

Glossaire de didactique

COPIRELEM à partir d'un document de M.H. Salin et J. Briand

Cet article se propose de préciser des notions de didactique des mathématiques.

Bien entendu, un recueil de définitions ne saurait se substituer à la pratique de la discipline (en l'occurrence, ici, la didactique des mathématiques). Il ne s'agit nullement de réduire la didactique à une mise au point terminologique.

Mais un autre phénomène se produit parfois dans les lieux de formation : c'est celui de l'utilisation de mots de didactique des mathématiques sans maîtrise des concepts auxquels ces mots font référence. Par exemple, il n'est pas rare de voir utilisée la notion de "contrat didactique" pour évoquer le rapport maître-élève au sens affectif du terme ; de même, la "transposition didactique" serait, pour certains, la nouvelle façon de parler de la préparation des cours.

Le glossaire qui suit n'a rien de figé. Malgré ses imperfections et ses lacunes, il essaie de faire le point sur des termes souvent utilisés ; leur sens s'affinera sans doute au fur et à mesure du développement des recherches. Nous espérons qu'il permettra à tous ceux qui travaillent en didactique des mathématiques d'avoir des références communes pour un certain nombre de concepts.

Didactique des mathématiques

"La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition de cette science, particulièrement en situation scolaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. A terme, elle se propose d'améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement, assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permette de résoudre des problèmes et de poser de vraies questions)." (Douady *Encyclopedia Universalis* 1984)

Pour résumer, on peut dire que :

- la didactique des mathématiques fournit des outils professionnels à l'enseignant, tout en préservant sa liberté pédagogique ;
- elle permet d'identifier des faits, d'analyser des phénomènes d'enseignement ;
- elle permet d'analyser des productions d'élèves, d'interpréter des erreurs ;
- elle vise la construction de situations d'apprentissage et donne à l'enseignant des outils pour les réaliser.

Situation

Le terme "situation" désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve le sujet (élève, professeur...), les relations qui l'unissent à un milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution (d'après

Eclairages didactiques

Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* Editions La Pensée Sauvage 1999 p 279).

Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation.

Situation didactique (relativement à un savoir)

“ Une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d’enseigner, un enseignant ” Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* p 281

Une situation didactique est l’ensemble des relations pertinentes (explicites et/ou implicites) d’un sujet (ou de plusieurs sujets) apprenant avec un sujet enseignant et avec un milieu mobilisé par ce dernier pour faire approprier un **savoir** déterminé.

Situation non didactique (relativement à un savoir)

Une **situation non didactique** (relativement à un savoir) est une situation construite de façon à ce que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées, mais dont le milieu ne comporte aucun agent intervenant au cours du déroulement pour faire acquérir au sujet une connaissance déterminée : il n’y a pas d’intention d’apprentissage dans la situation.

Situation a-didactique (relativement à un savoir)

Une **situation a-didactique** est une situation construite de façon à ce que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées mais que l’élève ne puisse pas lire (ou ait renoncé à lire), pendant un temps suffisant, les intentions du professeur concernant ces connaissances, pour prendre ses décisions.

Les bonnes décisions des élèves, celles qui correspondent au savoir associé, constituent des stratégies rationnelles d’action sur un milieu, que le professeur n’a pas besoin de valider, puisque le milieu s’en charge.

Les propriétés didactiques d’une situation a-didactique varient beaucoup selon que :

- la dévolution est réussie ou non,
- les connaissances dont disposent les élèves sont adaptées ou non (capacité à entrevoir une stratégie de base, capacité à la mettre en question, fonctionnalité de connaissances permettant de valider intellectuellement certaines décisions, méconnaissance préalable des stratégies gagnantes),
- la situation est une situation d’action, de formulation ou de validation.

Situation fondamentale (correspondant à un savoir)

Une situation fondamentale d’un savoir visé est une situation à variables didactiques qui engendre, par manipulation de ces variables, un ensemble minimal de situations a-didactiques suffisamment étendu pour couvrir toutes les formes du savoir visé.

Une situation fondamentale est une situation d'apprentissage lorsqu'elle permet l'acquisition de **savoirs** ou de **connaissances** nouvelles par un sujet.

Pour l'étude, on peut se poser les questions suivantes :

- Quel est le ou les savoirs visés ?
- Y-a-t-il bien un problème posé aux élèves qui n'affiche pas directement les savoirs à mobiliser ? (*contrôle de l'a-didacticité*).
- L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée ? (*Il s'agit ici de mieux contrôler le premier critère au moment de la consigne*).
- L'utilisation de la connaissance visée est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves ? (*si oui, on a affaire à une situation de consolidation, de contrôle (qui serait qualifiée d'ouverte si le premier critère est rempli) et non d'apprentissage par adaptation*).
- Quelles sont les procédures possibles pour résoudre le problème ? (*il peut y avoir plusieurs stratégies de base qui engagent elles-mêmes des procédures variées*).
- Comment l'élève voit-il qu'il a réussi ou échoué ? Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions ? (*Critère qui permet de s'assurer comment le milieu permet à l'élève de progresser*).
- La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir ? (*critère qui permet l'adaptation effective*)
- La vérification du résultat est-elle confondue avec l'activité ? (*à lier au premier critère ; permet en particulier, dans les situations faisant intervenir un milieu matériel, d'analyser le rôle de ce matériel : manipulation ou moyen de vérifier une hypothèse faite*).
- Peut-il recommencer en modifiant sa procédure ?

Dévolution d'une situation :

Comment faire pour que le problème qu'a inventé l'enseignant devienne le problème que va chercher à résoudre l'élève ? Pour reprendre un vieux terme de droit adapté à la question de la transmission des savoirs : comme faire la dévolution d'une situation à un élève. (*Dévolu* : terme de jurisprudence. Qui est transporté, transféré, échu, acquis par droit. *Dévolution* : Attribution des biens à une ligne successorale par suite de l'extinction ou de la renonciation de l'autre. (LITTRE).)

On appelle dévolution d'une situation a-didactique l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation : enjeu intellectuel et contexte favorable.

"La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité), du résultat qu'il doit chercher." Brousseau, *Actes de l'université d'été* d'Olivet 1988)

Eclairages didactiques

Dialectique de l'action

Elle consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :

- la solution est la connaissance visée ;
- l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;
- la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.

Dialectique de la formulation

La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.

Dialectique de la validation

Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite, et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral).

Il est rare que ces trois dialectiques se retrouvent au cours d'une même séance de classe.

Connaissances

Nous appelons connaissance engagée dans une situation ce qui permet à un sujet qui doit, dans cette situation, envisager une série de **choix possibles**, de prendre une décision, de manière reproductible (i.e. la même décision pour une situation analysée comme de même type).

Une connaissance est donc attestée par des actions réalisées par le sujet, accompagnées ou non de formulations langagières (orale, graphique ou écrite), explicitant les choix envisagés et la décision (qui sera) prise, ou de débat sur le système de détermination des choix et de décision. Des décisions issues de connaissances manifestent une certaine régularité.

Certaines décisions régulières ne correspondent pas à des choix, mais à l'absence de considération par le sujet de choix à réaliser : il n'envisage qu'une décision possible.

Dans les cas intéressants, les décisions seront le fruit de la prise en compte de plusieurs possibilités, et de l'élimination de toutes sauf une parmi elles.

Dans les cas de non-régularité, nous dirons que les décisions sont (encore) le fruit d'une opportunité ou d'un hasard.

Certaines connaissances sont des savoirs ou des savoir-faire appliqués, c'est à dire convertis en moyens de décision ou d'action, mais d'autres sont des régularités, des schèmes ou des modèles qui peuvent échapper à l'analyse ou même à la conscience de ceux qui les utilisent : ce ne sont donc ni des savoirs, ni des savoir-faire (certains les nomment savoirs d'expérience).

Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris.

“ Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation ”. F.Conne “ Savoir et connaissance ” (*Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 12/3 p 222-267).

Savoir

Un savoir est un ensemble de connaissances reconnues **culturellement dans une institution**. C'est le savoir qui permet le repérage des connaissances des sujets utiles à la vie de l'institution. Un savoir se formule, dans une langue et dans une culture. Les savoirs mathématiques de référence sont ceux produits et consignés par les mathématiciens dans les ouvrages et articles de mathématiques.

Connaissances et savoirs

Le savoir n'est pas la connaissance et la connaissance n'est pas le savoir.

Les connaissances, instruments personnalisés d'action sur le monde, ne sont pas naturellement transformées en savoirs. Un enfant qui a réussi quelque chose ne reconnaît pas encore la valeur culturelle de ce qu'il a fait. Les mathématiciens n'ont pas toujours (ou pas encore à une date t) institutionnalisés en savoirs toutes les connaissances communes nécessaires à leur pratique (cf. énumération, fractales...).

Le savoir est un objet culturel ; sa création et la manière de l'acquérir sont sociales, à l'intérieur d'une institution, en utilisant une langue et une culture dans lesquelles elles sont explicitées, établies, reconnues.

Les savoirs ne sont pas naturellement transformés en connaissances par un sujet dans une situation ; il faut que celui-ci soit capable d'établir un rapport de sujet connaissant à la situation ; il faut aussi que la culture du savoir que le sujet maîtrise puisse lui donner des outils pour identifier des objets de la situation par des objets du savoir et réaliser sur ces objets les traitements selon les algorithmes, énoncés, jugements dont il a la maîtrise dans le domaine du savoir.

A un savoir bien identifié, dans une institution donnée, il correspond un ensemble de situations qui sont spécifiques de ce savoir. Ce savoir permet de reconnaître et de décrire les connaissances utiles à un sujet pour prendre les décisions adéquates à la réalisation de son projet.

Statut (ou fonctionnement) des connaissances : outil et objet. Dialectique outil-objet

Etude de Douady (*Recherches en Didactique des Mathématiques* 1986 vol 7. p5-31) sur le fonctionnement des connaissances scientifiques :

- comme **outils** (implicites ou explicites), elles peuvent fonctionner dans les problèmes qu'elles permettent de résoudre ;

Eclairages didactiques

- elles sont **objets** en tant qu' "objets culturels ayant leur place dans l'édifice des mathématiques à un moment donné, reconnu socialement". Dans la genèse des mathématiques, un concept est souvent outil implicite, avant de devenir objet du savoir constitué, puis outil explicite au service d'autres problèmes : d'où la notion de **dialectique outil-objet**.

Cadres, jeux de cadres, changements de cadres

"Un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et à ses relations" (Douady, thèse 1984)

Un concept mathématique peut être mobilisé dans plusieurs cadres (physique, numérique, géométrie graphique, informatique) entre lesquels s'établissent des relations contribuant à la connaissance de ce concept.

"Un *changement de cadres* est une mise en relation intéressée et intéressante de deux traductions d'un même problème (à résoudre) dans deux (ou plus) domaines de travail (*les cadres*)" (Robert 2001)

Un **jeu de cadres** est la prévision construite par le professeur de l'utilisation par les élèves d'un changement de cadres alors qu'un seul cadre est explicite.

Contrat pédagogique

Les règles de vie relèvent de ce type de contrat (respect des autres, rangement du matériel, répartition de tâches, etc.). C'est aussi le cas de l'organisation du travail : (fréquence des devoirs personnels, présentation des cahiers, etc.). La nature de ce contrat n'est pas liée à une discipline.

Il est la plupart du temps connu et maîtrisé par les enseignants, pas toujours par les élèves. Ceux-ci doivent s'adapter à des fonctionnements différents d'un enseignant à l'autre.

Contrat didactique

Le contrat didactique dépend étroitement des connaissances en jeu : il est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

Non seulement, il apparaît nécessaire de maintenir implicites certains aspects du contrat, mais aussi de provoquer des ruptures. Dans une perspective constructiviste, le traitement du savoir en situation de classe, va plutôt reposer sur les ruptures prévues du contrat. Ces ruptures apparaissent nécessaires à l'apprentissage alors que dans une perspective behavioriste, le principal rôle dans la gestion des savoirs est toujours tenu par le maître.

(Voir l'article de Brousseau dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 9/3 pages 309-336, 1988)

"Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une vraie injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions

nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Mais l'élève est aussi devant une injonction paradoxale s'il accepte que selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc, il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre pour lui signifie refuser le contrat mais aussi accepter la prise en charge. Donc l'apprentissage va reposer non sur le bon fonctionnement du contrat mais sur ses ruptures ” Brousseau 1984

Variable cognitive

Une variable cognitive d'une situation a-didactique est un paramètre de cette situation qui, suivant les valeurs qui lui sont attribuées, modifie la connaissance nécessaire à la solution.

Certains paramètres sont des variables numériques, d'autres sont binaires (la condition est réalisée ou non).

Variables didactiques

Une variable didactique est une variable cognitive dont la valeur peut être fixée à volonté par l'enseignant. La modification de la valeur de ces variables permet d'engendrer, à partir d'une situation,

- soit un champ de problèmes correspondant à une même connaissance ; ainsi l'enseignant peut proposer à l'élève de se confronter à plusieurs reprises à la même connaissance, à travers une situation dont le milieu lui est pour l'essentiel connu, sans que les réponses lui soient connues : c'est la base des situations d'élaboration de nouvelles connaissances ;
- soit un éventail de problèmes correspondant à des connaissances différentes ; ainsi l'enseignant peut utiliser d'abord des valeurs correspondant à des connaissances acquises, ce qui permet à l'élève de comprendre le problème, puis modifier la variable pour lui faire affronter la construction d'une connaissance nouvelle.

Saut informationnel

On appelle saut informationnel un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation susceptible de provoquer un changement de stratégie.

Souvent, suite à un changement de variable didactique, l'élève préfère adapter une procédure familière et antérieurement efficace en une procédure lourde et peu fiable : il trouve cela moins pénible, moins coûteux que la remise en cause de la procédure habituelle.

Le saut informationnel détermine a priori le seuil de remise en cause de la procédure familière.

Institutionnalisation

L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. (Brousseau, *Actes du col-*

Eclairages didactiques

loque *COPIRELEM* d'Angers 1987). L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. (Brousseau, Angers 87). Quand un élève a résolu un problème en élaborant une nouvelle connaissance, celle-ci ne lui sera utile que s'il est capable d'y faire appel dans une autre situation. Pour cela, il faut que l'enseignant aide les élèves à identifier le savoir en jeu, à distinguer entre les résultats à retenir et ceux à oublier etc.

Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le "cours". Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer. (R. Douady, M.J. Perrin, *Educational Studies in Mathematics* 20 1989).

Transposition didactique

La transposition didactique décrit les choix, les découpages, les transformations des savoirs pris à un moment donné comme références dans les différentes institutions.

La transposition didactique se manifeste par ses étapes : la production du savoir par la communauté des mathématiciens, les choix à effectuer sur les savoirs à enseigner, les choix sur les découpages de ces savoirs, les choix sur la recontextualisation de ces savoirs, les savoirs effectivement enseignés, les savoirs effectivement acquis par les élèves...

Échec

L'échec qualifie un résultat, le fait que le résultat attendu ne soit pas atteint, que l'état terminal du jeu (fin de la partie) ne soit pas un état gagnant.

Erreur

L'erreur ne qualifie pas le résultat, mais la démarche de prise de décision. Une décision peut être dite causée par une erreur lorsque celui qui a pris cette décision peut la remettre en question, en regard des conséquences qu'il sait pouvoir lui associer. L'erreur qualifie la connaissance qui a permis la décision lorsqu'elle est identifiable et identifiée.

Pour l'élève, l'interprétation de l'échec en termes d'erreurs nécessite :

- un constat de l'échec du résultat,
- l'attribution de l'échec à des choix qu'il a faits et dont il peut assumer la responsabilité (ce qui implique le rejet de causes comme le hasard, la fatalité, le rejet de la culpabilisation et du dénigrement de soi-même, etc.),
- la recherche d'identification des relations entre choix et résultats,
- une modification de ses choix de manière plus adéquate.

La transformation de l'échec en erreur est la condition d'un progrès, d'un apprentissage.

Obstacle

Un obstacle se manifeste par des erreurs non pas fugaces et erratiques, mais reproductibles et persistantes. Ces erreurs témoignent d'une connaissance (erronée) qui a réussi dans tout un domaine d'action (mais qui échoue dans d'autres) ; elles persistent souvent après l'apprentissage d'un savoir correct ; leur origine peut être ontogénétique, didactique ou épistémologique.

Parmi les obstacles que l'analyse permet d'identifier, la recherche distingue :

- **les obstacles ontogénétiques** : ce sont des connaissances "spontanées" apparaissant "naturellement" au cours du développement ; ils sont relatifs au développement neurophysiologique du sujet (cf. Piaget et al.).
Par exemple, à un âge donné, un enfant ne peut admettre que la collection B, dont on a un peu modifié l'apparence en écartant les jetons, a bien le même nombre de jetons que la collection A, alors qu'il l'admettait, lorsque les deux collections étaient présentées à l'identique. Pour cette erreur, le spatial l'emporte sur le numérique.
- **les obstacles épistémologiques** : ils sont attestés dans la genèse historique d'un concept et constitutifs du savoir actuel. "On connaît contre une connaissance antérieure". Bachelard ayant mis en évidence ce concept, un certain nombre de travaux qui s'appuient sur l'histoire des sciences poursuivent la recherche entreprise par Bachelard et l'étendent à d'autres sciences que les sciences physiques. Les obstacles épistémologiques ont joué un rôle dans le développement historique des connaissances et dont le rejet a du être intégré explicitement dans le savoir transmis.
- **Les obstacles didactiques** : ils résultent d'une transposition didactique antérieure non susceptible de renégociation par le maître dans le cadre restreint de sa classe du moins. Le franchissement d'obstacles implique très souvent à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et des systèmes de preuves. Le didacticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques des trois types.

Procédure et stratégie

D'après F. Boule (1998) "Performances et démarches de calcul mental au cycle III", Dijon, une procédure est un ensemble univoque et ordonné d'actions en vue d'un but déterminé. Dans le temps de son déroulement, la procédure met de côté la signification. C'est typiquement le cas d'une résolution algébrique d'une équation du second degré par exemple ; c'est aussi ce qui se produit lorsqu'on calcule par écrit : les règles prescrites n'autorisent aucun choix et conduisent à un résultat. Une procédure est machinale.

Eclairages didactiques

Un certain accord semble acquis en ce qui concerne les principales caractéristiques de la notion de stratégie :

- disponibilité d'un éventail de procédures,
- exercice d'une sélection en fonction de la tâche et du but poursuivi,
- guidage et évaluation du déroulement.

Une stratégie suppose un choix parmi plusieurs possibilités. L'existence du choix n'est pas toujours assurée. S'il n'existe pas, on ne saurait parler de stratégie faute d'alternative. Les raisons de ce choix, s'il existe, peuvent être diverses : direction plus familière, évocation plus facile, préjugé de commodité ou de rapidité, etc. Il arrive que l'on désigne par "stratégie" le *résultat* du choix (il s'agit alors d'une procédure effective), ou bien le *choix*, ou encore la *possibilité* de choix.