Recherche du pôle Nord-Est des IUFM.

La géométrie rencontrée à l'école s'apparente à la géométrie naturelle qui a « pour source de validation la réalité, le sensible ». Les auteurs ajoutent que « la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental ».

Ici, l'intuition et l'expérience sont liées à la perception d'objets concrets, la déduction s'exerce à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments.

2 Présentation de la séance « triangle - pailles »

A la fin du cycle 2, les élèves ont une reconnaissance globale des triangles. Ils les perçoivent comme des surfaces délimitées par un contour fermé caractéristique. Les seuls triangles étudiés (en se référant aux Instructions Officielles de 2008) sont les triangles rectangles identifiés grâce à la présence d'un angle droit. L'objectif de notre séance est d'amener les élèves à construire des triangles à partir des côtés et d'en définir certains à partir des propriétés relatives aux longueurs de leurs côtés (triangles isocèles et équilatéraux).

La construction de triangles à partir de pailles prédécoupées semble être une tâche potentiellement satisfaisante pour atteindre nos objectifs. En effet la construction papier / crayon n'est pas disponible à ce niveau de classe, et les pailles vont matérialiser les côtés des triangles.

Notre situation s'inscrit dans le cadre de la géométrie naturelle de type expérimental.

C'est la première séance d'une séquence dont les objectifs sont :

• Définir un triangle comme un polygone à trois côtés.

• Reconnaître, nommer et décrire des triangles (en particuliers des triangles isocèles et équilatéraux).

• Utiliser un vocabulaire géométrique spécifique : côté.

La séquence comporte trois séances clés :

Séance 1 (séance triangle-pailles): Les élèves doivent construire des triangles différents en utilisant des pailles de longueurs et de couleurs différentes.

Séance 2 : Les élèves doivent classer les triangles construits lors de la séance 1 en précisant leurs critères (Annexe 1).

Séance 3 : les élèves doivent construire un triangle équilatéral, un triangle isocèle et un triangle ayant ses trois côtés de longueurs différentes avec des pailles de la même couleur (Annexe 1).

2.1 Description de la séance 1.

Objectifs de la séance :

- Connaître et utiliser le vocabulaire relatif aux triangles : côtés ;
- Définir et construire des triangles comme polygones à trois côtés ;
- Première approche de la notion de triangles superposables ;
- En situation, « première rencontre » avec l'inégalité triangulaire.

Type de travail : par groupe de 2 élèves.

Matériel : - des pailles de différentes couleurs correspondant à différentes longueurs : pailles vertes (6 cm), pailles jaunes (9 cm), pailles bleues (12 cm) et pailles roses (15cm).

- de la ficelle.
- des aimants pour la mise en commun.
- une feuille par groupe.

Chaque groupe reçoit un paquet numéroté de 12 pailles et 4 ficelles.

Constitution des paquets :

- Paquet A : 4 roses/4 bleues/4 jaunes;
- Paquet B : 4 roses/4 jaunes/4 vertes;
- Paquet C : 4 roses/4 bleues/2 jaunes/2 vertes;

- Paquet D : 1 rose/3 bleues/2 jaunes/6 vertes;
- Paquet E : 2 roses/2 bleues/4 jaunes/4 vertes;
- Paquet F : 4 roses/2 bleues/4 jaunes/2 vertes;
- Paquet G : 2 roses/4 bleues/2 jaunes/4 vertes;

Consigne : « Vous travaillerez en groupe de 2. Chaque groupe va recevoir un paquet de 12 pailles en couleur et 4 morceaux de ficelles avec lesquelles vous devez construire 4 triangles différents. Vous aurez aussi une feuille de papier où vous écrirez la lettre correspondant à votre paquet puis vous décrirez chaque triangle construit ».

2.2 Première analyse de la situation

Chaque paquet de 12 pailles et 4 ficelles constitue le milieu matériel de la situation. Pour construire leurs triangles les élèves doivent enfiler un bout de ficelle au travers de 3 pailles.

- La situation comporte trois contraintes fortes pour la réalisation de la tâche des élèves :
  - la première est la nécessité pour les élèves d'utiliser la totalité des pailles pour accomplir leur tâche (douze pailles pour quatre triangles) ;
  - la deuxième explicitée dans la consigne concerne l'obtention de quatre triangles « différents ». Pour les élèves deux triangles sont différents s'ils sont construits avec au moins une paille de couleur différente ;
  - la troisième, non explicite, est une conséquence de l'inégalité triangulaire : tout triplet de pailles ne permet pas forcément d'obtenir un triangle.

  Ces trois contraintes vont amener les élèves lors de la phase d'action à réaliser des essais, des ajustements et des déconstructions de triangles pour en réaliser de nouveaux. C'est à travers ces manipulations que les concepts mathématiques prendront du sens chez les élèves.
- La construction de triangles avec des pailles (formes vides) permet de mettre en évidence les notions de côté et de polygone à 3 côtés, à la différence de situations papier/crayon ou de manipulation de formes cartonnées où le triangle apparaît comme une surface plane. Les triangles - pailles sont des objets de l'espace que les élèves peuvent manipuler.
- À la différence d'un tracé (conjuguant les difficultés d'exactitude du tracé et de manipulation des outils), la construction de triangles en enfilant une ficelle dans des pailles est relativement simple pour les élèves. De plus, les compétences et connaissances liées à la manipulation des outils de tracé ne sont pas à la portée des élèves de ce niveau de classe (CE2-CM1).
- Les pailles de la même couleur ont la même longueur, donc les triangles équilatéraux apparaîtront comme des triangles monocolores et les isocèles comme des triangles bicolores. Ce sont donc des propriétés perceptives qui permettront de les distinguer.
  Les élèves ne connaissent ni les longueurs des pailles, ni la correspondance entre couleur et longueur. Cependant, les différences de tailles des pailles de couleurs différentes sont si grandes (3 cm au moins) qu'elles vont amener les élèves à remarquer cette correspondance.
- Lors de la construction, une interrogation peut apparaître : l'ordre de placement des pailles sur la ficelle influe-t-il sur le triangle obtenu ?
- Les variables didactiques : les paquets permettent à chaque groupe (s'il respecte les consignes) de construire au moins un triangle isocèle ou équilatéral. Cependant les nombres de solutions de triplets de pailles constituant des triangles sont différents pour chaque paquet. Par exemple :

  Paquet A : 4 roses/4 bleues/4 jaunes. Il y a un grand nombre de solutions : 3R/3B/3J/RBJ ; 3R/R2B/2BJ/3J ; 2RB/2RJ/3B/3J ; 2RB/2RJ/2BJ/3J…(une dizaine). Les élèves en trouveront facilement une.

  Paquet B: 4 roses/4 jaunes/4 vertes. Il n'y a que trois solutions : 3R/1R2J/2J1V/3V, 2RJ/2RV/3J/3V et 2RJ/2RV/2JV/2VJ. Les élèves auront plus de difficulté à trouver une solution. Le milieu est plus résistant.

2.3 Description de la séance d'Objectif Calcul

Le manuel Objectif calcul, niveau CM2, des éditions Hatier de 1996 présentait une situation proche de la situation présentée ci-dessus tant dans ses objectifs que dans la tâche des élèves. Dans leur article, Catherine Houdement et Alain Kuzniak présentent cette situation pour illustrer leur propos sur la géométrie naturelle expérimentale.

Procure-toi des pailles du type de celles que tu utilises pour boire des jus de fruits.
Il en faut au moins : 10 rouges, 10 vertes et 10 bleues.

1. Coupe-les pour qu'elles correspondent aux longueurs ci-dessous.

2. En utilisant une seule paille par côté,
combien peux-tu construire de triangles différents :
- avec les seules pailles rouges ?
- avec les pailles rouges et vertes ?
- avec les pailles rouges, vertes et bleues ?

3. Quelles remarques peux-tu faire
sur les triangles que tu as formés ?

4. Sur du papier uni, construis un
des triangles obtenus à la question 2.

Objectif calcul CM2 p 34 (Hatier 1996)

D'après le livre du maître, les objectifs sont :

- Reconnaître les différentes sortes de triangles et les propriétés qui leur sont associées.

- Construire les différents types de triangles.

Le Matériel :

Pour chaque élève ou chaque groupe :

- 10 pailles rouges de 4 cm de longueur, 10 pailles vertes de 5,6 cm de longueur, 10 pailles bleues de 8 cm de longueur et 6 pailles jaunes de 12 cm de longueur *(qui ne sont pas représentées dans le manuels de l'élève)*.

- Une feuille de carton *(sur laquelle les élèves doivent fixer les triangles construits)*.

- punaises, ciseaux.

2.4 Analyse comparée des deux situations :

Potentiel d'a-didacticité des situations

• En situation **d'action** en rétroaction avec le milieu matériel et en travail par groupe de 2, la situation triangle-pailles permet aux élèves de se confronter aux conditions d'existence d'un triangle (inégalité triangulaire) via la mise en évidence de 3 pailles qui « ne se referment pas » ou qui réalisent une « barre » ou un « trait » (par exemple avec le paquet B, l'assemblage rose-jaune-vert n'est pas un triangle). Nous pointons le rôle important que prend l'action de nouer la ficelle : l'inégalité triangulaire se traduit par le résultat d'une expérience (en reprenant les termes de Catherine Houdement et Alain Kuzniak) que les élèves peuvent évaluer. Elle constitue un événement que les élèves gardent en mémoire. De plus au début de la construction les pailles sont enfilées bout à bout sur la ficelle et le triangle apparaît (ou pas) en faisant un nœud

indépendamment du résultat escompté par l'élève. Le résultat de l'expérience et son interprétation sont indépendants de l'expérimentateur. Avec un même triplet de pailles, les élèves obtiennent le même résultat.

Dans le cas de la situation d'Objectif calcul, la construction du « triangle aplati 4-4-8 » et son interprétation comme un non-triangle dépendront de la précision dans le positionnement des pailles ainsi que de la « volonté » de l'élève d'obtenir un triangle (liée au contrat didactique). En effet pour construire un triangle, les élèves anticipent la forme triangle dans le positionnement initial des trois pailles puis ils ajustent les pailles pour faire coïncider les extrémités. Le résultat de l'expérience dépend de l'habileté de l'expérimentateur mais aussi de ses représentations initiales. De plus comme il n'est pas mentionné qu'il faut utiliser la totalité des pailles (et ce n'est pas le cas pour les deux premiers moments de l'activité), il est possible que les élèves ne rencontrent pas la situation du triangle aplati.

• Dans la situation triangle - pailles, c'est le milieu matériel (la composition des paquets) qui amène les élèves à construire des triangles particuliers (situation a-didactique). Dans la séance d'Objectif calcul, c'est le déroulement de la séance et les consignes qui amènent les élèves à construire des triangles particuliers lors des deux premiers moments (volonté de l'enseignant). Le découpage en trois moments semble avoir pour but de permettre aux élèves d'élaborer une démarche systématique pour construire la totalité des triangles au troisième moment.

• Dans les deux situations, la comparaison visuelle de la couleur des côtés des triangles construits permet de mettre en évidence des triangles de nature différente ou d'invalider des choix qui ont été faits (par exemple dans la situation triangle-pailles avec le paquet B, l'assemblage trois verts pour un triangle équilatéral, trois triangles isocèles l'un vert-jaune-jaune, et deux rose-rose-jaune met en évidence que deux triangles sont identiques). Dans notre situation, un partage équitable des pailles entre les deux élèves du groupe avant toute construction peut conduire à plusieurs réalisations du même triangle (par exemple avec le paquet A, une répartition équitable 2 roses, 2 bleues et 2 jaunes entre les deux élèves du groupe peut conduire à deux triangles rose-rose-bleu et deux triangles bleu-jaune-jaune). La situation nécessite un travail de groupe.
L'égalité de deux triangles d'abord perçue comme une propriété visuelle (les trois côtés sont de la même couleur) peut être confirmée par une superposition des deux triangles. Nous passons donc d'une correspondance des couleurs à une égalité des longueurs des côtés. Ceci n'est pas possible dans la situation d'Objectif calcul car les triangles ne sont pas manipulables (il est vrai que si ce sont les élèves découpent les pailles en début de situation, ils savent que la même couleur correspond à la même longueur).

• Notre situation permet de faire une description de chaque triangle construit :
  - en français avec l'énumération des pailles et de leurs couleurs ;
  - par un schéma sur la feuille avec des couleurs différentes ;
  - ou en caractérisant les triangles en fonction de la taille de leurs côtés (par exemple, pour des triangles équilatéraux : « trois côtés de la même taille » ou « trois côtés de la même couleur »)

Potentiel de la situation de formulation et validation (mise en commun) :

Le milieu construit fournit au maître des conditions favorables pour amener les élèves à :
  - verbaliser les conditions d'existence d'un triangle,
  - formuler et décrire les caractéristiques des triangles construits avec différents niveaux de langage : en français avec l'énumération des pailles et de leurs couleurs, ou en caractérisant les triangles « 3 pailles avec des tailles différentes, … », ou encore, en utilisant un vocabulaire géométrique pour donner des informations sur la longueur des « côtés ».

II - UNE ANALYSE DU DÉROULEMENT DE LA SÉANCE

La situation « triangle - pailles » a été mise en place dans une classe de CE2/CM1 de l'école d'application Louise Macault de Laon. Elle a été filmée. Dans la suite, nous en transcrivons des extraits qui nous semblent significatifs notamment pendant la phase d'action.

Pour l'analyser, nous nous appuierons sur les outils développés par Claire Margolinas (2005) pour décrire la structuration du milieu. Ces outils permettent de décrire et de rendre compte de la complexité des interactions qui se nouent entre les élèves et le professeur dans un temps long pendant la gestion d'une situation ou de plusieurs séances. La modélisation d'une situation d'enseignement conduit à décrire les relations entre les différents systèmes en jeu dans la production du savoir visé. Une situation se caractérise par l'ensemble des rôles des actants (élèves et professeur) et de leurs relations avec le milieu dans une institution donnée. Le rôle du maître et la gestion de la situation peuvent être analysés en fonction des différentes postures des sujets (professeur et élèves) et du milieu sur lequel interagissent les sujets, la situation de niveau n-1 devenant le milieu de la situation de niveau n (Mn= Sn-1), la situation étant constituée des rapports existants entre le milieu M, l'élève E et le professeur P, c'est-à-dire tous les niveaux inférieurs (Cf. annexe 1). On peut résumer l'analyse prenant en compte les différentes postures des sujets et la structuration du milieu *via* ce tableau :

M+3 M de construction		P+3 P-noosphérien	S+3 S- noosphérienne
M+2 M de projet		P+2 P-constructeur	S+2 S- de construction
M+1 M-didactique	E+1 E-réflexif	P+1 P-projeteur	S+1 S de projeteur
M0 M d'apprentissage	E0 Elève	P0 Professeur	S0 S-didactique
M-1 M de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-observateur	S-1 S-d'apprentissage
M-2 M-objectif	E-2 E agissant		S-2 S de référence
M-3 M-matériel	E-3 E-objectif		S-3 S-objective

Tableau 1 - La structuration des milieux selon Claire Margolinas

1 Organisation du processus de dévolution par le maître

Etudions le rôle du professeur (P) dans l'organisation du processus de dévolution.

Après la formulation de la consigne, il reprend les termes des élèves (E0) pour parler de « fagot » et aborder la tâche de fabrication à faire. Les quatre interventions du maître :

- « *Sur cette feuille, vous allez marquer deux choses. Chacun des paquets - parce qu'il y a des paquets différents, vous n'allez pas tous avoir le même paquet - chacun des paquets comporte une lettre, donc vous commencez par noter cette lettre là et ensuite vous noterez les triangles que vous avez fabriqués : ce que vous avez utilisé comme pailles pour fabriquer le triangle* »,

- « *Tu peux me rappeler la consigne Maeva ? Combien est-ce qu'il faut en faire* ? »,

- « *Tu es sûre ?* »

- « *Combien tu as de ficelles* ? »

Elles pointent le rôle de P pour poursuivre le processus de dévolution. P engage d'abord une réflexion avec les élèves sur l'usage de l'artefact « pailles » : il organise le milieu matériel (M-3) pour faciliter l'engagement des élèves à percevoir les pailles attachées (M-2) comme des objets mathématiques (M-1). Les réponses des élèves puis l'implication des élèves dans la tâche indiquent l'impact de ces interventions pour favoriser la dévolution de la situation aux élèves.

2 Phase d'action : Construction de différents types de triangle

Le groupe observé a un paquet E composé de 2 pailles roses, de 2 pailles bleues, de 4 pailles jaunes et de 4 pailles vertes. Avec ce paquet, plusieurs solutions valides sont possibles.

Premier moment :

Deux triangles (B/J/V) identiques sont construits ainsi qu'un triangle (J/V/V).

Professeur : Qu'est-ce que vous pouvez me dire de ça ? »

Elève : « Moi, j'ai terminé le premier puis Maeva elle a fait le même, regardez. »

Ils ont tous les deux fait un triangle « rose, bleu, jaune ».

P. : « Je crois que vous devez travailler dans le groupe. »

Le maître s'éloigne.

E. : « Je te l'avais dit Maeva qu'il fallait faire attention. Il ne fallait pas faire pareil que moi. Maintenant …, puis après t'auras plus de bout de ficelle.

Maeva dénoue la ficelle de son triangle.

Le maitre (P-1 observateur), en montrant les triangles-pailles construits et attachés, amène les élèves à valider leurs productions et leur démarche de travail en les plaçant dans le milieu objectif.

La réponse de l'élève E-1(apprenant) montre que les élèves n'ont pas travaillé en groupe.

P-1 demande une évolution du contrat didactique (travail de groupe demandé) et amène les élèves du groupe (E-1) à modifier leur stratégie initiale pour construire quatre triangles-pailles différents. Maeva défait le triangle après rétroaction avec le milieu M-1 (deux représentations de triangles avec les mêmes pailles de même couleur).

Le rappel par le maître de l'enjeu d'apprentissage en se plaçant dans le milieu objectif (2 triangles pailles construits avec les mêmes pailles) a relancé le travail. Il (P-1 observateur) a peut-être court-circuité les interactions entre les élèves et le milieu et entre élèves.

Deuxième moment :

Maeva dénoue la ficelle de son triangle et son camarade commence à organiser leur recherche.

Elève : « Je mets un jaune et deux verts. »

Il s'aperçoit que c'est son deuxième triangle.

E. : « Le jaune …, tu mets ces trois-là ensemble. Et après tu mets ces trois-là. »

Il prépare pour Maeva deux lots : Un rose, un jaune et un vert ; un bleu, un jaune et un vert. Il pointe les lots.

E. : « En fait, tu fais un triangle comme ça et un triangle comme ça. »

… Maeva désigne les triangles déjà construits. La discussion semble porter sur l'ordre dans lequel placer les pailles.

E. : « …mais regarde, c'est pas les mêmes couleurs. Tu mets comme tu veux, c'est pas les mêmes couleurs. »

Il le répète plusieurs fois et prends le dernier lot. Chacun fabrique un triangle, mais celui de Maeva leur pose un problème.

Ici les interactions entre le maître et les élèves et celles entre les deux élèves deviennent avec le milieu matériel le nouveau milieu (M-1) où les élèves interprètent leurs constructions.

L'élève (E-2 agissant) s'appuie sur les représentations des triangles (comparaison des couleurs) pour organiser son tri et constitue 4 lots de 3 pailles de couleurs différentes dont deux triangles-pailles déjà construits (B/J/R et 2V/J attachés, B/J/V et R/J/V). Il se place dans une position d'apprenant en s'appuyant sur les rétroactions du milieu. Il interprète et formule les résultats : « *Tu mets comme tu veux, c'est pas les mêmes couleurs.* » en réponse à Maeva sur le rôle de l'ordre des pailles sur la ficelle. Maeva est en position d'expérimentateur guidé.

Mais le triplet de pailles de Maeva ne va pas constituer un triangle (R/J/V triangle aplati). Un nouveau milieu de référence M-1 apparaît qui à son tour va interagir avec les élèves.

Troisième moment :

Lors de la mise en commun, le groupe observé montre les 4 triangles construits au cours de la phase d'action (2JV/R2J/2BR/3V).

Élève : En fait, nous on a eu le même souci que … En fait on mettait deux verts et un rose et quand on faisait le nœud, ça faisait une barre.

Maeva : Après on a réussi à faire les quatre triangles.

E. : On a été obligé de les rouvrir.

Suite à la situation d'action où différentes interactions entre les élèves et les élèves et le milieu se sont succédées, le groupe est arrivé à construire 4 triangles différents.

Cet extrait montre bien le potentiel d'a-didacticité de la situation indiqué dans l'analyse *a priori*. Il montre des élèves confrontés aux conditions d'existence de triangle en accomplissant leur tâche.

Le professeur qui intervient pour rappeler les conditions que doivent remplir les triangles a permis l'avancée du temps didactique.

3 Formuler les conditions d'existence et décrire les différents types de triangles

Pendant la mise en commun, P0 amène les élèves à décrire les triangles construits. Ils s'appuient sur des termes correspondant à des objets du milieu M-2 (pailles ou pailles attachées), en précisant leur taille et leur couleur. Nolwen, une autre élève de la classe, en montrant les côtés jaunes et vert d'un triangle bleu, jaune, vert dit : « *Là, celle-là elle est plus grande que celle-ci. Et c'est un triangle* ». Et, montrant un assemblage rose, vert, vert : « *L'autre, ça fait un trait* ». Les questions relatives à l'existence des triangles sont abordées, mais restent contextualisées aux constructions de quelques élèves. Le langage utilisé par le maître concerne les pailles, la taille ou la longueur des pailles « *pourquoi tu me dis que les trois ont la même longueur* », « *le rapport entre la longueur et la couleur* ». La nature des triangles construits n'est pas abordée dans cette séance. Il n'y a pas de synthèse organisée par le maître pour faire évoluer la formulation de la définition des triangles et de ces constituants ou pour expliciter des conditions d'existence d'un triangle dans le monde de la géométrie. Le maître ne met pas en évidence les types de triangles envisagés.

III - CONCLUSION

À travers l'étude de cette situation, nous voyons l'intérêt didactique de l'utilisation et de la mise en œuvre en classe de situations « expérimentales » en géométrie. Elles permettent de donner du sens à des notions mathématiques dont l'apprentissage est trop souvent implicite (ici, les notions de côté d'un triangle ou de triangles particuliers) et d'en donner une représentation matérielle. Elles permettent aux élèves, à travers des manipulations, de modifier leur représentation première (tout triplet de pailles permet de construire un triangle) et d'aborder expérimentalement des propriétés mathématiques complexes (l'inégalité triangulaire). Cependant elles sont bien sûr insuffisantes pour permettre aux élèves d'appréhender le concept sous-jacent dans toute son étendue : les triangles - pailles sont des objets matériels, les triangles des notions mathématiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G. (1988) Le contrat didactique : Le milieu, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **9** (3), 309-336.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, **51,** 5-21.

MARGOLINAS, C. & RIVIERE, O. (2005) La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit x*, **69**, 32-57.

V - ANNEXE 1

Séance 2

Objectifs de la séance: - Classer des triangles suivant la longueur de leur côtés.

- Différencier et définir les triangles équilatéraux, les triangles isocèles.

Type de travail : groupe de 4 élèves

Matériel: - Les triangles réalisés lors de la séance 1, plus d'autres triangles construits par le maître avec les mêmes pailles. Chaque groupe de 4 élèves a une dizaine de triangles dont des équilatéraux et des isocèles.

- une feuille format A3.

Consigne : « Regroupez les triangles qui se ressemblent. Vous devez expliquer votre classement et présenter votre travail sur la feuille. »

Séance 3

Objectifs de la séance : Séance de réinvestissement.

Type de travail : groupe de deux élèves.

Matériel : - des pailles de la même couleur et de différentes longueurs :

S = 6 cm, N = 9 cm, D = 12 cm et Q = 15 cm.

- de la ficelle.

- des aimants pour la mise en commun.

- chaque groupe reçoit un paquet numéroté de 9 pailles et 3 ficelles. Il y a pour l'ensemble de la classe quatre paquets de pailles différents (soit trois fois quatre paquets). Constitution des paquets :

- Paquet A: 4 S/3N/2D ;
- Paquet B: 6S/1N/1D/1Q ;
- Paquet C: 3S/3N/2D/1Q ;
- Paquet D: 4S/2N/2S/1Q.

Comme pour la séance 1, les paquets ne présentent pas les mêmes difficultés pour construire les triangles demandés.

Consigne: « Vous allez travailler par groupe de 2. A chaque groupe je vais donner 9 pailles de la même couleur et trois ficelles. Comme la dernière fois vous allez construire trois triangles, mais il faudra qu'il y ait un triangle équilatéral, un triangle isocèle et un triangle ni équilatéral ni isocèle. Je veux un travail de groupe et rappelez-vous qu'il faut chercher avant de nouer la ficelle. »

COMPARAISON FRANCO-ESPAGNOLE DE RESSOURCES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODÉLISATION

Richard CABASSUT
Enseignant, Université de Strasbourg
LDAR Université Paris 7
richard.cabassut@unistra.fr

Irène FERRANDO
Enseignante, Universidad de Valencia
Departamento de didáctica de las matematicás
irene.ferrando@uv.es

Résumé

La modélisation est un thème important des programmes de l'enseignement secondaire en France et en Espagne, et on peut également relier ce thème aux programmes de l'enseignement primaire. Dans cette étude, nous considérons différentes ressources de l'école primaire disponibles pour un enseignement de la modélisation. Nous adoptons une approche comparative entre les deux pays, pour mieux mettre en évidence les différences dans les ressources des manuels. Nous proposons une typologie des ressources en s'appuyant sur les fonctions qui vont y être assignées. Pour cela, nous étudions les compétences qui sont mises en jeu dans les tâches de modélisation et qui sont aussi en relation avec les recommandations des textes officiels des programmes d'enseignement de l'école primaire. Nous discutons aussi quelques implications possibles pour une formation à la modélisation des enseignants de l'école primaire.

Maass (2006) [1] étudie les cinq compétences qui interviennent quand les élèves font face à une tâche de modélisation :

- Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel (hypothèses, simplifications, reconnaissances des variables et relations entre elles, recherche d'information).

- Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel (mathématisation de quantités et relations, simplification, choix de notation).

- Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle (stratégies heuristiques, savoir mathématique).

- Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle (interprétation, généralisation, usage approprié du langage mathématique et communication de la solution).

- Compétence pour valider la solution (analyse critique de la solution, révision du modèle, autres solutions possibles, généralisation).

[1] Les traductions à partir de l'anglais, de l'espagnol ou de l'allemand dans cet article ont été assurées par les auteurs de l'article.

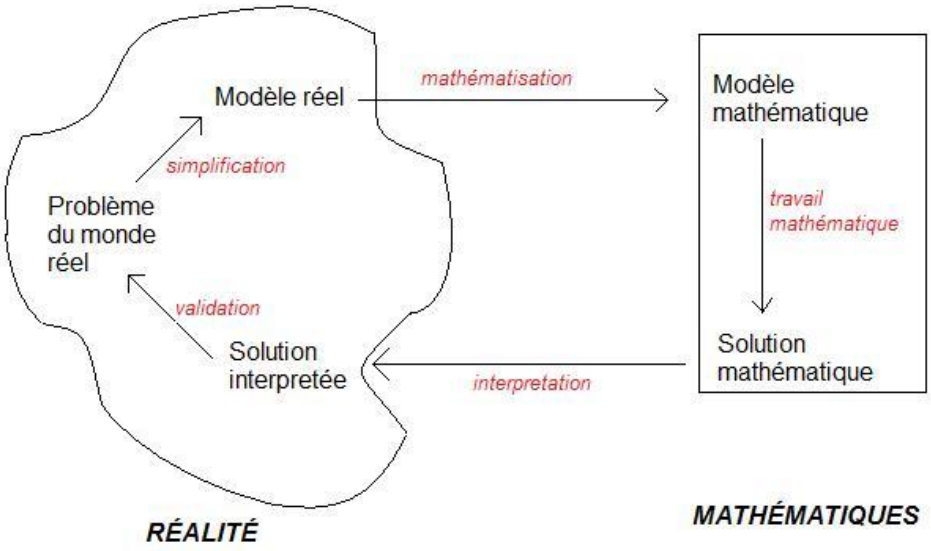


Fig. 1 : Diagramme du cycle de modélisation

Dans cet article nous proposons de comparer, en France et en Espagne, la mise en œuvre de ces compétences dans les programmes et dans des manuels de l'école primaire. Commençons par comparer les programmes.

I - LES COMPÉTENCES EN MODÉLISATION DANS LES PROGRAMMES

1 Les compétences en modélisation dans le programme espagnol de l'école primaire

Le programme espagnol de l'école primaire (BOE, 2007) est construit sur la base de huit compétences basiques que doivent se travailler le long des cycles primaire et secondaire (entre 6 et 16 ans). Les compétences, qui correspondent aux connaissances considérées indispensables d'un point de vue intégrateur et orienté vers l'application des savoirs acquis, sont les suivantes[2] :

- Compétence en communication (CC)
- Compétence mathématique (CM)
- Compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique (CCI)
- Savoir traiter de l'information et compétence digitale (CID)
- Compétence sociale (CS)
- Compétence culturelle et artistique (CCA)
- Compétence pour apprendre à apprendre (CAA)
- Être capable d'autonomie et d'initiative personnelle (AI)

La méthodologie, que nous adoptons dans cet article, consiste à examiner alors les compétences de modélisation de Maass et, pour chacune d'elle, à citer des extraits du programme officiel qui sont en rapport avec cette compétence de modélisation. Nous indiquons également, pour chaque extrait, quelle est sa relation avec les compétences basiques en rappelant au regard de l'extrait du programme le code correspondant de la compétence basique- CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI. Ces mises en relations, par les auteurs de l'article, du programme officiel avec les compétences de modélisation d'une part, et les compétences basiques d'autre part se font sur la base de considérations sémantiques : si un extrait du programme officiel paraît rejoindre la signification

[2] Le programme utilise bien le terme « competencias » que nous traduisons par « compétences »

d'une compétence de modélisation (respectivement d'une compétence basique), la mise en relation est effectuée.

1.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

(CC) liée aux « outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ».

(CCI) « rend possible la compréhension des événements », «intègre les aptitudes pour (…) interpréter le monde » et «rend possible l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela «implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique : poser des problèmes, … » .

(CID) « consiste à disposer des outils pour chercher, obtenir, traiter et communiquer l'information » ; cette compétence est associée avec « la recherche, la sélection, le registre et le traitement l'analyse de l'information ». De plus, « les technologies de l'information (…) s'utiliseront avec une fonction génératrice, en les employant, par exemple, comme outil pour obtenir des modèles de processus mathématiques, physiques, sociaux,… »

(CCA) cette compétence met en jeu « les aptitudes de pensée divergente et convergente puisqu'elle implique la réélaboration d'idées ».

(AI) cette compétence exige « l'analyse des possibilités et des limitations, de connaitre les phases de développement d'un projet, de planifier, de prendre des décisions, … ».

1.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

(CM) correspond à l'aptitude pour «résoudre des problèmes qui sont en relation avec le quotidien et avec le monde du travail ».

Dans la description des mathématiques qui doivent se travailler en primaire on trouve aussi quelques références à cette compétence : «(Les mathématiques) permettent structurer les savoirs qu'on obtient de la réalité, l'analyser et obtenir d'autres informations pour mieux la connaitre et l'évaluer, ainsi que prendre des décisions » ; de plus, «elles permettent qu'on se pose des questions, qu'on obtienne des modèles et qu'on identifie des relations pour analyser les phénomènes et les situations qui se présentent dans la réalité ».

1.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

(CM) la compétence mathématique exige « la connaissance et la gestion des éléments mathématiques basiques (types de nombres, mesures, symboles, éléments géométriques,…) ». Dans le programme des mathématiques du primaire, on insiste sur l'idée « de chercher une alphabétisation numérique, entendue comme la capacité d'affronter avec succès les situations où interviennent les nombres, ses relations, pour obtenir l'information utile ».

1.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

(CM) correspond à «l'aptitude pour interpréter et exprimer clairement et de forme précise des informations ou des données ». À travers la matière de mathématiques, les élèves doivent comprendre que «l'interprétation des résultats est un contenu préalable et prioritaire face à la dextérité de calcul ».

1.5 Compétence pour valider la solution

(CM) les processus liés à cette compétence « permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations (…) ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. »

(CCI) cette compétence « fournit, aussi, des compétences associées à la planification et gestion des solutions ».

(CID) permet de « communiquer l'information et les connaissances acquises en employant des ressources d'expression avec l'incorporation (…) des possibilités offertes par les technologies de l'information et la communication ».

(CAA) « implique la curiosité pour se poser des questions, d'identifier et de gérer toutes les réponses possibles face à une même situation ou un problème en utilisant diverses stratégies qui permettent d'affronter la prise de décisions critiques, avec toute l'information disponible ».

2 Les compétences en modélisation dans le programme français de l'école primaire

Dans le programme français, on peut distinguer différents textes officiels de référence :

- le programme officiel de 2008 (BOEN 2008),
- le socle commun de 2006 (BOEN 2006),
- les documents ressources sur le nombre au cycle 2 (2010) et au cycle 3 (2012),
- d'autres documents comme les anciens documents d'accompagnement des programmes de 2002, notamment sur les problèmes (2005), ou encore le rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques en cycle 3 (2010).

Concentrons-nous sur le socle commun et sur le programme de 2008, en adoptant la même catégorisation que pour les compétences basiques espagnoles (CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI). Les compétences qui apparaissent dans le socle commun français sont :

- la maîtrise de la langue française et la pratique d'une langue étrangère (CC)
- la connaissance des principaux éléments de mathématiques (CM)
- la maîtrise d'une culture scientifique et technologique (CCI)
- la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication (CID)
- la possession d'une culture humaniste (CCA)
- les compétences sociales et civiques (CS)
- l'accession à l'autonomie et l'acquisition de l'esprit d'initiative (AI)

Déclinons maintenant les compétences de modélisation, dans la catégorisation de Maass, avec des extraits des textes officiels référant au socle commun (SO) ou bien au programme de 2008.

2.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- montrer une certaine persévérance dans toutes les activités (SO)
- utiliser l'outil informatique pour s'informer, se documenter, présenter un travail (SO)

2.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral ;
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques ;
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)

2.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres (SO)
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas (SO)
- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.5 Compétence pour valider la solution

- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- faire preuve d'esprit critique face à l'information et à son traitement (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- commencer à savoir s'auto-évaluer dans des situations simples (SO).

Ainsi Maass a proposé une catégorisation des compétences de modélisation en cinq grandes catégories. Nous avons pu analyser les programmes à partir de ces catégories et observer que des relations peuvent être construites entre les compétences basiques et les compétences de modélisation. De notre point de vue, les activités de modélisation où on travaille le cycle complet sont la clef pour travailler les compétences basiques.

II - LES COMPÉTENCES DANS DES MANUELS

Nous allons maintenant illustrer la mise en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. De nombreuses études (Margolinas, Wozniak 2010) ont montré l'importance des manuels scolaires dans l'enseignement. Pour les manuels espagnols, il a été choisi la collection la plus utilisée. Pour la France, il ne s'agit pas de choisir les manuels les plus utilisés ou les plus représentatifs : il est difficile de faire une sélection suivant ces critères en l'absence d'outils incontestables mesurant la représentativité ou l'utilisation. Il s'agit plutôt de construire une clinique de mises en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. On observera la difficulté à trouver, pour certaines compétences, leur mise en œuvre dans des manuels. Nous

livrerons les conclusions de l'observation dans la dernière partie.

1 Comprendre le problème réel et établir un modèle réel

1.1 Distinguer les questions mathématiques des questions extra-mathématiques

L'activité présentée ci-contre correspond à « pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner » ; cet exemple est extrait d'un livre français niveau CP (ERMEL 2000, p. 85). On demande aux élèves de formuler des questions à partir de l'image proposée et de distinguer les questions mathématiques (par exemple mettant en jeu un dénombrement) des questions extra-mathématiques. Cet extrait est intéressant car il concerne la première année de l'école primaire et une collection de manuel emblématique pour la formation des maîtres.

1.2 Faire des hypothèses sur le monde réel

Cet extrait, adressé aux élèves de CM1 (Myx & al. 2003, p.141) montre qu'une connaissance extra-mathématique est institutionnalisée dans le manuel de mathématiques pour permettre aux élèves de la mobiliser dans la phase de construction d'un modèle.

La proportionnalité

Le prix de la viande est proportionnel à son poids.
Le prix des bouteilles est proportionnel au nombre de bouteilles.
Le prix d'un tissu est proportionnel à sa longueur.

Dans les situations de la vie quotidienne, les prix sont, en général, **proportionnels** aux quantités.

Dans un barème, les deux grandeurs sont proportionnelles.

Pour trouver le prix de plusieurs objets, je multiplie le nombre d'objets par leur prix unitaire.

La distance sur le terrain est proportionnelle à celle de la carte.

Pour trouver la distance sur le terrain, je multiplie la distance sur la carte par l'échelle.

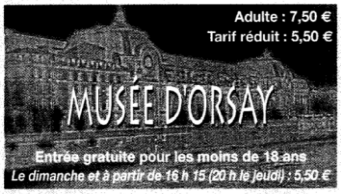
Les trajets sont proportionnels aux durées lorsque la vitesse ne change pas.

Lorsque la durée **double**, triple, quadruple… la **mesure** du trajet double, triple, quadruple.

1.3 Relier données utiles et questions simples

Les deux activités suivantes sont extraites de Caloudis et al. (2008, p.60, 70), et adressées aux élèves de CM2. Elles illustrent le travail sur la distinction entre données utiles et données inutiles par rapport à la question posée. On observe que les questions proposées ou à proposer sont fermées : il n'y a pas plusieurs hypothèses qui pourraient orienter vers des réponses différentes à la même question. Ce sont plutôt des questions intermédiaires simples que l'on trouverait dans le cadre d'un problème à plusieurs étapes.

Aujourd'hui dimanche, un père emmène ses deux enfants âgés de 8 et 10 ans au musée d'Orsay.



Les informations contenues dans un énoncé de problème permettent de trouver la ou les questions auxquelles on peut répondre.

Attention ! Il est très important de bien comprendre la situation proposée avant de débuter la résolution d'un problème.

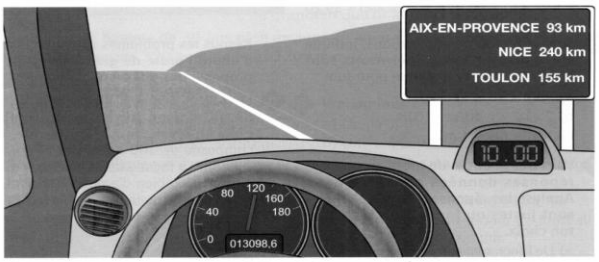
1 **Trouve la question qui complète chaque énoncé.**

A	Julien s'est couché à 23 h 40 et s'est levé à 10 h 20.	1	Quel âge a-t-il ?
B	Au marché, papa achète 5 kg de pommes de terre, 1 kg de bananes et 500 g de cerises.	2	À quelle heure arrive-t-il ?
C	Papy achète une douzaine d'œufs à 2,10 €, un fromage à 1,70 € et 1 kg de pêches à 2 €.	3	Combien de temps a-t-il dormi ?
D	Le TGV part de Paris à 10 h 10. Il met 3 h 03 pour arriver à Marseille.	4	Quelle quantité achète-t-il ?
E	Paul a 6 ans, Damien a trois ans de plus que lui.	5	Combien a-t-il dépensé ?

6 Produire des énoncés

Pour rédiger un énoncé, il faut inventer une situation comportant des données numériques et poser une ou plusieurs questions auxquelles on peut répondre en se servant des données fournies.

1 **Observe ce dessin.**



a) **Quelles informations t'apporte ce dessin ?**
Peux-tu expliquer les données chiffrées comme :
013098,6 120 155

b) **Recopie et complète cet énoncé par une question.**
Bertrand arrive à Aix-en-Provence et souhaite se rendre à Nice.

c) **Trouve une question en te servant du compteur kilométrique et du panneau indicateur.**

d) **Trouve une question en te servant de la vitesse de la voiture, de l'heure et de la distance qu'il reste à parcourir pour aller à Nice.**

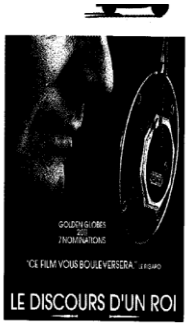
1.4 Relier données utiles et questions complexes

L'activité suivante est extraite d'un livre adressé au CM1 (Brault et al. 2012, p.36). À partir d'une situation donnée (une visite au cinéma) et d'une question complexe, l'élève doit retrouver quelles sont les questions intermédiaires simples qui vont aider à résoudre le problème, puis le résoudre. Par rapport aux activités précédentes, la question à laquelle relier les informations utiles est une question complexe.

Je résous un problème en posant les bonnes questions

Énoncé
Une école organise une sortie pour aller voir au cinéma le film *Le Discours d'un roi*.
275 élèves participent à la sortie.
Ils sont accompagnés par 16 adultes.
La salle de cinéma est constituée de 21 rangées de 14 sièges.

Question
Y aura-t-il assez de sièges pour tout le monde ?

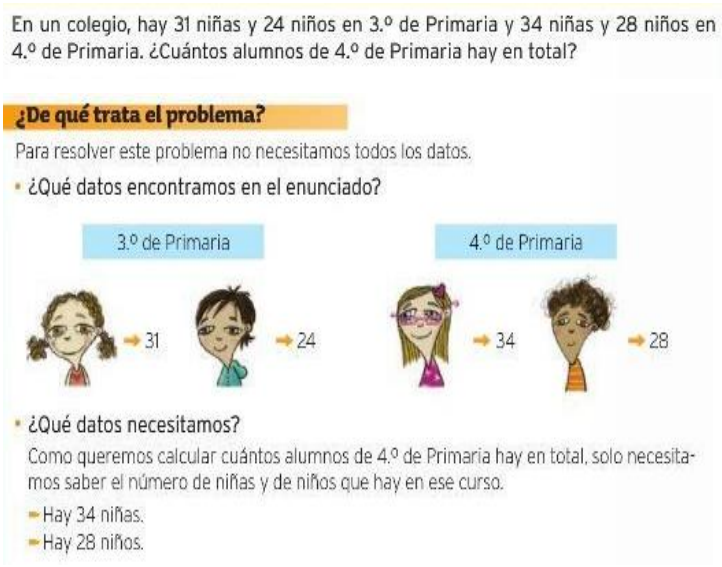


1• Parmi les questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien y a-t-il de sièges dans la salle de cinéma ?	Quel est le titre du film ?	Combien y a-t-il de participants à la sortie scolaire ?

2• Réponds aux deux questions restantes.

3• Déduis-en alors s'il y aura assez de sièges pour tout le monde.



En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

¿De qué trata el problema?

Para resolver este problema no necesitamos todos los datos.

- ¿Qué datos encontramos en el enunciado?

3.º de Primaria → 31 → 24

4.º de Primaria → 34 → 28

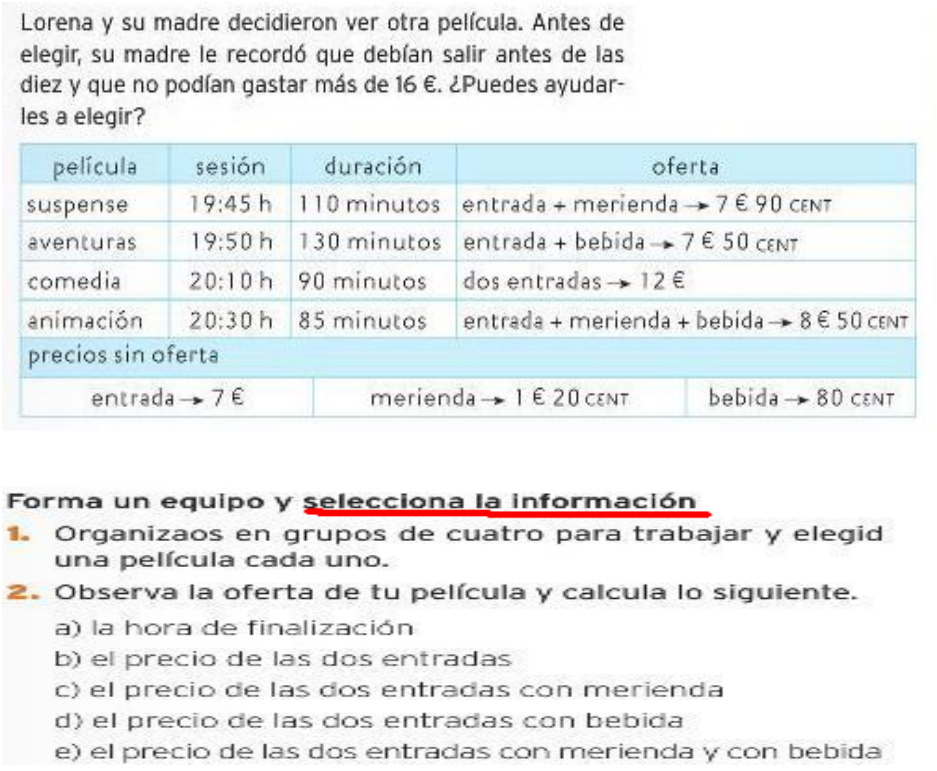
- ¿Qué datos necesitamos?

Como queremos calcular cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total, solo necesitamos saber el número de niñas y de niños que hay en ese curso.

- Hay 34 niñas.
- Hay 28 niños.

Ce problème apparaît dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.32). Il présente un problème et une résolution détaillée. Dans l'énoncé, on retrouve le nombre de filles et de garçons qui étudient en CE2 et CM1, la question posée est : combien d'élèves y a-t-il en CM1 ? Dans la résolution, on retrouve une schématisation graphique des données de l'énoncé et une question explicite : *De quelles données a-t-on besoin ?* L'objectif est que les élèves apprennent à discerner les données utiles des données inutiles par rapport à la question posée.

L'activité suivante (González et al. 2012, p.123) concerne des élèves de CE2 qui doivent la résoudre en groupes. L'énoncé commence avec la description d'une situation : une fille et sa mère veulent aller voir un film au cinéma, elles ont une limitation horaire et économique. La grille illustre les différentes formules et les horaires. Avant les questions, on retrouve une phrase importante : « *sélectionne l'information* »[3].



Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

película	sesión	duración	oferta
suspense	19:45 h	110 minutos	entrada + merienda → 7 € 90 CENT
aventuras	19:50 h	130 minutos	entrada + bebida → 7 € 50 CENT
comedia	20:10 h	90 minutos	dos entradas → 12 €
animación	20:30 h	85 minutos	entrada + merienda + bebida → 8 € 50 CENT

precios sin oferta

entrada → 7 €	merienda → 1 € 20 CENT	bebida → 80 CENT

Forma un equipo y selecciona la información

1. Organizaos en grupos de cuatro para trabajar y elegid una película cada uno.
2. Observa la oferta de tu película y calcula lo siguiente.
   a) la hora de finalización
   b) el precio de las dos entradas
   c) el precio de las dos entradas con merienda
   d) el precio de las dos entradas con bebida
   e) el precio de las dos entradas con merienda y con bebida

On observe à partir de ces exemples que le tri d'informations utiles/inutiles dans l'énoncé permet de travailler deux compétences : la compétence en communication ainsi que le traitement de l'information et la compétence digitale. En effet, selon le programme officiel espagnol, la

[3] C'est nous qui soulignons en rouge dans le texte espagnol les passages qui nous semblent intéressants pour notre observation.

compétence en communication est liée « aux outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ». Puis, le traitement de l'information est associé à « la recherche, la sélection, le registre et le traitement ou l'analyse de l'information ».

1.5 Chercher des informations en dehors de l'énoncé

L'activité suivante correspond à un livre espagnol pour élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). L'objectif est d'estimer une quantité d'eau qu'un élève ingère chaque jour. Dans l'énoncé on retrouve une grille pour aider à la résolution mais on suggère aussi de consulter les autres élèves pour des informations complémentaires : « *Si tu ne connais pas la quantité de liquide qu'on peut mettre dans un récipient, consulte les camarades de ton équipe*«.

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Forma un equipo y piensa qué líquidos tomas

1. En grupos de tres compañeros fijáos en esta tabla.

líquido	cantidad
1 taza de leche	33 cl
2 vasos de agua	50 cl
1 refresco	33 cl

2. Elabora una tabla como la anterior, con los líquidos que sueles beber a lo largo del día. Si dudas de la cantidad de líquido que cabe en algún recipiente, consúltalo con tus compañeros de equipo.

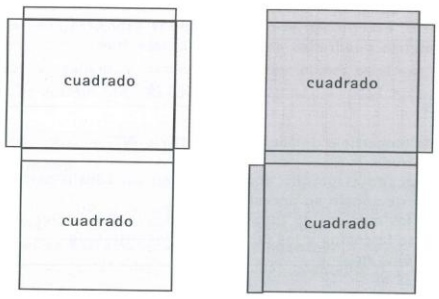
Ce type d'activités renforce le développement de la compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique. En effet cette compétence « rend possible la compréhension des événements » et « l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela « implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique» (BOE 2007). En effet, pour résoudre les activités précédentes, les élèves doivent aborder l'analyse de l'énoncé pour trier les informations pertinentes ainsi que pour trouver les questions qui peuvent être utiles à la résolution du problème. Ce travail est semblable à celui qui est réalisé lors d'une recherche scientifique : on doit identifier la question puis déterminer les données, ces données peuvent se trouver dans la situation problématique, mais aussi ailleurs.

2 Établir un modèle mathématique à partir d'un modèle réel

2.1 Simplification du modèle réel

Dans cet exemple pour élèves de CM2, on demande aux élèves de produire deux patrons différents d'une boîte de pizza (Alfonso et al. p.233).

1 El departamento de diseño de una industria alimentaria está diseñando una caja para transportar pizzas. En la parte superior de la caja tiene que imprimirse un mensaje publicitario.
a) Dibuja dos desarrollos diferentes de la misma caja.



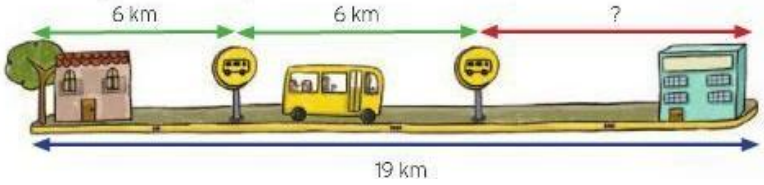
D'après la solution proposée par le livre du professeur (Galera et al., 2009), on voit qu'on simplifie le modèle réel. On ne tient pas compte des languettes adhésives ou à encastrer nécessaires pour que les côtés de la boîte ne tombent pas. On ne retrouve aucun commentaire relatif à cette simplification de la réalité. Si on observe les manuels de classe, la simplification de la réalité n'est jamais questionnée et semble aller de soi.

Le problème suivant est adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.60). Cette tâche apparaît résolue dans le livre de l'élève, on observe que, pour la résolution, on propose une simplification schématique du problème. La représentation schématique simplifiée n'est pas questionnée.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿De qué trata el problema?

El problema presenta un recorrido con etapas. Un dibujo nos ayuda a comprender la situación. Dibujamos un croquis con los datos del enunciado.



2.2 Modèle à une opération

Dans l'exemple suivant, on retrouve cinq problèmes réels (pour élèves de CM2) qui peuvent être résolus en faisant une seule opération arithmétique (Caloudis 2008, p.60).

Pour chacun des énoncés suivants, pose uniquement l'opération qui te permettra de répondre à la question posée.

1. Éric vend sa moto 1 200 euros et sa voiture 14 500 euros. Quelle somme va lui rapporter la vente des deux véhicules ?
2. Madame Areti, qui a 57 ans, a 11 ans de moins que son mari. Quel âge a monsieur Areti ?
3. La maman de Yasmine parcourt tous les jours 84 km pour se rendre à son travail (aller et retour). Quelle distance sépare son domicile de son lieu de travail ?
4. Le boulanger du village de Sainte-Agrève va déposer de l'argent à la banque. Il donne 56 billets de 20 €. Quelle est la somme totale déposée ?
5. Fin 2005, 19,9 millions de consoles ont été vendues au total à travers le monde, dont 13,2 millions en Amérique du Nord. Combien de consoles ont été vendues dans le reste du monde ?

3 Résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

Dans les livres français, on a réussi à retrouver quelques exemples de cette compétence, ils correspondent au processus de trouver les étapes intermédiaires de résolution ainsi qu'à établir l'ordre entre les étapes. Elle correspond aux nouveaux programmes de 2008 qui distinguent une progression : problèmes relevant d'une opération, des quatre opérations, à une étape, à plusieurs étapes, complexes. Dans les livres espagnols, nous n'avons pas trouvé ce type d'activités. Pour rechercher ce type d'activités dans les manuels espagnols étudiés, la méthodologie consiste à les parcourir systématiquement jusqu'à rencontrer l'activité cherchée.

3.1 Ordre des étapes (Brault 2012, p.72)

Énoncé
Sur son ordinateur, Manon joue à un jeu d'élevage de chevaux. Pour monter son centre équestre, elle dispose d'un budget de 40 000 fers à cheval. Elle achète :
- 1 écurie à 12 500 fers à cheval ;
- 1 carrière à 6 800 fers à cheval ;
- 1 prairie à 5 900 fers à cheval ;
- 7 juments à 950 fers à cheval chacune ;
- 1 étalon à 1 200 fers à cheval.

Question
Combien reste-t-il de fers à cheval à Manon après ses achats ?

1• Des questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien Manon a-t-elle dépensé de fers à cheval ?	Combien de chevaux Manon achète-t-elle ?	Combien coûtent les 7 juments ?

2• **a)** Des deux questions restantes, laquelle dois-tu te poser en premier ?
b) Réponds à cette question.

3• Réponds alors à la question restante.

4• Déduis-en combien il restera de fers à cheval à Manon après ses achats.

3.2 Trouver les étapes intermédiaires (Caloudis 2008, p.64)

Pour chacun des problèmes suivants, écris la ou les questions intermédiaires et résous le problème.

1 Mélanie possède 65 €. Elle veut acheter les articles suivants : une cafetière à 69 € 90 et un lot de 20 dosettes à 2 € 90. Combien lui manque-t-il pour acheter les deux articles ?

2 Alicia possède une encyclopédie en trois volumes de 820 pages chacun. Celle de Juliette comporte deux volumes de 1 340 pages chacun. Quelle encyclopédie comporte le plus de pages ?

3.3 Problèmes à plusieurs étapes (Brault & al. 2012, p.108)

Énoncé
Le camping « Les Estivales » organise un concours de saut en longueur par équipes de quatre.
L'arbitre calcule la somme des longueurs réalisées par les quatre membres d'une même équipe.
Pour qu'une équipe soit qualifiée pour la finale, son score total doit être supérieur à 10 mètres.
Léo, Maria, Kamel et Polly sont dans la même équipe.
Léo a sauté à 2,47 m. Maria a sauté à 2,7 m.
Kamel a sauté à 1,99 m. Polly n'a pas encore sauté.

Question
Quelle longueur Polly doit-elle sauter au minimum pour qualifier son équipe ?

4 Interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

Même si cette compétence se travaille dans presque la totalité des problèmes arithmétiques, elle n'apparait pas souvent explicitement. On a retrouvé l'exemple ci-contre dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). Dans la dernière question, l'élève doit expliquer quelle quantité de liquide il ingère chaque jour et quelle est la proportion d'eau. Pour cela il doit interpréter les résultats numériques obtenus dans les questions précédentes. De plus, on remarque que l'auteur du livre insiste sur le fait que l'élève doit «*analyser les résultats* ».

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Calcula cuánta agua tomas

3. Suma la cantidad total de líquido que bebes a lo largo del día.
4. Señala en tu lista las ocasiones en las que bebes agua y suma el total. ¿Bebes más o menos de 2 l?

Analiza los resultados

5. Explica a tus compañeros cuánto líquido bebes en total y cuánto de ese líquido es agua.

5 Valider la solution

5.1 Validation mathématique

On retrouve différents types de validations, notamment la validation mathématique : elle correspond uniquement à une validation numérique. Dans l'exemple suivant (González et al. 2012, p.32), on trouve une tâche résolue, la dernière partie correspond à la validation. C'est un exemple curieux parce que la validation n'est pas totalement fiable, même s'il s'agit d'une validation numérique. En effet, la validité de la solution est basée sur le fait que « le résultat de l'addition doit être plus grand que chacun des termes sommés ». Cette affirmation, même si elle est vraie, n'est pas totalement utile pour valider la solution, puisque le résultat peut être incorrect tout en étant supérieur chacun des termes sommés.

En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

¿Cómo se resuelve?

Para saber cuántos alumnos hay en total, sumamos los datos seleccionados.

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 28 \\ \hline 62 \end{array}$$

▶ Hay 62 alumnos de 4.º de Primaria en total.

¿Lo hemos hecho bien?

En una suma, el resultado debe ser mayor que cada uno de los sumandos.

$62 > 34$ $62 > 28$ ✓

Dans l'exemple suivant (Thévenet 2009, p.138), on demande à l'élève qu'il justifie, probablement à travers une opération, la réponse qu'il a donnée.

2 Un automobiliste qui roule à la vitesse moyenne de 60 km par heure met 3 h 30 min pour parcourir 350 km.
Est-ce exact ? Explique pourquoi.

L'exemple suivant (Gonzáles et al., 2012, p.60) correspond à un autre cas de validation numérique : la différence par rapport au premier exemple, c'est que la validation proposée est correcte.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿Cómo se resuelve?

Como nos piden que calculemos cuánto mide la línea roja, tenemos que realizar dos operaciones.

1. Averiguamos los kilómetros que miden las dos líneas verdes.

$$6 \times 2 = 12$$

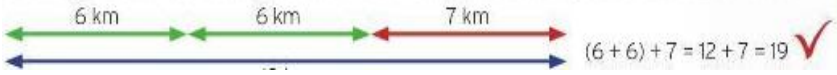
2. Calculamos los kilómetros que mide la línea roja.

$$\begin{array}{rl} 19 & \text{distancia total de la ruta} \\ -\ 12 & \text{distancia desde la salida hasta la segunda parada} \\ \hline 7 & \end{array}$$

▶ Hay 7 km desde la segunda parada hasta el colegio.

¿Lo hemos hecho bien?

Comprobamos que al sumar las tres distancias obtenemos la longitud total del recorrido.



On observe que, par rapport au programme espagnol, la validation numérique est clairement liée à la compétence mathématique. En effet, selon le programme espagnol, les processus liés à la compétence mathématique «permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations […] ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. ».

5.2 Justifier le choix des hypothèses

Dans la phase de validation, il faudrait aussi justifier les hypothèses. Dans la tâche précédente du cinéma (González et al. 2012, p.123), les élèves doivent choisir, à partir d'une grille de données et en respectant deux restrictions, le film que Lorena et sa mère vont aller voir. Dans la dernière question les élèves doivent justifier leur choix, et justifier les hypothèses qui ont aidé à ce choix. Il semblerait que cette justification ne s'appuie que sur des critères mathématiques (la vérification des contraintes mathématiques).

Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

Elegid la opción más adecuada

4. Decidid qué película elegirán Lorena y su madre y anotad por qué.

5.3 Validation extra-mathématique

(Caloudis 2008, p.68) propose un contrôle extra-mathématique basé essentiellement sur des connaissances sociales du monde réel et probablement avec des arguments de logique (par élimination).

5 Contrôler la vraisemblance d'une solution

Quand tu as trouvé une solution à un problème, demande-toi toujours si ce que tu as trouvé est vraisemblable.

Pour cela, tu peux :
– faire appel à tes connaissances personnelles ;
– comparer ton résultat avec l'ordre de grandeur que tu as déterminé au préalable.

Exemples : un homme de 30 ans pèse environ 70 kg et non pas 7 kg ou 700 kg ; la tour Eiffel mesure 320 m et non pas 320 km ou 3,20 m.

1 Retrouve la bonne réponse.

a) La masse d'un pot de yaourt est :
125 g – 125 mg – 1,250 kg – 1 250 g

b) Le réservoir d'essence d'une voiture peut contenir :
6,5 L – 65 L – 650 cL – 6,5 hL

c) Un immeuble de 4 étages mesure environ :
15 m – 300 m – 50 m – 5 m

d) Le poids d'un bébé à la naissance est :
30,5 kg – 3 050 g – 305 dg – 30,50 cg

e) La hauteur d'un filet de tennis en son milieu est :
91 mm – 91 dm – 0,91 m – 9,1 m

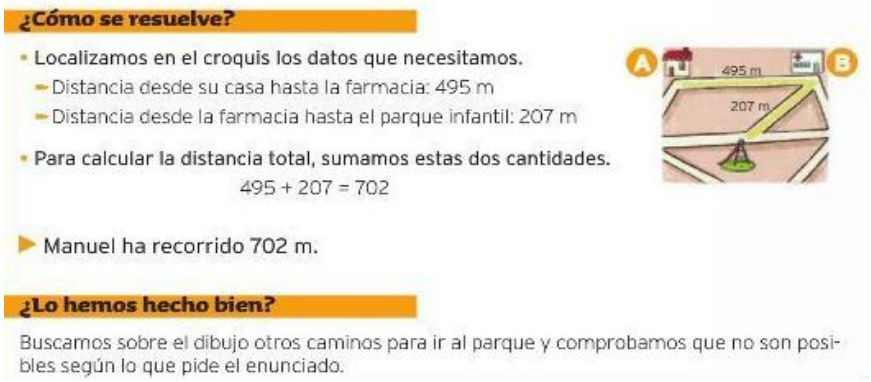
Vrai ou faux ?

a) Un plein d'essence coûte 600 €.
b) Une baguette de pain coûte 4 €.
c) Un éléphant mange 3 kg de fourrage par jour.
d) La Tour de Pise mesure 54,50 m.
e) La longueur d'un terrain de football est de 0,120 km maximum.
f) Les cheveux poussent de 3 mm tous les mois.

5.4 Validation par essai-ajustement

Dans l'exemple suivant (González et al., 2012, p.132), on présente une tâche où la validation se fait par essai-ajustement : l'élève doit calculer la distance parcourue pour aller de la maison au parc en passant par la pharmacie ; pour cela, selon la validation proposée par les auteurs du livre, on doit chercher tous les chemins possibles et examiner s'ils vérifient les conditions de l'énoncé. On observe d'autres solutions (qui correspondent à des chemins plus longs), mais elles ne sont pas commentées dans la validation proposée par les auteurs du livre. La validation proposée est donc incomplète. La question n'est pas bien posée : on veut savoir la longueur du chemin plus court.

Manuel ha hecho un croquis de los lugares que visita con más frecuencia. Hoy ha ido desde su casa hasta el parque infantil pasando por la farmacia. ¿Qué distancia ha recorrido?



Ces processus peuvent être mis en relation avec la compétence apprendre à apprendre car celle-ci « implique la curiosité pour se poser des questions, identifier et gérer toutes les réponses possibles face à un problème » (BOE 2007).

III - DISCUSSION ET CONCLUSION

Les ressources sur la modélisation proposent des activités pour la classe qui font travailler différentes compétences. Deux questions sont posées.

Quelle articulation entre compétence globale de modélisation et compétences partielles de modélisation ?

On appelle compétence globale de modélisation la capacité à mettre en œuvre toutes les étapes du cycle de modélisation en résolvant un problème de modélisation complet, et compétence partielle la capacité à mettre en œuvre une des étapes d'un cycle de modélisation (éventuellement en ne résolvant qu'une partie d'un problème de modélisation). La maîtrise isolée de chaque compétence partielle assure-t-elle la maîtrise de la compétence globale de modélisation ? Le seul moyen de maîtriser les compétences partielles est-il de les intégrer à une maîtrise de la compétence globale de modélisation, c'est-à-dire de les mettre en œuvre dans une situation de résolution d'un problème de modélisation complet ? Ce débat n'est pas sans rappeler, sur la résolution de problèmes dont les problèmes de modélisation sont une partie, le débat entre compétences mathématiques et compétences méthodologiques, évoqué dans (Balmès, Coppé 1999, p. 50) : « il nous semble qu'il faut traiter l'activité de résolution de problèmes en confrontant les élèves à de véritables problèmes pour lesquels ils doivent mobiliser des connaissances mathématiques, chercher, tâtonner, revenir en arrière..., plutôt que des compétences méthodologiques ». Les programmes français de 2002 précisaient : « ces compétences n'ont pas à être travaillées pour elles-mêmes, l'objectif essentiel étant toujours de résoudre le problème proposé » (Ministère 2002, p. 13). On peut donc remarquer qu'en France, tout comme en Espagne, des manuels continuent à proposer des ressources travaillant ces compétences partielles. Nous n'avons pas trouvé de résultats de recherches tranchant la question. Les auteurs de la communication sont intéressés par toute référence de recherches sur cette question.

Quand est travaillée la spécificité de la modélisation par rapport à la résolution de problème ?

La modélisation mathématique de problèmes en relation avec le monde réel fait que la modélisation met en jeu des compétences communes à la résolution de problèmes, qui englobe la résolution de problème intra-mathématique. La spécificité de la modélisation tient à l'intervention de connaissances et de validations extra-mathématiques qui en général n'interviennent pas dans la résolution de problèmes intra-mathématiques. L'observation des manuels français et espagnols montre que cette spécificité est peu traitée. Il y a une quasi-absence de questionnement en lien avec le monde réel sur la simplification du problème réel en modèle réel, les hypothèses faites sur le monde réel, les critères de choix adoptés dans les situations de prise de décision. Beaucoup d'activités relèvent de la méthodologie déjà analysée dans (Coppé, Houdement 2009), sans tenir

compte de la spécificité de la relation au mode réel. Certes, on observe quelques rares activités impliquant des connaissances extra-mathématiques : trier des questions mathématiques et extra-mathématiques, valider la vraisemblance d'une solution sur des connaissances extra-mathématiques. Mais ces activités relèvent plus souvent, pour reprendre la distinction rappelée dans (Maass 2006, p. 114) de problèmes énoncés par un texte, de tâches mathématiques contextualisées avec le langage quotidien ou d'applications d'algorithmes mathématiques routiniers à un problème relié à la réalité au lieu d'être des problèmes de modélisation, c'est-à-dire des problèmes complexes, ouverts et reliés à la réalité. (Cabassut, 2008) propose de tels exemples utiles pour la formation et pour l'évaluation.

On observe de plus dans le cas français, l'influence du programme officiel de 2008 dans la progression proposée dans la construction de modèles et dans leurs traitements mathématiques : modèle à une opération, à plusieurs opérations, à plusieurs étapes, complexe. On remarque, là encore, que cette progression est une progression sur la résolution de problème et qui, a priori, n'intègre pas la relation avec le monde réel.

La formation des maîtres

Pour la formation des maîtres, on voit donc l'importance de l'appropriation par le maître de ressources proposées par exemple par les manuels. Le maître devrait être capable en amont de se fixer les objectifs en termes de compétences travaillées, ce qui suppose qu'il a bien été formé à la reconnaissance de ces compétences. Un modèle de la modélisation peut être utilise pour permettre d'analyser le processus de modélisation, de désigner les différentes étapes de ce processus et les compétences qui y sont associées. Le modèle utilisé par Maass, et rappelé en début d'article, est intéressant. Nous avons proposé dans (Cabassut 2009) un modèle plus simple qui contracte les deux étapes, du monde réel au modèle réel, et du modèle réel au modèle mathématiques, en une seule étape. Dans le cadre de sa liberté pédagogique, l'enseignant devrait se positionner dans le débat entre compétences mathématiques et compétences pédagogiques, entre compétences spécifiques à la modélisation et compétences génériques de la résolution de problème : la formation devrait lui permettre d'éclairer ce débat pour assumer ses choix. Dans la conception de son enseignement, il devrait pouvoir modifier ses ressources ou en créer de nouvelles pour atteindre les objectifs qu'il s'est fixés, tout en respectant les contraintes institutionnelles du programme officiel. Ces contraintes peuvent varier d'un programme à l'autre, comme le montre l'étude curriculaire de (Coppé, Houdement 2009) au niveau de la France, ou d'un pays à l'autre (Cabassut, Wagner 2011 ; Cabassut, Ferrando 2012). La réflexion sur la programmation intégrée de l'enseignement des connaissances mathématiques et des connaissances extra-mathématiques est encore débutante. En France, la collection « Les maths à la découverte des sciences » chez Hachette en est une tentative. Pour répondre à tous ces besoins, à côté de la mise à disposition de ressources adéquates (manuels, sites internet …), la formation des maîtres est une réponse indispensable. Le projet LEMA en constitue un exemple (Cabassut 2009) qui propose des ressources de formations, pour lesquelles il est important de conserver un regard critique.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BALMÈS R.-M., COPPÉ S. (1999) Les activites d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle III. *Grand N , 63.* pp. 39 à 57, 1998-1999

BOLETIN OFICIAL DEL ESTADO [BOE] (2007) ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE,173,* 31487-31566.

BULLETIN OFFICIEL DE L'EDUCATION NATIONALE [BOEN] (2006) Socle commun de connaissances et de compétences. *BOEN, 29.*

BOEN (2008) Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *BOEN hors série 3.*

CABASSUT R. (2008) Articulation entre réel mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *Acte du colloque Didirem « Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* ». Université Paris 7.

CABASSUT R. (2009). Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés, in *Actes du XXXV^e colloque COPIRELEM*, Bombannes.

CABASSUT R. & WAGNER A. (2011). *Modeling at primary school through a French-German Comparison of Curricula and Textbooks*, Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Kaiser, Blum, Ferri, Stillman Editors. Springer, 559-568.

CABASSUT R. & FERRANDO I. (2012) Modelling in French and Spanish syllabus of secondary education, in *8th Congress of European society for research in mathematics education*, Antalya, Turkey.

COPPÉ S., HOUDEMENT C. (2009) Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36^e colloque de la Copirelem.* Auch. p. 48-70.

MAASS K. (2006) *What are modeling competencies?*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2)

MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet, G. & Trouche, L. (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Presses Universitaires de Rennes & INRP

MINISTÈRE (2002) Document d'application mathématiques cycle 3. Ministère de l'Education Nationale. DESCO.

V - MANUELS SCOLAIRES

BRAULT R., RIBANIER C., ROQUES N. (2012) CM1 Petit phare. Hachette. p.36, 72, 108

CALOUDIS A., LECLEC'H-LUCAS J., LUCAS J.-C., MEUNIER L., MEUNIER R. (2008) CM2 A portée des maths. Hachette. p.60, 64, 68, 70, 108.

ERMEL (2000). Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP (p.85). Institut National de Recherche Pedagogique. Paris. Hatier.

GALERA J., RUIZ J. ET SOLÀ M. (2009) Propuesta didáctica Matemáticas 5º Educación Primaria. Grupo editorial Bruño.

GONZÁLEZ Y., ABELLÓ N., LLINARES X., SANTAOLALLA (2012). Matemáticas 3ºEP. P. Conecta 2.0 LIR. Ediciones SM.

MYX A., DOSSAT L., BREGEON J.-P., VICENS P.-Y., POLI, B. (2003). Mathématiques. CM1, p.141. Collection Diagonale. Paris. Nathan.

THÉVENET S.(2009) Maths CM2,p.138. Collection Thévenet. Bordas.

APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ET RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL - IFé
LDAR – ESPE Académie de Versailles - UCP
jacques.douaire@u-cergy.fr

Fabien EMPRIN
Équipe ERMEL - IFé
CEREP - Université Reims Champagne Ardennes - ESPE
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Au cycle 2 le recours à la ligne droite, l'appréhension de ses propriétés et des contraintes techniques du tracé, sont rencontrés dans des problèmes d'alignement de points ainsi que dans des problèmes de représentation d'objets du plan ou de l'espace sollicitant des propriétés du trait droit (rectitude) indépendantes de l'alignement de points. Cet apprentissage pose plusieurs questions :
- Quelles sont les éléments problématiques de ces apprentissages, et notamment quelle articulation possible au cycle 2 entre ces deux aspects (alignement de points et rectitude de traits) ?
- Quelles sont les possibilités et les limites de transfert entre les procédures développées dans le méso-espace et dans celui de la feuille de papier ?
Cette communication a aussi pour but d'expliciter certaines questions que nous nous posons sur la production des ressources valorisant les résultats de notre recherche et en particulier sur la rédaction des dispositifs d'enseignement.

I - PRÉSENTATION

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment des logiciels de géométrie.

Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. Les étapes de la recherche comportent :

1) Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés…), ainsi que des connaissances spatiales que les élèves ont pu développer.
2) L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.
3) L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans plusieurs académies.
   Ces trois composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
4) La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues.

Ces étapes de la recherche et les résultats seront explicités à partir de l'étude d'un des nombreux thèmes relatifs aux apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2 : celui de l'alignement.

II - L'ÉTUDE D'UN APPRENTISSAGE : CELUI DE L'ALIGNEMENT

L'approche de la droite peut être appréhendée par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille…), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite » dans un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri©…). Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification, la production d'alignements ou de traits rectilignes, et sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts.

1 Hypothèse initiale

Compte tenu de ce qui avait été produit lors de la recherche sur le cycle 3, nous pensions que des compétences (ou des connaissances) pouvaient être construites au CE1 à partir du même type de problèmes que ceux que nous avions proposés au CE2.

Nous avions envisagé, au début de la recherche, une appréhension de la notion d'alignement favorisée par le passage d'expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (au moyen de la visée) à partir d'activités vécues dans le méso-espace, reprises ensuite sur la feuille de papier dans le but de mettre en évidence le recours à la ligne droite.

Il s'agissait de poser des problèmes d'alignement dans le méso-espace (situation « Plots ») ou dans un grand micro-espace (situation « Biglotron ») puis de passer à une « modélisation » sur A3/A4 dans les deux cas ; cette modélisation avait pour but de recourir au tracé de droites passant par des points représentants les objets de l'espace.

Le choix était donc au début de la recherche de donner du sens à des situations d'alignement de points dans le méso-espace pour ensuite faire apparaître la ligne droite comme un moyen efficace de résoudre ces problèmes dans le micro-espace, ce qui pourrait s'exprimer de façon un peu lapidaire par « **du méso surgit la droite ».** Dans ce sens la progression était plus dirigée par son but que par notre connaissance des potentialités des élèves du cycle 2.

2 Analyse des difficultés rencontrées dans le passage du méso-espace au micro-espace

Alors que les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes dans le méso-espace, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution d'une situation sur papier dans le micro-espace. De plus des difficultés se posaient pour le tracé à la règle de traits droits, beaucoup de productions comportant des lignes brisées.

Une reprise de la situation utilisant Cabri© semblait rendre possible ce passage au CE1 : les élèves ayant recours aux tracés de droites pour produire avec Cabri© la solution du problème d'alignement de plots. Toutefois, nous n'avons pas pu en vérifier le réinvestissement à plus long terme sur la feuille de papier.

Nous listons ici les résultats des expérimentations en termes de difficultés pouvant être liées :

- à la compréhension de la modélisation sur une feuille A3 d'une situation vécue dans la cour :
  - au passage 3D méso / 2D micro (vue de dessus…) et à la disparition du sujet (élève) dans le micro-espace du dispositif méso-espace ;
  - à la représentation d'objets physiques (cônes) par des schématisations (cercles, points) ;
  - à ce que le trait droit était sensé représenter : le regard, le tracé sur le sol …
- aux tracés de traits droits (cf. les difficultés déjà développées) ;
- à l'insuffisance des éléments langagiers dans la situation « Plot » pour évoquer une action et son déroulement pour la situation en micro.

Ces résultats expérimentaux ont donc mis en évidence la nécessité d'un travail qui fait l'objet actuellement d'une expérimentation permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2 indépendamment de la représentation d'alignement de points.

III - UN APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUE DE LA RECTITUDE

1 Significations de la notion de trait droit

Le concept de droite et les notions associées (trait droit, alignement,…) peuvent être appréhendés par l'élève du cycle 2 à travers différentes significations induites par la perception ou l'expérience :

- un objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille… voire des objets « composés » (un mètre de menuisier que l'on déplie, des baguettes mises bout à bout…) ;
- la frontière entre (des objets matériels ?) :
  - deux régions planes de l'espace, comme les arêtes d'un polyèdre ;
  - deux régions du plan, comme les côtés d'un polygone, des demi-plans ;
- objet du monde graphique : un trait rectiligne (qui peut être prolongé au-delà des extrémités) ;
- la trace :
  - trace produite par un tracé avec la règle ;
  - trace écran provoquée par l'outil « droite » dans Cabri© ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille,…) ;
- un ensemble de points alignés : le lieu de points alignés avec deux points.

Parmi ces significations du trait droit, celles privilégiées dans nos situations pour le CP sont celles de bords de bandes parallèles, de contours d'une figure, de traits comme réunion de segments rectilignes. Les critères de validation sont soit simplement perceptifs (régularité du tracé ou ressemblance avec un modèle) soit en relation avec une référence plus ou moins explicite au parallélisme (direction…), soit constitués par une validation pratique (coïncidence des extrémités, superposition, actions sur les objets…).

2 Présentation de deux situations

- « Papier peint » : Les élèves ont à reproduire un papier peint (au motif formé de traits parallèles) en prolongeant des traits placés sur une feuille amorçant le dessin du motif.
- « Formes empilées » : Les élèves ont à représenter un empilement de formes (rectangles, triangles) et à anticiper le tracé de ces formes suivant la contrainte d'empilement.

3 Objectifs communs

À ces significations peuvent être associés des problèmes concernant soit :

- la production de traits rectilignes ;
- l'identification de traits rectilignes (jugement) ;
- la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés pour identifier où produire un alignement ou une ligne droite.

Ce travail sur la notion de « rectitude », bien qu'il puisse être amorcé en GS avec la production de tracés réguliers effectués dans des activités de dessin, ne prend réellement sa dimension géométrique qu'au CP où des propriétés du trait droit peuvent donc être appréhendées. Ces

propriétés ne sont pas encore des objets d'étude pour elles mêmes, mais constituent d'abord des expériences :

- un trait peut représenter quelque chose qui n'a pas laissé de trace matérielle (ex : visée) ;
- un trait peut être associé à des instruments ;
- un trait peut être prolongé, par exemple pour pointer un objet caché.

4 Différents niveaux de maîtrise peuvent être associés à ces significations

- Comprendre qu'il faut tracer un trait droit pour résoudre le problème ; c'est ici le rôle des formulations (validation par le langage, assez consensuelle), rôle des gestes (main levée).
- Savoir comment il faut placer la règle pour tracer un trait plus long que celle-ci ; il s'agit de la connaissance de la technique (report de la règle) et l'aspect technologique : nommer les outils, décrire l'action…
- Maîtrise de la technique de tracé (validation par la production).

5 Des questions posées

- Quelle robustesse des situations ? Les dispositifs (progressions, situations) que nous avons élaborés privilégient une construction de connaissances s'appuyant sur la résolution de problèmes. Ils présentent une certaine « robustesse » liée notamment à ce que les résultats et procédures qui seront produits par les élèves dans une classe sont exposés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions en fonction des productions propres à sa classe. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.
- Sur les apprentissages spatiaux : les apprentissages spatiaux ou géométriques ne sont pas perçus par l'environnement familial de l'élève et parfois par les enseignants comme présentant un caractère de nécessité tant scolaire que social. De plus leur contribution aux apprentissages ultérieurs se réduit parfois dans les classes à un apprentissage précoce, voir inefficace, d'un vocabulaire. Il nous paraît donc nécessaire de développer des apprentissages spatiaux portant notamment sur l'analyse des représentations d'objets lors de changement d'espaces.
- Par la production de ces ressources pour la maternelle. Dans les classes de maternelle où nous expérimentons, les situations didactiques côtoient des « jeux » ou des projets pluridisciplinaires. Des enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel usuel… Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expériences. Il est aussi crucial, compte tenu de la diversité de ces appropriations de mettre en évidence quels sont les apprentissages indispensables parmi l'ensemble des possibles.

IV - DES INTERROGATIONS RÉCURRENTES SUR L'APPROPRIATION DES DISPOSITIFS D'ENSEIGNEMENT PAR LES ENSEIGNANTS

Un des enjeux de notre méthodologie est de permettre l'appropriation par les enseignants des dispositifs d'enseignement produits. Si notre recherche actuelle ne comporte pas spécifiquement

de volet portant sur cette question[1] nous émettons des hypothèses basées sur le travail des enseignants associées avec lesquels nous travaillons et sur nos échanges notamment lors des colloques tels que ceux de la COPIRELEM.

Les conditions que nos considérons comme nécessaires pour que l'appropriation de nos dispositifs soit possible sont que les enseignants :

- perçoivent mieux les relations entre les connaissances spatiales que peuvent développer les élèves et les connaissances géométriques ;
- prennent conscience de l'ensemble des significations d'une notion et des situations associées ;
- identifient les caractéristiques essentielles des situations didactiques.

Pour cela nous mettons en évidence ces éléments dans nos publications tant dans leur structure que dans les parties « théoriques ».

Les enseignants débutants sont également une de nos préoccupations et nous avons essayé d'identifier, dans nos expériences de formateurs, des difficultés spécifiques telles que celles liées au processus de dévolution, à la gestion des mises en commun qui sont souvent accentuées par des difficultés d'analyse à chaud des productions des élèves et ou à l'institutionnalisation.

Pour aider ces enseignants débutants et les enseignants en général il nous faudrait pouvoir identifier dans un premier temps si la source des difficultés est essentiellement didactique ou pédagogique. Dans le premier cas, une analyse didactique des enjeux des situations, des difficultés des élèves et de leurs potentialités permettrait d'anticiper les procédures des élèves pour mettre en place une mise en commun, de savoir ce qui est visé et doit être institutionnalisé… dans le second cas des narrations de situations détaillant les gestes pédagogiques attendus, l'organisation matérielle et temporelle de la séance permettrait de construire, dans un premier temps, les conditions d'un mise en œuvre de la séance puis à l'enseignant d'acquérir l'expérience nécessaire.

En tant que chercheurs en didactique nous privilégions la première piste en essayant de trouver des modalités qui permettent de ne pas négliger la seconde.

V - CONCLUSION

Pour notre équipe, les exigences liées à la production de ressources qui présentent à la fois les enjeux des apprentissages, le savoir mathématique, l'analyse de l'état de savoir des élèves, les problématiques d'enseignement et des dispositifs d'enseignement que peuvent s'approprier les maîtres, notamment dans le cadre de la formation, sont présentes à toutes les étapes de notre recherche.

La production de ce type de ressources nous paraît une exigence pour la communauté didactique.

[1] Nous avions, dans une recherche précédente, analysé des choix d'enseignants dans la conduite des situations, cf. Douaire J., Argaud H.-C.., Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) « Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in «Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes, (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

VI - BIBLIOGRAPHIE

DOUAIRE J., EMPRIN F., RAJAIN C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants, *Repères IREM*, **77**, 23-52.

ÉQUIPE ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Hatier.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, **10**, 5-55.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C., LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, **90**, 5-41.

ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A DES ELEVES DYSPRAXIQUES VISUO-SPATIAUX

Édith PETITFOUR
PIUFM, IUFM de Bar-Le-Duc, Université de Lorraine
LDAR, Paris 7
edith.petitfour@univ-lorraine.fr

Résumé
Les apprentissages géométriques peuvent sembler inaccessibles aux élèves ayant des troubles praxiques quand l'enseignement s'appuie sur des manipulations d'objets lors d'expérimentations avec du matériel ou lors de tracés instrumentés. Ces élèves, en effet, sont maladroits dans les actions à réaliser car il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes et à les automatiser. À cela peuvent s'ajouter des troubles visuo-spatiaux empêchant une exploration fiable des figures.
Nous cherchons à déterminer ce qui, dans l'action didactique, permet la construction de connaissances et une évolution de la conceptualisation en géométrie plane, lors de la transition école primaire-collège, pour ces élèves porteurs de troubles spécifiques des apprentissages.
Nos observations ont été réalisées dans une classe de sixième où sont scolarisés quelques élèves « Dys ». Notre étude porte sur l'enseignement de la symétrie axiale au moment où les élèves doivent passer d'une appréhension globale à une appréhension ponctuelle des figures. Nous analysons l'impact des ressources utilisées par l'enseignant sur les apprentissages des élèves, tels les gestes, le discours, les signes écrits et graphiques et l'utilisation d'artefacts dans un environnement numérique.

I - INTRODUCTION

Pour permettre aux élèves d'accéder à une conceptualisation en géométrie plane, l'enseignement à l'école primaire fait appel à des expériences dans le monde sensible (manipulation de formes, pliage, travail expérimental avec calque, …) et à des constructions instrumentées. Dans les programmes de l'école primaire (BO n°3 du 19 juin 2008), il est spécifié que « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* ». Ce travail se poursuit au collège : « *Les constructions géométriques, avec leurs instruments traditionnels – règle, équerre, compas, rapporteur – aussi bien qu'avec logiciel de géométrie, constituent une étape essentielle à la compréhension des situations géométriques.* » (BO Spécial n°6 du 28 Août 2008).

Les activités qui s'appuient fortement sur le tracé aux instruments et sur une perception « naturelle » des figures[1], c'est-à-dire considérée comme allant de soi, nous laissent augurer des difficultés importantes dans la réalisation des apprentissages géométriques des élèves dyspraxiques visuo-spatiaux. En effet, les troubles visuo-spatiaux de ces élèves provoquent une représentation défaillante des figures et les empêchent donc d'avoir une bonne perception des objets géométriques et de leurs propriétés : « *Les yeux ne peuvent pas explorer la figure, ou le modèle, de façon cohérente et régulière. Ils « sautent » sans logique d'un endroit à un autre, se posant à plusieurs reprises sur certains secteurs et en ignorant d'autres, sans percevoir l'ensemble ni l'organisation spatiale des diverses parties.* » (Mazeau et Crouail, 2009).

Ces anomalies du regard rendent difficiles les activités de reproduction de figures, et notamment celles des lignes obliques. Elles rendent impossible l'accès à une image mentale figurative fiable, ce

[1] Nous entendons par figure le dessin matériel doté de propriétés graphiques réglées au plan théorique par des propriétés géométriques

qui compromet toute anticipation d'un tracé sur un support. Par ailleurs, la prise de repères sur quadrillage ou réseau pointé est défaillante. Difficiles aussi les activités de reconnaissance de figures, qu'il s'agisse de percevoir une figure simple dans une figure complexe ou d'émettre des conjectures, concernant par exemple la nature des angles ou les égalités de longueurs, à partir de dessins géométriques.

Les troubles praxiques de ces élèves les rendent maladroits et lents dans leurs actions à réaliser avec du matériel ou avec des instruments de géométrie. En effet, il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes. Mazeau (Mazeau, 2010) définit les gestes comme un ensemble de mouvements, coordonnés dans le temps et dans l'espace dans l'intention de réaliser une action finalisée. Les dyspraxies se caractérisent alors par des coordinations qui ne se mettent pas en place dans les délais habituels, ou sinon, d'une façon déficitaire, anormale et inefficace et ce, en l'absence d'une déficience mentale et de troubles neuromoteurs, neurosensoriels ou neuromusculaires, alors qu'un apprentissage habituel a été effectué. Ainsi, l'enfant dyspraxique conçoit bien les gestes mais il n'arrive pas à les organiser ni à les exécuter en concordance avec son intention. Pour les élèves dyspraxiques que nous avons observés dans des tâches de tracé instrumenté, cela se manifeste par exemple par une coopération des mains malhabile, une gestuelle saccadée, sans modulation, avec un freinage non réalisé à temps, avec pour conséquences des positionnements d'instruments approximatifs et des productions très imprécises, brouillonnes.

Habituellement, tous les gestes appris deviennent des routines après un certain nombre de répétitions et peuvent être réalisés sans y prêter attention et sans fatigue. Pour les élèves dyspraxiques, il n'est est rien : « *Ils ne peuvent réaliser facilement ni « routiniser » des traitements de « bas niveau » (sensorimoteurs, gestuels et spatiaux), traitements qui font normalement l'objet d'une acquisition implicite puis d'une automatisation chez les enfants tout-venant.* » (Mazeau, 2010). Cette absence d'automatisation constitue un handicap caché pour ces élèves alors en incapacité de réussir une double tâche. Par exemple, des tâches telles que tracer une ligne le long d'une règle en la maintenant, ou faire tourner un compas en exerçant une pression adaptée, nécessiteront en permanence un contrôle volontaire extrêmement coûteux pour ces élèves, toutes leurs ressources attentionnelles et cognitives seront mobilisées au détriment du raisonnement qu'ils seraient pourtant en capacité d'exercer.

Sachant qu'un enfant présentant des troubles spécifiques des apprentissages peut s'appuyer sur ses compétences préservées pour suppléer à ses dysfonctionnements, que pour un élève dyspraxique l'utilisation des canaux auditivo-verbal et mnésique est préconisée et que des adaptations pédagogiques peuvent favoriser un accès aux apprentissages scolaires (Mazeau et Crouail, 2009), nous nous sommes interrogés sur ce qui, dans l'action didactique, permettait la construction de connaissances et une évolution de la conceptualisation en géométrie plane, lors de la transition école primaire-collège.

Nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement au concept de symétrie axiale, concept dont l'enseignement prend fortement appui sur la perception et sur différentes manipulations, et qui peut donc sembler inaccessible a priori aux élèves dyspraxiques de par leurs troubles. Par ailleurs, l'évolution du mode d'appréhension de la symétrie axiale dans la transition CM2-6ème est source de difficultés en général pour l'élève, qu'il soit dyspraxique ou non. Ainsi, pour répondre à nos interrogations, nous avons tout d'abord examiné cette évolution à partir des programmes de 2008, puis nous avons observé une séquence d'enseignement de la symétrie axiale dans une classe de sixième, durant l'année scolaire 2010-2011. Nous avons filmé plus particulièrement un élève dyspraxique visuo-spatial scolarisé dans cette classe et accompagné d'une Auxiliaire de Vie Scolaire (AVS). Nous avons sélectionné les activités intégrant la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite réalisées tout au long de la séquence. Ce type de tâches apparaît dès la première séance où une technique de construction à l'équerre et au compas est institutionnalisée. Il est rencontré de nombreuses fois par la suite, que le point soit isolé ou dans une figure. Nous avons alors analysé l'impact des ressources utilisées par l'enseignant sur les apprentissages de l'élève dyspraxique, tels les gestes, le discours, les signes écrits et graphiques et l'utilisation d'artefacts dans un environnement numérique.

Dans ce qui suit, nous présentons une partie de nos analyses et résultats.

II - ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE AXIALE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE

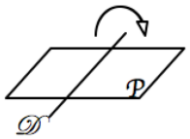
1 Étude à partir des textes officiels

À la fin de l'école primaire, d'après les programmes de 2008 (B.O. n°3 du 19 juin 2008), les élèves doivent être capables de percevoir un axe de symétrie, de reconnaître le(s) axe(s) de symétrie d'une figure, de tracer le symétrique d'une figure sur papier quadrillé et de compléter une figure par symétrie. En sixième, la progression consiste à faire évoluer les conceptions de l'élève en le faisant passer du travail expérimental (pliage, utilisation de papier calque) portant sur des objets de l'espace sensible à des constructions à l'aide des instruments usuels (règle, équerre et compas) fondées sur la mise en œuvre de propriétés portant sur des lignes et des points. Dans les commentaires du programme de sixième (B.O. spécial n°6 du 28 août 2008) apparaît une volonté de continuité avec le travail entrepris à l'école élémentaire conduisant à dégager les propriétés de « conservation » de la symétrie axiale (distances, alignement, angles et aires) à partir d'un inventaire de figures simples obtenu par pliage ou par utilisation de papier calque. En fin de sixième, l'élève doit être capable de construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle (que l'axe de symétrie coupe ou non la figure) et plus généralement le symétrique d'une figure donnée, en utilisant ses instruments. Le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est mis en évidence mais cette notion n'est exigible pour le socle qu'en classe de cinquième.

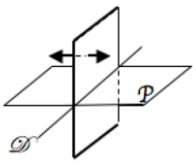
À l'école primaire et au collège, les élèves rencontrent deux aspects différents du concept de symétrie. En effet, les problèmes de reconnaissance et de construction mettent en jeu soit une figure symétrique, soit deux figures symétriques. Dans le cas d'une figure symétrique dont le(s) axe(s) sont à reconnaître ou qui est à compléter, la symétrie est vue comme une propriété de la figure ; dans le cas de deux figures symétriques, l'une est considérée comme l'image de l'autre par symétrie en tant que transformation géométrique.

Nous pouvons souligner enfin une rupture dans l'enseignement de la symétrie axiale. A l'école primaire, l'introduction pragmatique du concept conduit à la considérer comme une transformation portant sur des surfaces en passant par l'espace. On propose en général aux élèves un dispositif expérimental qui permet d'obtenir, par manipulations simples, le symétrique d'une figure donnée ou de contrôler la symétrie d'une configuration par rapport à un axe donné. La symétrie axiale dans un plan P par rapport à une droite D de ce plan peut être conçue comme la restriction à ce plan des deux transformations de l'espace suivantes :

- un demi-tour autour de la droite D



- une symétrie orthogonale par rapport au plan perpendiculaire au plan P et contenant la droite D



Pour la première transformation, le plan peut être représenté par une feuille transparente et le demi-tour obtenu par pliage de la feuille suivant la droite D ou par retournement de la feuille autour de la droite D. Dans cette manipulation, on ne tiendra pas compte des positions intermédiaires prises par les objets en déplacement. De plus, il sera nécessaire d'identifier les deux faces de la feuille pour que celle-ci ait les caractéristiques du plan qui est sans épaisseur et qui n'est pas biface. Cette abstraction non explicitée peut être source de difficulté comme l'illustre Figure 1 l'objection d'une élève utilisant l'image mentale associée au demi-tour autour de l'axe de symétrie.

« *Si le chat tourne autour de la droite on ne doit plus voir sa queue.* »
(Commission Collège de l'APMEP-Lorraine, 2002)

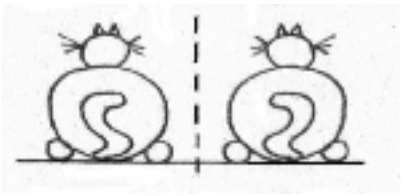


Figure 1

Pour la seconde transformation, on peut utiliser un objet plan réfléchissant représentant le plan de symétrie, tel un miroir ou un Géomiroir, et le placer perpendiculairement au plan P sur l'axe de symétrie. On peut ainsi visualiser les effets de la symétrie axiale en observant le reflet d'une figure. Cette matérialisation n'est pas basée sur l'idée de mouvement géométrique comme avec le pliage ou le retournement du calque. Ici, la transformation est invisible, on observe seulement son résultat : la figure située d'un côté de l'axe et son image virtuelle.

Pliage, retournement du calque ou visualisation du reflet favorisent la construction d'images mentales relatives à la symétrie axiale mais peuvent amener aussi des conceptions erronées. Par exemple, la symétrie pourra être perçue comme une transformation d'un demi-plan délimité par l'axe dans l'autre demi-plan et dans un seul sens. Les élèves considéreront alors comme impossibles des constructions de symétriques de figures traversées par l'axe de symétrie.

Le mode d'appréhension de la symétrie axiale va progressivement évoluer en sixième, elle sera considérée comme une transformation ponctuelle. Faisant référence aux travaux de Duval (Duval, 1995), nous pouvons remarquer qu'une déconstruction dimensionnelle est nécessaire, à savoir un passage d'une visualisation des figures en termes de surfaces à une visualisation des figures en termes de lignes et de points. Ce changement de point de vue sur les figures est amorcé à l'école primaire dans le cas d'activités de tracé du symétrique d'une figure par rapport à une droite sur papier quadrillé mais il peut rester minime si, une fois le symétrique d'un point placé, ce sont des propriétés portant sur les surfaces qui sont prises en compte, comme la conservation de la forme et de la taille, et le retournement de la figure. Par ailleurs, les points isolés sur quadrillage peuvent être vus comme des sommets de triangles et les constructions peuvent n'être réalisées qu'en s'appuyant sur une perception de surfaces.

L'approche ponctuelle des figures prépare l'accès à la géométrie déductive étudiée au collège mais constitue un obstacle pour les élèves puisqu'elle va à l'encontre de la manière spontanée et prédominante de voir les figures. Dans notre étude, nous nous appuyons sur les unités constitutives d'une figure géométrique définies par Duval (Duval, 1995) pour caractériser les différents types de points dont les élèves seront amenés à construire le symétrique.

2 Les unités constitutives d'une figure géométrique

Dans le registre des représentations géométriques, Duval (Duval, 1995) définit les unités figurales élémentaires comme des figures de dimension 0 (*0D*) : un point, de dimension 1 (*1D*) : une ligne ou de dimension 2 (*2D*) : une zone dans une surface. Les lignes et les zones peuvent avoir des formes rectilignes ou courbées qui peuvent être ouvertes ou fermées pour les zones. De l'analyse des figures géométriques en fonction de ces unités figurales élémentaires, il ressort différents constats qui permettent d'expliquer des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la géométrie. D'une part, la perception visuelle des unités de dimension 2 prédomine sur celles de dimension 1 ou 0, Duval précise que les élèves évitent au maximum de transformer une unité figurale de dimension 2 en une configuration d'unités figurales de dimension 1 ou 0, cette déconstruction dimensionnelle allant à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes, alors que le traitement d'une situation mathématique représentée par une figure nécessite que l'on considère les unités figurales de dimension inférieure. Par exemple le carré est perçu comme une figure unique mais il est défini par des propriétés sur les unités figurales de dimension 1 qui le composent : quatre côtés de même longueur, des angles droits, des axes de symétrie, …

D'autre part, un même objet mathématique peut être représenté par des unités figurales différentes. Par exemple le point peut être représenté par trois unités figurales différentes : celle typique de dimension 0, le point pouvant être en dehors ou sur une autre unité figurale et celles moins typiques de dimension 2 comme « coin » (sommet) ou « croix » (intersection). Dans ces dernières représentations, le point sera plus difficilement identifié.

Nous avons repéré, dans la séquence d'enseignement observée, tous les épisodes de construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite. Nous avons alors distingué le point isolé, unité figurale de dimension 0 situé en dehors de toute autre unité figurale, représenté par une croix, des autres points :

- le point sur une figure : point situé sur une autre unité figurale, visible par une marque qui le désigne ou non (point sur une droite, sur un cercle ou un segment ; point extrémité d'un segment ; point centre d'un disque, …) ;
- le point sommet d'un polygone ;
- le point résultant de la relation d'incidence de deux lignes (intersection d'un arc de cercle et d'une droite, intersection de droites, …).

III - ÉVOLUTION DES APPRENTISSAGES DE L'ÉLÈVE DYSPRAXIQUE VISUO-SPATIAL AU COURS DE LA SÉQUENCE

1 Méthodologie de l'analyse

Nous avons déterminé différentes natures d'aide nous permettant de repérer les ressources sémiotiques utilisées par l'enseignante ou par l'AVS pour amener l'élève dyspraxique à intégrer des schèmes de construction instrumentée. Nous nous appuyons pour cela sur le concept d'ostensif introduit par Bosch et Chevallard (Bosch et Chevallard, 1999) dans le cadre de l'approche anthropologique. Ceux-ci distinguent deux types d'objets unis par une dialectique :

- Les ostensifs sont des objets qui ont un caractère matériel, perceptible par le moyen des sens, et qui peuvent être manipulés par la voix, par le regard, de façon motrice, … Ce sont des objets matériels quelconques tels un crayon, une règle, un compas, … ou d'autres particuliers : les gestes ; les sons, dont les mots de la langue, et plus généralement le discours ; les graphismes, schémas, dessins ; les écritures et les symboles. La manipulation des ostensifs est guidée et contrôlée par les non-ostensifs.
- Les non-ostensifs, tels des notions, des concepts, des intuitions, des idées, ne peuvent être manipulés. Ils existent institutionnellement et ne peuvent qu'être évoqués à travers la manipulation d'ostensifs associés.

Dans la réalisation d'un type de tâches, les ostensifs constituent la partie visible de l'activité, leur manipulation réglée par les non-ostensifs correspond à la mise en œuvre d'une technique.

Bosch et Chevallard considèrent que les objets ostensifs sont les ingrédients premiers des techniques, des technologies et des théories et qu'ils peuvent être regardés « comme des instruments de l'activité mathématique, des outils matériels sans lesquels l'action ne peut pas se réaliser ». Ils caractérisent les différents objets ostensifs par le registre auquel ils appartiennent : oral, écrit, graphique, gestuel et matériel. A partir de ces caractérisations, mais aussi de nos observations en classe, nous distinguons :

- ***le langage oral*** : discours adressé collectivement à la classe ou personnellement à l'élève ;
- ***le langage écrit*** auquel l'élève peut se référer : écrits au tableau, dans le cahier, dans le manuel, dans les interfaces d'Apprenti-Géomètre et de Mathenpoche ;
- ***la gestuelle*** : tout mouvement des mains ou des bras réalisé « dans l'air » ou sur un support, destiné à évoquer un non-ostensif dans le cadre d'activité mathématique ;

- ***les manipulations d'objets matériels*** : cela peut être des manipulations de dispositifs expérimentaux (pliage, retournement de calque ou utilisation de Géomiroir) ou des manipulations d'instruments géométriques (équerre, règle, compas) ;
- ***les manipulations d'objets virtuels*** dans un environnement numérique : animations d'objets géométriques effectuant un demi-tour autour de l'axe de symétrie avec le logiciel Apprenti-Géomètre ou manipulations d'instruments géométriques virtuels dans la base d'exercice en ligne Mathenpoche ;
- ***les signes graphiques*** : cela peut être un schéma, un symbole, un codage de propriétés (angle droit, égalité de longueurs), un surlignage.

Dans l'environnement Papier-Crayon, l'élève dyspraxique que nous avons observé a toujours été conduit à utiliser une même technique de construction d'un point M', symétrique d'un point M par rapport à une droite (d), à l'équerre et au compas.

Nous avons décomposé ce type de tâches en treize actions, réparties en trois étapes illustrées Figure 2. La première étape consiste en la construction à l'équerre du segment [MP], avec P projeté orthogonal de M sur la droite (d) : il s'agit pour cela de prendre l'équerre, de placer un côté de l'angle droit de l'équerre contre la droite (d) du côté où se trouve le point M, de glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit soit sur le point M, de maintenir l'équerre et de tracer le segment [MP]. La deuxième étape consiste en un prolongement du segment [MP] grâce à un glissement puis maintien de l'équerre. La troisième étape consiste en la construction d'un arc de cercle de centre P et de rayon MP interceptant la droite (MP) en un point M' : il s'agit de prendre le compas, d'écarter les branches de l'écart MP, de tracer l'arc et de repérer le point M'.

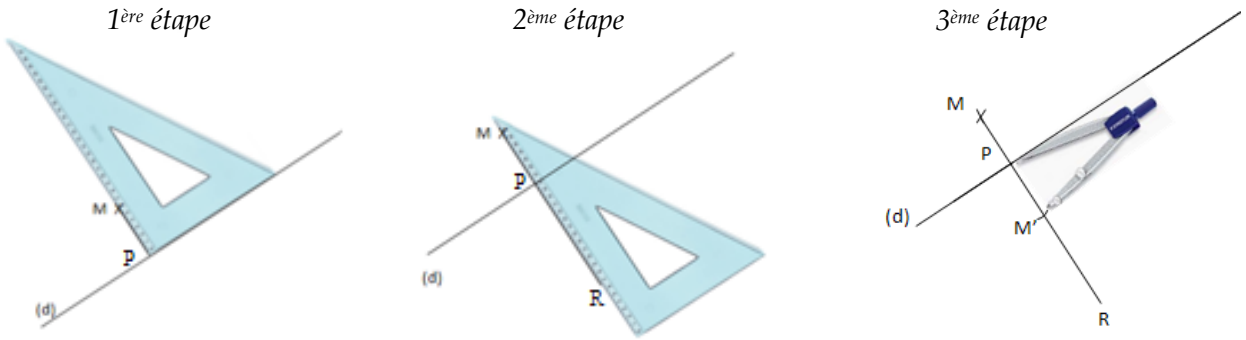


Figure 2

À partir du visionnement et de la transcription des épisodes où l'élève dyspraxique visuo-spatial était amené à construire le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) à l'équerre et au compas, nous avons relevé les aides apportées par l'enseignante ou par l'AVS au cours des différentes étapes de la construction selon leur nature (orale écrite, gestuelle, manipulatoire, graphique), ainsi que leurs effets sur l'action de l'élève. Nous avons distingué les aides mathématiques des aides compensatoires du handicap. Les premières sont relatives aux connaissances mathématiques à mettre en jeu dans la construction instrumentée. Une aide forte de ce type peut être une formulation ou une évocation de la propriété géométrique à mettre en œuvre : « Trace la perpendiculaire à (d) passant par M » ; reporte la distance de M à (d) sur la perpendiculaire à partir de ce point ; … ». Elle peut être aussi une instruction sur le positionnement des instruments à effectuer ou sur une action à réaliser avec : « Place un côté de l'angle droit de l'équerre contre l'axe de symétrie ; glisse ton équerre le long de la droite ; mets la pointe du compas sur le point M ; … ». Elle peut être enfin une action exécutée à la place de l'élève, sans instruction de sa part. Une aide mathématique faible sera une formulation d'une action réalisée par l'élève, cette formulation lui servant de rétroaction. Aucune aide mathématique ne sera apportée si l'élève réalise l'action de façon autonome ou s'il donne une instruction permettant à un tiers de l'effectuer. Les aides compensatoires au handicap pallient les déficits praxiques, visuo-

spatiaux ou organisationnels. Ces aides sont fortes lorsqu'un tiers exécute les actions à la place de l'élève, avec ou sans ses instructions (ajustement de la position de l'équerre, maintien de l'équerre, …) ; elles sont faibles lorsqu'un questionnement non inducteur est conduit (« Que faut-il faire maintenant ? ») ou lorsque des conseils sur la tenue des instruments sont donnés (« Tiens le compas par le haut », « Appuie plus sur la pointe », « Ecarte les doigts sur l'équerre », …).

Dans les différentes constructions analysées, nous avons calculé le pourcentage d'aides données à l'élève dyspraxique visuo-spatial, en affectant un coefficient 2 aux actions fortement aidées, un coefficient 1 aux actions faiblement aidées, un coefficient 0 aux actions autonomes, que les aides soient mathématiques ou compensatoires au handicap. Une aide forte dans toutes les actions revient à 100% d'aide se décomposant en 43 % d'aide mathématique et 57 % d'aide compensatoire au handicap.

2 Analyse et résultats

Pour étudier l'évolution des apprentissages de l'élève et ce qui les favorisait, nous avons analysé plusieurs épisodes de constructions instrumentées du symétrique d'un point par rapport à une droite, en nous intéressant à différents types de points. Pour chacune des treize actions mise en jeu pour réaliser la construction, nous avons regardé le type d'aide apportée (aide mathématique ou aide compensatoire au handicap), la nature de cette aide (orale, écrite, gestuelle, manipulatoire, graphique) et nous en avons déterminé l'intensité. Nous avons également analysé les effets de ces aides sur l'activité de l'élève.

Nous présentons Figure 3 les pourcentages d'aide apportée dans différents épisodes de construction du symétrique d'un point dans une configuration composée d'un point isolé et d'une droite, sur support uni. Les cinq premières constructions sont réalisées dans l'environnement Papier – Crayon sauf la troisième qui est faite par l'élève au tableau, interrogé par l'enseignante. Les trois dernières sont réalisées avec les instruments virtuels de Mathenpoche.

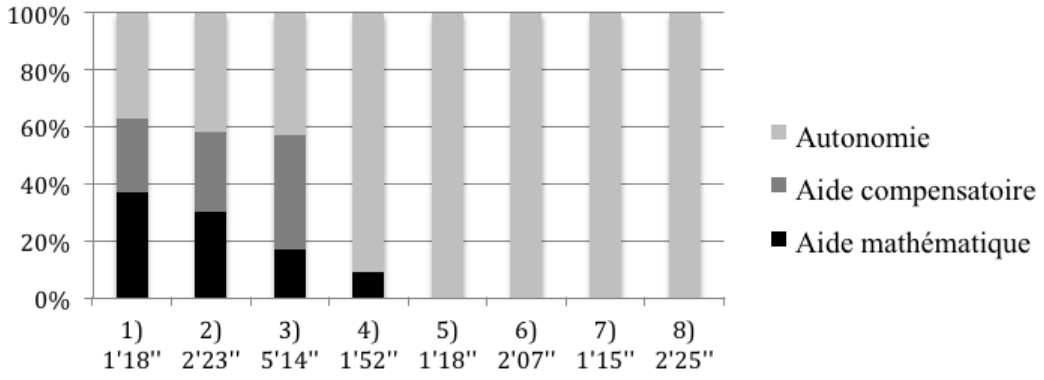


Figure 3. Construction du symétrique d'un point isolé (0D)

Le pourcentage d'aide mathématique diminue progressivement. Dans ses premières constructions, l'élève ne prend pas en compte la propriété de perpendicularité de façon instrumentée. Il utilise bien l'équerre en faisant passer un côté de l'angle droit par le point considéré, mais il oriente ce côté perpendiculairement à l'axe de symétrie de façon visuelle. Pour le positionnement de l'équerre, des traitements spatiaux complexes sont à mettre en œuvre lorsqu'il faut considérer simultanément l'orientation de l'équerre, celle de la droite ainsi que la position du point. Différentes interventions ont permis d'aboutir à un positionnement correct : l'enseignante ou l'AVS attire l'attention de l'élève sur l'axe de symétrie en le mentionnant, en le montrant ou en lui demandant de le repérer. L'une ou l'autre fait également le lien entre les objets géométriques (axe de symétrie, point, angle droit) et les côtés de l'équerre dans un discours oral appuyé de gestes (parcours des éléments mentionnés avec le doigt). Dans la deuxième construction, l'AVS organise les actions de l'élève en le contraignant d'abord à tenir compte de l'axe, elle y maintient une règle contre laquelle l'élève doit faire coulisser son équerre jusqu'au point. A partir de la quatrième construction, l'élève place l'équerre en la glissant le long de l'axe et jusqu'au point. La maîtrise de

cette technique de positionnement de l'équerre est cependant occultée par une imprécision importante dans le tracé : les difficultés praxiques de l'élève l'empêchent de bien ajuster son équerre puis de la maintenir tout en traçant. Cette imprécision est provoquée aussi parfois pour d'autres raisons comme par exemple une gêne occasionnée par le graphisme du nom d'un point écrit dans la zone de tracé par manque d'anticipation, ou alors à cause d'un déséquilibre de l'équerre dans une construction réalisée en bas de page de cahier. Une absence d'aide compensatoire à ce niveau conduit donc à une production peu satisfaisante si l'enseignant garde un niveau d'exigence de précision identique à tous les élèves de la classe.

Dans les quatre premières constructions, et cela apparaitra aussi par la suite dans des constructions avec d'autres types de points, l'élève considère la construction terminée une fois le prolongement du segment [MP] tracé. Le point symétrique cherché est selon lui à l'extrémité du prolongement. Ce peut être la conséquence d'une perception syncrétique du segment où longueur et direction sont prises globalement en compte. L'évocation du report de longueur par l'AVS enclenche alors la fin de la construction.

En fin de la séquence d'apprentissage, l'élève dyspraxique a acquis les schèmes d'utilisation de l'équerre et du compas concernant la technique qui lui a été enseignée pour réaliser le type de tâche de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite, dans le cas d'un point isolé. Il est d'ailleurs capable d'adapter de façon autonome cette technique dans l'environnement numérique de Mathenpoche, une fois effectuée la prise en main des instruments virtuels. Ses constructions sont alors réalisées dans une durée analogue à celle des autres élèves.

L'élève ne s'est pas montré capable de réinvestir de façon autonome sa technique de construction lorsque le point n'est plus isolé ou lorsqu'il est en présence de « lignes parasites », telles d'autres droites qui ne sont pas l'axe de symétrie par exemple. Nous présentons en Figure 4 les pourcentages d'aide apportée pour trois constructions de ce type.

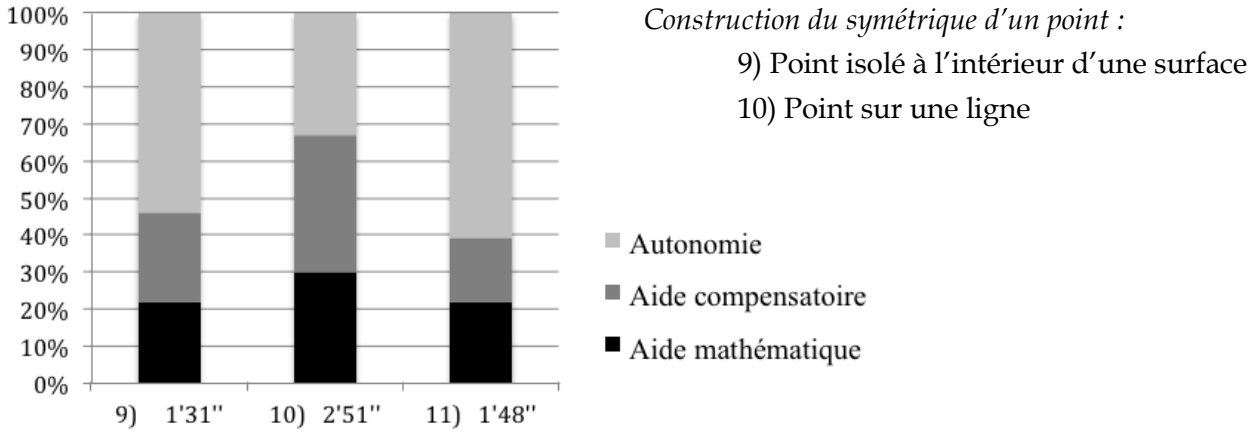


Figure 4.

La construction 9) est celle du symétrique du centre d'un cercle, la construction 10) celle du symétrique d'un point d'une droite sécante à l'axe de symétrie. 46 % d'aide pour la première et 67 % pour la seconde ont permis la mise en œuvre d'une technique correcte. Moins d'aide a été apportée pour la construction 11) où figurent sur un support plusieurs droites et points isolés, cependant le report de longueur a été effectué en autonomie par l'élève de façon incorrecte (point D' de l'Annexe). Une construction avec une « droite parasite » dans Mathenpoche n'a pas non plus abouti.

Nous attribuons assez naturellement les difficultés de repérage de l'élève à ses troubles visuo-spatiaux, ce repérage pouvant être amélioré par la qualité des supports proposés (supports agrandis, axe à considérer coloré ou surligné). Toutefois, il semble que ce ne soit pas la seule origine des difficultés. Elles viennent aussi de l'appréhension qu'il a des objets géométriques et de leur représentation. Ce rapport aux figures est commun à d'autres élèves de classe, même non dyspraxiques visuo-spatiaux, qui ne perçoivent par exemple la droite que comme un trait qu'on ne peut prolonger et qui ne possède que deux points : les extrémités du trait. Ces élèves ne

parviennent pas à aller au-delà de leur vision prédominante des figures : la ligne, unité figurale de dimension 1, n'est pas perçue comme un ensemble de points.

IV - ETUDE DE L'IMPACT DE RESSOURCES SÉMIOTIQUES

Pour l'élève dyspraxique observé, c'est principalement le langage oral, en lien avec une aide gestuelle ou manipulatoire, qui l'a conduit à organiser et à réaliser ses actions pas à pas et de façon autonome. Nous développons ci-après l'impact de l'utilisation de gestes et celui de la manipulation d'instruments virtuels.

1 Aide gestuelle

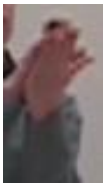
L'aide gestuelle intervient à différents niveaux. Certains gestes sont produits par l'enseignante et sont adressés à l'ensemble des élèves dans des phases de travail collectives. Nous avons pu en observer l'appropriation et l'exploitation par une partie de la classe, notamment pour ce qui est des gestes issus de la matérialisation de la symétrie axiale effectuée en début de séquence, à savoir le pliage. D'autres gestes, destinés directement à l'élève dyspraxique et proposés dans le cadre d'une relation duale avec l'enseignante ou avec l'AVS, se sont avérés être une aide compensatoire aux difficultés engendrées par la dyspraxie visuo-spatiale.

1.1 Gestuelle issue du pliage

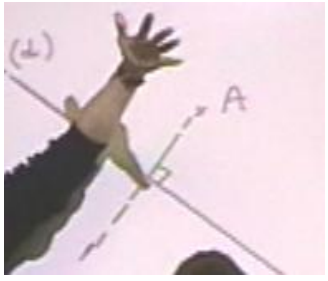
La notion de symétrie axiale a été introduite par l'enseignante à partir d'un travail expérimental, une activité de pliage, dans la continuité de ce qui est réalisé à l'école élémentaire.

Il s'agissait pour les élèves de décalquer « la cocotte », forme figurative représentée à côté d'une droite inclinée sur leur support papier, après avoir plié la feuille le long de la droite. L'enseignante amenait alors les élèves à faire des observations relatives à des propriétés géométriques de la configuration obtenue et à les vérifier avec leurs instruments. De la matérialisation de la symétrie axiale par le pliage ont émergé différents gestes avec les mains permettant d'évoquer cette manipulation, et, à travers elle, la transformation géométrique qu'elle représente. Cette évocation gestuelle s'est installée lors de la phase de synthèse qui a fait suite à l'activité de pliage.

Tout d'abord, à la superposition de figures symétriques placées de part et d'autre d'une droite, présentée par un mouvement réitéré de pliage-dépliage d'une feuille de papier, se substitue un mouvement analogue avec les mains : mains côte à côte, paumes vers le haut, puis l'une des deux se retourne et se pose sur l'autre.



C'est ce mouvement de la main qui est réalisé ensuite, paume posée sur une figure puis retournement autour de l'axe pour se poser dos sur la figure symétrique, sur les supports non pliables tels que tableau, cahiers d'élèves ou écran d'ordinateur. Ces gestes, réalisés au départ par l'enseignante en accompagnement de son discours, reproduits puis exploités par l'AVS auprès des élèves dyspraxiques, permettent de soutenir la représentation mentale de superposition de figures après retournement autour de l'axe.



La signification de ces gestes se construit pour chaque élève, de façon implicite et personnelle. Ces gestes apparaissent spontanément et ne sont pas institutionnalisés. Certains élèves les réinvestissent dans des situations de communication pour exprimer ce qu'ils ne parviennent pas encore à formuler dans un langage mathématique. Ces gestes, ou d'autres qui en dérivent, sont aussi utilisés dans la résolution de certains types de tâches de construction comme moyen d'anticiper ou de contrôler la position du symétrique d'un point ou d'un autre objet géométrique (segment, droite, cercle, …), ou comme aide à la reconnaissance d'axes de symétrie de figures.

Nous avons observé à différentes reprises l'efficacité de l'évocation verbale et gestuelle du pliage pour des élèves, dont l'élève dyspraxique. Elle s'est cependant révélée inopérante pour beaucoup lorsqu'il a fallu déterminer si une diagonale d'un rectangle était axe de symétrie ou non de ce rectangle : le recours au pliage effectif a été nécessaire pour aller contre les conceptions erronées des élèves.

1.2 Gestuelle en lien avec les objets, relations et propriétés géométriques

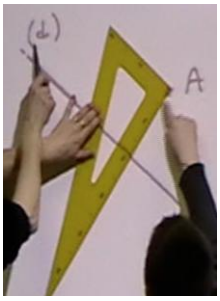
Certains gestes ont permis de focaliser l'attention de l'élève sur les objets géométriques à considérer dans les activités de construction qui lui étaient proposées :

- ***le geste de tracé***, consistant en un parcours avec l'index de l'objet, l'axe de symétrie par exemple ; souvent un va-et-vient est effectué sur l'objet, l'allongement de la durée du geste en favorise alors la perception ;
- ***le geste de pointage***, consistant à montrer avec l'index l'objet évoqué dans le discours, ce qui permet de le repérer plus facilement et limite les malentendus.

Ces gestes ont parfois pu être remplacés ou renforcés par une aide graphique, comme le surlignage au feutre fluorescent du point et de l'axe de symétrie à prendre en compte dans la construction, dans le cas d'une configuration qui présente des lignes et des points « parasites ». Ce type de support, source de difficulté importante pour l'élève dyspraxique visuo-spatial, résulte souvent d'un souci d'économie de place du concepteur de l'exercice qui met les figures de plusieurs énoncés sur une même feuille. (Voir Annexe).

Certains gestes, en collaboration avec le langage, sont destinés à permettre à l'élève **de construire des relations entre l'instrument, les objets mathématiques et la propriété géométrique mobilisée**. Nous l'illustrons par deux exemples.

Dans le premier épisode choisi, l'élève dyspraxique visuo-spatial est interrogé au tableau par l'enseignante lors d'une phase de rappel. Il présente à la classe la première étape de construction du symétrique d'un point isolé A par rapport à une droite (d), à l'aide de la grande équerre du tableau.



Il propose un positionnement de l'équerre erroné avec le sommet de l'angle droit sur A et un côté de l'angle droit visuellement perpendiculaire à la droite (d). Par un aller-retour avec l'index à partir du point A le long de ce côté de l'équerre, il montre le tracé qu'il souhaite effectuer, en le formulant par bribes en réponse à un questionnement de l'enseignante. Celle-ci reprend alors ce que l'élève a exprimé en accompagnant son discours de gestes qui mettent en évidence les objets géométriques à considérer :

> Enseignante : Il faut bien tracer la droite perpendiculaire à (d), *elle parcourt la droite (d) avec son crayon, passant par A // Elle pointe le point A*.

Elle établit ensuite le lien avec l'instrument :

> Enseignante : Bon, maintenant, pour tracer une perpendiculaire, il faut une équerre et il faut placer l'angle droit de l'équerre // e*lle effectue avec son crayon deux va et vient sur les côtés de l'angle droit de l'équerre,* où ?
>
> Elève : sur A
>
> Enseignante : sur A ? // *Elle parcourt l'angle droit de l'équerre.*
>
> Elève : sur la droite
>
> Enseignante : Ah, sur la droite. Est-ce qu'elle est sur la droite ? *Elle parcourt l'angle droit de l'équerre.*

Suite à cela, l'élève déplace l'équerre et la positionne de façon correcte. Ainsi, des gestes de tracé et de pointage ont contribué à la mise en relation des côtés de l'angle droit de l'équerre avec l'angle droit à obtenir à partir de l'axe de symétrie et du point considéré.

Notre deuxième exemple est issu des échanges entre l'AVS et l'élève dyspraxique visuo-spatial lors de phases d'apprentissage de la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre et au compas. Nous avons observé un type de gestes produit par l'AVS et déclencheur de la prise en compte par l'élève de la propriété d'égalité de longueurs dans ses constructions. Ce geste a émergé lors de la première construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite que les élèves devaient réaliser individuellement après qu'elle ait été présentée collectivement à la classe par l'enseignante.

AVS : Là, il faut qu'on ait la même distance // *Elle place son pouce sur le point M et son auriculaire sur son projeté orthogonal.*

de la droite // *Elle lève son pouce et appuie sur son auriculaire.*

au point // *Elle appui sur son pouce et lève son auriculaire.*

Elle décale ensuite sa main, pointe sur le projeté orthogonal de M puis sur l'emplacement du symétrique de M par rapport à la droite.

Dans les constructions qui suivront, ce geste, qui se présente dans sa forme la plus condensée par l'écart pouce-index de la main, va être évocateur pour l'élève du report de longueur à effectuer et de l'instrument à utiliser pour cela, à savoir le compas.

Au vu de ce qui précède, les gestes produits par l'enseignant, l'AVS ou les élèves, et associés au discours, semblent avoir eu un rôle déterminant pour permettre à l'élève dyspraxique visuo-spatial d'élaborer et de mobiliser des schèmes de construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite dans l'environnement Papier-Crayon. Voyons maintenant ce qu'il en est de l'utilisation d'instruments virtuels.

2 Manipulation d'instruments virtuels

A la fin de la séquence sur la symétrie, nous avons expérimenté la réalisation du type de tâches de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite dans un environnement numérique avec des instruments virtuels (crayon, équerre et compas) afin de dégager les conséquences d'une utilisation de cette ressource sur le comportement d'élèves faibles et sur leurs apprentissages.

Nous avons choisi de travailler avec Mathenpoche pour le confort visuel que cela présente pour l'utilisateur. L'emploi de couleurs et d'animations permet de guider le regard, la clarté dans la présentation donne une bonne lisibilité, ce qui est essentiel pour favoriser l'entrée de l'élève dyspraxique dans l'activité et ce qui n'est pas négligeable pour les autres non plus.

Nous avons observé l'élève dyspraxique visuo-spatial ainsi qu'un élève dyslexique, dans les quatre premières constructions de l'exercice 3 de la deuxième série d'exercices « Construction de points » du chapitre 5 « Symétrie axiale » du domaine de la géométrie en sixième dans Mathenpoche. La tâche de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite se complexifie graduellement avec l'orientation de l'axe : vertical (Q1), horizontal (Q2) puis oblique (Q3). Dans la quatrième construction (Q4), l'axe est également oblique mais un axe vertical « parasite » est présent. Après une prise en main du crayon, de l'équerre et du compas, les élèves ont démarré leur activité.

2.1 Vers l'activité

L'énoncé se présente sous la forme d'un texte écrit accompagné de la figure à compléter. Le texte, pour chacune des trois questions, est présenté ainsi :

Question N°1 :

Le point H est le symétrique du point F par rapport à l'axe (d) : place-le avec précision en te servant de l'équerre et du compas.

Tout d'abord, nous notons à travers la consigne une rupture avec le contrat didactique habituel de la classe : l'ostensif utilisé par l'enseignante pour nommer le symétrique d'un point – lettre correspondant au nom du point initial affecté du symbole « ' » n'apparaît pas ici (dans l'exemple, le symétrique de F aurait été nommé F'). Ensuite, de nos observations des élèves ressort le fait qu'aucun d'entre eux ne lit le texte de la question n°1 jusqu'au bout et de façon correcte :

- l'élève dyspraxique visuo-spatial ne voit pas ce qu'il faut faire ; l'enseignante lui demande de lire le texte, ce qu'il fait de façon approximative et manquant de fluidité ; elle lui relit la consigne, cela ne l'aide pas plus ; elle lui fait alors remarquer qu'en classe, ils ont nommé F' le point nommé ici H et reformule la tâche en utilisant F' ; l'élève comprend alors la tâche ;
- l'élève dyslexique ne lit le texte que partiellement à mi-voix « Le point H est le symétrique du point F », décide de sortir les outils disponibles en cliquant sur leurs icônes, puis relit en s'arrêtant au même endroit ; il voit le point F sur la figure mais pas le point H et reste bloqué ; l'enseignante intervient en lui demandant de lui lire le texte, ce qu'il fait dans une lecture non fluide qui ne l'empêche pas de comprendre alors la consigne : « Le point H, il est … ah oui, j'ai compris, faut que H il se retrouve là, en face, OK ».

Nous retrouvons des comportements déjà observés dans l'environnement Papier-Crayon, à savoir une lecture superficielle ou approximative des consignes. La présence de la figure et des outils disponibles permet de suggérer la tâche à réaliser. Cet exercice sur Mathenpoche a permis de mettre en évidence l'importance qu'a prise l'ostensif graphique « F' » pour l'élève dyspraxique sur la compréhension de l'expression « le symétrique de F ».

2.2 Genèse instrumentale

Nous présentons maintenant la genèse instrumentale relative à la construction instrumentée avec crayon, équerre et compas virtuels.

Dans l'approche instrumentale de Rabardel (Rabardel, 2005), un artefact, objet matériel ou symbolique, devient un instrument au cours d'un processus de genèse instrumentale, qui consiste en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact, résultant d'une construction propre du sujet ou de schèmes sociaux d'utilisation. De l'artefact à l'instrument, la genèse instrumentale consiste en un double processus d'évolution des relations « sujet – artefact » :

- ***l'instrumentalisation*** est relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes ; les diverses potentialités de l'artefact sont progressivement découvertes par le sujet, éventuellement transformées, voire « détournées » : l'usager adapte l'artefact à ses habitudes de travail ;
- ***l'instrumentation*** est relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche : les contraintes de l'artefact contribuent à structurer l'action de l'usager.

Les schèmes d'utilisation du crayon, de l'équerre et du compas ne sont pas analogues dans l'environnement numérique et dans l'environnement Papier-Crayon. En premier lieu, les outils virtuels sont manipulés par des commandes au clavier ou à la souris, ce qui libère l'élève de tâches praxiques telles le positionnement manuel et la tenue de la règle ou de l'équerre ou telle la manipulation du compas. Celle-ci en effet nécessite des aptitudes motrices importantes dans l'environnement Papier-Crayon lorsqu'il s'agit d'écarter les branches du compas, de le tenir par le haut en donnant une pression plus forte sur la pointe ou de mouvoir le poignet avec souplesse pour tracer un arc de cercle. L'allégement du coût de ces tâches rend l'élève dyspraxique plus disponible pour le repérage visuel et pour l'organisation de ses actions. Contribuent aussi à cela la fixité des outils en l'absence de commande ainsi que l'absence de gestion d'actions simultanées telles que tenir l'équerre et tracer le long ou tenir la règle et y faire coulisser l'équerre.

La zone de travail restreinte a l'avantage de focaliser l'attention sur la tâche à effectuer mais elle rend plus difficile le bon positionnement des instruments lorsqu'ils doivent en sortir (la copie d'écran présentée Figure 5 en est un exemple). En effet, il faut d'une part anticiper sur la partie qui restera visible pour pouvoir les manipuler et d'autre part une vision partielle peut perturber l'élève dans la suite des actions à effectuer.

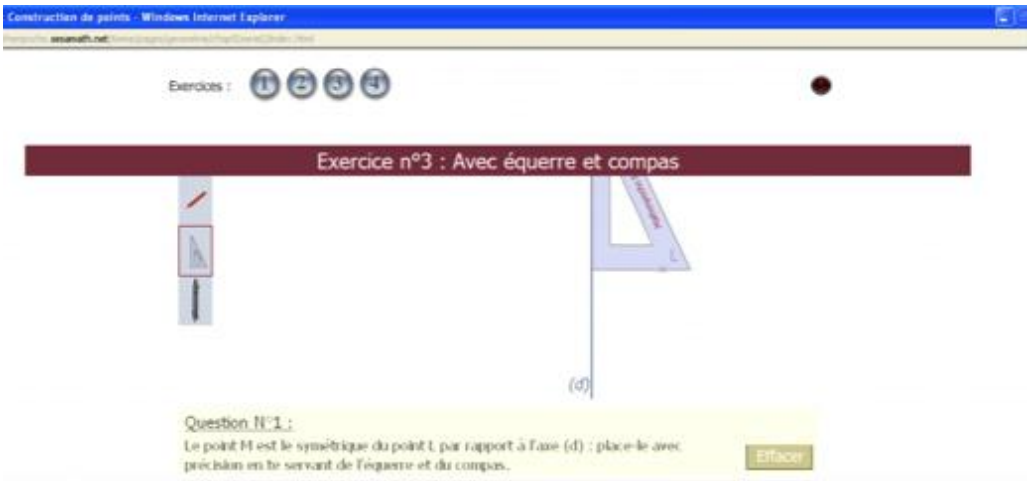


Figure 5.

En second lieu, un même outil peut avoir des caractéristiques qui diffèrent selon l'environnement, ce qui conduit à des phénomènes d'instrumentation et d'instrumentalisation. Nous allons illustrer cela à partir de nos observations du comportement des élèves.

Dans le tableau suivant sont exposés les schèmes élaborés par chacun des deux élèves dans l'environnement numérique au cours des trois premières questions des situations expérimentées.

Elève dyslexique	**Elève dyspraxique visuo-spatial**
- Sort l'équerre. - Tourne l'équerre jusqu'à la placer avec un côté de l'angle droit contre l'axe dans le demi- plan où se situe le point. - Déplace l'équerre pour amener l'autre côté de l'angle droit sur le point.	
- Prend la distance du point à l'axe avec le compas, le retourne et trace un arc de cercle.	- Trace un segment du point en allant le long de l'équerre puis en prolongeant de l'autre côté de l'axe (Voir Figure 7).
- Glisse l'équerre jusqu'à ce que le côté qui passe par le point intercepte l'arc (Voir Figure 6).	- Prend la distance du point à l'axe avec le compas, le glisse et trace un arc de cercle.
- Trace un segment le long de l'équerre du point jusqu'à plus loin que l'arc.	
- Place le point.	

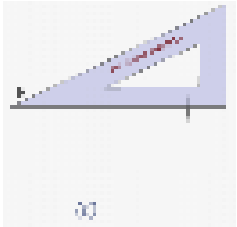


Figure 6.

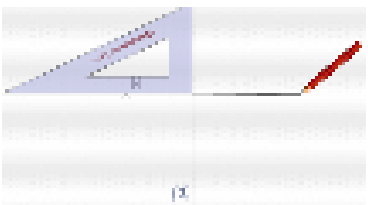


Figure 7.

Dans l'environnement Papier-Crayon, pour tracer le symétrique d'un point par rapport à un axe, les élèves ont le plus souvent utilisé la construction que nous avons décomposée en trois étapes.

Pour la première étape, les deux élèves ont réinvesti leur technique de placement de l'équerre. La deuxième étape, consistant à prolonger le segment [MP] pour obtenir une droite perpendiculaire à l'axe passant par le point M, n'est pas transposable dans l'environnement de Mathenpoche. En effet, il n'est possible de tracer avec le crayon qu'une ligne droite, si l'on en trace une seconde, la première s'efface automatiquement. L'action de l'usager doit donc s'adapter à cette contrainte.

Pour cela, l'élève dyslexique utilise la conservation de l'orientation de l'équerre lorsqu'on la glisse (Figure 6). Cette action n'est pas valide dans l'environnement Papier-Crayon car sans support pour coulisser, l'équerre peut tourner. L'élève dyspraxique utilise la possibilité donnée par le crayon de tracer un segment en donnant une extrémité (le point dont on veut le symétrique) et une direction (donnée par l'équerre), le prolongement pouvant être réalisé sans déplacement de l'équerre (Figure 7). Cette procédure n'est pas non plus transposable à l'environnement Papier-Crayon. Dans l'aide proposée par Mathenpoche, apparaissent les étapes explicitées Figure 8.

Positionnement de l'équerre *Positionnement de la règle* *Retrait de l'équerre et tracé*

Figure 8.

Au regard de cela, nous pourrions penser que les élèves observés instrumentalisent l'équerre ou le crayon pour tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point car la procédure de tracé proposée par les concepteurs est bien transposable dans l'environnement Papier-Crayon. Toutefois, cette procédure n'est pas réalisable avec les instruments proposés dans l'exercice 3 : équerre, compas et crayon.

2.3 De l'activité vers les rétroactions

Nous présentons maintenant la prise en compte de la réponse de l'élève et ses effets. Si l'élève place le point symétrique au bon endroit, l'affichage « BRAVO ! » apparaît et le compteur du score est mis à jour.

La position des instruments n'est pas vérifiée, seule celle du point symétrique l'est, et nous avons parfois observé une rétroaction validant une réponse obtenue par une méthode incorrecte. A sa première erreur, l'élève reçoit le conseil d'utiliser l'aide, si son deuxième essai est erroné, il est envoyé directement sur la première page de l'aide. Dans les deux cas, il est libre de la consulter ou non. Il obtient ensuite sa construction corrigée (symétrique placé avec codage de la perpendicularité et de l'égalité de longueurs) avant de passer à la question suivante.

Le contenu de l'aide est toujours le même, il s'agit de la présentation des étapes de construction, chacune étant décrite par un texte, une figure sur laquelle on visualise le positionnement dynamique des instruments et le codage des propriétés. Il arrive que l'aide ne soit pas adaptée à l'activité de l'élève, ne l'éclairant pas sur la nature de son erreur, comme par exemple le mauvais choix de l'axe dans Q4 pour l'élève dyspraxique.

Mises à part des difficultés de lecture du texte, dues entre autres à un manque de repères pour l'élève dyspraxique, et à certains écrits qui ne restent pas longtemps à l'écran, les élèves ne réussissent pas toujours à saisir de façon autonome les indications qui leur seraient utiles dans l'aide d'autant plus que certaines actions présentées ne sont pas en adéquation avec celles attendues dans l'exercice. Par exemple, les élèves n'ont pas la possibilité de coder leur figure au fur et à mesure des constructions. L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire pour permettre aux élèves de l'utiliser de façon efficace.

Nous constatons une instrumentation réussie avec Mathenpoche pour les deux élèves dans les trois premières constructions. Déjà performants dans des constructions de ce type dans l'environnement Papier-Crayon, ils n'ont pas eu de difficulté à élaborer des schèmes valides en s'adaptant aux contraintes de Mathenpoche. Au cours de la séquence, les progrès de l'élève dyslexique dans l'environnement Papier-Crayon ont été beaucoup plus rapides que ceux de l'élève dyspraxique qui a eu longtemps besoin d'aides procédurales et manipulatoires. L'élève dyspraxique a gagné en précision avec Mathenpoche, à noter que son temps moyen de

construction (1 min 56) pour Q1, Q2 et Q3 est meilleur que celui de l'élève dyslexique (3 min 04) : allégé du coût attentionnel existant pour lui dans l'environnement Papier-Crayon, il est plus disponible pour élaborer de façon autonome une démarche de construction avec Mathenpoche. Ceci est un atout indéniable d'un travail dans un environnement numérique pour un élève dyspraxique.

V - CONCLUSION

Dans la séquence d'enseignement observée, des difficultés propres à la dyspraxie visuo-spatiale sont apparues dans l'apprentissage du concept de symétrie axiale, que ce soit au niveau de la perception visuelle, de la manipulation des instruments ou de l'organisation d'actions à mettre en œuvre dans des activités de reconnaissance ou de construction. Tout cela n'a pas pour autant rendu totalement impossible tout apprentissage. A la fin de la séquence, l'élève dyspraxique visuo-spatial est capable de réaliser en autonomie une construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite une fois qu'il repère bien ces deux objets géométriques.

L'élève dyspraxique visuo-spatial a reçu une aide individualisée importante, il s'est approprié progressivement une technique de construction instrumentée grâce à une « séquentialisation » des actions à effectuer, donnée de façon orale et accompagnée d'évocations gestuelles.

Enfin, les quelques expérimentations réalisées avec Mathenpoche nous laissent penser que les constructions instrumentées dans un environnement numérique sont plus accessibles pour les élèves dyspraxiques. Reste à déterminer si les constructions avec des instruments virtuels peuvent se substituer à celles réalisées dans l'environnement Papier-Crayon pour conduire l'élève à des apprentissages géométriques.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 77-123.

Commission collège de l'APMEP-Lorraine (2002) Interrogations naïves mais sérieuses sur la symétrie. *Le Petit Vert*, Bulletin de la régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P, **71**.

DUVAL R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Chapitre IV Figures géométriques et discours mathématique. Berne : Peter Lang.

MAZEAU M. & CROUAIL A. (2009). Rééduquer dyscalculie et dyspraxie. Méthode pratique pour l'enseignement des mathématiques. Editions Masson.

MAZEAU M., LE LOSTEC C. (2010). L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires. Elsevier Masson.

RABARDEL P. (2005). *Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques*. Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement. Rabardel P. et Pastré P. (eds). Octarès :Toulouse.

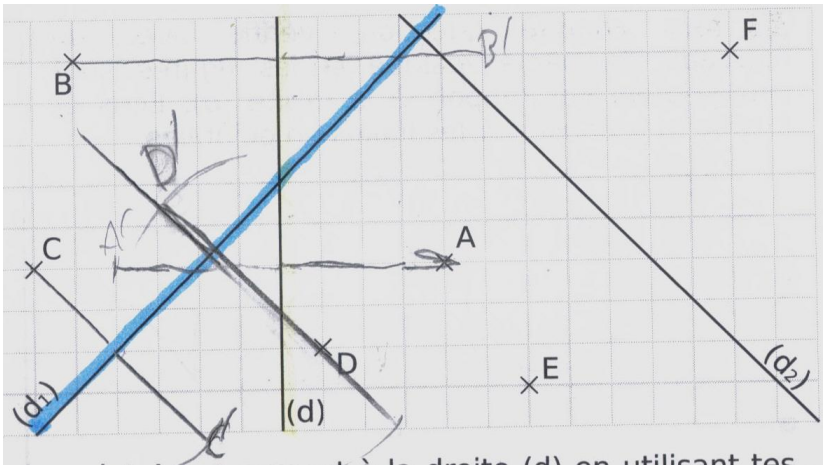
VII - ANNEXE

6 Sur la figure ci-contre,

a. construis les points A' et B' symétriques des points A et B par rapport à (d) ;

b. construis les points C' et D' symétriques des points C et D par rapport à (d_1) ;

c. construis les points E' et F' symétriques des points E et F par rapport à (d_2).



ÉTUDE D'UN DISPOSITIF ARTICULANT PRODUCTION DE RESSOURCES ET FORMATION CONTINUE EN GÉOMETRIE : QUELS EFFETS SUR LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS ?

Christine MANGIANTE-ORSOLA
MCF, Université d'Artois
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@espe-lnf.fr

Régis LECLERCQ
IEN 1er degré
regis-jules.leclercq@ac-lille.fr

Résumé
Notre travail prend appui sur un dispositif visant la production de ressources dans le cadre de séances de formation continue, mettant en place un suivi d'enseignants sur le moyen terme, afin de mieux comprendre comment ils s'approprient des situations directement produites ou inspirées par la recherche et d'identifier des aspects qui facilitent à la fois le processus d'appropriation et la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire. Dans cette contribution, nous décrirons le parcours d'une enseignante de CM1/CM2 participant au dispositif de formation. Après plusieurs rencontres de travail, elle nous présente une séance en classe à partir d'un document issu des travaux du groupe Géométrie de l'IUFM Nord Pas de Calais. Le bilan de cette séance soulève un certain nombre de questions à propos des apports possibles pour l'enseignante et amène à concevoir une situation alternative qui sera, à son tour, testée et analysée. Quels sont les éléments issus de la recherche à opérationnaliser dans le but de les adapter aux besoins des enseignants ? En quoi cette séance revêt un potentiel de formation plus important que la première et de façon plus générale aménage un "passage" entre les travaux du groupe Géométrie et les pratiques des enseignants suivis ? Nous conclurons en essayant de caractériser ce qui pourrait être désigné par une *situation pour la classe avec objectifs de formation*.

INTRODUCTION

Depuis plus de dix ans, prenant appui sur un petit groupe de professeurs des écoles, enseignants maître-formateurs, volontaires pour tester les activités, un groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais[1] produit des articles et propose des situations pour l'enseignement de la géométrie. Notre travail s'inscrit dans le cadre de ces recherches et les prolonge en interrogeant les possibilités de diffusion dans l'enseignement ordinaire des situations produites (Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian, même ouvrage). Dans cette perspective, nous avons conçu et mis en œuvre un dispositif de travail qui articule production de ressources et formation continue auprès d'un petit groupe de professeurs des écoles volontaires. Cette communication vise à étudier comment favoriser ce processus d'appropriation. Nous présenterons tout d'abord notre démarche puis nous analyserons la mise en œuvre d'une situation inspirée par la recherche par l'une des enseignantes impliquées dans le dispositif. Le bilan de la séance observée nous conduira alors à questionner les effets potentiels des ressources produites sur les pratiques des enseignants - pas seulement ceux qui participent à l'élaboration des ressources - et ouvrira des pistes pour l'optimisation des ressources produites. Il nous conduira à repenser la situation initialement produite par la recherche pour

[1] Ont participé à ce groupe J.R. Delplace, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin, B. Keskessa, R. Leclercq, C. Mangiante-Orsola, A.C. Mathé, B. Offre, M. J. Perrin, O. Verbaere.

proposer une *situation pour la classe avec objectifs pour la formation* dont nous proposerons une caractérisation.

I - PRESENTATION GENERALE DE LA RECHERCHE

1 Nos questions initiales

Lorsque nous avons rejoint le groupe en 2008, les chercheurs faisaient le constat que les situations produites par la recherche étaient accueillies favorablement par les enseignants en raison de leur caractère innovant et du manque d'exemples de résolution de problèmes durant les séances d'apprentissage en géométrie, mais chacun s'accordait à dire que ces situations impactaient peu les pratiques habituelles.

Suite à ce constat, nous avons décidé de chercher à mieux comprendre comment les enseignants s'approprient ou non des situations plus ou moins directement issues de la recherche et d'interroger les leviers sur lesquels agir pour améliorer cette appropriation. Notre problématique s'inscrit donc dans un questionnement plus large, celui portant sur la diffusion de résultats de recherche dans l'enseignement ordinaire. Pour aborder cette question, nous faisons le choix d'étudier un dispositif de formation continue visant la production de ressources pour les enseignants.

Ce dispositif, de deux fois neuf heures, a été élaboré et déployé, dans une circonscription du premier degré, sur deux années consécutives. Au cours de la première année, une conférence plénière rassemblant tous les enseignants de cycle 2 et de cycle 3 a permis de présenter des ressources issues de la recherche. Une petite dizaine d'enseignants volontaires (non titulaires du CAFIPEMF [2]) a ensuite choisi de travailler avec nous, pour élaborer et présenter les ressources produites aux autres enseignants de la circonscription dans le cadre d'un « forum des pratiques[3] ». De nombreux allers-retours entre ces enseignants volontaires et les formateurs (conseillers pédagogiques, conseiller TUIC, nous-mêmes) furent mis en place entre les moments de conception et les usages réalisés en classe. En tant que formateurs, nous faisons l'hypothèse que ce travail collaboratif, parce qu'il laisse une certaine marge de manœuvre[4] aux enseignants et les implique dans la production de ressources, est susceptible de favoriser l'appropriation des situations plus ou moins directement issues de la recherche. En tant que chercheurs, nous faisons l'hypothèse que l'étude de ce dispositif nous donne accès aux conditions d'appropriation par les enseignants de situations inspirées par la recherche. Notre intention est d'étudier ces conditions dans le but d'optimiser les ressources produites.

2 Précisions à propos de notre démarche et des cadres théoriques mobilisés

La théorie des situations de Brousseau (Brousseau, 1998) et les registres des représentations sémiotiques de Duval constituent les principaux appuis théoriques à partir desquels ont été conçues les situations produites par le groupe puis testées dans des classes. Toutefois, notre questionnement porte davantage sur la façon dont les enseignants s'approprient ces situations. C'est pourquoi, nous faisons également appel à la double approche des pratiques (Robert, Rogalski, 2002) et plus précisément à un modèle mis au point dans une recherche antérieure qui nous permet d'analyser l'activité du maître en termes de processus de modifications (Mangiante-Orsola, 2012). Ce modèle distingue trois niveaux : la représentation de la tâche, la redéfinition de la tâche et la réalisation de la tâche, comme l'explicite le schéma ci-dessous (figure n°1) :

[2] Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou Professeur des Ecoles Maître Formateur

[3] L'objectif de ce forum est d'échanger autour d'expériences d'enseignement s'appuyant sur des modules de formation continue, durant lesquels des documents ont été produits (progressions, fiche de préparation de séances, activités pour les élèves, etc.) puis mis en commun via le site de la circonscription.

[4] Nous veillerons à ne pas proposer aux enseignants des situations « clés en mains ».

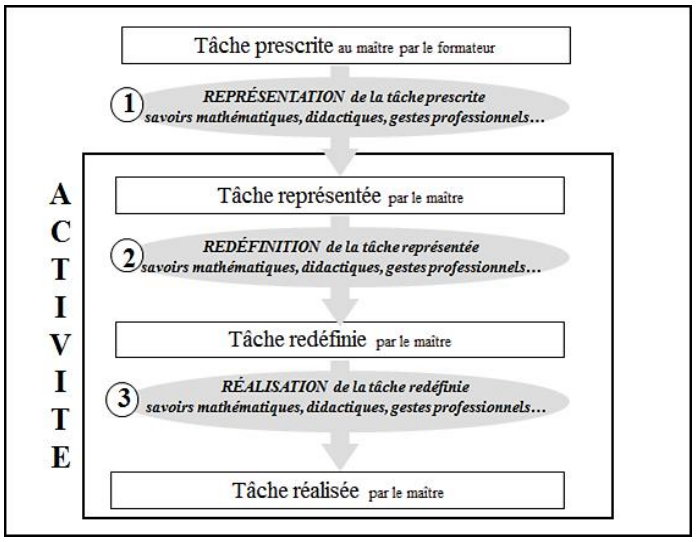


Figure n°1

En amont de l'activité de l'agent, figurent la tâche à réaliser (ce que celui qui a conçu ou qui gère la tâche attend de celui qui va la réaliser) et la tâche prescrite (qui est une formulation de la tâche à réaliser à l'intention de celui qui doit l'exécuter). Analyser l'activité de l'agent à partir de la tâche prescrite consiste à « se demander comment l'agent répond à cette tâche, comment il la transforme, éventuellement, en fonction de ses caractéristiques et de ses propres finalités. » (Leplat 1992, p.24). Selon Leplat, la première des tâches à envisager est la tâche représentée par l'agent. Elle correspond à la question : « Qu'est-ce que vous croyez qu'on attend de vous ? » et dépend, bien entendu, de la tâche prescrite mais aussi du niveau d'expertise de l'agent, de sa connaissance du contexte de travail et de son histoire personnelle. La deuxième de ces tâches est la tâche redéfinie. Elle apparaît comme le résultat d'un compromis entre deux finalités. En effet, l'agent, qui ne peut être considéré comme un simple exécutant, va non seulement chercher à découvrir, à partir de la tâche représentée, la procédure susceptible de lui permettre d'exécuter la tâche telle qu'il se la représente mais il va aussi tenir compte de ses propres caractéristiques, des objectifs qu'il vise à travers l'exécution de cette tâche. Enfin, au cours du travail, la tâche redéfinie s'actualisera pour coller au plus près du contexte et deviendra tâche réalisée à la fin de l'activité.

Nous allons à présent étudier une situation qui n'a pas été directement produite par la recherche mais qui s'en inspire fortement. Elle a été utilisée par une enseignante dans le cadre de notre dispositif et nous allons utiliser le modèle que nous venons de présenter pour analyser les écarts entre le projet initial (la situation issue de la recherche) et sa mise en œuvre. Quelles sont les origines de ces écarts ? En quoi ces écarts sont-ils révélateurs des difficultés de diffusion de cette situation dans l'enseignement ordinaire ?

II - UNE SITUATION DIRECTEMENT INSPIREE PAR LA RECHERCHE

1 Analyse a priori de la situation

Mme S. a un cours double CM1/CM2. C'est une enseignante reconnue par l'institution puisqu'inscrite sur la liste des MAT[5]. Mme S. propose très régulièrement des activités de géométrie à ses élèves. Elle a participé à toutes les séances de formation et a déjà testé avec sa classe certaines situations proposées par les formateurs. Au cours de la deuxième année du dispositif de formation, elle accepte de nous recevoir dans sa classe et nous présente, pour mettre en pratique les acquis de formation, une activité de restauration de figure conçue à partir d'un document traitant de ce sujet, élaboré par C. Reydy et téléchargeable en ligne à l'époque[6].

[5] Maître d'Accueil Temporaire, enseignant accueillant dans sa classe des étudiants en formation initiale.

[6] http://c.reydy.free.fr/jeux-maths-Bazas/Jeux-maths-C3-CReydy/Restauration-de-figures.pdf.

Le travail du groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie vise à proposer une progression de l'enseignement de la géométrie tenant compte du développement des élèves. Comme le soulignent Godin et Duval en introduction d'un article *« le rapport des élèves aux figures est l'un des points clés de leur entrée dans la géométrie »* (Duval, Godin, 2006). Il s'agit donc pour le groupe de proposer des situations tenant compte de ce rapport aux figures, à savoir la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir et de favoriser la déconstruction dimensionnelle. Cela conduit à donner la priorité aux figures 2D (les surfaces) par rapport aux figures 1D (les lignes), à inverser l'approche et l'introduction répandues dans les pratiques ordinaires des concepts de base de la géométrie et de leurs relations. Duval et Godin proposent de travailler sur des situations de restauration (réparation) de figure définie de la manière suivante : une réparation[7] de figure est une reproduction de figure respectant des conditions particulières : une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non) ; une partie de la figure à obtenir (appelée amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument permettant de reporter des informations 2D[8] de la figure initiale mais sans donner toute l'information ; on dispose d'instruments variés ayant un coût d'utilisation ; la vérification du résultat obtenu s'effectue à l'aide d'un transparent portant la figure modèle.

Le milieu - au sens de la théorie des situations didactiques - contient la figure modèle sur papier (on peut écrire sur le modèle), l'amorce sur une autre partie de la feuille ou sur une autre feuille, les instruments et leur coût. L'usage des instruments, la variation de ceux-ci constituent des variables didactiques essentielles que les enseignants ne prennent pas souvent en compte. Ce choix d'instruments est corrélé à une règle de coût qui permet à la fois l'autonomie de l'élève et l'observation de ses procédures. Tous les instruments utiles sont en effet laissés à sa disposition pour que celui-ci puisse réussir avec ses connaissances anciennes ; le coût sur les instruments l'incite à chercher d'autres procédures l'amenant à construire des connaissances nouvelles, en changeant de regard sur la figure. Comme pour toute situation de restauration de figure, la tâche de l'élève est d'une part d'analyser la figure modèle, d'autre part d'identifier l'amorce comme une sous figure de la figure modèle, d'utiliser une procédure de réparation à moindre coût, sous la contrainte d'un coût sur les instruments, supposant ainsi de s'appuyer sur les propriétés de la figure en faisant appel à une vision mathématisée de la figure.

La situation choisie par Mme S. s'inscrit dans ces travaux : il s'agit d'une situation de réparation très proche de celle présentée durant la formation-animation à l'ensemble des autres enseignants de la circonscription. Apportons néanmoins une remarque tenant au choix de la figure que Mme S propose à ces élèves (figure n°2) : celle-ci issue du document mis en ligne par C. Reydy contient un alignement de moins que la figure proposée initialement par les chercheurs (figure n°3)[9]. Ce choix conduit alors à moins de sollicitations en terme de prolongement mais davantage en terme de reports de longueurs, sachant qu'un report de longueur peut nécessiter l'usage de deux instruments différents. Les outils à disposition -notamment la réglette informable qui permet de matérialiser une longueur à reporter – sont précisés avec la règle de coût.

[7] Nous préférons le terme « réparation » car nous le considérons d'une utilisation plus facile en classe. C'est un terme utilisable par les élèves.

[8] Au sens de Duval

[9] C'est pourquoi nous ne pouvons pas considérer que cette situation est celle produite par le groupe de recherche. Toutefois, elle s'en inspire directement.

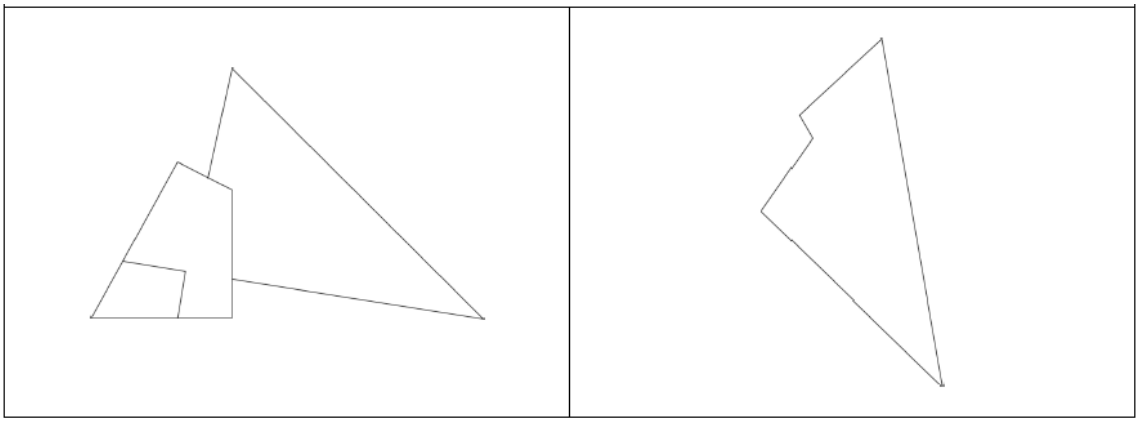
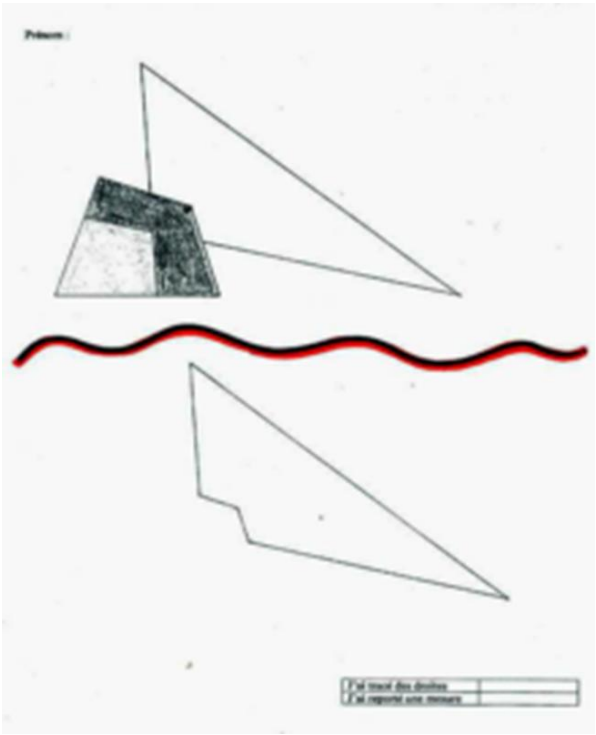


Figure n°2 : figure choisie par Mme S



A disposition des élèves : une réglette non graduée dite « informable », une réglette non graduée (plastifiée) permettant de tracer des droites.

Les règles de coût : 0 point pour le tracé d'une droite sur la figure modèle ou l'analyse de la figure, via l'utilisation de la réglette « informable » ; 1 point pour le tracé d'une droite, avec la réglette plastifiée, pour compléter l'amorce ; 3 points pour un report de longueur

Figure n°3 : figure utilisée dans la situation produite par la recherche

2 Analyse de l'activité de l'enseignante

Nous allons à présent utiliser notre modèle d'analyse de l'activité du maître pour tenter d'élucider les écarts crées entre le projet et sa mise en œuvre, écarts ressentis « à chaud » par Mme S. qui, interrogée à la fin de la séance, confiait s'être sentie mal à l'aise face aux réalisations non abouties des élèves. Au travers de notre modèle, nous allons tenter de mieux comprendre les difficultés auxquelles Mme S. a été confrontée : sont-elles dues au niveau des élèves ? Sont-elles imputables à l'enseignante elle-même, à un déficit de formation, à la situation elle-même, …?

Pour trouver des éléments de réponses à ces questions, nous commencerons par présenter la tâche prescrite à l'enseignante, son projet (tel que nous pouvons l'appréhender à travers de la fiche de préparation) puis la séance observée en classe.

2.1 Analyse de la tâche prescrite à l'enseignant

La tâche prescrite peut être analysée via l'action de formation-animation que nous avons conduite avec un groupe étoffé d'enseignants au cours de laquelle nous avions proposé un exemple de

situation sans prescription à propos de la mise en œuvre pour la classe. Après avoir présenté les idées clés développées par le groupe de recherche, nous avons proposé un travail en atelier durant lequel chacun des enseignants a pu, d'une part se confronter à des situations de restauration de figure dédiées aux cycles 2 et 3, d'autre part a pu entamer une réflexion sur les actions sur le matériel en lien avec les gestes et les concepts de géométrie.

2.2 Analyse du projet de Mme S.

La fiche de préparation de Mme S. fait apparaître clairement une déclinaison d'objectifs en termes de compétences – comme par exemple *« être capable de restaurer une figure en reconnaissant l'amorce comme une sous-figure de la figure initiale ; être capable de percevoir les alignements, de prolonger des lignes droites pour découvrir les points d'intersection »*. Des objectifs méthodologiques sont aussi proposés : *« savoir prolonger des droites, savoir utiliser les bons outils pour restaurer au moindre coût »*. Remarquons d'ores et déjà que si Mme S. a perçu les enjeux de la situation, elle ne semble pas avoir compris que le choix d'un bon outil n'est pas une fin en soi. L'analyse de la tâche attendue (par Mme S. de la part de l'élève) – comme par exemple, lire la consigne et comprendre le tableau de barème, analyser la figure modèle, la figure « amorce », gérer les différences entre la figure modèle et la figure « amorce », dénommer les points des figures, produire puis lire un programme de construction – suppose de la part de l'élève de déconstruire la figure en utilisant un jeu sur les instruments, de développer des connaissances géométriques en lien avec l'usage d'instruments dont l'utilisation est moins immédiate et enfin de gérer simultanément la construction, l'écriture du programme de construction et la mise à jour du coût.

2.3 Analyse des extraits vidéo de la séance observée

La fiche de préparation de Mme S. prévoit un déroulement sous la forme de quatre phases (terminologie employée par l'enseignante). Précisons que Mme S. n'a pas envisagé de découpage de ces phases en sous-phases sauf pour la phase 3. Notre découpage en épisodes suit celui réalisé par l'enseignante mais nous identifions davantage de sous-épisodes.

Le premier épisode, découpé en deux sous-épisodes, est d'une part consacré à la lecture à voix haute par des élèves de la consigne et du tableau de barème et à l'explicitation de la règle de coût d'autre part. Au cours du premier sous-épisode, Mme S. insiste sur la définition de l'expression «*compléter la figure*» : «*Avec vos mots à vous, qu'est-ce que vous allez devoir faire ?*». Diverses réponses d'élèves surgissent : *« reproduire la figure ; compléter la figure (l'élève reprend l'énoncé) ; on va devoir refaire une petite partie de la figure ; reconstituer une partie de la figure, un morceau de la figure, la partie manquante »*. Mme S. conclut en disant : *« on va l'achever, on va la terminer. »*. Elle perçoit les enjeux liés à la différence entre les verbes « reproduire » et « restaurer », tente de les expliciter en s'appuyant sur le document de formation mis au point par C. Reydy. Remarquons que celui-ci est un document de formation par conséquent destiné à des enseignants et non à des élèves. Mme S., qui a compris la distinction entre « restauration » et « reproduction », cherche un vocabulaire adapté. Durant le second sous-épisode permettant l'explicitation du coût, l'enseignante a affiché les instruments. Les commentaires sur les outils permettent de dégager que la règle non graduée est utilisée pour « tracer », la règle en papier est requise selon les élèves pour faire des reports de longueurs : *« on va faire des petits traits à la longueur. »*, *« on va faire des reports de longueur. »*, *« on va reproduire des longueurs, des mesures. »*. Mais nous remarquons sur l'affichage proposé une modification apportée par l'enseignante par rapport à la situation du document rédigé par C. Reydy (et a fortiori la situation initiale). Le coût est donné en fonction des instruments et non plus en fonction du geste mis en œuvre (par exemple, « report de longueur avec la règle de papier » remplace « report de longueur » levant ainsi les ambiguïtés possibles puisqu'en effet, le report de longueur peut nécessiter l'usage de deux instruments : la règle non graduée et la règle informable). Mme S. insiste sur le verbe « reporter ». Un élève indique qu'on a *« le droit de faire des petits traits »* sur la règle en papier. L'enseignante ajoute qu'on a le droit d'écrire dessus. Pour la règle graduée, l'enseignante précise qu'on mesure. Elle précise *« Elle coûte 700 euros, est-ce qu'il faut l'utiliser souvent ? »*. Un élève précise *« qu'on va dépenser trop de sous »*. L'enseignante rajoute *« qu'on essaye de*

ne pas l'utiliser souvent! ». En ce sens, nous sentons poindre la volonté de l'enseignante de guider les élèves, de ne pas les laisser s'engager dans diverses procédures. Ceci sera confirmé par la suite.

Le second épisode est dédié à l'analyse et l'observation à la fois de la figure modèle et de l'amorce. Un affichage des deux figures est réalisé au tableau sur un grand support uni. Mme S. a pour objectif de faire retrouver l'amorce dans la figure initiale (comme sous-figure initiale) *: « On a dit qu'il fallait finir la figure. Qu'est-ce que vous pouvez dire de ce morceau-là ?* ». Un élève répond « *Il en manque une partie.* ». L'enseignante relance en précisant : *«Observer, regarder, est-ce que vous voyez ce morceau-là dans la figure ?*». Des élèves fournissent les réponses suivantes : *« Non, il va falloir tourner la feuille! », « Elle est à l'envers, celle de droite. », « Ben ce n'est pas un triangle. », « Elle est retournée ».* C'est bien entendu l'orientation de l'amorce qui suggère ce type de réponses. Mme S. rajoute : *« Si, ce morceau-là est bien dedans, je ne l'ai pas inventé. », « On dit qu'on l'a bougé, on dit qu'on l'a orienté différemment.»* ou encore *: « On va déjà essayer parce que je pense que certains pensent que ce morceau-là n'est pas dedans, de repérer cette figure dans celle-ci, qu'est-ce qu'on pourrait faire pour essayer de repérer ? ».* Les réponses fournies par les élèves sont : « *Avec la règle. On va mesurer* », « *On va faire des tracements avec la règle non graduée.* ». Comme ces deux réponses ne font pas avancer vers l'attendu de l'enseignante, elle pose la question : *« Je ne veux pas qu'on la reproduise, je veux juste qu'on repère, ce morceau est où ? ».* Un élève précise : « *Avec notre feuille, on va faire des petits traits pour repérer et après… (Il manipule la règle qui sert de report de longueur, passe de la figure à l'amorce)* ». Mais Mme S. qui n'observe pas suffisamment les gestes de cet élève lui répond « Non »! Un élève rajoute : « *On pourrait retourner la figure et la comparer avec la première.* ». Il vient au tableau et oriente différemment la figure. Mais Mme S. indique « *On pourrait faire cela, mais comme sur la feuille on ne peut pas bouger!* ». Elle finit par conclure par la phrase « *On va utiliser les crayons de couleur, tout simplement* ». Les élèves sont invités à colorier les segments homologues sur l'amorce et sur la figure initiale avec un code couleur précis. La procédure attendue, qui consiste à repérer les segments dans la figure, n'émerge finalement pas. C'est l'enseignante qui l'impose.

Le troisième épisode permet de distinguer la mise en œuvre d'une procédure pour restaurer la figure en dépensant le moins d'argent possible. Il est découpé en deux sous-épisodes qui coïncident avec le déroulement en « sous-phases » envisagé par Mme S. Le premier identifie un travail collectif durant lequel l'enseignante conduit au tableau la recherche d'alignements et de points d'intersection. Mme S. désigne les points présents sur l'amorce puis indique ce qu'il faut rechercher, à savoir trouver les points alignés et les points d'intersection. Certains alignements à partir des points A, L, K, B, I, J et C sont indiqués. La consigne est redite par Mme S. : « *Chaque fois qu'il y a tracé, le noter et écrire son prix* ». Le second sous-épisode couvre le temps de recherche individuel permettant à chacun des élèves de s'exercer à la restauration. Nos observationsont permis de constater combien il est difficile pour les élèves de mener en parallèle la réalisation des tracés, la rédaction du programme de construction et le calcul du coût des instruments. L'observation de la procédure d'un élève -enregistrée sur la vidéo- montre que celui-ci construit en effet plusieurs points sans avoir pris le temps ou ressenti la nécessité de rédiger pas à pas le programme de construction. De plus des problèmes de précision sont soulevés. Sur un autre extrait, des points à « reporter » sont en effet placés de manière approximative puisque les segments supports permettant clairement de les identifier ne sont pas tracés.

Un quatrième épisode est consacré à la correction. La « compétence spécifique » définie par l'enseignante est d'être capable d'exposer sa stratégie. Il est prévu que l'élève qui aura le moins dépensé expose sa manière de faire. Au vu des observations réalisées par Mme S -à partir des productions- et des difficultés exprimées par les élèves, elle omet volontairement ce travail de confrontation et distribue le programme de construction donné dans le document de C. Reydy. Au fur et à mesure qu'un élève montre et réalise les tracés sur le grand support affiché au tableau, les autres élèves doivent réaliser les tracés sur la feuille qui leur a aussi servi durant la recherche individuelle. Nous remarquons que c'est l'outil « règle graduée jaune » classique qui est utilisée pour restaurer la figure affichée au tableau alors que nous faisons le choix de ne pas recourir à la mesure de grandeurs. De plus certains élèves ne parviennent pas à suivre tous les tracés. Enfin l'identification de la figure, une fois les tracés réalisés, pose également souci. En effet, les tracés

successifs pour relier les points et ainsi dessiner la figure obligent à des allers-retours entre l'amorce et la figure initiale et donc d'identifier les droites, segments et points « homologues » dans cette correspondance, ce qui n'est pas facile pour quelques élèves. Cette phase collective permet néanmoins d'introduire du vocabulaire spécifique comme le point d'intersection de deux droites.

2.4 Analyse en termes de modifications de la tâche prescrite.

S'appuyant sur le modèle d'analyse développée en I.2, nos observations permettent de préciser les écarts tant au niveau de la représentation que de la redéfinition et la réalisation de la tâche pour à terme en déduire des informations à propos du processus d'appropriation de cette situation par Mme S.

Commençons par analyser la réalisation de la tâche, c'est-à-dire les écarts entre la tâche redéfinie telle que nous pouvons l'appréhender au travers notamment de la fiche de préparation et la tâche réalisée. Mme S. a des ressentis négatifs à l'issue de la séance : elle n'est pas satisfaite et se dit déçue car la séance vécue ne correspond pas à ce qu'elle espérait. Notre analyse vient confirmer les décalages ressentis. Non seulement Mme S. n'a pu obtenir de ses élèves la rédaction d'un programme de construction mais de plus ces derniers ont été en difficulté dès la restauration de figure. Peu maîtrisent le prélèvement d'informations sur la figure modèle et beaucoup ne parviennent pas à organiser leur travail du choix de l'instrument jusqu'au décompte du coût. De plus, Mme S. éprouve des difficultés à prélever des informations sur l'activité des élèves, à réguler l'avancée du travail et par voie de conséquence à faire évoluer les procédures au moment de la mise en commun. Les origines de ces écarts prennent source à la fois dans la situation elle-même et dans les objectifs fixés trop ambitieux. En effet, non seulement la mise en œuvre de ce type de situation nécessite de la part de l'enseignante la capacité d'analyser les procédures mises en œuvre par les élèves pour ensuite les faire évoluer mais en plus, Mme S. cherche à aller au-delà alors qu'il est très difficile d'amener des élèves non initiés à la restauration de figures. Nous pouvons raisonnablement nous interroger sur de la manière dont elle se représente la tâche qui lui a été prescrite et la manière dont elle l'a redéfinie.

Considérant que la tâche prescrite correspond principalement ici à l'ensemble des injonctions issues de la formation suivie et des ressources utilisées, nous pouvons affirmer, grâce à l'entretien mené avec Mme S juste après la séance, que celle-ci a saisi les principaux enjeux de ce type de situations. Cette absence d'écarts importants peut s'expliquer par le fait que Mme S participe activement au module de formation proposé. Signalons, toutefois, quelques écarts entre la tâche prescrite et la tâche représentée. Tout d'abord, comme l'atteste la fiche de préparation, Mme S n'a pas saisi que la rédaction d'un programme de construction n'était pas une nécessité. Nous pouvons supposer que cet écart est dû à l'interprétation qu'elle fait du document de C. Reydy. Ensuite, nous remarquons qu'elle a prévu dans sa fiche de préparation un tableau de deux colonnes, « j'observe », « je trace », dont le but avoué (au cours de l'entretien) est d'aider les élèves à organiser leur réflexion (prise en charge par anticipation des difficultés des élèves). Manifestement, elle n'avait pas perçu que le tableau prévu ne serait pas une aide. Mais pouvons-nous vraiment affirmer que ces deux écarts majeurs avec la situation initiale (celle décrite dans le document de C. Reydy) soit uniquement le fait d'interprétations non pertinentes de la part de Mme S. Nous devons analyser les écarts créés entre la tâche représentée et la tâche réalisée.

Comme l'explique Leplat, l'agent, qui ne peut être considéré comme un simple exécutant, va chercher à découvrir la procédure susceptible de lui permettre d'exécuter la tâche telle qu'il se la représente mais il va aussi tenir compte de ses propres caractéristiques, des objectifs qu'il vise à travers l'exécution de cette tâche. Ici de nombreux éléments tendent à montrer que c'est au niveau de la réalisation de la tâche que le processus de modifications a été principalement initié : dès la rédaction de la fiche de préparation, cherchant à minimiser la prise de risques, Mme S. modifie le projet initial en fonction de l'idée qu'elle se fait de ses compétences et de celles de ses élèves. Parmi les écarts introduits par l'enseignante, citons tout d'abord le déroulement de la séance qui prévoit une analyse collective de la figure à restaurer, au cours de laquelle elle conduit une phase dédiée à la monstration des alignements et qui par voie de conséquence modifie la tâche de l'élève en la

simplifiant grandement. Une autre modification importante apportée au projet initial est la mise à disposition des élèves du tableau « j'observe »-« je trace » destiné là encore à aider les élèves en prenant en charge (du moins du point de vue de Mme S.) le lien entre chaque propriété de la figure à identifier et une action à réaliser. A travers l'affichage elle tente encore de simplifier le travail de l'élève en clarifiant les règles de calcul : à un instrument est associé un coût, grâce à l'affichage des instruments. Notons toutefois que son intention d'amener les élèves jusqu'à la rédaction d'un programme de construction échappe à ce raisonnement et que ce choix est probablement dû en partie à son interprétation du document qui va de plus dans le sens des attentes des programmes. La correction est elle-même très directive.

Pour conclure, la mise en œuvre de cette situation qui synthétise une grande partie des travaux du groupe de recherche, à savoir la restauration de figure, le jeu sur les instruments et le langage sous-jacent, se révèle une tâche complexe pour l'enseignante, de sa représentation à sa réalisation. De plus son adaptation au niveau des élèves est laissée à sa charge.

III - UNE SITUATION POUR LA CLASSE AVEC OBJECTIFS DE FORMATION

1 Conception d'une nouvelle ressource pour les enseignants

Si le bilan de la séance menée par Mme S. semble peu encourageant quant aux possibilités de diffusion de situations de restauration dans l'enseignement ordinaire, son analyse nous ouvre toutefois des pistes pour l'élaboration d'une nouvelle ressource pour les enseignants. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'une étude préalable de l'activité du maître en termes de niveaux (représentation-redéfinition-réalisation de la tâche) constitue une aide à la conception de situations plus adaptées à l'enseignement ordinaire. Cette partie vise à mettre à l'épreuve cette hypothèse par l'analyse d'une nouvelle ressource conçue dans le cadre de notre dispositif de travail.

Nous référant à la conclusion de la partie précédente, nous retenons que les principaux écarts constatés entre nos attentes[10] et la séance menée par Mme S. trouvent leur origine dans la redéfinition de la tâche et sont initiés par anticipation de la réalisation de la tâche. En effet, c'est parce qu'elle a conscience des difficultés de mise en œuvre de cette situation que l'enseignante fait le choix de les limiter en prévoyant un guidage fort du travail des élèves. Ainsi l'étude de la séance observée chez Mme S. complétée par l'analyse a priori de la situation nous conduisent à souligner le niveau de complexité de la mise en œuvre du projet tel que prévu initialement et la nécessité de faciliter le travail de l'enseignant.

En outre, dans la perspective d'une diffusion plus large de cette ressource, via le site de la circonscription, nous devons veiller à clarifier nos choix pour espérer que ceux-ci soient compris même de la part d'enseignants n'ayant pas participé à la formation (et ainsi limiter les écarts créés au niveau de la représentation de la tâche).

Ainsi, pour réduire les décalages entre le projet des formateurs/chercheurs et la séance effective, nous cherchons à améliorer la lisibilité de la démarche tout en facilitant la mise en œuvre de la situation. Nous faisons ainsi l'hypothèse que cela permettra non seulement de limiter les écarts au niveau de la représentation et de la réalisation de la tâche mais que de plus l'enseignant étant plus en confiance, il sera moins tenté de s'écarter du projet initial via la redéfinition de la tâche.

Dans cette perspective, nous faisons le choix de concevoir des *situations pour la classe avec objectifs de formation*, c'est-à-dire des situations permettant à l'enseignant de mieux comprendre les enjeux de notre démarche et les choix qui sous-tendent les situations proposées. Pour cela, nous cherchons à concevoir des situations relativement faciles à mettre en œuvre et donnant la possibilité à l'enseignant d'être suffisamment en retrait pour observer les procédures de ses élèves.

[10] En tant que formateurs et chercheurs participant au groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie.

L'une des conséquences de ce choix est que nous ne pouvons proposer une seule et même séance pour introduire la restauration de figure, le jeu sur les instruments avec instauration d'un coût, la nécessité d'articuler action sur le matériel et concepts géométriques…etc…Nous préférons concevoir plusieurs situations visant une intégration progressive d'éléments nouveaux dans les pratiques. La séquence ainsi conçue est constituée de quatre situations de restauration présentant chacune un objectif spécifique de formation.

La première situation est une situation de restauration avec gabarits. Son objectif d'apprentissage est la prise en compte par les élèves de propriétés de la figure à restaurer (il s'agit ici d'alignements) et son objectif de formation consiste à donner la possibilité aux enseignants d'observer comment une situation de restauration jouant sur les instruments[11] mis à disposition peut amener les élèves à exercer leur regard sur une figure jusqu'à en découvrir les propriétés à utiliser pour la restaurer.

La deuxième situation permet de réinvestir le travail effectué au cours de la première situation tout en introduisant un premier jeu sur les instruments que l'enseignant devra gérer. La figure modèle est différente de la précédente mais possède les mêmes propriétés (deux côtés des triangles sont portés par les diagonales du quadrilatère-cadre). La tâche de l'élève consiste là encore à restaurer la figure mais il lui est de plus demandé de choisir parmi plusieurs instruments possibles. L'objectif visé pour la formation est d'amener l'enseignant à faire formuler par les élèves les procédures mises en œuvre pour ainsi commencer à utiliser l'activité des élèves pour mettre en lien, via le langage, actions sur le matériel et concepts géométriques.

La troisième situation permet de franchir une étape supplémentaire. La figure choisie peut être restaurée selon deux types de procédures (soit grâce à un report d'angle droit, soit grâce à un report de longueur). Comme dans la situation précédente, l'enseignant est encouragé à faire verbaliser, expliciter par les élèves la procédure utilisée mais ici l'instauration d'un système de coût sur les instruments incite les élèves à rechercher la procédure la moins coûteuse. L'objectif est de montrer aux enseignants que le choix d'un instrument est révélateur de l'analyse faite par l'élève de la figure. Par exemple, ici, le choix d'une équerre non graduée (gabarit d'angle droit par exemple) pour compléter la figure devra être interprété par l'enseignant comme la prise en compte par l'élève d'angles droits de la figure (celui du cadre ou celui d'un des triangles).

Enfin, parce que nous tenons à prendre en compte les attentes des enseignants, nous prévoyons une quatrième situation visant la rédaction d'un programme de construction. Pour atteindre cet objectif l'enseignant pourra prendre appui sur les formulations attendues des élèves lors des séances précédentes.

Outre la présentation de ces quatre situations, la ressource fournit aux enseignants des indications pour leur mise en œuvre (le matériel à prévoir, les grandes lignes du déroulement, les documents à reproduire pour les élèves...) et des encadrés de couleurs apportent des informations complémentaires à propos du choix des situations, une analyse des procédures pouvant être mises en œuvre par les élèves mais aussi des éléments susceptibles d'aider les enseignants à prendre du recul par rapport à la situation vécue pour se donner des outils de travail en partie décontextualisés[12].

Dans la suite de ce texte nous allons restreindre notre analyse à la première situation de cette séquence.

[11]Il est précisé dans la ressource que le mot « instrument » peut désigner une bande de papier, un gabarit, une règle non graduée.

[12]Trois types d'encadrés de couleurs différentes. Sous l'intitulé « pour mieux comprendre notre démarche », nous explicitons par exemple, la différence entre « reproduire » et « restaurer » une figure (qu'est-ce que cela change pour l'élève ? qu'est-ce que cela change pour l'enseignant ?). Sous l'intitulé « pour mieux observer les procédures des élèves », nous présentons par exemple, des gestes à observer significatifs de la prise en compte de certaines propriétés de la figure. Sous l'intitulé « des outils de travail pour l'enseignement de la géométrie », nous proposons par exemple, un tableau récapitulatif des règles à respecter pour la rédaction d'un programme de construction.

2 Analyse a priori de la première situation

Le point de départ de l'élaboration de cette progression est une figure issue du document de Carine Reydy utilisé précédemment par Mme S. (figure n°4).

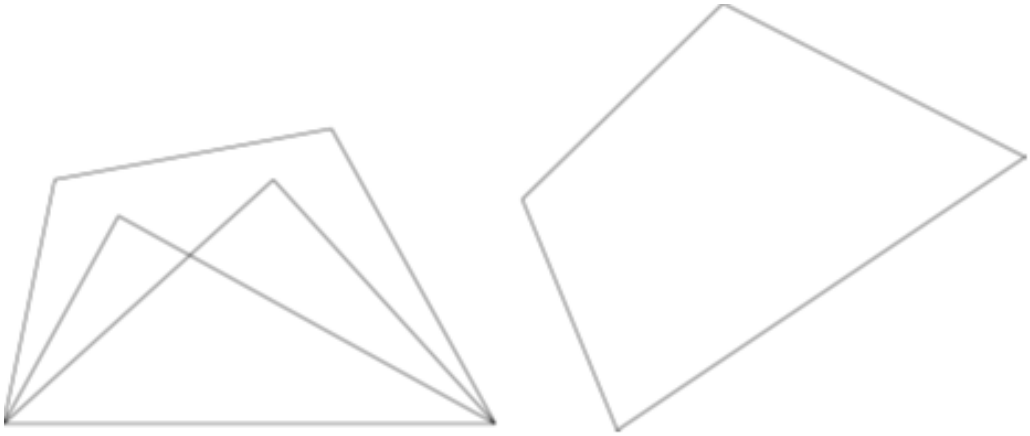


Figure n°4

Celle-ci nous suggère de l'utiliser car elle l'a testée en classe auprès de ses élèves et a constaté moins de difficultés de mise en œuvre. Cette figure est constituée d'un quadrilatère et de segments dont certains sont portés par les diagonales. Deux types de procédures peuvent être envisagées pour la restaurer à partir de l'amorce donnée : dans les deux cas, il s'agit de tracer les segments situés sur les diagonales pour ensuite procéder soit par report de l'angle droit, soit par report de longueur et ainsi tracer les segments manquants (figure n°5).

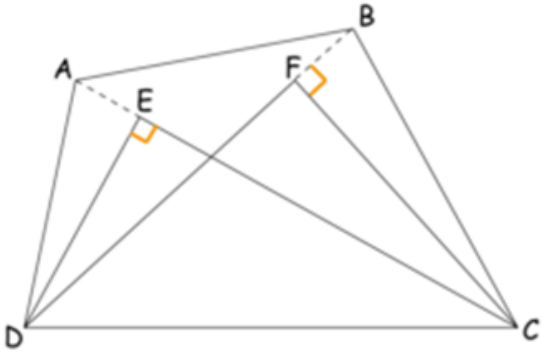
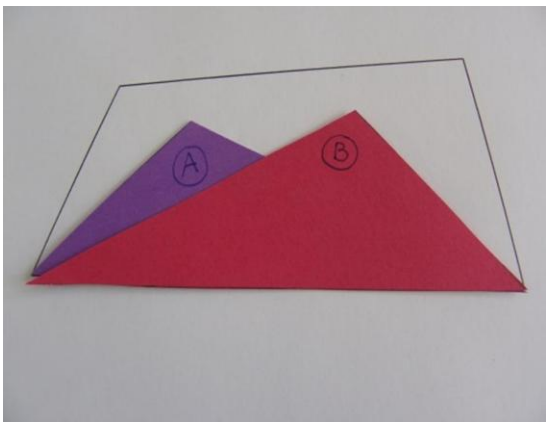


Figure n°5

L'existence de ces deux types de procédures présente un intérêt en termes de potentialité d'apprentissages : la nécessité du choix d'un instrument permet d'exercer l'élève à utiliser les différentes propriétés d'une figure mais la mise en œuvre de ce jeu sur les instruments constitue une difficulté pour l'enseignant. En effet cela nécessite d'identifier et d'utiliser l'articulation entre actions sur le matériel et concepts géométriques en jeu. Cela nous conduit à renoncer à utiliser cette figure et préférons en choisir une autre de même allure mais sans angle droit (figure n°6). Nous conservons la même consigne et le même type d'amorce (le quadrilatère cadre) mais nous prévoyons un déroulement en trois phases (nous préciserons par la suite les raisons de ce choix).

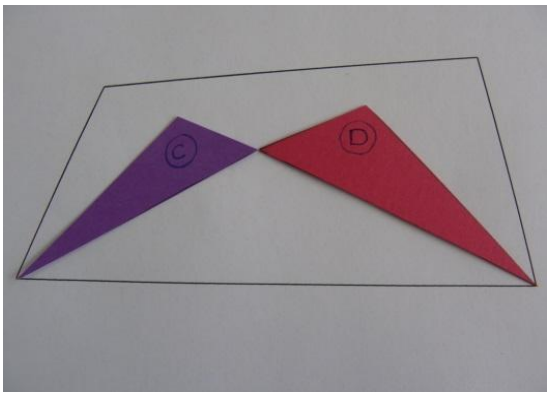
Première phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits A et B.

La procédure attendue consiste à réaliser un assemblage par superposition des gabarits pour ensuite en tracer les contours.



Deuxième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et D.

La procédure attendue consiste à placer les deux gabarits en faisant coïncider certains sommets (des sommets des gabarits avec des sommets du quadrilatère « cadre » et deux sommets des gabarits entre eux) pour ensuite effectuer des tracés. Pour ce faire, les élèves peuvent soit utiliser les gabarits (tracer leur contour) soit prendre en compte certains alignements (tracer des lignes). Il s'agit alors de placer dans le prolongement un bord de C avec un bord de D (deux possibilités) pour ensuite placer la règle le long d'un bord et posée au-dessus de l'autre et tracer.



Troisième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et E.

La procédure attendue consiste à placer le gabarit C en faisant coïncider l'une de ses pointes avec un sommet du quadrilatère et le faire pivoter jusqu'à ce qu'un de ces bords coïncide avec la diagonale. Le placement du gabarit E nécessite le recours à la deuxième diagonale.

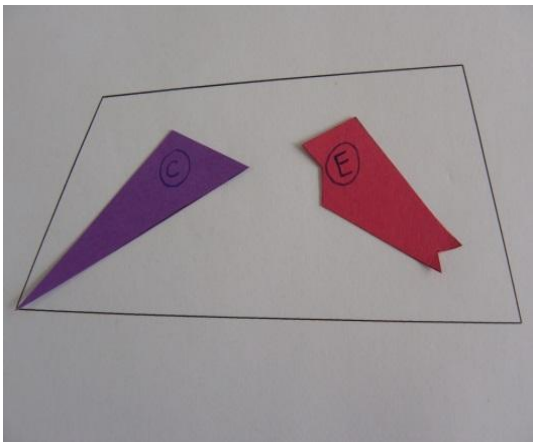


Figure n°6

Ces trois phases manipulatoires ont pour objectif d'amener l'élève à exercer son regard sur la figure pour en identifier les propriétés. A chaque étape, il devra, à partir d'un agencement de gabarits, tracer le contour des formes situées à l'intérieur du quadrilatère « cadre » mais le choix des gabarits à disposition organise le travail de l'élève. Lors de la première phase, il lui suffit de positionner les gabarits par rapport au cadre et l'un par rapport à l'autre. La seule véritable difficulté réside dans l'organisation des tracés et la nécessité de soulever un gabarit pour voir apparaître l'autre en entier. La deuxième phase devrait amener les élèves à prendre en compte certains alignements (alignement de segments correspondants aux bords des gabarits). A ce stade rien ne contraint les élèves à utiliser le positionnement de certains segments sur les diagonales ,mais le recours à la règle non graduée peut amener les élèves à constater l'alignement des deux bords avec un sommet du quadrilatère. Dans la troisième et dernière phase, la forme du gabarit E empêche de faire coïncider certains sommets et nécessite la prise en compte des diagonales. Au fil

de la séance, le prolongement de segments et la perception de l'alignement se révèlent déterminantes pour la réussite des tracés attendus.

Il convient de souligner ici, que comme pour toute restauration de figure, cette situation suppose une analyse de la figure modèle et de l'amorce donnée mais que cette analyse est progressive, induite par les trois étapes. En effet le choix des gabarits conduit peu à peu l'élève à faire appel à une vision « plus mathématisée » de la figure, la propriété de la figure doit « surgir » sous le regard des élèves. Du moins, nous en faisons l'hypothèse.

Pour chacune des trois étapes, la tâche de l'enseignant consiste à dévoluer la tâche, observer les procédures des élèves et à faire une synthèse des procédures utilisées.

3 Analyse a posteriori

Nous avons testé cette situation dans la classe de Mme S', enseignante de CM1 qui a assisté l'année dernière à une formation sur l'enseignement de la géométrie mais qui ne fait pas partie du groupe impliqué dans la production de ressources. Le document présentant une nouvelle progression lui a été remis une dizaine de jours avant la séance. Dans cette partie nous cherchons à mettre en évidence les écarts entre le projet et sa mise en œuvre pour ensuite analyser l'origine des décalages constatés.

3.1 Identifier les écarts entre le projet et sa mise en œuvre

Cinq minutes suffisent à Mme S' pour effectuer la passation de consigne et distribuer le matériel.

> *« Vous avez tout en haut une figure modèle, prenez le temps de la regarder. Et au-dessous, vous voyez qu'on a commencé à la reproduire, on a commencé à la tracer mais de façon incomplète. Donc, vous, votre travail, ça va être de poursuivre le tracé. […]*
> *Laissez vos règles tranquilles. D'ailleurs, on n'en a pas besoin, vous allez les ranger. […]*
> *Alors, pour vous aider dans ce travail, je vais vous donner des petits gabarits. On va les découper proprement et grâce à ces gabarits, on va poursuivre le tracé. »*

Pendant la recherche individuelle l'enseignante observe les procédures des élèves, s'étonne de difficultés de positionnement des gabarits pour deux élèves et relève qu'un groupe a eu besoin de tracer le bord du gabarit caché sur le gabarit apparent avant d'effectuer les tracés sur la figure amorce.

Lorsque l'enseignante qui circule dans les rangs constate que tous les élèves ont réussi à reproduire la figure, elle donne la consigne de la deuxième étape sans faire de synthèse : *« on a la même figure modèle, il faut continuer le tracé mais avec d'autres gabarits »*

Le temps consacré à cette deuxième étape est plus long. De nombreux élèves utilisent la perception (certains procèdent par translation du gabarit de la figure modèle à l'amorce à compléter), positionnent un gabarit puis l'autre. Certains élèves cherchent à faire en sorte que *« les coins se touchent »*. Au bout de 7 minutes l'enseignante se rend compte qu'elle a oublié de distribuer la règle non graduée. A ce stade de la séance la plupart des élèves ont effectué les contours des gabarits. Certains néanmoins (mais une minorité) utilisent la règle pour réaliser des tracés plus précis (ils gomment en partie les contours et les retracent à la règle). Ce faisant, ils utilisent l'alignement de façon implicite. Là encore, aucune synthèse ne vient clore cette étape.

La troisième étape constitue le véritable enjeu de la séance puisque c'est à ce moment-là que les élèves doivent utiliser les diagonales du quadrilatère.

De nombreuses minutes sont nécessaires aux élèves pour cherchent à disposer les gabarits. Certains élèves utilisent encore la perception, d'autres tentent de les juxtaposer (il est vrai que le découpage des gabarits grignotés le permet), beaucoup sont en difficulté et il devient alors nécessaire de rappeler aux élèves qu'ils ont une règle à leur disposition, qu'ils peuvent la positionner sur le bord des gabarits et observer. Peu à peu la procédure experte se diffuse dans la classe et une majorité d'élèves parvient à restaurer la figure. Néanmoins certains élèves continuent à positionner les gabarits en utilisant la perception. D'autres positionnent la règle en utilisant les diagonales mais sont incapables de dire qu'ils prennent en compte un sommet. L'enseignante

constate que l'utilisation de la règle lors de l'étape 2 était déterminante pour la réussite de l'étape 3.

Pour effectuer la phase de synthèse, celle-ci a prévu un rétroprojecteur et des transparents sur lesquels la figure modèle et l'amorce sont reproduites. Elle sollicite plusieurs élèves qui viennent à tout de rôle exposer leurs procédures dont Léa qui a tracé les diagonales du quadrilatère.

M: « Qu'est-ce que tu as remarqué ?
E : « Quand on a dit qu'il fallait poser sa règle sur la figure modèle, j'ai remarqué que ça faisait une croix ici. » […]
M: « Ca faisait quoi ? »
E : « Ca fait une diagonale »
M : « Ca fait une diagonale, un segment qui joint les angles opposés, l'angle ici et là, on les a rejoint par un segment. »

Pendant que Léa trace les diagonales sur le transparent, l'enseignante invite l'ensemble de la classe à anticiper la suite des tracés.

M : « Est-ce que vous voyez où elle veut en venir ? Parce que là, ce n'est pas encore la figure modèle-là ! »

Envisager les différentes étapes des tracés est d'autant plus difficile qu'il s'agit ici d'effectuer des tracés pour ensuite pouvoir positionner les gabarits alors que, dans les deux premières phases de la séance, les procédures consistent à positionner puis tracer.

Pour aider ses élèves elle les invite à isoler certains segments pour ensuite les retrouver sur la figure modèle dans le but de les habituer à prélever des informations sur la figure modèle à l'aide des instruments avant de tracer.

M: « La figure modèle n'est pas là pour rien »

Enfin elle clôt la séance en demandant à ses élèves.

M: « Qu'est-ce que vous n'avez pas fait suffisamment d'après vous ? »
E: « Réfléchir »
M : « Observer ? Manipuler ? »

Au cours de l'entretien « à chaud » qui suit la séance, l'enseignante nous confie qu'elle aurait eu besoin de plus de précisions quant aux mots à utiliser lors de la phase de synthèse.

Mme S' : « Au moment de la mise en commun, je n'étais pas à l'aise…pour l'analyse des procédures »

Formateur : « Pourtant vous aviez remarqué bien des choses. »

M : « Oui, mais je ne sens pas capable de toutes les analyser », « mais, c'est moi, vous auriez fait ça avec quelqu'un d'autres, cela se serait passé différemment, je ne suis pas une matheuse. Je ne savais pas par exemple si je pouvais parler des diagonales. Maintenant, c'est tout nouveau, en le refaisant, ça ira mieux, il faut nous aussi qu'on ciselle notre analyse »

Elle termine néanmoins l'entretien en soulignant la facilité de mise en œuvre de la séance.

M : « Oui, parce que sinon c'est facile à mener. Ça s'est super, on est très en retrait, on voit bien. »

3.2 Analyse en termes de processus de modifications de la tâche prescrite

Nous avons conçu cette situation de restauration dans l'intention de limiter les écarts pouvant être créés par l'enseignant entre la tâche prescrite et la tâche réalisée. Est-ce que nos explications ont permis d'optimiser la représentation de la tâche ? Est-ce que la conception même de la situation a facilité sa mise en œuvre et ainsi réduit les écarts au niveau de la réalisation de la tâche évitant ainsi trop de modifications au niveau de la redéfinition ? La mise en parallèle de l'analyse a posteriori avec l'analyse a priori nous permet de mettre à l'épreuve nos hypothèses. La séance observée révèle surtout des écarts créés au niveau de la réalisation de la tâche. Mais ces écarts trouvent principalement leur origine dans la situation elle-même (et par conséquent sont peu imputables à l'enseignante). A ce propos, précisons que nous devons prévoir des ajustements mineurs (modifier la forme des gabarits grignotés qui autorisent une juxtaposition dans l'étape 3, revoir la position de la figure amorce sur la feuille de papier qui peut encourager les procédures

par translation et indiquer les mots à utiliser au moment de l'explicitation des procédures) mais aussi des transformations plus importantes de la situation (les difficultés rencontrées par les élèves au cours de la troisième étape nous incitent à revoir notre analyse a priori de la situation)[13]. Mais l'enseignante a respecté les grandes lignes du projet. Elle n'a pas modifié son déroulement, elle a donné les consignes prévues, elle n'a pas transformé la tâche des élèves. Nous pouvons seulement relever qu'elle a tardé à distribuer la règle non graduée lors de la deuxième étape[14].

L'enseignante a introduit peu d'écarts au niveau de la représentation de la tâche : elle a perçu les principaux enjeux de la situation même si elle n'a pas suffisamment pris en compte le rôle de la règle (elle oublie de la distribuer et tarde à inciter les élèves à l'utiliser).

Mais surtout, il convient de souligner que l'enseignante n'a pas créé d'écarts important au niveau de la redéfinition de la tâche. Elle a certes fait le choix de faire travailler les élèves par deux et elle a prévu l'utilisation d'un rétroprojecteur mais ces choix de modalités de travail ne la conduisent pas à s'éloigner du projet initial. Contrairement à Mme S, elle n'a pas modifié la tâche qui lui était prescrite pour pouvoir exercer plus de contrôle sur l'activité des élèves et même si elle est hésitante quant aux termes à employer lors de la phase de synthèse (elle se demande si elle devait employer le mot diagonale) elle n'a pas cherché à poursuivre d'autres objectifs que ceux fixés par la ressource.

A l'issue de cette première expérimentation, nous retenons des pistes possibles pour une optimisation de la ressource mais nous pouvons également souligner que nos hypothèses sont en partie validées. En effet, contrairement à la situation testée par Mme S, notre situation pour la classe avec objectifs de formation a permis à Mme S' d'observer ses élèves dans le cadre d'une restauration de figure sans pour autant être mise en difficulté. Mais, au-delà d'un déroulement plus simple, d'une figure moins complexe et d'une planification des objectifs sur plusieurs séances, qu'est-ce qui distingue ces deux situations ?

3.3 Essai de caractérisation de la situation pour la classe avec objectifs de formation

Dans cette dernière partie nous cherchons à comparer les deux séances étudiées afin d'en déduire des éléments de caractérisation de la situation pour la classe avec objectifs de formation relatifs à la tâche de l'élève mais aussi et surtout à celle de l'enseignant.

Dans les deux situations la tâche de l'élève consiste à restaurer une figure mais, dans la première, le coût instauré sur les instruments incite celui-ci à recourir à des procédures nécessitant un changement de regard sur les figures. Les procédures pouvant être mises en œuvre sont diverses. La déconstruction est laissée à la charge de l'élève qui doit effectuer un choix judicieux des instruments. Dans la situation pour la classe avec objectifs de formation, les étapes successives avec un jeu sur le degré de liberté de positionnement des gabarits autorise une prise en compte progressive des alignements (segments puis segment et point). Les procédures de restauration sont diverses mais ciblées à chacune des étapes. La déconstruction (certes moins complexe car la restauration à effectuer n'est pas la même) est induite par les instruments mis à disposition.

Ces différences au niveau de la tâche de l'élève ont des conséquences sur la tâche de l'enseignant. En effet, dans la situation directement inspirée par la recherche, la phase de mise en commun joue un rôle déterminant : elle doit permettre à l'enseignant de faire évoluer les procédures des élèves et c'est à ce moment-là que se situe le véritable enjeu de la séance. Pour cela il doit au préalable avoir réussi à interpréter le choix des instruments utilisés en termes de changement de regard puis il doit aussi se donner les moyens de faire évoluer les procédures. Cela suppose en effet de demander aux élèves de recommencer, c'est-à-dire, de distribuer de nouvelles feuilles pour qu'ils puissent chercher à restaurer à nouveau la figure mais avec un coût moins important. Or ce type

[13] Nous reviendrons plus loin sur les questions que nous nous posons à propos de l'optimisation de la ressource.

[14] Même si cet oubli a des conséquences importantes, il ne constitue pas un écart important dans le déroulement de la séance tel qu'il est décrit dans la ressource.

de fonctionnement est éloigné des pratiques usuelles pour diverses raisons : nécessité d'une gestion différenciée du travail des élèves, travail à recommencer sur de nouvelles feuilles de papier à prévoir, temps de recherche se prolongeant pour certains élèves... De plus cette évolution des procédures peut nécessiter plusieurs séances et dans ce cas, on se heurte au besoin qu'ont les enseignants de se faire assez rapidement une idée de l'intérêt de la ressource. Si les élèves n'ont pas réussi à calculer le coût de la restauration, la tâche devient encore plus ardue pour l'enseignant[15]. Dans la situation pour la classe avec objectifs de formation, il est tout aussi nécessaire d'observer les procédures des élèves mais l'évolution des procédures induisant un changement de regard n'est pas à la charge de l'enseignant. La gestion de la phase de synthèse s'en trouve facilitée. L'enseignant peut se limiter à un simple exposé des procédures et centrer davantage son attention sur leur explicitation.

Ainsi nous devons prévoir d'améliorer notre ressource en tenant compte et en préservant ces caractéristiques.

3.4 Comment améliorer la ressource ?

Les difficultés rencontrées par les élèves au cours de la troisième étape nous conduisent à revenir sur notre analyse *a priori*. En effet nous n'avions pas suffisamment pris en compte l'importance de l'utilisation de la règle lors de la deuxième étape. Plusieurs pistes pour une amélioration de la situation sont à envisager. Nous pourrions jouer sur certaines variables didactiques : modifier le choix de l'amorce ou celui des gabarits à disposition pour une autre organisation des procédures à mettre en œuvre[16] mais nous souhaitons dans un premier temps envisager de ne pas modifier les trois étapes et nous limiter à chercher des moyens de favoriser le recours à la règle lors de la deuxième étape[17]. Nous pourrions alors soit prévoir de jouer sur l'épaisseur des gabarits (les découper dans du papier plus fin de façon à ne pas pouvoir en tracer les contours), soit compléter notre ressource par une mise en garde pour l'enseignant (préciser pourquoi il est important d'amener les élèves à utiliser la règle à l'étape 2). Mais ces deux options ne sont pas équivalentes et les comparer nous permet de discuter à propos des choix à faire. En effet, dans le premier cas, nous modifions la tâche de l'élève ; dans le second, nous cherchons à compenser ce que l'on peut voir comme un déficit de formation par une explication donnée. Jouer sur l'épaisseur du papier revient à transformer le milieu pour que celui-ci contraigne l'élève à utiliser la règle [18]alors que prévoir une mise en garde pour l'enseignant permet de laisser plus de responsabilités à celui-ci. Mais, au-delà de ces différences, comment s'assurer de la mise en évidence pour les élèves des propriétés de la figure ? En modifiant le milieu, ne risque-t-on pas de voir l'enseignant passer sous silence les concepts géométriques en jeu ? Comme l'explique Annie Bessot (Bessot, 2009), *le professeur a l'obligation d'organiser son cours en des causes d'apprentissage pour les élèves mais son travail s'arrête lorsque les causes ont été transformées en des raisons d'ordre mathématique : le sujet doit reconstruire, reprendre ses savoirs, les organiser et les trouver raisonnables c'est-à-dire les articuler pour les rendre consistants.*

Ainsi, notre travail doit se poursuivre en tenant compte des caractéristiques du type de situation que nous souhaitons développer ce qui suppose faire des choix, trouver un certain équilibre entre les contraintes imposées par le milieu et ce qui doit être de la responsabilité de l'enseignant. Ces choix devront se faire en cohérence avec les objectifs de formation que nous nous donnons pour les enseignants.

---

[15] Ajoutons ici que l'enseignante poursuivait un objectif supplémentaire : la rédaction d'un programme de construction et que par conséquent sa tâche était encore plus complexe.

[16] Nous pourrions prévoir une étape supplémentaire avec un gabarit moins grignoté.

[17]Nous faisons aussi ce choix car cela nous permet de soulever des questions importantes de notre point de vue.

[18]Pour tracer des traits plus précis

I - CONCLUSION

Les travaux menés par le groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie du Nord Pas de Calais ont donné lieu à la production de situations pour un enrichissement des pratiques qui ne va pas de soi et nous conduit à chercher comment optimiser l'appropriation par les enseignants de ces situations. Nous avions mis à l'épreuve dans des travaux antérieurs (Mangiante-Orsola, 2011) l'hypothèse selon laquelle concevoir des ressources laissant aux enseignants une certaine marge de manœuvre favoriserait le processus d'appropriation mais notre recherche actuelle ouvre de nouvelles pistes pour la production de ressources.

Tout d'abord, nous retenons que la situation mise en œuvre par Mme S. présente un certain nombre de difficultés et qu'il convient plus généralement de mettre en garde les enseignants vis-à-vis d'une utilisation sans adaptation de situations conçues par la recherche. En effet certaines de ces situations, parce qu'elles intègrent les principaux résultats issues de la recherche, sont certes particulièrement riches du point de vue des apprentissages potentiels pour les élèves mais concentrent dans une seule et même séance un certain nombre de difficultés pour l'enseignant. Ainsi notre analyse de la situation utilisée par cette enseignante nous conduit à souligner la nécessité d'une introduction progressive d'éléments nouveaux dans les pratiques.

Par ailleurs, au-delà de l'élaboration d'une progression, nous proposons *des situations pour les élèves avec objectifs de formation* c'est à dire des situations dont l'enseignant peut s'emparer grâce à une mise en œuvre facilitée par rapport à la situation inspirée par la recherche et qui lui permet de mieux comprendre les enjeux de notre démarche et nos choix de conception via une observation facilité de l'activité des élèves.

L'analyse de la situation testée par Mme S' n'est qu'une première étape de notre travail. Il convient à présent d'améliorer la ressource produite et de la tester dans de nouvelles classes auprès de nouveaux enseignants. Notre intention est de questionner plus avant ses effets sur leurs pratiques. Les situations ainsi conçues permettent-elles comme nous l'espérons un réel enrichissement ? Favorisent-elles une intégration progressive dans les pratiques des résultats issus de nos recherches à propos de l'enseignement de la géométrie ?

Les travaux menés dans le Nord Pas de Calais ont toujours eu pour ambition de proposer une progression assurant une certaine continuité dans les apprentissages visés pour les élèves. Nous pensons qu'il convient aussi de s'interroger sur la possibilité de penser une certaine « continuité » dans l'enrichissement des pratiques c'est-à-dire de réfléchir aux possibilités d'une intégration progressive de pratiques nouvelles au sein des pratiques existantes. Les recherches menées dans le cadre de la double approche attestent que les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert, Rogalski, 2002). Il nous semble par conséquent tout à fait légitime de chercher à tenir compte de cette organisation des pratiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A. (2009) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* XV[ème] école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990),* textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* 17, 121-138.

DUVAL R. & GODIN M. (2006) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76,** 7-27.

GODIN M. & PERRIN-GLORIAN M.J. (2009) De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM *Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008, CD-rom, Atelier A2*.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.J. & DELPLACE J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* 79, 33-60.

LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2012), Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 32/3

MANGIANTE-ORSOLA C. (2011), Etude du processus d'appropriation de ressources par des professeurs des écoles enseignant les mathématiques : entre travail au quotidien et développement des pratiques, *Actes du Colloque international INRP, Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle. http://www.inrp.fr/archives/colloques/travail-enseignant/contrib/123.htm*

MANGIANTE-ORSOLA C., MATHÉ A.C. (2011) La symétrie orthogonale du CE2 à la Sixième : d'une réflexion sur les enjeux de son enseignement à l'élaboration d'un document-ressource pour les enseignants. Actes du colloque COPIRELEM 2010, Montpellier.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J. & VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2 *Petit x* 72, 6-39 et *Grand N* 77, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.J., MATHÉ A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90,** 5-41.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, volume 2, n°4, 505–528.

V - ANNEXE

Restauration de figures

D'après le travail d'un groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais : Marc Godin, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs et conseillers pédagogiques.

Qu'est-ce qui change dans l'activité des élèves et de l'enseignant entre les 2 activités suivantes ?

ACTIVITÉ 1

1. Reproduit à l'identique la figure de gauche dans la case de droite.
2. Rédige un programme qui décrit ta méthode.

ACTIVITÉ 2

1. Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible. Chaque tracé à la règle (non graduée) coûte 1 €. Chaque report de longueur coûte 5 €.
2. Calcule combien a coûté ta méthode.
3. Rédige un programme qui décrit ta méthode.

Dans le premier cas, il s'agit d'une activité classique de reproduction. On peut également demander à l'élève de construire la figure à une autre échelle, avec une mesure indiquée. La seconde activité est une *restauration de figure* : cela consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une *amorce* à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler non pas sur une figure mais sur *la différence entre deux figures* : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas.

La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance de l'amorce comme une sous-figure de la figure modèle. Elle peut :

- être une reconnaissance visuelle,
- être acceptée comme une donnée,
- être vérifiée en utilisant un transparent (qui servira pour valider l'activité de restauration),
- être vérifiée en utilisant des instruments.

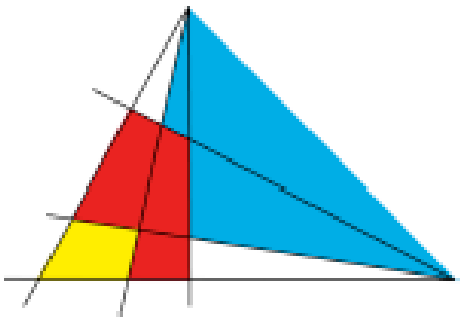
Le choix de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d'une démarche visuelle par translation.

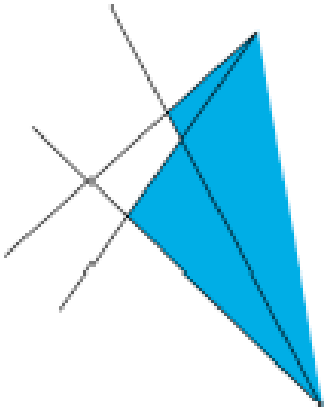
Les variables :

- le choix de la figure : bien entendu, la figure modèle peut être, comme dans les activités de reproduction, plus ou moins complexe ;
- le choix de l'amorce : les relations entre la figure à restaurer et son amorce orientent l'analyse de la restauration. La restauration est fonction non de la figure seule mais de la différence entre l'amorce et la figure. C'est l'analyse de cette différence qui importe pour choisir une restauration relative à un niveau d'enseignement donné. Évidemment, si l'amorce est insignifiante, les propriétés géométriques de la figure constituent l'essentiel des propriétés à restaurer.
- le choix des instruments à disposition ;
- le choix du barème associé aux instruments :
  - l'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques ;
  - cela incite aussi à utiliser certains instruments plutôt que d'autres, et donc à développer des connaissances géométriques pour obtenir les effets graphiques voulus avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate chez les élèves ;
  - en modifiant le barème relatif aux instruments de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves ;
  - le choix du barème a enfin une incidence sur la difficulté des calculs au moment d'estimer le coût de la restauration ;
- les exigences d'écriture : écritures additives du coût de restauration, rédaction d'un programme de restauration, de reproduction ou de construction (rédaction d'un algorithme de tracé, et ou, rédaction d'une description) ;
- la gestion des écritures du coût de restauration (comparaison collective ou non).

Aides possibles dans l'exemple ci-dessus (qui a été proposé en CE2) :

- utiliser des couleurs : les élèves cherchent les éléments qui se correspondent sur l'amorce et la figure modèle et les tracent de la même couleur.
- lors de mises en commun intermédiaires, identification des droites qui manquent sur l'amorce et des moyens de les obtenir (sur le modèle) à partir d'éléments déjà présents sur l'amorce (décomposition de la différence) avant de les construire (recomposition de la différence).

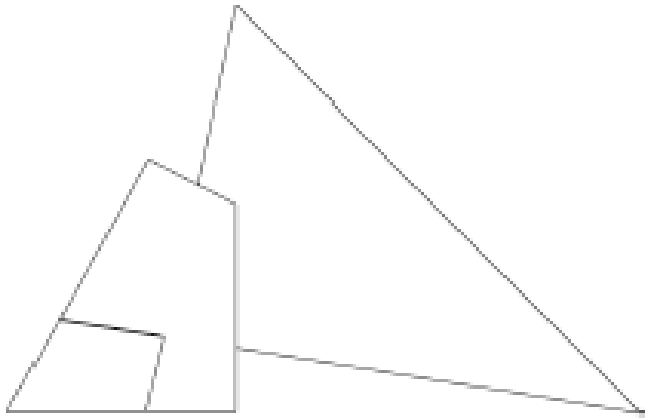


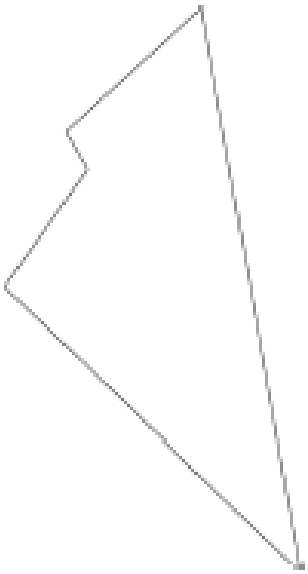


BARÈME

Instruments	Coût en €
calque	700
trait à la règle (non graduée)	1
report de longueur	5
mesure de longueur	700

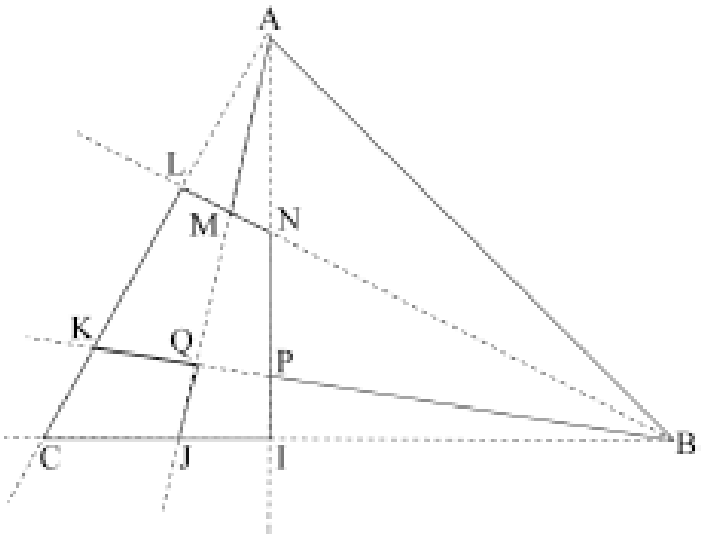
1. Compléter la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible.
2. Calculer combien a coûté sa méthode.
3. Rédiger un programme qui décrit cette méthode.





Programme :

document rédigé par Carine Reydy



Tracer (BP) et (AM). Q est à l'intersection.
Reporter QJ pour trouver J.
Tracer (BJ) et (AN). I est à l'intersection.
Reporter JC pour trouver C.
Tracer (BN) et (AC). L est à l'intersection et K est à l'intersection de (BP) et (AC).

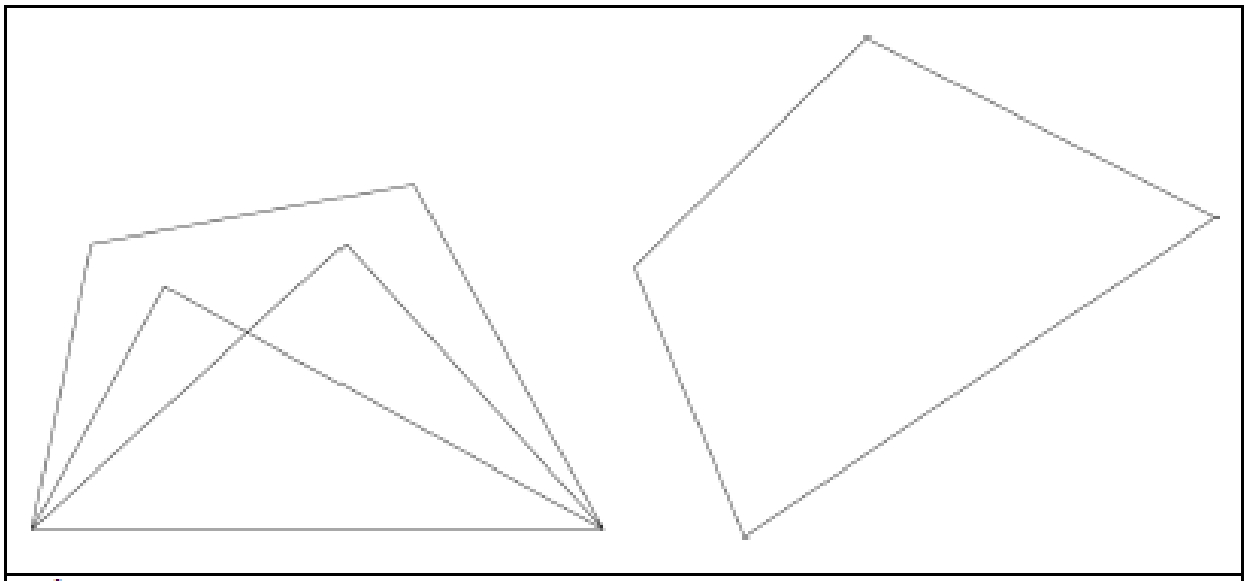
1+1+5+1+1+5+1+1=16 €

Un exemple pour le cycle 3

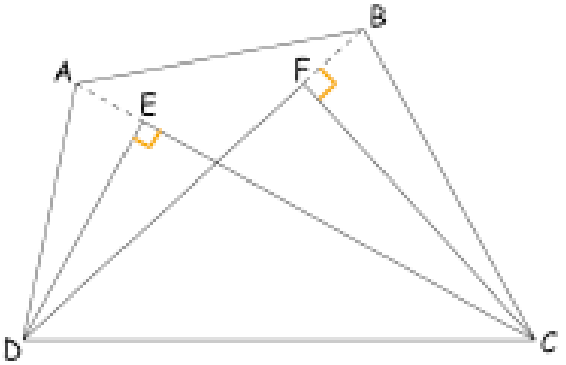
BARÈME

Instrument	Coût
Règle non graduée	1 €
Règle graduée	75 €
Equerre	5 €
Compas	50 €
Calque	250 €
Gomme	0 €

1. Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible.
2. Calcule combien a coûté ta méthode.



Coût total :



Tracer [AC] : 1 €
Tracer [BD] : 1 €
Tracer la perpendiculaire à [AC] passant par D : 5 €
Tracer la perpendiculaire à [BD] passant par C : 5 €
Gommer [AE] et [BF] : 0 €
Coût total : 1 + 1 + 5 + 5 = 12 €

5

document rédigé par Carine Reydy

Restauration d'une figure

Être capable de restaurer une figure :

- En développant les capacités d'observation de la figure initiale
- En reconnaissant l'amorce comme une sous-figure de la figure initiale

Être capable de percevoir les alignements, de prolonger des lignes droites pour découvrir les points d'intersections

Être capable de restaurer une figure en écartant la démarche visuelle par translation car l'amorce est orientée différemment.

Objectifs méthodologiques :

- Savoir prolonger des droites (sans appuyer sur le crayon)
- Savoir utiliser les bons outils pour que la restauration coûte le moins cher possible (cf barème)

Compétences spécifiques	temps	Déroulement	Réponses attendues
Lire : Lire la consigne et le tableau de barème	Collectif 10'	Phase 1 : Présentation collective Les élèves lisent la consigne *Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible .* -> Que va-t-il falloir faire ? -> Que signifie le tableau de barème ? Rappeler l'utilisation de la règle bristol sans graduation et de la bande jaune qui permet de reporter des longueurs (on peut écrire dessus)	Il va falloir refaire la figure en dessinant ce qu'il manque. Il va falloir faire attention à la procédure que l'on va choisir car il faut essayer de compléter la figure sans trop dépenser d'argent. • Si on utilise le calque ou si on mesure avec la règle graduée cela coûte 700 € (il faut essayer de ne pas utiliser ces outils) • Si on trace un trait avec la règle non graduée cela coûte 1€ • Si on reporte une longueur avec la règle papier cela coûte 5 €
Analyser : Observer à la fois la figure modèle et l'amorce	Collectif 10'	Phase 2 : Travailler sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce Que constatez-vous entre la figure de départ et le morceau de figure tracé ? Le morceau est orienté différemment. Comment faire pour repérer les parties déjà tracées ? Au tableau, l'amorce est reproduit en grand ainsi que la figure de départ. On colorie chaque segment de l'amorce d'une couleur et on repasse de la même couleur chaque segment de la figure modèle. On nommera les sommets de l'amorce et de la figure modèle	Le morceau de la figure tracé ne semble pas être dans le même sens que la figure de départ → Utilisation du calque pour vérifier En repassant les segments tracés sur les deux figures, en utilisant des couleurs.

Compétences spécifiques	temps	Déroulement	Réponses attendues
Mettre en œuvre sa procédure pour **restaurer** la figure en dépensant le moins d'argent possible	Collectif 5 ' Individuel 20'	Phase 3 : Restaurer la figure Comment complète-t-on une figure ? Sur la figure modèle peut-on trouver les alignements ? Ne pas oublier les alignements A,L,K, Cet B,I, J,C N'oubliez pas à chaque fois que vous tracez ou que vous prolongez un trait de le noter et d'écrire son prix. Vous pouvez nommer les différents points d'intersection qui vont apparaître au fur et à mesure de votre construction	• On cherche les alignements • On cherche les points d'intersection On souligne de la même couleur les segments tracés et leur prolongement
Être capable d'**exposer** clairement sa **stratégie** Être capable de suivre un programme de restauration	Collectif 15'	Phase 4 : Correction Avec la papier calque chaque élève individuellement pourra s'auto-corriger et ainsi constater si ses tracés sont corrects. L'élève qui aura le moins dépensé exposera sa stratégie au reste de la classe. Si la stratégie a 16 € n'a pas été découverte on donnera la solution aux élèves qui la traceront en même temps qu'on lira le programme de construction	Parvenir à une restauration correcte

Matériel :
Pour chaque élève :
Un calque avec la figure complète.
Une règle papier pour les reports de longueur
Une règle en carton plastifié pour les prolongements de droite
Une règle graduée pour mesurer les longueurs.
Un critérium, une gomme, des crayons de couleur
Une feuille avec la consigne, le barème, la figure modèle, l'amorce et des lignes pour écrire le programme et compter le prix de la restauration
Une feuille avec la restauration à 16 €

Matériel :
Pour le tableau
La figure modèle et l'amorce agrandies. (4 fois)

Prénom : .....

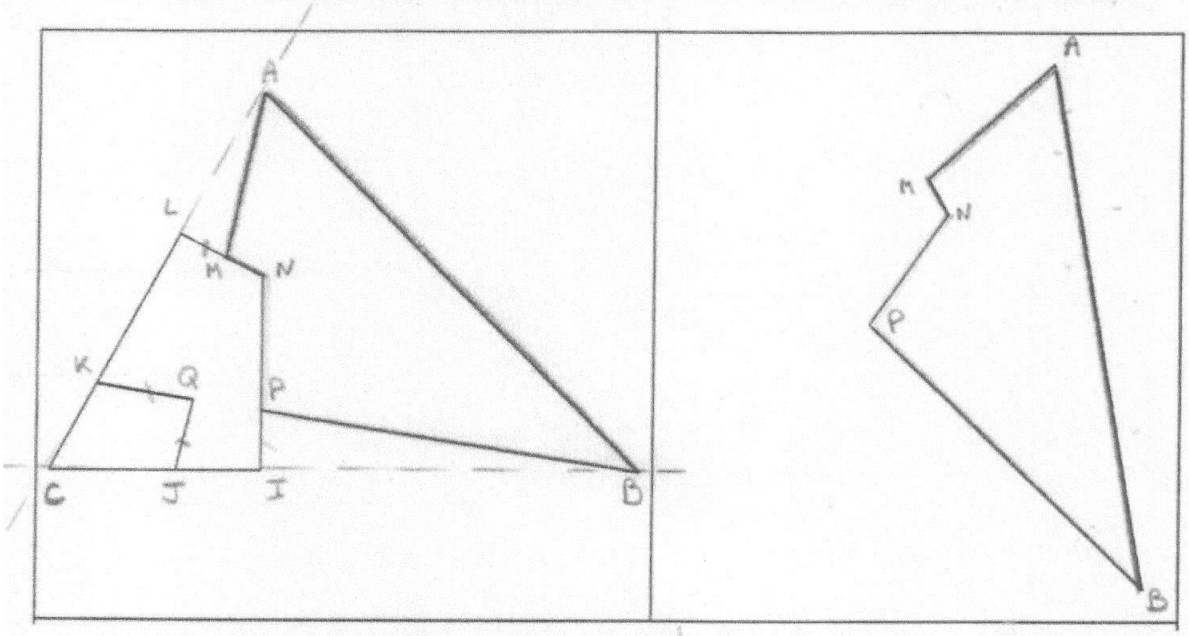
- Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche.

Attention il faudra dépenser le moins d'argent possible.

- Tu devras simultanément compléter ta figure, écrire ton programme de reconstructior et calculer le prix de celle-ci.

Barème

Instruments	Coût en €
calque	700
Trait à la règle (non graduée)	1
Report de longueur avec la règle papier	5
Mesure de la longueur avec la règle graduée	700
gomme	0



gramme :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

L'ENSEIGNEMENT DU CONCEPT DE VOLUME EN CM2

Karine MOLVINGER
Chargée de recherche au CNRS,
LIRDEF (Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation) équipe ERES, EA 3749, UM2, UM3
karine.molvinger@montpellier.iufm.fr

Résumé

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques. Elle porte sur les grandeurs à l'école primaire et plus particulièrement sur l'enseignement de la grandeur volume. Nous présentons une étude des programmes dans laquelle nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Puis, nous nous appuyons sur les recherches sur les difficultés des élèves (Ricco *et al*., 1983, Smith, 1985) pour étudier des manuels et des pratiques d'enseignants de cycle 3. Nous y analysons la façon dont la grandeur volume est traitée : prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques, prise en compte des conceptions des élèves et des problématiques liées à la mesure des grandeurs. Notre objectif est ainsi d'explorer comment les enseignants peuvent aborder ce concept et gérer les difficultés des élèves.

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques[1]. Notre objectif est ainsi d'explorer comment le concept de volume est enseigné (notamment au CM2) et d'apprécier les apprentissages qui peuvent en découler. Le présent article rend compte des premiers résultats d'un travail toujours en cours actuellement. Après avoir explicité le cadre théorique, la méthodologie et le corpus de l'étude, nous regardons dans la bibliographie ce que nous pouvons trouver sur le concept de volume. Puis nous étudions les programmes où nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Nous analysons les manuels scolaires présentant cette notion, notamment la façon dont la grandeur volume est introduite (prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques). Pour l'étude des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves, nous nous inscrivons dans le cadre de la théorie de l'activité (Robert, 2008). Pour cela, nous analysons les séances de classe de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

I - PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Notre problématique s'intéresse au concept de volume, à savoir comment il est abordé dans les instructions officielles, dans les manuels (aspects numérique, géométrique, physique) ainsi qu'en classe où nous analysons des séances de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

Notre étude s'inscrit dans la théorie de l'activité telle qu'elle a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques par Robert et Rogalski (Robert & Rogalski, 2002, 2005 ; Robert, 2008). Dans ce cadre théorique, on considère que les pratiques des enseignants influent sur les apprentissages des élèves *via* les activités qu'elles provoquent, notamment par le choix des tâches proposées aux élèves. De ce cadre découle une méthodologie : ce sont les activités des élèves en classe qui nous permettent d'étudier l'enseignement dispensé. Les pratiques des enseignants sont analysées, d'une part en reconstituant le scénario, c'est-à-dire l'enchaînement des tâches prévu par l'enseignant et l'organisation de la classe ; d'autre part, le déroulement, c'est-à-dire la mise en œuvre du scénario dans la classe.

[1] Ce projet est financé par la Région Languedoc-Roussillon dans le cadre de l'appel à projet "Chercheurs d'avenir 2011"

L'analyse du scénario suppose la « conversion » des énoncés choisis par l'enseignant en tâches pour les élèves, puis l'analyse de ces dernières d'un point de vue didactique pour déterminer les activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, à travers la description des procédures de résolutions envisagées, les connaissances mobilisées, les conceptions erronées qui peuvent intervenir. Cette analyse *a priori* des tâches permet de réaliser une première prévision de l'ensemble des activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, donnant ainsi accès à l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant en vue de « mettre ses élèves sur le chemin de la connaissance » (Chesnais, 2009).

L'analyse du déroulement, réalisée ici à partir de vidéos de séances de classe, est guidée par la recherche de ce qui peut influer sur les activités que les élèves développent. Nous procédons tout d'abord à un découpage chronologique des séances en épisodes selon la nature du travail (cours, exercices, rappels de leçon, correction, autre). Puis nous considérons notamment les temps et formes de travail (individuel, en petit groupe, collective en classe entière…) en fonction des contenus (exercice ou cours…), les échanges verbaux, les aides prodiguées par l'enseignant, etc. Nous nous en tenons aux activités possibles, inférées à partir de nos hypothèses et des traces des activités effectives. En effet, les activités effectives elles-mêmes ne sont pas à notre portée, non seulement parce qu'elles sont différentes pour chaque élève et que notre méthodologie de recueil de données ne nous permet pas d'apprécier les activités individuelles, mais aussi parce qu'une partie de ces activités est de toutes façons inobservable, se déroulant dans les têtes (Chesnais, 2009).

Le corpus étudié est constitué des instructions officielles, de manuels scolaires, d'enregistrements vidéo de l'ensemble des séances portant sur les mesures de volume en CM2 dans les classes de trois enseignants, complétés par de nombreux documents : cahiers d'élèves, feuilles d'exercices, traces écrites. Nous disposons également de productions d'élèves lors d'évaluations réalisées en classe (tests conçus par nos soins) en fin d'année. Ces productions nous permettent d'apprécier, même de manière imparfaite, les apprentissages réalisés.

Ne pouvant présenter l'intégralité des séquences, nous n'analyserons que certaines tâches au sein de toutes ces séances.

II - LE CONCEPT DE VOLUME

Rappelons tout d'abord que le volume est l'espace occupé par un objet et que la contenance est ce qui peut être contenu dans les limites d'un contenant. Dans cette étude, nous distinguons les deux notions et nous nous intéressons au volume.

Le concept de volume s'inscrit dans les programmes de mathématiques dans la thématique « grandeurs et mesures ». Cependant, il relève également de la géométrie dans l'espace puisqu'il met en jeu des solides. Dans l'enseignement mathématique, le concept de volume est en général abordé selon deux axes : géométrique et numérique. Le volume est l'espace occupé par un solide, une situation relevant de la géométrie spatiale, mais il peut être traité également d'un point de vue numérique par dénombrement souvent matérialisé par des petits cubes unités ou utilisation de formules. Cette dualité cadre géométrique/cadre numérique peut être toutefois une source de difficulté pour les élèves, comme l'évoque Moreira-Baltar pour la notion d'aire :

« Le fait que les situations-problèmes renvoient simultanément au cadre géométrique et au cadre numérique crée une difficulté importante lors de l'analyse des erreurs commises par les élèves et la recherche des sources de ces erreurs » (Moreira-Baltar, 1994-1995, page 190).

Par ailleurs, est-ce que le concept de volume s'inscrit uniquement dans les cadres géométrique (solide) et numérique (nombre), ne peut-on pas envisager un cadre physique, comme l'a fait Moreira-Baltar (2002) pour les aires où elle parle du « cadre grandeur » ?

Le concept de cadre est défini par Régine Douady (1986) :

« *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations*. » (Douady, 1986, page 11).

Les cadres sont les domaines mathématiques mobilisés pour décrire les problèmes et les traduire en termes opératoires. Selon la théorie de Douady (1986), le passage d'un cadre à un autre peut permettre la résolution d'un problème et donne du sens aux notions.

Pour nous, dans notre étude sur le volume, outre les cadres numérique et géométrique, le « cadre grandeur », est également mobilisé comme le rappelle Moreira-Baltar (2002) pour l'aire :

« *Les recherches développées par Douady et Perrin-Glorian les ont conduites à construire et expérimenter une ingénierie didactique pour l'enseignement de la notion d'aire, dans laquelle la construction de cette notion est basée sur la dissociation de trois cadres : le géométrique, avec les surfaces ; celui des grandeurs, avec les aires et le numérique, avec les mesures.* » (Moreira-Baltar, 2002, page 2)

Pour la notion de volume, on considère que l'on travaille dans le cadre numérique lorsqu'on manipule des nombres, dans le cadre géométrique lorsqu'il est question de solides et le cadre « grandeur » lorsqu'on travaille le volume physique et sa mesure sans les nombres. Souvent on passe d'un cadre à l'autre (discours de l'enseignant, des élèves et tâches proposées aux élèves), ce qui peut conduire à de nouvelles connaissances.

Plusieurs auteurs ont montré la difficulté des élèves face à la notion de volume. Rogalski (1982) caractérise une des difficultés : le dépassement du modèle linéaire pour arriver à un modèle multidimensionnel. Ricco, Vergnaud et Rouchier (1983) mentionnent que les élèves utilisent les notions de périmètre ou de surface pour calculer le volume :

« *L'analyse des procédures utilisées par les élèves et notamment des erreurs, montre que l'arithmétisation du volume est souvent opérée à l'aide d'une représentation de type « périmètre » ou de type « surface »* » (Ricco, Vergnaud, Rouchier, 1983).

Jean Piaget a travaillé sur la construction et les conservations des grandeurs physiques ; il a établi différents stades pour la maîtrise de ces notions. Même si depuis ces travaux, il a été montré une variabilité inter et intra individuelle, il nous paraît légitime de les citer ici. En effet, à propos de la construction de ces grandeurs en fonction de l'âge des enfants, Piaget a montré que les premières grandeurs construites sont la quantité de matière vers sept-huit ans, puis la masse vers huit-neuf ans et enfin le volume entre dix et douze ans (Piaget et Inhelder, 1962). Piaget, Inhelder et Szeminska (1973) donnent plusieurs significations au concept de volume : le volume intérieur et le volume occupé. Les auteurs définissent le volume intérieur, comme « intérieur aux surfaces frontières » (p. 433) et comme « la quantité de matière » (p. 445). Le volume occupé est défini comme « la place prise par le volume d'ensemble de l'objet » (p. 433).

Une des difficultés, bien connue des enseignants, est la dissociation masse/volume. La plupart des enfants pensent que lorsqu'on plonge un solide dans l'eau, ce qui explique l'élévation du niveau de l'eau, c'est la masse de l'objet, ne concevant pas que le volume se mesure à la place occupée par cet objet, indépendamment de sa masse. La dissociation du volume physique de la masse est acquise lorsque le sujet considère que la masse n'intervient pas mais que le volume se mesure à la place occupée par l'objet.

Dans une publication sur les concepts de taille, de masse, de matière et de substance chez les enfants de 3 à 9 ans, Carol Smith (Smith, 1985) montre que les concepts de masse et de densité (rapport masse/volume) se différencient chez les enfants au cours de leur développement. Les données montrent que les plus jeunes enfants ont un système théorique incluant des concepts distincts de masse, de taille et de matière et forment des généralisations en relation avec ces concepts (par exemple, la taille est grossièrement corrélée à la masse, les objets d'acier sont lourds *etc.*).

En complément de la bibliographie et dans le cadre de nos recherches, pour avoir une idée de l'évolution des conceptions des élèves sur les notions que nous étudions, nous avons fait passer des tests à des élèves de CM2, 6ème et 5ème. Parmi plusieurs questions, nous nous intéressons à celle

concernant le volume et sa conservation dans la mesure où elle nous renseigne sur le degré de conceptualisation de la notion de volume des élèves (Annexe 1).

Environ deux tiers des élèves de ces classes indiquent que le niveau de l'eau augmente lorsqu'on y plonge un objet. Le pourcentage d'élèves de ces mêmes classes qui savent que le volume se conserve lorsqu'on fait subir une déformation à l'objet est plus faible (environ 50 %).

Ces chiffres nous questionnent, surtout pour des élèves de Cinquième qui, d'après Piaget, ont dépassé l'âge auquel cette notion est acquise. D'où l'intérêt de se pencher sur l'enseignement de ces grandeurs, enjeu en mathématiques et en sciences physiques (en chimie par exemple, dissocier quantité de matière, volume, mole…).

Les résultats des tests en 6ème et 5ème confirment que les difficultés persistent au collège, le concept de volume se construit effectivement lentement chez l'enfant, comme l'ont montré les études de Piaget.

III - LES PROGRAMMES

Nous examinons comment l'institution propose l'enseignement du concept de volume. Nous regardons cette notion dans les programmes en vigueur à l'école et au collège (cf. Annexe 2). Même si nous nous intéressons ici à l'enseignement du volume à l'école, nous regardons brièvement les programmes du collège, cette étude étant une partie d'un projet sur la transition école/collège.

À l'école primaire comme au collège, on trouve dans les programmes de mathématiques, dans la partie « grandeurs et mesure », la notion de volume. Le volume est donc considéré comme une grandeur, au même titre que l'aire, la masse…

À l'école, au cycle 2, les contenances sont étudiées puis au cycle 3, seule la formule du volume du pavé droit est exigée. Dans le socle commun sont mentionnées les principales grandeurs dont le volume.

Pour les programmes du collège, il est demandé de savoir déterminer le volume d'un certain nombre de solides (par dénombrement d'unités ou formules), de connaître les unités de volume et de les relier aux unités de contenance.

Force est de constater que c'est l'aspect numérique qui est davantage mis en avant dans les programmes, même si le travail sur les unités de mesure peut être considéré dans le cadre grandeur si, comme nous l'avons précisé précédemment, il ne fait pas intervenir de nombre.

Il est intéressant de remarquer dans le document d'accompagnement du collège « grandeurs et mesures », le seul document d'accompagnement par ailleurs où il est fait mention du volume, la phrase suivante (p 20 et 21) :

« Pour justifier la formule donnant le volume de la pyramide ou du cône, on peut recourir à du matériel pédagogique permettant de comparer le volume d'une pyramide et du cylindre de même base et de même hauteur en comparant les masses d'un même liquide avec lequel on les remplit. »

Ici on constate que la masse et le volume/contenance sont mis en relation. Il est possible d'interpréter cet extrait comme supposant de mobiliser le concept de masse volumique.

IV - LES MANUELS SCOLAIRES

Nous avons analysé sept manuels scolaires de CM2 : Cap maths (Hatier), Euro Maths (Hatier), Maths + (SED), Outils pour les maths (Magnard), Au rythme des maths (Bordas), Maths tout terrain (Bordas), À portée de maths (Hachette). Nous avons également regardé les manuels de CE2 et CM1 d'Euro Maths afin de prendre en compte le cycle 3 de manière complète.

Nous considérons les manuels à la fois comme des exemples de savoirs enseignés et des ressources pour les enseignants. Nous regardons quels sont les cadres (numérique, géométrique ou grandeur) qui sont privilégiés dans ces manuels. Une même activité, selon la manière dont elle est menée, peut conduire à privilégier un cadre ou un autre, ou plusieurs cadres.

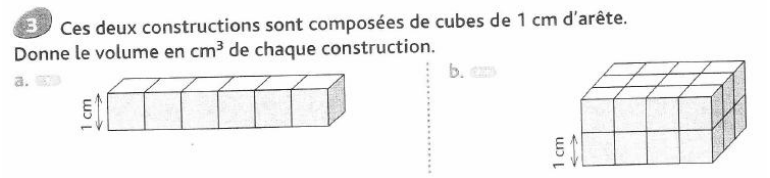
Les tâches proposées se réunissent en trois grands types :

- Trouver le volume de pavés droits par comptage de cubes unités.
- Utiliser la formule du pavé droit (pour calculer le volume d'un pavé droit connaissant ses dimensions ou calculer une dimension du pavé connaissant son volume et les autres dimensions).
- Convertir entre unités du système (relation volume/contenance, m^3/L).

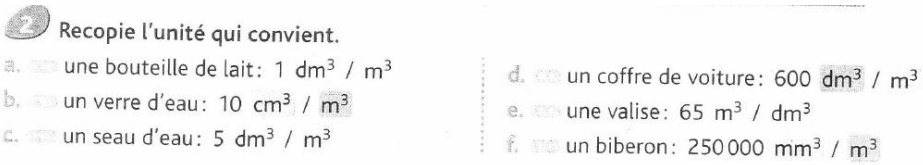
De manière plus précise, nous analysons les tâches associées au concept de volume, comment elles peuvent être résolues par les élèves, en regardant deux manuels, l'un qui paraît présenter une variété d'exercices et l'autre, faisant appel à un seul type d'exercices sauf dans son activité introductive. Nous nous référons dans ces manuels aux exercices et activités ne relevant pas du cadre numérique.

Au rythme des maths (Bordas) (en annexe 3.A)

Nous nous intéressons à ce manuel car, parmi les sept manuels étudiés, c'est celui qui fait intervenir le panel le plus grand d'exercices, impliquant plus de cadres, contrairement aux autres qui privilégient le cadre numérique.



Les élèves doivent donner le volume de deux pavés composés de petits cubes unités, le premier étant composé de six petits cubes alignés (une seule dimension) et le deuxième étant construit sur les trois dimensions. Le premier ne doit pas poser de réelles difficultés puisque d'une part, tous les cubes sont visibles et d'autre part, les élèves ne sont pas confrontés au problème lié à la multi-dimensionnalité. Pour le deuxième, les élèves ne doivent pas oublier les cubes qui ne se voient pas sur la figure. Certains rencontrent des difficultés avec les cubes des "coins" ne voulant pas les compter trois fois dans le calcul du volume ; par exemple pour le pavé ci-dessus, au lieu de calculer 4 x 3 x 2, ils font 4 x 2 x 1, problème lié au passage à la multi-dimensionnalité. Ici aussi nous avons coexistence des deux cadres numérique (pour le dénombrement) et géométrique (pour la représentation spatiale).

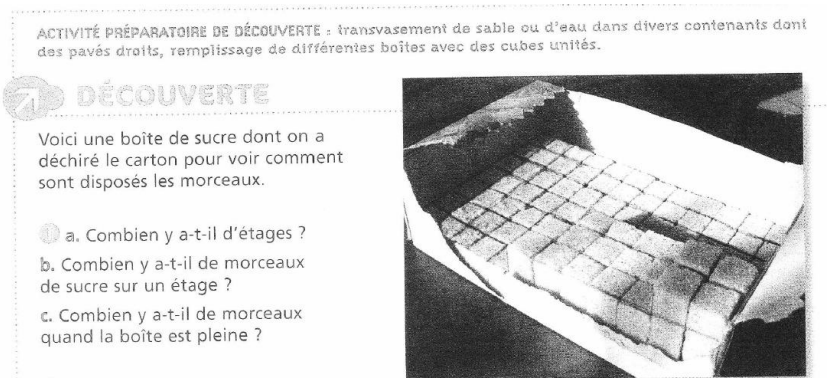


Il faut estimer une mesure en utilisant la bonne unité du système volumétrique. Six objets (bouteille, verre, seau, coffre de voiture, valise, biberon) sont proposés et pour chacun, une des deux unités de volume doit être choisie. Le cadre « grandeur » a été choisi par les auteurs (connaître les unités de mesure). Par le choix des objets, tous des contenants, l'élève est confronté à la notion de contenance qui, elle, en général, s'exprime en litre, du moins dans les manuels scolaires de l'école, et peut par conséquent déstabiliser l'élève. Notons que le choix des nombres est discutable (pour le coffre de voiture et le biberon) car il s'agit de travailler la grandeur, c'est-à-dire que pour les élèves se fassent une idée, il serait plus pertinent de convertir les « grands nombres » pour prendre conscience de l'unité qui sera la plus adaptée.

Euromaths (Hatier) (en annexe 3.B)

Tout d'abord, nous avons rapidement regardé l'ensemble des manuels du cycle 3. Seules les mesures de contenances sont étudiées en CE2 et CM1 ; en CM2, nous trouvons les contenances ainsi que le volume du pavé droit sur lequel nous nous focalisons.

Dans Euromaths, l'activité introductive est basée sur le remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités, la notion de volume est introduite dans un cadre grandeur, les élèves vont faire des expériences pour réaliser ce qui va être « mesuré » lorsque l'on parle de volume. Il est aussi recommandé des activités de transvasement dans différents contenants, on a donc un lien entre contenance et volume. Ensuite tous les exercices s'inscrivent dans un cadre numérique puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du pavé droit.



ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.

a. Combien y a-t-il d'étages ?

b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?

c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

En conclusion de cette étude de manuels scolaires, à part les exercices et activités dans le cadre grandeur présentés ci-dessus qui sont minoritaires, on constate que le cadre mobilisé est essentiellement le cadre numérique ; même dans le manuel le plus contrasté, puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du volume du pavé droit. On a donc une prédominance du cadre numérique en CM2, avec très peu d'exercices relevant du cadre grandeur. On peut se demander si les tâches vont être suffisantes aux élèves pour les initier à la construction de la notion de volume, vu que les exercices abordant cette notion ne font appel qu'à des calculs numériques.

On note également l'absence de prise en compte de la dissociation masse/volume et d'activités de mesure (sans l'intervention des nombres).

Les grandeurs peuvent donner une signification aux nombres et réciproquement les nombres permettent l'étude des grandeurs et de leur mesure. Mais il semble nécessaire que la grandeur soit construite par les élèves en dehors des nombres. La plupart des didacticiens s'accordent sur le fait qu'un travail spécifique sur le sens de la grandeur doit être mené indépendamment de la mesure. La maîtrise des activités dans un cadre numérique ne garantit pas que les élèves aient construit le sens de la grandeur.

Dans son mémoire de Master, Anwandter (2008) parvient aux mêmes conclusions que nous pour les manuels de collège où l'application des formules de la mesure de différents solides prédomine.

V - DIFFÉRENTES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Face aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la notion de volume, comment les enseignants gèrent-ils les cours sur le volume, quels choix didactiques font-ils ? La construction de ce concept peut-elle se faire séparément d'autres grandeurs comme celle de la masse, cela a-t-il un sens, ou faut-il les enseigner simultanément pour pouvoir les différencier car trop d'enfants ne distinguent pas la masse du volume et ce, même au collège ? Nous allons voir ici l'approche de trois enseignants, le premier (Carole) suivant les instructions de CM2 (formule du pavé droit), le deuxième (David) séparant clairement l'enseignement des deux concepts (masse et volume) et la troisième (Hannah) voulant aborder explicitement la dissociation des deux grandeurs. Nous regardons quel cadre ils vont privilégier. Nous ne connaissons pas les ressources

utilisées par ces enseignants pour la préparation de leur séquence, d'autant plus qu'aucun manuel scolaire n'a été utilisé lors des séances.

1 La séance de Carole

Analyse *a priori*

Carole étudie la mesure du volume du pavé droit. La durée consacrée à ce travail est une séance d'environ une heure et quart.

La première tâche est de calculer la mesure du volume d'un pavé droit à l'aide du matériel suivant : une boîte vide et des petits cubes. La deuxième tâche est de construire un pavé droit à l'aide des petits cubes et d'en calculer son volume à l'aide d'une des méthodes proposées dans la première tâche, ce qui constitue un réinvestissement des connaissances mobilisées lors de la première tâche. Nous n'analyserons pas le déroulement de la deuxième tâche ici.

Analyse de la première tâche :

Il s'agit de calculer le volume d'un pavé droit (boîte) en la remplissant de petits cubes. Les procédures possibles sont :

- remplir entièrement la boîte de petits cubes que l'on dénombre ;
- tapisser le fond de la boîte de petits cubes que l'on dénombre soit un par un soit en utilisant la formule de l'aire du rectangle ; puis construire la hauteur et la multiplier par l'aire ;
- construire un "squelette" de pavé droit constitué d'une longueur, d'une largeur et de la hauteur et multiplier ces trois nombres.

Analyse du déroulement

Carole présente le thème de la leçon, à savoir la mesure du volume du pavé droit. Elle va donc d'abord demander aux élèves de lui rappeler la définition du pavé droit, qu'ils ont rencontrée en géométrie plus tôt dans l'année (« *Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles*. »). Nous pouvons pointer ici que la définition est incomplète puisque Carole ne précise pas que le pavé possède six faces. Elle leur demande ensuite ce que veut dire le mot volume.

Les élèves proposent :

- la profondeur ;
- l'épaisseur et la taille ;
- les mètres cubes [Ici Carole fait remarquer qu'il s'agit de la mesure et non de la grandeur. Pour l'instant, elle veut que les élèves définissent la grandeur.] ;
- combien de petits carrés on peut mettre à l'intérieur ;
- la surface de l'intérieur. [Carole insiste sur le mot « intérieur », et reformulera avec « la mesure de l'intérieur du solide ».].

Les éléments de réponse de quelques élèves ont une certaine pertinence. Il est intéressant de noter que la majorité des élèves se placent dans un cadre grandeur pour définir le mot volume (surface, profondeur, taille, unité) ; un élève se situe dans le cadre numérique (nombres de petits carrés).

Carole énonce ensuite la première tâche. Les élèves, par groupes de 4, doivent calculer le volume d'une boîte (pavé droit) à l'aide de petits cubes. Carole explique que le petit cube est leur unité de mesure. Elle saisit l'occasion pour faire un rappel sur les unités de mesure : pour un segment, l'unité de mesure est le centimètre ; pour la mesure de l'aire d'une surface, c'est le centimètre carré. Ici pour l'instant, l'unité est « le petit cube ». Après quelques minutes de travail en petits groupes, Carole propose une mise en commun ; un représentant par groupe explique ce que le groupe a fait.

Trois groupes tapissent le fond et multiplient par la hauteur.

Un groupe dénombre le nombre de longueurs (« *donc en fait, vous avez trouvé qu'il fallait chaque fois 6 cubes pour faire une rangée et vous avez calculé le nombre de rangées nécessaires*. »).

Un groupe construit un squelette (la longueur, la largeur et la hauteur) et multiplie les trois nombres entre eux.

La première procédure montre que les élèves réfléchissent à partir de deux dimensions (surface et hauteur). Il est intéressant de noter que les élèves n'ont pas rencontré de problème avec les cubes des "coins", le passage à la tridimensionnalité ne semble pas être un obstacle. Bien sûr ce travail étant un travail de groupe, on ne peut pas étudier chaque élève séparément.

Carole, pour conclure sur cette première tâche, va valider les trois procédures. Elle va cependant montrer que la dernière méthode sera la plus efficace, notamment lorsque les élèves seront devant leur feuille sans les petits cubes. Elle institutionnalise la formule du volume du pavé droit à partir des procédures des élèves.

La séance se termine sur une trace écrite :

« La mesure de volume d'un pavé droit »

« Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles. »

« Le volume d'un solide c'est la mesure de son intérieur. Pour calculer le volume d'un pavé droit, on multiplie la longueur (L) par la largeur (l) par la hauteur (h). »

$\mathcal{V}$ = L x l x h

« Si toutes les mesures sont en centimètres, alors le volume sera exprimé en cm^3. »

Après une introduction du mot « volume » dans un cadre plutôt géométrique, la séance de Carole est conforme au programme (formule du pavé droit) et proche de ce que l'on trouve dans les manuels scolaires, elle se positionne dans un cadre numérique. On peut remarquer qu'elle définit un « volume intérieur » d'après la classification de Piaget et qu'elle définit la grandeur par sa mesure.

2 La séance de David

Analyse *a priori*

La séance que nous analysons porte sur les contenances et les volumes. La durée prévue pour ce travail est d'une heure environ ; la séance suivante étant consacrée à des exercices de conversions d'unités. Deux tâches sont proposées aux élèves. La première tâche est de mesurer la contenance d'un récipient en utilisant un verre doseur puis une éprouvette pour plus de précision. La seconde tâche consiste à mesurer les volumes d'un petit ballon et d'un morceau de polystyrène. David annonce qu'il va travailler la notion de contenance avant celle de volume. Nous ne nous intéressons ici qu'à la deuxième tâche, celle sur la mesure de volume.

Analyse de la deuxième tâche

Il s'agit ici de mesurer le volume d'objets. Une procédure possible pour réaliser cette tâche est :

a. prendre un récipient gradué (ou le graduer) assez grand pour y introduire l'objet à mesurer ;
b. le remplir d'eau, suffisamment pour que l'objet puisse être immergé mais pas trop pour ne pas faire déborder l'eau lorsqu'on plonge l'objet ;
c. noter le volume d'eau initial ;
d. plonger l'objet dont on veut mesurer le volume ;
e. noter le nouveau volume d'eau ;
f. soustraire à ce dernier volume le volume initial.

On peut également envisager une seconde procédure correcte par débordement. Le récipient où l'objet sera plongé est rempli à ras bord. On plonge l'objet et on recueille l'eau qui a débordé. On mesure dans une éprouvette (ou un autre instrument de mesure de contenance) l'eau qui a débordé et qui correspond au volume de l'objet. Dans les deux cas, l'élève doit savoir que le volume de l'objet correspond au volume d'eau déplacé. L'emploi de cette technique nécessite d'avoir compris que le volume ne dépend pas de la profondeur à laquelle on immerge l'objet et suppose de faire abstraction du volume de l'objet utilisé pour provoquer son immersion si celui-ci ne coule pas.

Les objets choisis sont un petit ballon et un morceau de polystyrène.

Parmi les deux objets proposés, le ballon est creux. En termes de mesure de grandeurs, on pourrait mesurer son volume mais également sa contenance. Même si David envisage la mesure du volume pour cet objet, un élève qui ne distingue pas la contenance du volume, peut envisager de remplir le ballon d'eau et mesurer ainsi la contenance au lieu du volume. Il est vrai que si on néglige l'enveloppe de l'objet, cette procédure est acceptable puisque le volume et la contenance seront équivalents.

Le fait que ces deux objets flottent peut engendrer des problèmes techniques même chez les élèves qui mobilisent la grandeur. Les élèves peuvent se demander comment ils vont les immerger. Cela peut être réalisé avec une tige dont le volume est négligeable, mais également avec la main. Dans ce dernier cas, l'ajout du volume de la main fausse la mesure. L'utilisation d'objets qui flottent, pour un élève qui ne dissocie pas la masse du volume, peut également mobiliser la notion de masse « il flotte car il est léger ».

Analyse du déroulement

La séance se déroule de manière collective. Un élève est au tableau avec David pour l'aider dans la réalisation de ses expériences, les autres élèves sont assis à leur bureau. La partie sur les contenances dure 8 minutes et celle sur les volumes moins de 25 minutes. Le reste de la séance est consacré à des exercices d'application ; la construction du tableau de conversion des capacités comme trace écrite clôt la séance. Rien n'est noté sur la notion de volume.

David explique que la séance va porter sur les mesures de contenance et de volume. On s'intéresse ici à la partie sur le volume.

Tout d'abord, nous verrons tout au long du déroulement que lorsque l'enseignant invalide les propositions des élèves, il le fait d'un point de vue technique.

Nous constatons, dans un premier temps, une confusion entre contenance et volume que ce soit chez l'enseignant ou chez les élèves. Les élèves proposent de mettre de l'eau dans le ballon ou proposent de mesurer l'eau contenue dans le ballon. Ils raisonnent sur la notion contenance au lieu de volume. David explique qu'il ne faut pas remplir le ballon d'eau pour des raisons pratiques. Il invalide cette procédure d'un point de vue technique, le ballon peut se crever. Mais il ne fait pas remarquer aux élèves qu'ils sont en train de parler de contenance au lieu du volume.

Nous constatons, dans un deuxième temps, la confusion volume/masse chez les élèves. « *On met de l'eau dans l'aquarium et si le ballon flotte c'est qu'il est moins lourd* ». Cette confusion avec les masses est favorisée par l'utilisation d'objets qui flottent. Les élèves anticipent cette flottaison. En effet, ce phénomène est souvent expliqué par les élèves par la notion de masse, principale conception erronée de ce phénomène, qui doit mobiliser la masse volumique. Par conséquent les élèves vont se focaliser sur la masse, notion que David veut éviter.

Cet enseignant a fait le choix de bien séparer les grandeurs physiques, et ne pas travailler la masse dans cette séance. À plusieurs reprises, les élèves mobilisent cette notion ; David fait remarquer que ce n'est pas le sujet du jour et qu'il ne va pas s'en occuper :

E : le ballon il est plus léger que

D : alors attention léger ça s'adresse à quoi, aux mesures de

I : masse

D : donc est-ce qu'on va pouvoir utiliser le terme lourd/léger dans les mesures de volume ?

[…]

E : il est plus léger que le ballon, alors le volume d'eau va monter

D : attention. Est-ce qu'on utilise ce terme léger ? Moi ce que je cherche, c'est quoi, c'est le volume du morceau de polystyrène, léger, le poids je m'en moque complètement, on en a déjà parlé, on l'a vu avant, moi c'est quel volume il fait, pourquoi ça peut être important d'avoir le volume de ce morceau de polystyrène. Si on veut envoyer un colis par la poste il faut savoir quelle taille, y a des petits, des grands, des très très grands, il faut savoir le volume pour pouvoir l'envoyer

D : donc on revient ici, y a pas de problème de poids [David immerge le morceau de polystyrène].

Pour la première fois dans la séance, David donne une situation concrète de la mesure de volume. Il propose aux élèves une situation de la vie quotidienne dans laquelle la mesure d'un volume est nécessaire. On peut noter que son exemple de colis n'est peut-être pas très adapté, car là encore, l'envoi d'un colis nécessite aussi de connaître sa masse.

> *D : attention elle a bien dit le ballon il pèse. Alors attention, est-ce qu'il pèse vraiment, qu'est-ce qu'on cherche nous ?*

David veut tellement éviter la masse et centrer son cours sur le volume qu'il finit par dire que le ballon n'a pas de masse.

L'analyse des extraits montre que David veut séparer la masse du volume, mais ceci semble difficile. Il souhaite tout au long de sa séance ignorer la masse, mais on voit bien que cela n'est pas possible par les situations choisies. Le choix des objets a sûrement compliqué la réalisation de la tâche. L'utilisation d'objets qui flottent oriente les élèves sur la masse.

David explicite les problèmes techniques (il a pris un ballon car des boules de pétanque auraient pu casser l'aquarium ou on ne met pas d'eau dans le ballon car il va se crever), mais pas les problèmes de compréhension comme les confusions des grandeurs auxquelles les élèves sont confrontés. Les élèves n'ont pas construit les différentes notions, alors que David est parti du fait que ces notions étaient déjà connues.

Enfin, David choisit de travailler sur le volume d'un point de vue physique (cadre grandeur) et il ne travaille pas sur la formule du volume du pavé droit (cadre numérique). En revanche, il continue ensuite sa séance sur la conversion des unités de capacité. L'institutionnalisation du tableau de conversion des unités de capacité clôt la séance.

3. La séance de Hannah

Analyse *a priori*

Hannah va consacrer cinq séances d'une heure à la notion de masse, à raison d'une par semaine. Contrairement à David, elle choisit, lors de cette séquence, de faire un travail explicite sur la dissociation masse/volume. Lors de la première séance et le début de la deuxième, deux tâches sont proposées aux élèves. Nous analysons la deuxième tâche.

Tâche 2 : La tâche principale est de savoir quel est, pour des groupes d'objets, celui qui est le plus lourd. Dans un premier temps, les élèves observent les objets, puis dans un deuxième temps, ils peuvent toucher les objets, et enfin dans un troisième temps, ils peuvent les ouvrir afin de voir ce qu'ils contiennent. À chaque étape, Hannah procède à une mise en commun. Le choix des objets a été réfléchi dans le but d'une dissociation des deux grandeurs masse et volume. Parmi les objets choisis, nous en retenons ici deux :

- Deux cartons, l'un volumineux et léger (A), l'autre moins volumineux et plus lourd (B).

On ne voit pas ce qu'il y a à l'intérieur des cartons. Par ces deux choix, elle veut montrer aux élèves que les objets les plus volumineux ne sont pas forcément les plus lourds. Lors de la première étape, soit les élèves sont conscients qu'on ne peut pas répondre à la question sans soupeser ou savoir ce qu'il y a l'intérieur des cartons ou des sacs, soit la conception erronée que le plus volumineux est le plus lourd va émerger. Lors de la deuxième étape, les enfants peuvent toucher les objets. Ici, aucun doute pour savoir celui qui est le plus lourd lorsqu'on soupèse. Les enfants, qui ne savaient pas répondre, vont pouvoir percevoir la masse des objets et donc répondre correctement. D'autres, non déstabilisés, resteront sur leurs idées. La troisième étape devrait convaincre les plus réticents.

- Deux pots de confiture, l'un rempli de pistaches (A) et l'autre d'amandes (B), les niveaux étant identiques. Hannah a choisi deux objets de même volume qui n'ont pas une masse identique.

Comme ici, contrairement aux cartons, les pots sont transparents, les élèves sont conscients du contenu. Certains élèves raisonnent sur le fait que le volume occupé par les fruits secs est le même dans les deux pots. Par conséquent, s'ils ne dissocient pas la masse du volume, ils

proposent des masses identiques. Ils peuvent également raisonner sur le nombre de fruits secs dans chaque pot.

Analyse du déroulement

Ici l'objectif est de regarder une enseignante qui, lors du cours sur les masses, associe cette grandeur à celle de volume.

Regardons les réponses des élèves aux comparaisons de masses des objets lors de la première partie de la deuxième tâche, lorsqu'ils ne font que regarder les différents objets.

Pour les cartons : les cinq groupes pensent que le carton B est le plus lourd avec des arguments liés au volume, « le plus gros étant le plus lourd ».

D'autres élèves mobilisent un autre raisonnement lié au fait qu'un des cartons est en mauvais état. Ces élèves font référence à la vie quotidienne : le contenu du carton est plus lourd que l'autre, ce qui entraine sa déformation, *« il est plus lourd parce que le carton il s'est cassé »*.

Certains élèves relient également dur et lourd, des situations qu'ils ont pu rencontrer dans la vie de tous les jours. Le fait que l'objet soit dur signifie, pour eux, qu'il est lourd.

Pour les pots de confiture, deux groupes pensent que le pot A est plus lourd car *il y en a plus.* Ces élèves raisonnent sur le nombre sans prendre en compte la masse. Trois groupes pensent que le pot B est plus lourd car *les amandes sont plus lourdes que les pistaches*. Ils raisonnent sur la masse d'un objet ou sur la masse volumique. Aucun élève ne raisonne sur le volume total.

Tout au long de son activité, par le choix des objets, Hannah essaie de dissocier la masse du volume. Son objectif était de voir de quoi dépend la masse et pour cela, elle se place, comme David, dans un cadre non numérique, plutôt dans un cadre grandeur.

Lors de la construction de la trace écrite, pour elle, la masse ne dépend pas du volume mais que de la matière c'est-à-dire de la masse volumique. Elle n'envisage que la matière qui constitue l'objet comme variable de la masse. Or, la masse dépend du volume pour un objet constitué de la même matière. Mais Hannah ne précise pas qu'elle isole certaines variables. Par conséquent, les élèves ne peuvent plus suivre son raisonnement. En effet, on est en présence d'une relation fonctionnelle à trois variables. Hannah en fixe une sans le préciser aux élèves. Elle veut montrer que ce n'est pas forcément l'objet le plus volumineux qui est le plus lourd, sauf que, si on est en présence d'objets de même matière, l'objet le plus volumineux sera le plus lourd.

H : alors on peut le peser mais qu'est-ce qu'on peut faire aussi pour savoir s'il est lourd ou s'il est léger

[…]

H : ah super il faut savoir ce qu'il y a dedans

[…]

H : le soupeser, je peux voir s'il est lourd ou s'il est léger, mais je peux aussi regarder ce qu'il y a dedans s'il est rempli de coton ce carton, est-ce qu'il va être lourd ou est-ce qu'il va être léger ?

[…]

H : donc ça dépend de ce qu'il y a dedans, d'accord, et ben pour les objets c'est la même chose ça dépend ce qu'il y a comme matière dedans, d'accord avec quoi c'est fabriqué.

La notion de masse volumique est sous-jacente dans les propos de Hannah puisqu'elle relie la masse d'un objet à la matière qui le constitue mais elle oublie une des variables, le volume.

H : d'accord, chut, en fait la masse elle dépend pas du volume, de la taille, elle dépend de ce qu'il y a dedans, de ce avec quoi c'est fabriqué, de la matière qui compose l'objet, d'accord.

Par conséquent, les élèves considèrent maintenant uniquement la matière et ne tiennent plus compte du volume. Hannah essaie de leur montrer qu'il y a trois variables qui sont reliées entre elles :

H : donc ça ne dépend pas, c'est difficile, il faut savoir si c'est des matières différentes, mais il faut savoir si c'est la même matière s'il y a la même quantité, s'il y a la même quantité de matière.

Malgré cette remarque, elle leur fait écrire : ***« La masse ne dépend pas du volume ou de la forme mais du matériau dont il est constitué ».***

Il est peut-être difficile de relier les trois grandeurs ensemble chez des enfants de cet âge mais si cela n'est pas fait, la trace écrite n'est pas complète. On a en effet deux cas, lorsque la matière est la même, masse et volume varieront dans le même sens mais lorsque les matières sont différentes, ce ne sera plus le cas.

Au cours de ces séances, nous avons vu une enseignante voulant aborder la dissociation des différentes grandeurs physiques par le choix des objets qu'elle a pris pour les expériences menées en classe. Elle a relié la masse au volume ainsi qu'à la matière tout au long de la séance mais lors de la trace écrite, elle n'envisage plus que la matière. On note ici beaucoup d'implicites lors de la construction de cette trace écrite. En effet, en négligeant un paramètre, la trace écrite n'est pas assez précise : la masse de deux objets dépend du volume si la matière est la même. Il semble difficile de relier trois grandeurs simultanément comme l'a montré Viennot.

VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons constaté que les programmes s'inscrivent plutôt dans un cadre numérique (formule).

Les manuels scolaires travaillent pour la plupart le sens de la grandeur dans l'activité introductive puis dans les exercices s'inscrivent pratiquement exclusivement dans un cadre numérique.

Nous avons vu au travers des séances d'enseignants, des approches différentes avec dans tous les cas un travail sur le sens de la grandeur. Carole commence par un travail sur la grandeur en faisant manipuler des solides. Puis on peut considérer que le cadre numérique est mobilisé à travers des activités de dénombrement de cubes unité pour construire une définition de la grandeur, puis à partir de ce travail elle construit la formule du pavé droit, conformément aux programmes en vigueur. David et Hannah font un cours sur le volume sans aborder la formule du volume du pavé droit comme indiqué dans les instructions officielles. Ils se placent dans un cadre « grandeur ».

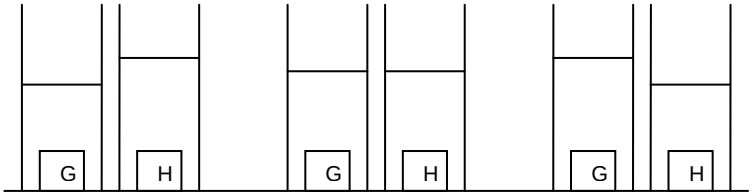
David, pour sa séance sur le volume semble avoir fait l'hypothèse qu'il est plus simple d'aborder cette grandeur indépendamment de la masse. Cependant, le choix d'objets qui flottent entraîne les élèves sur les questions difficiles de la flottaison qui, pour eux, induisent forcément la notion de masse, concept que David veut absolument écarter. Son choix de séparer ses leçons sur la masse et sur le volume aurait pu être judicieux s'il avait utilisé d'autres valeurs des variables didactiques ne faisant pas intervenir la notion qu'il veut à tout prix éviter : la masse. Il n'a pas été conscient des enjeux de ses choix. Cet enseignant a fait le choix d'enseigner les différentes grandeurs les unes après les autres sans jamais les relier entre elles. On a vu qu'il était très difficile d'ignorer la masse lors de l'étude du volume. David se heurte également au fait que les élèves n'ont pas du tout construit les notions de contenance et de volume contrairement à ce qu'il pensait. De plus, David refuse les explications ou propositions qui ne font pas intervenir le volume uniquement mais il reste à la charge des élèves de comprendre la raison du rejet de leurs propos.

Hannah a fait le choix de relier la masse et le volume en construisant une séance où les élèves manipulent plusieurs objets pour dépasser leur conception erronée, mais les choses ne sont pas si simples. Comme nous l'avons vu, les élèves ne parviennent pas à faire varier plusieurs paramètres simultanément. Elle va notamment relier la masse au matériau, c'est-à-dire à la matière, ce qui sous entend la masse volumique sauf que les élèves vont se focaliser sur ces deux paramètres en oubliant la notion de volume.

Ces approches très différentes ont généré des activités différentes chez les élèves (il n'est pas toujours facile d'y avoir accès en phase collective), c'est pour cela que nous regardons les résultats des tests que nous avons élaborés. Cependant, il faut être prudent dans l'analyse de ces tests (pas de test préalable, les classes ne sont pas au même niveau). Nous donnons ici les résultats à la

question présentée précédemment (Annexe 1) (à savoir 1°) que devient le niveau de l'eau d'un récipient lorsqu'on plonge une boule de pâte à modeler à l'intérieur, 2°) que devient le niveau de l'eau quand on transforme la boule en galette) ainsi qu'à une troisième retranscrite ci-dessous sur la distinction masse/volume.

3. Les objets G et H sont deux cubes de même taille. H est plus lourd que G. Avant l'expérience, l'eau était au même niveau dans les deux récipients. On plonge les cubes G et H dans l'eau. Quel est alors le niveau de l'eau ?



	Question 1 (%)*	Question 2 (%)	Question 3 (%)
Carole	65	40	25
David	84	32	32
Hannah	50	57	43

**Il s'agit ici du pourcentage de réussite.*

On constate que, pour la première question, les élèves de David sont plus nombreux à répondre correctement, ce que l'on peut expliquer par le fait que David a réalisé l'expérience en classe.

Hannah qui travaille la dissociation masse/volume a le taux le meilleur pour la question 3 et ce malgré une classe très faible ; le test comprenait de nombreuses autres questions, les résultats pour la classe de Hannah sont en dessous de la moyenne.

On observe beaucoup d'ambiguïté dans le concept de volume (contenance, volume), que ce soit dans les manuels ou dans les pratiques enseignantes. Il semble nécessaire de développer la formation des enseignants dans le domaine des grandeurs et mesures, à la fois pour améliorer leur maîtrise des concepts en jeu, pour qu'ils soient en mesure de mettre en œuvre les prescriptions officielles et d'avoir du recul sur les enjeux de ces prescriptions qui sont parfois pointues sur ces questions. Nous avons encore besoin de mieux comprendre ce qui se joue à l'intérieur de la classe sur ces questions pour pouvoir développer des ingénieries de formation pour les enseignants, car cela nous semble un objectif essentiel pour les recherches en didactique des sciences.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ANWANDTER N. (2008) Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume, mémoire de master 2, Université Montpellier 2.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1991-1992) Le poids d'un récipient étude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N*, **50**, 65-87.

CHESNAIS, A. (2009) Analyse de pratiques d'enseignants – analyse *a posteriori* de séances. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel, P., Vandebrouck F., & Wozniak F. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV*ème *Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand, Août 2009.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2)**, 5-31.

MOREIRA BALTAR P. (1994-1995) Etude des situations autour du concept d'aire de surface plane. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaire n°171, 189-218.

MOREIRA BALTAR P., BELLEMAIN P. (2002) Une étude comparative des choix de transposition didactique à propos du concept d'aire en France et au Brésil, *Actes de la XI*ème *école d'Eté de didactique des Mathématiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

PIAGET J. & INHELGER B. (1962) Le développement des quantités physiques chez l'enfant : conservation et atomisme, Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELGER B. & SZEMINSKA A. (2ème ed. 1973) La géométrie spontanée de l'enfant. Paris P.U.F.

RICCO G., VERGNAUD G. & ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4(1)**, 27-69.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2(4)**, 505-528.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade classe. *Educational studies in mathematics*, **59(1)**, 269-298.

ROBERT A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : Une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Éd. Octarès, 33-44.

ROGALSKI J. (1982) Acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, **3(3)**, 343-396. La pensée sauvage.

SMITH C., CAREY S. & WISER M. (1985) On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight and density. *Cognition*, **21(3)**, 177-237.

VIENNOT, L. (1992) Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, **14**, 127-141.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, hors série n°3 du 19 juin 2008, *programme de l'école primaire*.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, n°6 du 28 août 2008, *programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématiques*.

Document d'accompagnement collège grandeurs et mesures, octobre 2007

Socle commun des connaissances et des compétences, Ministère de l'éducation nationale, décret du 11 juillet 2006.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM2, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM1, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CE2, 2010.

Cap maths, R. Charnay, G. Combier, M.-P. Dussuc, D. Madier, Hatier, CM2, 2010.

Maths +, A. Dausse, C. Augé, P. Bérat, SED éditions, CM2, 2012.

Outils pour les maths, S. Carle, S. Ginet, I. Petit-Jean, Magnard, CM2, 2011.

Au rythme des maths, J. Hélayel, C. Fournié, Bordas, CM2, 2010.

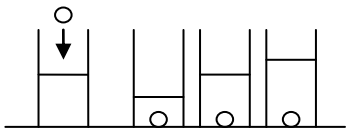
Maths tout terrain, X. Amouyal, J. Brun, A. Errera, Bordas, CM2, 2011.

A portée de maths, A. Caloudis, J. Leclec'h-Lucas, J.-C. Lucas, L. Meunier, Hachette, CM2, 2009.

VIII - ANNEXES

Annexe 1 : Tests (extraits)

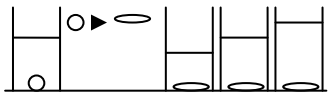
1. Quel sera le niveau de l'eau quand on aura plongé une nouvelle boule de pâte à modeler dans le récipient rempli d'eau ? *Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.*



☐ ☐ ☐

2. On plonge une nouvelle boule de pâte à modeler dans l'eau, on repère le niveau de l'eau. On enlève la boule de pâte à modeler, on la transforme en galette et on la remet dans l'eau. Quel sera le niveau de l'eau ?

Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.



☐ ☐ ☐

Annexe 1 : Synthèse des réponses obtenues :

Classe	Question 1 Moyenne*	Question 2 Moyenne	Les 2 questions justes Moyenne
14 classes de CM2	62%	53%	28%
6 classes de 6è	70%	48%	26%
4 classes de 5è	64%	56%	33%

*Il s'agit ici de la moyenne de réussite à ces questions sur les classes de CM2 (effectif 289 élèves), de 6è (effectif 68 élèves) et de 5è (effectif 86 élèves).

Pour les « non réussites », voici le détail des réponses des élèves. On n'observe pratiquement aucune « non réponse » (inférieur à 0,5%).

classe	Question 1		Question 2	
	Niveau plus bas	Niveau identique	Niveau plus bas	Niveau plus haut
CM2	9%	28%	14%	33%
6è	2%	28%	12%	40%
5è	6%	30%	21%	24%

Annexe 2 : Extraits des programmes école et collège

Programme CE2, CM1, CM2 :

Mathématiques

3. Grandeurs et mesures

Les longueurs, les masses, les volumes : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur ces mesures exprimées, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, du volume du pavé droit.

Progressions CE2, CM1, CM2

CM2 : - Formule du volume du pavé droit.

Programme mathématiques du collège

Préambule :

3. Organisation des contenus

Grandeurs et mesures

- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées)
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés

Classe de sixième :

- Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle en se rapportant à un dénombrement d'unités,* *en utilisant une formule*
- Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance
- Savoir que 1 L = 1 dm^3
- *Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure*

Classe de cinquième :

- Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle
- *Calculer le volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution*
- Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure

Classe de quatrième :

- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = 1/3\ B\ h$

Classe de troisième :

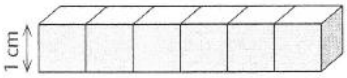
- *Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné*
- Calculer le volume d'une boule de rayon donné
- Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k
  - l'aire d'une surface est multipliée par k^2
  - le volume d'un solide est multiplié par k^3

Annexe 3.A : **Extraits de manuels :**

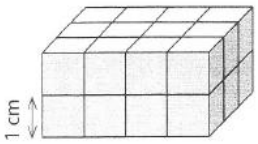
- Au rythme des maths CM2 (Bordas) (volume du pavé droit) (2 pages)

3 Ces deux constructions sont composées de cubes de 1 cm d'arête.
Donne le volume en cm^3 de chaque construction.

a.



b.



Calculer des volumes

4 Calcule le volume de chaque pavé.
a. Dimensions du pavé n° 1 : 3 m × 1 m × 2 m
b. Dimensions du pavé n° 2 : 4 dm × 5 dm × 6 dm

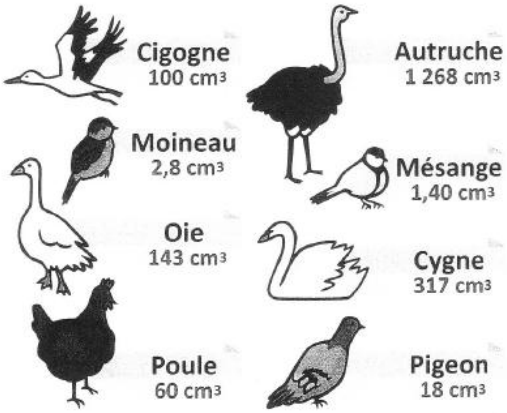
TEST

5 Pour chaque exercice, choisis la réponse A, B ou C qui convient.
Vérifie tes réponses page 140.

	A	B	C
1. Le volume d'un pavé se mesure en...	cm^3	cm^2	cm
2. Pour calculer le volume d'un pavé, je pose...	$L \times \ell$	$(L + \ell) \times 2$	$L \times \ell \times h$

Je résous des problèmes

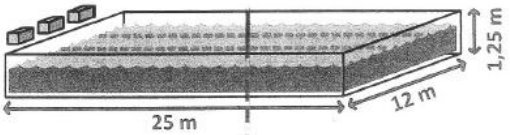
6 Voici le volume d'un œuf pondu par chacun de ces oiseaux.



a. Range les œufs du plus petit au plus gros.
b. Recopie et complète : « L'œuf du moineau a un volume double de l'œuf de ... . »

7 Erwan a une boîte dont les dimensions sont les suivantes : 12 cm, 4 cm, 90 cm.
Calcule le volume (en cm^3) de la boîte.

8 Une piscine mesure 25 m de long sur 12 m de large et a une profondeur de 1,25 m.
Calcule le volume d'eau (en m^3) contenu dans la piscine.



9 En travaux manuels, Lisa a fabriqué un assemblage avec 3 blocs de mousse.
Calcule le volume (en cm^3) de cet assemblage.
Dimensions de 1 bloc de mousse :
15 cm, 8 cm, 5 cm

Tout dans la tête

Les dimensions d'une boîte sont 8 cm, 5 cm, 9 cm.
Calcule son volume.

Question Express

Combien de cubes de 1 cm^3 peut-on mettre dans 1 dm^3 : 10, 100 ou 1 000 ?

Annexe 3.B : **Extraits de manuels :**

- Euromaths Hatier CE2 (mesures de contenances) (2 pages)
- Euromaths Hatier CM1 (mesures de contenances) (1 page)
- Euromaths Hatier CM2 (mesures de contenances) (2 pages) et (volume du pavé droit) (2 pages)

72

CALCUL MENTAL. Encadrer un nombre par deux multiples de 6.
Reprendre avec les multiples de 7.

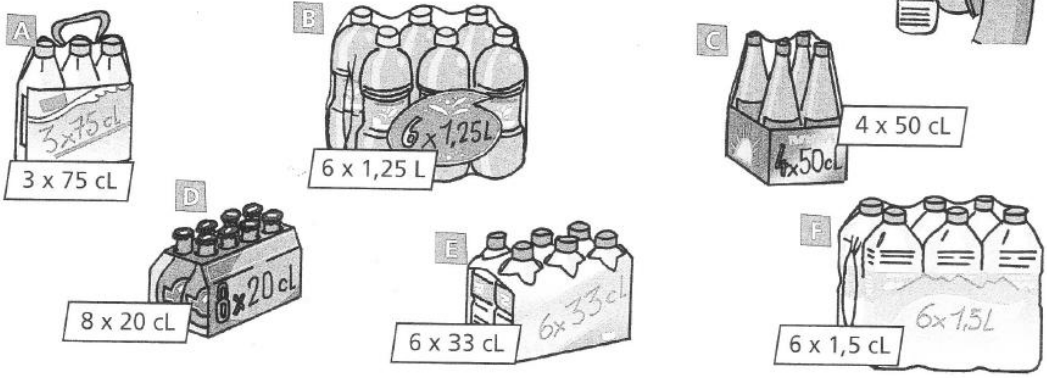
Mesures de contenances

Objectifs : comprendre les relations entre litre (L), centilitre (cL), demi-litre (1/2 L ou 50 cL) et effectuer des opérations simples.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE : transvaser de l'eau avec des bouteilles de différentes contenances. Établir les relations entre litre (L) et centilitres (cL), entre 1/2 L et 50 cL, entre 1,5 L et 1 L 50 cL, entre 1,25 L et 1 L 25 cL.

DÉCOUVERTE

1 Pour chaque pack, calcule la quantité totale d'eau minérale.



2 Range les quantités d'eau contenues dans ces packs de la plus petite à la plus grande.

EXERCICES

1 a. Dans le verre doseur A, on verse 25 cL de lait.

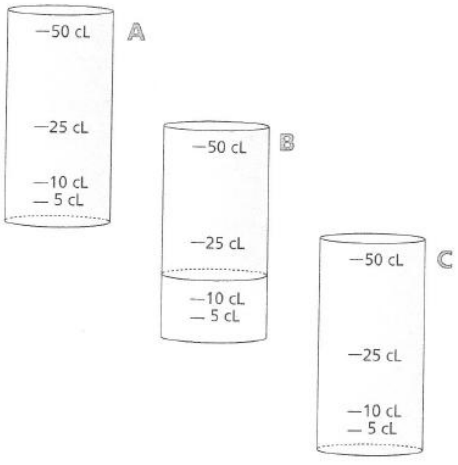
Décalque ce verre doseur et trace un trait pour marquer le niveau du lait dans ce verre.

b. Quelle quantité de lait a-t-on versée dans le verre doseur B ?

9 cL 15 cL 20 cL 35 cL

c. Dans le verre doseur C, on verse le contenu des verres A et B.

Décalque le verre doseur C et trace un trait pour marquer approximativement le niveau du lait dans ce verre.



150 • cent cinquante

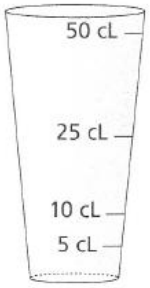
2 Indique comment utiliser ce verre doseur pour mesurer :

a. 75 cL de lait

b. 30 cL de lait

c. 65 cL de lait

d. 1 L 50 cL de lait



3 a. Pour faire cette recette, quelle quantité de jus de citron faut-il verser dans le récipient ?

b. Quelle quantité de jus de pamplemousse faut-il ajouter ?

c. Quelle quantité d'eau faut-il ajouter ?

d. Quelle quantité de boisson chaque personne aura-t-elle ?

e. Anselme veut préparer ce cocktail pour 16 personnes.
Écris les quantités nécessaires de chaque liquide.

Cocktail des îles pour 8 personnes

Dans un récipient, verser :

- 10 cL de sirop de grenadine ;
- le double de jus de citron ;
- 50 cL de jus d'orange ;
- autant de jus de pamplemousse ;

Compléter avec de l'eau pour obtenir 2 L de cocktail.

4 Anne a préparé 3 L de jus de fruit pour une promenade.
Elle a quatre gourdes :
– une contient 50 cL ;
– deux contiennent 75 cL ;
– la dernière contient 1 L.

Pourra-t-elle emporter tout le jus qu'elle a préparé ?

5 Convertis en centilitres les quantités suivantes :

a. 2 L b. 5 L c. 3 L 50 cL d. 1/2 L e. 1 L 75 cL

6 Pour remplir un aquarium de 20 L, Yann utilise un bidon de 3 L.

a. Combien de bidons complets va-t-il pouvoir verser dans l'aquarium ?

b. Quelle quantité d'eau devrait-il ajouter pour que l'aquarium soit plein ?

Remue-méninges

Corentin dispose d'un bidon de 5 L et d'une bouteille de 2 L.

Comment doit-il faire pour avoir exactement 1 L dans un des deux récipients ?

58

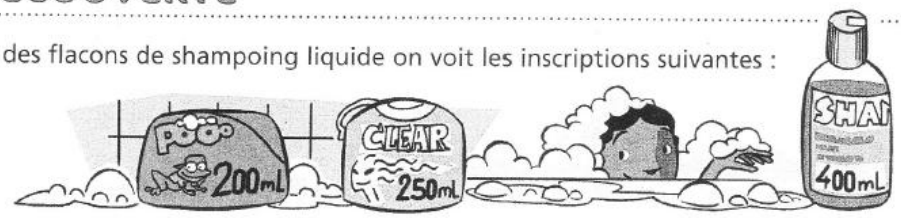
CALCUL MENTAL
Le professeur dit une fraction, les élèves l'écrivent en chiffres.
Le professeur écrit une fraction sur le tableau les élèves la lisent.

Mesure des contenances

Objectif : connaître les unités légales de contenance du système métrique.

DÉCOUVERTE

❶ Sur des flacons de shampoing liquide on voit les inscriptions suivantes :



Quelles informations apportent-elles ?

❷ Voici différentes contenances de flacons :

Flacons de shampoing	A	B	C	D	E	F	G	H
Contenance	50 mL	100 mL	125 mL	150 mL	175 mL	200 mL	250 mL	500 mL

a. Un coiffeur a vidé, dans la journée, les flacons B, D et H.
Quelle quantité de shampoing a-t-il utilisée ?

b. Le lendemain, il a utilisé 1 litre de shampoing en vidant complètement 4 flacons différents.
Retrouve les flacons qui ont été vidés.

EXERCICES

1 Il existe d'autres unités de contenance que le litre (L), le centilitre (cL) et le millilitre (mL) : il s'agit de l'hectolitre (hL), du décalitre (daL) et du décilitre (dL)

hL	daL	L	dL	cL	mL
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Recopie et complète les égalités suivantes :

a. 4 L = ... cL
b. 654 L = 6 ... 54 ....
c. 450 cL = ... L ... cL
d. 223 L = ... hL ... L

2 Trouve, dans chaque cas, la mesure la plus vraisemblable.

a. Une cuillère à soupe :	5 mL	5 cL	5 dL
b. Un verre à moutarde :	12 mL	12 cL	12 L
c. Une bouteille de jus de fruit :	33 cL	33 dL	33 L
d. Un arrosoir :	5 L	50 L	500 L
e. Une casserole :	20 cL	200 cL	2 000 cL
f. Une piscine :	30 L	300 L	30 000 L

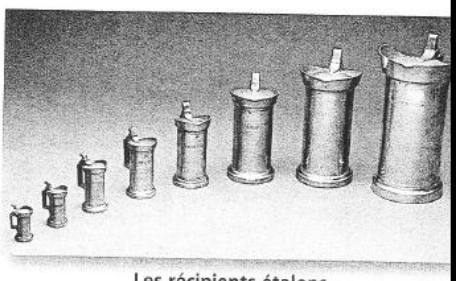
59

CALCUL MENTAL
Conversion de mesure d'aires. Ex. : 3 dm², c'est combien de cm² ? C'est combien de m² ?

Nombres décimaux et mesure de contenances

Objectifs : connaître les unités légales de contenance du système métrique, faire le lien avec les unités légales de masse

DÉCOUVERTE



Les récipients étalons du centilitre au double-litre

Dans les manuels scolaires d'autrefois, on trouvait les unités de capacité suivantes :

- l'hectolitre, le demi-hectolitre ;
- le double-décalitre, le décalitre, le demi-décalitre ;
- le double-litre, le litre, le demi-litre ;
- le double-décilitre, le décilitre, le demi-décilitre ;
- le double-centilitre, le centilitre.

Voici le tableau de conversion des unités de contenance :

hectolitre	décalitre	litre	décilitre	centilitre	millilitre
hL	daL	L	dL	cL	mL
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

Par exemple : 1 L = 100 cL 1 hL = 100 L

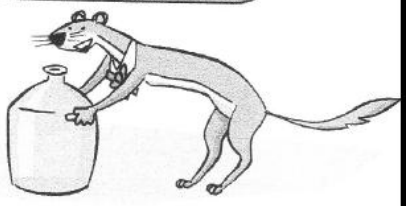
1 a. Combien de litres contient un demi-hectolitre ? un double décalitre ? un double-litre ?
b. Combien de centilitres contient un double-décilitre ? un demi-litre ? 10 millilitres ?

2 La contenance standard des bouteilles de vin est de 75 cL.
Qwang affirme :
« 4 bouteilles, cela fait trois litres. »
A-t-il raison ?

3 Le « souverain » est le nom donné à une bouteille de 26,25 litres.
Trouve avec quels récipients étalons on peut remplir d'eau le souverain en faisant le minimum de transvasements.

4 Un litre d'eau pèse un kilogramme.
Une carafe vide pèse 600 g.
Pleine d'eau, elle pèse 1,35 kg.
Quelle quantité d'eau contient-elle ?

Pour exprimer la quantité contenue dans un récipient, on utilise les expressions contenance, capacité, parfois aussi volume. L'unité de contenance est le litre.



EXERCICES

1 Combien y a-t-il de centilitres dans un quart de litre ? dans trois quarts de litre ?

2 Transforme

a. en litres :	235 cL	450 mL	7 hL	65,4 hL
b. en centilitres :	2 L	0,2 L	3,6 L	235 mL
c. en décilitres :	45 L	3 L	42 cL	750 mL

3 Quelle unité choisirais-tu pour donner une estimation de la contenance

a. d'un pot de yaourt ?
b. d'une bouteille d'eau minérale ?
c. d'une baignoire ?
d. d'une cuillère à café ?
e. d'une piscine ?
f. d'une casserole ?

4 Combien de centilitres manque-t-il à 65 cL pour faire un litre ?

Quelle quantité faut-il retirer à 65 cL pour avoir un demi-litre ?

5 Il faut 22 litres de lait pour fabriquer 1 kg de beurre.

Combien de litres de lait faut-il pour fabriquer une plaque de 250 g de beurre ?

6 2,2 L de lait sont nécessaires pour fabriquer un camembert de 250 g.
Sophie a découpé un camembert en huit portions.

Combien de millilitres de lait a-t-il fallu pour fabriquer une portion ?

7

Théo demande : « Qu'est-ce que c'est un baril de pétrole ?
– C'est une unité de mesure de capacité, lui répond Alice.
– Oui, mais cela fait combien en litres ? demande encore Théo.
– J'ai entendu hier qu'un baril, ça faisait 159 litres. » dit Qwang.

a. En 2005, l'Algérie a produit environ 850 000 barils de pétrole par jour.
Avec le renseignement donné par Qwang, trouve combien de litres de pétrole cela représente.

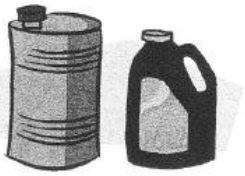
b. On sait que cette quantité de pétrole représentait environ un centième de la production mondiale journalière.

À ton avis, en 2005 la production mondiale journalière de pétrole était de l'ordre de :
8 500 000 barils ? 85 000 000 barils ? 850 000 000 barils ?

Remue-méninges

Thomas est près d'une source. Il dispose d'un bidon de 4 litres et d'un bidon de 3 litres qui ne sont ni transparents, ni gradués.

Comment peut-il obtenir exactement deux litres d'eau dans l'un d'eux en utilisant seulement ces bidons ?



71

CALCUL MENTAL
Jeu de portait sur les nombres entiers ou décimaux.

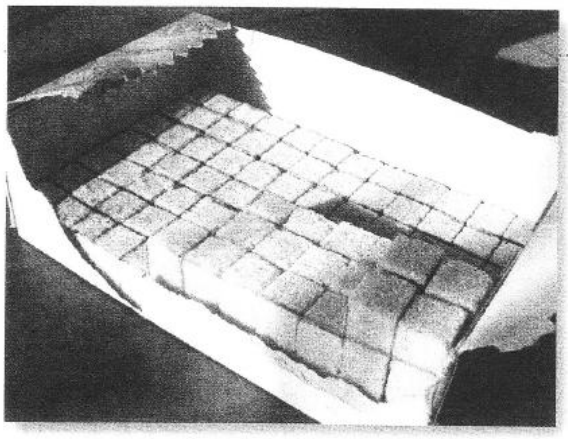
Volume du pavé

Objectifs : comprendre le lien entre les notions de volume et de contenance. Se familiariser avec la formule de calcul du volume dans le cas particulier du parallélépipède rectangle, appelé parfois pavé droit.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.



1 a. Combien y a-t-il d'étages ?

b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?

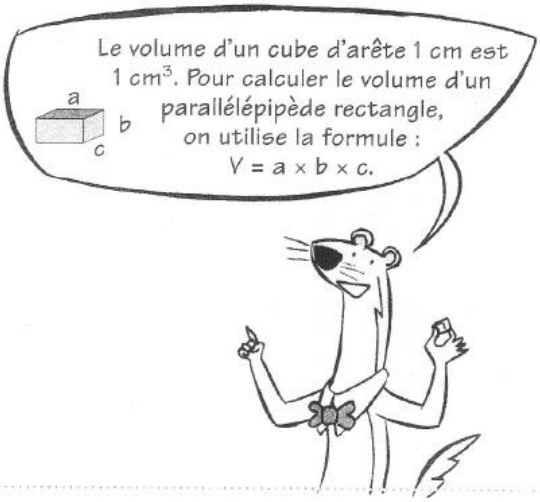
c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

2 Ont-ils raison ?

3 a. Avec la formule donnée par le furet, calcule le volume en cm^3 de la boîte de sucre.

Compare ce nombre avec le nombre de morceaux de sucre que tu as trouvé à la question 1 c.

b. Calcule le volume des boîtes de Théo et d'Alice.



4 a. Combien de morceaux de sucre (cubes d'arête 1 cm) sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 dm ?

b. Quel est le volume de ce cube ?

c. Complète l'égalité : 1 dm^3 = ... cm^3.

EXERCICES

1 Une malle parallélépipédique a pour dimensions 90 cm, 60 cm et 50 cm.
Quel est son volume ?

2 Le volume d'une boîte parallélépipédique est 1 260 cm^3 ; le fond est un rectangle de 12 cm sur 15 cm.
Quelle est la hauteur de la boîte ?

3 a. Combien de cubes d'arête 1 cm sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 m ?
b. Le volume d'un cube d'arête 1 m est 1 m^3. Complète l'égalité : 1 m^3 = ... cm^3.

4 Complète. Tu peux t'aider du tableau de conversion.
a. 1 dm^3 = ... cm^3 1 cm^3 = ... dm^3
b. 1 m^3 = ... dm^3 1 dm^3 = ... m^3
c. 1 cm^3 = ... mm^3 1 mm^3 = ... cm^3

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
000	001	000	000
000	000	001	000

5 Quel est le volume d'un récipient qui contient $\frac{1}{2}$ L ?

6 a. Combien de litres sont contenus dans un récipient qui a un volume de 1 m^3 ?
b. Complète le tableau.

Volume	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
Contenance	... L	... L	... cL	... mL

7 Quelle est la contenance en litres d'une boîte parallélépipédique de dimensions 30 cm, 5 cm, 10 cm ?

8 Un flacon contient 25 cL de liquide.
Quel est son volume en cm^3 ?

9 Une piscine municipale mesure 25 mètres de long, 10 de large et a une profondeur constante de 1,5 mètres. Un m^3 d'eau pèse une tonne (1 000 kg).
Quel est la masse d'eau totale, en tonnes ?

10 Un semi-remorque pèse 3,75 tonnes.
À combien de semi-remorques la masse d'eau de la piscine de l'exercice 9 correspond-elle ?

Remue-méninges

On a placé deux aquariums cubiques dans un jardin. L'arête du premier mesure 30 cm, l'arête du second mesure 20 cm.
Après une forte averse, la hauteur d'eau dans le premier aquarium est 4 cm.
Quelle est la hauteur d'eau dans le second ?

GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE AU CYCLE 3 : INSTRUMENTATION ET INGÉNIERIE DIDACTIQUE.

Isabelle PAYET
Doctorante, Formatrice en mathématiques, ESPE de la Réunion
Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM)
isabelle.payet@univ-reunion.fr

Résumé
La géométrie dynamique est un environnement encore peu pratiqué à l'école et dont le potentiel reste à explorer à ce niveau de scolarité. Dans le cadre de cette recherche, nous travaillons avec le logiciel libre de géométrie dynamique CaRMetal. Ce dernier présente certaines spécificités comme la construction anticipée de tous les objets (désormais, GeoGebra le propose depuis la version 4), ainsi qu'un outil qui lui est spécifique : le Monkey, qui « secoue » les figures construites permettant d'être confronté immédiatement à la résistance des figures par rapport aux propriétés. Des recherches antérieures ont montré que la validation des propriétés par le mouvement véhicule de nouvelles représentations des objets géométriques étudiés et de leurs propriétés. Plus généralement, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut induire un travail plus conceptuel avec des situations complexes permettant ainsi d'entrer dans une démarche d'investigation pertinente en termes de propriétés des objets. Cette recherche s'inscrit donc dans cette continuité et la prolonge sur tout le cycle 3 (du CE2 au CM2) en construisant des ingénieries utilisant la réactivité immédiate des outils de CaRMetal.

Cet article se propose de rendre compte de travaux menés dans des classes de cycle 3 de l'école primaire depuis quelques années, sur l'introduction de la géométrie dynamique (GD) et notamment sur l'instrumentation de certains outils spécifiques au logiciel utilisé. Des recherches antérieures nous ont appris que les nouvelles technologies peuvent créer de nouveaux problèmes ou agir sur l'enseignement de la géométrie. Dans un premier temps, il s'agira d'étudier l'instrumentation dans l'environnement de la géométrie dynamique et de la comparer avec celle déployée en environnement papier-crayon. Les genèses instrumentales déployées dans chacun de ces environnements participent à la construction de représentations différentes des objets géométriques étudiés et de leurs propriétés. Cette recherche porte ensuite sur une ingénierie didactique de la GD en cycle 3, et vise à son utilisation efficace et généralisée en proposant des exemples de séquences.

Nous dégagerons ici quelques premières réflexions sur l'usage de la géométrie dynamique à ce moment de la scolarité en étudiant les effets de l'instrumentation sur les représentations des élèves en géométrie.

Après une première partie qui présentera le logiciel utilisé dans ces classes (CaRMetal) la suite de l'article fera état des premières ingénieries didactiques mises en place, sous-tendues par les différents cadres théoriques. Il se terminera avec des situations illustrant quelques-uns des premiers résultats. En conclusion, il abordera les perspectives au regard de ce qui a déjà été accompli.

I - CHOIX DU LOGICIEL

Les interfaces de logiciels de géométrie dynamique progressent régulièrement dans plusieurs domaines en prenant en compte les analyses didactiques relatives à la genèse instrumentale. C'est le cas en particulier du logiciel CaRMetal que nous avons choisi pour cette recherche, parce qu'il permet la construction anticipée des objets, l'a-modalité de nombreux outils et un engagement direct plus fin que ce qui peut exister ailleurs. Cette partie présente quelques-unes de ses spécificités qui ont conduit à ce choix.

1 La construction anticipée des objets

Les pratiques informatiques sont intimement liées à la pertinence des interfaces (Artigue, 2011). Nous pouvons faire l'hypothèse que la visualisation anticipée des constructions participe chez les élèves, à la construction d'images mentales des concepts engagés beaucoup plus riches. Au début de ce travail, CaRMetal était le seul logiciel à le proposer. Depuis, GeoGebra (version 4) le propose également de manière moins systématique mais suffisante pour l'école primaire.

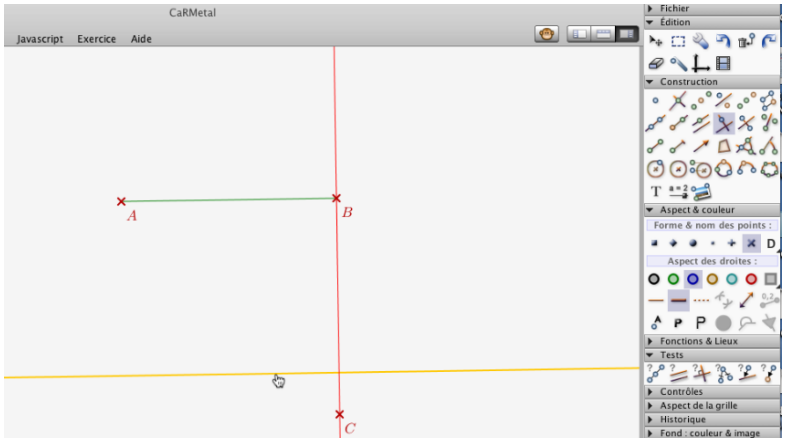


Figure 1 : capture d'écran, construction d'une perpendiculaire.

Par exemple, dans la figure 1, l'élève souhaite créer la perpendiculaire à [BC] passant par le point C : il choisit l'outil perpendiculaire, sélectionne la droite (BC) ; alors la droite perpendiculaire apparaît en jaune fluo sur l'écran, portée par la souris (icône en forme de main). L'élève peut constater de visu différentes propriétés comme le parallélisme de cette droite au segment [AB] mais encore le parallélisme de toutes les droites qui sont perpendiculaires à (BC).

Même si ces propriétés ne sont pas verbalisées, elles participent à la création d'images mentales cohérentes autour de l'orthogonalité. L'engagement direct (le rapport au savoir de l'élève) est plus fin que dans les logiciels antérieurs puisque l'objet est construit avant le clic sur le deuxième item et ainsi l'élève dépose, dans notre exemple, la perpendiculaire où il le veut. Même si ce serait complexe à évaluer, nous pouvons penser qu'un rapport au savoir est modifié.

2 La validation

En environnement papier-crayon on travaille sur des dessins géométriques ; les validations se font par manipulation de gabarits, par pliage ou par usage des instruments divers. ERMEL (ERMEL, 2006) utilise cela pour mettre en œuvre des débuts de raisonnement dans le cadre d'une géométrie des propriétés des objets.

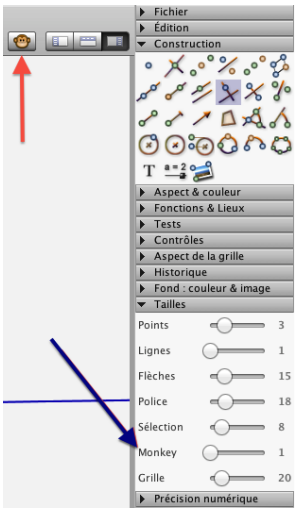


Figure 2 : le Monkey et la palette d'outils de CaRMetal.

En géométrie dynamique, on ne travaille plus sur des dessins géométriques mais sur des figures (Laborde, 1994). La validation est faite par la résistance de la figure issue d'un programme de construction, au déplacement des points initiaux. Les analyses antérieures montrent que les élèves n'utilisent pas spontanément la manipulation des points initiaux pour valider la résistance d'une figure au déplacement. Tenant compte de ce résultat de recherche en didactique, CaRMetal dispose d'un outil de validation spécifique : le Monkey (indiqué par la flèche rouge dans la figure 2), qui va faire bouger aléatoirement les objets construits et proposer ainsi des instanciations différentes de la construction réalisée. Lors de notre expérimentation, nous avons institutionnalisé l'outil Monkey afin que les élèves puissent l'utiliser pour valider leur construction. L'appropriation a été immédiate et les élèves sont confrontés à leurs productions (les gestes faits) et à leurs représentations géométriques de ce qu'ils pensent avoir fait.

Au début de notre recherche, dans l'usage du Monkey, la vitesse du mouvement des objets construits était beaucoup trop rapide pour être interprétable par des élèves de cycle 3. En effet, s'il y a trop d'objets en mouvement, les élèves ne peuvent plus repérer des invariants sur la figure qu'ils ont construite et ainsi analyser leurs erreurs éventuelles. Comme les figures construites sont élémentaires à l'école primaire, nous avons demandé au concepteur du logiciel (Hakenholz, 2007) d'avoir la possibilité de réduire sa vitesse : il a donc ajouté un paramètre (indiqué par la flèche mauve), ce qui permet ainsi d'avoir des réglages adaptés au niveau d'enseignement. Ainsi, progressivement les logiciels de géométrie dynamique s'adaptent aux analyses ou besoins didactiques des situations rencontrées.

3 La palette restreinte

Ce qui nous a guidée aussi dans notre choix, c'est l'accès rapide à une palette restreinte qui permet d'adapter chacune des séances en choisissant les outils dont les élèves peuvent avoir besoin. Comme en environnement papier-crayon, où l'enseignant choisit les outils qu'il désire mettre à disposition de ses élèves, il est aussi possible dans l'environnement de CaRMetal de choisir de manière rapide et détaillée les outils avec lesquels les élèves vont pouvoir travailler.

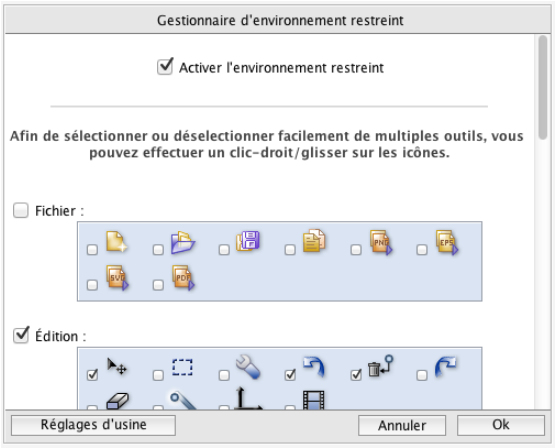


Figure 3 : fenêtre d'accès à la palette restreinte.

La suite de l'article a pour objet d'exposer successivement nos questions de recherche ainsi que nos hypothèses de travail puis les cadres théoriques sous-tendant cette recherche.

II - NOS QUESTIONS DE RECHERCHE ET CHOIX THÉORIQUES

Les recherches précédentes (T. Assude, 2007 et C. Laborde, 1994) ont montré que les changements induits par l'intégration des TICE sont divers : savoirs anciens revisités, résolution de nouveaux problèmes, travail de nouvelles techniques…

Suite à ces différents constats, nous avons commencé à dégager des questions autour de cette intégration et à formuler des hypothèses de travail.

1 Questions de recherche et hypothèses

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique modifie profondément les situations didactiques (rapport au milieu, non transposition du savoir papier–crayon) et donc les situations d'apprentissage. Cela nous a amenée à poser les questions suivantes :

Q1 : Quelles ingénieries didactiques proposer aux élèves pour accompagner la construction des savoirs géométriques au cycle 3 ?

Q2 : Comment assurer une instrumentation efficace et adéquate pour que CaRMetal devienne un outil utilisable notamment en résolution de problèmes ?

Q3 : Dans quelle mesure la pratique de la géométrie dynamique influence–t-elle les représentations des élèves sur les objets et les concepts géométriques ?

Suite à ce questionnement, nous avons formulé les hypothèses suivantes :

H1 : L'anticipation des constructions et la validation par le mouvement participent à la conceptualisation des propriétés des objets.

H2 : L'appropriation du déplacement permet aux élèves de distinguer un dessin d'une figure.

H3 : Une bonne instrumentation de la géométrie dynamique et de l'interface du logiciel rend cet outil utilisable par les élèves de cycle 3.

Les hypothèses H1 et H2 font référence principalement à la question Q3 et l'hypothèse H3 à la question Q2. Même si elle est plus globale et ne pourra être abordée qu'en synthèse de notre travail, la question Q1 est néanmoins toujours présente dans les activités choisies.

Pour tenter de répondre à nos questions de recherche et vérifier nos hypothèses, nous sollicitons plusieurs approches théoriques afin d'étudier les différents aspects de notre questionnement.

2 Les cadres théoriques

La théorie principale sur laquelle nous nous appuyons est celle des paradigmes et espaces de travail géométriques développée par A. Kuzniak et C. Houdement (2006).

Pour la question de l'instrumentation, nous utilisons les travaux de chercheurs utilisant une approche ergonomique avec la théorie de l'instrumentation de Rabardel ; cette dernière nous permet d'étudier la dimension instrumentale des outils utilisés et d'avoir ainsi un regard plus attentif à l'utilisation de l'outil informatique et de son impact dans la construction des savoirs géométriques.

En ce qui concerne la question de l'ingénierie, la théorie des situations didactiques donne les outils nécessaires à l'analyse et l'étude du système en jeu ; l'accent est mis notamment sur la notion de milieu et de validation.

Enfin, la question du passage du papier/crayon à l'écran est éclairée par la notion de milieu couplée avec celle des paradigmes.

Revenons à présent sur ces différents cadres théoriques.

2.1 Les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques (ETG).

Alain Kuzniak présente la géométrie élémentaire comme étant répartie entre trois paradigmes géométriques différents. Il établit comme le montre ce tableau (figure 4) un parallèle entre ces paradigmes et les niveaux de Van Hiele. Pour notre recherche, nous nous intéressons uniquement aux deux premiers paradigmes.

Les objets de la Géométrie I sont des objets matériels, traces graphiques ou virtuelles. L'expérience usuelle dans ce paradigme est le dessin instrumenté. La GI est donc la géométrie de l'espace perceptif avec un vocabulaire encore non mathématique. Dans ce paradigme, *les modes d'accès aux connaissances font appel à l'intuition, comme la reconnaissance perceptive de certains dessins, à l'expérience, notamment celle liée aux instruments, mais aussi au raisonnement*[1].

	GEOMETRIE NATURELLE G I	**GEOMETRIE AXIOMATIQUE NATURELLE G II**	**GEOMETRIE AXIOMATIQUE FORMALISTE G III**
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur un système complet d'axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et « figural concept »	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriété et démonstration	Démonstration et liens entre les objets.

Figure 4 : Extrait de « Sur la gestion des différents paradigmes géométriques », 2001, Houdement C. et Kuzniak A., Actes du XXVIIIème Colloque Inter-IREM.

[1] HOUDEMENT C. (2007), À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, Repères IREM, n°67, p.73.

La Géométrie II est la géométrie des propriétés des objets[2], elle est partiellement axiomatisée et fait encore souvent référence au monde perceptif.

Pour notre recherche nous allons tenter de faire évoluer ce tableau en tenant compte des autres approches dont celle de Rabardel.

Associée aux paradigmes géométriques, Alain Kuzniak a développé la notion d'espaces de travail géométrique (ETG) ; cette notion nous fournit une base pour examiner les caractéristiques spécifiques à l'activité géométrique de l'élève dans notre recherche. Dans cet article, nous n'abordons pas ce point encore en cours de développement.

2.2 La théorie de l'instrumentation de Rabardel.

L'approche instrumentale est reconnue comme un cadre théorique riche pour les recherches dans le domaine de l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques.

La notion de genèse instrumentale renvoie au processus progressif au cours duquel un instrument se construit pour un sujet donné, en faisant émerger ses schèmes d'utilisation. Derrière l'intégration d'un logiciel dans l'activité mathématique des élèves, on émet l'hypothèse que le travail en environnement informatique présente un intérêt par rapport à l'environnement papier-crayon, mais aussi que les genèses instrumentales des élèves sont bénéfiques à la conceptualisation des notions mathématiques (meilleure illustration des concepts, le travail est plus centré sur l'abstrait car le logiciel prend en charge les tracés).

De ce fait certaines questions apparaissent en relation avec notre question Q2 :

Q2a : Comment peut-on organiser le travail ?

Q2b : Quelles activités concevoir et mettre en place pour accompagner les genèses instrumentales des élèves ?

Q2c : et les rendre effectivement bénéfiques à l'apprentissage des mathématiques ?

De manière générale, cette approche permet d'examiner la relation entre l'usage des outils et la conceptualisation (c'est à dire l'imbrication et les interactions entre les connaissances de l'artefact et les connaissances mathématiques) mais aussi d'analyser les genèses instrumentales aussi bien que d'en étudier la gestion didactique.

Nous avons délibérément fait le choix de ne nous intéresser qu'aux genèses instrumentales des élèves dans l'environnement CaRMetal (en laissant de côté le parcours de la genèse instrumentale de l'enseignant) : l'accent est mis sur les processus d'instrumentation chez les élèves de cycle 3.

2.3 La théorie des situations didactiques.

La théorie des situations didactiques nous permet de décrire la genèse d'un savoir. Nous ciblons plus exactement la validation comme élément clé de l'apprentissage. Ici, l'élève a la possibilité de décider de la validité de ses propres actions et l'élément permettant cette validation est le milieu. Si ce dernier est soigneusement choisi et préparé, il permet le travail en autonomie de l'élève qui va pouvoir mettre en œuvre des stratégies, les tester et les faire évoluer.

Dans la partie suivante, nous allons exposer le cadre de l'expérimentation ainsi que la méthodologie d'analyse.

III - EXPÉRIMENTATION ET MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

Cette recherche est un approfondissement d'un travail entamé il y a maintenant plus de trois ans. Les prémices de celle-ci ont débuté dans une classe de CM1 en 2009/2010 (avec des interventions ponctuelles) dans le cadre d'un atelier IREM. Puis cela s'est poursuivi l'année suivante dans le cadre d'un mémoire de Master avec l'élaboration et l'expérimentation d'un premier dispositif

[2] Des travaux proches de ceux menés par A. Kuzniak, ont été développés par l'équipe ERMEL sous la direction de R. Charnay dans l'ouvrage Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, 2006.

mettant en œuvre l'utilisation de la géométrie dynamique dans une classe de CM2. Suite à l'analyse de ces premières expérimentations, qui nous a permis de mettre en évidence la nécessité de construire une ingénierie didactique pertinente de la GD visant à son utilisation efficace et généralisée, nous avons voulu poursuivre et approfondir ce travail, dans le cadre d'un projet de recherche doctoral.

1 L'expérimentation

Dans le protocole actuel, nous avons choisi de suivre une même classe du CE2 au CM2.

Lors des toutes premières expérimentations (notamment dans le cadre de l'expérimentation pour le mémoire de recherche de Master), nous ne pouvions que travailler en classe entière suite à des contraintes organisationnelles ne permettant pas à l'enseignant titulaire de la classe de séparer sa classe en deux groupes.

Pour ce projet de recherche doctoral, nous avons retenu de ne travailler qu'en demi-groupe classe, les élèves étant par binôme. Nous avons la responsabilité du choix de la séance et l'enseignant titulaire de la classe a, en partie, la responsabilité de sa mise en œuvre ; un travail spécifique de préparation et de mise en œuvre avec l'enseignant est nécessaire pour équilibrer les activités collectives (notamment sur les mises en commun, les institutionnalisations) et individuelles.

Le corpus des données est constitué des fiches de préparation des diverses séances, des fichiers élèves de géométrie dynamique, des productions papiers-crayons (quand il y en a), et enfin des observations filmées et enregistrées. Les analyses a priori et a posteriori se font avec l'enseignant.

Pour la suite de notre recherche (cette année, en classe de CM2), deux à trois séances de géométrie dynamique sont organisées par période scolaire (alors qu'auparavant les séances étaient regroupées sur uniquement deux périodes consécutives) et de manière à ce que la géométrie dynamique fasse partie intégrante des séquences de géométrie, nos choix de situations s'adaptent à la progression de l'enseignant. Nous suivons aussi toutes les séances de géométrie en environnement papier-crayon.

Lors des premières expérimentations et suite aux travaux de M. Artigue et T. Assude qui montrent que genèse instrumentale et construction de connaissances mathématiques ne peuvent pas être séparées, mais qu'au contraire, ces deux processus sont imbriqués, nous avions mis en évidence les questions suivantes :

Q2c : Quelles sont les connaissances instrumentales nécessaires à la manipulation du logiciel afin que celles-ci ne soient pas un obstacle au travail de l'élève ?

Q2d : Ces connaissances devaient-elles s'imbriquer dans la séance ou au contraire devait-on alterner les séances ?

Ce qui nous a amené à construire deux grands types de séances durant lesquelles une part d'instrumentation du logiciel est présente :

- Les séances de construction ou de reproduction de figures, qui obligent les élèves à faire la distinction entre tracés et procédés de tracé.
- Les séances d'expérimentation et d'argumentation. Les logiciels de géométrie dynamique étant propices à l'expérimentation et libérant les élèves de la tâche des tracés, ces derniers peuvent se concentrer plus sur l'expérimentation.

Les séquences réalisées en CE2 et en CM1 sont en annexe.

2 Méthodologie d'analyse

Toutes les séances sont filmées par trois caméras. Les enregistrements audios et vidéos des différentes activités constituent la première partie du corpus. À ceci s'ajoutent les entretiens avant et après les séances avec l'enseignant titulaire de la classe : c'est la seconde partie du corpus de données.

Pour chaque séance, les analyses a priori permettent de préciser les enjeux de la séance en anticipant les possibles comportements des élèves aussi bien d'un point de vue mathématique que stratégique (usage du logiciel). Au regard de ces analyses a priori, nous dégageons les observables suivants : les rétroactions du milieu, les validations, les gestes des élèves, l'utilisation du vocabulaire géométrique et les connaissances mises en jeu.

L'analyse a posteriori, grâce aux vidéos réalisées, nous permet de confronter nos anticipations aux observations des actions des élèves et de leur réactivité face au logiciel : analyse des gestes faits d'un point de vue de la pertinence fonctionnelle (instrumentation) et du sens mathématique éventuellement associé à ces gestes (théorèmes en actes ou approfondissement de la conceptualisation) mais aussi les savoirs utilisés et leur mise en œuvre par ces élèves (tout cela n'étant pas toujours observable en direct). La transcription du corpus audio permet d'analyser les interactions langagières entre les élèves mais aussi entre élèves et enseignant et donc d'analyser la place et le rôle du langage dans la situation d'apprentissage (nous nous centrons sur la qualité du vocabulaire géométrique employé que ce soit pour décrire une figure géométrique ou les procédés de tracés).

La partie suivante se propose d'exposer certains résultats au regard des questions de recherche posées précédemment.

IV - LES PREMIERS RÉSULTATS

Nous proposons d'analyser en plus des premiers résultats issus de la classe de CE2[3] pour notre recherche doctorale, quelques résultats issus des toutes premières expérimentations dans la classe de CM2[4] lors de notre recherche en Master.

1 En référence à la question Q2

Pour tenter de répondre à la question Q2, nous avons formulé l'hypothèse H3. Les résultats présentés dans cette partie, font donc référence à l'instrumentation du logiciel et aux différents schèmes d'action mis en œuvre par les élèves dans l'environnement papier-crayon et celui de la géométrie dynamique.

1.1 Sur l'instrumentation

La séance 6 proposée en CM2 nous sert de bilan sur l'instrumentation du logiciel. En quarante-cinq minutes les élèves ont à réaliser deux constructions différentes du pentagone régulier, l'une réinvestissant plus particulièrement l'utilisation des cercles (figure 5), l'autre des segments et droites (figure 6).

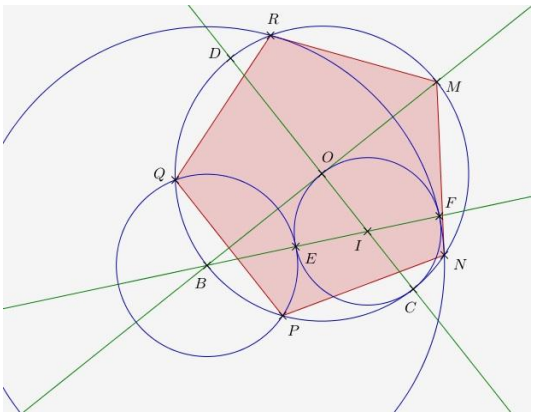


Figure 5 : pentagone régulier construit à partir d'un programme de construction réinvestissant plus particulièrement l'outil cercle.

[3] A ce jour, les analyses réalisées portent uniquement sur la classe de CE2 et sur les classes antérieures à cette recherche doctorale.

[4] Séquence CM2 en annexe.

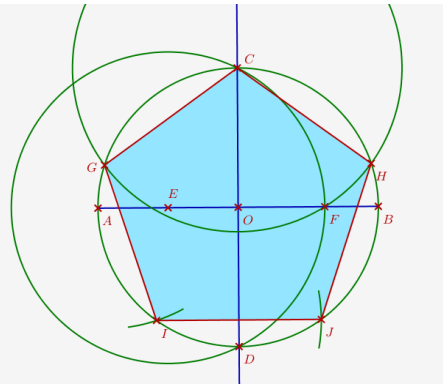


Figure 6 : pentagone régulier construit à partir d'un programme de construction réinvestissant plus particulièrement les outils droites et segments.

Les élèves ont à leur disposition les deux programmes de construction. Nous constatons que plusieurs binômes réalisent les deux figures plus rapidement que ce qui était prévu et ce bien que les consignes sur la construction par les cercles soient relativement complexes à interpréter et à mettre en œuvre.

De manière générale, nous constatons que les élèves manipulent le logiciel avec aisance et que l'instrumentation proposée dans les séances précédentes a été efficace. La séance se termine par la réalisation vidéo-projetée de la construction du pentagone par une élève sous la dictée des consignes d'une autre élève.

L'élève qui manipule le logiciel, utilise le nommage anticipé des points et semble donc être experte dans la manipulation de cet outil. Cependant l'analyse de la vidéo montre qu'en définitive elle se refuse à l'utilisation d'autres outils pour le nommage des points et que tout au long de la construction, elle n'utilise que cette procédure. En fait, elle ne sait pas faire autrement c'est à dire renommer un point en double-cliquant sur celui-ci et en changeant son nom dans l'inspecteur d'objets.

Ce que nous pensions être une expertise de l'élève n'en ait pas une ; en effet, elle ne pratique qu'un schème d'action alors que l'expert possède plusieurs schèmes d'action pour une même tâche.

Nous constatons pour chaque outil, des niveaux d'instrumentation différents chez les élèves : l'expertise dans l'utilisation de certains outils cachant le défaut d'instrumentation d'autres.

1.2 Induction des schèmes d'action par le milieu

Nous sommes en CM1, l'activité proposée[5] en séance 4 consiste à reproduire une configuration de droites sécantes (figure 8) à partir de quelques points donnés (figure 7) ; il s'agit de travailler la notion d'incidence par l'intersection de droites et/ou de segments.

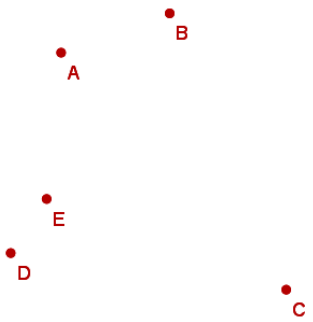


Figure 7 : points de départ de la reproduction de la configuration de droites sécantes.

[5] Transcription d'une activité de ERMEL (2006), Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, Hatier.

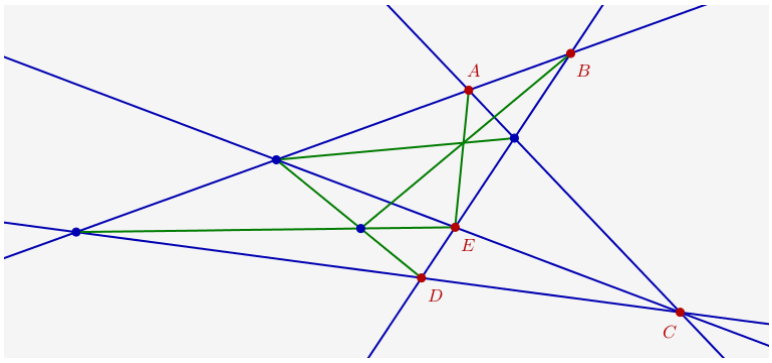


Figure 8 : configuration de droites sécantes à reproduire.

En environnement papier-crayon, les élèves disposent de leur crayon et d'une règle ; la règle se posant en premier, les élèves tracent les droites attendues et arrivent à produire la figure. En environnement GD, l'item droite étant un item de tracé parmi d'autres (même avec la palette restreinte), le choix préalable de cet outil n'est pas aussi immédiat que dans l'environnement papier-crayon où la règle est présente sur la feuille. Choisir l'item droite relève d'une conceptualisation géométrique plus aboutie que la simple saisie d'une règle ; de fait on observe que les élèves cliquent à l'écran et donc créent des points perceptivement aux intersections possibles sans référence à l'intersection des droites.

Cette situation illustre une critique historique sur les logiciels de GD parfois décriés comme des logiciels de la "géométrie du point".

On constate que la règle est un outil primordiale de l'environnement papier-crayon et le crayon qu'un scripteur alors que sans instrumentation particulière, le pointeur, item par défaut dans le logiciel, est l'outil de construction de base dans l'environnement GD.

Comme on prend naturellement la règle avec la main, on prend spontanément un point avec la souris.

2 En référence à la question Q3

Pour répondre à la question Q3, plusieurs hypothèses H2 et H1 sont sollicitées. Dans cette partie, nous mettons l'accent sur l'instrumentalisation (au travers de deux situations), l'argumentation et l'évolution des représentations géométriques des élèves.

2.1 Sur l'instrumentalisation

Exemple d'instrumentalisation spontanée de l'anticipation des constructions

Avec le logiciel, les élèves peuvent faire des expériences en mettant en œuvre les outils dont ils disposent. Grâce au fil à la patte[6], les élèves peuvent s'approprier de manière avantageuse ces outils.

Lors de la séance 7 en CM2, les élèves doivent reproduire une figure mettant en jeu la construction du carré.

[6] Termes utilisés à l'oral avec les élèves pour exprimer *"cette capacité du logiciel à anticiper la construction avant le dernier clic de souris."* La démarche d'investigation et les TICE : une opportunité pour l'inventivité ? 2008, Revue Sesamath, n°9.

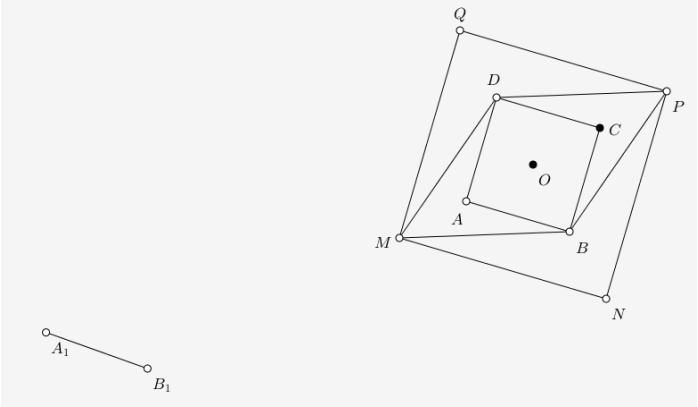


Figure 9 : figure à reproduire, issue de CapMaths CM2.

Nous sommes vers la fin de la reproduction (le carré $A_1B_1C_1D_1$ de centre O_1 étant fait) ; il s'agit de construire les points N_1, P_1, Q_1 et M_1 c'est-à-dire les points du grand carré. Les élèves savent qu'il faut construire N_1 tel que B_1 soit le milieu de $[O_1N_1]$, car B est le milieu de [ON]. Cela suppose la construction du cercle de centre B_1 et de rayon B_1O_1.

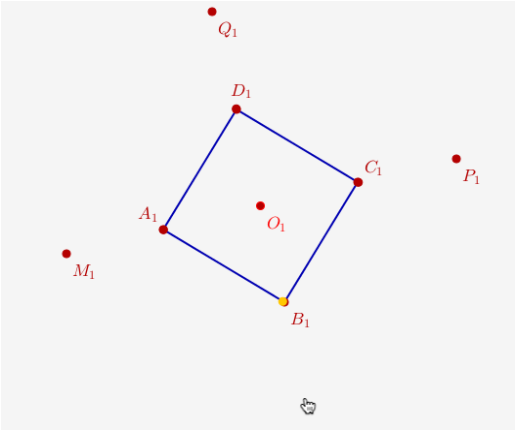


Figure 10 : capture d'écran, utilisation en cours de l'outil milieu ; ici l'élève veut placer de visu le milieu (en jaune fluo) sur le point B_1.

Cependant, l'engagement direct de l'outil milieu qui permet de voir le milieu pendant sa construction donne une idée aux élèves : celle de retrouver les symétriques[7] à partir des milieux. En cliquant sur l'outil milieu puis sur le point O_1, les élèves voient le milieu (en jaune fluo) se déplacer et essaie de le placer visuellement sur le point B_1, par exemple, pour construire le point N_1 (figure 10). Et ils font de même pour les autres points.

Cependant ils s'aperçoivent après avoir activé le Monkey, que les points M_1, N_1, P_1 et Q_1 formant le grand carré, se déplacent, ne conservant pas la forme attendue.

Il s'agit d'une instrumentalisation "inversée" de l'outil milieu, possible de par l'anticipation de sa construction. Cela signifie que l'élève sans connaître la notion, utilise le milieu de manière pertinente pour chercher un symétrique. Même si la démarche ne peut aboutir, elle permet de voir où les points N_1, P_1, Q_1 et M_1 doivent être construits sur la figure.

Les élèves ont temporairement fait un dessin pour positionner les points puis ont vérifié avec le Monkey que ce n'était pas une figure. Ils sont ensuite passés par des procédés plus adéquats (création du point N_1 par l'intersection de la droite (D_1O_1) avec le cercle de centre B_1 et de rayon O_1B_1).

[7] Dans le vocabulaire de l'enseignant.

L'usage de la GD permet aux élèves de gérer différents essais de manière assez rapide par rapport à l'environnement papier-crayon. Ainsi si cela ne fonctionne pas, les élèves peuvent réajuster leurs stratégies pour en tester de nouvelles.

Exemple d'a-modalité instrumentalisée spontanément par les élèves

Dès les premières années d'expérimentation, nous avons rencontré le problème de l'instrumentalisation de l'a-modalité de la couleur de fond et de l'aspect et couleur des objets ; nous avons résolu cette question en supprimant les onglets " Fond : couleur & image " et " Aspect & couleur " dans la palette d'outils grâce au gestionnaire d'environnement restreint. Malgré cela, la créativité et la curiosité des élèves qui sont probablement des invariants, se sont manifestées dans d'autres classes. Ces derniers ont trouvé une autre façon de modifier les couleurs des objets en temps réel grâce à l'a-modalité des outils de CaRMetal, en la retrouvant dans l'inspecteur d'objets.

Lors de la séance 4 visant une instrumentation des outils associés au cercle, en CM2, un groupe d'élèves, réalise une figure qu'ils devaient animer après avoir activé la trace d'un des objets construits (le cercle C_2 dans la figure 11) afin d'avoir une néphroïde. Ce groupe d'élèves a profité de l'a-modalité de l'animation pour faire varier les couleurs du cercle C_2 donc de la néphroïde.

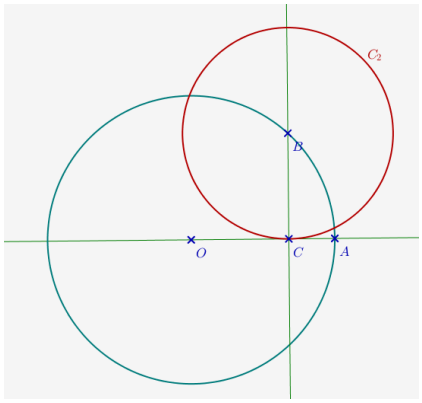


Figure 11 : figure à construire, les élèves doivent ensuite animer le point B sur le cercle vert.

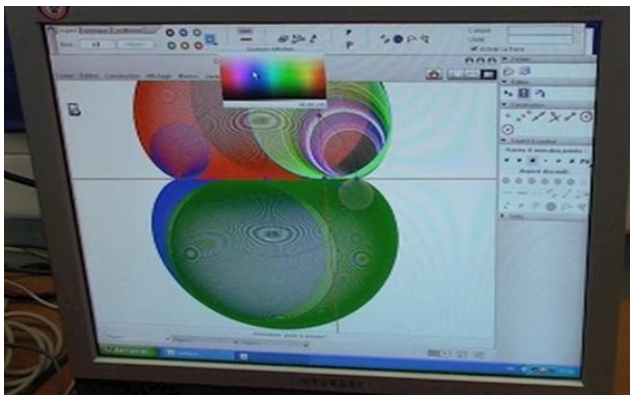


Figure 12 : tracé d'une néphroïde avec changement de couleur.

Nous voyons sur ces deux exemples que l'anticipation des constructions et l'a-modalité de toutes les fonctionnalités sont très vite utilisées comme des outils d'exploration mathématique ou de créativité artistique. Rien que pour cela, il est dommage que ce logiciel soit si peu connu.

2.2 L'argumentation

Nous sommes en CE2 en séance 5, les élèves doivent construire la figure suivante (figure 13) puis tester l'alignement de quatre points. Dans CaRMetal, il existe un test pour savoir si des points sont alignés ou pas, cependant il ne permet de tester que l'alignement de trois points.

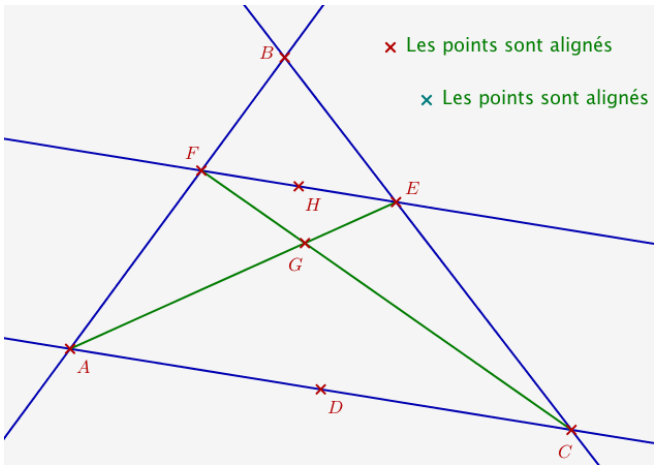


Figure 13 : figure à construire.

Les élèves testent par exemple, l'alignement de B, H et G puis de H, G et D ; ils doivent ensuite en déduire l'alignement des quatre points.

Lors de cette séance un élève s'exclame tout à coup « J'ai compris. » ; après avoir expliqué à l'enseignant, ce dernier lui dit d'aller partager son raisonnement avec l'ensemble de la classe. Voici ce qu'il dit (ses dires sont accompagnés de gestes indiquant les objets impliqués) :

Élève : « Si ces trois-là sont alignés (en montrant les points B, H et G) et ces trois-là sont alignés (en montrant les points H, G et D), eh bien, ils sont tous alignés ! »

Réponse de l'enseignant : « Effectivement oui… »

Élève : « Parce que ces deux-là sont alignés (l'élève indique les points B et G) et celui-là (en montrant le point H) fait parti de celui-là (en montrant le segment [BG]) et de celui-là (en montrant le segment [HD])… »

Plus clairement, si B, H et D sont alignés c'est que H appartient à la droite (BD) ; si B, G et D sont alignés c'est que G appartient à la droite (BD) donc on peut dire que H et G sont sur la même droite et que les points B, H, G et D sont alignés.

Nous sommes en présence de ce que Balacheff appelle une expérience cruciale. Nous avons peut-être ici, un début de preuve intellectuelle.

2.3 Sur les représentations des élèves

Bien que le triangle soit une figure connue depuis la maternelle, sa construction nous a réservé quelques surprises. Nous sommes en classe de CE2, en séance 3, et nous demandons aux élèves en début de séance, de construire un triangle.

Les élèves sont par binôme ; une élève trace un triangle, son binôme s'exclame alors « ce n'est pas un triangle, ça ! » À cette réaction, sa camarade lui rétorque que si. Nous intervenons en demandant à cet élève qui n'est pas d'accord, de construire un triangle. Ce dernier s'applique de manière à faire des côtés de longueur identique. Ses explications nous indiquent que sa représentation du triangle est dans une configuration prototypique « inversé » (triangle équilatéral avec « la pointe vers le bas » (issu du vocabulaire élève)). On constate ici la prégnance de figure prototypique chez cet élève. En fait, l'élève a mobilisé une figure qu'il a rencontrée antérieurement dans sa scolarité (avec les blocs logiques par exemple). De manière générale, les figures simples sont mémorisées et reconnues par le biais de dessins les représentant : ce qui permet de mémoriser généralement un ensemble de propriétés géométriques, plus ou moins bien retenues par les élèves.

Par la suite, lorsque cet élève utilise le Monkey, le triangle, qu'il a soigneusement construit c'est à dire perceptivement équilatéral, se déforme sans conserver ni ses propriétés spatiales ni ses propriétés d'équilatéralité. Ce qui fait dire de manière hésitante à cet élève dubitatif, qu'il n'a plus un triangle. La déstabilisation est importante car cet élève est perturbé dans ses représentations. Il avait focalisé son attention sur certaines propriétés de la figure plutôt que sur d'autres. Il y a donc comme une résistance à se détacher de cette forme visuellement reconnue. Cette appréhension

perceptive spontanée (ici, du triangle équilatéral) bloque l'appréhension mathématique de l'objet triangle.

Le Monkey a brisé la représentation du triangle de cet élève. Le milieu a modifié le rapport au vrai pour cet élève.

De manière générale, comprendre et interpréter les effets d'une déformation (le mouvement déforme la figure, ce qui diffère du déplacement d'un seul point) est une véritable difficulté pour les élèves. Il n'y a pas forcément d'analyse mathématique et les effets de la déformation sur les propriétés géométriques ne sont pas toujours compris. Dès les petites classes, les élèves sont amenés à déplacer les objets : il y a donc une représentation du mouvement d'une figure qui est essentiellement un déplacement composé de translations et rotations (de gabarits) et ensuite éventuellement de retournements, ce qui peut entraîner une représentation fausse du « mouvement » car ce sont des mouvements de pièces solides alors que la GD a une notion du mouvement différente, celle du point. Il semble donc que déplacer les objets ne suffise pas à construire les propriétés de ces derniers.

Finalement, on peut voir le Monkey comme un « modificateur global » qui est une aide sérieuse à l'instrumentation initiale mais qui peut être ensuite une limite à la compréhension fine.

La théorie des situations didactiques pourra nous éclairer sur la validation et comment celle-ci va être perçue par les élèves.

3 Les interactions langagières

L'analyse de l'activité langagière est conduite en relation avec les différentes activités proposées aux élèves : nous nous axons surtout sur les restitutions de connaissances, les explications relatives à l'instrumentation du logiciel et les justifications de démarches.

Le fait d'avoir un élève qui construit et un autre qui conseille voire contrôle, favorise la métacognition sur les objets géométriques. Les interactions langagières participent à la construction des concepts engagés, la communication aidant à la conceptualisation. De même, les témoignages des enseignants nous ayant accueillie tendent à montrer que le fait de travailler en binôme et de faire fonctionner les élèves dans un environnement a-didactique a permis à ces derniers d'évoluer dans leur langage mathématique qui s'est enrichi et précisé.

V - DIFFICULTÉS RENCONTRÉES ET PERSPECTIVES

1 La maintenance informatique

D'une année sur l'autre, le système d'exploitation de la salle informatique a changé ce qui a évidemment eu des conséquences sur la version du logiciel téléchargée. Malgré les précautions prises, les versions Linux et Mac OS du logiciel utilisées ne sont pas tout à fait les mêmes sur certains points précis et parfois des parties de séance ont dû être modifiées directement en séance.

2 Complexité de l'intégration des TICE

Comme l'a souligné Michèle Artigue, se pose le problème de l'instrumentation de l'enseignant : cela reste un exercice très complexe car il nécessite une transformation des pratiques enseignantes ; or ces derniers dans le primaire n'y sont pas tous préparés : ils n'ont pas forcément le temps ou n'osent tout simplement pas. De même, malgré la plus-value espérée, cette tâche nouvelle d'intégration demande un surcoût en travail de préparation pour l'enseignant.

Pour la suite de cette recherche, nous suivons ces élèves en CM2 ; l'enseignante de ce niveau n'étant pas très à l'aise avec l'outil informatique, c'est l'enseignant de l'année de CM1 qui est en charge de mener les séances en GD cette année 2013/2014 (décloisonnement).

3 Évolution de la méthodologie et perspectives

Lors de l'expérimentation pour le mémoire de recherche, quand nous travaillions avec le demi-groupe classe en informatique, l'autre demi-groupe était dans une activité non mathématique.

Pour pouvoir enrichir le corpus de notre travail et les analyses qui en découlent, actuellement nous menons avec un groupe des activités en GD et avec l'autre groupe des activités en environnement papier-crayon. Par ailleurs, nous suivons les élèves en séance « classique » de géométrie.

D'un point de vue des interactions langagières, désormais l'instrumentation s'accompagne du discours conceptuel associé afin que l'élève conscientise les gestes effectués, cela signifie un vocabulaire simple mais précis accompagnant les schèmes d'action associés. De par la quantité d'apprentissages opérationnels qu'ils ont à gérer, les enseignants de l'école primaire ont généralement une tendance naturelle à transformer ce qui devrait être une instrumentation en tâche d'exécution. Un volet de notre ingénierie didactique que nous mettons en place pour un usage généralisé de la GD est particulièrement vigilant à ce que cette pratique non seulement résiste à cette tendance mais puisse aussi l'évacuer. Nous veillons de notre côté à la présence et l'expression correcte du sens mathématique de ce qu'on propose.

Enfin, pour cette année, nous comptons affiner les travaux menés en analysant en détail tout le corpus recueilli.

VI - CONCLUSION

Nous avons vu à travers les activités précédentes l'efficacité d'une instrumentation bien menée (construction du pentagone régulier) et la richesse des productions des élèves utilisant l'anticipation et l'a-modalité du logiciel.

S'il est plus riche et plus facile d'accès, le cadre dynamique est aussi géométriquement plus exigeant car il déconstruit un rapport implicite au dessin géométrique encore trop présent au cycle 3. L'évolution des interfaces des logiciels, comme ici la mise en œuvre du Monkey, adaptée à l'école primaire, permet de nouvelles ingénieries didactiques qui savent prendre à leur charge une part de cette exigence. L'organisation d'activités autour d'interactions langagières est une autre façon de prendre en charge, mais aussi d'accélérer l'entrée dans la géométrie des propriétés des objets.

L'utilisation du Monkey, considéré comme autre tiers validant que l'enseignant, permet aux élèves de mettre à distance leurs propres démarches perceptives pour mieux les regarder, favorisant ainsi des changements de représentations et donc de stratégies de construction.

Enfin, suite à ces expérimentations, nous avons pris conscience du caractère spécifique d'un travail en petit groupe piloté par un projet de recherche. Comme l'a mis en évidence Michèle Artigue, va se poser le problème du transfert d'une expertise locale à sa massification. Même si elle est théoriquement incontournable, nous nous appliquons dans la construction de notre ingénierie, à ce que la décohérence quantique (influence de l'environnement) s'applique le moins possible à la pratique de la géométrie dynamique.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. (2011) Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement de base, UNESCO, 43-44.

ASSUDE T. (2007) Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire, in Floris R. et Conne F. (éd) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, 119-134, Bruxelles : De Boeck.

CHARNAY R. & DOUAIRE J. (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Paris : Hatier.

GOUSSEAU-COUTAT S. (2006) Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété, thèse de doctorat de l'université JOSEPH FOURIER, Grenoble 1.

HOUDEMENT C, KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, IREM de Strasbourg, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, **11**, 175-193.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en didactique des mathématiques*, **14**, 1.2, 165-210.

HAKENHOLZ E. (2006) Concepteur du logiciel CaRMetal, http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/

PAYET I. (2013) Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CE2, IREM de la Réunion, en cours de rédaction.

PAYET I. (2011) Géométrie dynamique au cycle 3 : construction d'un rectangle, IREM de la Réunion,

http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article472.

PAYET I. (2010) Comparaison des environnements papier-crayon et informatique en cycle 3 sur une activité géométrique non usuelle, *Expressions*, **35**, 119-145.

http://espe.univ-reunion.fr/bibliotheque/revue-expression/

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

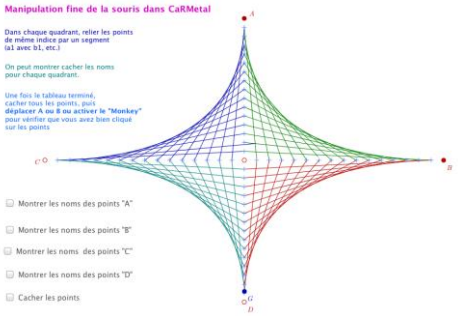
RESTREPO A. M. (2008) Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème, thèse de doctorat de l'université JOSEPH FOURIER, Grenoble 1.

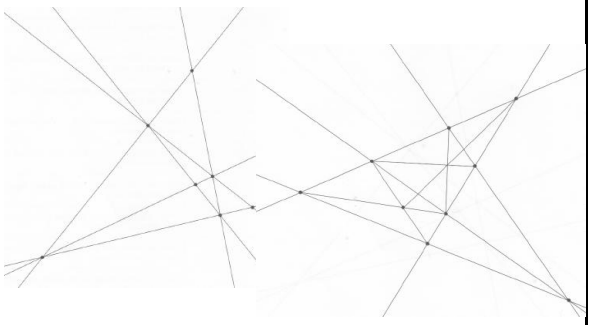
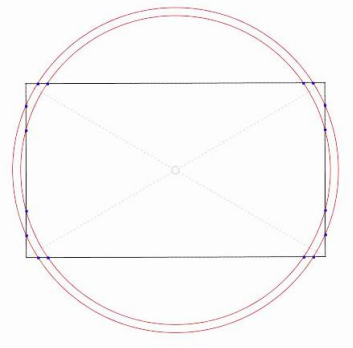
VIII - ANNEXES

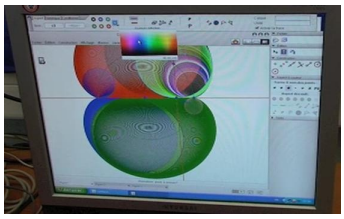
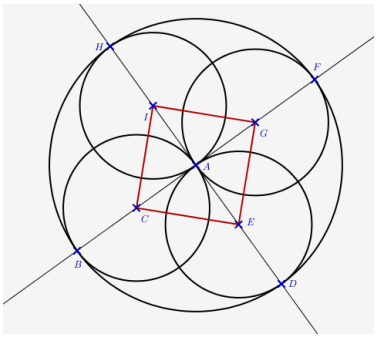
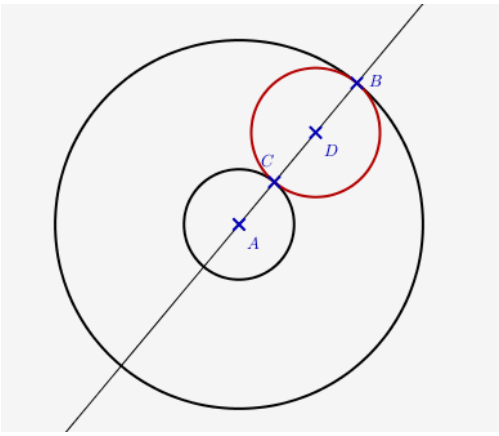
Les fiches pédagogiques des séquences seront accessibles sur le site de l'IREM de la Réunion (article en cours : Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CE2, et article à venir : Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CM1).

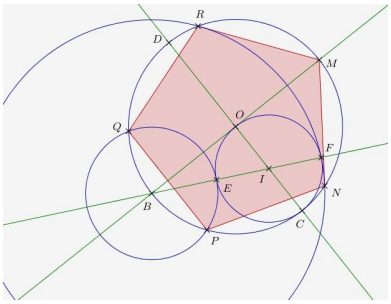
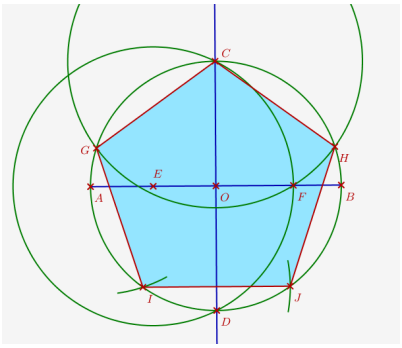
Pour chaque niveau de classe, les séquences se présentent sous la forme d'un tableau avec d'une part les activités mathématiques avec les objectifs visés dans un premier temps et les consignes données aux élèves (pour plus de détails et notamment les différents programmes de construction des figures, se référer aux fiches pédagogiques disponibles dans les articles cités précédemment sur le site de l'IREM de la Réunion) et d'autre part l'instrumentation du logiciel.

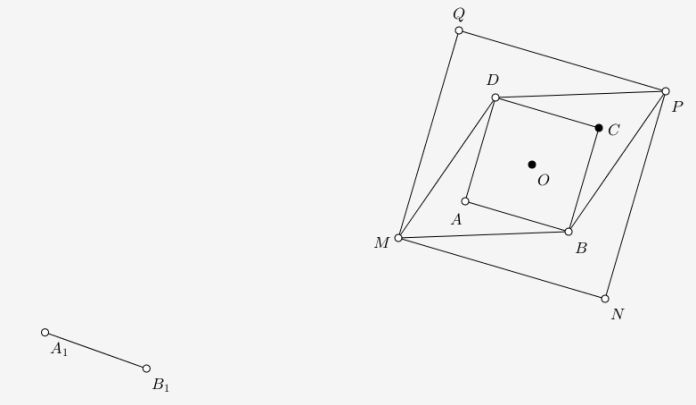
Annexe 1 - Séquence en CM2 (année 2010/2011)

Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Découverte du logiciel	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. **Consignes :** * Créer un point A et un point B ; puis déplacez-les en utilisant l'icône Les déplacements sont-ils libres? Faire la même chose mais cette fois-ci en utilisant le Monkey * A partir de ces deux points A et B, tracer le segment [AB]. Cliquez droit sur le segment, et dans l'inspecteur d'objet, changez sa couleur et sa forme. Puis déplacez-le en utilisant les deux façons de faire. Qu'observe-t-on dans les deux cas? * Tracer un segment de longueur fixe ; cliquez droit dessus et dans l'inspecteur d'objets, fixez la longueur à 4 puis allez dans l'onglet aspect et activez la trace. Déplacer le point B, que remarque-t-on?	Découverte du logiciel : palette, inspecteur d'objets. Instrumentation des outils suivants : point, segment, segment de longueur fixe, Monkey. Instrumentation sur la manipulation directe. Activité d'instrumentation : les tableaux de fils. 

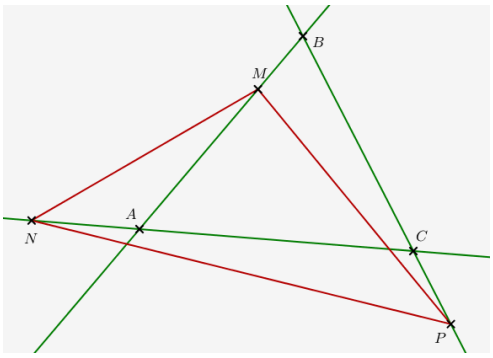
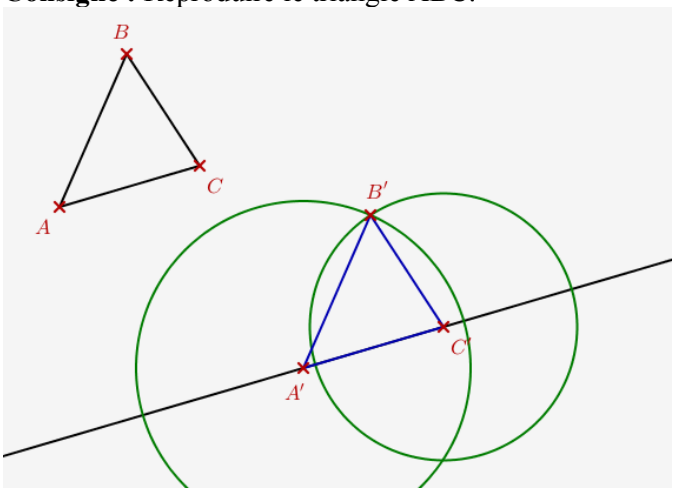
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S2 Faisceaux de traits (ERMEL) : reproduction de figures mettant en jeu des relations d'incidence	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - employer des relations d'incidence. - comprendre la nécessité de mettre en place une chronologie (situation n°2). - comprendre que les points peuvent être définis par des alignements (situation n°2). **Consignes :** Reproduire les figures à partir des points donnés.  Situation n°1 Situation n°2	Instrumentation sur les outils droites, segments et point.
S3 Construction du rectangle et Problème ouvert : nombre d'intersections d'un rectangle avec deux cercles	<u>Construction du rectangle</u> - construire une figure **Consigne :** construire un rectangle qui résiste au mouvement. <u>Problème ouvert</u> - émettre des hypothèses sur l'intersection de deux cercles avec un rectangle. **Consigne :** construire deux cercles ayant un maximum de points d'intersection avec le rectangle construit. 	Instrumentation sur les outils perpendiculaire et parallèle. Instrumentation sur la manipulation directe et sur le Monkey.

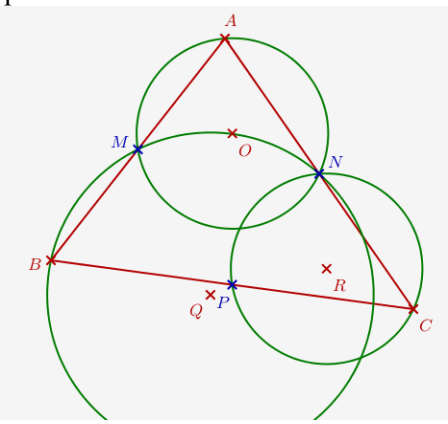
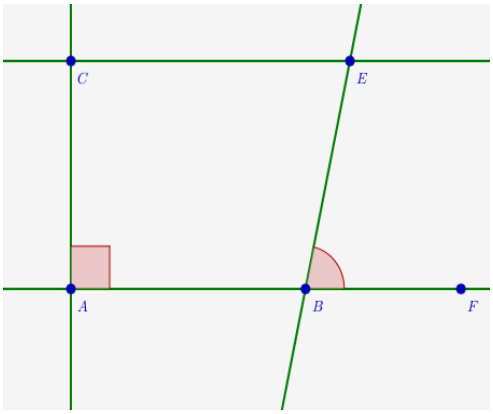
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S4	- suivre un programme de construction. - émettre des hypothèses sur le problème de la situation n°2. - utiliser les propriétés géométriques d'une figure valider une hypothèse. *Activité 1 : la néphroïde* **Consigne :** suivre le programme de construction et animer le point indiqué.  *Activité 2 :* Suite à une construction mettant en jeu la construction de cercles, les élèves doivent répondre à la **consigne** suivante : comment s'appelle le quadrilatère construit? Pourquoi? 	Instrumentation sur les cercles. Instrumentation sur l'outil animation.
S5 Le cercle et les cercles (ERMEL)	- faire émerger des propriétés géométriques d'une figure pour la construire. - argumenter la validité d'une procédure de construction. **Consigne :** tracer un autre cercle qui touche les deux premiers. 	Instrumentation sur les cercles.

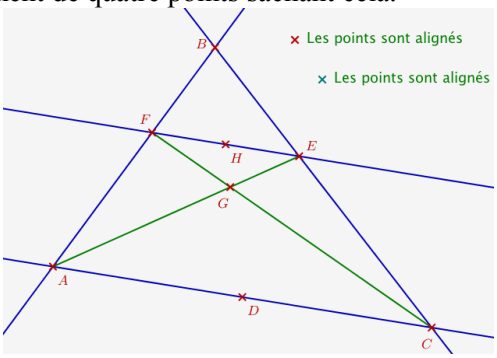
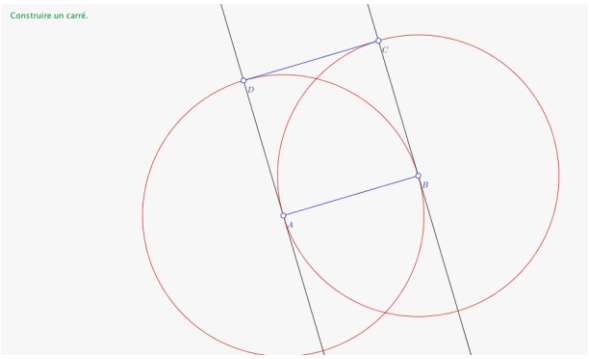
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S6 Le pentagone régulier	- suivre un programme de construction **Consigne :** Suivre les programmes de construction pour construire les deux figures demandées.  programme n°1  programme n°2 **Consignes :** Quelles sont les propriétés de ce polygone construit ? Comment se nomme-t-il ? On attend que les élèves nous disent qu'il a cinq côtés de même longueur, cinq sommets et qu'on le nomme pentagone (on précisera régulier).	Bilan sur l'instrumentation.

Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S7 Reproduction de figure mettant en œuvre la construction du carré	- construire un carré. - décrire une figure. - reproduire une figure. **Consignes :** Décrire la figure à l'écran. Reproduire le petit carré à partir de l'un de ses côtés. Terminer la reproduction de la figure initiale. 	

Annexe 2 - Séquence en CE2 (année 2011/2012)

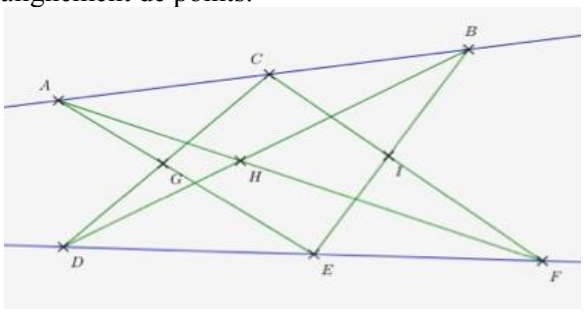
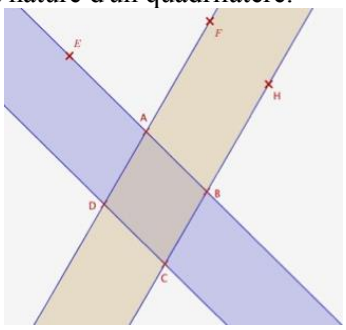
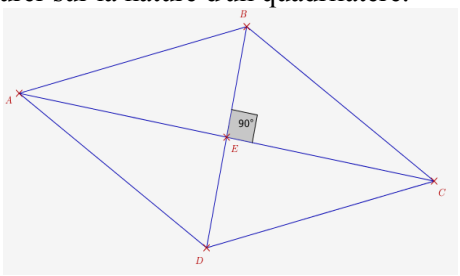
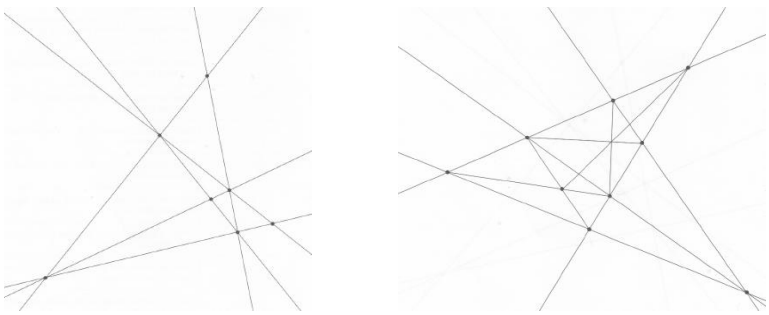
Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Le triangle des milieux, permanence des propriétés lors de l'utilisation du Monkey.	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - construire un triangle. - faire des conjonctures. **Consignes :** Comment placer les points M, N et P pour que le triangle MNP soit à l'intérieur du triangle ABC ? Comment placer les points M, N et P pour que le triangle MNP soit à l'extérieur du triangle ABC ?  	Découverte du logiciel. Instrumentation sur les points, segments. Instrumentation sur le Monkey. Travail sur la manipulation directe. Les tableaux de fils et les cardioïdes (pour apprendre à cliquer au bon endroit).
S2 Reproduction de figure : le triangle.	- reproduire à partir d'un modèle un triangle donné. - décrire ses procédés de tracés. **Consigne :** Reproduire le triangle ABC.  	Instrumentation de l'outil cercle report de longueur. Instrumentation de l'outil cacher et supprimer. Instrumentation de l'outil cercle de rayon fixe. Instrumentation de l'outil animation.

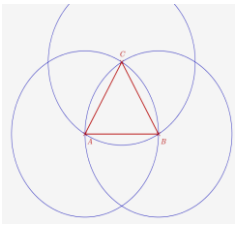
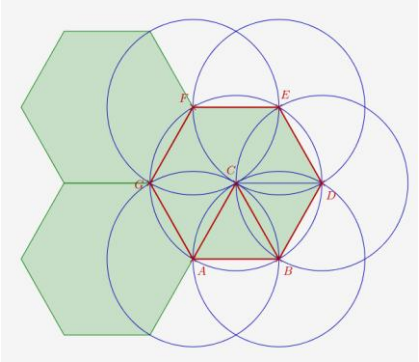
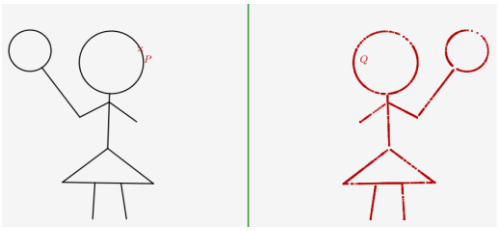
S3 Conjecture	- suivre un programme de construction. - émettre des hypothèses. **Consigne :** suivre le programme de construction. Les élèves sont ensuite sollicités sur la question suivante : où se coupent les cercles?  	Instrumentation de l'outil cercle passant par trois points
S4 La double perpendicularité et le parallélisme. Le rectangle et ses propriétés.	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - suivre un programme pour la construction des droites sécantes. - conjecturer. - faire des hypothèses. **Consignes :** ces dernières étant nombreuses, se référer à la fiche pédagogique pour cette activité.  	Instrumentation sur l'outil angle. Instrumentation sur les tests perpendiculaire et parallèle.

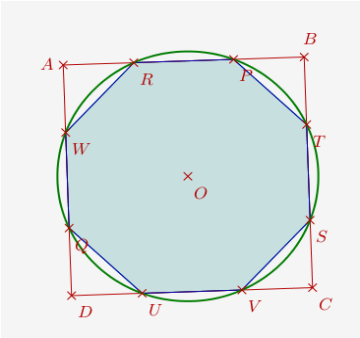
S5 L'alignement	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - suivre un programme de construction. - conjecturer. **Consignes :** suivre le programme de construction et dire si les quatre points B, H, G et D sont alignés. Le logiciel permet de faire un test sur l'alignement de 3 points uniquement ; les élèves doivent donc argumenter sur l'alignement de quatre points sachant cela. 	Instrumentation sur les macros polygones. Instrumentation sur le test points alignés.
S6 Le carré	- construire un carré. - utilisation en situation du vocabulaire associé à cette construction - décrire les procédés de tracés. **Consignes :** construire un carré à partir d'un côté et décrire les procédés de tracés. 	

Annexe 3 - Séquence en CM1 (année 2012/2013)

Les consignes étant nombreuses, elles n'ont pas été détaillées dans ce document ; pour cela se référer aux articles (cités en bibliographie) sur le site de l'IREM de la Réunion.

Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Alignement de points	- suivre un programme de construction. - tester l'alignement de points. 	Rappel sur l'instrumentation vue en CE2.
S2 Nature des quadrilatères : propriétés (des côtés) du carré, du losange.	- conjecturer sur la nature d'un quadrilatère. 	Instrumentation sur la manipulation directe. Instrumentation sur les outils de test (perpendiculaire et parallèle).
S3 Nature des quadrilatères : propriétés des diagonales du carré, du losange.	- conjecturer sur la nature d'un quadrilatère. 	Instrumentation sur la manipulation directe. Instrumentation sur l'outil test.
S4 Reproduction de figures (configuration de droites sécantes) : faisceaux de traits (ERMEL).	 Se reporter à la séance S2 en CM2.	Instrumentation sur les points, droites et segments.

S5 Le triangle L'hexagone régulier et pavage.	- construire un triangle et argumenter sur la nature du triangle.  - suivre un programme de construction de l'hexagone régulier. - réaliser un pavage avec l'hexagone. 	Instrumentation sur les macros polygones. Instrumentation sur le test points alignés.
S6 La symétrie axiale.	- faire le symétrique d'une figure donnée.  - retrouver l'axe de symétrie d'une figure (triangle isocèle et équilatéral). 	Instrumentation sur l'outil aimantation. Instrumentation sur la trace. Instrumentation sur l'outil symétrie axiale.

S7 L'octogone.	- construire un carré à partir de son centre et d'un sommet. - description les procédés de tracés. - construire d'un octogone régulier à partir du carré.		

À LA DÉCOUVERTE DES TRIANGLES : DE LA MANIPULATION DE SEGMENTS DANS UN LOGICIEL DE MATHÉMATIQUES DYNAMIQUES À LA CONSTRUCTION À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Anne VOLTOLINI
Enseignante
Collège Champollion, Grenoble
anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé
Nous présentons une situation de travail sur les triangles, basée sur l'utilisation de cahiers d'activités informatiques. L'objectif de la situation est l'apprentissage de la construction à la règle et au compas d'un triangle étant données les longueurs de ses trois côtés. Dans un premier cahier l'élève sera amené à former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs données selon deux déplacements : par translation et par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. Ce deuxième déplacement qui permet de faire pivoter le segment autour d'une extrémité qui reste fixe amènera l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle. Un deuxième cahier poursuit le travail pour aboutir à l'usage du compas et à la nécessité de tracer des arcs de cercles pour construire un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.

Les moyens de communication pour apprendre évoluent très rapidement aussi bien à l'école qu'en dehors de l'école. Ainsi il nous semble important de réfléchir au défi de l'intégration des TICE dans notre enseignement des mathématiques. Les projets MaDyp : Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire et Mallette : Mallette de ressources pour l'école, actions de l'équipe de recherche EducTice de l'IFE, ont pour objectif de développer des activités utilisant les TICE qui incluent une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur pour l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et primaire. La géométrie au cycle 3 et les triangles font partie des thèmes de travail de ces groupes.

Nous présentons une situation de travail sur les triangles, basée sur l'utilisation de cahiers d'activités informatiques développés avec le logiciel Cabri Elem[1]. Cette situation a pour objectif d'apprentissage la construction géométrique à la règle et au compas d'un triangle étant données les trois longueurs de ses côtés. Un premier cahier amène l'usage du compas, dans la construction géométrique du triangle à partir de manipulations de segments de longueurs données. Un second cahier poursuit le travail pour aboutir à l'usage du compas et la nécessité de tracer des arcs de cercle pour construire un triangle dont on connaît les trois longueurs des côtés.

I - UN PREMIER CAHIER « À LA DÉCOUVERTE DES TRIANGLES »

Dans le premier cahier,qui permet d'amener la nécessité de l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont données, l'élève sera amené à traiter deux tâches : former des triangles par manipulation directe (Laborde et Marcheteau 2009)

[1] Le logiciel Cabri Elem créator et Player est un logiciel développé par la société Cabrilog partenaire dans les projets Madyp et Mallette.

de segments de longueurs données, et déterminer si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche de la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments. Deux types de déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation ou par rotation en faisant pivoter le segment autour d'une extrémité qui reste fixe.

1 Former des triangles (figure 1)

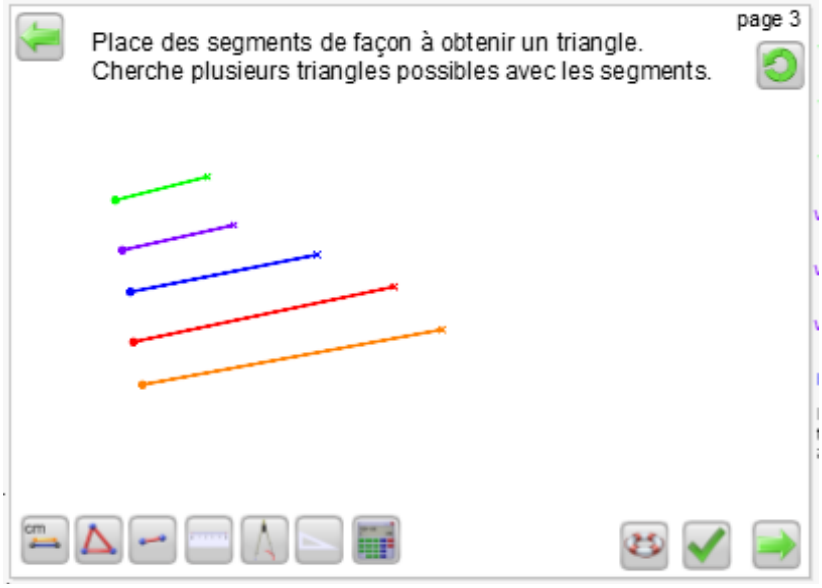


Figure 1. Place des segments de manière à obtenir un triangle.

Sur cette page sont affichés cinq segments de longueurs données. Il est demandé à l'élève de placer des segments de façon à obtenir un triangle, et de chercher plusieurs triangles possibles. Les segments sont asymétriques dans le mouvement et à l'écran. L'extrémité ronde permet de déplacer le segment par translation et l'extrémité cruciforme permet de faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. L'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements contrairement aux manipulations d'objets sensibles lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ces deux déplacements possibles des segments, par translation et par rotation, permettent de mettre en œuvre des stratégies pour former un triangle. Pour former un triangle reconnaissable par le système il est possible de procéder par ajustements successifs ou de former une ligne brisée, dont les deux extrémités sont cruciformes, puis le triangle en faisant pivoter les deux segments extrêmes. Dans ces deux stratégies le déplacement par rotation est indispensable.

2 La ligne brisée : une stratégie gagnante efficace (figure 2)

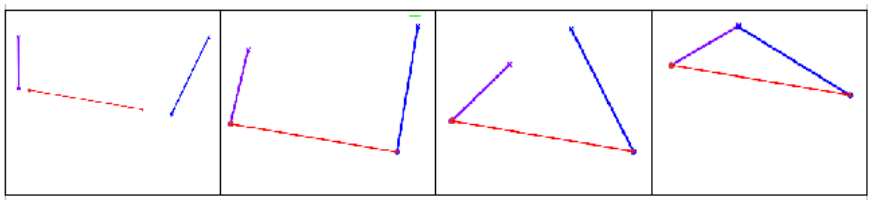


Figure 2. Former un triangle en passant par la ligne brisée

Cette stratégie gagnante efficace est une première étape à la déconstruction dimensionnelle du triangle. (Duval 2005). L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une déconstruction

dimensionnelle du triangle (2D) à la ligne brisée (1D). Cette descente dans les dimensions permet le passage d'une surface à une ligne alors que la construction géométrique du triangle à la règle et au compas repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle (2D) au point d'intersection des deux arcs de cercle (0D).

La manipulation des segments est plus efficace lorsqu'elle donne au grand segment un rôle particulier. En effet la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres est plus efficace pour former le triangle car il est alors plus facile d'anticiper la position du troisième sommet. Le troisième sommet est dans une bande de largeur le grand segment (figure 3).

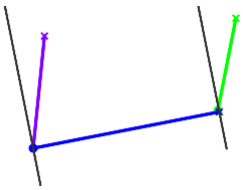


Figure 3. Le troisième sommet du triangle est dans la bande centrale

Cette ligne brisée avec le grand segment placé entre les deux autres est aussi plus efficace pour montrer la non existence du triangle (figures 4 et 5).

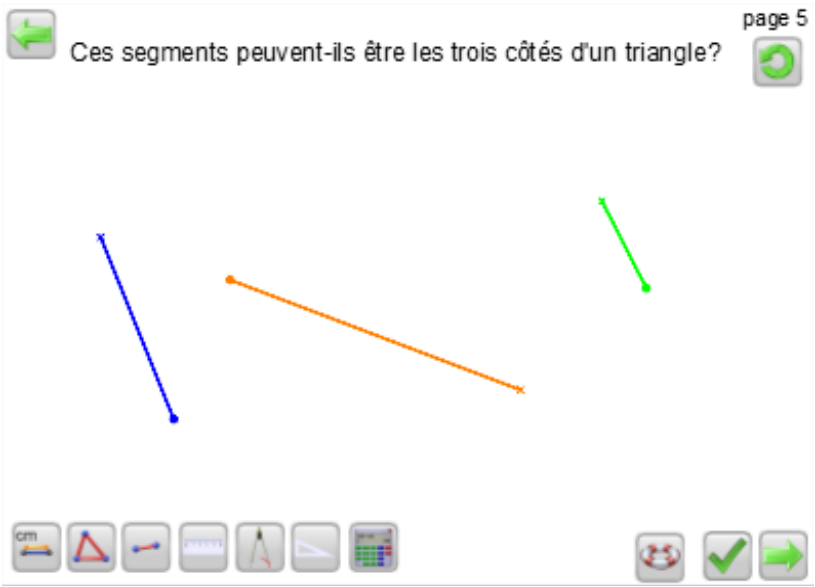


Figure 4. Ces segments peuvent-ils être les trois côtés d'un triangle ?

Figure 5. Visualisation de la non existence du triangle

3 Des rétroactions porteuses d'informations

La manipulation des segments dans l'environnement informatique sert à produire la solution et est porteuse d'informations (Laborde et Marcheteau 2009). En effet les rétroactions de manipulation directe, l'affichage continu du segment au cours du déplacement, les positions successives du segment, la trajectoire de l'extrémité dans le déplacement par rotation permettent à l'utilisateur d'avoir un contrôle sur le segment, côté du triangle qui est déjà présent mais pas dans la bonne position. Ceci n'est pas le cas lors de l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle. Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas est utilisé dans sa fonction de report de longueurs, il produit des arcs de cercle et le segment qui représente le côté du triangle n'est pas rendu visible.

Ce premier cahier dans l'environnement informatique Cabri Elem, qui oblige à dissocier les deux déplacements, met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle et permet le contrôle de l'utilisateur sur le côté du triangle, peut constituer une première étape à l'apprentissage de la construction géométrique du triangle dont les longueurs sont celles des trois segments donnés.

4 Expérimentation et résultats

Ce cahier « À la découverte des triangles » a été testé dans une classe de CM2. L'enseignante a engagé sa séquence sur la construction géométrique du triangle à la règle et au compas à partir de ce cahier.

Les élèves sont tous entrés dans l'activité. La distinction graphique des deux extrémités d'un segment, ronde ou cruciforme, est rapidement prise en compte par les élèves. Ils découvrent tous et utilisent tous le double déplacement de chaque segment : l'extrémité ronde permet de déplacer le segment par translation alors que l'extrémité cruciforme permet de le faire pivoter autour de l'autre extrémité qui reste fixe. Pour former les triangles, la majorité des élèves a mis en place la stratégie ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix pour pouvoir pivoter les segments extrêmes et ainsi former le triangle. Lors de la phase de synthèse par l'enseignante cette stratégie a été reconnue comme la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement informatique. La nécessité de la rotation dans la phase de formation d'un triangle a été mise en évidence par les élèves et les a conduits à citer le compas comme instrument nécessaire dans la construction géométrique d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.

II - UN SECOND CAHIER « CONSTRUIRE DES TRIANGLES »

L'objectif de ce cahier est de permettre l'apprentissage de la construction, à la règle et au compas, d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données en s'appuyant sur les schèmes de manipulation des segments élaborés lors de l'utilisation du premier cahier. Il s'agit d'aboutir à l'usage du compas pour tracer des arcs de cercle dont l'intersection sera le troisième sommet du triangle. Il s'agit de trouver le troisième sommet du triangle par une méthode et non plus par tâtonnement.

Dans ce second cahier on repart de la ligne brisée, constituée des trois segments, qui a pu être formée dans le premier cahier. Deux tâches seront à traiter : former un triangle à partir d'une ligne brisée pour faire apparaître la trace des extrémités et les cercles sous-jacents à la construction du triangle, puis construire des triangles à l'aide des outils compas ou cercles disponibles dans une boite à outils à disposition.

Ce cahier n'a pas encore été testé avec des élèves.

1 Former des triangles (figure 6)

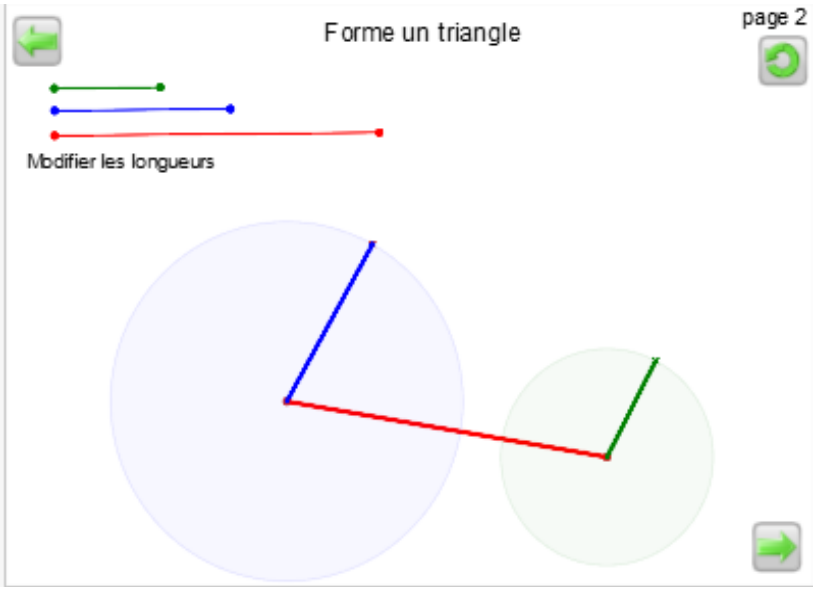


Figure 6. Forme un triangle

Trois segments et une ligne brisée constituée à partir des trois segments sont affichés à l'écran. Il s'agit de former un triangle à partir de cette ligne brisée. Les cercles dont les rayons sont les deux segments extrêmes de la ligne brisée sont apparents. Le troisième sommet du triangle peut être visible comme intersection des deux cercles. Dans la configuration à l'ouverture de la page les cercles n'ont pas de point d'intersection donc le triangle ne peut pas être formé. Une ou plusieurs longueurs doivent être modifiées pour faire apparaître le troisième sommet du triangle comme point d'intersection des deux cercles et former le triangle.

2 Construire un triangle (figure 7)

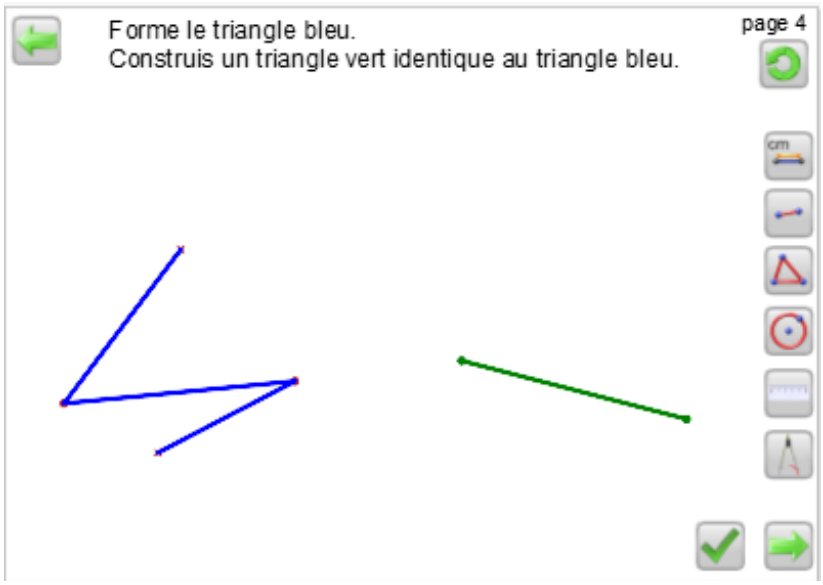


Figure 7. Construire un triangle

Une ligne brisée et un segment sont proposés sur la page. Après avoir formé le triangle à partir de la ligne brisée il s'agit de construire un triangle identique à partir du segment déjà affiché sur la page. Il n'est pas possible de superposer le triangle et le segment. Le système bloque une manipulation directe qui aurait pu être obtenue par déplacement du triangle ou du segment.

Des outils sont disponibles sur la page. On retrouve les outils longueur, segment, triangle, règle et compas déjà présents dans le premier cahier. L'outil cercle est aussi disponible ici.

III - CONCLUSION

Au cours des manipulations des segments l'élève s'approprie la nécessité de la rotation pour former des triangles dans l'environnement numérique. L'élève élabore un instrument (Rabardel 1995) « rotation d'un segment » qui va lui permettre de former des triangles dans l'environnement informatique. Les schèmes évoqués chez le sujet au cours de l'élaboration de l'instrument « rotation d'un segment » peuvent être associés à des schèmes d'utilisation du compas. Nous retenons que cet instrument « rotation d'un segment » que l'élève élabore dans la tâche de formation d'un triangle dans l'environnement informatique et les rétroactions qu'il produit sont porteurs de sens pour l'utilisation du compas dans la construction géométrique du triangle.

IV - BIBLIOGRAPHIE

DUVAL R . (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives,* **10**, 5-53.

LABORDE C., MARCHETTEAU A. (2009) L'incontro tra réale e virtuale in Cabri Elem per attivita matemativhe nella scuola primaria, *La matematica e la sua Didattica*, **23 n°1**, 19-34.

RABARDEL P.(1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

VERS UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE DU PROFESSEUR DES ÉCOLES ENSEIGNANT LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : UN EXEMPLE DE CIRCULATION DES SAVOIRS ENTRE RECHERCHE ET FORMATION

Denis BUTLEN
PU, IUFM de Versailles - UCP
LDAR
Denis.butlen@u-cergy.fr

Monique CHARLES-PEZARD
MCF, IUFM de Créteil - UPEC
LDAR
Monique.pézard-charles@upec.fr

Pascale MASSELOT
MCF, IUFM de Versailles - UCP
LDAR
PMasselot@aol.com

Résumé
Quelle est la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans les actuels masters « Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré » ? Comment est-elle intégrée à la formation en mathématiques ? À quel moment ? Quels sont les contenus abordés ? Que signifie « adosser un master à la recherche » ? S'agit-il d'amener les futurs enseignants à prendre connaissance de certains résultats de recherche censés éclairer leurs pratiques quotidiennes ultérieures ? Ou bien de les engager dans une démarche de recherche ?
Dans une première partie, nous mettons en perspective et analysons en parallèle deux modalités à partir des descriptifs de deux masters : celle proposée par l'IUFM de Créteil, UPEC et celle proposée par l'IUFM de Versailles, UCP. Nous présentons ensuite des éléments sur la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans ces formations en fonction des besoins des futurs professeurs des écoles qui devront enseigner les mathématiques. Dans une troisième partie, nous réfléchissons de façon plus générale sur le contenu possible d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques pour ces enseignants et nous tentons d'en dégager les incontournables, en particulier le rôle du mémoire. Nous concluons sur différents liens possibles entre recherche et formation, en les mettant en perspective avec la réforme en cours de la formation des enseignants dans les futures ESPE.

Ce texte a pour but de présenter le point de vue de chercheurs ayant une longue expérience de formation (formation de Professeurs des Écoles mais aussi formation de Formateurs), engagés dans des recherches sur les pratiques d'enseignants du premier degré, débutants et confirmés notamment exerçant en ZEP. Ces recherches, initialisées pour une part par des questions de formation, débouchent sur de nouvelles questions de formation et contribuent à dégager des pistes de réflexion portant en particulier sur la place de la recherche dans le cadre des masters « enseignement 1er degré » mais aussi plus largement dans les masters formation des enseignants. Cela nous conduit à traiter de la place d'un enseignement explicite de didactique des mathématiques dans ce type de formation.

Des questions initiales :

Quelle est la place accordée à la recherche dans les Masters « *Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré* » ? Comment est-elle intégrée ? À quel moment ? Quels sont les contenus abordés ? Que signifie « *adosser un master à la recherche* » ? S'agit-il d'amener les futurs enseignants à prendre connaissance de certains résultats de recherche censés éclairer leurs pratiques quotidiennes ultérieures ? Ou bien l'objectif est-il de les engager dans une véritable démarche de recherche ?

Après deux années de mise en place effective des masters, en nous limitant au cas de la formation en mathématiques des professeurs des écoles, nous présentons l'état de notre réflexion sur ces questions en nous appuyant sur une première analyse de deux modalités retenues pour adosser ces masters à la recherche.

Dans une première partie, nous mettons en perspective et analysons en parallèle deux modalités à partir des descriptifs (dont des extraits figurent en annexe) de deux masters : celle du Master proposé par l'IUFM de Créteil, UPEC, et celle du Master proposé par l'IUFM de Versailles, UCP. Ces deux IUFM sont proches tant par leur taille que par le public des étudiants inscrits. Nous présentons ensuite des éléments permettant de formuler des hypothèses sur les choix quant à la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans ces formations en fonction des hypothèses relatives aux besoins des futurs professeurs des écoles qui devront enseigner les mathématiques. Dans une troisième partie, nous tentons de dégager les incontournables d'un master professionnel intégré à la formation des professeurs des écoles.

I - MISE EN PERSPECTIVE DE DEUX MODALITÉS

Pour la première analyse, nous nous appuyons sur les expériences communes des formateurs mais aussi sur l'expérience spécifique des formateurs de mathématiques. Autrement dit, à partir des deux exemples de Créteil et Versailles[1], nous apportons des éléments de réponse aux questions suivantes : Quelle place a pris cet aspect dans le cadre des masters ? À quel moment ce type de travail est-il proposé ? Selon quelles modalités ?

1 Temps consacré à cette initiation à la recherche et intitulés des Unités d'Enseignement

Afin de situer la place donnée dans le Master, nous pouvons tout d'abord repérer le temps consacré à cette initiation à la recherche tout au long des deux années de Master et les intitulés des Unités d'Enseignement concernées.

Pour Créteil, l'option recherche intitulée : « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » est proposée parmi une trentaine de choix, (voir Annexe 1).

L'UE « Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (initiation à la recherche et approfondissement) » représente 44 h au semestre 1 (pour 6 ECTS) et l'UE « Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle. Réalisation d'une note de recherche. » 27 h au semestre 2 (pour 9 ECTS).

L'UE « Accompagnement et approfondissement dans la thématique de recherche choisie. Réalisation d'un mémoire » représente 21 h au semestre 3 (pour 6 ECTS) et l'UE « Accompagnement et poursuite de la réflexion sur la recherche. Réalisation d'un mémoire » 33 h au semestre 4 (pour 12 ECTS).

Donc globalement, sur les deux années de formation, dans ce Master, 125 h sont consacrées à l'initiation à la recherche.

[1] Il s'agit des maquettes IUFM du master « premier degré », qui ne seront pas celles des ESPE mises en œuvre à la rentrée 2013.

Créteil	S1	S2	S3	S4	Total
UE Option Recherche	44h	27h	21h	33h	125h
UE Enseigner les mathématiques[2]	28h	35h	34h[3]	25h	122h

Pour Versailles (voir Annexe 2), en M1[4], l'Unité d'Enseignement (UE1) « Savoirs transversaux et initiation à la recherche » comporte un Élément Constitutif (EC2) « Initiation à la recherche : méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse. Élaboration d'un écrit de recherche » d'une durée de 20 h.

En M2, l'Unité d'Enseignement (UE1) « Savoirs transversaux et formation par la recherche » comporte un Elément Constitutif (EC2) « Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. Élaboration du mémoire avec suivi sous forme d'ateliers et tutorat individuel » d'une durée de 22 h.

Donc globalement, sur les deux années de formation, 42 h sont consacrées à l'initiation à la recherche, soit le tiers en durée de l'exemple précédent. Cependant les choix diffèrent également au niveau des heures des UE de mathématiques proposées à l'ensemble des étudiants. Pour Créteil, il y a une soixantaine d'heures en M1 et en M2 alors que dans la maquette de Versailles, 100 heures en M1 sont consacrées à l'EC : « Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école » et 72 heures en M2 pour l'EC : « Enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et élémentaire et appropriation de ressources didactiques ».

Versailles	UE1 (M1)	UE2 (M2)	Total
UE Initiation à la recherche	20 h	22 h	42 h
UE Enseigner les mathématiques	100 h	90 h[5]	190 h

Pour ce qui est des intitulés, les deux mentionnent l'expression « initiation à la recherche », mais l'un le décline en M2 en « Accompagnement, approfondissement dans la thématique de recherche choisie », puis « poursuite de la réflexion sur la recherche » alors que le second décline cette expression en « méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse », puis « formation par la recherche », déclinée encore en « Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. ».

2 Contenus des Unités d'Enseignement

Au-delà des intitulés, attardons nous sur le contenu de ces UE dans le cas des étudiants qui optent pour le domaine des mathématiques. Dans les deux cas, le choix porte sur les travaux de recherche relevant de la didactique des mathématiques, cependant les descriptifs diffèrent nettement.

[2] Pour le S1 et le S3, il faut rajouter des heures liées à deux UE professionnelles transversales, en moyenne une dizaine d'heures pour chacune.

[3] Incluant 12 h consacrées spécifiquement à la préparation de l'épreuve écrite de mathématiques de septembre

[4] Le choix a été fait pour Versailles d'annualiser les enseignements de chaque année du Master.

[5] Incluant 18 h consacrées spécifiquement à la préparation de l'épreuve écrite de mathématiques de septembre

Pour Créteil, le nombre d'heures est conséquent, les enseignants chercheurs interviennent très majoritairement dans cette partie de la formation ; quelques PIUFM interviennent ponctuellement notamment pour le suivi des notes de recherche en première année. Les objectifs et les descriptifs des contenus et des supports privilégiés pour chacun des semestres sont très précis.

En M1, lors du premier semestre :

« Cette option vise à une professionnalisation par la recherche, dans le cadre de la didactique des mathématiques, à partir d'outils de description et d'analyse de situations de classe. Plusieurs questionnements seront présentés aux étudiants pour les amener à comprendre et analyser la problématique de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et notamment :

- l'épistémologie des savoirs mathématiques afin d'étudier plus spécifiquement les notions à enseigner à l'école ;
- les apprentissages des mathématiques à l'école, au travers de cadres théoriques permettant d'analyser les obstacles didactiques, les difficultés des élèves, mais aussi la transposition des savoirs (programmes et manuels) ;
- les marges de manœuvre et contraintes des enseignants, mettant en jeu l'institutionnel, le social, les choix d'énoncés, les scénarii et les déroulements ;
- les élèves en (grande) difficulté, les postures, les malentendus scolaires.

Un travail sur l'observation en classe et l'élaboration de grilles d'analyse prenant en compte plusieurs dimensions du travail de l'enseignant et de l'activité de l'élève sera proposé en vue de la constitution d'un répertoire de matériaux professionnels visant, pour partie, à l'élaboration d'une note de recherche.

Évaluation : analyse d'un ou plusieurs textes issus de travaux en didactique des mathématiques + rédaction d'un écrit intermédiaire servant d'appui pour la note de recherche »

Puis au deuxième semestre :

« Dans la continuité des questionnements abordés au semestre précédent, un travail spécifique sera proposé autour de différents domaines de l'enseignement des mathématiques à l'école (grandeurs & mesures, résolution de problèmes, calcul mental, etc.), ainsi qu'autour des pratiques enseignantes.

Une réflexion sur le recueil et le traitement précis de données pour la recherche sera initiée.

L'élaboration d'une « Note de recherche » constituera le cœur de cette UE. Elle sera étayée par une recherche bibliographique et comprendra un questionnement didactique, ainsi que des pistes méthodologiques appropriées pour le traitement de ce questionnement.

Évaluation : rédaction d'une note de recherche. »

En M2, lors du semestre 3 :

« Approfondissement des apports en didactique des mathématiques s'appuyant sur des comptes-rendus d'expérimentations ou de travaux de recherche portant sur : la numération au CP, les évaluations nationales en mathématiques, les situations de recherche, les notions de définition et de classification, le calcul mental, les pratiques enseignantes…

Un travail méthodologique sera proposé dans le but d'engager les étudiants dans la rédaction de leur mémoire de recherche (ce travail pourra s'appuyer sur la note de recherche du M1).

Évaluation : rédaction d'un écrit intermédiaire servant d'appui pour le mémoire »

Puis au semestre 4 :

« Rédaction d'un mémoire comprenant : l'expression d'une problématique, des éléments de cadrage théorique, la description d'une méthodologie, l'analyse des résultats comprenant la discussion (avec la prise de distance nécessaire correspondante), la portée et les limites de la recherche, la bibliographie, les annexes (avec les données brutes).

Soutenance et présentation des résultats de la recherche et des perspectives qu'ils apportent (dans une perspective professionnelle/professionnalisante et didactique).

Évaluation : rédaction finale du mémoire de recherche et soutenance. »

Pour Versailles, tous les formateurs sont susceptibles d'intervenir mais les contenus sont nettement moins détaillés. Notons que même si chacun des laboratoires d'adossement du master est présenté aux étudiants lors d'un cours en début d'année, les choix des thèmes de mémoires ne sont pas « imposés » a priori.

En M1 :

« Les enseignements de cet EC ont pour objectif une initiation à la recherche en éducation et formation. Ils permettent à l'étudiant de s'approprier les travaux fondamentaux sur une question, d'élaborer un début de problématique relative à cette question, de s'initier à la pratique du recueil méthodique de données et à la construction d'un cadre théorique d'analyse de ces données. »

« Plusieurs ateliers sont proposés au choix des étudiants. Les thématiques des ateliers se rattachent aux disciplines suivantes : didactiques des différentes disciplines scolaires, psychologie, histoire de l'éducation, philosophie de l'éducation, sociologie de l'éducation, sciences de l'information et de la communication, sciences de l'éducation. Dans chaque atelier, une question commune est proposée à tous les étudiants.

Les ateliers privilégient les échanges à partir des exposés réalisés par les étudiants sur les ouvrages de la bibliographie et sur la transformation d'une question de départ en une problématique de recherche. »

« Initiation à l'analyse de données qu'elles soient recueillies par les étudiants ou proposées par le formateur responsable de l'atelier. »

Evaluation : rédaction d'un TER

Puis en M2 :

« Les enseignements de cet EC ont pour objectif la réalisation d'un mémoire professionnel étayé par des références théoriques.

Plus particulièrement, le travail au sein de cet EC permettra à l'étudiant d'approfondir le travail initié en M1 ou d'entreprendre une nouvelle recherche (cadre théorique et problématique). Il permet également de construire une méthodologie pertinente au regard de la problématique, de recueillir et de traiter des données issues de l'expérience professionnelle. »

Evaluation :

« Le mémoire professionnel est centré sur l'analyse de pratiques professionnelles. Il est problématisé en lien avec des questions vives de l'enseignement. Ces pratiques peuvent être celles de l'étudiant lors de ses stages ou être des pratiques observées dans des classes et/ou dans des institutions éducatives et culturelles. Elles font l'objet d'un recueil méthodique. Les analyses sont référées à un cadre théorique clairement défini et s'appuient sur une synthèse bibliographique. »

Ainsi, dans les deux IUFM, les étudiants doivent produire un écrit répondant à certains critères méthodologiques issus de la recherche (constitution d'un corpus de données à interroger, revue bibliographique d'articles exposant des résultats de recherche, prise de distance à une pratique professionnelle personnelle, écrit(s) intermédiaire(s) en M1 susceptible(s) d'être approfondi(s) en M2, etc…). Toutefois, celui-ci ne s'inscrit pas dans le même cursus. Il prend place dans une initiation à la recherche beaucoup plus conséquente (en cours, temps, qualité et quantité d'informations) dans le cursus mathématique de Créteil alors qu'à Versailles, il s'inscrit davantage dans une approche de questions professionnelles plus marquées par l'ancien mémoire professionnel.

Dans les deux cas, pour les concepteurs, il s'agit de penser une transposition de certains concepts issus de recherches en didactique des mathématiques en outils de formation, de fournir aux futurs enseignants une grille de lecture des ressources existantes ainsi que des éléments pour mener une analyse de leur propre pratique, d'accroître les marges de manœuvre et l'efficacité de l'enseignant dans l'exercice quotidien de son métier.

De notre point de vue, cela amène à la construction d'une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques. Ce qui implique la construction d'un corpus de connaissances nécessaires à l'exercice d'une vigilance didactique (Charles-Pézard 2010). Cette notion sera développée dans la suite du texte.

II - DIFFÉRENTS ASPECTS D'UNE INITIATION À LA RECHERCHE DANS LA FORMATION

1 Différents axes d'initiation à la recherche dans la formation

Situant ces deux modalités dans une réflexion plus globale, il nous semble que plusieurs axes peuvent être envisagés dans une formation initiale des professeurs des écoles :

Le premier axe concerne une présentation de résultats de diverses recherches en didactique des mathématiques dans le but d'éclairer la pratique du futur enseignant et de favoriser son développement professionnel : recherches sur différents thèmes mathématiques liés à l'école élémentaire, recherches sur les conditions d'apprentissage des élèves, recherches sur les pratiques des professeurs… À cette occasion, on peut être amené à expliciter des éléments de cadres théoriques (théorie des situations didactiques, théorie des champs conceptuels, théorie de la double approche, théorie anthropologique du didactique…).

Cette présentation de résultats comporte elle-même deux aspects. Elle peut être de type « culturelle », focalisée sur des résultats reconnus par la communauté didactique, sans qu'il soit nécessaire de développer la méthodologie utilisée pour établir ces résultats. C'est le cas par exemple de recherches sur les élèves en difficulté en mathématiques ou de recherches sur les pratiques des enseignants ou encore de recherches sur les conceptions des élèves sur certains contenus, comme les nombres décimaux. Mais une présentation peut aussi s'efforcer de restituer le cheminement des chercheurs concernés, depuis les questions « naïves » qu'ils se sont posées jusqu'aux résultats et limites de la recherche, en passant par la reformulation d'une problématique dans un cadre théorique, la description de la méthodologie utilisée, le traitement des données recueillies. C'est le cas par exemple des recherches sur les relations entre sens et technique liées à une pratique de calcul mental.

Cette mise en évidence d'une démarche de recherche rejoint un deuxième axe d'une initiation à la recherche des futurs enseignants. Il s'agit d'une initiation personnelle à une méthodologie de recherche par l'intermédiaire d'un écrit sous forme de note de recherche ou de mémoire. Cette initiation s'avère difficile pour les étudiants, dans le temps qui leur est imparti. Pourtant le passage par l'écriture d'un mémoire semble une manière active et efficace d'apprendre. Grâce à la distance réflexive permise par l'écrit, l'étudiant peut assimiler des connaissances dans le domaine choisi en les transférant dans la résolution du problème auquel il s'attache dans son mémoire. Celui-ci doit porter sur une question liée à l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire renseigner un problème du métier, en restant centré sur les acteurs que sont les élèves et les enseignants. Il doit être suffisamment dépersonnalisé, décontextualisé pour pouvoir être lu et compris par quelqu'un d'autre que celui qui l'a écrit. Cela implique une méthodologie pour rendre reproductible l'expérience ou la démarche de réflexion, ce qui nécessite de faire un pas de côté, pour une nécessaire prise de distance par rapport à sa propre pratique. La dimension pratique peut alors être liée à ce qui se passe avant, pendant et après la classe.

D'autre part, il nous semble important que des liens entre l'initiation à la recherche et les autres enseignements du Master (UE disciplinaires, didactiques et professionnelles, en particulier liées au stage) soient réellement pensés, mis en évidence par les formateurs et ne restent pas totalement à la charge des étudiants.

2 À propos du mémoire

À partir de ces deux exemples, nous reprenons ce qui semble se dégager concernant le mémoire dans le cadre de la formation au métier de Professeur des Ecoles. Celui-ci doit porter sur une question liée au métier d'enseignant, en restant centré, quand le contexte le permet, sur les

pratiques du sujet. Sa nécessaire décontextualisation implique de prendre du recul par rapport à sa propre pratique.

Les entrées choisies amènent à évoquer ce qui différencie la didactique des autres champs de recherche, notamment la prise en compte des contenus et de lister un certain nombre d'hypothèses admises en didactique des mathématiques.

Pour illustrer, on peut donner quelques exemples de sujets de mémoire (donnés à Créteil). Certains portent plutôt sur les contenus mathématiques et les questions posées par leur enseignement à différents niveaux scolaires :

1. Choix d'une situation d'introduction d'un contenu mathématique à un niveau donné (par exemple numération au CP) et gestion de la situation : quelles analyses préalables ? Quelles conditions sur la phase de lancement de la situation pour assurer la dévolution du problème et une recherche active de la part des élèves ?

2. Choix d'un contenu à un niveau spécifique et étude de la continuité des apprentissages au niveau de l'école, de la transition école/collège.

3. Comparaison de manuels anglais et français sur une même notion (par exemple : fractions et décimaux) ; comment analyser et comparer les tâches proposées et leur complexité ? Importance de la mise en œuvre effective en classe pour comprendre les réussites des élèves.

4. Place et rôle de la manipulation dans l'apprentissage de techniques opératoires (soustraction, division) ; quels matériels peuvent intervenir en amont d'une technique opératoire posée ?

D'autres portent sur l'étude de certaines pratiques :

5. Les pratiques en calcul mental, leur lien avec les autres activités mathématiques, avec la résolution de problèmes ; Quelles analyses à conduire pendant les stages ? Quelle méthodologie ? (interviews, questionnaires, vidéos, etc.).

6. Les pratiques enseignantes dans les activités ludiques : comment les pratiques enseignantes peuvent-elles participer à l'optimisation des apprentissages des élèves en calcul mental à travers des séances de jeux au cycle 2 ?

7. Quelles pratiques et représentations des enseignants sur la technique de la soustraction posée en CE1 et CE2 ? Comment les enseignants et les manuels prennent-ils en compte les différentes techniques possibles ? Comment justifient-ils leurs choix ?

8. La validation des procédures lors de la résolution d'un problème (multiplicatif ou de division) : Quelles analyses ? Quels supports ? Quelle organisation de la mise en commun des procédures et quel rôle du maître ? Quelle phase de bilan ?

9. L'institutionnalisation (par exemple en calcul mental) : Qu'est ce qu'on institutionnalise ? Quand ? Comment institutionnalise-t-on ?

D'autres enfin portent sur des questions plus transversales aux différents thèmes mathématiques :

10. Les erreurs : Comment prendre en compte les erreurs des élèves lors de la phase de mise en commun (formulation / validation) ? Quelle analyse préalable ? Quels effets sur l'activité des élèves et sous quelles conditions ?

11. Les élèves en difficulté en mathématiques : quel diagnostic ? En quoi telle ou telle pratique peut-elle aider ou au contraire se révéler différenciatrice ?

12. Utilisation de schémas pour résoudre des problèmes (par exemple des problèmes additifs de transformation) : quel impact sur la réussite des élèves ? Comment les schémas sont-ils représentés dans les manuels ? Dans quelles conditions les schémas pourraient-ils avoir une influence positive sur les apprentissages des élèves pour la résolution de problèmes ?

13. Comment, lors d'une situation-problème, peut-on recueillir et utiliser les traces de la réflexion des élèves afin qu'elles deviennent les briques fondamentales sur lesquelles leur apprentissage se construira ?

La bibliographie recommandée aux étudiants est essentiellement constituée de revues et d'ouvrages de didactique à visée professionnelle comme par exemple les revues Grand N ou Petit x.

III - DIFFÉRENTES STRATÉGIES POUR ENVISAGER LES LIENS ENTRE RECHERCHE ET FORMATION

1 Qu'entend-on par recherche dans une formation d'enseignant?

Une question « préalable » mais qui en fait trouvera pour une large part une réponse dans l'étude des stratégies, des contenus et des pratiques de formation est celle de la signification de certaines expressions liant les termes formation et recherche : « formation par la recherche », « formation à la recherche », « formation s'appuyant sur ou comportant une initiation à la recherche », « formation en lien avec la recherche ».

Une clarification de ces expressions permettrait sans doute de lever certaines ambiguïtés ou malentendus. Il y a à la fois une continuité et des ruptures dans les conceptions qui accompagnent ces différentes formulations et dans la manière dont elles se traduisent en formation.

Certains considèrent que la recherche est convoquée dès que l'enseignant novice est engagé dans un dispositif et/ou dans des activités qui lui permettent de prendre du recul par rapport à sa propre pratique et dès qu'il adopte une posture réflexive.

D'autres pensent que la recherche est convoquée dès que l'étudiant est impliqué dans une activité de recherche (au sens résolution d'un problème ou élaboration d'éléments de réponse à une question liée (ou non) au métier de professeur). Cette réponse peut ou non déboucher sur une construction de connaissances nouvelles. Notons que cette approche s'oppose à une conception de la recherche largement partagée par les chercheurs qui repose sur l'idée suivante : l'activité de recherche se doit de déboucher soit sur une réorganisation de connaissances anciennes, soit sur un enrichissement de celles-ci ou bien encore sur la constitution de nouvelles connaissances. L'activité de recherche est ainsi finalisée par l'accumulation de connaissances.

D'autres encore incluent sous le terme de recherche la participation (même modeste) à une recherche-action, à une recherche-développement, voire même à une action relevant de l'innovation.

Certains considèrent qu'une initiation à la recherche passe et parfois peut se limiter en formation initiale à la fréquentation et à la mise en œuvre d'une méthodologie inspirée ou importée de la recherche. Celle-ci peut concerner l'élaboration d'une bibliographie, le recueil d'un corpus de données et/ou l'analyse de celui-ci.

D'autres encore, défendent l'idée qu'il est nécessaire de proposer aux étudiants et aux professeurs novices des éléments de théories dans le cadre d'un enseignement de concepts construits, élaborés et utilisés en recherche. Cet enseignement d'une « didactique-objet » est parfois pensé comme commun aux masters formation et aux masters recherche et est souvent défendu par des enseignants chercheurs qui interviennent dans les deux types de masters. Le mémoire est alors le moment privilégié où l'étudiant fait la preuve de l'appropriation de ces éléments de théories et de méthodologie.

Certains chercheurs enfin défendent l'idée d'une nécessaire transposition de certains concepts issus de la recherche en vue de les présenter comme des outils permettant aux enseignants (novices comme confirmés), de mieux lire les ressources qui sont leur sont proposées, de mieux interpréter en actes ou en différé les phénomènes d'enseignement dans lesquels ils peuvent être impliqués, d'être mieux outillés pour élaborer des situations d'enseignement, voire des programmations. Ces derniers, parmi lesquels on doit compter les partisans d'une « didactique-outil » ou d'une « didactique professionnelle » acceptent de repenser les concepts élaborés dans le

cadre et pour la recherche en termes d'outils d'enseignement et pour l'enseignement. Et ce, même si ce travail de transpositions transforme les concepts en question.

Ils rejoignent toutefois les précédents sur la nécessité non plus de présenter des théories mais de présenter des résultats de recherche (considérés comme suffisamment établis, suffisamment résistants) pour être enseignés en formation. Ces résultats sont de plusieurs types. Par exemple, en didactique des mathématiques, il peut s'agir de cheminements cognitifs (associés à des itinéraires cognitifs pouvant être proposés par le professeur), de situations d'enseignement incontournables (des passages obligés), ou des outils méthodologiques (l'analyse *a priori* ou la notion de variable d'une situation).

Ces différentes approches ne sont pas sans liens entre elles, les frontières sont souvent difficiles à cerner. Toutefois des pôles apparaissent et peuvent se traduire par des pratiques de formation assez différentes. Si elles peuvent être étudiés pour elles-mêmes, ces différentes approches doivent aussi l'être en lien avec l'étude des conditions de leur mise en œuvre et avec celle de leurs effets sur les pratiques des formés et des formateurs.

Enfin, il est difficile de penser les liens entre recherche et formation sans penser les dispositifs associés. Cette réflexion concerne évidemment directement la place et le rôle du mémoire dans la formation, les liens entre les différents dispositifs faisant intervenir la recherche dans l'ensemble de la formation.

2 Trois stratégies pour envisager les liens entre recherche et formation

À ce jour, nous pouvons donc définir trois grandes manières d'envisager l'initiation à la recherche et plus largement les liens entre recherche et formation :

- Une stratégie affirmant très fortement la nécessité de ménager dans la formation un axe recherche, avec des enseignements présentant des résultats de recherche mais aussi et parfois principalement des théories de didactique des mathématiques. Cette stratégie est très largement développée dans certains IUFM (Marseille par exemple). Au-delà du débat théorique sur les liens entre recherche et formation, ce type de stratégie sera certainement plus difficile à penser et surtout à mettre en œuvre dans le cadre des projets de formation (alternance pour un tiers de stage, puis pour un mi-temps dans le cadre des ESPÉ).

- À l'opposé de cette première stratégie, une deuxième stratégie minimise l'initiation à la recherche, finalement la réduit souvent au mémoire et s'accompagne d'une séparation de fait, plus ou moins grande dans la formation, entre mémoire et reste de la formation. Cette stratégie se nourrit des habitudes qui perdurent (parfois à juste titre) de la formation précédant les masters.

Nous allons développer davantage la troisième stratégie qui renvoie à la construction déjà évoquée d'une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques.

IV - VERS UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE

La troisième stratégie est associée à la poursuite de la construction d'une didactique professionnelle pour le professeur (des écoles, des collèges et lycées) enseignant les mathématiques, évoquée ci-dessus. La question se pose de savoir dans quelle mesure cette construction est viable dans le seul domaine disciplinaire ; des liens sont à penser entre les différents domaines, en liaison notamment avec la question de la polyvalence mais aussi en perspective avec les relations didactiques/pédagogie/psychologie, etc.

Suite à nos recherches portant sur les pratiques des enseignants débutants, nous dégageons des éléments permettant de montrer comment une entrée de la recherche dans la formation peut contribuer à la mise en place de ce que nous avons appelé « l'exercice d'une vigilance didactique ». Cette initiation vise notamment une appropriation de résultats de recherche concernant des outils de description et d'analyse de situations de classe, et une familiarisation avec certaines méthodologies.

La vigilance didactique traduit une manière de prendre en compte la place du savoir mathématique dans nos analyses de l'activité du professeur des écoles (Charles-Pézard, 2010). De manière générale, on peut considérer que le travail de l'enseignant comporte au moins deux éléments principaux largement dépendants : préparer sa classe et gérer les déroulements en classe. La maîtrise des contenus est nécessaire mais ne suffit pas. D'autres connaissances en particulier de type didactique sont nécessaires à l'enseignement des mathématiques. La vigilance didactique est définie « comme une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro ».

Exercer une certaine vigilance didactique met donc en jeu des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. (…)

Ces différentes connaissances mathématiques et didactiques s'opérationnalisent dans l'action du professeur pour réaliser des tâches. La vigilance didactique est liée aux différentes tâches d'enseignement de contenus mathématiques situées en amont de l'action en classe, pendant l'action en classe ou après la classe ainsi qu'aux différentes manières de les réaliser.

Une vigilance didactique insuffisante peut laisser penser à l'enseignant (mais aussi à l'institution) que l'important est de négocier la paix sociale y compris au détriment des mathématiques enseignées. La compréhension des enjeux didactiques est ici très déterminante.

Cela nous permet de déboucher sur de premières élucidations de ce que pourraient être les savoirs constituants « une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques », transposition de savoirs issus de recherches en didactique.

Prenons l'exemple de la notion de **variable didactique**, ce qui est le plus intéressant pour le quotidien du professeur des écoles, c'est davantage la notion de variable de commande que la notion de variable didactique. Pascale Masselot dans son mémoire de DEA (Masselot, 1994) a montré que le professeur des écoles, adoptant un point de vue pragmatique, a seulement besoin, le plus souvent, d'anticiper sur les productions et performances des élèves. De ce fait, il va souvent réduire la notion de variable didactique à certains aspects de celle-ci, comme la taille des nombres ou le support utilisé en géométrie pour le tracé des figures, ou encore le temps, voire la forme de travail. En revanche, il n'aura que peu souvent l'utilité de prendre en compte une donnée plus complexe comme par exemple la nature des situations proposées aux élèves.

Ainsi, la notion de **situation adidactique** est le plus souvent utile pour l'action du professeur comme un moyen de déterminer la part prise par le professeur et l'élève dans la construction ou la mobilisation des connaissances en jeu dans la situation proposée. De même, il nous semble que c'est davantage l'idée de situation de référence que de **situation fondamentale** qui est utile pour la pratique du professeur au quotidien dans sa classe.

Sans faire l'objet d'un cours spécifique, les caractères outil et objet des concepts mathématiques sont souvent identifiés notamment dans le cadre d'analyses de progressions, de séances et de tâches proposées dans les manuels. Les changements de cadres sont souvent réduits à des changements de point de vue ou des changements de domaines des mathématiques.

Nous pourrions multiplier les exemples illustrant cette nécessaire transposition de certaines notions théoriques issues de la recherche en vue de la formation et de l'enseignement. Notons que ce processus de transposition comporte au moins deux étapes : une première étape correspondant à la transmission des résultats et théories de recherche aux formateurs, une seconde étape correspondant à une seconde transformation de ces savoirs en vue de la diffusion à l'ensemble des enseignants.

Cette didactique professionnelle, parce qu'elle concerne le métier de professeur des écoles, se distingue de la didactique professionnelle classique (relative aux autres métiers) sur un point qui nous semble fondamental. La didactique professionnelle classique repose plus ou moins

explicitement sur un principe : les problèmes du métier ont trouvé ou peuvent trouver des réponses dans l'explicitation (par des chercheurs notamment) des pratiques des experts de la profession. Ce ne peut être le cas pour le métier de professeur des écoles.

Reprenons une distinction formulée notamment par Butlen et Robert (2011) entre problèmes internes et problèmes externes ; les premiers étant reconnus, voire ressentis par les professionnels alors que les seconds sont identifiés par des extérieurs à la profession. Si nous retrouvons cette distinction, dans le premier degré, elle peut s'avérer difficile à établir. Toutefois, elle permet de mieux cerner les limites des ressources « existant dans le genre ».

1 Les problèmes externes

Certains des problèmes, que l'on pourrait plutôt qualifier d'externes, comme par exemple éviter une baisse des exigences d'enseignement, sont globalement ressentis, exprimés par les enseignants (le *turn over* dans les écoles de ZEP en témoigne). Toutefois, c'est davantage la manière dont cette baisse se manifeste au quotidien, les raisons de celle-ci et les alternatives possibles qui sont peu, voire mal ou pas du tout perçues. En ce sens, les recherches menées apportent des éléments de description, des exemples d'alternatives viables.

Relevant des problèmes externes, l'exercice d'une certaine vigilance didactique est une question complexe. Si la plupart des professeurs des écoles sont plutôt conscients de certaines faiblesses dans la maîtrise des contenus, l'existence de ressources (manuels, brochures, exemples de situations) peut les amener à sous-estimer ces dernières On peut même penser que la qualité même de ces dernières peut contribuer à les masquer, (cf. Arditi, 2010). Il est souvent particulièrement difficile pour les enseignants d'appréhender les enjeux d'apprentissages sous-jacents aux situations pouvant être exposées dans ces ressources. Charles-Pézard (Charles-Pézard, 2010) énonce certains éléments d'explication : faiblesse des analyses *a priori*, difficulté pour lire en temps réel les productions des élèves et pour les prendre en compte dans le scénario initial pour l'adapter tout en maintenant l'objectif visé, méconnaissance de certains faits didactiques révélés par les recherches et/ou difficulté à les prendre en compte dans l'élaboration comme dans la mise en œuvre des scénarios. Ces constats sont autant de pistes pour la formation.

2 Les problèmes internes

Inversement certains problèmes internes s'ils sont identifiés, reconnus et deviennent cruciaux pour nombre de débutants (voire de professeurs confirmés) peuvent être surmontés de manière non satisfaisante du point de vue des apprentissages des élèves sans que les enseignants prennent vraiment conscience des limites de leurs réponses. C'est le cas pour l'installation d'une paix scolaire (Charles-Pézard, Butlen, Masselot, 2010) qui s'avère être souvent identifiée comme le premier problème à régler dans ce type de classe (conforté en cela par l'institution comme en témoigne les ressources proposées aux débutants affectés dans ces écoles). Le fait que certains professeurs réussissent à installer la paix sociale ('la classe tourne') au détriment de la qualité des mathématiques montre que le problème est ressenti. Ce sont davantage les critères d'évaluation des solutions apportées qui peuvent être discutables (notamment du point de vue des apprentissages des élèves sur le long terme). Nous avons montré que cette évaluation dépend notamment de la capacité de l'enseignant à évaluer la prise de risque qu'implique un changement de stratégie.

3 Une dialectique entre problèmes internes et problèmes externes

Nous voyons que, pour le premier degré, problèmes internes et problèmes externes entretiennent des liens étroits. La frontière entre les deux est parfois difficile à déterminer. La gestion du couple dévolution/institutionnalisation en est un autre exemple. Ainsi, sans trop caricaturer, la question de la dévolution était considérée (et l'est encore actuellement) par les formateurs comme un problème externe important. Ils lui ont accordé un traitement particulier, y compris en termes de mise en exergue de routines : des mises en commun et pas des corrections, donner la parole aux élèves, des formats de séances, de séquences… (cf. oral du concours). On peut supposer que c'est devenu une préoccupation pour les enseignants, et donc un problème interne, et ce d'autant plus

que de nombreuses injonctions institutionnelles le leur rappellent. Cela peut avoir induit des pratiques susceptibles de créer de nouvelles questions (identifiées (par nous) comme un problème externe) comme celle de la minoration des institutionnalisations. Cela reste toutefois encore à vérifier, mais certains indices nous le laissent penser (Coulange, 2010).

Si l'identification des questions de la profession nous semble incontournable, la présentation d'alternatives viables l'est aussi.

4 Enrichir les pratiques des formés en partant des pratiques

Il s'agit pour nous d'élargir le champ des possibles pour l'enseignant, notre but étant de diversifier les modalités d'investissement des marges de manœuvre qui lui restent. Nous adoptons l'idée de faire travailler les débutants sur des pratiques proches des leurs (Valsiner (1997)), qui seraient dans leur 'Zone Proximale de Développement des Pratiques', modèle Vygotskien déjà utilisé pour les apprentissages des élèves. Nous faisons ainsi l'hypothèse que les pratiques peuvent évoluer à condition de s'appuyer en formation sur des pratiques ayant suffisamment de proximité avec celles des participants pour que ces derniers se reconnaissent et ne rejettent pas tout en bloc.

Enrichir les pratiques peut signifier par exemple présenter la diversité des stratégies d'enseignement possibles, préciser les différents types d'activités à proposer aux élèves. Cela devrait amener le professeur des écoles à adapter des situations d'apprentissage (trop souvent construites pour un public élève standard) en vue d'un enseignement adapté au contexte de sa classe, par exemple en ZEP en prenant en compte les difficultés spécifiques de ce public, ou dans une classe à plusieurs niveaux, tout en assurant les apprentissages visés par la scolarité obligatoire. Il s'agit en particulier de distinguer ce qui « peut bouger » et ce qui est incontournable, de reconnaître le « potentiel » des élèves même si ce qu'ils produisent semble « éloigné » de ce qui est attendu…

V - CONCLUSION : UN ENJEU DES ESPÉ

Nous pensons qu'un enjeu actuel de la création des ESPÉ est la constitution d'un ensemble de savoirs de formation issus de la recherche mais aussi de l'expérience accumulée des formateurs afin d'enrichir les pratiques et d'accroître les marges de manœuvre des enseignants. Ces savoirs pourraient être notamment constitués de certains résultats didactiques décrivant les cheminements cognitifs possibles des élèves relatifs à l'apprentissage d'un contenu donné (passages obligés, erreurs fréquentes, étapes dans la conceptualisation) et des itinéraires susceptibles d'optimiser ces cheminements (situations de référence). À cela pourraient s'ajouter les savoirs issus de la transposition décrite ci-dessus. Enfin, il nous paraît indispensable de capitaliser les savoirs d'expérience construits depuis plusieurs dizaines d'années par les formateurs, notamment ceux relatifs aux stratégies et situations de formation.

La constitution de cet ensemble de savoirs professionnels ne peut se faire que dans le cadre d'une équipe multi catégorielle de formateurs mixant chercheurs, enseignants de terrain, conseillers pédagogiques et formateurs professionnels.

De façon générale, il semble important de tenir compte du décalage entre ce qui peut être valorisé dans la recherche et ce qui peut être valorisé comme ressource professionnelle effective pour de futurs enseignants.

La mise à distance critique, inhérente à la recherche, ne va pas toujours de pair avec les nécessités quotidiennes du praticien dans sa classe qui doit agir, prendre des décisions…

VI - BIBLIOGRAPHIE

BUTLEN D. (1995) Vers une didactique professionnelle, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome IV, Angers 1995, COPIRELEM – ARPEME.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique in *actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »* Genève, Suisse.

CHARLES-PÉZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, VOL 30-2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 197-261

CHARLES-PÉZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012) Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ? Grenoble, La Pensée Sauvage

ROBERT A. (1995) Mathématiques et didactique en formation des PE, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome IV, Angers 1995, COPIRELEM – ARPEME.

VII - ANNEXE 1 : IUFM DE CRÉTEIL - UPEC

Master Education et métiers de l'enseignement du 1er degré

Objectifs :

- Professionnaliser de futurs enseignants du 1er degré pour qu'ils exercent, de façon optimale dès la première année de mise en contact avec la classe et l'établissement, un métier qui exige de maîtriser plusieurs domaines de savoirs et de compétences (polyvalence). Il s'agit de proposer une formation qui leur permette de passer progressivement à l'expertise, c'est-à-dire à la capacité de problématiser sur le terrain et en partenariat.

- Permettre aux étudiants d'obtenir le concours de recrutement des professeurs des écoles en incluant un entrainement à ses épreuves.

- S'appuyer sur la recherche pour armer les pratiques professionnelles, les adapter aux évolutions à venir et permettre une éventuelle poursuite d'études en doctorat.

- Faciliter l'insertion des étudiants ou la réorientation à terme des enseignants dans d'autres domaines professionnels relevant des champs de l'éducation.

M1 :

Organisation générale des études

Premier semestre :

UE1 : Savoirs disciplinaires (programmes du primaire) en complément des parcours antérieurs de l'étudiant (130 h).

UE2 : Approches institutionnelles, psychologiques et sociologiques de l'école et de l'enfant (60 h).

UE3 : Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (initiation à la recherche et approfondissement) (44 h).

(Nota : Le choix d'une option entraîne sa continuation dans les UE6, 9 et 13).

Deuxième semestre :

UE4 : Disciplines des épreuves d'admissibilité du concours de recrutement des professeurs des écoles : préparation des épreuves et approches didactiques (167 h).

UE5 : L'école, ses publics et ses partenaires (42 h).

UE6 : Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (27 h). Réalisation d'une note de recherche.

Enseignements supplémentaires facultatifs offerts aux semestres 1 et 2 - Prérequis au concours de recrutement des professeurs des écoles :

- Langue vivante (36 h) + 2 modules optionnels (8 h)

- Certificat Informatique et Internet niveau 2 enseignant (C2I2e) (12 h)

- Secourisme- prévention et secours civiques de niveau 1 (10 h)

- Mise à niveau dans une discipline de l'écrit du concours en plus des heures de l'UE1 (24 h).

M2 :

Organisation générale des études

Troisième semestre :

UE7 : Préparation des épreuves d'admission du concours de recrutement de professeurs des écoles (66 h).

UE8 : Pratique réflexive du métier, gérer la polyvalence (140 h).

UE9 : Accompagnement et approfondissement dans la thématique de recherche choisie. Réalisation d'un mémoire (21 h).

Quatrième semestre :

UE10 : Préparation des épreuves d'admission du concours de recrutement de professeurs des écoles (66 h).

UE11 : Connaissance du système scolaire et préparation de la seconde épreuve orale du concours : " Agir en fonctionnaire... " (33 h).

UE12 : Pratique réflexive du métier, gérer la polyvalence, approches réflexives de situations d'apprentissage (75 h).

UE13 : Accompagnement et poursuite de la réflexion sur la recherche. Réalisation d'un mémoire (33 h).

Enseignements supplémentaires facultatifs offerts aux semestres 3 et 4 - Prérequis au concours de recrutement des professeurs des écoles :

- Langue vivante (36 h) + 2 modules optionnels (8 h)
- Certificat d'informatique et internet niveau 2 enseignant (C2I2e) (12 h)
- Travail sur le corps et la voix dans l'optique de la préparation aux oraux du concours (10 h)

Enseignements supplémentaires offerts en septembre :

- Entraînement aux épreuves du concours de recrutement des professeurs des écoles (48 h)

VIII - ANNEXE 2 : IUFM DE VERSAILLES - UCP

Master Education et métiers de l'enseignement du 1er degré

Parcours 1 : Enseigner en école maternelle et élémentaire – EEME

M1 :

UE1 : Savoirs transversaux et initiation à la recherche

EC1 : Connaissance de l'institution scolaire et du système éducatif. Connaissance de l'enfant, des élèves et de leurs démarches d'apprentissage. (52 h)

EC2 : Initiation à la recherche : méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse. Élaboration d'un écrit de recherche. (20 h)

UE 2 : Stages et compétences transversales

EC1 : Stage d'observation et stage de pratique accompagnée (21 h)

UE 3 : Éléments de culture disciplinaire et didactique Préparation aux épreuves écrites du concours

EC1 : Connaissances nécessaires à l'enseignement du français à l'école primaire : maîtrise de la langue française orale et écrite, lecture, écriture et littérature. Enjeux didactiques (100 h)

EC3 : Connaissances nécessaires à l'enseignement de l'histoire, de la géographie et de l'ICM à l'école. (68 h)

EC2 : Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école (100 h)

EC4 : Connaissances nécessaires à l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école (68 h)

UE 4 : Enseignements complémentaires (quatre au choix soit 4 x 18 h)

EC1 : Allemand ou Anglais ou Espagnol : Connaissances nécessaires à l'enseignement d'une LVE à l'école

EC2 : Scolarisation des jeunes enfants

EC3 : Outils pour communiquer : technologies usuelles de l'information et de la communication. Préparation au C2i2e

EC4 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'EPS à l'école.

EC5 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement des arts visuels à l'école

EC6 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'éducation musicale à l'école

EC10 : Littérature de jeunesse de la Petite Section au CM2.

EC11 : Histoire des arts

EC12 : Éducation artistique et culturelle

EC13 : Communication et multimédia

EC14 : Valorisation de l'engagement étudiant

EC15 : Préparation aux concours administratifs de la fonction publique

M2 :

UE1 : Savoirs transversaux et formation par la recherche

EC1 : Connaissance de l'institution et éthique professionnelle Éthique et responsabilité (44 h)

EC2 : Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. Élaboration du mémoire avec suivi sous forme d'ateliers et tutorat individuel. (22 h)

UE 2 : Stages et compétences transversales

EC1 : Stage en responsabilité (36 h)

UE 3 : Éléments de culture disciplinaire et didactique Préparation aux épreuves écrites puis orales du concours

EC1 (1ère partie) : Connaissances nécessaires à l'enseignement de la littérature et de la langue française, de l'histoire, de la géographie et de l'ICM à l'école. Préparation aux épreuves écrites du concours (30 h)

EC1 (2ème partie) : Enjeux de l'enseignement de la langue française et didactique de l'oral, de la lecture et de l'écriture à l'école maternelle et élémentaire. (72 h)

EC2 (1ère partie) : Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques, des sciences et de la technologie à l'école primaire et appropriation de ressources didactiques. Préparation aux épreuves écrites du concours (30 h)

EC2 (2ème partie) : Enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et élémentaire et appropriation de ressources didactiques. (72 h)

EC3a : Enjeux de l'enseignement des arts visuels à l'école (54 h)

EC3b : Enjeux de l'enseignement de l'éducation musicale à l'école (54 h)

EC3c : Les démarches d'enseignement et d'apprentissage en EPS à l'école primaire (54 h)

UE 4 : Enseignements complémentaires (quatre au choix soit 4 x 18 h)

EC3 : Outils pour communiquer : technologies usuelles de l'information et de la communication

EC4 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'EPS à l'école

EC5 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement des arts visuels à l'école

EC6 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'éducation musicale à l'école

EC7 : Concevoir un projet dans le domaine « Découvrir le monde » en maternelle

EC8 : Concevoir et organiser des séquences d'enseignement en histoire-géographie et ICM à l'école

EC9 : Concevoir et organiser des séquences en sciences et technologie à l'école

EC 10 : Littérature de jeunesse de la Petite Section au CM2

EC11 : Histoire des arts

EC12 : Education artistique et culturelle

EC13 : Communication et multimédia

EC14 : Valorisation de l'engagement étudiant

EC15 : Préparation aux concours administratifs de la fonction publique

EC16 : Allemand ou Anglais ou Espagnol : Connaissances et compétences didactiques nécessaires à l'enseignement d'une LVE à l'école

EC17 : Renforcement des connaissances en littérature, langue française, histoire, géographie et ICM : éléments de formation en vue de la préparation aux épreuves écrites de la session suivante.

EC18 : Renforcement des connaissances en mathématiques, sciences et technologie : éléments de formation en vue de la préparation aux épreuves écrites de la session suivante.

EC19 : Apprendre et enseigner dans le cadre de la polyvalence à l'école maternelle

IX - ANNEXE 3 : IUFM DE CRÉTEIL - UPEC

CADRAGE TRAVAUX Option recherche n°1 : **NOTE DE RECHERCHE (M1)**

La note de recherche demandée dans le cadre de cette option recherche permettra à l'étudiant de s'engager dans une démarche de recherche en didactique des mathématiques, à visée professionnalisante.

La note sera structurée en plusieurs parties (décrites ci-après) et comprendra environ 30 pages (soit 60 000 signes (espaces compris), si on utilise la police Times New Roman, 12, Interligne 1,5, marges de 3), bibliographie comprise et annexes en supplément.

- La première partie sera composée d'un questionnement qui s'intéressera à : un thème mathématique spécifique, un problème d'enseignement, un phénomène d'apprentissage que vous avez observé, des difficultés rencontrées par les élèves décrites dans un article, etc.
- La deuxième partie sera une ébauche bibliographique autour des questions posées dans la partie précédente et devra rendre compte de lectures d'articles ou de chapitres d'ouvrages (entre 3 et 5 suivant la nature des documents). Il s'agira à la fois d'en résumer le contenu et d'en faire une note critique. Vous pourrez articuler la présentation de vos lectures dans la perspective de votre questionnement.
- La troisième partie synthétisera les deux parties précédentes et devra déboucher sur une problématique de recherche plus fine que le questionnement de la première partie. Cette problématique vous permettra d'envisager une première expérimentation (qui sera à décrire au niveau théorique dans la note de recherche) et pourra constituer une base pour une poursuite de ce travail en M2. L'expérimentation en question pourra revêtir différentes formes (évaluation diagnostique, questionnaire, situation-problème, analyse et comparaison de documents pour la classe, etc.) et pourra être réalisée lors d'un stage (dans la mesure du possible). Seule l'analyse a priori de cette (petite) expérimentation est attendue dans la note de recherche : l'analyse des résultats de celle-ci ne figurera pas dans la note de recherche elle-même, mais si vous avez la possibilité de la conduire, elle pourra être utilisée explicitement pour définir la suite de votre travail.
- La dernière partie proposera une conclusion reprenant votre problématique de recherche et explicitant vos perspectives (méthodologiques, théoriques, expérimentales ...) pour la suite de votre travail en M2.

La présentation et les exigences bibliographiques sont les mêmes que pour le mémoire. Les références seront présentées en respectant les normes APA, auxquelles vous avez été initiés lors de la séance en BU (http://www.unites.uqam.ca/grem/colloque/documents/NORMES_APA.pdf)

Une présentation orale de ce travail pourra être envisagée en fin d'année suivant les possibilités qui pourront être dégagées.

CADRAGE TRAVAUX Option recherche n°1 : **MÉMOIRE (M2)**

I. RAPPELS

La visée du mémoire de Master consiste principalement à familiariser des étudiants avec les écrits, les démarches et les objets de la recherche, afin d'étayer l'analyse des pratiques professionnelles, et ainsi contribuer à la construction d'une posture professionnelle. Le mémoire doit donc répondre à des exigences de rigueur méthodologique et de clarté théorique.

Cadre théorique

Le cadre théorique, défini par les travaux scientifiques consultés et retenus, permet de formuler et/ou reformuler les questions de la recherche et ainsi d'affiner la problématique. Il contribue à décrire les choix argumentés de la recherche de l'étudiant. Ce cadre théorique, qui pourra être composé de l'interaction entre plusieurs cadres théoriques, devra également permettre de conduire les analyses a priori et a posteriori des expérimentations.

Reconfiguration de la question de départ

La question de départ évolue tout au long du mémoire, et se nourrit des apports théoriques et des découvertes liées à l'analyse des données. Elle vise la compréhension et/ou l'explication et/ou l'interprétation de phénomènes empiriques, et contribue elle-même à l'évolution des hypothèses de recherche éventuellement formulées au début du travail.

Recueil des données

Les données peuvent être constituées :

- d'observations de séances de classe ;
- de comparaisons de manuels scolaires ;
- de la mise en place de protocoles d'observation (grille d'analyse) ;
- de travaux d'élèves, enregistrements ou autres (dans le cadre d'une expérimentation en classe) ;
- d'entretiens ;
- de questionnaires.

Le choix de tel ou tel type de recueil doit être justifié par la question située au cœur du mémoire ; le choix retenu peut consister à adopter l'une ou l'autre des méthodes, ou à croiser plusieurs méthodes (par exemple observation et questionnaires). C'est ainsi que sera justifiée la méthodologie de la recherche.

II. ORGANISATION DU MÉMOIRE

L'introduction doit faire état de la question de départ et, éventuellement, des hypothèses initiales (de travail et de recherche) ; elle doit préciser le but de la recherche, annoncer le plan et mentionner tout élément susceptible de faciliter la lecture du mémoire. L'introduction doit également situer le travail par rapport à une littérature existante : la problématique sera affinée ensuite.

Le corps du mémoire s'organise autour de la question initiale, qui se problématise tout au long du travail ; il comprend un état des lieux, explicite et argumenté, en matière de travaux de recherches sur ou autour de la question posée, mentionne les concepts, modèles et autres éléments théoriques sur lesquels il s'appuie. Il mentionne et justifie la (les) méthode(s) d'analyse retenue, les modalités de recueil des données, et présente les analyses elles-mêmes.

La conclusion retrace rapidement l'évolution de la question initiale, fait apparaître les domaines qui restent ouverts ou non visités, ainsi que les questions nouvelles que le mémoire a suscitées. Elle fait état des difficultés rencontrées, au plan méthodologique et conceptuel, et des limites de cette recherche. Cette conclusion pourra également ouvrir la recherche sur des perspectives professionnelles.

III. INDICATIONS PRATIQUES

- Rappel de la décision prise en réunion des responsables d'options : la longueur attendue est d'une cinquantaine de pages. On peut traduire cette longueur en 10 000 signes (espaces compris) environ (soit 50 pages de 2000 signes, si on utilise la police Times New Roman, 12, Interligne 1,5, marges de 3 cm).
- Couverture et page de garde : indiquer le nom de l'étudiant, le numéro d'étudiant, le titre du mémoire, le diplôme (master « Éducation et métiers de l'enseignement du premier degré », 2ème année), l'intitulé de l'option et l'année universitaire.
- Quatrième de couverture : La présence d'un résumé n'est pas obligatoire.
- La présence des références bibliographiques à la fin du mémoire est indispensable. Ces références seront présentées en respectant des normes cohérentes, de préférence les normes APA, auxquelles ont été initiés les étudiants dans les options qui ont bénéficié des intervenants de la BU.

Se référer aussi aux normes APA pour les notes de bas de page, etc. (voir par exemple http://www.unites.uqam.ca/grem/colloque/documents/NORMES_APA.pdf)

- Des annexes peuvent figurer en plus du mémoire lui-même (ensemble des matériaux qui ont été analysés dans le mémoire : corpus, données, entretiens retranscrits, enregistrements de séances, photos, etc. en fonction du sujet).

IV. SOUTENANCE

- Le jury est composé de deux enseignants : pour les options gérées par l'IUFM, un enseignant-chercheur, docteur ou enseignant reconnu par ses publications dans des revues scientifiques, et un autre enseignant ou maitre formateur. Le directeur du mémoire est membre du jury.
- Durée de la soutenance : 45 minutes (environ 15 min de présentation et 30 minutes de réponses aux questions/discussion).
- Les mémoires sont adressés à votre directeur de mémoire en version numérique et deux exemplaires papier. Un exemplaire supplémentaire est déposé au secrétariat du site de rattachement de l'étudiant. Une version électronique du mémoire, dernière version, devra être déposée sur EPREL dans le dossier réservé à cet effet (rubrique « Travaux »).
- La date et le lieu de soutenance, ainsi que la composition du jury de soutenance est fixée par le directeur du mémoire, en accord avec le responsable de l'option, et dans le cas des options IUFM en lien avec le secrétariat du site où a lieu la soutenance. Les notes doivent être entrées, comme déjà indiqué, sur l'application informatique dédiée avant le 20 mai (1ère session) et avant le 4 juillet (2ème session). Il n'y a pas de session en septembre. Le respect de ces dates est donc important, l'absence de saisie de notes en temps et heure risque d'empêcher un étudiant de se voir attribuer le master et donc, s'il est reçu au concours, de ne pas pouvoir bénéficier cette année de son admission.

Compléments :

"La soutenance aura pour but de rendre compte, de manière synthétique, du travail de recherche effectué dans le cadre du mémoire (les membres du jury auront lu le mémoire). Il conviendra de repréciser la problématique, l'expérimentation et la méthodologie adoptée ainsi que les conclusions. Dans un second temps vous devrez exposer quels enseignements et perspectives vous avez pu dégager, d'un point de vue professionnel, de cette expérience de recherche en didactique des mathématiques.

La soutenance se déroulera comme suit :

15 min : présentation du mémoire

25-30 min : questions du jury

Vous pouvez, si vous le souhaitez, accompagner votre exposé d'une présentation numérique ou autre (diaporama, transparents, etc.).

La clarté de vos propos et de votre démarche participera de l'évaluation de la soutenance.

Barème :

- Problématique et Articulation question de recherche/ question professionnelle : 4
- Expérimentation et méthodologie adoptée : 3
- Analyses et synthèse : 3
- Bibliographie (choix et cohérence) : 2
- normes APA (Biblio, citations) + orthographe : 2
- Soutenance : clarté de l'exposé (3) + qualité des réponses (3)

X - ANNEXE 4 : IUFM DE VERSAILLES - UCP

Note de cadrage 2012-2013 de l'EC2 de l'UE1 de la spécialité « Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré »

Cette note 2012-2013 s'appuie sur les notes précédentes (années universitaires 2010-2011 et 2011-2012). Elle en reprend les principaux éléments et les actualise à la lumière de l'annualisation et de l'expérience des années écoulées.

Les descriptifs des EC2 de l'UE1 en M1 et en M2 fixent le cadre dans lequel seront menés les travaux des étudiants et rédigés les écrits qui en rendront compte. La première année (TER ou Travail Encadré de Recherche) a pour objectif principal l'initiation à la méthodologie de la recherche. La deuxième année (Mémoire) poursuit ce travail méthodologique en concrétisant un projet qui articule ancrage théorique et dimension expérimentale. Il est recommandé que le travail de deuxième année soit dans le prolongement de celui de la première année (à titre exceptionnel, il est possible de réorienter la recherche entreprise en M1).

1. Adossement à la recherche

La légitimité scientifique du master est liée aux travaux des laboratoires d'appui du master :

- EMA (École, Mutations, Apprentissages)
- CRTF (Centre de Recherche Textes et Francophonie)
- LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz - Didactique des mathématiques et des sciences)
- PARAGRAPHE (équipe Compréhension, Raisonnement, et Acquisition de connaissances)

L'adossement à la recherche et l'appui sur les connaissances et pratiques de formation sont tous deux nécessaires pour répondre aux impératifs de la maquette du master et des usages universitaires.

Le choix a été fait à l'IUFM d'associer étroitement l'ensemble des formateurs qui le souhaitent à l'encadrement des TER et Mémoires ainsi qu'à la dynamique de recherche de l'établissement. Leur expérience et leur connaissance de la formation des enseignants est nécessaire à une bonne articulation formation/recherche.

Pour renforcer cette articulation, des séminaires-ateliers de recherche ont été mis en place et se poursuivront cette année. Ils ont pour but de favoriser une réflexion commune sur des thématiques ciblées aussi bien au niveau théorique que méthodologique. Ce dispositif devrait donc favoriser la mutualisation des pratiques d'accompagnement des travaux de recherche et la production de repères communs. Les séminaires-ateliers proposés par des enseignants-chercheurs pourront reprendre /approfondir /recouper les questions soulevées lors des ateliers TER et mémoires mais ils ont principalement vocation à développer une dynamique réflexive commune.

2. Organisation pratique de l'accompagnement des TER et Mémoires

La première et la deuxième année débutent par des conférences introductives (deux en M1 et une en M2). Leur but est de présenter ce qui est attendu d'un TER (en M1) et d'un Mémoire (en M2) en référence aux descriptifs concernés. Les conférenciers seront ainsi amenés à définir ce que signifient, dans leur domaine de recherche : « problématique », « état de la question », « cadre théorique », « recueil de données », « méthodologie » et « bibliographie » en montrant de quelle manière ces éléments participent de la construction d'un objet de recherche et de l'élaboration de la démarche de recherche. Ce sera aussi l'occasion de préciser le rôle de l'écrit dans la production scientifique et de montrer la spécificité des écrits de recherche.

M1 – Élaboration du TER

Cette présentation accompagne la fiche descriptive de l'UE1-EC2 (classique et alternance) et y apporte quelques précisions.

Septembre	Les formateurs encadrant les TER feront connaitre aux directeurs d'études du site, les thématiques de recherche (relativement larges) autour desquelles ils souhaitent diriger des Septembre travaux étudiants.
	Les étudiants émettront des voeux et seront répartis dans les différents ateliers proposés (TP).
Octobre → Janvier	L'étudiant sera amené à délimiter une question de recherche, à établir une première bibliographie éventuellement accompagnée de notes de lecture.
Janvier	Une note intermédiaire est attendue pour les étudiants inscrits en contrôle continu.
Février → Avril	L'étudiant proposera une première formulation de la problématique et, sur le plan méthodologique, concevra un dispositif de recueil et d'analyse de données.
Mai	L'étudiant devra remettre un dossier écrit d'une vingtaine de pages intégrant des éléments théoriques, la problématique et une méthodologie de recueil de données. Il devra montrer comment son travail peut se concrétiser dans l'élaboration du mémoire de 2ème année. En outre, l'étudiant devra montrer des capacités : - à citer et donner les références des textes convoqués pour le dossier ; - à présenter une bibliographie ; - à utiliser une langue française correcte respectant les rectifications orthographiques de 1990.
	Le dossier sera soutenu devant un jury constitué de deux formateurs, dont le formateur responsable de l'atelier.

M2 – Élaboration du Mémoire

Cette présentation accompagne la fiche descriptive de l'UE1-EC2 (classique et alternance) et y apporte quelques précisions.

Septembre	Reprise de contact entre l'étudiant et son tuteur de TER (dans les cas particuliers, attribution d'un tuteur en fonction des réorientations de sujet ou des vœux des étudiants nouveaux entrants).
Octobre → Janvier	L'objectif pour les étudiants qui ont validé leur TER est d'approfondir ce travail en fonction des hypothèses émises l'année précédente. Un complément de lecture peut être demandé. Un lien explicite doit être fait avec l'exercice du métier lors des stages. Dans la mesure du possible, cette période sera celle du recueil de données pour laisser le temps à l'analyse et à la synthèse durant la deuxième partie de l'année universitaire.
Janvier	Une note intermédiaire est attendue pour les étudiants inscrits en contrôle continu.
Février → Avril	L'étudiant analysera ses données et mettra en perspective les résultats. C'est la période de finalisation de la rédaction du Mémoire.
Fin Avril	L'étudiant devra remettre un mémoire (entre 30 et 40 pages) qui présentera une problématique, une bibliographie pertinente au regard de la problématique, une cadre théorique et la méthodologie ayant permis recueil et traitement des données. La conclusion du mémoire proposera des résultats qui seront contextualisés dans l'état de la question.

	En outre, l'étudiant devra montrer des capacités : - à produire un écrit structuré et bien documenté ; - à présenter une bibliographie ; - à utiliser une langue française correcte au niveau de la formulation et de l'orthographe (cf. M1)
Mai	Le mémoire sera soutenu devant un jury constitué de deux formateurs, dont le formateur responsable de l'atelier.

UNE EXPÉRIENCE DE FORMATION CONTINUE EN LIGNE ET À DISTANCE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Jean-Philippe GEORGET
Maître de conférences, Normandie Université
CERSE, EA 965
jean-philippe.georget@unicaen.fr

Avénilde ROMO-VASQUEZ
Chercheuse, Instituto Politécnico Nacional, Mexcico
CICATA-IPN
avenilderv@yahoo.com.mx

Résumé
Dans le cadre d'un programme de formation continue en ligne et à distance destiné à des enseignants latino-américains, nous avons proposé un module consacré aux ressources enseignantes. La manière de concevoir et de mettre en place ce module nous a fait réfléchir, au-delà des ressources didactiques pour l'enseignant, sur les potentialités de la formation continue en ligne et à distance en didactique des mathématiques. Les enseignants participant au module habitent dans des pays différents tels que l'Argentine, la Colombie et le Mexique. Les programmes, les traditions d'enseignement et les conditions institutionnelles sont très différents d'un pays à l'autre, ce qui pose un défi au moment de concevoir une formation commune en didactique des mathématiques. Comment peut-on prendre compte ces différences ? Quels types d'activités peuvent être utilisés dans ce contexte de formation ?
Pour aborder ces questions, nous proposons de présenter les caractéristiques du module conçu et les analyses préliminaires et partielles des activités proposées aux enseignants participant à cette formation.

Le master en didactique des mathématiques PROME CICATA-IPN (Mexico) s'adresse à des enseignants des mathématiques d'Amérique latine, en service, de différents niveaux d'enseignement. L'objectif de ce master est de donner une formation didactique aux participants, de fournir des outils qui permettent de contrôler, de modifier et d'adapter leur pratique aux demandes sociales qui évoluent rapidement. Par exemple, il peut s'agir d'intégrer des nouvelles technologies et de connaître les effets de cette intégration, de rapprocher l'enseignement des mathématiques des besoins de la vie quotidienne des élèves, en tant que futurs citoyens, et aussi de leur permettre de poursuivre leurs études (socle commun). Enfin, cette formation ne cherche pas à former des chercheurs en didactique, mais elle peut contribuer à former des formateurs d'enseignants.

Les enseignants qui participent à cette formation habitent dans différentes régions du Mexique et de l'Amérique Latine, ils partagent le même métier mais ils appartiennent à différentes traditions d'enseignement et sont soumis à différentes contraintes institutionnelles. Ceci peut enrichir leurs regards sur leur pratique mais la conception d'une formation adaptée à une telle variété de participation reste un défi.

La formation a lieu en ligne et à distance et s'organise en modules d'enseignement qui se déroulent sur plusieurs semaines. Dans cette contribution, un seul module d'enseignement est présenté. Il concerne la conception et l'analyse de ressources enseignantes.

I - CONTEXTE ET ACTIVITÉS DU MODULE CONSACRÉ AUX RESSOURCES ENSEIGNANTES

Au moment de commencer le module consacré aux ressources enseignantes, les enseignants (11 enseignants de niveaux d'enseignement du collège à l'université) ont déjà eu des apports en didactique et pédagogie dans d'autres modules. Les enseignants ont, par exemple, abordé la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard), ils ont déjà fait des analyses a priori et a posteriori de situations d'enseignement.

1 Objectifs du module d'enseignement

Ce module d'enseignement était conçu avec l'objectif de mettre à disposition des enseignants de mathématiques des outils théoriques et méthodologiques pour créer et évaluer des ressources enseignantes. Ces apports semblent pertinents pour que les enseignants aient des outils pour analyser leur pratique, mais aussi pour enrichir leur capacité à interagir avec leurs collègues et pour analyser des ressources produites par d'autres. Ici, seules des ressources didactiques dactylographiées sont considérées, bien que le mot ressources puisse revêtir un caractère plus large, celui de re-sourcer les pratiques enseignantes (Adler 2000).

2 Les participants : professionnels et étudiants

Les participants du cours ont un double statut : ils sont à la fois des enseignants de mathématiques en service et ils sont des étudiants de deuxième année d'un master en didactique des mathématiques.

En tant que professionnels expérimentés, les participants du cours sont supposés avoir beaucoup d'expérience dans l'utilisation de ressources enseignantes – manuels, activités proposées dans le programme, etc. Ils ont donc des outils d'analyse des ressources plus ou moins naturalisées. Ils ont aussi des conceptions sur les ressources, autant sur le processus de conception que sur le produit fini.

Par exemple, ils peuvent avoir des idées pertinentes sur l'enseignement, même à des niveaux d'enseignement qui ne sont pas les leurs. Par contre, il n'est pas sûr qu'ils aient de l'expérience dans l'analyse des ressources consciente et outillée.

En tant qu'étudiants, les participants sont aussi supposés avoir des connaissances didactiques disponibles et mobilisables (Robert 1998) pour évaluer une ressource didactique. En effet, ils ont suivi d'autres modules d'enseignement du master et on peut donc s'attendre à certains réinvestissements de notions ou de techniques, sans qu'il y ait toujours un appel explicite au réinvestissement de ces notions ou de ces techniques.

3 Conception du module d'enseignement

Au moment de concevoir le module d'enseignement, différentes questions se sont posées : Les participants du cours sont-ils amenés à créer des ressources didactiques pour d'autres enseignants dans leur pratique ordinaire ? Disposent-ils d'outils théoriques et méthodologiques pour évaluer la performance des ressources créées ? Comment faire pour que les participants du cours puissent créer des ressources pour d'autres enseignants ? Les enseignants conçoivent des ressources pour leur pratique quotidienne, mais comment le font-ils ? Est-ce de manière formelle ? Créer une ressource de manière formelle implique, selon nous, de décrire les objectifs de la ressource, son utilité – c'est à dire la façon dont elle va effectivement permettre à l'enseignant qui l'utilise de faire ce qu'elle décrit –, ses potentialités et ses limites. En explicitant ce qui est attendu (analyse *a priori*), un enseignant participant du cours pourrait évaluer l'utilité de la ressource en comparant ce qui est prévu avec ce qui se passe réellement (analyse *a posteriori*). Pour ce faire, des outils théoriques et méthodologiques ont été proposés aux participants du cours et ils ont eu l'occasion de les employer dans différentes situations, de se les approprier en fonction des besoins et des résultats obtenus. À plus long terme, ces apports peuvent permettre de comparer des ressources à partir de

critères bien identifiés, de créer de nouvelles ressources et de les faire évaluer par d'autres enseignants.

Autre aspect de ce cours international, les participants peuvent avoir des connaissances de nature différentes et plus ou moins approfondies du contexte d'enseignement des autres participants. En plus de la question de faire créer et analyser des ressources par ces participants se pose donc la question de favoriser des échanges entre enseignants-étudiants qui évoluent dans des contextes différents.

II - ANALYSES PRÉLIMINAIRES DES ACTIVITÉS DU MODULE

Le module d'enseignement est divisé en cinq phases d'une semaine. Chaque phase comprend une ou plusieurs activités qui sont listées succinctement dans le Tableau 1.

Phase 1	Problème *Cordes* (Ermel 1999) : résolution du problème et production d'une ressource (guide didactique) pour le mettre en place dans une classe. Forum pour discuter du problème, de sa nature et de la façon de le présenter en classe
Phase 2	Production d'une ressource pour des enseignants de mathématiques
Phase 3	Lecture d'un document présentant des outils d'analyses et écriture d'une analyse critique de ces outils – Forum pour discuter des outils présentés
Phase 4	Retravailler la ressource produite en phase 2 en utilisant les outils théoriques et méthodologiques – Forum pour préciser la consigne
Phase 5	Faire évaluer la ressource produite dans la phase précédente par un enseignant de mathématiques

Tableau 1. Les phases hebdomadaires du module d'enseignement consacré aux ressources enseignantes.

La recherche menée étant toujours en cours, les analyses présentées dans cette section sont préliminaires au sens où ce sont les toutes premières investigations des données qui sont rapportées ici. Elles restent donc largement à approfondir. À la veille de la mise en place des Écoles supérieures du professorat et de l'éducation (ESPE) en France, il a paru néanmoins intéressant de partager ces premiers résultats. En effet, le contexte de formation et de recherche étant amené à changer radicalement, on peut penser que cette expérience de formation en ligne et à distance s'inscrivant dans la durée préfigure des conditions de formation qui seront plus couramment rencontrées en France dans un avenir plus ou moins proche.

1 Activité 1. Autour du problème *Cordes*

Le problème *Cordes* consiste à déterminer le nombre de cordes reliant des points placés sur un cercle (ERMEL 1999). Le nombre de points peut être fixé à l'avance.

L'activité proposée dans le module d'enseignement consiste, elle, à résoudre le problème des cordes et à produire un guide pédagogique pour un enseignant qui veut mettre en œuvre ce problème en classe. Les consignes proposent par exemple de « présenter les techniques ou différentes manières de résoudre le problème » et de « préciser les interventions possibles de l'enseignant » (degré d'ouverture de la situation). L'activité ne fait aucun appel explicite à d'autres modules d'enseignement, mais les concepteurs attendent des réinvestissements de connaissances de la part des participants au module.

Pour soutenir l'activité, un forum est mis en place. C'est un dispositif souvent utilisé dans ce master en ligne et à distance. Ce forum se présente sous la forme de 3 fils de discussion qui concernent les points suivants :

1. la nature du problème (exercice routinier, ouvert...) ;
2. les techniques de résolution ;
3. le fait de savoir si ce problème constitue ou non une bonne ressource.

L'activité proposée aux participants est donc relativement ouverte. Si elle laisse la place à des réinvestissements de connaissances déjà travaillées dans d'autres modules, les participants restent libres d'y faire appel ou non.

À l'issue de cette activité, les réinvestissements attendus sont rares ou absents. Par exemple, concernant la nature du problème, les discussions précisent rarement le niveau d'enseignement, alors que cette donnée est essentielle pour discuter de la nature du problème et des techniques de résolution. Concernant les techniques de résolution, les enseignants perçoivent bien l'ouverture du problème, notamment en proposant des techniques variées. Ceci étant, ils ne précisent pas toujours explicitement le lien avec leur niveau d'enseignement ou les niveaux d'enseignement qu'ils visent. Par ailleurs, les ressources produites sont relativement « fermées », ce qui contraste avec l'ouverture du problème perçue par les participants. Cette « fermeture » n'est ni justifiée ni discutée dans les contributions des participants.

Une hypothèse plausible qui peut expliquer ce constat est que la tâche initiale prescrite de conception d'un guide pédagogique a pu être redéfinie (Rogalski 2003) par les participants comme une tâche de conception d'un guide pour des enseignants novices. Les participants ont alors pu penser que, pour un premier contact avec le problème *Cordes*, il serait opportun de « bien cadrer » le déroulement de la situation d'enseignement.

Enfin, à la question de savoir si le problème constitue une « bonne » ressource, la question des niveaux d'enseignement est évoquée mais sans approfondissement. La référence aux programmes d'enseignement ou, plus largement, au contexte d'enseignement n'est pas toujours faite.

Les analyses préliminaires de l'activité 1 tendent donc à montrer combien il peut être difficile de formuler les consignes aux participants du module. Il se pose notamment la question de la juste distance entre une terminologie précise, dont la compréhension dépendrait du niveau de réussite des participants aux autres modules d'enseignement, et des consignes relativement ouvertes permettant aux participants de réinvestir des connaissances vues dans d'autres modules d'enseignement.

2 Activité 2. Production d'une ressource didactique

L'activité 2 est, elle aussi, une activité ouverte en tant qu'elle laisse la liberté aux participants de réinvestir les connaissances acquises dans le cadre du master et dans le cadre professionnel. Pour les participants, cette activité consiste à choisir un problème pour le niveau où ils travaillent et à présenter un guide permettant de le mettre en œuvre. À cet égard, cette activité présente des similitudes avec la précédente. Les participants peuvent donc faire des liens avec les productions de leurs pairs, les discussions des forums et leurs propres productions.

Les analyses produites par les participants sont peu approfondies relativement aux apports théoriques et méthodologiques des autres modules d'enseignement. Comme dans l'activité précédente, il se pose la question d'une possible redéfinition de la tâche par les participants. Autrement dit, quels étaient les objectifs des participants pour créer leur ressource ? Il n'est pas sûr que l'analyse plus poussée des productions permette de fournir une réponse plausible à cette question.

3 Activité 3. Analyse critique d'un document présentant des outils d'analyse de ressources

L'activité consiste en l'analyse critique d'un document de synthèse présentant, en espagnol, des outils d'analyses issus d'une thèse de doctorat (Georget 2009) écrite, elle, en français. Ces outils sont basés sur l'ergonomie des ressources et sur les notions de potentiels d'une activité de recherche et de preuve entre pairs (cf. Georget 2010). Les participants ont donc tout loisir de

critiquer ces outils de différents points de vue – « simple » enseignant, étudiant de master, formateur ou formateur en devenir – et de s'intéresser à l'utilité et à l'utilisation possible de ces différents outils.

Un forum est aussi proposé pour discuter des outils présentés dans le document.

Malgré l'ouverture de l'activité, les productions des différents participants sont plus proches de résumés que d'analyses critiques. Certains participants écrivent même qu'ils ne sont pas assez compétents pour donner un avis critique sur des notions et des techniques qu'ils maîtrisent mal.

Même si ce n'est pas exclu, il est probable qu'une analyse plus approfondie des productions n'apporte pas d'élément d'explication sur la teneur des productions. Ici, c'est davantage le contrat didactique au sein du module d'enseignement qui semble le plus à même de les expliquer. Les participants sont des enseignants. Face à des écrits de recherche, ils semblent minorer l'intérêt de donner leur avis étayé par leur expérience d'enseignement, voire de formateur.

4 Activité 4. Reprise de la ressource produite à la phase 2

Cette activité consiste à retravailler la ressource produite à la phase 2 en utilisant les outils théoriques et méthodologiques vus à la phase 3. Un forum est proposé pour discuter et préciser la tâche.

Les consignes aux participants sont plus fermées que pour les activités précédentes car elles demandent explicitement le réinvestissement des outils vus dans l'activité précédente, comme en témoignent les extraits suivants :

- présenter les objectifs, leur lien avec le programme et comment ils peuvent être atteints ;
- expliciter, en détaillant le plus possible, pourquoi la ressource est utile, utilisable et acceptable dans cette classe ;
- préciser la nature de la situation : exercice, problème ouvert ;
- décrire les potentiels de la situation présentée.

À l'inverse des activités précédentes, il s'agit donc là d'une tâche fermée qui laisse peu de liberté aux participants dans l'interprétation de la tâche prescrite. Ce choix des concepteurs du module est dû aux manques de réinvestissements des notions et techniques des modules d'enseignement précédents. Il s'agit là « d'assurer » un réinvestissement minimal des connaissances vues lors de la phase précédente. Ce choix peut être critiqué. En effet, les enjeux d'un réinvestissement de connaissances vues dans la phase précédente n'est pas identique à ceux d'un réinvestissement de connaissances vues dans d'autres modules d'enseignement. C'est davantage le contexte d'un cours à distance qui a pesé, plus que celui d'une recherche scientifique.

L'analyse préliminaire de cette activité est toujours en cours et il n'est pas possible d'en livrer une synthèse au moment de l'écriture de cette contribution.

5 Activité 5. Faire évaluer la ressource produite par un enseignant de mathématiques

Conformément à l'un des objectifs généraux du master, cette activité vise à faire interagir les participants avec un de leurs pairs, un enseignant de leur environnement professionnel ou bien un enseignant participant au module.

L'activité consiste à faire évaluer la ressource produite à la phase précédente par un autre enseignant de mathématiques sous la forme d'un entretien. Pour outiller les interactions, un guide à base de questions réinvestissant les outils présentés lors du module a été proposé.

Pour illustrer la teneur de ce guide d'entretien, on trouve, parmi les questions proposées pour l'entretien, les questions suivantes :

1. Considères-tu que cette ressource pourrait être utile à ta pratique ?

2. Considères-tu qu'il manque quelque chose ? Quoi ?
3. Penses-tu que cette ressource est suffisamment « flexible » ? Permet-elle de prendre des décisions pour l'utiliser ?
4. Après avoir utilisé cette ressource, les élèves vont-ils apprendre quelque chose ? Quoi ?
5. Considères-tu que cette ressource favorise le débat entre des élèves ? Pourquoi ?
6. Quels changements proposes-tu ?

On retrouve ici des concepts d'ergonomie (utilité, adaptabilité, acceptabilité) et certains des potentiels des situations de recherche et de preuve entre pairs (situation RPP) décrits par Georget (2012, 2010, 2009) tels que le potentiel de débat et le potentiel didactique d'une situation RPP.

L'analyse préliminaire de cette activité est toujours en cours au moment de l'écriture de cette contribution mais une rapide consultation des productions des participants pose la question de savoir si ces derniers accepteraient d'utiliser les ressources telles qu'ils les ont produites dans ce cours s'ils étaient en situation professionnelle. Autrement dit, il semble qu'un contrat didactique non souhaitable se soit établi et que les ressources produites par les enseignants soient des ressources spécifiquement produites au sein d'un module d'enseignement, et qu'elles seraient tout autre hors de ce contexte. Par exemple, il n'est pas certain que les ressources produites tiennent compte de contraintes institutionnelles telles que les programmes en vigueur et du temps « raisonnable » à consacrer à la situation décrite.

III - DISCUSSION DES PREMIERS RÉSULTATS

La présente contribution vise à présenter une expérience menée dans le cadre d'un master international hispanophone destiné à des enseignants de mathématiques. Ce master, en ligne et à distance, a offert un module consacré à la conception et à l'analyse de ressources enseignantes.

Les analyses étant toujours en cours, ce sont seulement des résultats préliminaires et partiels qui ont été présentés.

Ces résultats témoignent des ajustements qui ont été effectués. Après trois activités relativement ouvertes, ce sont deux activités davantage encadrées qui ont été proposées aux participants. En effet, les trois premières activités n'ont pas montré de réinvestissements notables par les participants de notions et de techniques abordées dans d'autres modules d'enseignement, parfois même parmi les plus simples comme la référence aux programmes d'enseignement.

Ce manque de réinvestissement pourrait être simplement attribué aux manques de connaissances des participants mais la présente contribution a mis en évidence que d'autres hypothèses étaient envisageables pour expliquer ce manque.

En premier lieu, ce manque de réinvestissement peut témoigner d'une redéfinition de la tâche par les participants. Une future expérimentation devra donc davantage préciser les consignes données aux participants de façon à limiter cet effet non souhaité.

En second lieu, ce manque de réinvestissement peut témoigner d'un effet du contrat didactique établi dans le module d'enseignement. Cet effet semble, lui, moins simple à contrôler a priori. Une prochaine expérimentation devra permettre d'étudier plus finement ce point en développant des outils méthodologiques non prévues dans l'expérimentation relaté ici. En particulier, des entretiens avec les participants à l'issue du module d'enseignement pourraient se révéler très informatifs à cet égard.

Les perspectives de travail liées à cette contribution sont nombreuses. Il s'agit bien sûr de poursuivre les analyses en cours, mais aussi d'affiner le scénario du module d'enseignement et ces consignes pour le proposer à nouveau l'année prochaine à d'autres participants. Il sera

particulièrement intéressant d'étudier ce que les modifications apportées peuvent apporter dans la qualité et la nature des productions des participants.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ADLER J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education*, **3**, 205-224.

ERMEL (1999) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2. Paris : Hatier.

GEORGET J.P. & LABROUSSE B. (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. preuve entre pairs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT6, pp. 838–848).ISBN : 978-2-8399-1115-3. URL : http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

GEORGET J.P. (2010) De nouveaux outils pour favoriser les activités de recherche et de preuve entre pairs dans l'enseignement. Actes du XXXVII^{e} colloque de la COPIRELEM. La Grande Motte.

GEORGET J.P. (2009) Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Thèse de doctorat. Université de Paris Diderot (Paris 7). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/

MOLINA G., ROMO A & ROSAS A. (2011) Una formación para el profesor de matemáticas en el Programa de Matemática Educativa del IPN. En G. Buendía (Ed.) Reflexión e investigación en matemática educativa. Mexico: Lectorum.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, **18.2**, 139-190.

ROGALSKI J. (2003) Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, **23.3**, 343–388.

GÉOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE : UN REGARD HISTORICO-ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DES RÉFLEXIONS THÉORIQUES POUR L'ANALYSE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS

Raquel BARRERA - CURIN
ATER, IUFM de Montpellier
Laboratoire de Didactique André Revuz
quellita@gmail.com

Résumé
À travers cette communication, je voudrais à la fois mettre en valeur les relations entre géométrie et calcul numérique mais aussi mettre en valeur de nouveaux éléments théoriques pour l'analyse du travail mathématique des élèves et des enseignants.
Tout d'abord, je présenterai un aperçu d'une étude de travaux épistémologiques, historiques et didactiques à propos de la relation entre nombres et géométrie rendant compte du rôle médiateur de la géométrie pour la construction du sens de certaines idées mathématiques.
Ensuite, je ferai référence à des réflexions théoriques cherchant des moyens pour l'analyse du travail mathématique des élèves dans le processus de construction du sens d'une idée mathématique. Je présenterai quelques exemples d'un processus visant la construction du sens de la multiplication en géométrie dans un contexte d'apprentissage collaboratif.
Finalement, je partagerai quelques questions se dégageant de ma recherche, autour de la formation et du travail mathématique des futurs enseignants. Ces questions se fondent sur une épistémologie permettant un regard particulier sur le travail mathématique des élèves et les rôles de créateur et de médiateur des enseignants.

Cet article est organisé en trois sections. Dans les deux premières sections, je présente quelques réflexions autour de la relation entre nombres, calcul et géométrie qui résultent de mes recherches sur des travaux historiques, épistémologiques et didactiques. De ces recherches se dégagent des éléments clés qui feront partie des fondements des propositions didactiques présentées brièvement dans la troisième section.

Dans la troisième section, je présente d'abord un aperçu d'une articulation théorique pour l'analyse du travail mathématique des élèves, dans le processus de rencontre d'idées mathématiques autour de nombre, calcul et géométrie. Par la suite, je mets en relation les résultats des réflexions historico-épistémologiques, didactiques et théoriques, dans la présentation de quelques exemples du travail mathématique des élèves rendant compte d'une rencontre géométrique de la multiplication. Dans la dernière partie de cette section, je présente quelques réflexions autour de la formation de futurs enseignants. Ces réflexions portent principalement sur l'importance de favoriser en formation un travail réflexif autour de l'épistémologie et de la didactique des mathématiques. L'idée d'un enseignant créateur et médiateur serait essentielle dans le cadre d'une formation qui lui permet de proposer des espaces de travail mathématiques afin de favoriser chez ses élèves l'émergence et la rencontre des mathématiques.

I - UN REGARD HISTORICO—ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LA RELATION ENTRE GÉOMÉTRIE ET CALCUL

S'intéresser à la notion de multiplication et à ses relations avec la géométrie dans l'histoire ainsi qu'aux études rendant compte d'une analyse épistémologique et didactique, c'est-à-dire d'une

analyse portant sur cette idée mathématique visant la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpinska, 1991), est une réflexion qui me semble nécessaire et qui a constitué le premier pas méthodologique pour le démarrage de ma recherche. Je me suis notamment intéressée aux liens entre les significations de la multiplication et la géométrie qui ont été mentionnés ou construits dans l'histoire des mathématiques. Ce sont bien des significations de la multiplication — dont je parle tout d'abord dans un sens plutôt naïf fondé sur leur reconnaissance dans des travaux didactiques précédents (Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis &Simmt, 2006 ; Douady, 1986) —, et leur représentation en géométrie, que je cherche à contextualiser d'un point de vue historique et épistémologique. La prise en compte de ce contexte historique et épistémologique enrichit le regard qu'on peut porter sur les contenus mathématiques en question lors de la conception de situations d'apprentissage. Je reviendrai sur cet aspect dans la deuxième section de cette communication.

1 Quelques constats historiques sur les liens entre calcul et géométrie à partir de la représentation de grandeurs

Pour Reyneau, la Géométrie, Science Mathématique Générale, a pour objet la représentation de toutes les grandeurs, et même s'il paraît qu'elle a pour objet particulier les rapports des trois dimensions du corps, des longueurs, des surfaces et des solides, elle peut aussi exprimer toutes les grandeurs particulières et sensibles en les contenant « éminemment » (Reyneau, 1739, p. xviii). En revanche, ce sont l'Arithmétique et l'Algèbre qui constituent la *Science du Calcul des Grandeurs* puisque, permettant de faire des opérations semblables, elles ont une liaison naturelle. La Science du Calcul des Grandeurs contient les Éléments et comprend toutes les mathématiques. Pourrait-on dire que c'est ainsi que commence la divergence entre le calcul et le visuel ? En fait, non. Je dirais que ceci n'est qu'une vision précédente de ce que Bachelard a appelé plus tard la formation de l'esprit scientifique : « sur toutes les questions, pour tous les phénomènes, il faut passer d'abord de l'image à la forme géométrique, puis de la forme géométrique à la forme abstraite, poursuivre la voie psychologique normale de la pensée scientifique » (Bachelard, 1938, p.10). C'est un exemple de l'origine des recherches de la vérité dans les perceptions, là où nous pouvons voir qu'« un nombre entier est celui qui contient exactement l'unité plusieurs fois » (Reyneau, 1739, p. xxvi) et c'est un voyage vers l'acquisition d'un *jugement* (quand c'est l'esprit qui juge un rapport comme vrai) jusqu'au développement du raisonnement.

En suivant l'œuvre de Reyneau, beaucoup de références nous parlent de la richesse du calcul littéral et numérique, sans nécessairement parler d'un lien explicite entre calcul et géométrie. On voit ainsi que ce n'est pas par hasard si, aujourd'hui, le calcul renvoie toujours au numérique. En revanche, je partage son assertion de ne pas permettre un calcul aveugle,

> « comme des artisans qui suivent des Règles dont ils ne savent pas les raisons [...] ; [ceux qui veulent apprendre les Mathématiques] doivent connaître en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. [...] [Ils doivent voir clairement] que ces calculs étant appliqués aux figures de la Géométrie, représentent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entre elles ou avec les figures entières dont elles sont les parties. » (Reyneau, 1739, p. lii)

En outre, les exemples trouvés dans l'histoire et qui mettent en relation calcul et géométrie rendent compte de l'importance des grandeurs géométriques mesurées (Bkouche, 2009b) auxquelles on associe une évolution des connaissances comme les notions de proportionnalité et de linéarité ainsi que la construction d'une« théorie des grandeurs indépendante de la mesure » (Bkouche, 2009, p. ix).

L'origine de la relation entre géométrie et calcul est ainsi racontée par l'histoire que j'évoque, ici d'une façon très simplifiée. Je reprends la phrase de Rudolf Bkouche lorsqu'il dit que « le calcul littéral a été inventé pour le calcul des grandeurs » (Bkouche, 2009b, p. xi). Puis en suivant certains faits historiques dont Bkouche rend compte, on voit qu'encore plus tard même Leibniz « a cherché désespérément un calcul géométrique, c'est-à-dire portant directement sur les objets géométriques,

ensuite Poncelet et les géomètres projectifs du XIX^{ème} siècle » (Bkouche, 2009b, p. xii).

Je me suis ainsi dirigée vers une recherche historique encore plus spécifique et je me suis notamment centrée sur les relations entre calcul arithmétique et géométrie jusqu'à ce que le calcul des grandeurs ait effectivement été représenté visuellement, en particulier d'une façon géométrique.

2 Le théorème de Thalès au cœur de la relation entre nombres et géométrie

Un exemple fondamental de la Grèce ancienne qui rend clairement compte d'une relation entre le numérique et le géométrique est le théorème de Thalès. En suivant l'œuvre de Bkouche (1994), on trouve une belle référence à cela :

> « Le théorème de Thalès (ou théorème de lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments ; en cela il est au cœur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique. » (Bkouche, 1994, p. 1)

Proposition trouvant son origine dans la vie *réelle* via des rapports de mesures, ce théorème possède trois types principaux d'énoncés : les rapports d'abscisses, de projection et d'homothétie (Brousseau, 1995). Ainsi, on est face à un théorème qui a évolué à travers le temps jusqu'à avoir été défini comme un théorème affine et non pas métrique, étant donné que ses hypothèses et sa conclusion sont conservées par des applications affines. Les relations données par ce théorème peuvent se rapporter à des longueurs, des mesures algébriques ou des vecteurs. Finalement, je n'ai qu'à rappeler les deux éléments clés pour chacun des énoncés du théorème de Thalès : le parallélisme de droites et les proportions, c'est-à-dire les proportions et la géométrie. Bkouche (2009b), dans son *Histoire du calcul, de la géométrie à l'algèbre*, rend compte de l'existence de grandeurs et de la proportionnalité avant toute mesure, de même qu'il souligne que la mesure est une proportionnalité. Par la suite, dans cet ouvrage, on trouve, associées au théorème de Thalès, les propriétés mentionnées ci-dessus, où l'extension de la validité de leurs rapports inclut non seulement les fractions positives, les réels positifs et les quantités négatives mais aussi le rapport d'abscisses en lien avec de nouvelles définitions des opérations.

Compte-tenu de ce qui précède, j'ai eu une réponse à la question portant sur une relation entre calcul et géométrie dont la solution me permet de donner un sens à une idée mathématique, la multiplication, en la géométrisant. De fait, le cœur de cette recherche portant sur les relations entre calcul et géométrie au sein de l'épistémologie et l'histoire a acquis une existence puisque, ce que les relations dans le théorème de Thalès représentent, c'est bien la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres.

Dans la section suivante, je montrerai comment je reprendrai ces idées comme fondement de certaines propositions didactiques qui forment le cœur d'une partie de la phase expérimentale de la recherche.

II - UN REGARD ÉPISTÉMOLOGICO-DIDACTIQUE SUR LA RELATION ENTRE CALCUL ET GÉOMÉTRIE : SIGNIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PRODUIT POUR DIFFÉRENTS ENSEMBLES DE NOMBRES

Mon intérêt pour les travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les idées mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise la rencontre de significations de ces idées. Dans cette section, je ne présenterai qu'un aperçu de cette analyse.

Cette recherche a été un aller-retour permanent entre nombres et opérations et mon intérêt pour les représentations géométriques d'une opération mathématique s'inscrit bien dans une conception dynamique du nombre (Glaeser, 1981) :

> « Il est clair, en effet, que si l'on conçoit toute notion mathématique comme devant être dérivée de la perception, le nombre négatif ne saurait se justifier puisqu'il correspondrait à une absence de perception, ou moins encore, et qu'il n'y a pas de degrés dans les perceptions nulles [...] la nature essentielle du nombre n'est ni statique, ni perceptive, mais bien dynamique et liée à l'action elle-même, intériorisée en opérations. » (Piaget, 1949, p. 110-115).

Alors, comment travailler ce caractère dynamique du nombre et donc des opérations ?
Ce questionnement m'a amenée petit à petit à vouloir mettre en valeur le fait que les opérations mathématiques ne sont pas seulement des outils au service de nos besoins de calcul : elles sont elles-mêmes porteuses de significations qui méritent d'être rencontrées.

Par exemple, en ce qui concerne la multiplication des nombres rationnels, les travaux de Brousseau sont déjà connus: il y parle du sens du produit de deux fractions. Dans le module dix de sa thèse où il décrit la mise au point collective faite par l'enseignante dans la situation concernant la multiplication par une fraction, il explicite dans une remarque que « le sens du produit de deux fractions est assez différent du sens du produit de deux nombres » (Brousseau, 1996, p. 217), lequel peut seulement être validé à travers « l'examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication » (Brousseau, 1996, p. 217). En faisant référence à la définition du produit de deux fractions, notamment à la construction de cette *nouvelle multiplication*, il ajoute le paragraphe suivant qui fait clairement référence au sens de cette opération en termes d'agrandissements et réductions :

> « Y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l'opération 3 × 2 ? Vous vous doutez que c'est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans l'addition) qu'il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. » (Brousseau, 1996, p. 218)

Outre le travail de Brousseau, un travail très intéressant est celui développé par Douady (1986) qui propose des interactions entre les cadres numérique, géométrique et graphique « pour faire progresser les connaissances sur les nombres » (Douady, 1986, p. 1). D'après Douady,

> « parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage [...] car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement. » (Douady, 1986, p. 22)

Elle soutient que la correspondance grandeur-nombre est le fait qui va permettre l'extension du produit de deux entiers au calcul du produit de deux fractions. De plus, la mesure d'aire à l'aide d'une représentation géométrique devient un élément *concret* essentiel pour donner du sens à ce produit, car cette représentation rendra possible une perception de la commutativité de la multiplication, laquelle serait moins accessible si l'on ne se situe que dans le cadre numérique. Je présente donc un exemple (Douady, 1986) qui porte sur certaines représentations géométriques d'une multiplication numérique. Ces représentations permettraient d'approcher l'idée d'aire de fractions d'un rectangle, en donnant un accès visuel à la commutativité du produit tel que je viens de le mentionner plus haut et à sa correspondance avec l'idée de réduction de l'aire de l'unité, dans ce cas, par l'opération de $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$ (fractions des mesures des côtés d'un rectangle).

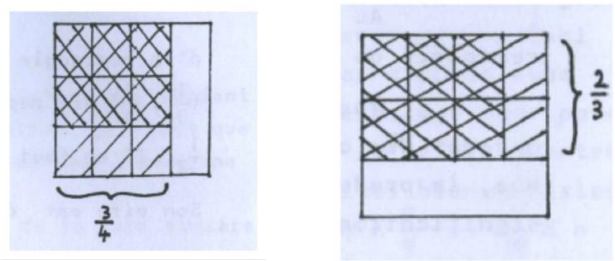


Figure 1. Représentations géométriques du produit de deux fractions (Douady, 1986)

Il me semble important de souligner que la mesure fait bien partie des éléments donnant du sens à la multiplication, de même que l'existence d'un opérateur : le terme *opérateur* définit les nombres naturels et les fractions opérant sur des espaces mesurables. En revanche, bien que la mesure soit valide pour la représentation géométrique des nombres rationnels, ce qui apparemment pourrait faciliter le fait de donner une signification géométrique à la multiplication de ces nombres, elle ne s'applique pas aux *quantités négatives*. Ces idées, qui peuvent être des nouveaux nombres, comme l'a dit Glaeser en parlant des nombres relatifs, « ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés » (Glaeser, 1981, p. 337). De ce fait, la recherche du bon modèle géométrique de la multiplication de nombres relatifs est toujours en cours et on sait déjà qu'il n'y a pas un modèle approprié qui prenne en compte l'interprétation géométrique de toutes les propriétés de la multiplication. Néanmoins, l'abstraction de la *quantité négative* n'existe plus dès que son interprétation est liée à l'idée de direction (Flament, 2003, p. 170). De ce fait, en suivant Argand (1874), même une représentation géométrique de la multiplication des entiers négatifs devient possible puisque ces *quantités* sont maintenant traitées en termes de sens et de direction :

> « Mais puisqu'on a trouvé[…] que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*. » (Argand, 1874, p. 6)

En revanche, cette représentation ne saurait exister que si l'on décide de « travailler [dans une certaine] ambiguïté » (Bkouche, 1994, p. i). Claude-Paul Bruter, évoquant la multiplication, affirme qu'addition ou multiplication sont des transformations :

> « La notion de transformation, qui est associée à celle d'évolution, joue un rôle capital dans tous les règnes de la nature, et, par conséquent dans toutes les sciences. Elle est évidemment présente, en mathématiques, dès qu'il y a opération. » (Bruter, 2000, p. 84)

Ces transformations peuvent être internes ou externes et « peuvent faire éclater le cadre sur lequel elles opèrent, et déboucher sur des extensions des objets anciens, voire sur des structures nouvelles par bifurcation, par métamorphose » (Bruter, 2000, p. 84). De ce fait, l'action ou les opérations sur certaines des idées mathématiques travaillées à un niveau élémentaire de l'enseignement seront nécessairement justifiées dans un niveau supérieur. De fait, c'est la multiplication de nombres complexes qui possédera tous les outils pour se rendre visuelle et exprimable librement à travers la géométrie dans ce contexte spécifique que nous appelons *transformation*. Cela puisque l'extension de la définition des opérations pour les nombres complexes est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel (1897) :

> « le respect de la structure propre à des nombres arithmétiques dans un premier temps, puis étendue à des 'segments', nous autorise donc à appeler 'somme' ou 'multiplication' des opérations s'effectuant sur des objets. » (Flament, 2003, p. 115-116).

La multiplication de segments de droite de Wessel, comporte les mêmes propriétés de construction que la multiplication de Descartes (1637) (figure 2), qui consiste à multiplier des segments qui ne représentent pas de grandeurs 'positives' ou 'négatives'. Ces propriétés trouvent leur fondement dans ce qu'on connaît aujourd'hui comme le théorème de Thalès dont j'ai parlé dans la section précédente comme étant le cœur des relations entre géométrie et calcul.

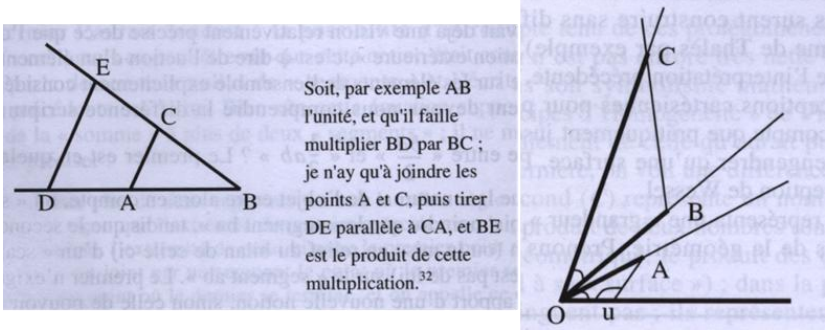


Figure 2. À gauche, multiplication de Descartes ; à droite, multiplication de segments de droites de Wessel

L'analyse des propriétés des représentations géométriques de la multiplication, présentées dans la figure 2, m'a conduit à vouloir mettre en valeur ces représentations qui peuvent représenter le produit pour différents ensembles de nombres (par exemple, entiers naturels, fractions et nombres complexes) et à les faire vivre dans un contexte d'apprentissage où elles pourraient favoriser la visualisation du produit comme une transformation dans le plan. L'idée de *repenser* les représentations classiques du produit donne une force supplémentaire à l'intention didactique d'articuler géométrie et calcul dans la rencontre du sens de la multiplication.

III - UNE ARTICULATION THÉORIQUE POUR L'ANALYSE DE LA MISE EN RELATION ENTRE MULTIPLICATION ET GÉOMÉTRIE : ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET MÉDIATION SÉMIOTIQUE

1 L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses

Mon intérêt à analyser le processus de mise en relation entre nombres et géométrie au niveau de l'apprentissage des élèves, m'a conduit à vouloir observer ce qui se passe à l'endroit où l'on peut voir en action le travail mathématique associé à l'œuvre de celui qui le fait (Kuzniak, 2010) : dans une sorte d'espace qui permettrait de situer le travail mathématique des élèves. Ainsi, mon approche théorique principale pour étudier les relations établies par les élèves entre le numérique et le géométrique dans le processus d'apprentissage d'un contenu mathématique, concerne les travaux de Kuzniak portant sur l'Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2012).

L'articulation des processus cognitifs définis par Duval (1998) avec les composantes du plan épistémologique d'un ETM (voir figure 3) rend compte d'une relation bilatérale entre les éléments constituant les deux plans de cet espace, grâce à l'action des différentes genèses, dont une sémiotique.

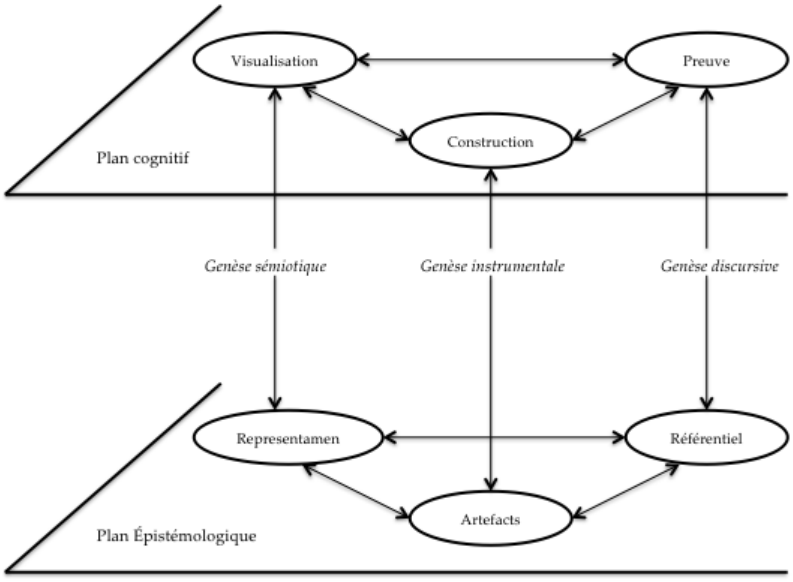


Figure 3.
Espace de Travail Mathématique et ses genèses (Kuzniak, 2012)

Par exemple, dans le plan épistémologique, nous pouvons retrouver différentes représentations de la multiplication et les divers savoir-faire concernant le calcul d'un produit. Dans le plan cognitif nous retrouvons la visualisation desdites représentations, visualisation qui donnerait accès, par exemple, à la rencontre d'un sens géométrique du produit. La genèse sémiotique serait ainsi le processus qui favoriserait la mise en relation entre la représentation et la visualisation d'une idée mathématique, dans notre cas, de la multiplication. De ce fait, pour mieux étudier le travail

mathématique des élèves interagissant entre les deux plans de l'ETM, j'ai initié un travail d'articulation théorique me permettant d'approfondir l'étude et l'analyse de ces interactions.

Je présenterai donc dans la subsection suivante quelques éléments qui viennent s'articuler à l'ETM et qui élargissent le regard de ce qui se passe dans l'articulation des plans épistémologique et cognitif dans le processus d'émergence et rencontre de sens au milieu d'un travail collaboratif entre élèves et enseignant en classe de mathématique.

2 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Mon intérêt pour l'aspect social des processus d'apprentissage, ainsi que pour l'étude des processus de médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) favorisant la rencontre collective d'une idée mathématique, m'a conduit à une première élaboration d'un cadre théorique articulant des éléments cognitifs et didactiques (Barrera-Curin, 2012). Cette approche s'intéresse particulièrement à des interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques, à des utilisations médiatiques de ces interprétations ainsi qu'à la construction de nouvelles connaissances jusqu'à ce que leur *compréhension* devienne *explicitable* et *interprétable* grâce à sa verbalisation dans une situation de *communication*. Des éléments clé dans cette approche sont la visualisation déclenchée par des représentations géométriques, l'importance de prendre en compte la complexité des situations d'apprentissage qui impliquent des changements de cadres mathématiques et de registres de représentations sémiotiques ainsi que le travail collaboratif. L'Espace de Travail Mathématique a ainsi été situé dans un contexte socioculturel de l'apprentissage, et dans ce contexte, l'action de médiateurs, au niveau de ses genèses, est essentielle. Ces médiateurs peuvent être de natures différentes. D'une part, ils sont des signes, notamment des représentations géométriques, lesquelles sont censées pouvoir *conduire* le travail mathématique des élèves. D'autre part, ils résultent d'un processus de collaboration social entre élèves et enseignant. Ces éléments articulés à l'ETM sont devenus des fondements de mes propositions didactiques et viennent confirmer une nouvelle conception de l'acte d'enseigner les mathématiques : les mathématiques ne se reçoivent pas, ne se recopient pas du tableau ; les mathématiques se font, se font ensemble dans la collaboration entre élèves et enseignants.
De ce fait, des éléments théoriques associés à la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et à une conception participationniste de l'apprentissage de mathématiques (Radford, 2004 ; Sfard, 2008) ont été intégrés aux composantes d'un espace de travail mathématique (voir figure 4).
Ce faisant, j'ai voulu mettre en valeur les potentialités médiatrices qu'ouvrent les échanges entre différents individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) dans le processus de construction d'un concept mathématique.

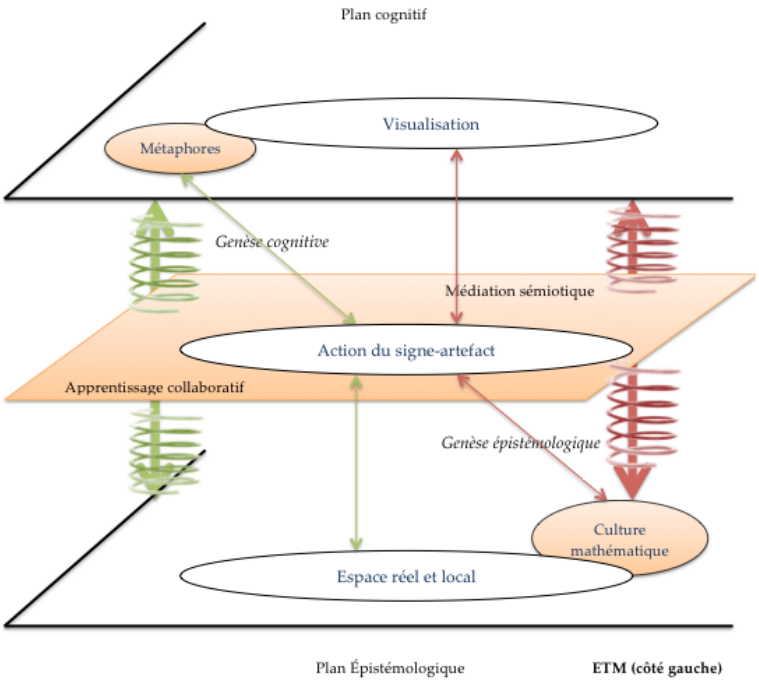


Figure 4. Schéma représentant l'articulation théorique ETM et Médiation Sémiotique. Côté gauche de l'Espace de Travail Mathématique

De plus, en parlant de l'importance accordée aux signes en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d'un concept (Vygotsky, 1934/1997), Noss et Hoyles (1996) parlent de « *situated signs to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting, which, in turn, shapes the way the ideas are expressed*[1] » (Noss & Hoyles, 1996, p. 122).Ce dernier point, pourrait être associé à un espace de *visualmediation* où des médiateurs visuels sont définis comme des fournisseurs d'images permettant aux participants d'identifier l'objet en question en coordonnant la communication (Sfard, 2008).

3 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Je vais présenter des exemples du travail mathématique des élèves dns un processus d'apprentissage collaboratif visant la construction des significations géométriques de la multiplication. Il s'agit de deux situations[2] travaillées par des élèves de différents niveaux scolaires (classes de Quatrième et TS) à travers lesquelles je cherchais à étudier leur travail mathématique dans le processus de rencontre du sens géométrique de la multiplication.

3.1 Multiplication de fractions

La première situation porte sur le sens du produit de deux fractions. Le travail collaboratif entre élèves et enseignant constitue un élément fondamental de la situation. Les échanges, les allers-retours questionnant l'énoncé devraient conduire les élèves vers les réponses attendues *a priori* (Barrera-Curin, 2011).

Le travail mathématique des élèves s'est déroulé autour de la proposition suivante :

Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ?

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\approx\frac{1}{3}$$

[1] « Pour décrire comment les apprenants construisent des idées mathématiques en dessinant sur la toile d'une place en particulier, ce qui détermine comment les idées sont exprimées à leur tour » (Ma traduction. Noss & Hoyles, 1996, p. 122).

[2] Pour une version détaillée de ces situations d'apprentissage et de leurs analyses respectives voir Barrera-Curin, R.I. 2011 & 2012.

Le *rôle puissant* qu'Arcavi attribue à la visualisation géométrique a été très inspirateur dans la conception de cette situation puisqu'elle favoriserait la *rencontre* du sens du produit de deux fractions. Or la prise en compte d'une référence faite par Arcavi (2003) à la figure que Mabry (1999) a proposée comme représentation visuelle de la somme d'une série de puissances d'un quart, m'a amenée il y a quatre ans, à commencer la recherche sur le rôle médiateur de la géométrie dans le processus visant la rencontre du sens de la multiplication.

Les idées mathématiques en jeu, la multiplication de fractions et la représentation géométrique d'un produit de fractions, correspondent à des outils explicites pour la résolution du problème posé. Ces outils sont définis d'après Douady « comme les notions qu'un élève met en œuvre, en pouvant les formuler et dont il peut justifier son emploi » (Douady, 1986, p.10). Ainsi, une image mentale (Douady, 1986, p. 11) ou une reconnaissance métaphorique du produit des fractions permettrait l'accès à une de ses représentations géométriques. Cette dernière est ainsi considérée comme une formulation différente d'un même résultat mathématique. De ce fait, les élèves pourraient valider leur réponse à la question « Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ? » en formulant des justifications. La réponse à valider correspondrait à la représentation géométrique d'une des significations du produit de fractions. D'un point de vue cognitif, les traitements visuels de composition et décomposition à faire sur les figures produites permettraient de les unifier et de les accepter finalement comme une visualisation de l'expression arithmétique-algébrique donnée. Dans ce cas, le traitement correspond à une séquence de figures superposées dont le résultat attendu pourrait correspondre à l'exemple ci-dessous :

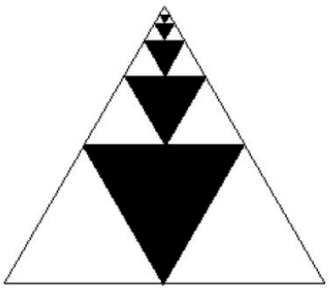


Figure 5. Composition figurale proposée par Richard Mabry comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Le travail mathématique des élèves a rendu compte d'une mise en évidence de la signification de la multiplication de fractions comme « une partie d'une autre » et cela a été possible grâce à l'action d'une genèse sémiotique favorisant un processus de changement de registre de représentation suivi d'un traitement dans le registre d'arrivée. Les partages figuraux, permettent donc de visualiser l'expression numérique de départ (figure 6).

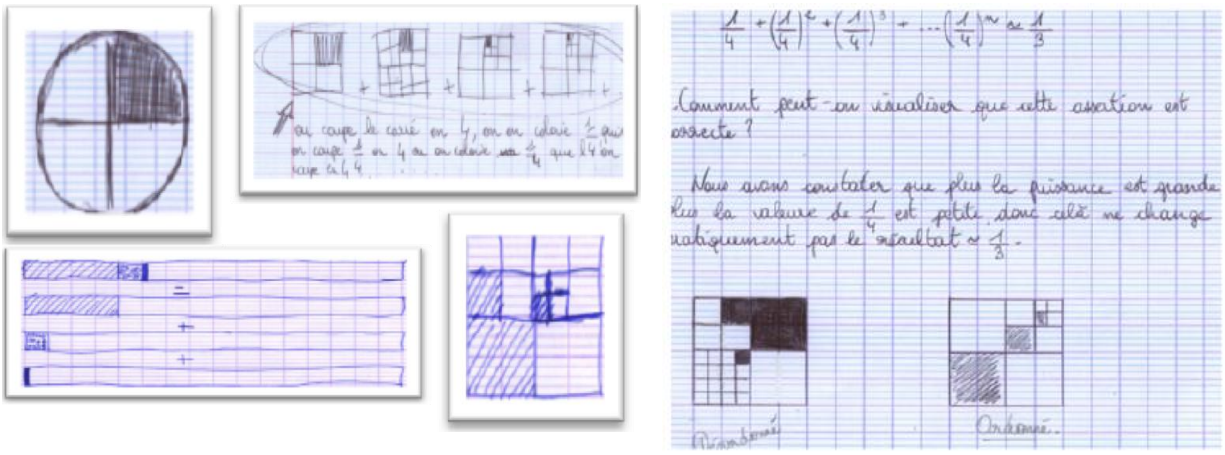


Figure 6. Compositions figurales proposées par des élèves d'une classe de quatrième comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Nous pouvons déterminer le travail mathématique des élèves soit par une entrée de type épistémologique, grâce à la mise en œuvre des connaissances mathématiques préalables (connaître ce que multiplier deux fractions signifie), soit par une entrée de type cognitif, résultant d'un processus de recherche émergeant de la question posée et conduisant les élèves, petit à petit, à la visualisation du produit et donc à la découverte d'une de ses significations géométriques.

J'ai conclu, qu'une *manipulation* géométrique de la multiplication de fractions, impossible en restant dans le cadre numérique, a permis aux élèves d'*approcher* une des significations de la multiplication de fractions où les fractions sont des opérateurs produisant la réduction de l'aire de l'unité. L'émergence des représentations géométriques, comme un mode de production non discursive, rendant compte d'une interprétation de ce qu'est multiplier deux fractions de façon consécutive, a mis donc en évidence la *rencontre* de la multiplication de fractions par des élèves.

3.2 Multiplication pour différents ensembles de nombres

Les résultats obtenus (Barrera-Curin, 2011) et l'analyse du travail mathématique des élèves résultant de cette première expérimentation m'ont motivée à approfondir l'étude de cette relation entre nombres et géométrie et je me suis fortement intéressée à continuer l'étude du travail mathématique des élèves dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique.

De ce fait, une deuxième situation (Barrera-Curin, 2012) a été mise en place dans plusieurs collèges ou lycées d'Ile de France. Cette fois, je me suis posée la question suivante : pourrions-nous faire ressortir des justifications intuitives liées aux transformations géométriques en utilisant la construction géométrique de la multiplication de Descartes (cf. Section 2), pour introduire ou réinvestir des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Nous avons situé les activités proposées aux élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la signification des idées mathématiques devait émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Nous attendions encore l'émergence d'une visualisation géométrique de significations géométriques de la multiplication. Cette fois et à la différence de la situation antérieure, le processus de visualisation se produirait grâce à une genèse sémiotique où l'action d'un signe médiateur (cf. section 2, une configuration du théorème de Thalès) favoriserait la construction géométrique du sens de l'idée mathématique en jeu. Cette genèse sémiotique à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique, fait bien partie d'une activité qui suppose des enjeux sémiotiques complexes (D'Amore et Faldino, 2008) associés au processus de changement de registre de représentation.

La situation a été mise en place dans quatre classes de Terminale S et dans quatre classes de Quatrième. Dans chaque classe, la situation a été intégrée à la progression des enseignants. Les élèves ont eu à résoudre une suite de quatre ou cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres de différentes natures.

Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637).

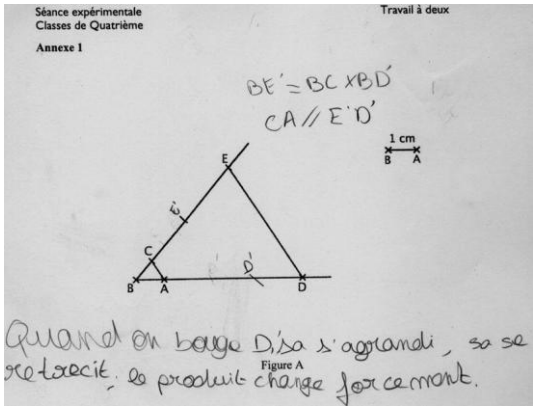
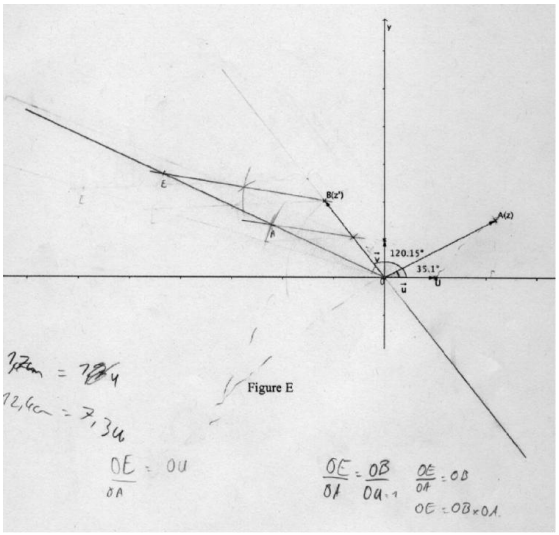
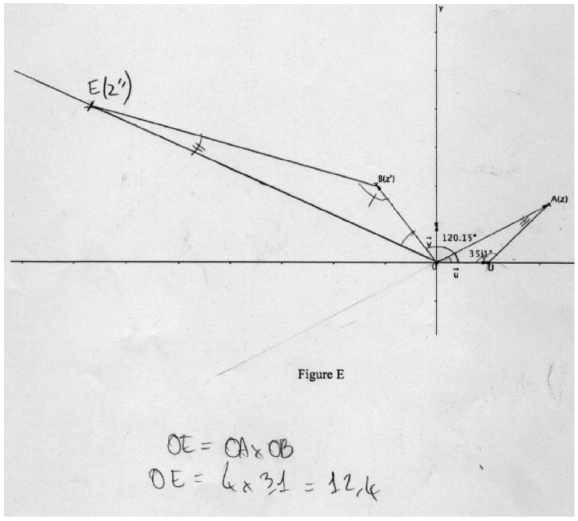


Figure 7. Représentation géométrique de la multiplication d'un nombre naturel par une fraction positive, classe de Quatrième, suite à l'analyse de la multiplication de Descartes

Figure 8. Représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes, classe de TS, suite à l'analyse de la multiplication de Descartes





En m'appuyant sur ces activités, mon but était de décrire des possibilités qu'ont des élèves de rencontrer les significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Cette représentation géométrique représente aussi une icône du théorème de Thalès dont la place reconnue dans l'enseignement français m'a permis de lui attribuer le rôle d'un signe-médiateur ou signe-artefact (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008), destiné à être interprété et à évoluer jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, j'ai étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication de nombres de différentes natures. Petit à petit j'ai été amenée à répondre à une question qui articule mes recherches dans les contextes épistémologique, théorique et expérimental : « *Y a-t-il des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication ?*

L'idée que le produit de deux nombres quelconques correspond à une transformation dans le plan a été déterminée et certaines représentions données par les élèves en rendent compte. Les interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'Espace de Travail Mathématique des

élèves sont très diverses mais dans certains cas, il a été possible de percevoir des liens explicites entre les différentes composantes de la situation proposée : multiplication de Descartes, théorème de Thalès, propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres (cf. figures 7 et 8). Le travail mathématique des élèves a été observé et analysé sous le regard de mes choix théoriques, ce qui m'a permis de déterminer que mes *a priori* n'étaient pas toujours présents, pas toujours explicites dans le travail des élèves. Néanmoins, dans le cas où l'émergence de *ce sens* géométrique du produit a bien pu être déterminé, cela ne pouvait que résulter d'un processus de médiation sémiotique dans lequel les élèves s'étaient permis de s'immerger au milieu d'un travail collaboratif fort entre eux et quand cela a été possible, des interactions avec l'enseignant[3].

4 Le rôle créateur et médiateur de l'enseignant : proposer un ETM et faire évoluer le travail mathématique des élèves

La diversité et la richesse du travail mathématique des élèves à partir de la proposition d'un seul ETM m'a amené à réflechir sur le rôle de l'enseignant dans la proposition des espaces de travail mathématiques ainsi qu'à la façon dont il est censé pouvoir les gérer une fois que les élèves se les sont appropriés.

Le travail de l'enseignant ne se réduit pas à vérifier la mise en évidence par des élèves de ce qui était attendu *a priori*. Il s'agit de faire des mathématiques ensemble. Pour cela, je ne peux que souligner l'importance de la médiation de l'enseignant dans tout processus d'apprentissage-enseignement ainsi que de l'importance de sa connaissance de la richesse et du potentiel des idées mathématiques sur lesquels il souhaite travailler avec ses élèves. Ces médiations et connaissances sont donc indispensables pour faire progresser le travail mathématique de la classe. Bien sûr, en plus de penser l'existence de cette médiation, il faudrait réfléchir au moyen de la faire exister de façon réelle dans l'action quotidienne des enseignants. Cette réflexion n'a pas de réponse simple. Une première proposition serait que l'enseignant rentre à l'intérieur des espaces mathématiques que se sont appropriés les élèves ; il doit être là, il doit jouer un rôle dans la construction du sens des idées mathématiques, il est là pour construire avec les élèves, pour faire évoluer le travail mathématique des élèves :

> "The object of knowledge is filtered by the technology of the semiotic activity [and] knowledge is culturally mediated[4]". (Radford, 2004, p. 24)

Dans le cas des situations présentées précédemment, il aurait fallu renforcer le rôle médiateur de l'enseignant dans chacune des classes et ainsi avoir un meilleur accès au travail mathématique des élèves. Mais comment l'enseignant pourrait-il participer de plus près au travail mathématique des élèves ? Quel grand défi pour un enseignant travaillant dans une classe ordinaire !

Compte-tenu de ce qui précède, les réflexions portant sur le rôle créateur et médiateur de l'enseignant m'ont conduit à des questionnements autour de la formation de futurs enseignants : des enseignants qui devront créer des situations d'apprentissage, proposer des espaces de travail mathématiques et gérer la diversité des appropriations de ces espaces.

Forte de ces réflexions, et en tant que formatrice à l'IUFM de Montpellier pendant un an, j'ai décidé de poser deux questions à mes étudiants. Le choix de ces questions trouve sa justification dans mon intérêt de poursuivre mon travail de recherche autour des nombres, opérations et géométrie cette fois à l'école élémentaire. Les questions étaient les suivantes : *Qu'est-ce que la multiplication ? Donnez une représentation géométrique de la multiplication.*

Les réponses des étudiants limitent le sens de la multiplication à une addition réitérée. Les représentations géométriques proposées mélangent des figures et des signes. Ceci confirme

[3]Pour plus de détails concernant l'analyse des situations voir Barrera-Curin, 2012.

[4] "L'objet de la connaissance est filtré par la technologie de l'activité sémiotique [et] la connaissance est culturellement médiée" (Ma traduction de Radford, 2004, p. 24).

donc le besoin d'un changement dans la façon de travailler les thèmes mathématiques fondamentaux en formation initiale.

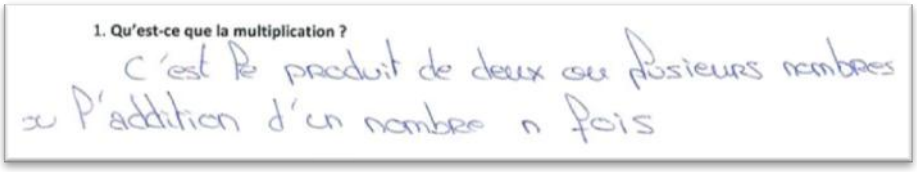


Figure 9. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question : *qu'est-ce que la multiplication ?*

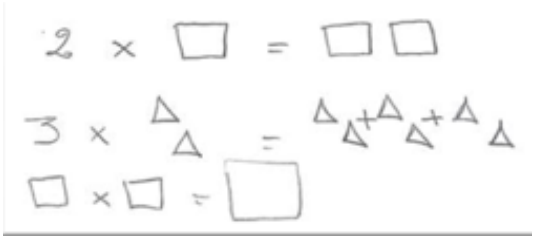


Figure 10. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question : *donnez une représentation géométrique de la multiplication*

Il faudrait que les mathématiques redeviennent vivantes, en d'autres mots, il faudrait les faire émerger en les faisant (Maheux & Proulx, sous presse), il faudrait les faire fleurir ou exploser, il faudrait les vivre toujours en mouvement, me semble-il, tel que Châtelet (1993) le disait.

Comment peut-on établir des liens entre l'essence épistémologique des savoirs à enseigner aux futurs enseignants et les connaissances mathématiques nécessaires à leur métier ? Le rôle du formateur-chercheur me semble fondamental. Aurait-il un paradigme à changer ? Probablement. De ce fait, le travail didactique en formation ne pourrait se limiter à l'analyse des progressions pré-faites mais à un travail créateur entre enseignants et formateurs visant non seulement la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques mais aussi une formation au métier d'enseignant où son rôle de médiateur à l'intérieur de ces espaces devrait nécessairement se développer.

IV - CONCLUSION

La recherche d'un lien entre géométrie et calcul dans certains travaux historiques, épistémologiques et didactiques, m'a permis de constater la complexité et richesse non seulement de mes intentions didactiques mais aussi des mathématiques faisant l'objet de ma recherche. Un voyage historique qui a commencé dans l'histoire des chiffres et qui a terminé dans la représentation géométrique de la multiplication de nombres complexes a mis en évidence l'existence historique d'une relation aussi étroite que controversée entre représentations géométriques et calcul numérique. Cette recherche est née à partir d'une idée élémentaire : les recherches en histoire et en épistémologie nous permettraient d'accéder à la vie et au mouvement, parfois éclipsé, des mathématiques. Ainsi, la prise en compte des relations historiquement établies entre géométrie et nombres rendant compte des significations transversales de la multiplication pour différents ensembles de nombres a, d'une part, enrichi la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques tel que présentée dans cet article et, d'autre part, est devenue le point de départ d'une recherche beaucoup plus large autour de l'importance des relations entre nombres et géométrie dans le processus visant la rencontre des certaines idées mathématiques.

La multiplication et le Nombre, comme Piaget l'a précisé, *symbolise une action* (Piaget, 1949). Cette interprétation dynamique du nombre a produit tout au long de l'histoire ce besoin d'une représentation, ce besoin, dirais-je, de voir *en action* les nombres et les opérations sur les nombres. Que la géométrie soit en train de disparaître progressivement des programmes officiels ne veut

pas du tout dire qu'elle ne doit plus exister dans l'acte d'enseigner ou dans les représentations pour les chercheurs, les formateurs ou les enseignants. Il y a plusieurs raisons pour mettre en valeur la relation entre nombres et géométrie : la dé-géométrisation du nombre, puis sa re-géométrisation (Glaeser, 1981) ; le passage de l'image à la géométrie puis à la forme abstraite (Bachelard, 1938) ; la création d'une nouvelle géométrie comme réponse au besoin d'avoir toujours une représentation des idées arithmétiques (Bkouche, 2009b) ; le théorème de Thalès ou l'objet mathématique qui représente la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres ; les transformations géométriques ou le contexte d'existence de la relation entre multiplication et géométrie (Barrera-Curin, 2012). Et j'ajoute :

> « Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. »(Leys, Ghys, & Alvarez, s. d.).

Ainsi je suis passée du plan historico-épistémologique au plan expérimental et didactique. Je me suis intéressée aux possibilités qu'ont les élèves de chercher et d'établir un lien entre multiplication et géométrie et à la recherche d'une articulation théorique favorisant l'analyse du travail mathématique des élèves. Plus tard, ces réflexions se sont élargies vers la formation de futurs enseignants.

Une précision me semble importante. Il faut bien comprendre que mes intentions didactiques ne visent pas la *recherche d'un bon modèle* pour la représentation de la multiplication pour différents ensembles de nombres. J'ai parlé de géométrisation, d'articulation de cadres mathématiques pour l'apprentissage ou le réinvestissement du calcul numérique mais le *comment faire* reste toujours une responsabilité des futurs enseignants et des formateurs, une part de leur rôle créateur. Ici, je n'ai donné que des exemples qui rendent compte de la richesse des mathématiques et encore plus des possibilités de les faire émerger à partir de la seule proposition d'un Espace de Travail Mathématique.

Je voudrais terminer en insistant sur l'importance d'une formation initiale et continue enrichie par des réflexions épistémologiques autour des mathématiques. Une formation *mettant en valeur* le rôle créateur et médiateur de l'enseignant, participant au travail mathématique de ses élèves dans les processus d'émergence et de rencontre des mathématiques.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARCAVI, A. (2004) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 214-241.

ARGAND, J.-R. (1874) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris : Gauthier- Villars.

ARTIGUE, M. & ROBINET, J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *RDM*, **3**(1), 5-64.

BACHELARD, G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

BARRERA-CURIN, R. I. (2011) Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique. *Petit x*, n°**85**, 5-26.

BARRERA-CURIN, R. I. (2012) *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat non publiée.

BARTOLINI-BUSSI, M. G. & MARIOTTI, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2ème éd.). New York and London : Routledge.

BKOUCHE, R. (1994) *Autour du théorème de Thalès*. Lille : IREM de Lille.

BKOUCHE, R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the learning of mathematics*, **17**(1), 34-42.

BKOUCHE, R. (2009) *Grandeurs et nombres*. Lille : IREM de Lille.

BKOUCHE, R. (2009b) *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen : Vuibert.

BROUSSEAU, G. (1995) Autour de Thalès : promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université. *Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle*, 87-124.

BROUSSEAU, G. (1996) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat non publiée.

BRUTER, C. P. (2000) *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.

CHÂTELET, G. (1993) *L'enchantement du virtuel. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Le Seuil.

CONNE, F. & LEMOYNE, G. (1999) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

D'AMORE, B. & FALDINO, M. I. (2008, March) Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. In *The first century of the international commission on mathematical instruction (1998-2008) : reflecting and shaping the world of mathematics education.* Rome :Instituto della Enciclopedia Italiana.

DAVIS, B. & SIMMT, E. (2006) Mathematics-for-teaching : an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *EducationalStudies in Mathematics*, **61**, 293-319.

DESCARTES, R. (1637) *La géométrie* (Par Vincent Jullien éd.). Paris : Presses Universitaires de France.

DOUADY, R. (1986). *Liaison école- collège : Nombres décimaux* (Rapport technique). Paris.

DUVAL, R. (1998, March) Why to teach geometry ? In *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st. century.*Catania : Springer.

FLAMENT, D. (2003) *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.

GLAESER, G. (1981) Épistémologie de nombres relatifs. *RDM*, *2*(3), 303-346.

KUZNIAK, A. (2004) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches.

KUZNIAK, A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, **15**, 73-93.

KUZNIAK, A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique.* Paris.

KUZNIAK, A. (2012) Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), Berlin : Springer. À paraître.

LEYS, J., GHYS, E., & ALVAREZ, A. (s. d.).*Dimensions.*

MABRY, R. (1999) Proof without words : *Mathematics magazine*, **72**(1), 63.

MAHEUX, J.-F. & PROULX, J. (sous presse) Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives.

NOSS, R. & HOYLES, C. (1996) *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers.* Dordrecht : Kluwer.

PIAGET, J. (1949) *Introduction à l'épistémologie génétique : la pensée mathématique, tome 1*. Paris : Presses Universitaires de France.

RADFORD, L. (2004) La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.

REYNEAU, C. R. (1739) *Science du calcul des grandeurs en général*. Venise : Chez F. Pitteri.

SFARD, A. (2008) *Thinking as communicating : Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.

SIERPINSKA, A. (1991) *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique* (Rapport technique). Thessalonique : Institut Français de Thessalonique.

VYGOTSKY, L.S. (1934/1997) *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute.

UNE SITUATION DE REPRODUCTION DE FIGURES AU CYCLE 2 : MISES EN ŒUVRE ET ANALYSE

Claire WINDER
PRAG, ÉSPE de Nice
claire.winder@free.fr

Résumé
Ce travail prend comme objet d'étude une activité destinée à des élèves de cycle 2 (Favrat & al, 2006). Le choix de cette activité est lié au fait qu'elle « plaît aux enseignants » qui l'ont essayée dans leur classe, et qu'elle permettrait des rencontres géométriques moyennant des pliages d'un carré de papier pavé de 4 carrés superposables de couleurs différentes, que nous avons baptisé PLIOX. Mais quels apprentissages l'utilisation adaptée de ce PLIOX permettrait-elle ? Sous quelles conditions ? Comment les enseignants s'emparent-ils de la situation ? Qu'est ce que cela nous apprend sur leurs relations à l'enseignement de la géométrie ? Comment pourraient-ils s'emparer autrement de la situation ? L'objectif de ce travail est de transformer une banale activité en une situation susceptible d'apprentissages définis en relation avec des choix de variables, d'étudier des mises en scène par des enseignants différents pour tester sa robustesse, d'explorer ses autres potentialités et d'affiner le scénario didactique. Les outils théoriques mobilisés sont liés aux connaissances des élèves, à la théorie des situations didactiques pour la construction et l'analyse de la situation (Brousseau, 1996), aux façons cognitives d'apprendre à voir une figure (Duval, 2004), aux conceptions spatiales (Berthelot & Salin, 1993-94), aux espaces de travail géométrique (Houdement & Kuzniak, 2006), mais aussi à l'étude des pratiques enseignantes : vigilance didactique, tension dévolution institutionnalisation (Pézard & Butlen & Masselot, 2012 ; Margolinas & al, 2008).

Dans le cadre de notre action de formation en IUFM, nous avons constaté à la fois la pauvreté de certains manuels dans le domaine de la géométrie à l'école primaire, et la difficulté pour les professeurs des écoles à mettre en œuvre des activités géométriques. En outre ce phénomène nous semblait encore plus visible au cycle 2. Les programmes en vigueur indiquent dans ce cycle : « *Les élèves apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes. Ils utilisent un vocabulaire spécifique.* » (B.O.E.N n°3 du 19 juin 2008).

Mais qu'est-ce qu'une « figure » à l'école élémentaire ? « *Une figure est pour nous un dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments. C'est dans l'exercice de ce contrôle que vont intervenir les propriétés géométriques proprement dites* » (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2004, p. 13). « *Une figure ne se* [limite] *donc pas à un tracé avec les instruments de géométrie usuels sur papier ou sur un écran d'ordinateur ; elle* [peut] *être obtenue aussi par un assemblage de formes par juxtaposition ou superposition* » (Perrin-Glorian & Mathé & Leclerc, 2013, p. 12). Ainsi, reproduire des figures par assemblage ou par pliage de pièces de papier ou de carton constitue pour nous une pratique de géométrie. Perrin-Glorian considère même que le seul type d'activité de nature géométrique envisageable au CP correspond à des actions matérielles sur des objets matériels.

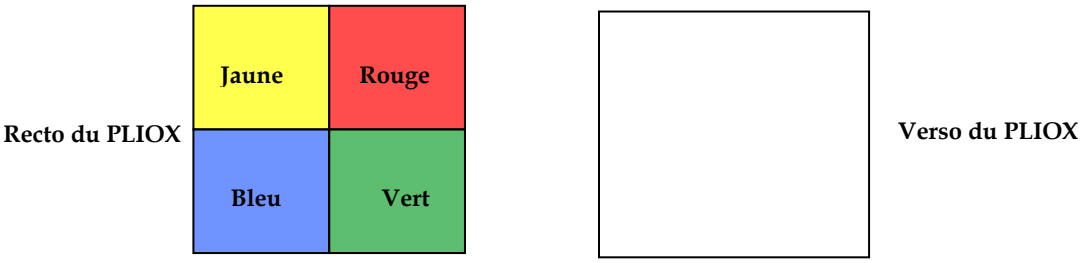
Par conséquent, nous nous sommes intéressés à des activités géométriques mettant en jeu des actions matérielles sur des objets matériels, et plus particulièrement à une activité proposée par (Favrat & al, 2006), à destination des élèves de cycle 2, intitulée « Carrés pliés ». Il s'agit de réaliser des figures colorées par le pliage d'un carré de papier pavé de quatre carrés superposables de couleurs différentes. Le choix de cette activité est lié au fait qu'elle « plaît aux enseignants » qui l'ont essayée dans leur classe suscitant l'adhésion des élèves – engouement confirmé également par l'implication des participants à la communication lors d'une petite mise en activité ! – et qu'elle

permettrait des rencontres géométriques. Or une activité « réussie » du point de vue de l'engagement des élèves n'est pas obligatoirement une activité dans laquelle les élèves apprennent[1]… Par ailleurs, comment faire émerger les concepts de la géométrie euclidienne ainsi que le langage géométrique à partir de ces actions matérielles ?

Le premier cadre théorique choisi dans ce travail est celui de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau) et nous présentons dans un premier temps la situation didactique générique (au sens de Brousseau) que nous nommons situation PLIOX. Puis, à partir du questionnement initial, nous explicitons les cadres théoriques mobilisés, les différents points de la problématique, ainsi que la méthodologie retenue. Nous mettons ensuite en évidence quelques-uns des éléments d'analyse qui nous ont conduits à un scénario didactique en CP/CE1 faisant l'objet de la dernière partie.

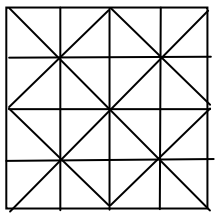
I - LA SITUATION PLIOX

Un PLIOX est un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones disposées comme sur la figure ci-dessous.



Nous avons choisi la dénomination particulière de « PLIOX » pour dissocier la forme géométrique de l'artefact[2] au sens de (Rabardel, 1995). À partir d'un PLIOX il est possible de réaliser différentes formes planes colorées selon un ensemble de pliages autorisés. Ainsi le PLIOX est un artefact qui prend le statut d'instrument dès lors qu'il est demandé de reproduire un modèle en le pliant. On considère alors la situation générique suivante :

Reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX.



Les directions de plis autorisées sur le PLIOX correspondent aux axes de symétrie du carré (ses diagonales et ses médianes), ainsi qu'aux axes de symétrie des carrés que nous appellerons « carrés secondaires », c'est-à-dire des quatre carrés de couleur (leurs diagonales et leurs médianes). Elles sont présentées dans la figure ci-contre. Pour décrire les pliages, on dénommera « diagonale secondaire » (respectivement « médiane secondaire ») toute diagonale (respectivement toute médiane) d'un carré secondaire qui n'est pas confondue avec une diagonale (respectivement une médiane) du PLIOX.

II - CADRES THÉORIQUES, PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Le questionnement initial porte à la fois sur l'intérêt de la situation relativement aux apprentissages géométriques, à sa mise en œuvre et à l'investissement des élèves. Plusieurs cadres théoriques ont donc été convoqués. Ils sont précisés dans ce qui suit.

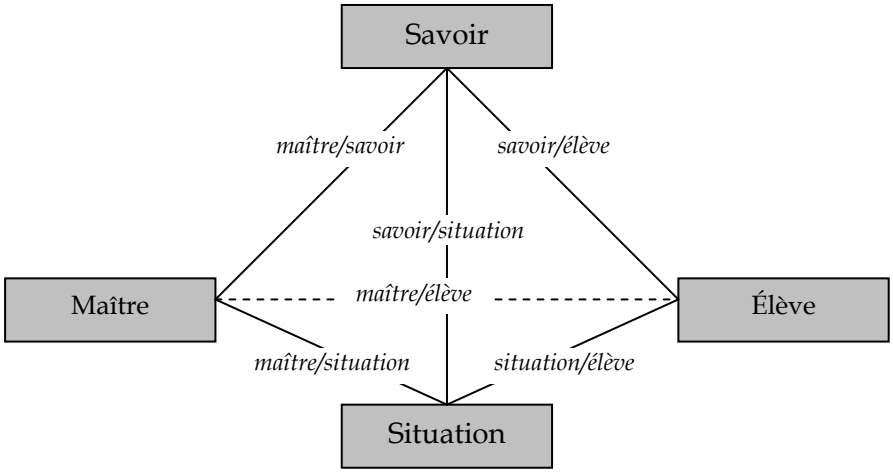
[1] Un exemple de cas emblématique est étudié dans (Margolinas, 2008).

[2] Un artefact est en effet défini comme une « *chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité* » (Houdement & Kuzniak, 2006, p.186)

1 Les cadres théoriques

1.1 La Théorie des Situations Didactiques comme cadre d'analyse

L'utilisation du cadre de la Théorie des Situations Didactiques nous a conduits à une analyse de la situation faisant état des interactions entre le savoir, le professeur et l'élève mais également la situation. En effet, dans la situation didactique de base (représentée par le triangle didactique usuel), l'élève agit en réaction avec un milieu mais l'enseignant se trouve un peu en dehors. Or si le professeur ne fait pas partie du milieu, en revanche il y a réfléchi et le fait fonctionner. Brousseau reprend alors le triangle didactique initial pour schématiser le jeu du maître dans une situation didactique, qui « *définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance* » (Brousseau, 1996, p.113). Reprenant ce travail, (Briand & Chevalier, 1995) identifient les paramètres reliant la situation à l'enseignant, l'élève et le savoir, et les présentent sous la forme d'un schéma reproduit ci-dessous qui constitue le canevas d'analyse retenu pour la situation du PLIOX :



1.2 D'autres éléments de la Théorie des Situations Didactiques

Outre le cadre d'analyse de la situation, nous prenons en compte d'autres éléments de la Théorie des Situations Didactiques.

La notion de situation : « *Brousseau met au cœur de son approche la notion de situation didactique. Une situation didactique* (…) *est une situation dans laquelle se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner.* » (Kuzniak, 2005, p.21). Le terme de *situation* désigne alors l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve et des relations qui l'unissent à son milieu, le milieu désignant ce avec quoi cette personne interagit. Lorsque « *l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » préoccupé par la seule résolution du problème posé* » (Kuzniak, 2005, p.22), Brousseau parle dans ce cas de *situation adidactique.*

La notion de dévolution : la *dévolution* correspond à l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte (et puisse accepter ?) d'agir dans une situation adidactique, en prenant le risque et la responsabilité de ses actes dans des conditions incertaines. La dévolution répond donc aux questions : comment faire pour que l'élève ait envie de résoudre le problème posé ? Comment donner la tâche ? Quel cheminement pour que les élèves rentrent dans la tâche ?

La notion d'institutionnalisation : cette notion modélise le processus par lequel, sous la responsabilité de l'enseignant, cette connaissance va être dépersonnalisée, décontextualisée et explicitement rattachée aux formes officielles du savoir mathématique visées par l'institution. Il s'agit de permettre de passer de la connaissance au savoir scolaire.

1.3 D'autres cadres

La situation PLIOX correspond à un « origami » particulier, et se déroule donc sur le mode concret selon la terminologie employée par (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2004, p.16), c'est-à-dire dans

le monde sensible. Mais le PLIOX – objet 3D – évoque également un objet 2D dont la forme correspond à une figure géométrique et sur lequel apparaissent d'autres figures géométriques. Ainsi, nous pouvons considérer la situation PLIOX selon deux points de vue, spatial et géométrique :

- le point de vue spatial est analysé selon les travaux de Brousseau (1983) et Galvez (1985), repris par (Berthelot & Salin, 1992) ;
- le point de vue géométrique est abordé en identifiant le paradigme géométrique ainsi que l'Espace de travail Géométrique selon les travaux de (Houdement & Kuzniak, 1999, 2000, 2006), mais également en précisant la place de la situation PLIOX dans l'articulation des niveaux de pensée géométrique (travaux de (Van Hiele, 1986) adaptés par (Kuzniak & Rauscher, 2003)).

Dans cette communication, nous ne développons pas ces pistes de travail.

1.4 Un point de vue cognitif et sémiotique

La situation PLIOX consistant à reproduire des figures, nous retenons le point de vue cognitif et sémiotique sur les figures, issu des travaux de Duval.

Les objets mathématiques sont des objets idéaux qui n'existent pas dans la réalité, et qu'il n'est possible d'aborder que par le biais de leurs représentations. La *représentation sémiotique* est le signe, c'est-à-dire le graphique, des mots, voire le geste, d'un objet auquel on n'a pas accès autrement : « *Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement* » (Duval, 1993, p. 39). Un *registre de représentation sémiotique* est un système qui possède trois fonctions : la communication (ou la transmission) ; le traitement, c'est-à-dire la transformation d'une représentation dans ce même registre ; l'objectivation (pour soi) permettant de faire voir les relations qui existent entre les objets concernés. En géométrie, les registres de représentation sémiotique sollicités sont le langage ainsi que les figures et les dessins, à la fois en tant que tracés et que signes représentant un objet géométrique.

De plus, toute figure, en tant que « *tache visible* [sur] *un support matériel homogène (feuille de papier vierge, écran vide, …)* [apparaît comme] *une combinaison de valeurs pour chacune des variations visuelles* » (Duval, 1995) de type dimensionnel et de forme. Ceci conduit Duval à la définition d'*unités figurales élémentaires* dans le plan pour le registre des représentations géométriques, à savoir :

- le point (seule unité figurale de dimension 0) ;
- les lignes et les courbes ouvertes ou fermées (unités figurales de dimension 1) ;
- les surfaces et intersections de lignes, ouvertes ou fermées (unités figurales de dimension 2).

Par ailleurs, une figure géométrique est toujours une configuration d'au moins deux de ces unités figurales élémentaires puisque « *ce sont les relations (parallélisme, symétrie, tangence …) entre les unités figurales élémentaires qui constituent le contenu pertinent d'une figure géométrique* » (Duval, 1995, p.178). Duval souligne en outre que « *les unités figurales discernables dans une figure ne sont pas constantes mais peuvent varier à la fois dimensionnellement et gestaltiquement en fonction du problème à résoudre* » (Duval, 2003, p. 46). Il met en évidence trois niveaux dans l'appréhension des figures géométriques :

- l'appréhension perceptive correspond à « *un premier niveau où s'opère la reconnaissance des différentes unités figurales qui sont discernables dans une figure donnée* » (Duval, 1995 , p.181) ;
- l'appréhension opératoire correspond à un deuxième niveau, elle est centrée sur les modifications figurales d'une figure, et par suite sur les modifications perceptives que ces modifications entraînent ;
- l'appréhension discursive est déterminée par des propriétés données comme hypothèses et peut amener à changer le regard sur la figure.

Concernant l'appréhension opératoire, Duval identifie différents types de modifications figurales. Une première se fait « *en fonction de la relation entre partie et tout* » (Duval, 1988, p.61) et consiste :

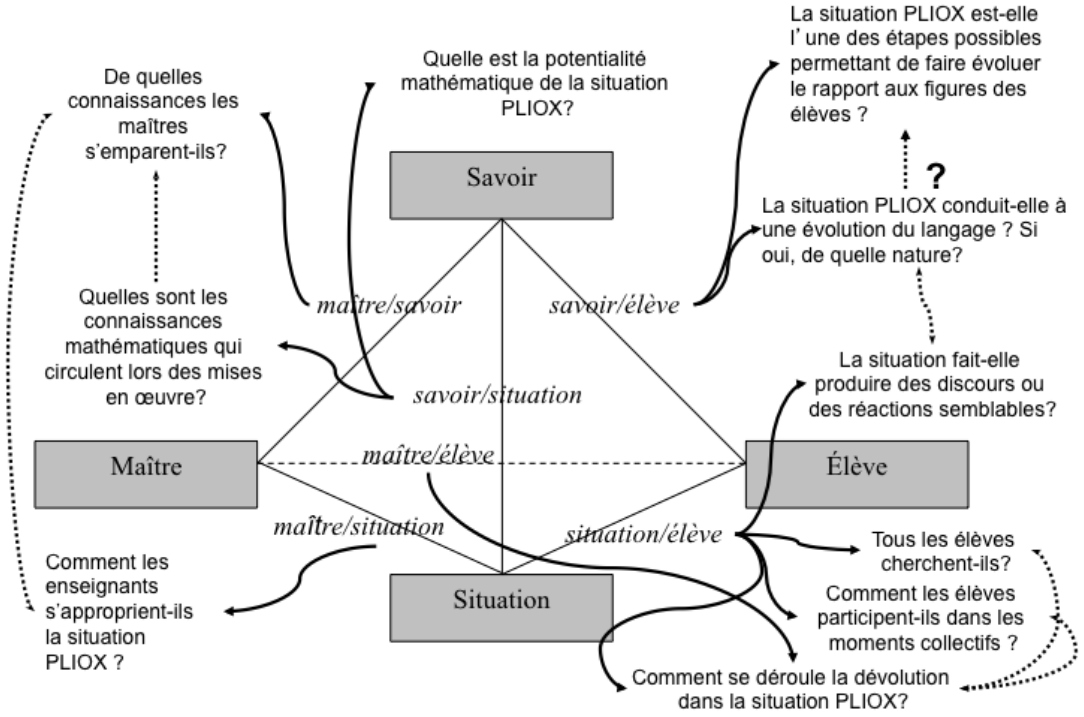
- « *soit* [à*] la partager en plusieurs parties qui sont comme autant de sous-figures* » (Duval, 1988, p.61), on parle de *décomposition méréologique strictement homogène* (décomposition en unités figurales de même forme que la forme de départ), *homogène* (décomposition en unités figurales toutes de même forme, mais différentes de la forme de départ), ou *hétérogène* (décomposition en unités figurales de formes différentes entre elles) ;
- « *soit* [à] *l'inclure dans une autre figure dont elle devient alors une sous-figure* » (Duval, 1988, p.61) ;
- soit « *à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure* » (Duval, 1995, p.184), c'est une *reconfiguration*.

Une seconde consiste à agrandir, à diminuer ou à déformer une figure : il s'agit d'une « *modification optique, elle transforme une figure en une autre appelée son image* » (Duval, 1988, p.62). Une troisième consiste à déplacer ou faire tourner la figure : « *c'est une modification positionnelle, elle ne concerne que l'orientation et la place de la figure dans son environnement (généralement le plan fronto-parallèle)* » (Duval, 1988, p.62).

2 La problématique

L'exposition de la problématique reprend les différentes relations mises en évidence dans le schéma élaboré par (Briand & Chevalier, 1995) et s'appuie sur les cadres théoriques précédemment cités.

Concernant la relation savoir/situation, nous nous interrogeons à la fois sur la potentialité mathématique de la situation PLIOX et sur les connaissances mathématiques qui circulent lors des mises en œuvre. Ceci conduit alors à s'intéresser à la manière dont les enseignants s'approprient la situation PLIOX (relation maître/situation), mais également à identifier parmi les connaissances qui circulent, celles dont les enseignants s'emparent (ce qui donne des informations concernant la relation savoir/situation). Par ailleurs, en regardant du côté de l'élève, nous cherchons à examiner si la situation fait produire des discours ou des réactions semblables, et plus généralement quel est le niveau d'implication des élèves dans les moments de recherche ainsi que dans les moments collectifs (relation situation/élève). Ceci conduit à s'interroger sur le processus de dévolution (relation maître/élève). Enfin, concernant la relation savoir/élève, nous nous demandons si la situation PLIOX est l'une des étapes possibles permettant de faire évoluer le rapport aux figures des élèves, et si une évolution du langage (de nature à définir) permet de la rendre visible. Ces différentes interrogations sont résumées dans le schéma ci-dessous (qui ne se veut pas exhaustif).



3 La méthodologie retenue

Pour répondre à ces différents questionnements, nous avons envisagé deux grands axes de travail :

- un travail théorique, qui débouche également sur un premier scénario didactique ;
- des mises en œuvre dans des classes qui complètent en outre l'analyse théorique et font évoluer ce scénario didactique.

Ainsi nous avons réalisé une analyse mathématique et didactique de la situation, tout en prenant en compte le point de vue cognitif et sémiotique. Ce travail a débouché sur un premier scénario didactique qui a été mis en œuvre dans des classes. Celles-ci ont été filmées puis analysées, conduisant à l'élaboration d'un deuxième scénario didactique. Nous présentons dans ce qui suit quelques éléments d'analyse qui ont principalement découlé des mises en œuvre.

III - QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Les mises en œuvre considérées dans cet article se sont déroulées en période 4 dans deux classes de CP d'une ville moyenne de province. Les enseignants (désignés par M et P) sont des Maîtres Formateurs expérimentés mais ils n'ont plus enseigné la géométrie depuis plus de 10 ans. Dans l'une des classes (celle de P), suite à des problèmes de remplacement, les élèves ont fait très peu de géométrie : la situation PLIOX correspond en fait à leur première séquence sur les figures planes. Les deux séances filmées correspondent aux étapes 2 et 3 du scénario didactique[3].

1 Les élèves dans les mises en œuvre

Nous avons pu constater que **les élèves sont et restent extrêmement motivés par cette activité**, même ceux qui ont du mal à rentrer dans le rythme de la classe. De plus, la **dévolution du problème aux élèves est toujours réussie**. Les indicateurs choisis pour dresser ce cosntat sont les suivants :

[3] On pourra se référer au scénario didactique présenté en dernière partie de cette communication, celui proposé aux enseignants suivait en effet la même trame mais était moins élaboré.

- Le nombre de prises de parole à bon escient (par tranche horaire de 5 minutes) augmente toujours d'une séance à l'autre (voir tableau ci-dessous) ;

Nombre de prises de paroles à bon escient par 5 min	Classe de M	Classe de P
Séance 2	6,7	8,7
Séance 3	7,2	13,3

- Le nombre d'élèves étant intervenus à bon escient rapporté au nombre d'élèves de la classe augmente également (voir tableau ci-dessous) :

Nombre d'élèves ayant pris au moins une fois la parole à bon escient / nombre d'élèves de la classe	Classe de M	Classe de P
Séance 2	14/24	15/25
Séance 3	17/24	21/24

À plusieurs reprises, dans les deux classes, nous avons pu constater que les élèves ayant des difficultés scolaires ne sont pas les moins impliqués : ils cherchent et trouvent quelquefois plus rapidement que certains considérés comme « bons ». On peut enfin souligner que si la réalisation des pliages peut poser des problèmes à des élèves ayant des difficultés de motricité fine, cela ne présume pas qu'ils auront des difficultés à identifier ce qu'il faut faire. On peut donc voir sans faire…

2 Le langage employé

Dans ce paragraphe, nous nous interrogeons sur une éventuelle évolution du langage. Or d'après Perrin-Glorian, « *dans la classe de géométrie, le langage a plusieurs fonctions, au moins : langage pour mener l'activité géométrique elle-même (situation non didactique), langage pour communiquer sur l'activité géométrique (situation didactique)* » (Perrin-Glorian, séminaire M6-15, 13 janvier 2011). Nous nous intéressons ici à la partie didactique en nous inspirant du travail de (Duval, 1995) : nous réalisons une analyse du vocabulaire employé pour désigner les objets de la géométrie.

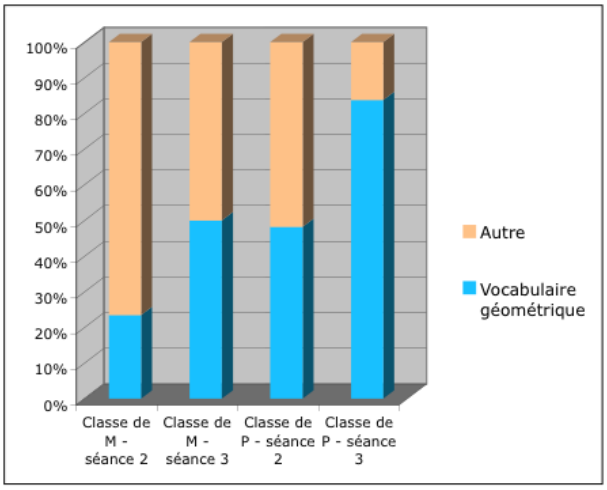
2.1 L'identification des désignations

Dans un premier temps, les différents mots utilisés par les élèves et les enseignants sont identifiés. Pour les figures planes usuelles, les désignations relèvent soit du langage géométrique (triangle, rectangle, carré, losange), soit du langage des couleurs, ou encore des formes (« le carreau »). Pour les différentes droites ou segments, les désignations relèvent soit du langage géométrique (droite, diagonale, médiane, côté), soit du langage courant (ligne, trace) faisant éventuellement référence à l'espace sensible (trait, pli, bord). Pour les points, les désignations relèvent soit du langage géométrique (point, sommet, centre), soit du langage courant en référence à l'espace sensible (« pointe », « coin », « pic »).

2.2 L'évolution du vocabulaire

Pour avoir une idée de l'évolution du vocabulaire dans les classes, nous nous intéressons à la proportion de mots relevant du langage géométrique par rapport à ceux relevant d'autres domaines langagiers et désignant les mêmes objets géométriques chez les élèves des deux classes. Pour ce faire, nous avons dénombré l'occurrence de ces mots dans le texte des transcriptions de chacune des séances, en distinguant ceux employés par l'enseignante et ceux employés par les élèves. Le diagramme ci-dessous illustre l'évolution générale mais pointe également des différences entre les classes :

- dans les deux classes la proportion de mots géométriques évolue positivement ;
- dans la classe de M, la proportion de mots non géométriques est encore importante à l'issue de la séance 2 (alors que cette séquence s'insère dans une progression en géométrie) ;
- bien que les élèves de P n'aient pas eu de séance de géométrie plane avant la séquence PLIOX, le vocabulaire employé lors de la séance 2 de P relève déjà plus souvent du langage géométrique que les élèves de M.



Plus précisément, nous cherchons à savoir si cette évolution positive mais non uniforme du langage dépend de la dimension des éléments figuraux élémentaires. Pour cela, nous considérons la proportion de mots géométriques **employés par les élèves** *en fonction de la dimension des éléments figuraux élémentaires*. Par ailleurs, pour mieux cerner le phénomène, nous croisons ces informations avec le nombre de mots géométriques **employés par l'enseignant**. Ces données sont présentées dans le tableau ci-dessous, les indications entre parenthèses et en italique gras correspondant au vocabulaire du maître.

	Classe de M			**Classe de P**	
	Séance 2	Séance 3		Séance 2	Séance 3
« carreau », désignation de couleur / **carré, triangle, rectangle,…**	39 / **15** / ***(10)***	33 / **28** / ***(56)***		9 / **8** / ***(17)***	7 / **48** / ***(112)***
« pointe », « coin », « pic » / **sommet, centre, point,…**	4 / **0** / ***(0)***	14 / **16** / ***(32)***		0 / **2** / ***(4)***	5 / **26** / ***(60)***
« trait », « pli », « trace », « ligne », « bord » / **diagonale, droite, côté,…**	6 / **0** / ***(0)***	8 / **1** / ***(9)***		5 / **3** / ***(8)***	6 / **19** / ***(33)***

Nous dressons les constats suivants :

- M ne propose pas souvent le vocabulaire idoine, s'exprime souvent avec des termes non géométriques et a tendance à reprendre à son compte ceux des élèves (en général non géométriques). P en revanche désigne systématiquement l'objet géométrique par son nom.
- Dans la classe de M, les mots désignant des droites ou des parties de droite ne sont jamais employés lors de la séance 2 : élèves et enseignant utilisent « trait », « pli » ou « ligne » ; lors de la séance 3 on constate que les élèves continuent à employer ces mots …. Par contre l'emploi de tels mots devient très minoritaire lors de la séance 3 dans la classe de P. L'un des objectifs implicites d'apprentissage de P est en effet l'acquisition d'un premier vocabulaire géométrique, institutionnalisé à la fin de la séance 3.

On peut alors s'étonner de l'apparition de mots géométriques désignant des points dans la classe de M lors de la troisième séance, alors qu'ils n'ont pas été énoncés lors de la séance précédente. Ceci peut être expliqué par le travail parallèle du modulateur en géométrie. Ainsi, si les élèves des deux classes ont à un moment ou à un autre employé du vocabulaire non géométrique, ce phénomène est resté à la marge dans la classe de P – car aussitôt rectifié – alors qu'il a subsisté dans celle de M malgré les séances de géométrie effectives du modulateur. Ceci souligne également le rôle important de l'enseignant lors des phases de formulation.

3 Des connaissances en jeu et/ou en situation

3.1 Les connaissances spatiales

« *Par connaissances spatiales, nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de reconnaître, décrire, fabriquer des objets, de déplacer, trouver, communiquer la position d'objets, de reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement.* » (Berthelot & Salin, 1999-2000, p.38). Dans la situation PLIOX, la consigne de reproduction consiste à obtenir par pliage un objet de l'espace sensible. Les élèves font donc fonctionner des compétences spatiales liées à la position et à l'orientation :

- passage du plan fronto-parallèle au plan horizontal car le modèle à reproduire est placé sur le tableau (plan vertical), alors que le PLIOX des élèves se trouve sur leur table (plan horizontal) ;
- changement d'orientation (rotation d'un quart de tour) dans la classe de P, les tables étant disposées « en U » dans la classe ;
- orientation du PLIOX ;
- positions relatives des sous-figures du modèle ;
- utilisation du vocabulaire : en diagonale, à l'envers, vertical, horizontal, … et à droite, à gauche, en haut, en bas, au milieu, dessus, devant,…

Les compétences spatiales sont induites par la situation (indépendamment de l'enseignant). Elles restent implicites en phase d'action et ne peuvent être rendues explicites que lors des épisodes d'analyse des modèles ou d'explicitation des procédures. Ces moments contribuent à l'emploi du vocabulaire spatial.

3.2 Les connaissances géométriques et le rapport aux figures

La *potentialité* mathématique de la situation PLIOX porte sur la connaissance/reconnaissance d'éléments figuraux élémentaires. Concernant les éléments figuraux 2D, il s'agit de :

- *reconnaissance* du carré, du rectangle, du triangle rectangle isocèle, mais d'autres polygones convexes peuvent être présents (trapèze, pentagone, hexagone) ;
- *propriétés* de ces figures planes : axes de symétrie éventuels, égalité ou pas de longueur des côtés, nombre de côtés, de sommets,… ;
- *relations* entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle ;
- *vocabulaire* de la géométrie : carré, rectangle, triangle, côté, sommet, diagonale, droite, point,…

De plus, les modèles à reproduire sollicitent une appréhension opératoire qui peut conduire à des décompositions méréologiques différentes, voire à des recompositions. Concernant les éléments figuraux 1D, il s'agit de mettre en évidence des côtés de figures particulières (perçus comme les « bords » de ces figures), ainsi que les droites particulières du carré (les deux diagonales et les deux médianes). Les différentes droites font apparaître un réseau de droites très visible sur le verso du PLIOX. Concernant les éléments figuraux 0D, il s'agit d'identifier des sommets, et de mettre en évidence le centre du carré. Les connaissances géométriques en jeu dans la situation PLIOX ainsi précisées, nous mettons en évidence dans le tableau ci-dessous les connaissances qui circulent dans les mises en œuvre, puis celles dont les enseignants s'emparent quelquefois :

Connaissances géométriques…		
… en jeu	**… qui circulent…**	**… et dont les enseignants s'emparent quelquefois**
Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle rectangle isocèle.	Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle.	Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle.
Propriétés de ces figures planes : axes de symétrie égalité de longueur des côtés nombre de côtés nombre de sommets	Propriétés de ces figures planes : égalité de longueur des côtés nombre de côtés nombre de sommets	
Relations entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle	Relations entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle **liées au partage du carré en deux parties**	
Vocabulaire de la géométrie	Vocabulaire de la géométrie	Vocabulaire de la géométrie
Côtés Droites particulières du carré (diagonales, médianes)	Côtés Droites particulières du carré (diagonales, médianes)	Droites particulières du carré (diagonales)
Sommets, centre du carré	Sommets, centre du carré	
	Relations entre les aires de certaines surfaces	

Ces constats sont à relier avec la manière dont les enseignants s'emparent de la situation, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

4 La manière dont les deux enseignants se sont appropriés la situation

A l'issue des mises en œuvre, on constate que M reste beaucoup dans le « faire » et peu dans le « dire », même si ses fiches de préparations indiquent que l'objectif principal est « l'analyse des figures » :

- au début de la séance 2, cet enseignant montre aux élèves le pliage du PLIOX lors de la réalisation du modèle, réduisant l'activité à une reproduction de geste ;
- dans les phases d'action, il explique aux élèves comment s'y prendre ;
- il met en avant les procédures, sans les mettre en mots mathématiques.

Pour P, l'objectif principal de la séquence semble être le vocabulaire, la place de la situation PLIOX dans la progression (première séquence de géométrie dans cette classe) pouvant en être une raison. Mais P a également la mise en recherche des élèves pour objectif.

De plus, ni M ni P n'a proposé de décontextualisation. Les élèves travaillent sur le PLIOX, obtiennent par pliage de carrés et de rectangles, d'autres carrés, rectangles ou triangles mais **aucun des deux enseignants ne met en évidence les relations entre les figures, pas plus qu'ils n'en exhibent des propriétés.** Enfin, il semble que les enjeux d'apprentissage ne sont pas clairement identifiés pour ces enseignants, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'ils n'enseignent plus la géométrie depuis au moins une dizaine d'années. **Ce manque d'identification des enjeux d'apprentissage se traduit alors par une quasi-absence de moments d'institutionnalisation.** Ces enseignants ont finalement offert aux élèves l'occasion de rencontrer le lexique de géométrie, de position et d'orientation et de discriminer quelques formes planes : « *Tout se passe comme si le professeur offrait à l'élève des possibilités de rencontres avec certains objets, sans que les conditions de construction des connaissances et des savoirs relèvent vraiment de sa responsabilité* » (Margolinas & Laparra, 2008). Ce constat met en lumière ce que Margolinas & Laparra ont qualifié de « *dysfonctionnement d'un processus d'enseignement* ». Il est à rapprocher de l'identification de gestes professionnels nécessaires à un fonctionnement approprié de la classe de mathématiques, et

notamment liés à l'analyse *a priori*. En effet Butlen&Masselot&Pézard notent qu'« *une vigilance didactique insuffisante se traduit souvent par un manque d'analyse a priori des tâches induites par les situations proposées, débouchant sur une synthèse et une institutionnalisation faibles, peu explicites (…)* » (Butlen&Masselot&Pézard, 2012, p.260), cette vigilance didactique étant « *davantage liée à une perception des enjeux mathématiques des activités proposées, des procédures à privilégier plutôt qu'à une simple maîtrise des contenus mathématiques* » (Ibid, p.261). Ces remarques débouchent sur une nouvelle question portant sur les conditions de dépassement de la tension entre dévolution et institutionnalisation dans la situation du PLIOX.

IV - CONSÉQUENCES POUR UN SCENARIO DIDACTIQUE EN CP/CE1

La prise en compte des constats précédents nous a conduits à l'élaboration d'un nouveau scénario didactique, mettant en évidence des étapes importantes pour l'enseignant :

- Poser un « vrai » problème géométrique : préparer le modèle (c'est-à-dire réaliser le pliage du PLIOX avant sa présentation à la classe) hors de la vue des élèves pour ne pas réduire l'activité à la reproduction d'un geste.
- Faire analyser le modèle : cette phase de formulation est une étape importante de l'activité car elle incite les élèves à identifier explicitement les formes géométriques quelle que soit leur position, et à les nommer, elle « force » le regard sur les figures et induit des décompositions/recompositions figurales ; elle fournit ainsi l'occasion d'utiliser le vocabulaire géométrique et spatial et peut conduire à la justification de propositions dans le but de convaincre les autres.
- Faire expliciter la procédure : cette deuxième phase de formulation peut aider certains élèves à effectuer la reproduction attendue ; elle porte sur les *gestes* à accomplir dans le micro-espace 3D et permet ainsi de rendre explicite les compétences spatiales ; elle fournit l'occasion aux élèves d'utiliser le vocabulaire spatial et géométrique ; elle peut également conduire à mettre en évidence des relations entre les différentes figures.
- Faire justifier les faits énoncés : une demande de justification des faits énoncés peut contribuer à expliciter des propriétés par leur verbalisation et à décontextualiser.
- Institutionnaliser : lorsque l'enseignant ne dégage pas les connaissances qui circulent, alors cette connaissance ne devient pas objet d'apprentissage : « *lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation* » (Connes, 1992) ; la présentation des phases d'institutionnalisation passe par une mise en évidence, dans le scénario didactique des connaissances mathématiques qui circulent et que l'on peut faire acquérir aux élèves.

Le nouveau scénario, présenté dans ce qui suit, se déroule selon une progression établie en fonction du nombre de pliages à réaliser au minimum.

Etape 1 : Introduction du PLIOX dans la classe

But : fabrication d'un objet technique (c'est-à-dire dont la finalité est d'assurer un service de caractère pratique, utilitaire).

Tâche des élèves : reproduire le modèle sur la feuille distribuée, en suivant les instructions de l'enseignant pour les pliages, puis colorier en situant les zones colorées les unes par rapport aux autres.

Objectifs de l'enseignant : au niveau des connaissances, il s'agit de rappeler le premier vocabulaire géométrique (carré, rectangle, côté), de position (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de) ou d'orientation (à droite, à gauche, en haut, en bas). De plus, cette séance amorce le travail sur la tâche d'analyse d'une figure en rendant explicite le fait que la figure externe du PLIOX est un

carré et que le PLIOX est partagé en quatre zones carrées monochromes (figures internes). Enfin, concernant l'activité elle-même, il s'agit d'introduire le pliage comme modalité de reproduction utilisée, et plus particulièrement de mettre en évidence le pliage bord sur bord.

Déroulement : Temps 1 (collectif) – Présentation du PLIOX
Temps 2 (travail individuel) – Pliages
Temps 3 (travail individuel) – Coloriage

Analyse *a priori* : cette étape correspond à une *phase d'appropriation du matériel* (le PLIOX est un carré partagé en quatre zones carrées des couleurs différentes). Elle se décompose en un temps collectif de formulation correspondant à la découverte du PLIOX, suivie de deux temps d'action :

- Dans le temps 1, il s'agit de permettre une première analyse de la figure en vue de sa reproduction. Les couleurs des carrés secondaires sont évoquées. À cette occasion, un premier vocabulaire géométrique peut apparaître (carré, côté), de même que celui lié aux positions relatives des différentes figures internes (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de, en haut de, en bas de).
- Le temps 2 correspond à la réalisation de deux pliages bord sur bord. Après le premier pliage, un nouvel objet géométrique, le rectangle, apparaît.
- Le temps 3 nécessite que les élèves situent les zones colorées les unes par rapport aux autres (compétences spatiales).

À l'issue de chaque temps d'action, la validation est de deux sortes : auto-validation par confrontation visuelle au modèle et validation par le maître.

Les pliages bord sur bord que les élèves sont amenés à effectuer sur le carré blanc lors de la fabrication de leur PLIOX font apparaître sous forme de plis (éléments figuraux 1D) deux axes de symétrie correspondant aux deux médianes du carré : ces deux droites n'apparaissent donc pas uniquement comme les bords non détachables des carrés secondaires (première loi d'organisation et de reconnaissance perceptive). Le centre du support carré correspond d'abord à l'intersection des deux plis ; après coloriage, il correspond à un sommet commun aux quatre carrés secondaires.

Étape 2 : reproduction d'un premier modèle par pliage

Tâche des élèves : reproduire le modèle par pliage de son PLIOX

Déroulement : Temps 1 (collectif) – Présentation et première analyse du modèle
Temps 2 (travail individuel) – Recherche
Temps 3 (collectif) – Explicitation de procédure, invalidation éventuelle de productions
Temps 4 (collectif) – Conclusion portant sur les relations entre le carré et le rectangle
Temps 5 (collectif) – Institutionnalisation « locale » portant sur le vocabulaire rencontré (carré, rectangle, côté)

Le modèle reste visible mais à distance des élèves pendant la durée de l'activité.

Analyse *a priori* : cette étape organise la première confrontation à un problème de reproduction de figure par pliage du PLIOX. Pour le maître, il s'agit de s'assurer de la bonne compréhension de la consigne et de ce type de problème. Il s'agit donc d'une phase de dévolution du problème. Le modèle est choisi de façon à ce que les élèves puissent résoudre facilement le problème : il nécessite un seul pliage, il est composé de deux grands carrés monochromes mis en évidence par coloriage dans l'étape précédente, le pli nécessaire à la reproduction du modèle correspond à une médiane précédemment marquée. L'étape s'organise en plusieurs temps :

- Le temps 1 est une phase de formulation. Les élèves sont incités à l'analyse de la figure, ce qui servira dans la suite de cette étape. A minima, il s'agit d'identifier à la fois la figure externe (un rectangle) ainsi que les deux carrés secondaires (le carré jaune et le carré rouge). Pour qu'il y ait problème géométrique, la préparation du modèle (c'est-à-

dire la réalisation du pliage du PLIOX par l'enseignant avant sa présentation à la classe) est cachée aux élèves. De plus, le nombre de pliages nécessaires pour réaliser la figure n'est pas indiqué par la consigne.

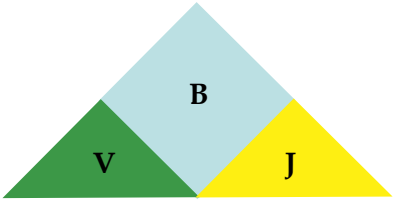
- Le temps 2 correspond à une phase d'action. La validation est perceptive par comparaison visuelle entre le modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué ; il est même possible pour les élèves de venir juxtaposer leur production et le modèle, par exemple pour comparer les longueurs des côtés : le milieu fournit une rétroaction immédiate.
- Le temps 3 est une nouvelle phase de formulation. La validation de cette explication est double : sur le fond par la réalisation effective du pliage en parallèle au discours, et sur la forme par l'enseignant, qui veille à employer le vocabulaire géométrique et spatial idoine tout au long de cette situation.
- Le modèle 1 met en évidence une première relation entre le carré et le rectangle : le partage en deux parties du carré conduit à un rectangle. La conclusion (temps 4) peut alors porter sur les modalités de pliage ainsi que sur le fait que le partage en deux parties du PLIOX conduit à deux rectangles. Pour illustrer cette dernière remarque, il est possible de plier et déplier son PLIOX selon une médiane.

Aucun travail papier/crayon n'est exigé, aucun instrument classique de géométrie n'est utilisé, seuls les pliages sont convoqués. L'activité est alors centrée sur l'analyse de la figure pour sa reproduction, et non pas sur le tracé. L'analyse du modèle, préalable à sa reproduction, implique la prise en compte à la fois de sa forme (figure externe) et de la décomposition méréologique induite par son découpage en éléments figuraux 2D monochromes. Ceci conduit les élèves à identifier à la fois la figure externe du modèle, ses sous-figures monochromes (figures internes) ainsi que l'organisation spatiale relative de ces éléments figuraux.

La nécessité de verbaliser ce que l'on voit et d'expliquer sa procédure conduit à faire fonctionner un vocabulaire précis. Les interventions peuvent se référer à différents domaines langagiers : celui des couleurs (éléments les plus visibles dans le modèle), au vocabulaire géométrique (notamment carré, rectangle, côté, sommet) par identification du rectangle et des carrés ou dénombrement des sommets ou des côtés, et vocabulaire spatial (orientation ou position).

Étape 3 : reproduction d'autres modèles avec un pliage

Le même déroulement est conservé. Cependant lors du temps d'analyse, l'identification des formes fait l'objet d'une demande de justification. Les modèles, bien qu'ils nécessitent un seul pliage, apparaissent plus compliqués que celui de l'étape 2, puisque qu'à chaque fois le pliage solution se réalise à partir d'un pli qui reste à déterminer.



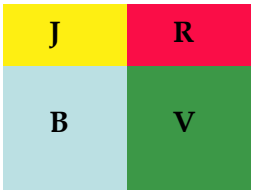
Analyse du premier modèle : Le modèle ci-contre nécessite un seul pliage dont le pli n'est pas encore marqué sur le PLIOX. Ce nouveau pli se réalise selon la diagonale du PLIOX. Il correspond à un axe de symétrie de la figure externe du PLIOX, mais également à un axe de symétrie de deux figures internes du PLIOX : le carré vert et le carré jaune. La présentation de ce modèle implique un changement d'orientation, *a priori* relativement aisé à dépasser pour les élèves grâce à un changement d'orientation de leur PLIOX.

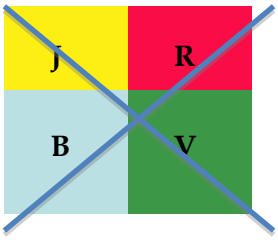
Le temps collectif d'analyse préalable du modèle permet de souligner la présence du carré bleu, éventuellement en jouant avec le changement d'orientation, et d'une nouvelle figure géométrique en deux exemplaires : le triangle.

La réalisation de ce modèle met en évidence une relation particulière entre le carré et le triangle : un carré partagé en deux peut donner un triangle.

La mise en commun est l'occasion de revenir sur la technique de pliage bord sur bord en ajustant les deux sommets opposés l'un sur l'autre. La mise en commun se conclut en soulignant la création d'un nouveau pli sur le PLIOX partageant celui-ci en deux parties superposables : une diagonale.

Analyse du deuxième modèle : bien que le modèle nécessite un seul pliage, il existe plusieurs difficultés : le pli n'apparaît pas sur le PLIOX, il ne correspond pas à un axe de symétrie du carré, mais à celui de deux carrés secondaires (jaune et rouge), autrement dit à la médiane du rectangle formé par ces deux carrés secondaires, le modèle est « ambigu » puisque le choix de plis différents mais parallèles aux directions de plis privilégiées, conduit à une figure «ressemblant» au modèle, mais qui ne lui est pas isométriquement équivalente, comme celle présentée ci-dessus.

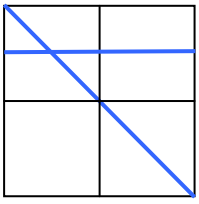




Le temps collectif d'analyse préalable permet d'identifier et de nommer les figures internes (les deux carrés secondaires et les deux rectangles) ainsi que leurs positions relatives. La demande de justification des figures identifiées peut conduire à mettre en évidence leur nombre de côtés et de sommets et permet de souligner les points communs et les différences qui existent entre le carré et le rectangle : ils ont tous deux quatre côtés et quatre sommets, mais dans le rectangle tous les côtés n'ont pas la même longueur. On pourra également remarquer que parmi les différents rectangles qui apparaissent dans ce modèle certains ne sont pas des moitiés de carrés.

La mise en commun peut conduire à mettre en avant les relations qui existent entre les dimensions des rectangles rouge et jaune et des carrés secondaires correspondants. Elle permet également d'expliciter le pliage correct comme un pliage bord sur bord des carrés secondaires rouge et jaune. Ce nouveau pliage fait apparaître un nouveau pli, c'est-à-dire un nouvel élément figural 1D : une médiane secondaire, parallèle à la médiane.

L'institutionnalisation locale peut reprendre les différents points abordés tout au long de l'activité : objets géométriques, propriétés et relations mises en évidence. Elle peut porter sur les relations entre le carré, le rectangle et le triangle. En effet, le premier modèle correspond à la construction d'un triangle à partir du partage d'un carré. On peut donc mettre en évidence qu'un carré partagé en deux parties peut donner deux triangles rectangles isocèles. De plus la réalisation des deux modèles a fait apparaître de nouvelles sous-figures monochromes à l'intérieur du PLIOX : deux triangles rectangles isocèles à l'intérieur des carrés secondaires vert et jaune pour le premier modèle, deux rectangles à l'intérieur des carrés secondaires rouge et jaune pour le deuxième modèle. On peut également souligner que, dans le cas général deux triangles isocèles rectangles peuvent donner un carré, et deux rectangles peuvent donner un carré.

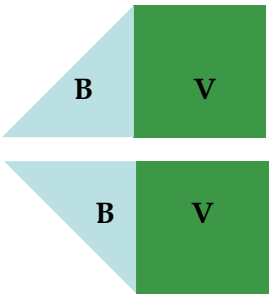


À l'issue de cette étape, le PLIOX porte les marques de plusieurs éléments figuraux 1D : les deux médianes du PLIOX déjà réalisées lors de l'étape 1 ainsi qu'une diagonale et une médiane secondaire (en gras sur le schéma ci-contre). Le verso du PLIOX permet de visualiser les différentes droites ainsi créées depuis le début de la séquence.

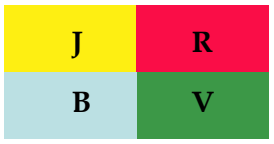
Étape 4 : reproduction de nouveaux modèles à deux pliages

Cette étape est analogue à la précédente : elle comporte une alternance de phases d'action et de formulation. L'analyse du déroulement général est donc identique. Toutefois les modèles à reproduire nécessitent au minimum deux pliages. Ils sont choisis selon une difficulté croissante explicitée dans ce qui suit.

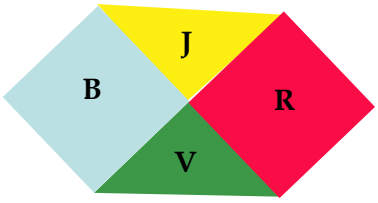
Le premier modèle est choisi pour permettre une reprise de l'activité de l'étape précédente, tout en proposant un nombre plus important de pliages. Il est constitué par le carré secondaire mis en évidence par sa couleur, il n'est donc pas ambigu. Les plis conduisant à la solution sont également présents dès l'étape 1 puisqu'ils ont servi à la réalisation du PLIOX. De plus, l'ordre des deux pliages nécessaires est indifférent.



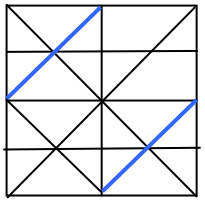
Les deux modèles suivants ne sont pas ambigus. Leurs figures externes correspondent à des trapèzes, ce qui donne l'occasion aux élèves de rencontrer des quadrilatères autres que des carrés ou des rectangles. Le dénombrement des côtés ou des sommets de ces modèles peut permettre de souligner les points communs avec ceux-ci. Ces modèles sont symétriques l'un de l'autre (donc superposables, mais non identiques) et peuvent être proposés simultanément. Avec eux, les élèves se rendent compte que des figures peuvent être très ressemblantes, c'est-à-dire avoir la même figure externe (ici, un trapèze), les mêmes figures internes (un triangle et un carré secondaire) sans être identiques : le rôle de l'orientation des figures internes est ici mis en évidence. Les plis ne sont pas marqués à l'issue des étapes précédentes, ce qui rend la reproduction plus difficile. Deux procédures sont envisageables pour obtenir chacun de ces modèles : réaliser un premier pliage selon une médiatrice, puis un deuxième selon l'une des diagonales du carré bleu ou plier selon l'une des diagonales du PLIOX puis réaliser un pliage selon une médiane. La mise en commun est l'occasion de souligner ressemblances et différences tant au niveau des figures qu'au niveau des procédures. Ces modèles conduisent à mettre en évidence des relations entre le carré et le rectangle, et plus précisément : un carré partagé en deux peut donner un rectangle, et un rectangle partagé en deux peut donner un carré.



La réalisation du troisième modèle fait appel à un premier pliage sur un pli existant depuis l'étape 3 (on retrouve le deuxième modèle de l'étape 3 si l'on choisit de commencer par ce pli), et à un deuxième pli selon une médiane secondaire que les élèves doivent déterminer. Ce modèle est donc « ambigu ». L'inversion des deux pliages n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont ainsi possibles. On peut remarquer qu'en retournant le support, on obtient également un rectangle quadricolore. Les deux figures obtenues sont très ressemblantes mais pas identiques car leur disposition est différente : le verso est comme « inversé». Les élèves s'aperçoivent aussi que pendant la réalisation, il vaut mieux contrôler l'agencement des couleurs, sinon gare aux erreurs d'orientation à la fin ! La réalisation de ce modèle met de nouveau en évidence les relations entre le carré et le rectangle : les carrés secondaires partagés en deux donnent des rectangles ; deux de ces rectangles peuvent former soit un carré bicolore, soit un rectangle bicolore ; les quatre rectangles forment un grand rectangle.



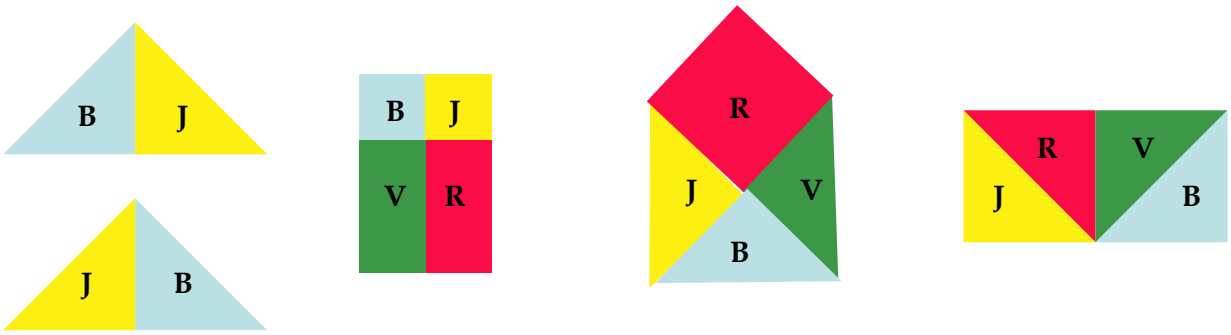
Lorsque le dernier modèle est présenté, les deux carrés sont en situation non prototypique, ce qui risque de générer des difficultés dans leur identification : l'enseignant peut alors jouer sur la mobilité du PLIOX pour les faire identifier. La réalisation du modèle nécessite de plus un changement d'orientation. La figure externe du modèle est un hexagone non régulier : l'existence de polygones convexes à plus de 4 côtés est alors soulignée. L'ordre de pliage n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont alors envisageables. La reproduction du modèle conduit à la création de deux nouveaux plis (des diagonales des carrés secondaires jaune et vert). Ainsi à l'issue de cette activité, neuf plis sont marqués sur le PLIOX. Ils sont donnés ci-contre.



À l'issue de cette étape, l'institutionnalisation peut par exemple porter sur les droites particulières du carré.

Étape 5 : reproduction de modèles nécessitant trois pliages ou plus

Cette étape est un approfondissement des précédentes : les reproductions nécessitent maintenant trois pliages consécutifs au moins. Les modèles suivants peuvent être proposés aux élèves :



Les deux premiers sont les plus faciles à réaliser car leur reproduction ne nécessite pas l'utilisation d'un nouveau pliage, la figure externe correspond à une figure connue, le triangle, les deux figures internes également triangles sont rapidement obtenues à partir des carrés monochromes. De plus il existe une procédure économique en trois pliages : le premier selon la médiane ; les deux autres selon une diagonale et une diagonale secondaire. On obtient alors un modèle au recto et l'autre au verso. La reproduction de ces modèles s'appuie sur le fait que le partage d'un carré en deux parties peut donner un triangle.

Les figures externes et internes du troisième modèle sont encore familières et dans des positions prototypiques ; en revanche un nouveau pliage selon une médiane s'avère nécessaire. De plus, ce modèle est ambigu.

Par contre le pentagone n'est pas une figure familière aux élèves. De plus, le carré rouge est en position non prototypique, ce qui peut rendre son identification plus délicate. En revanche, tous les plis nécessaires sont marqués.

Enfin le dernier modèle est le plus difficile car il nécessite tout d'abord un nouveau pliage selon une diagonale secondaire, et ensuite un pliage « par-devant » le PLIOX.

Lors de la phase de conclusion, on peut par exemple mettre en évidence que :

- la réunion de deux triangles peut donner un triangle et qu'un triangle partagé en deux peut donner deux triangles (d'après les deux premiers modèles) ;
- la réunion de deux rectangles peut donner un carré et la réunion de deux carrés peut donner un rectangle (d'après le deuxième modèle) ;
- la réunion de quatre triangles peut donner un rectangle (d'après le dernier modèle).

Il est envisageable de prolonger la séquence en proposant des reproductions d'autres modèles en guise de « gymnastique » géométrique, non plus sur des séances complètes mais à l'occasion de brefs moments (10 à 15 minutes). Certains de ces modèles peuvent être proposés par le maître, d'autres par des élèves. Certains modèles peuvent même nécessiter quatre pliages...

D'autres pistes…

Dans le scénario didactique, le réseau de droites qui apparaît sur le verso du PLIOX n'est pas vraiment mis à profit. Il serait en effet possible de s'appuyer sur l'identification des sous-figures colorées pour les faire apparaître au verso. Il est ainsi envisageable que le jeu sur le recto/verso du PLIOX permette de développer la capacité à identifier toutes les formes qu'il est possible de reconnaître dans ce réseau de droites. Selon Houdement, cette capacité doit être travaillée en parallèle de la déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement prégnantes. Ce nouveau développement de la situation PLIOX pourrait alors s'intégrer dans le travail de Duval & Godin & Perrin-Glorian qui cherchent à développer des situations pour apprendre à regarder les figures.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse. Université Bordeaux 1.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1999-2000) L'enseignement de l'espace à l'école primaire, *Grand N*, **62**, 37-59, Université Bordeaux 1.

BRIAND J. & CHEVALIER M-C. G (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : Hatier pédagogie.

BROUSSEAU G. (1996) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, 45-143, in *Didactique des mathématiques* (BRUN J. dir.), Delachaux et Niestlé.

CHARLES-PEZARD M. , BUTLEN D.& MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La pensée sauvage.

CONNE F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *RDM*, **12(2/3)**, 221-270.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **1**, 57-74, Irem de Strasbourg.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5**, 37-65, Irem de Strasbourg.

DUVAL R. (1995) Figures géométriques et discours mathématique, 173-207, in *Sémiosis et pensée humaine*, Grenoble : La pensée sauvage.

DUVAL R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **8**, 13-62, Irem de Strasbourg.

DUVAL R., GODIN M. & PERRIN-GLORIAN M-J. (2004) Reproduction de figures à l'école élémentaire, 6-89, in *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Irem Paris.

FAVRAT J-F. & ALII (2006) Problèmes et activités finalisées dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, in *Actes du XXXIIème colloque COPIRELEM Strasbourg 2005*, Irem de Strasbourg.

GUILLE-BIEL WINDER C. (2013), *Reproduction de figures en CP/CE1 : la situation du PLIOX*, Mémoire de Master, Irem de Paris 7.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x*, **51**, 5-22, Irem de Grenoble.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *RDM*, **11**, 89-116. Grenoble : La pensée sauvage.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175-193, Irem de Strasbourg.

KUZNIAK A. & RAUSCHER J-C. (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, 271-290, in *Actes du XXIXème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, IREM des Pays de la Loire.

KUZNIAK A. (2005). La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, *Repères IREM*, **20(1)**, 19-35.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation, in *Actes du colloque "Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation " Bordeaux 2008*. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf .

PERRIN-GLORIAN M-J., MATHÉ A-C. & LECLERC R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, **90**, 5-41.

ANALYSE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION EN GÉOMÉTRIE PLANE POUR LES FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES AUTOUR DE PLIAGES ET DE CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Equipe PESSOA, Département de Sciences humaines et sociales
Université Catholique de l'Ouest - Membre du PRES L'UNAM
jore@uco.fr

Résumé
La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec des M1 qui se destinent au professorat des écoles de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les **utilisant** pour effectuer un pliage ou une construction, d'entrer dans une démarche de démonstration avec des hypothèses non pas imposées par un énoncé mais tirées de la construction, par le passage obligé de l'utilisation d'un vocabulaire géométrique précis et rigoureux. Ce type d'activité permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

Cette communication s'inscrit dans le cadre d'un échange de pratiques. Assurant la formation des PE1, maintenant M1, depuis longtemps, nous avons expérimenté de nombreuses situations permettant de travailler la géométrie plane. Il s'agit ici d'en proposer deux qui nous apparaissent intéressantes dans le cadre de la formation actuelle du master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation pour des étudiants qui se préparent au concours de professeur des écoles.

I - CADRE THÉORIQUE

Quatre concepts clés de didactique sous-tendent ce travail.

1 Le concept d'outil et d'objet de R. Douady

Rappelons la définition que Régine Douady en donne dans [Douady, 1992, p. 134]

> *« Ainsi, nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné. […]*
>
> *Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. »*

L'objectif des situations présentées aux étudiants est que les propriétés mathématiques soient tout d'abord investies par les étudiants sous leur aspect outil. Il ne s'agit pas de faire réciter les propriétés mais de faire en sorte que les étudiants soient contraints de les **utiliser** pour accomplir les tâches qui leur sont proposées.

2 Connaissances disponibles et mobilisables d'A. Robert

Robert [1995, p. 12] définit ainsi connaissances mobilisables et connaissances disponibles :

> *« Nous distinguons pour les élèves :*

- *le fait d'utiliser des connaissances indiquées ;*
- *le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.*

Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables.

Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel. »

De nombreux théorèmes de géométrie plane sont effectivement mobilisables par nos étudiants. Ils les ont plus ou moins bien mémorisés mais la plupart d'entre eux sont capables de les utiliser si on le leur demande. Quand il s'agit de les choisir de leur propre initiative pour résoudre un problème, cela est beaucoup plus difficile. Or avoir des compétences en mathématiques, c'est disposer de connaissances et être capable de les utiliser de manière autonome, sans indication particulière. Autrement dit, avoir des compétences en mathématiques, c'est selon nous disposer de connaissances disponibles, stockées dans la mémoire à long terme, et disposer de procédures pour repérer parmi les connaissances disponibles celles qui sont susceptibles d'être pertinentes dans une situation donnée. Nous essayons donc, dans la mesure du possible, de limiter dans les consignes les indices qui donnent aux étudiants une piste sur les propriétés pouvant être utilisées. Souvent, plusieurs procédures peuvent être utilisées, qui mettent en œuvre des propriétés différentes.

3 Stratégies d'homologie de C. Houdement et M.-L. Peltier

« Par les stratégies d'homologie, le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, [...] ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves. »[Houdement et Peltier, 2002, p. 78]

Dans le cadre du cours de didactique de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous développons l'idée des textes officiels de faire travailler les élèves par problèmes[1]. Il s'agit donc, dans les séances de mathématiques, de mettre les étudiants eux-mêmes dans des activités de résolution de problèmes. En parallèle d'une institutionnalisation des connaissances mathématiques exploitées dans la tâche proposée, une explicitation des choix didactiques effectués dans la mise en œuvre de l'activité est également faite. Elle sera peu présentée ici.

4 Les paradigmes géométriques de B. Parzysz.

Il serait un peu long ici de détailler les différents types de géométrie que Houdement et Kuzniak [2006], puis Parzysz [2002], ont développés. On pourra lire utilement [Houdement & Kuzniak, 2006], [Parzysz, 2002] ou [Jore, 2008] pour plus de détails. Nous précisons simplement, à la suite de Parzysz [2002], que dans la géométrie spatio-graphique (notée G1), les objets géométriques sur lesquels on travaille sont physiques, les validations utilisées sont perceptives, qu'elles soient ou non instrumentées, le dessin ou le pliage effectué est l'objet d'étude. C'est le paradigme dans lequel l'élève se situe le plus souvent à l'école élémentaire. Dans la géométrie proto-axiomatique (notée G2), les objets sont théoriques, définis par un texte et/ou un codage sur un dessin à main levée, les validations relèvent du raisonnement hypothético-déductif et le dessin ou le pliage effectué n'est qu'un représentant de l'objet mathématique auquel on s'intéresse. C'est le paradigme dans lequel on attend le plus souvent que l'élève se situe au collège, ou l'étudiant dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles.

Les contraintes des activités proposées en formation doivent permettre petit à petit aux étudiants de prendre conscience de ces deux paradigmes et de les aider à se situer le plus possible dans G2.

[1] « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. » BO 19 juin 2008, page 38.

II - LE CONTEXTE DE LA FORMATION

Plusieurs aspects spécifiques du public d'étudiants concernés et de la formation dans laquelle s'inscrivent les séances développées ici méritent d'être explicités.

1 L'épreuve de mathématiques du CRPE et le temps de formation

Le nouveau concours de professeur des écoles[2] remet en place une épreuve qui fait appel à des compétences disciplinaires et didactiques. Dans le problème de la partie 1, notamment, les étudiants peuvent être amenés à effectuer des démonstrations de géométrie plane, telles qu'on peut les faire au collège, comme en témoigne le premier sujet zéro[3] proposé pour la session 2014 par exemple. Cela nécessite entre autres de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne. Nous observons que ces théorèmes sont peu mobilisables, voire parfois non disponibles, et souvent non opérationnels pour les M1. Ils peuvent être également amenés à effectuer des constructions à la règle et au compas ou à rédiger des programmes de constructions. Ainsi, l'objet du concours est bien, entre autres, d'évaluer certaines compétences disciplinaires. Par ailleurs, indépendamment de cette épreuve, « rédiger un programme de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants.

Or le temps de formation est limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour mettre en place toutes ces compétences. La situation que nous proposons sur les constructions à la règle et au compas va permettre de travailler simultanément ces différentes compétences disciplinaires.

Les deuxièmes et troisièmes parties de l'épreuve du concours vont, elles, faire appel aux compétences pédagogiques et didactiques des candidats. Cet aspect est donc à développer pendant la formation de master première année, le concours se situant en fin de cette première année. Nous utilisons pour cela des situations d'homologie, afin de développer simultanément des compétences mathématiques (ici, sur des propriétés de géométrie plane) et des compétences didactiques (ici autour de l'intérêt de travailler avec les élèves par situations problèmes, de l'aspect outil des concepts mathématiques et de l'utilisation en situation du vocabulaire géométrique).

2 La population des étudiants de Master de professorat des écoles

Dans leur grande majorité, les candidats à l'enseignement pour le premier degré n'ont pas fait d'études supérieures en mathématiques et ne possèdent pas de baccalauréat scientifique. Ils sont souvent en difficulté en mathématiques, à la fois sur le plan intellectuel mais aussi sur le plan affectif ou émotionnel. Il s'agit donc de leur proposer des activités différentes de celles qui les ont fait « souffrir » au collège pour les réconcilier avec les mathématiques. Cependant, certains étudiants ont un bagage mathématique sérieux et savent résoudre sans difficultés les problèmes de collège. On peut donc craindre pour eux un certain désintérêt pour les séances de mathématiques. Il s'agit donc de leur proposer des situations nouvelles, qui leur permettent également de réfléchir. La situation sur les pliages que nous proposons a pour objectif de répondre à ces deux contraintes.

III - PLIAGES

Un premier travail autour des pliages est proposé aux M1 en début de formation en géométrie.

1 Les objectifs de l'activité

L'idée d'utiliser les pliages pour développer des capacités et des connaissances en géométrie n'est pas nouvelle. Dans son ouvrage « Questions sur la géométrie et son enseignement » notamment, François Boule [2001] propose des activités autour des pliages à mettre en œuvre à l'école

[2] Le lecteur trouvera tous les textes définissant les nouvelles épreuves sur : http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html

[3] Disponible sur : http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/7/s0_crpe_math_260597.pdf

élémentaire. Ces idées sont reprises ici et adaptées à la formation des M1. Les objectifs de cette activité sont multiples :

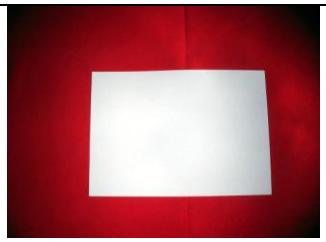
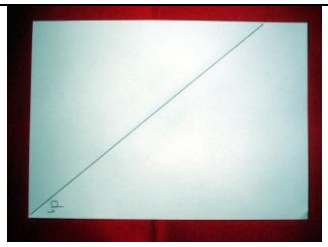
- permettre aux M1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, …).
- Proposer une tâche qui n'est pas routinisée et qui donc oblige les étudiants à réfléchir. La solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée ; ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche.
- Faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais de les utiliser comme outil pour effectuer la construction demandée.
- Donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de s'investir dans une activité de démonstration sous une forme nouvelle qui ne les rebuterait pas.
- Mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé, qui les oblige à réfléchir. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

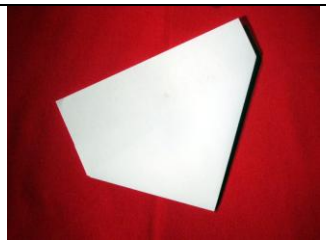
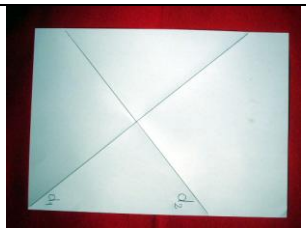
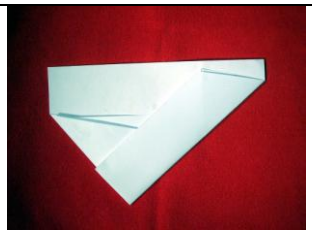
2 Construction de triangles

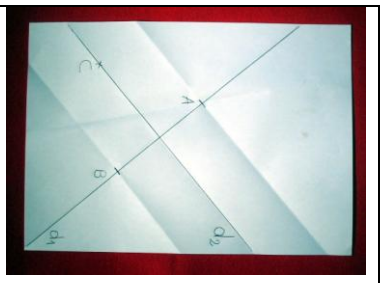
La première consigne proposée est ainsi la suivante : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle. »

Ces deux constructions n'ont pour but que de s'approprier la consigne et le fonctionnement de cette activité. Elle est souvent effectuée avec les étudiants. C'est l'occasion de préciser que l'on ne se sert pas des bords de la feuille, que l'on a le droit de repérer un pli avec un crayon, etc. Elle est réalisée sans difficultés par tous les étudiants. Il leur est ensuite demandé de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément est alors ajouté : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ».

Une démarche possible est la suivante :

		
Prendre une feuille	Plier en deux	On obtient une droite d_1

		
Plier à nouveau en deux afin d'obtenir une perpendiculaire à d_1	La droite d_2 est perpendiculaire à d_1	Replier à nouveau de sorte de déterminer deux points sur d_1 équidistants de d_2

		
A et B sont deux points de d_1 équidistants de d_2	Plier en A de sorte d'amener B sur d_2	On a ainsi déterminé sur d_2 un point C équidistant de A et B

Cette construction diffère légèrement de celle proposée dans [Boule, 2001], en particulier parce qu'elle n'utilise par les bords de la feuille. La propriété sous-jacente à la construction est que la médiatrice (obtenue comme droite perpendiculaire au côté et passant par son milieu) doit être une hauteur, tandis que Boule travaille sur la médiane. L'essentiel est que la définition habituelle seule du triangle équilatéral (triangle avec des côtés isométriques) ne suffit pas pour effectuer la construction par pliage. Dans la construction proposée ci-dessus, la propriété mise en acte est :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ C \text{ est sur la médiatrice de } [A,B] \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \text{ est un triangle équilatéral}$$

Cette propriété est ainsi un **outil** pour accomplir la tâche.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants : « Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle ». Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60 : il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral.

3 D'autres pliages

D'autres pliages sont proposés, en fonction du temps qu'il reste dans la séance : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, etc. Chacune des constructions permet de travailler un aspect particulier des compétences géométriques disciplinaires.

La construction d'un rectangle permet de mettre l'accent sur le fait qu'il suffit d'effectuer successivement trois perpendiculaires. On peut alors conjecturer qu'un quadrilatère avec trois angles droits est un rectangle. La propriété pourra alors être ou non démontrée.

La construction du carré fait souvent apparaître plusieurs constructions, qui reposent sur des propriétés caractéristiques différentes du carré. Il est alors intéressant de les expliciter : quadrilatère avec trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur ; quadrilatère avec deux angles droits successifs et trois côtés de même longueurs ; …

Le rectangle a permis d'obtenir des droites parallèles. Le parallélogramme va amener à réinvestir cette construction. Une fois que deux parallèles vont être construites, il va falloir choisir arbitrairement une autre direction pour les autres côtés et appliquer de nouveau la procédure qui permet d'obtenir des parallèles. Cela semble simple mais en réalité, il y a là une difficulté pour bon nombre d'étudiants. En effet, à ce moment-là, il y a de multiples plis sur la feuille et il faut vraiment s'organiser et avoir en tête la propriété que l'on veut utiliser pour réussir à effectuer la construction. On peut la détailler ainsi :

- plier pour obtenir une première droite d1 ;
- plier pour obtenir une droite d2 perpendiculaire à d1 ;
- plier pour obtenir une droite d3 perpendiculaire à d2 et donc parallèle à d1 ;
- déplier le tout et remettre la feuille à plat ;
- plier arbitrairement pour obtenir une autre droite d4 ;
- plier pour obtenir une droite d5 perpendiculaire à d4 ;
- plier pour obtenir une droite d6 perpendiculaire à d5 et donc parallèle à d4 ;
- déplier le tout ;
- repérer les droites d1, d3, d4, d6 qui doivent délimiter un parallélogramme. Il faut pour cela que la figure finale ait été un peu anticipée pour que les intersections soient effectivement présentes dans la feuille de papier.

Les étudiants doivent simultanément réfléchir à la propriété utilisée (plier pour obtenir la perpendiculaire d'une perpendiculaire donne une parallèle), oublier certains plis intermédiaires de perpendiculaires pour ne s'intéresser qu'aux parallèles finalement obtenues, anticiper les pliages pour que la figure apparaisse au bon endroit. Tout cela rend la tâche relativement complexe pour bon nombre d'étudiants. Les compétences travaillées au cours de cette activité s'avèrent indispensables pour affronter les problèmes de géométrie du concours.

C'est l'occasion en outre avec certains étudiants d'insister sur les justifications et de faire prendre conscience des paradigmes G1 et G2. Certains, par exemple, font deux pliages successifs pour obtenir des droites parallèles sans autre justification que « je plie pour obtenir deux droites parallèles ». A partir de la simple question « comment peut-on faire pour être sûr qu'elles soient parallèles ? », l'étudiant peut faire la différence entre les deux procédures et les deux paradigmes sous-jacents. Dans un cas, on a utilisé des propriétés qui permettent d'affirmer que les droites sont parallèles, on travaille donc dans G2, dans l'autre cas, rien de permet de le faire, le parallélisme est obtenu par la seule perception visuelle, on se situe alors dans G1. L'amélioration de la précision n'est pas significative car à « l'œil nu », on obtient des droites tout aussi parallèles qu'après des pliages de perpendiculaires de perpendiculaires. Cela permet de mettre en évidence que ce n'est pas l'objet physique obtenu qui nous intéresse mais l'objet théorique matérialisé par le pliage. La précision de ce pliage importe peu, c'est le fait que ce pliage respecte les propriétés qui définissent l'objet théorique qui en fait un représentant de cet objet théorique. C'est là une condition fondamentale du travail dans G2.

IV - CONSTRUCTIONS A LA RÈGLE ET AU COMPAS

Après cette première activité, une autre consigne, plus habituelle, est proposée aux étudiants : effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un scénario de leur construction leur est en effet demandé. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis d'appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées. Les connaissances utilisées précédemment vont ainsi être réinvesties.

1 Première étape : construction, rédaction du scénario puis justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. La mise en commun des procédures utilisées est alors effectuée avec le dispositif suivant :

a1. Un étudiant dicte au formateur un scénario de construction.

a2. Le formateur effectue au fur et à mesure la construction avec un logiciel de géométrie dynamique[4], en faisant dans certains cas reformuler la consigne.

a3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs de formation, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments a1 et a2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Les informations doivent être fournies dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux élèves, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants.

- Le scénario ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des objets élémentaires qui doivent être construits. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Nous mettons alors en évidence que la plupart du temps ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est dans ce cas proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc. » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC. ». Cette contrainte permet de simplifier les formulations. Elle permet surtout à l'étudiant de **prendre conscience de l'objet géométrique construit** (par exemple un cercle). Par la suite, ces propriétés (par exemple : tout point du cercle est à égale distance du centre) pourront alors être explicitées et être utilisées comme hypothèse dans la justification du scénario, comme une hypothèse l'est dans une démonstration. Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation.

Ce travail est explicitement mis en place pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario de construction. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles, mais également que cette compétence peut (-doit-) être travaillée au cycle 3,

[4] A défaut de disposer de suffisamment de temps pour que les étudiants s'approprient un logiciel de géométrie dynamique en en manipulant un eux-mêmes, ils peuvent au moins découvrir une partie des possibilités d'un tel logiciel afin d'envisager comment ils pourraient le faire exploiter en classe par des élèves.

et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Il faut qu'ils puissent également rédiger eux-mêmes des scénarios pour leurs élèves, afin que ceux-ci puissent « *Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes*[5] » par exemple. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est pour eux l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots cercle, centre, rayon dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction afin d' « *Utiliser en situation le vocabulaire géométrique*[6] », et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves. Le fonctionnement par homologie leur permet de développer cette compétence pour eux-mêmes. Le détour, par des commentaires du formateur, sur les choix didactiques effectués pour cette situation leur permet de donner du sens à cette expression, en envisageant des dispositifs permettant de la mener en classe.
Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés pour effectuer une démonstration par exemple.

Dans un second temps, en a3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont souvent incomplètes au départ : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si on demande aux étudiants pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas
Repérage des caractéristiques de la construction	Le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle .
	Les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles.
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	Deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment.
Repérage du théorème utilisé pour conclure	Une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle.

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés ;

- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

[5] Extrait du tableau donnant des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages. Repère pour le CM1, Bulletin Officiel n° 3 du 19 juin 2008, page 39.

[6] Ibid.

La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile pour les étudiants, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche que l'on veut déductive, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. C'est ce que Parzysz nomme la « contamination du su par le perçu » [Parzysz, 2002]. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans le cadre de la géométrie déductive, et non dans celui de la géométrie perceptive à un moment ou à un autre.

L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions ont une justification mathématique.

- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants.

- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

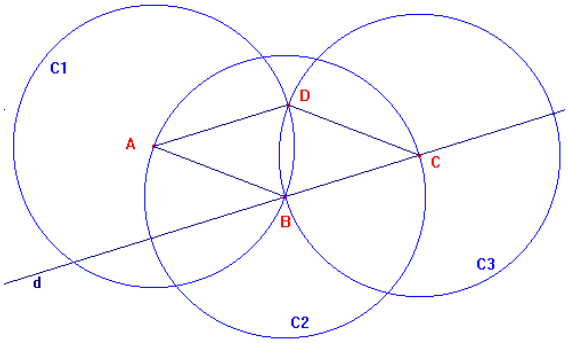
La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc.

2 Deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : « soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite parallèle à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles ». Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[7]. Comme lors des activités précédentes, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur la justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Considérons par exemple la construction suivante.

[7] Le lecteur trouvera de nombreuses constructions détaillées dans [Jore, 2006, pp. 389-397], disponible sur le net : http://www.ima.uco.fr/jore/



Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	Et : $CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Pour cette procédure, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques ;
- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants et à chaque fois, le contrat pour le groupe est d'établir la justification.

En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, et le défi consiste alors à justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ». D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

« Au lieu d'effectuer d'abord une construction puis de chercher à la justifier, choisissez **d'abord** une propriété ou un théorème dont la conclusion est que deux droites sont parallèles, **puis** mettez en œuvre une construction utilisant cette propriété ou ce théorème. Vous avez ainsi à l'avance la justification. »

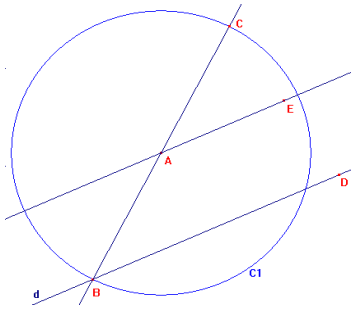
Le fait de demander des constructions différentes nombreuses a pour effet que cette nouvelle démarche se met en place quasiment d'elle-même.

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[8], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée.

[8] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.

Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.

L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien - puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC].
Placer un point D sur d.	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas).	E est le milieu de [DC].
Tracer la droite (AE).	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction ;
- repérer des hypothèses et établir une démonstration ;
- **utiliser** un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de se réapproprier des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Les définitions et propriétés sont des outils pour résoudre les problèmes de géométrie qui leur sont présentés. Notons en outre qu'il s'agit ici de travailler les théorèmes sous un aspect fort utile dans les exercices de démonstration. La question posée : « quels sont les théorèmes dont la conclusion est « les droites (..) et (..) sont parallèles » ? » permet en effet aux étudiants de construire un répertoire de propriétés ou de théorèmes permettant de démontrer par exemple ici que deux droites sont parallèles, c'est-à-dire avec en entrée la conclusion plutôt

que les hypothèses. Cette réorganisation des connaissances participe du passage des connaissances mobilisables aux connaissances disponibles.

V - CONCLUSION

Nous avons présenté des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours de recrutement de professeurs des écoles (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais aussi en situation de responsabilité auprès d'élèves du primaire (rédaction de scénarios de construction).

Plusieurs caractéristiques de ce travail peuvent être repérées :

- les définitions, propriétés, théorèmes sont des **outils** pour résoudre les problèmes posés.
- Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation fonctionnelle.
- Une attention particulière est portée sur le passage des connaissances géométriques mobilisables à disponibles, au sens de Robert [1995], notamment par la conscientisation des connaissances en acte, c'est-à-dire des objets et propriétés utilisés, ainsi que par la réorganisation des connaissances qui est proposée.
- Il y a une articulation entre activité de manipulation et activité intellectuelle, avec développement de l'activité intellectuelle dans l'activité de manipulation par une contrainte d'anticipation des résultats produits par la manipulation.

Ces différents éléments doivent favoriser une meilleure appropriation des objets et propriétés de la géométrie plane de la part des étudiants, à la fois en termes de compétences disciplinaires, mais également didactiques.

Une autre suggestion a été faite lors du débat avec les participants pour travailler sur ce même objectif : exploiter les constructions avec la règle à bords parallèles. D'autres pistes sont par ailleurs à explorer pour améliorer la rédaction des scénarios de construction, en particulier l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique fournissant des scénarios de construction.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. (1979). *Espace et géométrie : pour les enfants de 3 à 11 ans*. Cédic.

BOULE F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Nathan.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem* n°6. Janvier 1992. Ed. Topiques.

HOUDEMENT C., PELTIER M.-L. (2002). Présentation d'une situation de formation par homologie. La somme de plus grand produit. *Les cahiers du formateur de la Copirelem*. Tome 6. P. 78. Séminaire de Pau. 2002.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol 11. 175-194.

JORE F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

JORE F. (2008). Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 2008, pp. 195-225.

PARZYSZ B. (2002). *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres. Tours. Mai 2001. pp. 99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

ROBERT A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques.* Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

Programmes de l'école primaire. BO n°3 19 juin 2008.