EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE

CORRIGÉS

VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMEN DES ESPE ET DU BREVET DES COLLÈGES)

1. Affirmation 1 :
La somme de deux nombres rationnels non décimaux est un rationnel non décimal.

L'affirmation est fausse, un contre-exemple suffit à le justifier : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

2. Au sein d'une entreprise, tous les salaires ont été augmentés de 3%.
Affirmation 2 :
L'écart entre le salaire le plus élevé et le salaire le moins élevé dans cette entreprise a aussi augmenté de 3%.

L'affirmation est vraie.
Soit S le salaire le plus élevé et s le salaire le moins élevé avant augmentation. L'écart entre ces salaires est (S – s). Après augmentation le salaire le plus élevé est 1,03×S et le salaire le moins élevé est 1,03×s. L'écart entre ces salaires est 1,03×(S – s). L'écart entre ces salaires a donc lui aussi augmenté de 3%.

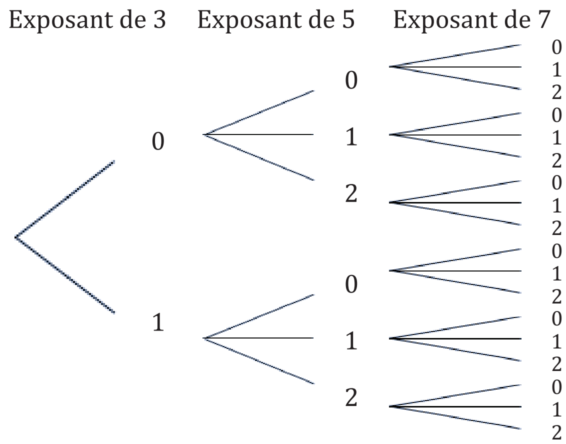
3. Affirmation 3 :
Le nombre 3675 possède exactement 17 diviseurs distincts.

L'affirmation est fausse.

Méthode 1 :
$3675 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$. Il suffit alors d'énumérer tous les diviseurs possibles. La recherche exhaustive doit passer par une procédure permettant de ne pas en oublier. Par exemple, on peut s'organiser suivant le nombre de facteurs premiers utilisés parmi ceux de la décomposition, sans oublier que 1 est un diviseur de tout entier :
Zéro facteur : 1
Un facteur : 3 ; 5 ; 7
Deux facteurs : 3×5 ; 3×7 ; 5×7
Trois facteurs : $3 \times 5 \times 5$; $3 \times 5 \times 7$; $3 \times 7 \times 7$; $5 \times 5 \times 7$; $5 \times 7 \times 7$
Quatre facteurs : $3 \times 5 \times 5 \times 7$; $3 \times 5 \times 7 \times 7$; $5 \times 5 \times 7 \times 7$
Cinq facteurs : $3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$
Il y a donc 18 diviseurs distincts.

Méthode 2 :
$3675 = 3^1 \times 5^2 \times 7^2$
Un diviseur de 3675 a une décomposition de la forme $3^a \times 5^b \times 7^c$ avec a, b et c entiers inférieurs ou égaux aux exposants respectifs de 3, 5 et 7 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre 3675.

On a donc deux choix possibles pour a (0 ou 1), trois choix possibles pour b (0, 1 ou 2) et trois choix possibles pour c (0, 1 ou 2), soit au total $2 \times 3 \times 3 = 18$ choix possibles pour le triplet (a, b, c) – ce qui peut être illustré par l'arbre de choix ci-contre.



On a donc 18 diviseurs distincts pour le nombre 3675.

Remarque :
La méthode 2 ci-dessus est un cas particulier d'un résultat plus général qui peut s'énoncer ainsi : si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre est ${p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \dots\dots . . \times {p_n}^{a_n}$ *, alors son nombre de diviseurs est* $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots\dots\dots \times (a_n + 1)$ *(on a* $a_i + 1$ *choix possibles pour l'exposant du facteur premier* p_i *: 0, 1, 2, ……,* p_i*).*

4. Affirmation 4 :
Quatre points distincts A, B, C et D sont sur un cercle de centre O. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

L'affirmation est fausse. Un contre-exemple par un dessin suffit.

Pour qu'un tel quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu. A, B, C et D étant sur un cercle, il faudrait qu'ils soient deux à deux diamétralement opposés et, ses diagonales étant de même longueur (le diamètre du cercle), ABCD serait alors un rectangle.

Pour exhiber un contre-exemple, il suffit de choisir quatre points non diamétralement opposés deux à deux.

5. Affirmation 5 :
Un satellite fait 95 fois le tour de la Terre en exactement 7 jours. La durée d'une rotation du satellite autour de la Terre (arrondie à la seconde) est égale à 1 h 46 min 6 s.

L'affirmation est vraie.
7 jours, c'est 7×24 h $= 168$ h, ou encore 168×3600 s $= 604800$ s.
Donc la durée d'une rotation est 604800 s : 95 soit environ 6366 s (arrondi à la seconde près).
$6366 = 1 \times 3600 + 2766$ donc 6366 s = 1 h + 2766 s
$2766 = 46 \times 60 + 6$ donc 2766 = 46 min + 6 s
La durée d'une rotation du satellite autour de la Terre(arrondie à la seconde) est bien 1 h 46 min 6 s.

6. Affirmation 6 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.

L'affirmation est vraie.

Méthode 1 :

Tout nombre entier dont l'écriture se termine par 2 est de la forme $10n + 2$, avec n entier naturel, nombre de dizaines de l'entier considéré ; d'où son carré :

$(10n + 2)^2 = (10n)^2 + 2 \times 10n \times 2 + 2^2 = 100n^2 + 40n + 4 = (10n^2 + 4n) \times 10 + 4$

On reconnaît l'écriture d'un nombre dont le chiffre des unités est 4 et dont le nombre de dizaines est $10n^2 + 4n$.

Méthode 2 :

D'après l'algorithme classique de la multiplication, le chiffre des unités du produit est le chiffre des unités du produit des chiffres des unités de chaque facteur.

$$\begin{array}{llr} & \dots\dots\dots\dots & 2 \\ \times & \dots\dots\dots\dots & 2 \\ \hline & (\dots) & 4 \\ & (\dots) & . \\ & (\dots) & . \\ \hline & & 4 \end{array}$$

7. Affirmation 7 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.

L'affirmation est fausse.

Un contre-exemple suffit pour le prouver. $14^2 = 196$ ne se termine pas par 16.

Remarque :
Si on peut affirmer que le chiffre des unités du résultat est toujours celui du produit des unités (voir question précédente), le chiffre des dizaines n'est que dans certains cas particuliers celui du produit des unités : il faut y ajouter les chiffres des unités des deux produits du chiffre des unités de l'un des nombres par le chiffre des dizaines de l'autre.

8. Le compteur de vitesse d'une voiture exagère de 10 %.

Affirmation 8 : Si le compteur indique 100 km/h, on roule en réalité à 90 km/h.

L'affirmation est fausse.
La vitesse lue sur le compteur est la vitesse réelle majorée de 10%, soit la vitesse réelle multipliée par 1,1.
Si on roule à 90 km/h, la vitesse lue sera 90 km/h + 90 km/h × $\frac{10}{100}$ = 90 km/h × 1,1 = 99 km/h.

Autre méthode :

On calcule la vitesse réelle en divisant la vitesse lue par 1,1. Si on divise 100 km/h par 1,1 on obtient environ 90,91 km/h et non 90 km/h.

9. On donne : 1 To (téraoctet) = 10^{12} octets et 1 Go (gigaoctet) = 10^9 octets. On partage un disque dur de 1,5 To en dossiers de 60 Go chacun.

Affirmation 9 :
Le nombre de dossiers obtenus est égal à 25.

L'affirmation est vraie.
$1 \text{ To} = \frac{10^{12}}{10^9} \text{ Go} = 10^3 \text{ Go}$
Le nombre de dossiers de 60 Go dans 1,5 To est donc :
$\frac{1{,}5 \times 10^3 \text{ Go}}{60 \text{ Go}} = \frac{1500}{60} = 25$

10. Affirmation 10 :
Pour n'importe quel nombre entier naturel n, $(n+1)^2 - (n-1)^2$ est un multiple de 4.

L'affirmation est vraie.

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 4n$

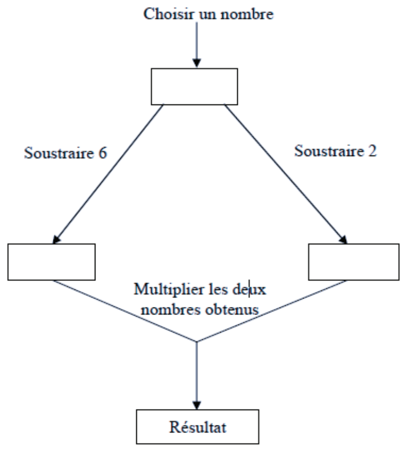
$4n$ est un multiple de quatre pour n'importe quelle valeur de n.

11. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Affirmation 11 :
La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique est de $\frac{20}{32}$.

L'affirmation est fausse.
Dans le jeu, il y a 8 piques et 4 as dont celui de pique, donc $8 + 4 - 1 = 11$ cartes qui sont soit des piques, soit des as.
Il y a donc 32 – 11 soit 21 cartes qui ne sont ni des piques, ni des as.
La probabilité de ne tirer ni un as ni un pique est $\frac{21}{32}$.

12. On considère le programme de calcul ci-dessous :



Affirmation 12a.
Le programme peut donner un résultat négatif.

L'affirmation est vraie.

Un exemple suffit à la justification. Si on choisit 4, le résultat est $(4-6)\times(4-2)=-2\times 2=-4$.

Remarque :
Le résultat est un produit, qui est négatif si l'un des facteurs est négatif, l'autre étant positif. Il faut donc choisir un nombre strictement compris entre 2 et 6.

Affirmation 12b.
Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres.

L'affirmation est vraie.
Le résultat étant un produit, il est nul si l'un des deux facteurs est nul. Il faut donc choisir 6 ou 2 pour que l'un des facteurs soit 0.

Autre justification :
Soit x le nombre choisi.
Le résultat est donné par l'équation : $(x-6)(x-2)$
On est amené à résoudre l'équation $(x-6)(x-2)=0$ soit $(x-6)=0$ ou $(x-2)=0$ c'est-à-dire $x=6$ ou $x=2$.

13. Dans un referendum local, 40% des femmes et 70% des hommes ont répondu « OUI », à la question posée. Sachant que l'électorat contient 65% de femmes et que l'on n'a comptabilisé aucun vote blanc ou nul :

Affirmation 13a :
Les hommes ayant voté « OUI » représentent environ un quart des électeurs.

L'affirmation est vraie.

Les hommes représentent 35% de l'électorat (100% – 65%).

Les hommes ayant répondu « OUI » représentent donc 70% × 35% soit 24,5% des électeurs.

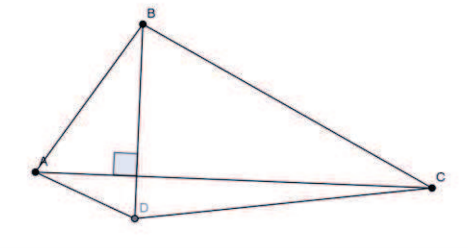
Affirmation 13b :
La majorité des votants a répondu « NON ».

L'affirmation est fausse.

Les femmes ayant répondu « OUI » représentent 40% × 65% soit 26% des électeurs. On a donc 26% + 24,5% soit 50,5% des électeurs qui ont répondu « OUI ». Par conséquent, 49,5% des électeurs a répondu « NON », ce qui ne constitue pas la majorité.

14. Affirmation 14 :
Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

L'affirmation est fausse.

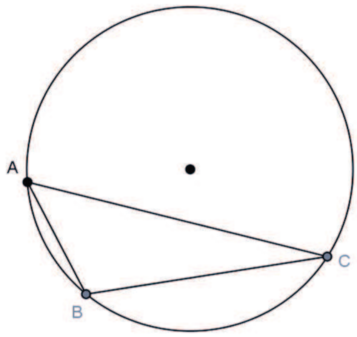


Voici un contre-exemple :

ABCD est un quadrilatère ; ses diagonales sont perpendiculaires ; ce n'est pas un losange car ses diagonales n'ont pas le même milieu (donc ce n'est pas un parallélogramme).

15. Affirmation 15 :
Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle.

L'affirmation est fausse.



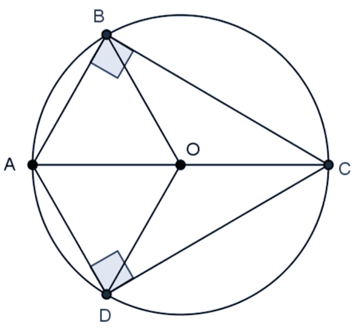
Voici un contre-exemple :

le triangle ABC est inscrit dans le cercle (A, B et C sont des points du cercle) ; il n'est pas rectangle car, s'il était rectangle, son cercle circonscrit aurait pour diamètre l'un de ses côtés, ce qui n'est pas le cas.

16. ABCD est un quadrilatère convexe tel que : $\text{AB} = \text{AD} = 1$, $\text{BC} = \text{CD} = \sqrt{3}$ et les angles $\widehat{\text{B}}$ et $\widehat{\text{D}}$ sont droits.

Affirmation 16a :
ABCD est inscriptible dans un cercle de rayon 1.

L'affirmation est vraie.



ABC est un triangle rectangle en B, il est donc inscrit dans un cercle de centre O, le milieu de [AC].

D'après le théorème de Pythagore, on a : $\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2$ soit $\text{AC}^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$ donc $\text{AC}^2 = 4$ soit $\text{AC} = 2$.

O est le milieu de [AC] donc OA = OC = 1 donc B est sur le cercle de rayon 1. Avec le même raisonnement, on peut dire que D est sur le même cercle.

En conclusion, A, B, C et D sont sur le cercle de rayon 1.

Affirmation 16b :
L'angle $\widehat{\text{A}}$ vaut 120°.

L'affirmation est vraie.

D'après la question précédente, on a OB = OA = 1. Or AB = 1 par hypothèse, donc AB = OA = OB, on en conclut que le triangle AOB est équilatéral. On a $\widehat{\text{BAO}} = 60°$.

De même, le triangle OAD est équilatéral et $\widehat{OAD} = 60°$.

Ainsi $\widehat{BAD} = \widehat{BAO} + \widehat{OAD} = 60° + 60° = 120°$.

17. Les promenades sur la Seine

Selon l'Observatoire du tourisme fluvial en Ile de France, « la croisière-promenade en Ile-de-France a attiré, en 2013, 7,5 millions de passagers, enregistrant une légère baisse en terme de fréquentation de l'ordre de 1,8% par rapport à 2012 ».
Par ailleurs, un document de l'office du tourisme de Paris avance les données suivantes :

Palmarès de la fréquentation mondiale des musées en 2012

	Nombre de visiteurs	Musées	Villes
1	**9 660 609**	**Musée du Louvre**	**Paris**
2	6 115 881	Métropolitain Museum of Art	New-York
3	5 575 946	British Museum	Londres
4	5 304 710	Tate Modern	Londres
5	5 163 902	National Gallery	Londres
6	5 064 546	Vatican Muséums	Vatican
7	4 360 815	National Palace Museum	Taipei
8	4 200 000	National Gallery of Art	Washington DC
9	**3 800 000**	**Centre Pompidou**	**Paris**
10	**3 600 000**	**Musée d'Orsay**	**Paris**

Affirmation 17a :
En 2012, le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été inférieur au nombre d'entrées au Musée du Louvre, mais supérieur au nombre d'entrées au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis.

L'affirmation est vraie.

On calcule le nombre de passagers de la croisière en 2012 :

$7\ 500\ 000 : \left(1 - \frac{1{,}8}{100}\right) \approx \mathbf{7\ 637\ 475}$ arrondi à l'unité.

$7\ 637\ 475 < 9\ 660\ 609$

Le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été inférieur au nombre d'entrées au Musée du Louvre.

$3\ 800\ 000 + 3\ 600\ 000 = \mathbf{7\ 400\ 000}$

Au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis, il y a eu 7 400 000 visiteurs.

$7\ 637\ 475 > 7\ 400\ 000$

Le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été supérieur au nombre d'entrées au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis.

Une navette de transport sur la Seine indique que ses bateaux se déplacent à allure régulière, à 12 km/h. Elle propose un parcours entre la Tour Eiffel et le Jardin des Plantes dont la durée affichée est 50 minutes, et qui comporte trois escales intermédiaires.
On considère que la distance qui sépare les embarcadères de la Tour Eiffel et du Jardin des Plantes est 6 km.

Affirmation 17b :
Pendant ce trajet, la durée effective de déplacement est inférieure à la durée des escales.

L'affirmation est fausse.

Pour parcourir une distance de 6 km à une vitesse régulière de 12 km/h, il faut **30 min**. La durée du parcours étant de 50 min, la durée des trois escales est de 20 min. Ainsi la durée effective de déplacement est supérieure à la durée des escales.

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Arithmétique – Numération – Probabilités – Géométrie

EXERCICE 1 : rendez-vous de comètes (d'après un sujet de Toulouse)

1) a) 1606 année de rendez-vous

Le nombre d'années écoulées entre deux passages à proximité de la Terre d'une comète doit être un multiple de la période de l'orbite.

Pour la comète de Halley, ce doit être un multiple de 76. Or : $1986 - 1606 = 76 \times 5$.

Pour la comète de Olbers, ce doit être un multiple de 70. Or : $1956 - 1606 = 70 \times 5$.

Les deux comètes sont donc bien passées à proximité de la Terre **en 1606.**

1) b) Les deux comètes à nouveau proches de la Terre durant la même année

Pour déterminer le nombre d'années qui vont s'écouler jusqu'au prochain rendez-vous, on cherche le plus petit multiple commun à 70 et 76.

$70 = 2 \times 5 \times 7$ et $76 = 2 \times 2 \times 19$ donc $\text{PPCM}(70\ ;\ 76) = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 19 = 2660$

Il s'écoulera **2660 années** à partir de l'année 1606 pour que les deux comètes se retrouvent la même année, proches de la Terre.

1) c) Nombre de passages de la Comète de Halley

Sachant que $2660 = 76 \times 35$, on en déduit que la comète de Halley aura effectué **35 passages** à proximité de la Terre après celui de 1606.

2- Vérification à l'aide du tableur

a) Valeurs de la colonne B

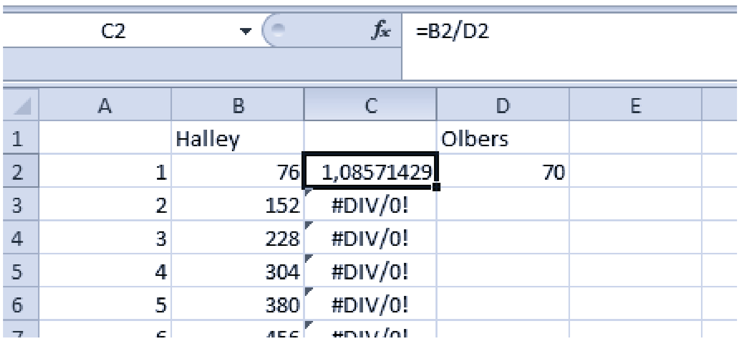
Les nombres de la colonne B sont les multiples non nuls de 76.

b) Formule pour la cellule B3

On peut saisir en B3 : =B2+76 ou =B2+$B$2 ou =A3*76 ou =A3*$B$2.

c) Formule en C2

La formule =B2/D2 ne permettrait pas d'obtenir les bons résultats parce que D2 est une adresse relative. Cela signifie que, par copie sur la ligne suivante, on obtiendrait =B3/D3 ce qui conduirait à un message d'erreur puisque la cellule D3 est vide (le tableur considérerait donc que l'on effectue une division par 0).



C2 | =B2/D2

	A	B	C	D	E
1		Halley		Olbers	
2	1	76	1,08571429	70	
3	2	152	#DIV/0!		
4	3	228	#DIV/0!		
5	4	304	#DIV/0!		
6	5	380	#DIV/0!		
7	6	456	#DIV/0!		

Il faudrait saisir la formule : = B2/70 ou =B2/D$2 ou =B2/$D$2

Remarque :
Le symbole \$ précède une référence (ligne ou colonne) que l'on souhaite bloquer lors d'une copie.
\$D\$2 est une adresse absolue : elle reste invariante par copie aussi bien sur les lignes (dans la copie vers le bas) que sur les colonnes (dans la copie vers la droite). Comme ici on ne copie que vers le bas, D\$2 suffit dans la formule demandée, le symbole \$ bloquant la référence à la ligne 2 dans la copie vers le bas.

d) Utiliser cette feuille de calcul pour obtenir les résultats des questions 1-b) et 1-c)

Lorsqu'un nombre de la colonne C est entier, le nombre N de la colonne B sur la même ligne est d'une part un multiple de 76 (il est dans la colonne B) et d'autre part un multiple de 70 (car $N/70$, le nombre de la colonne C, est entier). Ce nombre N est donc un multiple commun de 70 et 76.
Comme on cherche le PPCM de 76 et 70, on retient donc dans la colonne C le premier nombre entier affiché, soit 38.

	A	B	C	D
1		Halley		Olbers
2	1	76	1,08571429	70
3	2	152	2,17142857	
4	3	228	3,25714286	
5	4	304	4,34285714	
6	5	380	5,42857143	
32	...	...	...	
33	32	2432	34,7428571	
34	33	2508	35,8285714	
35	34	2584	36,9142857	
36	35	2660	38	
37	36	2736	39,0857143	
38	37	2812	40,1714286	

On en déduit le nombre d'années écoulées avant que les deux comètes soient à nouveau proches de la Terre durant la même année soit **2660**, et le nombre de passages de la Comète de Halley effectués à proximité de la Terre après celui de 1606 soit **35.**

EXERCICE 2 : numération (d'après un sujet de Dijon)

1) Écriture en base sept du nombre qui s'écrit 2491 en base dix

Méthode 1 :

En effectuant des divisions euclidiennes successives de 2491 par 7, puis du dividende obtenu par 7 et ainsi de suite, on obtient :

2491 = 7 × <u>355</u> + **6** ;
<u>355</u> = 7 × <u>50</u> + **5** ;
<u>50</u> = 7 × <u>7</u> + **1** ;
<u>7</u> = 7 × <u>1</u> + **0** ;
<u>1</u> = 7 × <u>0</u>+ **1.**

On trouve donc : **2491 =** $\mathbf{\overline{10156}_{sept}}$**.**

Méthode 2 :

Les puissances successives du nombre 7 sont :

$$7^0 = 1 \quad 7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401$$

On peut alors décomposer le nombre 2491 suivant ces puissances successives de 7 :
2491 = 2401 + 90 = 2401 + 49 + 41 = 2401 + 49 + 5 × 7 + 6 = $\mathbf{1} \times 7^4 + \mathbf{0} \times 7^3 + \mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{5} \times 7 + \mathbf{6} \times 1$
D'où l'écriture en base sept : **2491 =** $\mathbf{\overline{10156}_{sept}}$**.**

2) Écriture en base dix du nombre qui s'écrit $\overline{3645}_{\text{sept}}$ en base sept

On doit convertir en base dix le nombre qui s'écrit $\overline{3645}_{\text{sept}}$ en base sept. On considère alors la décomposition canonique de ce nombre selon les puissances de 7 et on effectue les calculs :
$\overline{\mathbf{3645}}_{\textbf{sept}} = 3 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = 1029 + 294 + 28 + 5 = \mathbf{1356}$.

3) Calcul de $\overline{5012}_{\text{sept}} - \overline{3534}_{\text{sept}}$

Il faut effectuer, en la posant et sans passer par la base dix, l'opération suivante : $\overline{5012}_{\text{sept}} - \overline{3534}_{\text{sept}}$.
Pour faciliter les calculs, on on peut s'aider de la table d'addition en base 7 :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

L'opération posée est la suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & {}_{1}2 \\ - & 3_{1} & 5_{1} & 3_{1} & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

On obtient donc $\overline{\mathbf{5012}}_{\textbf{sept}} - \overline{\mathbf{3534}}_{\textbf{sept}} = \overline{\mathbf{1145}}_{\textbf{sept}}$.

EXERCICE 3 : probabilités (d'après un sujet de Draguignan)

1) Probabilité de tirer le numéro 49

Chaque carte a autant de chance d'être tirée que les autres : il y a donc équiprobabilité entre les évènements « Tirer une carte numérotée *i* » , pour i = 1, … , 100.
Donc p(« Tirer une carte numérotée 27 ») = 1/100 = 0,01.

La probabilité de cet événement est égale à 0,01.

2) Probabilité de tirer un multiple de 15 qui n'est pas un multiple de 3

Tout nombre multiple de 15 est multiple de 3 et de 5. Il n'existe donc aucun nombre multiple de 15 qui ne soit pas multiple de 3.

La probabilité de cet événement est égale à 0.

3) a) Probabilité de tirer un nombre pair

La situation étant équiprobable, il suffit de dénombrer les nombres pairs compris entre 1 et 100. Les nombres pairs sont 2, 4, … 98, 100, il y en a donc 100/2 = 50.
Alors : p(« *Tirer un nombre pair*») = $\frac{50}{100}$ = 0,5.

La probabilité de cet événement est égale à 0,5.

3) b) Probabilité d'obtenir un produit impair pour le produit des nombres de deux cartes tirées avec remise

Pour obtenir un produit impair, il faut et il suffit que les deux facteurs soient impairs.
Comme on remet dans le sac après le 1er tirage, les deux événements sont indépendants. Donc la probabilité de tirer une carte impaire étant de 0,5 (probabilité de l'événement contraire de « tirer une carte paire »), celle de tirer successivement deux cartes impaires est : 0,5 × 0,5 = 0,25.

La probabilité de cet événement est égale à 0,25.

4) a) Valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement « Tirer un multiple de *n* » est la plus petite

Tout nombre n compris entre 1 et 100 possède *au moins un* multiple compris entre 1 et 100 : lui-même ($n = n\times 1$). Ainsi l'événement E_n a une probabilité au moins égale à 0,01.

Pour que la probabilité de E_n soit la plus petite, elle doit être égale à 0,01. Pour cela, n ne doit avoir aucun multiple (non nul) différent de lui-même inférieur à 100.

C'est vrai si et seulement si $2\times n > 100$ donc $n > 50$.

L'ensemble des valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement E_n est la plus petite est {51 ; 52 ; ... ; 100}.

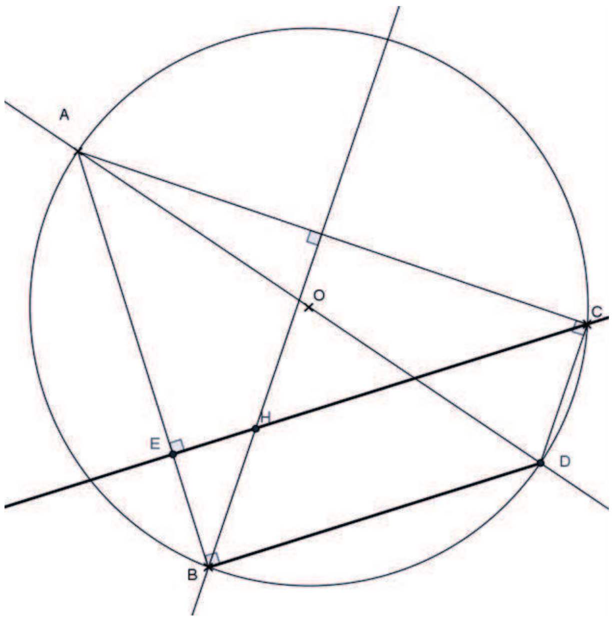
4) b) Valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement « Tirer un multiple de *n* » est la plus grande

Il faut chercher le nombre qui a le plus de multiples inférieurs à 100 : c'est 1. Il possède alors 100 multiples et la probabilité de E_1 est alors égale à 1.

L'ensemble des valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement E_n est la plus grande est {1}.

EXERCICE 4 : géométrie plane (d'après un sujet de Laval)

La figure donnée est à compléter au fur et à mesure mais nous avons fait le choix, ici à chaque question, d'illustrer avec des figures intermédiaires en ne montrant que les éléments utiles à la démonstration.



1) Nature des triangles ABD et ACD

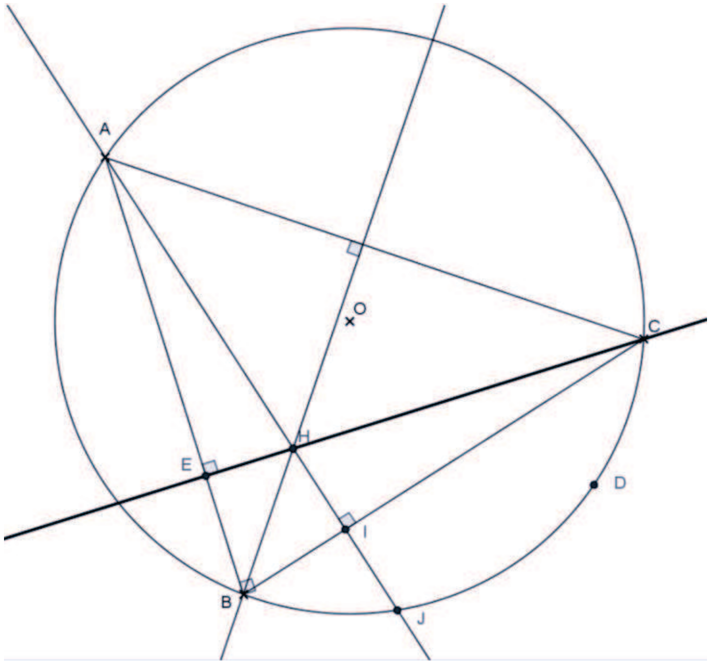
ABD et ACD sont inscrits dans le demi-cercle de diamètre [AD], ils sont donc des **triangles rectangles respectivement en B et en C.**

2) (CE) hauteur du triangle ABC

Par construction, les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Puisque ABD est un triangle rectangle en D, les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires. Par conséquent, les droites (EC) et (AB) sont perpendiculaires (Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre).

Dans le triangle ABC, (CE) est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaires au côté opposé.

On en déduit que **(CE) est une hauteur du triangle ABC**.

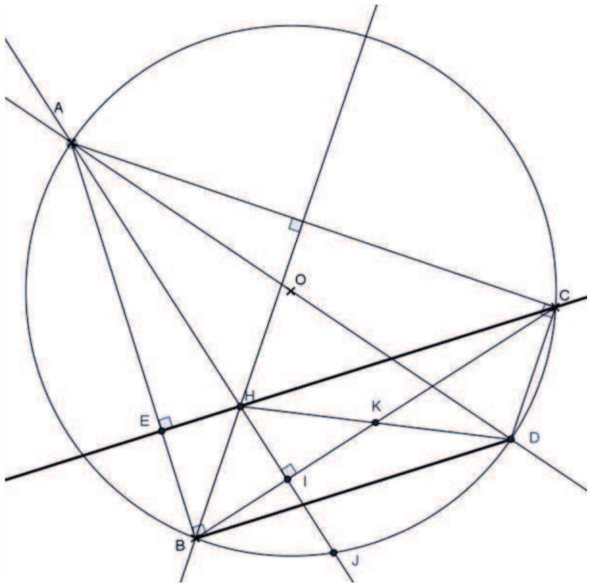


3) a) (BH) est perpendiculaire à (AC)

Par construction, les points A, H, I et J sont alignés et la droite passant par A et J est perpendiculaire à (BC) : on peut alors déduire que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC) et qu'elle est donc une hauteur du triangle ABC.

Les droites (CE) et (AI) se coupent, par construction, en H : ce point est alors l'orthocentre du triangle ABC.

On conclut que **la droite (BH)** est la troisième hauteur du triangle ABC et qu'elle **est donc perpendiculaire à (AC)**.



3) b) BHCD est un parallélogramme

Par construction, (BD) et (CE) sont parallèles et H est sur (CE) ; on en déduit que les droites (BD) et (CH) sont parallèles.
On a prouvé que (BH) est perpendiculaire à (AC) et que ACD est un triangle rectangle en C, ce qui revient à dire que (CD) est perpendiculaire à (AC).
On peut déduire que les droites (BH) et (CD) sont parallèles car perpendiculaires à la même droite (AC).

On conclut que l**e quadrilatère BHCD est un parallélogramme** car ses côtés sont deux à deux parallèles.

4) K est milieu du segment [HD].

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Par construction, K est le point d'intersection des diagonales de BHCD, on en déduit alors que **K est le milieu du segment [HD]**.

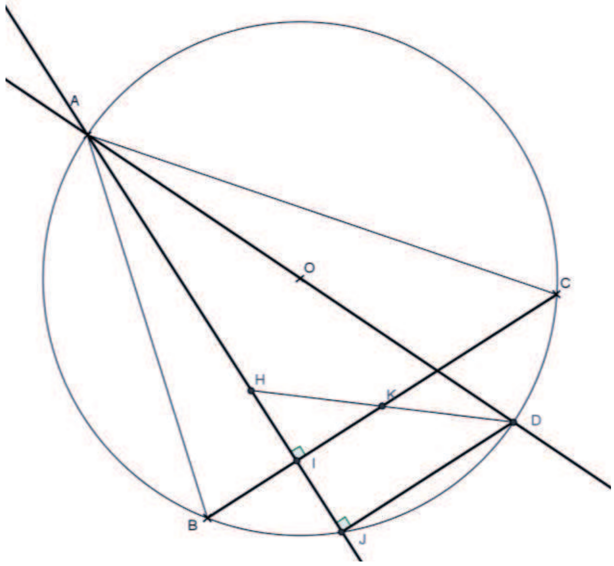
5) a) Nature du triangle ADJ

J est, par construction, un point du cercle. ADJ est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AD], il est donc un **triangle rectangle en J**.

(CI) et (DJ) sont parallèles

Puisque le triangle ADJ est rectangle en J, les droites (DJ) et (AJ) sont perpendiculaires.
La droite (AI) est une hauteur du triangle ABC, le point I est sur [BC] et A, I et J sont alignés : la droite (CI) est donc perpendiculaire à la droite (AJ).

On peut conclure que **les droites (CI) et (DJ) sont parallèles** car perpendiculaires à la même droite (AJ).

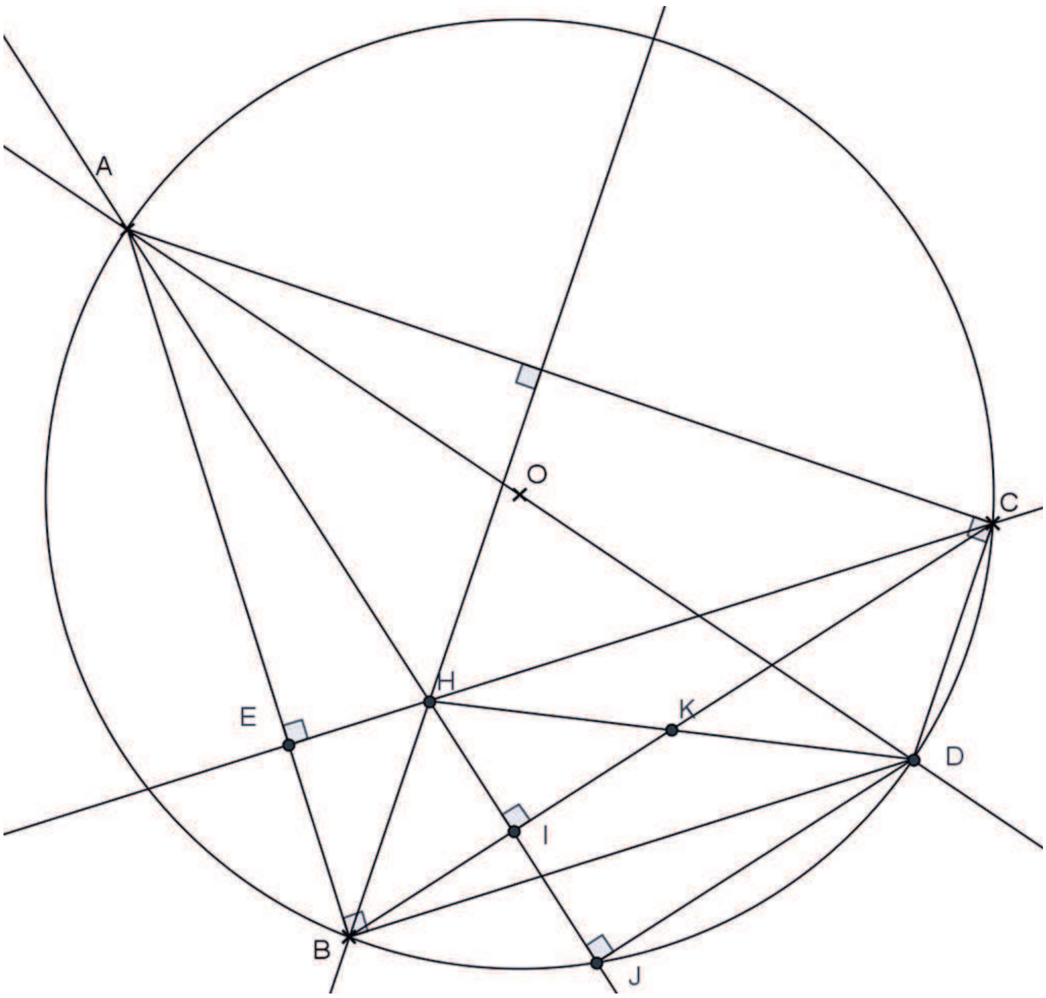


5) b) I est le milieu de [HJ]

Dans le triangle HDJ, (IK) et (DJ) sont parallèles et K est le milieu de [HD].
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.

Donc **I est le milieu de [HJ]**.

Figure finale :



PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

Tipi à base hexagonale

1) Étude du sol du tipi – Plan de l'hexagone

a) $\widehat{AOB} = 60°$

Par régularité de l'hexagone, on a : $\widehat{\mathrm{AOB}} = \widehat{\mathrm{BOC}} = \ldots = \widehat{\mathrm{FOA}} = \frac{360°}{6} = 60°$

b) OAB triangle équilatéral

OAB est isocèle en O car OA et OB sont des rayons du cercle.

De plus $\widehat{\mathrm{AOB}} = 60°$ donc OAB est équilatéral.

c) Programme de construction

Remarque :

L'échelle choisie pour la représentation étant $\frac{1}{100}$, la longueur d'un côté de l'hexagone sera de 2 cm sur la représentation.

Programme 1 :

On trace un cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm.

On place un point A, sur ce cercle puis on trace le diamètre [AD] (ou bien : la droite (AO) coupe C_1 en D).

On trace les cercle C_2 et C_3 de centres respectifs A et D, et de diamètre commun OA (soit 2 cm).

C_2 coupe C_1 en B et F, C_3 coupe C_1 en C et E

Remarque :

Il n'est pas attendu dans le programme de construction de préciser la position relative de ces points de sorte que A, B, C, D, E, F soient positionnés sur le cercle dans cet ordre.

Programme 2 :

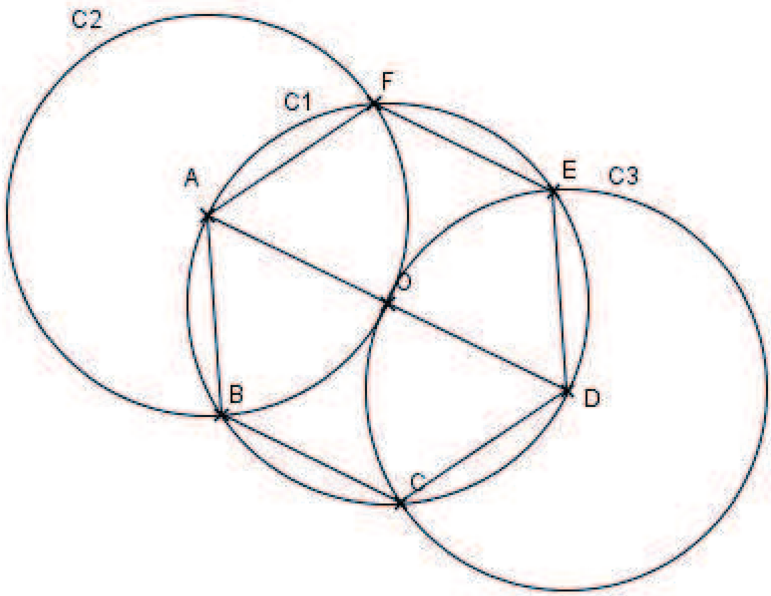
On trace le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm.

On place le point A sur ce cercle puis on trace un arc de cercle de centre A et de rayon OA qui coupe C_1 en un point B.

Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon OA qui coupe C_1 en un point C différent de A.

On réitère cette construction jusqu'à obtenir le point F.

d) Figure



2) Estimation du volume du tipi.

a) (OI) est perpendiculaire à (AB)

I est le milieu de [AB] donc (OI) est la médiane issue de O.
Or le triangle OAB est équilatéral, donc isocèle en O, donc la médiane (OI) est aussi la hauteur issue de O dans le triangle OAB. Ainsi **(OI) est perpendiculaire à (AB).**

b) Longueur OI sur le plan.

Le triangle OIA est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore on a donc : $\mathrm{OI}^2 + \mathrm{AI}^2 = \mathrm{OA}^2$

OAB étant équilatéral de côté 2 cm et I étant milieu de [AB], on a OA = 2 cm et AI = 1 cm

donc $\mathrm{OI} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AI}^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

La longueur OI est égale à $\sqrt{3}$ cm soit **1,7 cm à 0,1 cm près**.

c) Aire du triangle OAB, aire H de l'hexagone ABCDEF sur le plan.

L'aire de OAB est :

$$\mathcal{A}(\mathrm{AOB}) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{OI}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

L'aire de OAB est $\sqrt{3}$ cm² soit **1,7 cm² à 0,1 cm² près.**

L'hexagone est constitué de six triangles isométriques au triangle OAB.

L'aire de l'hexagone est donc égale à $6\sqrt{3}$ cm² soit **10,4 cm² à 0,1 cm² près.**

d) Aire de l'hexagone en vraie grandeur

L'échelle étant de $\frac{1}{100}$, ce qui est exactement le rapport entre l'unité de longueur utilisée sur la représentation (le centimètre) et l'unité de longueur utilisée en vraie grandeur (le mètre), les mesures sur la représentation et les mesures en vraie grandeur sont égales.
Donc **l'aire en vraie grandeur est d'environ 10,4 m² à 0,1 m² près.**

e) Volume V de la pyramide

On a donc $V = \frac{1}{3} H \times \mathrm{OS} = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$

Le volume de la pyramide est égal à $12\sqrt{3}$ m³ soit **20,8 m³ à 0,1 m³ près**.

3) Parois latérales

a) Longueur SI

On se place dans le triangle SOI.
(SO) est perpendiculaire au plan du sol, donc perpendiculaire à toute droite du plan de l'hexagone passant par O et en particulier perpendiculaire à (OI). SOI est donc un triangle rectangle en O et d'après le théorème de Pythagore, on a : $OI^2 + OS^2 = SI^2$ d'où $SI = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 6^2} = \sqrt{39}$.

La longueur SI est égale à $\sqrt{39}$ m.

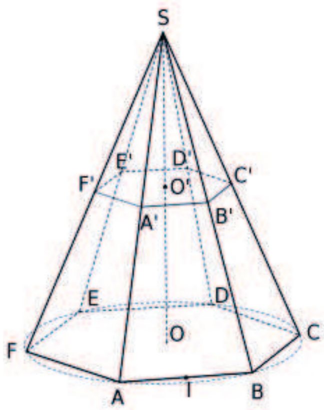
b) Aire du triangle SAB - Aire totale des faces triangulaires du tipi

Le triangle SAB étant isocèle en S, la médiane (SI) issue de S est aussi la hauteur relative au côté [AB].

$$\mathcal{A}(\mathrm{SAB}) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{2\sqrt{39}}{2} = \sqrt{39}$$

L'aire de SAB est égale à $\sqrt{39}$ m².
L'aire totale des faces triangulaires est donc $6\sqrt{39}$ m².

4) Création d'un toit à mi-hauteur



a) Longueur A'B'

A' et B' sont respectivement milieu de [SA] et [SB], d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle SAB, on a : $A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$

La longueur A'B' est égale à 1 m

b) Aire H' de l'hexagone A'B'C'D'E'F' et volume V' de la petite pyramide SA'B'C'D'E'F'.

Méthode 1 : elle s'appuie sur les calculs précédents (du A.2).

On a comme dans le cas précédent $\widehat{A'O'B'} = 60°$ et O'A'B' est équilatéral. On note I' le milieu de [A'B'] et donc $A'B' = \frac{1}{2}$ m

On calcule comme au A.2 : $O'I' = \sqrt{O'A'^2 - A'I'^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

l'aire de O'A'B' est $\mathcal{A}(A'O'B') = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{O'A' \times O'I'}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (en m²)

d'où $H' = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

L'aire H' est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m².

$V' = \frac{1}{3} H' \times O'S = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Le volume V' est égal à $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m³.

Méthode 2 : la pyramide SA'B'C'D'E'F' s'obtient par une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de la pyramide SABCDEF.

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

On obtient ainsi :

$H' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times H = \frac{H}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V = \frac{V}{8} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

L'aire H' est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m² et le volume V' est égal à $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m³.

5) Fixation de la toile

a) Diviseurs de 200.

On effectue la décomposition en facteurs premiers de 200 :

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

Les diviseurs de 200 sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $2^p \times 5^q$ avec p et q entiers naturels tels que $p \leq 3$ et $q \leq 2$.

Pour les obtenir, on peut dresser le tableau suivant :

	5^0	5^1	5^2
2^0	1	5	25
2^1	2	10	50
2^2	4	20	100
2^3	8	40	200

Les douze diviseurs de 200 sont donc : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200.

Remarque :
On aurait aussi pu, au lieu de dresser le tableau, construire un arbre de choix.

a) Valeurs de *L* possibles

Sachant que L doit être un multiple de 5, on cherche dans la liste des diviseurs de 200 les multiples de 5. Il y en a 8 donc 8 valeurs possibles de L : **5, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200.**

b) Nombre total de piquets utilisés autour de l'hexagone

Méthode 1 :

Le contour de cet hexagone est une ligne fermée sur laquelle on va placer des piquets tous les 25 cm. Sur une ligne fermée, le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles.

Le périmètre total est de 1200 centimètres donc on a 1200/25 soit **48 piquets au total.**

Méthode 2 :

Un côté de l'hexagone peut être vu comme une ligne ouverte sur laquelle on va placer des piquets aux extrémités et tous les 25 cm. Dans cette configuration, on a un piquet de plus que d'intervalles.

L étant égal à 25 cm sur un côté de 200 cm, il y a 9 piquets $\left(\frac{200}{25} + 1\right)$

Il y a 6 cotés sur lesquels on a 9 piquets, mais on compte ainsi deux fois chaque piquet d'angle. Le nombre total de piquets est donc donné par : 6 × 9 – 6 = 54 – 6 soit **48 piquets.**

PROBLÈME DE RECHERCHE DE MAXIMUM D'UNE FONCTION D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

A) Première propriété

On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble de tous les couples de réels positifs a et b vérifiant la propriété (P) : « $a^2 + b^2 = 100$ ».

1) Justification du fait que si $(a; b)$ est un couple de solutions, alors a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 10

Méthode 1 :

Soit $(a\,;b)$ un couple de solutions.
Supposons que l'un des nombres a ou b soit strictement supérieur à 10 (par exemple a). On aurait alors $a^2 > 100$ et donc, comme b^2est positif, on aurait $a^2 + b^2 > 100$, ce qui contredit le fait que $(a; b)$ est solution. Aucun des deux nombres a et b ne peut donc être strictement supérieur à 10.
Tous les couples de réels positifs a et b vérifiant la propriété (P) : « $a^2 + b^2 = 100$ » sont donc bien tels que a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 10.

Méthode 2 :

Quelles que soient les valeurs de a et de b, $0 \leq b^2$, $0 \leq a^2$, d'où $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$.
Par conséquent, si$(a\,;b)$ est solution alors $a^2 + b^2 = 100$, et donc $a^2 \leq 100$ et $b^2 \leq 100$. a et b étant positifs et la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a alors $a \leq 10$ et $b \leq 10$.

2) Inventaire des couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant la propriété (P)

On peut donner à a toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 10 et, pour chacune de ces valeurs, calculer b tel que $b^2 = 100 - a^2$. $(a\,;b)$ est alors un couple d'entiers solution si et seulement si b est entier.

Regrouper les calculs dans un tableau peut se révéler efficace pour ce genre de recherche.

On propose ci-dessous, à titre d'exemple, un tableau construit à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D
1	a	b²	b (sachant que b est positif)	couple (a;b) solution
2	0	100	10	(0;10)
3	1	99	9,949874371	pas de solution
4	2	96	9,797958971	pas de solution
5	3	91	9,539392014	pas de solution
6	4	84	9,16515139	pas de solution
7	5	75	8,660254038	pas de solution
8	6	64	8	(6;8)
9	7	51	7,141428429	pas de solution
10	8	36	6	(8;6)
11	9	19	4,358898944	pas de solution
12	10	0	0	(10;0)

et les formules à saisir :

	A	B	C	D
1	a	b²	b (sachant que b est positif)	couple (a;b) solution
2	0	=100-A2^2	=RACINE(B2)	(0;10)

On obtient alors les couples d'entiers vérifiant la propriété (P) : (0 ; 10) ; (6 ; 8) ; (8 ; 6) et (10 ; 0).

3) Recherche des valeurs de a, a réel positif, telles que le couple $(a\,;\,a)$ vérifie la propriété (P) (avec a donné sous la forme $p\sqrt{q}$, avec p et q entiers naturels, q le plus petit possible)

Le couple (a ; a) vérifie la propriété (P) si et seulement si a est solution de l'équation $2a^2 = 100$ soit $a^2 = 50$.

a étant positif, on trouve $a = \sqrt{50}$, soit $= \sqrt{2 \times 5^2}$, soit encore $\boldsymbol{a = 5\sqrt{2}}$.

B) Recherche d'une aire maximale

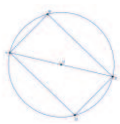
1) Mise en évidence d'un cercle (C) auxquels appartiennent tous les sommets B et D des rectangles ayant comme diagonale [AC]

Méthode 1 :

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et sont de même longueur donc ABCD est inscrit dans le cercle de centre de centre O, milieu de [AC], et de diamètre [AC]. Donc les points B et D appartiennent au cercle de diamètre [AC].

Méthode 2 :

Dans le rectangle ABCD, les triangles ABC et ADC sont rectangles respectivement en A et D. Or on sait qu'un triangle rectangle est inscrit dans le cercle qui a comme diamètre son hypoténuse. Le triangle ABC, rectangle en A, est donc inscrit dans le cercle de diamètre [AC], et il en est de même pour le triangle ADC. En conclusion, les points B et D appartiennent au cercle de diamètre [AC].



2) Aire du rectangle ABCD en fonction de AC et BH, où H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

Dans le rectangle ABCD, les triangles rectangles ABC et ACD sont *isométriques* (ou *superposables*) donc de même aire. L'aire du rectangle ABCD est donc égale au double de l'aire du triangle ABC.

L'aire de ABCD est donc égale à $2 \times \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BH}}{2}$ soit $\mathbf{AC \times BH}$.

3) Position à donner à B sur (C) pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximale. Nature du rectangle ABCD dans ce cas

Position des points B et D

On a vu dans les questions précédentes que quel que soit le rectangle ABCD dont la diagonale est [AC], l'aire du rectangle est égale à AC × BH, où H est le projeté orthogonal de B sur [AC].

[AC] étant fixé, l'aire de ABCD est donc maximale lorsque BH l'est la plus grande possible.

Or quelle que soit la position du point B sur le cercle du diamètre [AC], BH est toujours inférieure ou égale au rayon du cercle. Il suffit de considérer le triangle rectangle BOH rectangle en H : BH est toujours inférieure ou égale à la longueur OB de l'hypoténuse, qui est aussi un rayon du cercle).

De plus l'égalité entre BH et OB, rayon du cercle n'a lieu que lorsque H est confondu avec O.

B et D sont alors situés sur la perpendiculaire à (AC) passant par O.

B et D sont alors les points d'intersection B' et D' de la médiatrice de [AC] avec le cercle.

Nature du quadrilatère AB'CD'.

Les diagonales [AC] et [B'D'] de ce quadrilatère sont des diamètres du cercle, donc ont même milieu et même longueur. : AB'CD' est donc bien un rectangle.

De plus ces diagonales sont perpendiculaires (car (B'D') est la médiatrice du segment [AC]), donc **le quadrilatère AB'CD' est un carré.**

4) Preuve de la propriété : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est égale à 100 est maximal lorsque $a = b$ »

On considère l'ensemble des couples de nombres positifs (a ; b) tels que $a^2 + b^2 = 100$.
Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent d'affirmer que les rectangles de côté a cm et b cm avec $a^2 + b^2 = 100$ sont exactement les rectangles dont la diagonale a pour longueur 10 cm .

Chercher des nombres a et b tels que $a^2 + b^2 = 100$ et ab soit maximal revient donc à chercher un rectangle d'aire maximale parmi les rectangles dont la diagonale a pour longueur 10 cm.

D'après la question précédente, on sait qu'il suffit pour cela que le rectangle soit un carré, autrement dit que $a = b$.

5) Modification de l'énoncé de cette partie pour pouvoir énoncer la propriété : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est fixée est maximal lorsque $a = b$ » .

Soit c la somme des carrés considérée.
Dans la généralisation, c remplace le nombre 100 ; or 100 intervient dans les calculs qui précèdent comme le carré de la mesure (avec le cm comme unité de longueur) du segment [AC]. Pour généraliser on va donc prendre un segment [AC] de longueur a cm, avec c carré de la mesure a, soit $a = \sqrt{c}$.

L'énoncé devient : on considère un segment [AC] de longueur $\sqrt{c}$ cm et on s'intéresse aux rectangles ABCD dont [AC] est une diagonale.

En effet, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait dans les questions 2 et 3, on peut alors montrer que l'aire maximale que l'on peut obtenir pour un tel rectangle est atteinte quand ABCD est un carré.
Si on considère l'ensemble des couples de nombres positifs (a ; b) tels que $a^2 + b^2 = c$.
Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent d'affirmer que les rectangles de côté a cm et b cm avec $a^2 + b^2 = c$ sont exactement les rectangles dont la diagonale a pour longueur $\sqrt{c}$ cm .

Chercher des nombres a et b tels que $a^2 + b^2 = c$ et ab soit maximal revient donc à chercher un rectangle d'aire maximale parmi les rectangles dont la diagonale a pour longueur $\sqrt{c}$ cm.

D'après la question précédente, on sait qu'il suffit pour cela que le rectangle soit un carré, autrement dit que $a = b$.

Ce qui établit la propriété : **« Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est égale à 100 est maximal lorsque $a = b$ ».**

C) Recherche d'un périmètre maximal

1) Expression de la mesure du périmètre de ABCD en fonction de x

Le périmètre du rectangle ABCD est égal à $2 \times (\mathrm{AB} + \mathrm{BC})$.
AB = x.
Dans le triangle ABC, rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 10^2$
d'où $\mathrm{BC}^2 = 10^2 - \mathrm{AB}^2 = 100 - x^2$
AB<10, donc $100 - x^2 \geq 0$ et donc $\mathrm{BC} = \sqrt{100 - x^2}$.
Quand AB = x, la mesure en cm du périmètre de ABCD est donc égale à $2 \times \left(x + \sqrt{100 - x^2}\right)$.

2) Identification de la courbe qui représente les variations du périmètre du rectangle ABCD en fonction de x.

Si on remplace x par 0 dans la formule établie à la question 1), on trouve la valeur 20.
Pour qu'une courbe représente les variations du périmètre du rectangle ABCD en fonction de x, il est nécessaire que l'image de 0 par la fonction représentée soit 20.
Or la lecture du graphique donné permet d'affirmer que l'image de 0 par la fonction représentée par (C1) est 20 alors que l'image de 0 par la fonction représentée par (C2) est 0
On en conclut que seule (C1) convient.

3) Détermination par lecture graphique d'un encadrement d'amplitude 1 de x tel que le périmètre de ABCD semble maximal

On cherche sur la courbe (C1) le point d'ordonnée maximale et on lit son abscisse.
En respectant l'amplitude imposée par le texte, **plusieurs réponses sont possibles, par exemple 6,5 < x < 7,5 ou 6,7 < x < 7,7.**

4) Formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B

Une des deux formules ci-dessous peut être saisie en B2 :

`=2*(A2+RACINE(100 – A2^2))` ou `=2*(A2+RACINE(100 – A2*A2))`

5) Détermination à l'aide du tableau de valeurs d'une valeur approchée au dixième près de la valeur de x permettant d'obtenir le périmètre maximal.

On peut lire : **$x \approx 7{,}1$ au dixième près**.

D) Dernier problème…

1) Étude d'une nouvelle configuration pour établir une nouvelle propriété

a) Égalité des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BCH}$, et égalité des rapports $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ et $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$

Méthode 1 (avec trigonométrie)

Par définition de B, le triangle ABH est rectangle en H.
Par ailleurs, le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle qui a comme diamètre l'un de ses côtés : il est donc rectangle en B.
On en déduit que les angles $\widehat{\mathrm{ABH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}}$ sont chacun complémentaires de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Ils sont donc égaux (on peut aussi écrire $\widehat{\mathrm{ABH}} = 90° - \widehat{BAC}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}} = 90° - \widehat{\mathrm{BAC}}$).
Dans les triangles BHA et BHC tous deux rectangles en H, on a donc respectivement : $\tan\left(\widehat{\mathrm{ABH}}\right) = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ et $\tan\left(\widehat{\mathrm{BCH}}\right) = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$. Comme les angles $\widehat{\mathrm{ABH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}}$ sont égaux, on obtient : $\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{BH}} = \frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{CH}}$.

Méthode 2 (sans trigonométrie, avec les triangles semblables).

On démontre comme dans la méthode 1 que les triangles BHA et CHB sont rectangles et qu'ils ont deux angles égaux $\widehat{\mathrm{ABH}} = \widehat{\mathrm{BCH}}$. Leurs troisièmes angles respectifs sont donc aussi égaux.

Les triangles BHA et CHB ont donc leurs trois angles deux à deux égaux : ils sont donc semblables, donc les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.
Le rapport de deux longueurs de l'un des triangles est donc égal au rapport des longueurs correspondantes du second, ce qui donne le résultat demandé.

b) Égalité $\mathbf{BH^2 = AH \times CH}$

De l'égalité de rapports $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$, on déduit directement que $\mathbf{BH^2 = AH \times CH}$.

Remarque :
Cette propriété est une propriété « classique » du triangle rectangle : « le carré de la hauteur issue de l'angle droit dans un triangle rectangle est égale au produit des distances du pied de la hauteur aux extrémités de l'hypoténuse ».

c) Preuve d'une nouvelle propriété : le produit de deux nombres positifs, dont la somme est fixée, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux

Soit s un nombre positif, fixé.
Soit x et y deux nombres positifs dont la somme est égale à s. On cherche les valeurs à leur donner pour que le produit xy soit maximal.

Soit [AC] un segment tel que AC = s cm.
Pour deux valeurs de x et y données telles que $x + y = s$, on construit le point H sur le segment [AC] tel que AH = x cm ; on a alors HC = y cm (car A, H et C sont alignés dans cet ordre donc HC = AC - CH).
On construit aussi le point B à partir de H comme décrit dans l'énoncé ci-dessus.

De l'égalité $\mathrm{BH}^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{CH}$, on déduit que le produit $x \times y$ des deux nombres est égal à BH^2, et ceci quelle que soit la position de H sur [AC].

Chercher à rendre le produit xy maximal revient donc à chercher les positions à donner à H sur le segment [AC] pour que BH^2 soit maximal.

BH^2 est maximal si et seulement si BH l'est. Or comme vu plus haut, la longueur de la demi-corde [BH] est maximale si et seulement si [BH] est un rayon du demi-cercle de diamètre [AC], autrement dit si et seulement si H est en O et donc si et seulement si $x = y$.

Conclusion : le produit de deux nombres positifs dont la somme est fixée est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

2) Étude du produit de deux nombres dont la somme est fixée et égale à 10

a) Une expression du produit de deux nombres dont la somme est égale à 10, en fonction de l'un des deux nombres

$x + y = 10$, donc le deuxième nombre peut s'exprimer en fonction du premier : $y = 10 - x$.
Leur produit peut alors aussi s'exprimer en fonction du premier nombre : $p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

b) Une autre expression du produit des deux nombres

En développant $-(x - 5)^2 + 25$.
On obtient : $-(x - 5)^2 + 25 = -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -x^2 + 10 = p(x)$
d'où $p(x) = -(x - 5)^2 + 25$.

c) Recherche du maximum du produit de deux nombres dont la somme est 10. Retour sur une propriété

Pour tout nombre x, $(x - 5)^2 \geq 0$, donc $25 - (x - 5)^2$ est toujours inférieur ou égal à 25, et est maximal quand $(x - 5)^2$ est nul donc quand $x = 5$.
Pour $x = 5$, on obtient $p(5) = 25$.
p est donc maximal pour $x = 5$ et vaut alors 25.
On retrouve le résultat de la partie D)1) dans le cas où AC = 10.

EXERCICE DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET D'ALSACE

1) Niveau de la classe.

Cette situation relève du cycle 3, et plus précisément du CM2. On ne trouve pas explicitement cette compétence dans les programmes 2008. Les élèves sont amenés à tracer une figure à partir d'un programme de construction depuis le CM1. On s'accorde à dire que c'est en CM2 qu'ils peuvent élaborer eux-mêmes un texte prescriptif en vue de faire reproduire la figure par un autre groupe. Ce sera l'occasion de renforcer le regard porté sur une figure : reconnaître ses éléments simples et anticiper sa construction (choix des outils et de l'ordre de la construction).

Remarque :
Ici, les élèves doivent reconnaître le carré ABCD, le cercle centré en C, l'intersection E du cercle et de la diagonale [AC]. Les dimensions (côté du carré et rayon du cercle) devront être mesurées sur la figure témoin.

2) Analyse des productions.

<u>*Production 1 :*</u>

Erreurs

- Objets insuffisamment définis :
  - la position du sommet C du carré n'est pas précisée : « dans » le cercle permet de savoir que C appartient au disque délimité par le cercle tracé précédemment, et non pas qu'il en est le centre ; plus tard, lorsque le carré est nommé, la position spécifique du sommet C n'est pas évoquée;
  - « trace le segment du coin dans le cercle à l'autre coin » ne permet pas de savoir lequel des segments [CA], [CD] ou [CB] il faut tracer.
  - « trace un cercle de 3 cm » : la longueur fournie fait certainement référence de façon implicite au rayon du cercle. Il est probable qu'elle n'entraîne pas une erreur chez le récepteur.
- Définition d'objet erronée :
  - « Trace le segment du coin en bas à gauche jusque… » ne permet pas de tracer le segment [DE], sauf si, par le plus grand des hasards, le dessin tracé par les récepteurs du message est dans la même position sur la feuille que le modèle, et que l'on positionne la feuille de façon identique devant soi pour la regarder…

Hypothèses sur l'origine des erreurs :

- lacunes dans la maîtrise notionnelle des objets géométriques et de leurs caractéristiques ;
- difficulté à mobiliser un vocabulaire géométrique précis ;
- difficulté à exploiter la désignation des objets géométriques (les points ici) ;
- difficulté à se décentrer et à envisager des orientations différentes de celles des figures prototypiques.

<u>*Production 2 :*</u>

Erreurs

- Objets insuffisamment définis :

Le segment [CA] est qualifié de « trait entre A et C », sans explicitation du fait que ce trait doit être « droit » ; toute ligne (brisée, courbe, etc) d'extrémités A et C pourrait donc convenir… Idem pour le segment [DE].

Remarque :
La longueur du côté du carré est imprécise au mm près, mais au cycle 3, elle demeure tout à fait acceptable.

Hypothèse sur l'origine de l'erreur :

Ici encore, la difficulté à se décentrer, ainsi que la non connaissance du vocabulaire géométrique spécifique peuvent être évoqués.
L'emploi de ce terme « trait » renvoie probablement à une pratique de classe, « tracer un trait sous la date » par exemple. De fait, la distinction langage quotidien/langage mathématique a du mal à se faire.

EXERCICE SUR LES AIRES
ISSU DE SUJETS PROPOSÉS À DRAGUIGNAN ET À LYON
(D'APRÈS TOULOUSE 99)

1) Toutes les valeurs du couple (x ; y)

L'aire de ABCDEF est égale à l'aire du rectangle ABDE, soit $x \times (2y) = 2xy$. On recherche donc des couples de nombres entiers naturels (x ; y) tels que :

(I) $2xy = 96$
(II) $x > y$
(III) x et y entiers

La condition (I) est équivalente à (I') $xy = 48$.
Les conditions (I') et (III) amènent à rechercher les différentes décompositions de 48 en produits de deux entiers. Or : $48 = 48 \times 1 = 24 \times 2 = 16 \times 3 = 12 \times 4 = 8 \times 6$.
La condition (II) conduit aux **solutions suivantes : (48 ; 1) ; (24 ; 2) ; (16 ; 3) ; (12 ; 4) ; (8 ; 6).**

2) Couple (x ; y) tel que le périmètre du polygone ABCDEF soit 56 cm

On note p le périmètre de ABCDEF : p = AB + BC + CD + DE + EF + FE.
Puisque les quatre triangles ABF, CFB, EDF et CFD sont superposables :
AB = DE = x et AF = FE = BC = CD.
En outre, [AF] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont respectivement x et y.
D'après le théorème de Pythagore : BC = $\sqrt{x^2 + y^2}$.
On en déduit l'expression de p en fonction de x et y : $p = 2x + 4\sqrt{x^2 + y^2}$.
On recherche parmi les cinq couples précédents celui ou ceux pour lesquels $p = 56$.
Si (x ; y) = (48 ; 1), $p = 96 + 4\sqrt{2305}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (24 ; 2), $p = 48 + 4\sqrt{580}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (16 ; 3), $p = 32 + 4\sqrt{265}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (12 ; 4), $p = 24 + 4\sqrt{160}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (8 ; 6), $p = 16 + 4\sqrt{100}$ donc $p = 56$.

Il n'existe donc qu'un seul couple tel que le périmètre soit égal à 56 cm : (8 ; 6).

3) a) Argument en faveur d'un document ne respectant pas les dimensions indiquées sur les figures

En faisant ce choix, l'enseignant veut sans doute éviter que les élèves se servent de leur règle pour mesurer directement sur les figures. Il veut amener les élèves à développer un raisonnement basé sur les valeurs indiquées sur les figures.

3) b) Règle implicite utilisée par Alexia

La somme 3 + 5 + 4 correspond à la mesure du périmètre du triangle. Alexia fait probablement le raisonnement suivant : « *Il y a quatre triangles. Les quatre triangles sont identiques, ils ont donc chacun le même périmètre. Pour trouver le périmètre total, on multiplie le périmètre du triangle A par le nombre de triangles* ».
Alexia utilise implicitement la règle non-pertinente suivante : « *Le périmètre de la réunion de plusieurs surfaces est égal à la somme des périmètres de chacune des surfaces* ».

L'aire est une grandeur mesurable : dans une juxtaposition de plusieurs surfaces, l'aire totale est égale à la somme des aires des différentes surfaces (propriété d'additivité de l'aire). Le périmètre n'est pas une grandeur mesurable car dans la juxtaposition de surfaces, certains côtés sont confondus et ne sont plus comptabilisés dans le calcul du périmètre de figure obtenue par juxtaposition.

3) c) Production de Bastien

Avec sa règle graduée, Bastien mesure les longueurs sur le dessin où le triangle n'est pas réalisé en vraie grandeur. Pour le côté de 4 cm, il mesure 2,2 cm et, pour le côté de 6 cm, il mesure 3,4 cm.
La figure 1 est donc pour l'élève un rectangle de 2,2 cm par 3,4 cm. Il applique alors convenablement les formules de périmètre (*mise en jeu du demi-périmètre*) et d'aire d'un rectangle.
Pour la figure 2, le périmètre est convenablement calculé par la somme des longueurs des côtés de la figure (*définition du périmètre*).
Le raisonnement pour déterminer l'aire de la figure 2 est correct. Il montre une bonne compréhension de la notion d'aire : il imagine le déplacement et la réorganisation spatiale des triangles permettant de reconstituer le rectangle (*principe de conservation des aires*).
Pour réaliser les calculs, il s'est appuyé sur sa connaissance des nombres décimaux. Les calculs sont corrects.
Visiblement cet élève maitrise bien les notions d'aire et de périmètre. Cependant il n'exprime pas les mesures dans l'unité donnée : cm^2.

3) d) Deux interprétations possibles du calcul 6 × 4 = 24

1ère interprétation :

La figure 1 est un rectangle ; 6 × 4 peut être compris comme 6 cm×4 cm c'est-à-dire le produit de sa longueur par sa largeur, donc 24 est la mesure de son aire par l'application de la formule qui donne l'aire du rectangle.

2ème interprétation :

L'aire de la figure 1 est aussi 4 fois l'aire du triangle A (6 cm^2 indiqué dans l'énoncé), les triangles A, B, C et D étant identiques. Et donc l'aire de la figure 1 est égale à 4×6 cm^2.

3) e) La non-réponse en d) de Cyril

La figure 2 est complexe et l'élève ne connait pas de formule pour calculer son aire. Donc pour lui, l'aire s'obtient forcément par l'application d'une formule ou ne peut être calculée que pour un rectangle et un carré.
Ce qui permet de dire que la deuxième interprétation à la question précédente n'est pas la bonne Pour Cyril, car sinon il aurait su également calculer l'aire de la figure 2, comme assemblage de 4 triangles d'aire 6 cm^2. *Pour Cyril, calculer une aire, c'est appliquer une formule*.

EXERCICE SUR LA DIVISION EUCLIDIENNE ISSU D'UN SUJET PROPOSÉ À LA ROCHE SUR YON

Remarque préalable :
L'analyse approfondie des différentes procédures utilisées par les élèves est indispensable pour pouvoir répondre aux questions posées. La rédaction détaillée de cette analyse n'est pas demandée, mais nous l'explicitons ci-dessous pour la formation du candidat.

Élève A	L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit à gauche l'intégralité du répertoire multiplicatif de 38. Il surligne 38, divise 38 par 38. Il écrit 1 comme 1er chiffre du quotient. Il écrit le reste 0 sous 38 sans poser la soustraction. Il abaisse 742, en une fois ou chiffre par chiffre et écrit 0 comme 2ème chiffre du quotient (pas d'indice sur la chronologie effective). Il surligne 74, retranche à 742 le plus grand multiple de 38 (10 fois), pose la soustraction, écrit le reste 362. Au quotient il écrit 1 dans la colonne des dizaines. Au reste 362, il retranche 342 le plus grand multiple de 38 (9 fois). Il pose la soustraction et écrit le reste 20. Il écrit 9 au quotient. Il vérifie ensuite en posant la multiplication du diviseur par le quotient trouvé. Il n'ajoute pas le reste 20.
Élève B	L'élève écrit à gauche quelques lignes de la table de 38 et en particulier 10 fois 38 et 20 fois 38. Il retranche à 38742 le plus grand multiple possible de 38 par une puissance de 10, ici 38 000 et écrit 1000 dans la colonne quotient. Il pose la soustraction et écrit le reste (742). Il recherche parmi les multiples de 38 par une puissance de 10, le lus grand inférieur à 742 (les deux lignes de la table de 38 (38×10 et 38×20) le confirment) et il trouve 380. Il écrit 10 dans la colonne quotient, retranche 380 à 742 et il trouve 462. Il retranche à nouveau 380 en écrivant 10 dans la colonne quotient. Le reste est 82. Il retranche alors le plus grand multiple possible de 38, soit 76 et écrit 2 dans la colonne quotient. Le reste obtenu est 6. Il ajoute tous les nombres écrits dans la colonne quotient et obtient 1022.
Élève C	L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit à gauche les lignes de la table de 38 qui lui permettent de trouver les 2ème et 3ème chiffres du quotient. Il surligne 38, divise 38 par 38 et écrit 1 au quotient. Il abaisse 74 ou 7 puis 4, retranche à 74 le plus grand multiple de 38 (1 fois), sans poser la soustraction, mais en écrivant - 38 à côté de 74. Il écrit le reste 36. Il écrit 1 comme deuxième chiffre du quotient. Il abaisse 2 et retranche à 362 le plus grand multiple de 38 (9 fois), sans poser la soustraction mais en écrivant - 342 à côté de 362, il écrit le reste 20. Il écrit 9 comme troisième chiffre du quotient. Il écrit enfin 0 pour compléter le 4ème chiffre du quotient

1.) a) Division euclidienne de 87 655 par 38 « à votre manière »

On suppose que « votre manière » fait référence à la technique usuelle de la division enseignée en cycle 3 en France :

	8	7	6	5	5	3	8		
-	7	6				2	3	0	6
	1	1	6						
-	1	1	4						
			2	5	5				
		-	2	2	8				
				2	7				

Remarque :
On peut ne pas poser les soustractions.

1) b) Division euclidienne de 87 655 par 38 à la manière de l'élève B

$38 \times 1 = 38$	$38 \times 100 = 3800$	$38 \times 1000 = 38000$
$38 \times 2 = 76$	$38 \times 200 = 7600$	$38 \times 2000 = 76000$
$38 \times 4 = 142$	$38 \times 300 = 11400$	$38 \times 3000 = 114000$
$38 \times 6 = 228$	$38 \times 400 = 14200$	
$38 \times 7 = 266$		

	8	7	6	5	5	3	8		
-	7	6	0	0	0	2	0	0	0
	1	1	6	5	5		3	0	0
-	1	1	4	0	0				6
			2	5	5	2	3	0	6
		-	2	2	8				
				2	7				

2) Caractéristiques des deux techniques

Technique « usuelle » :

- On remarque que le nombre de dizaines de milliers (8) du dividende est inférieur au diviseur (38)
- On divise successivement par 38 le nombre de milliers du dividende (87), puis le nombre de centaines du reste obtenu (116), *etc*.
- Le quotient est obtenu chiffre après chiffre : chiffre des milliers, puis des centaines, *etc*.

Remarque :
Cette méthode s'appuie sur le partage successif des unités de numération.

Technique de l'élève B :

- Le dividende est toujours considéré dans sa globalité (nombre d'unités simples). On cherche des quotients intermédiaires successifs qui sont multiples de 1000, puis de 100, etc.
- Le quotient de la division est obtenu comme la somme de ces quotients intermédiaires.

Remarque :
Cette méthode s'appuie sur la recherche de « meilleurs multiples » du diviseur.

3) Erreurs éventuelles des productions d'élèves et hypothèses sur leurs origines

Élève A :

Pas d'erreur.

Élève B :

Résultat incorrect. La seule erreur est une erreur de retenue dans la soustraction posée 742 – 380. Il trouve 462 au lieu de 362.

Élève C :

Résultat incorrect. Le 2ème chiffre du quotient aurait dû être 0. L'élève a abaissé d'abord le 7 du dividende et comme 7 est plus petit que 38, il a alors abaissé le 4 et a poursuivi la division (par similarité avec la recherche du premier chiffre du quotient).
Il obtient le nombre 119 au quotient. Comme il avait auparavant prévu quatre chiffres pour le quotient (présence de quatre points), il complète ce nombre par un 0.

4) a) Procédure des élèves pour déterminer le nombre de points

Le nombre de points correspond au nombre de chiffres du quotient cherché.
Les élèves cherchent et surlignent le plus petit nombre supérieur au diviseur que l'on peut former avec les premiers chiffres du dividende (ici 38).
Ils peuvent alors compter : le groupement (« un ») et chacun des chiffres suivants du dividende (ici : « deux, trois, quatre »), ce qui leur donne le nombre de chiffres du quotient.

Justification mathématique de cette procédure.

Le rang de l'unité du plus petit nombre supérieur au diviseur que l'on peut former avec les premiers chiffres du dividende indique le rang du premier chiffre du quotient.
Ici 38742 = 38 milliers 742 unités, donc le premier chiffre du quotient est un chiffre des milliers qui sera suivi par trois autres chiffres. En effet, en divisant des milliers par un nombre plus petit, on obtient des milliers (au quotient); et il restera éventuellement des centaines, dizaines et unités à diviser, qui donneront à leur tour des centaines, dizaines et unités au quotient.

Remarque :
On peut aussi justifier cette technique par l'encadrement du dividende entre les multiples de 38 par les puissances de 10.
Ici, 38742 est compris entre 38×1000 et 38×10000 (strictement), donc le quotient est compris entre 1000 et 9999, il a donc 4 chiffres.

4) b) Intérêt pédagogique et limite à l'utilisation des points

L'intérêt de la recherche du nombre de chiffres du quotient est double :

- donner un ordre de grandeur du quotient (par exemple si on a quatre points on sait que le quotient est un nombre compris entre 1000 et 9999) ;
- permettre un certain contrôle du résultat : si l'élève trouve un nombre à trois chiffres alors qu'il avait écrit quatre points, cela peut l'amener à remettre en cause son résultat et reprendre l'algorithme.

La production de l'élève C témoigne d'une limite à l'utilisation de ces points : ils peuvent ne pas être suffisants pour une invalidation de la réponse obtenue par l'élève. En effet, l'élève C, après avoir trouvé un nombre à trois chiffres, place un 0 sur le dernier point pour obtenir le nombre de chiffres cherché.

EXERCICE SUR LA PROPORTIONNALITÉ D'APRÈS UN SUJET DE DIJON

Élève 1 :

L'élève a commencé par doubler les quantités d'ingrédients données et ainsi déterminer les quantités pour 8 coupes (recours implicite au coefficient de linéarité, k = 2).

L'élève doit se rendre compte qu'il ne répond pas à la question puisqu'il change alors de procédure, il explique d'ailleurs uniquement ce deuxième raisonnement. Dans la "logique" des doubles et des moitiés, l'élève pense sans doute qu'en connaissant les quantités pour 5 coupes, il peut les doubler pour connaitre les quantités pour 10 coupes.

À partir des quantités connues pour quatre coupes, il semble alors s'appuyer sur un modèle additif incorrect (est-ce que pour cet élève « augmenter c'est ajouter » ?). Il ajoute donc 1 œuf , 50 gr de chocolat et 5 gr de sucre sans expliquer ses choix. Si on peut comprendre la raison (fausse) qui le conduit à prendre un œuf de plus (on passe de 4 à 5 coupes, on ajoute donc 1 œuf), plus difficile à comprendre est le choix fait pour les deux autres ingrédients.

Pour finir, il double toutes les quantités établies pour 5 coupes afin de déterminer celles pour 10 coupes.

Cet élève ne commet aucune erreur de calcul. Sa procédure est partiellement correcte ; il semble faire appel à ses connaissances sur les doubles et les moitiés de nombres entiers naturels (calcul automatisé et réfléchi).

Élève 2 :

La procédure est bien décrite par l'élève dans la partie consacrée aux explications du raisonnement : il décompose 10 comme la somme de la moitié de 4 et du double de 4. Il calcule donc successivement les quantités d'ingrédients pour 2 coupes puis pour 8 coupes et les additionne. Le tableau présent dans la colonne de droite lui sert à synthétiser ses réponses mais pas à faire ses calculs (vraisemblablement, il les traite mentalement et se contente de reporter les résultats dans le tableau, sans doute au fur et à mesure).

Sa procédure mobilise implicitement les deux propriétés de la linéarité pour transférer aux autres grandeurs en jeu (« œufs », « chocolat » et « sucre ») les relations arithmétiques existant entre les valeurs prises par la grandeur « nombre de coupes » :

- multiplicative (diviser par 2 et multiplier par 2, il se sert sans doute de ses connaissances sur les moitiés et les doubles de nombres entiers naturels),
- puis additive (ajouter 2 et 8).

Élève 3 :

L'élève donne une explication sans doute sommaire mais suffisante pour analyser sa procédure. Il applique successivement deux fois la propriété multiplicative de la linéarité (diviser par 2 puis multiplier par 5 sur la grandeur « nombre de coupes » qu'il répète sur les trois autres grandeurs en jeu (œufs, chocolat et sucre).

Si la procédure est correcte, ses calculs sont partiellement corrects.
En effet, pour le calcul de la quantité de sucre (15×5), il a procédé par un calcul en ligne (5 fois 1 puis 5 fois 5) sans prendre en compte la retenue due à la valeur positionnelle des chiffres 1 et 5. Cette procédure erronée lui a sans doute servie aussi pour calculer 50×5 mais, dans ce cas, elle ne conduit pas à un résultat faux car il n'y a pas de retenue.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Numération au CE2 d'après un sujet de Poitiers

1) La réponse attendue

La réponse attendue est : 86 carnets. En effet comme $856 = 85 \times 10 + 6$ (ou $856 : 10 = 85{,}6$), il faut commander un carnet supplémentaire pour les 6 timbres restants (ou pour avoir un nombre entier de carnets).

2) Description et analyse de la procédure de l'élève

Procédure et connaissances :

L'élève a voulu représenter la situation, en schématisant les carnets de 10 timbres par 90 traits verticaux.
Il réalise des groupes de cent timbres en entourant 10 traits (10 carnets), sans doute pour s'assurer qu'il atteint bien les 856 timbres nécessaires. Il s'appuie sur un comptage de dix en dix pour la première centaine puis semble utiliser le fait que 10 carnets font 100 timbres. Il utilise un comptage de cent en cent pour dépasser le nombre de timbres (un paquet de cent supplémentaire).

Erreurs :

Après avoir correctement représenté la situation, l'élève semble avoir perdu la signification des symboles utilisés et confond les différentes unités : les timbres, les dizaines de timbres symbolisées par les traits, les centaines de timbres symbolisées par les paquets.
Il ne sait plus ce qui représente les carnets (les traits). Il semble qu'il cherche combien de paquets de 100 timbres il faut commander, ce qui l'amène à aller jusqu'à 900 (9 groupes de 100). Puis ce total de 900 est pris pour le nombre de carnets, et il indique le nombre de timbres (900) et non le nombre de carnets dans sa conclusion.

3) Une procédure plus rapide utilisable à ce niveau de la scolarité

Une procédure plus rapide utilisable à ce niveau de la scolarité et ne mettant en jeu que des connaissances liées à la numération (ne faisant pas intervenir le calcul) pourrait être :

Identifier le nombre de dizaines de 856 : il y a 85 dizaines.

Cela peut s'obtenir par lecture directe sur l'écriture chiffrée en isolant les chiffres des centaines et dizaines, ce qui se justifie par le fait que 856 = 8c 5d 6u et que 8c = 80d donc 856 = 85d 6u.

Ensuite il reste à ajouter 1 au nombre de dizaines pour tenir compte du carnet supplémentaire.

Cette procédure s'appuie sur les deux principes de notre système de numération :
- Principe de position : les unités simples s'écrivent au premier rang (à partir de la droite) de l'écriture chiffrée, les dizaines au deuxième rang, les centaines au troisième rang, etc.
- Principe décimal (ou relations entre unités) : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Introduction de l'aire au CM1 d'après un sujet de Lorraine

PARTIE A : analyse à partir d'extraits de Capmaths CM1

1) a) Les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A

Remarque :
Les procédures ne sont pas demandées, mais nous les présentons pour la formation du candidat.
On voit facilement que par superposition chacune des surfaces 2 et 6 peut recouvrir directement la surface A (et qu'il y a du papier en trop), alors que la surface 3 ne le peut pas.
Par découpage-recollement (mental ou effectif), chacune des surfaces 1 et 5 peut recouvrir la surface A.
En revanche, la surface 4 ne peut pas recouvrir la surface A (son aire est inférieure à celle de A) : on peut le vérifier par découpage-recollement effectif ou en utilisant les dimensions, avec ou sans calcul de l'aire.
Les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A sont les surfaces 1 ; 2 ; 5 ; 6.

1) b) Les deux procédures d'élèves attendues pour identifier les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A

Procédure par superposition directe

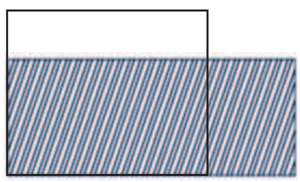
Cette procédure permet de constater que les surfaces 2 et 6 recouvrent la surface A et que la surface 3 est trop petite

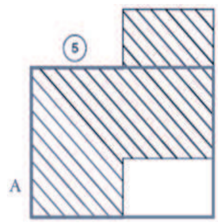
Procédure par découpage et recollement des morceaux

Cette procédure permet de constater que les surfaces 1 et 5 recouvrent la surface A et que la surface 4 est trop petite.

1) c) Causes d'erreurs possibles

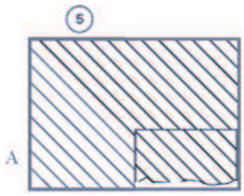
Les élèves peuvent ne pas penser aller au-delà d'une superposition : lorsqu'après superposition une surface ne peut être incluse dans l'autre, les élèves peuvent conclure de façon erronée en se focalisant sur l'aspect perceptif. Ils pourront dire par exemple que la surface 1 ou 5 ne permettent pas de recouvrir la surface A car « il reste du blanc ».





Les élèves peuvent avoir du mal à identifier les découpages adéquats nécessaires à un recouvrement total de la surface A. Par exemple la surface 1 doit être découpée deux fois. La réalisation d'un seul découpage peut conduire à une réponse erronée.

Les élèves peuvent être imprécis dans le découpage ou dans le recollement : une perte de papier lors du découpage et/ou une superposition lors du recollement peuvent laisser des espaces vides et amener à une conclusion erronée. Par exemple, l'élève peut ne pas réussir du premier coup son découpage et le rectifier en perdant une petite bande de papier. Il pourra dire alors que la surface 5 ne permet pas de recouvrir la surface A après découpage et recollement car « il reste du blanc ».



2) Représentations erronées de la notion d'aire

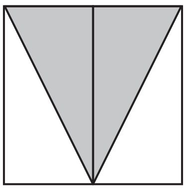
L'élève peut penser que les surfaces 1 et 5 n'ont pas la même aire :

- car elles n'ont pas la même forme : l'élève ne dissocie pas l'aire et la forme (« *deux surfaces de formes différentes ont nécessairement des aires différentes* »);
- car l'une est plus « étendue » que l'autre : il confond l'aire avec l'une des dimensions (la surface 5 est « plus haute », la surface 1 est « plus large ».

PARTIE B : analyse à partir d'un extrait de La tribu des maths CM1

1) Mesure des aires des différentes surfaces

La surface a est formée d'un carré d'aire 1 u et d'un demi-carré d'aire 0,5 u ; donc aire(a) = 1,5 u.
La surface b est formée d'un carré d'aire 1 u ; donc aire (b) = 1 u.
La surface c est un demi-rectangle d'aire 3 u ; donc aire(c) = 3/2 u = 1,5 u.
La surface d est formée de deux triangles superposables ; chacun a pour aire : (1 – 2/4) u = 1/2 u (voir figure ci-dessous)



Il est possible également de calculer l'aire d'un des triangles en utilisant la formule : $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.
Donc : aire(d) = $2 \times 1/2$ u = 1 u.
La surface e est un demi-carré d'aire 4 u ; donc aire(e) = 4/2 u = 2 u.

2) Ambiguïté de la consigne

Le critère de comparaison des surfaces n'est pas donné dans la consigne. Le rangement peut être alors fait selon l'aire des surfaces, ou leur périmètre, ou la dimension d'un côté, ...

Remarque :
Le terme « classer » est utilisé dans son sens courant puisqu'il est attendu que soient ordonnées les surfaces. En mathématiques, « classer » signifie « regrouper des objets ayant une même propriété » (par exemple : classer des objets selon leur couleur). Il ne réfère pas à une relation d'ordre. Le terme approprié dans cette consigne serait « ranger ».

3) Procédure attendue par les auteurs du manuel

La procédure attendue par les auteurs est l'utilisation de la mesure. En effet, d'une part, l'activité préparatoire a introduit la mesure des aires ; d'autre part, dans cette activité, les auteurs présentent l'unité d'aire choisie par Enzo.
Pour la détermination des mesures des aires, les élèves doivent recourir aux procédures décrites dans la question 1a :

- décomposition de la surface a en sous-figures (un carreau et un demi carreau) ;
- inclusion de la surface c dans une sur-figure (un rectangle formé de 3 carreaux).

Ils pourront alors conclure que les deux surfaces ont la même aire de mesure 1,5 u.

PARTIE C : comparaison des deux situations

1) Analyse comparée des deux activités d'introduction

Les activités étudiées dans ces deux manuels mettent en jeu le rangement des surfaces selon leur aire. La compétence concernée est donc la **comparaison des aires**.
Les types de procédures attendues diffèrent selon les manuels :

- dans l'Annexe 1 : découpage/recollement et superposition par manipulation effective (voir question A-1.b) ;
- dans l'Annexe 3 : décomposition en sous-figures et inclusions dans des sur-figures (mentalement), puis comptage de carreaux et calculs (voir question B-3).

Les propriétés de l'aire sous-jacentes à ces deux types de procédures :

- Annexe 1 : principe de conservation des aires.
  La figure obtenue après découpage/recollement (sans perte ni superposition) a la même aire que celle de départ.
- Annexe 3 : principe d'additivité des aires.
  L'aire d'une figure est égale à la somme des aires des sous-figures qui la composent.

2) Analyse comparée des deux activités d'introduction

Pour introduire la notion d'aire en CM1, l'entrée la plus adaptée est celle proposée par l'Annexe 1. En effet :

- La situation proposée dans l'Annexe 1 introduit la notion d'aire dans le domaine des grandeurs par des manipulations, indépendamment de la mesure. Cela permet de construire chez les élèves le sens de la grandeur *aire*.
- Dans l'Annexe 3, l'aire d'une surface est directement assimilée à sa mesure, ce qui peut conduire les élèves à penser que l'aire est un nombre, ce qui est inexact.

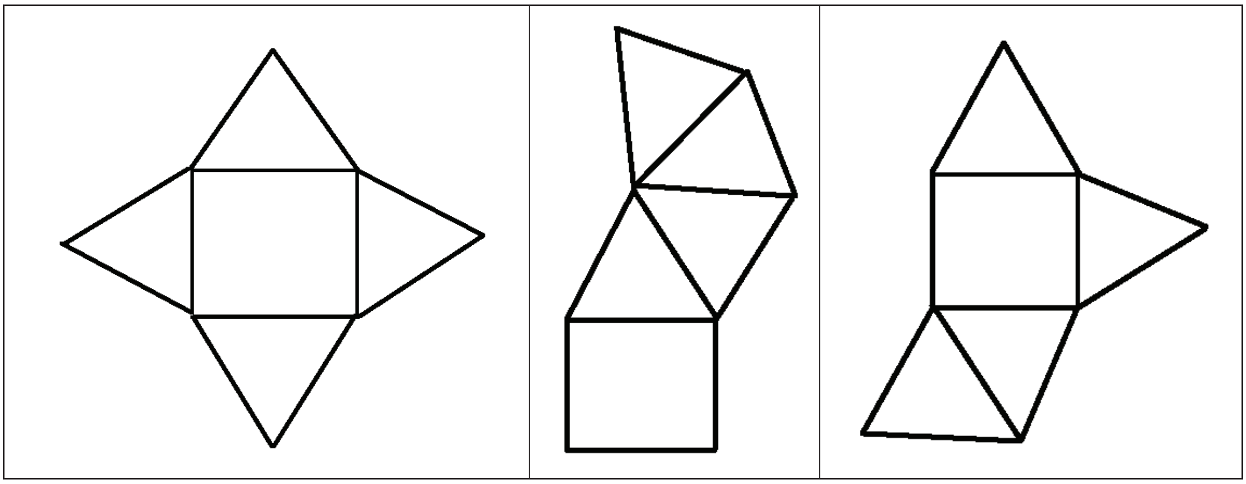
Remarque :
Ce choix est confirmé par les « Recommandations pour la mise en œuvre des programmes de l'école élémentaire » (BO 15 mai 2014) :
Grandeurs et mesures
Ce domaine d'apprentissage étant très souvent à l'origine de difficultés chez certains élèves, on peut prendre appui sur toutes les phases de manipulation (dont les comparaisons directes et indirectes) qui permettent de faire comprendre la notion de grandeur avant de faire appel à la mesure.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Solides au cycle 3 d'après un sujet de Paris

1) Compétences attendues

Le problème posé est un problème de reproduction de polyèdre. Les élèves doivent ici décrire la pyramide qui leur est donnée (nature des faces, nombre de faces). Ils sont donc amenés à utiliser en situation le mot face. (« Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet »)
Le fait d'étudier un polyèdre qui n'est pas mentionné dans les programmes du cycle 3 (ici une pyramide à base carrée) permet également de mettre en évidence des différences par rapport aux solides du programme (cube et pavé droit pour le CE2), et contribue donc, par contraste, à faire ressortir les propriétés de ces derniers (« Reconnaître, décrire nommer un cube, un pavé droit »)

2) a)Trois patrons différents possibles



2) b) Objectif de l'activité 2

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de patron d'un polyèdre. En effet elle permet de faire vivre le passage d'un polyèdre (3D) à l'un de ses patrons (2D) en mettant en évidence quelques propriétés : surface en un seul morceau dans laquelle on retrouve une et une seule fois chacune des faces du polyèdre. De plus, dès cette activité, les élèves peuvent constater que plusieurs patrons peuvent être obtenus à partir d'un même solide.

Remarque :
Dans l'activité 1, les élèves ont construit une pyramide en assemblant des faces séparées ; l'activité 2 permet de représenter la pyramide sous forme de patron, notion qui sera réinvestie dans l'activité 3 pour, à partir du patron, reconstruire le solide.

3) Construction d'un patron de la maquette

3) a) Dimensions de la maquette

L'échelle 1 : 700 signifie que pour passer des dimensions réelles à celles de la maquette, on les divise toutes par 700.

La hauteur sur la maquette sera **3 cm** (21 cm : 7 = 3 cm)
Les côtés de la base carrée auront pour longueur **5 cm** (35 cm : 7 = 5 cm.)

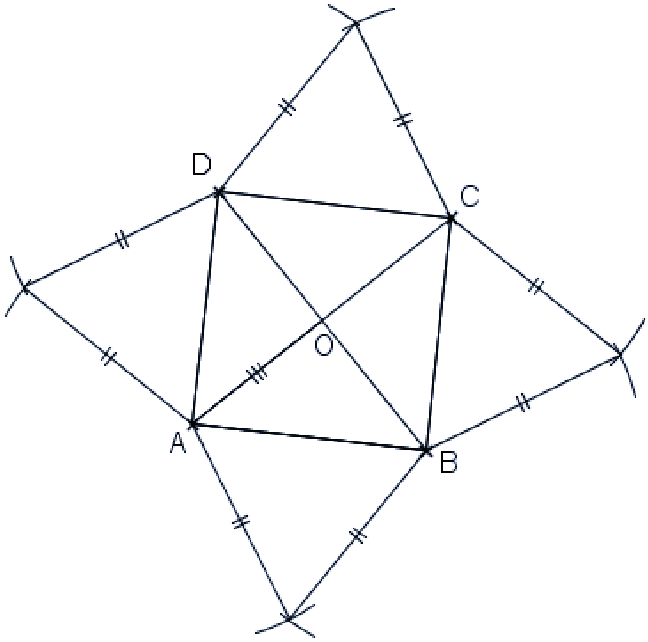
3) b) Construction

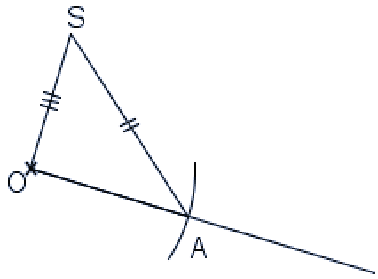
On trace le carré ABCD de côté 5 cm. On trace ses diagonales. Elles se coupent en O.

Le triangle SOA est rectangle en O ; pour le construire, on trace le segment [SO] tel que SO = 3 cm ; on trace la droite perpendiculaire à (SO) en O, et sur cette droite, on reporte à l'aide du compas, à partir de O, la longueur OA prélevée sur la construction précédente (demi-diagonale du carré).

Pour les triangles de la pyramide, ils sont isocèles en S : un côté mesure 5cm (c'est la longueur du côté du carré et les deux autres ont la même longueur que [SA], que l'on reporte grâce à la construction annexe).

Remarque :
Les figures ci-dessous ne respectent pas les dimensions réelles de la maquette.





ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Technique opératoire de la division d'après un sujet de Dijon

PARTIE A : comparaison des deux manuels

1) a) Nombre de chiffres du quotient de 123 456 789 par 654 321 en détaillant la méthode

D'après Euro Maths p. 54, il s'agit dans un premier temps d'encadrer le dividende par deux produits du diviseur par une puissance de 10 d'exposants consécutifs, c'est-à-dire ici de trouver n tel que :

$$654\,321 \times 10^{n} < 123\,456\,789 < 654\,321 \times 10^{n+1}$$

On a les inégalités suivantes :

$$65\,432\,100 < 123\,456\,789 < 654\,321\,000$$
$$654\,321 \times 100 < 123\,456\,789 < 654\,321 \times 1000$$

On en conclut que le quotient Q de la division euclidienne de 123 456 789 par 654 321 vérifie :
$100 < Q < 1000$; **l'écriture du quotient comporte donc 3 chiffres**.

1) b) Justification de l'affirmation d'Alice : « Alors il y aura seulement deux soustractions à effectuer ! »

Dans la division proposée en exemple dans le manuel, le quotient a 2 chiffres : c'est un nombre composé d'un chiffre des dizaines et d'un chiffre des unités. Deux soustractions seront donc nécessaires au maximum : une soustraction pour les dizaines et une autre pour les unités.

1) c) Lien entre le nombre de chiffres du quotient et le nombre de soustractions qu'il faudra effectuer dans la division posée

Le nombre de chiffres du quotient n'indique pas à coup sûr le nombre de soustractions qu'il faudra effectuer. En effet, si le quotient comporte le chiffre « 0 » à un certain rang, il n'y aura pas de soustraction dans ce rang-là.

Par exemple : 7395 divisé par 24.
$7395 = (24 \times 308) + 3$.
Dans cette division le quotient comporte trois chiffres, mais il suffit de deux soustractions pour le déterminer.

7395	24
− 7200	300
195	
− 192	8
3	308

2) Comparaison des parties « découverte » des deux manuels

Dans les deux manuels, la première étape consiste à rechercher le nombre de chiffres du quotient.
Comme $29 \times 100 < 7874 < 29 \times 1000$, on déduit que le quotient de cette division s'écrira avec 3 chiffres. La dernière étape, qui correspond à la vérification de l'égalité traduisant la division euclidienne, est également identique dans les deux manuels : $7874 = (29 \times 271) + 15$

Les étapes intermédiaires diffèrent suivant les manuels :

Dans Euros Maths :

29 × 1 = 29
29 × 2 = 58
29 × 3 = 87
29 × 4 = 116
29 × 5 = 145
29 × 6 = 175
29 × 7 = 203
29 × 8 = 232
29 × 9 = 261

$$\begin{array}{r|l}
7874 & 29 \\ \cline{2-2}
-\,5800 & \bullet\bullet\bullet \\
 & 2\,0\,0 \\
 & \,7\,0 \\ \cline{1-1}
2074 & \,1 \\
-\,2030 & \\ \cline{1-1}
 & 2\,7\,1 \\
44 & \\
-\,29 & \\ \cline{1-1}
15 &
\end{array}$$

- Construction du répertoire des multiples du diviseur, ici 29.
- Recherche des centaines en s'appuyant sur le répertoire et calcul de la différence entre le dividende et le multiple choisi :
  29 × 200 = 5800
  7874 – 5800 = 2074
- Reprise de ces étapes pour trouver les dizaines, puis les unités du quotient :
  29 × 70 = 2030
  2074 – 2030 = 44

puis 29 × 1 = 29
44 – 29 = 15

- Somme des trois nombres obtenus au quotient : 200 + 70 + 1 = 271

Dans « Maths collection Thevenet » :

Aucun répertoire n'est construit : chacun des chiffres du quotient semble être trouvé par calcul mental. Le dividende est décomposé en centaines, dizaines et unités ; on s'intéresse successivement à chacun des rangs en commençant par le plus grand, pour obtenir chacun des chiffres du quotient (cdu).

$$\begin{array}{r|l}
\textit{cdu} & \\
7874 & 29 \\ \cline{2-2}
-\,58 & \textit{cdu} \\ \cline{1-1}
207 & 2\,7\,1 \\
-\,203 & \\ \cline{1-1}
44 & \\
-\,29 & \\ \cline{1-1}
15 &
\end{array}$$

• Comme le quotient comporte 3 chiffres, on considère d'abord les centaines : il faut diviser 78 centaines par 29 :
En utilisant l'ordre de grandeur, on trouve que 29 × 2 est le multiple de 29 le plus proche et inférieur à 78
78 – (29 × 2) = 20

• Il reste 20 centaines, soit 200 dizaines. On ajoute les 7 dizaines de 7874 ; on obtient 207 dizaines que l'on divise par 29 :
En utilisant l'ordre de grandeur, on trouve que 29 × 7 est le multiple de 29 le plus proche et inférieur à 207
207 – (29 × 7) = 4

• Il reste 4 dizaines, soit 40 unités. On ajoute les 4 unités de 7874 ; on obtient 44 unités que l'on divise par 29 :
44 – (29 × 1) = 15

3) Analyse des difficultés sur deux des exercices proposés

3) a) Difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 6 d'« Euro Maths »

Cet exercice comporte des difficultés de différentes natures :

- Relativement au vocabulaire utilisé dans l'énoncé : certains termes comme « consommation » peuvent ne pas être connus des élèves, ou d'autres comme « environ » (dans les données) « approximativement » (dans la question) peuvent gêner les élèves. Il faut interpréter qu'on ne connaît pas la consommation exacte de l'avion. Le résultat de 1800 L est donc une approximation et on ne va faire le calcul qu'au litre près, sans considérer les dL ou les cL.

- Relativement à la résolution de problème, la présence de données chiffrées inutiles : « A380 » et « 900 km/h », peut être source d'erreurs.
- Relativement au contexte de l'énoncé, aux différentes grandeurs présentes, cela peut rendre difficile une représentation adaptée du problème.
- Relativement au choix de l'opération, l'élève peut ne pas reconnaitre un problème de division.
- Relativement aux nombres en présence, même si le diviseur 7 ne comporte qu'un chiffre, la présence de deux zéros dans le dividende peut conduire l'élève à oublier un « 0 » en effectuant la division.
- Relativement à l'interprétation des résultats obtenus (1800 = (7 × 257) + 1), comme le reste est 1, l'élève peut chercher à introduire ce reste dans sa réponse (soit en prolongeant la division avec un quotient décimal, soit en écrivant 257,1 L en reportant le reste après la virgule, considérant alors les chiffres écrits après la virgule comme des sous-multiples du litre…).

3) b) Difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 8 de « Maths collection Thévenet »

- Relativement au vocabulaire utilisé dans l'énoncé : « bonbonne », « prix de revient »
- Relativement au contexte de l'énoncé, aux différentes grandeurs présentes et unités différentes pour une même grandeur, cela peut provoquer un oubli ou une erreur de conversion.
- Relativement au choix des opérations et à la succession des questions, l'élève peut ne pas reconnaitre un problème de division ou faire des erreurs dans le choix des nombres (utilisation possible du 1^er^ résultat pour répondre à la 3^ème^ question)
- Relativement aux nombres en présence et à l'interprétation des résultats obtenus : dans les deux premières divisions (2400 : 75 = 32 et 144 : 24 = 6), le reste est « 0 », tandis que la dernière division donne un quotient décimal correspondant à un prix (144 : 32 = 4,5, qui est à interpréter en 4,50 €). Remarquons que la réponse à la dernière question peut être obtenue par le produit du prix au litre par la capacité de la bouteille (6 €/L × 0,75 L = 4,50 €)

PARTIE B : « Maths Thévenet », pages 62 et 63

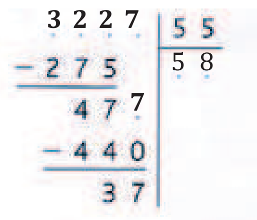
1) Analyse de l'exercice 3

1) a) Première division à trous de l'exercice 3

Dans cet exercice, il faut retrouver le dividende et le quotient.

La présence des soustractions permet de retrouver les multiples du diviseur utilisés pour compléter le quotient. La connaissance du diviseur, du quotient et du reste permet de reconstituer le dividende.

- 275 = 5 × 55 : le premier chiffre du quotient est donc 5.
- 440 = 8 × 55 : le deuxième chiffre du quotient est donc 8.
- Le quotient trouvé est 58 ;
- 55 × 58 + 37 = 3227, le dividende est **3227** ;
- Reste à reporter « 7 », chiffre des unités du dividende à droite du reste « 47 », pour compléter la division.



1) b) Compétences visées en matière de division dans l'exercice 3

L'exercice 3 est un exercice de calcul complexe ; les compétences visées sont la bonne compréhension de ce que représentent les calculs intermédiaires dans la division posée et l'égalité traduisant la division euclidienne. L'ordre de grandeur et l'utilisation à bon escient du calcul réfléchi sont aussi mobilisés dans cet exercice.

2) Analyse de l'exercice 10

2) a) Résolution du problème utilisant une mise en équation

Soit x le nombre de fléchettes lancées dans chaque partie de la cible. On a :
$10x + 5x + 2x = 187$
donc $17x = 187$ et $x = \frac{187}{17} = 11$.
Pierre a donc lancé 11 fléchettes dans le 10, 11 fléchettes dans le 5 et 11 fléchettes dans le 2.

Au total, il a lancé 33 fléchettes.

2) b) Résolution du problème comme pourrait le faire un élève de CM2

Un élève peut tenir compte de la contrainte « le nombre de fléchettes dans chacune des zones est le même » et tester différents nombres. Une fléchette dans la zone 10, une fléchette dans la zone 5 et une fléchette dans la zone 2 donnent un score de 17. Deux fléchettes donnent un score de 34… , 10 fléchettes donnent un score de 170 et donc 11 fléchettes donnent un score de 187. Pierre a lancé 11 + 11 + 11 = 33 fléchettes.

Remarque :
Un élève pourrait tenir compte de la contrainte « le score est 187 » et chercher à décomposer 187 en utilisant des sommes de produits par 10, 5 et 2 d'un même nombre. $187 = 18 \times 10 + 1 \times 5 + 1 \times 2$ *puis diminuer le premier nombre en répartissant différemment le score* : $187 = 15 \times 10 + 5 \times 5 + 6 \times 2$, *et enfin* $187 = 11 \times 10 + 11 \times 5 + 11 \times 2$. *Cette procédure est correcte mais beaucoup plus coûteuse. De plus, elle nécessite un plus grand contrôle des calculs effectués et de leur interprétation.*

2) c) Compétences visées en matière de division dans l'exercice 10

L'exercice 10 est un exercice complexe : un véritable problème de recherche pour lequel les élèves ne possèdent pas de procédure déjà étudiée.
Ce n'est pas vraiment un exercice d'application directe de la leçon : il y a deux contraintes à gérer, l'élève peut ne pas mobiliser la division car le diviseur est « à inventer ».
Plusieurs compétences sont visées : savoir organiser sa recherche, faire preuve d'initiative, gérer simultanément deux contraintes, argumenter, contrôler son résultat…

3) Un exercice qui relève de la division-partition et un exercice qui relève de la division-quotition

L'exercice 4 relève de la division-quotition car on connait la somme totale et le prix d'un disque, et on cherche le nombre de disques achetés (l'exercice 6 également).

L'exercice 5 relève de la division-partition car on connait le prix total et on cherche combien on paie chaque mois (l'exercice 7 également).

PARTIE C : « Euro maths » CM2, pages 54 et 55

***1*) Tableau complété.**

Dans cet exercice, puisqu'il s'agit de la division euclidienne, tous les nombres à trouver se situent dans l'ensemble des entiers naturels.

	Dividende	Diviseur	Quotient euclidien	Reste euclidien
Cas M	**5**	**8**	**0**	**5**
Cas A	**21 ; 22 ; 23**	**3**	**7**	**0 ; 1 : 2**
Cas T	**49**	**12 ; 11 ; 10**	**4**	**1 ; 5 ; 9**
Cas H	**Impossible**	**4**	**Impossible**	**4**
Cas S	**37**	**35 ; 5 ; 7**	**1 ; 7 ; 5**	**2**

Cas M :

Il s'agit de trouver q et r tels que $5 = (8 \times q) + r$ avec $r < 8$. Lorsque le diviseur est supérieur au dividende, le quotient de la division euclidienne est 0 et le reste est égal au dividende.

Cas A :

Il s'agit de trouver D et r tels que $D = (3 \times 7) + r$ avec $r < 3$. La condition sur r donne trois solutions possibles $r = 0$ et $D = 21$; $r = 1$ et $D = 22$; $r = 2$ et $D = 23$.

Cas T :

Il s'agit de trouver d et r tels que $49 = (4 \times d) + r$ avec $r < d$. La plus grande valeur possible pour d est 12 (car $4 \times 13 > 49$) avec $r = 1$ qui satisfait à la condition $1 < 12$. Nous avons aussi comme possibilités $d = 11$ avec $r = 5$ et $d = 10$ avec $r = 9$ qui satisfont à la condition $r < d$.
Il n'y a pas d'autre solution car si $d = 9$, on a $r = 13$ qui ne satisfait pas à la condition $r < d$.

Cas H :

Le diviseur et le reste proposés sont égaux, ce qui n'est pas le cas dans une division euclidienne.

Cas S :

Il s'agit de trouver d et q tels que $37 = (d \times q) + 2$ avec $2 < d$. On a alors $37 - 2 = (d \times q)$ soit $35 = (d \times q)$. Or $35 = 7 \times 5$, donc 35 possède quatre diviseurs qui sont 1, 5, 7 et 35.
Les solutions possibles sont donc $d = 5$ avec $q = 7$; $d = 7$ avec $q = 5$ et $d = 35$ avec $q = 1$.

Remarque :
Certes, 1 est un diviseur de 35, mais il ne peut pas jouer le rôle de diviseur dans une division dont le reste est 2.

2) Différences entre cet exercice et l'exercice 4 du manuel

Dans l'exercice 4 du manuel, pour chaque ligne, trois des colonnes du tableau sont remplies et le reste est toujours donné. Ainsi, le nombre à trouver est toujours unique. Dans l'exercice ci-dessus, c'est essentiellement la contrainte sur le reste de la division euclidienne qui est à prendre en compte. Il y a aussi des cas impossibles à traiter.
Dans l'exercice 4, il s'agit essentiellement de mobiliser les liens entre les différents nombres intervenant dans la division euclidienne :

- Pour la première ligne, la donnée du reste est inutile si on pose la division 516 : 19 ; on s'aperçoit que le reste donné dans l'énoncé ne peut pas être 6 mais 3 (erreur dans l'énoncé ou réponse impossible ?). Si le reste était correct, l'élève peut aussi soustraire le reste au dividende et chercher le nombre qui complète $516 - 3 = 19 \times ?$ pour trouver le quotient 27.
- Pour la deuxième ligne, le reste est 0 donc pour trouver le diviseur, il faut chercher le nombre qui complète $624 = ? \times 13$
- Pour la troisième ligne, retrouver le dividende amène à utiliser l'égalité traduisant la division euclidienne $? = 8 \times 264 + 5$

Les nombres donnés dans l'exercice 4 sont plus grands (nombres à 3 chiffres) que ceux donnés dans l'exercice de $6^{\text{ème}}$ ce qui justifie probablement l'utilisation de la calculatrice par les élèves de CM2. De plus, il n'y a pas de quotient égal à « 0 » dans l'exercice 4.

PARTIE D : analyse de travaux d'élèves

	Procédure	Erreur(s)
Élève A	L'élève A commence par enlever le score correspondant successivement à une fléchette dans chaque zone. 186 – 10 = 176 ; 176 – 5 = 171 ; 171 – 2 = 170 en trois soustractions séparées, posées en colonne. Cette démarche très longue aurait pu aboutir. Mais comme il se rend compte que c'est très long, il enlève directement 17 dans l'opération qui est barrée et trouve fort justement 153. Il semble qu'il essaie ensuite de tracer un tableau pour aller plus vite. Il met 6 fléchettes dans chaque zone et confond ensuite le nombre de fléchettes et la valeur du score car 6 × 3 = 18 fléchettes, mais 10 + 5 + 2 = 17 points. Il pose l'opération à gauche pour calculer 10 + 5 + 2 et trouve 18 en ajoutant 1 en dessous. Il écrit le résultat de 18 fléchettes à gauche et le barre. Il tente ensuite une décomposition (qui est barrée) de 187 en : $\boxed{100}$ + $\boxed{80}$ + $\boxed{\text{IIIIII}}$ Puis il conclut (à gauche) : 10 fléchettes lancées, 50 fléchettes dans le 2 et 4 fléchettes, sans que l'on sache d'où vient ce résultat. *Remarque :* *N'ayant aucune indication sur l'ordre dans lequel les différents écrits de cet élève ont été produits, ce ne sont que des hypothèses qui sont formulées.*	Erreurs : - Confusion entre nombre de fléchettes lancées $\boxed{18}$ et nombre de points 17 pour 3 fléchettes - erreur dans l'addition de gauche avec ajout d'un « 1 » - conclusion sans lien avec les calculs écrits.
Élève B	L'élève B fait un schéma de la cible en mettant une fléchette (ici un point) dans chaque zone, puis, il constate que cela donne 17 points pour 3 fléchettes. Il tente alors une démarche par tâtonnement organisé : 17 × 5 = 80 : ce n'est pas assez 17 × 6 = 97 : ce n'est pas assez 17 × 7 = 119 : ce n'est pas assez 17 × 10 = 170 : ce n'est pas assez 17 × 11 = 187 : cela correspond au score demandé. Il conclut que Pierre a lancé 11 fléchettes, ce qui est exact pour chaque zone, puis réalise son erreur et écrit au-dessus 33 qui correspond au nombre total de fléchettes dans les trois zones.	Pas d'erreur
Élève C	L'élève C a souligné dans l'énoncé la contrainte « même nombre de fléchettes ». Il écrit une décomposition de 187 en 100 + 87. Il essaie ensuite de trouver 100 avec 5 fléchettes dans chaque zone (il y a 5 « 10 », puis 6 « 5 », puis 5 « 2 » sous la forme 2 × 5 = 10. Comme cela ne convient pas, il barre et essaie avec 6 fléchettes dans chaque zone et obtient un score de 102. Il tente alors de compléter 102 avec 85 car 102 + 85 = 187. Il trouve 5 fléchettes dans chaque zone et obtient un score de 85, peut-être en s'appuyant sur l'ordre de grandeur du calcul précédent (6 fléchettes). Comme il sait que 6 + 5 = 11. il déduit et vérifie qu'il faut 11 fléchettes dans chaque zone. Il écrit « 11 fléchettes de 10, 5, 2 », qu'il barre pour conclure correctement qu'il faut 33 fléchettes au total.	Pas d'erreur

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Construction du nombre d'après un sujet de La Roche sur Yon

1) Objectifs généraux et niveau

Il s'agit d'amener l'enfant à fréquenter les nombres de 1 à 10 en travaillant sur toutes les décompositions de 10 en somme de deux termes et à mémoriser certains compléments à 10.
Cette situation peut relever du niveau Grande section de maternelle ou début de CP.
En GS, l'objectif ne peut être d'enseigner les compléments à dix, mais cette activité donne l'occasion de les fréquenter et d'en mémoriser certains. Le BO précise :"les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le CP qui installera le symbolisme et les techniques".
La compétence "Produire et reconnaitre des décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("tables d'addition")" figure dans les repère de progressivité du programme de CP.

2) Compétence préalable

Une compétence essentielle est que les élèves sachent dénombrer une quantité jusqu'à dix (par reconnaissance globale, par comptage...).

3) Rôle du maître

Le maître indique qu'il s'agit de bien repérer où sont les bébés, soit dans le dortoir, soit dans la salle de jeux. Il modifie la situation matérielle en choisissant le nombre de bébés à enlever à chaque fois. Il laisse les élèves formuler et justifier des réponses. Il valide par retour au matériel. Il conclut en revenant sur les 3 nombres en jeu qu'il met en relation (la somme des deux donne le troisième, 10). Il recommence plusieurs fois cette phase.

4) a) Nouvel obstacle

Dans la phase 2, la présence des lits permettait aux élèves de connaître le nombre d'élèves absents du dortoir en dénombrant les lits vides.
Dans la phase 3, le fait de cacher le dortoir introduit un nouvel obstacle : la procédure mise en oeuvre dans la phase 2 n'est plus possible car les lits vides ne sont plus visibles.
Le but du maître est d'amener les élèves à trouver le nombre d'enfants du dortoir à partir du nombre d'enfants dans la salle de jeux, c'est à dire déterminer son complément à dix.

4) b) Procédure sans matériel

Exemple de procédure sans matériel (peu probable au début de cette série d'activités) : l'enfant a déjà mémorisé plusieurs décompositions de dix, par exemple 5 et 5, 9 et 1 , 8 et 2...
Une autre possibilité : l'enfant utilise ses 10 doigts représentant les 10 lits. Les deux poings fermés, il lève autant de doigts que de bébés dans la salle de jeu, et compte ceux qui sont baissés. C'est la procédure qui est la plus couramment utilisée car la plus simple et la plus rapide à mettre en oeuvre une fois que l'enfant l'a découverte.

4) c) Deux procédures avec matériel

Supposons qu'il y ait 3 bébés dans la salle de jeux.

Procédure 1 :

L'élève prend dix cubes (ou autres objets) pour représenter les dix bébés, il isole trois cubes qui correspondent aux 3 bébés présents dans la salle de jeu et dénombre les cubes restants pour obtenir le nombre d'élèves absents dans la salle de jeu.

Procédure 2 :

L'élève représente la situation : le dortoir et ses dix lits et la salle de jeu. Il dessine 3 bébés dans la salle de jeu, barre les lits correspondants aux trois bébés et il dénombre les lits non barrés.

Variante :
L'élève dessine dix bébés, entoure ceux présents dans la salle de jeu puis il dénombre les autres bébés.

5) Trois variables didactiques

Première variable : le nombre de cartes pour faire dix.

Si on limite à deux le nombre de cartes pour faire un pli totalisant dix, , il s'agit d'un réinvestissement de la situation vécue précédemment. Les résultats mémorisés peuvent être efficaces, mais les bébés restent visibles.
Si on ne limite pas le nombre de cartes par pli, il faut s'adapter à la nouvelle consigne : les résultats mémorisés sont à réadapter…

Seconde variable : type de représentation du nombre.

Si les cartes ne comportent plus que des données chiffrées, l'élève ne peut plus systématiquement dénombrer les bébés, il doit anticiper les sommes.
On peut aussi citer l'organisation spatiale de la collection de bébés sur chaque carte qui va influer sur les procédures pour trouver le cardinal de la collection de bébés (perception visuelle globale ou dénombrement effectif)

Troisième variable : choix des nombres portés par les cartes.

Par exemple l'enseignant peut choisir de mettre seulement des cartes 5, 9, 1, 8 et 2 de sorte que les sommes soient plus faciles, ou au contraire se limiter aux deux sommes plus difficiles ("6 et 4" et "7 et 3" avec seulement une autre somme facile).

Remarque :
Les variables citées précédemment sont bien relatives à la situation proposée pour laquelle les objectifs ont été identifiés en 1)
*Si on cherche à présent à travailler plus largement les décompositions additives des nombres on peut agir sur la variable "**somme à atteindre**". La somme à atteindre n'est plus dix. Elle peut être inférieure à 10 en maternelle ou supérieure à 10 en CP (cf. Programmation CP "Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs ou égaux à 20).*

6) Autre activité

On peut travailler avec un album de littérature jeunesse comportant dix personnages ou objets dans des situations différentes (par exemple, 10 petites coccinelles dans le jardin avec 8 sur une branche...)
Des jeux de boîtes fermées où l'on ajoute ou enlève des cubes permettent également de renforcer l'apprentissage des décompositions additives de dix : l'enseignant met 7 cubes dans la boîte puis 3, la referme et demande combien elle en contient maintenant. Ou encore, il met 10 cubes et en ôte 7…

TROIS EXERCICES D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE LYON

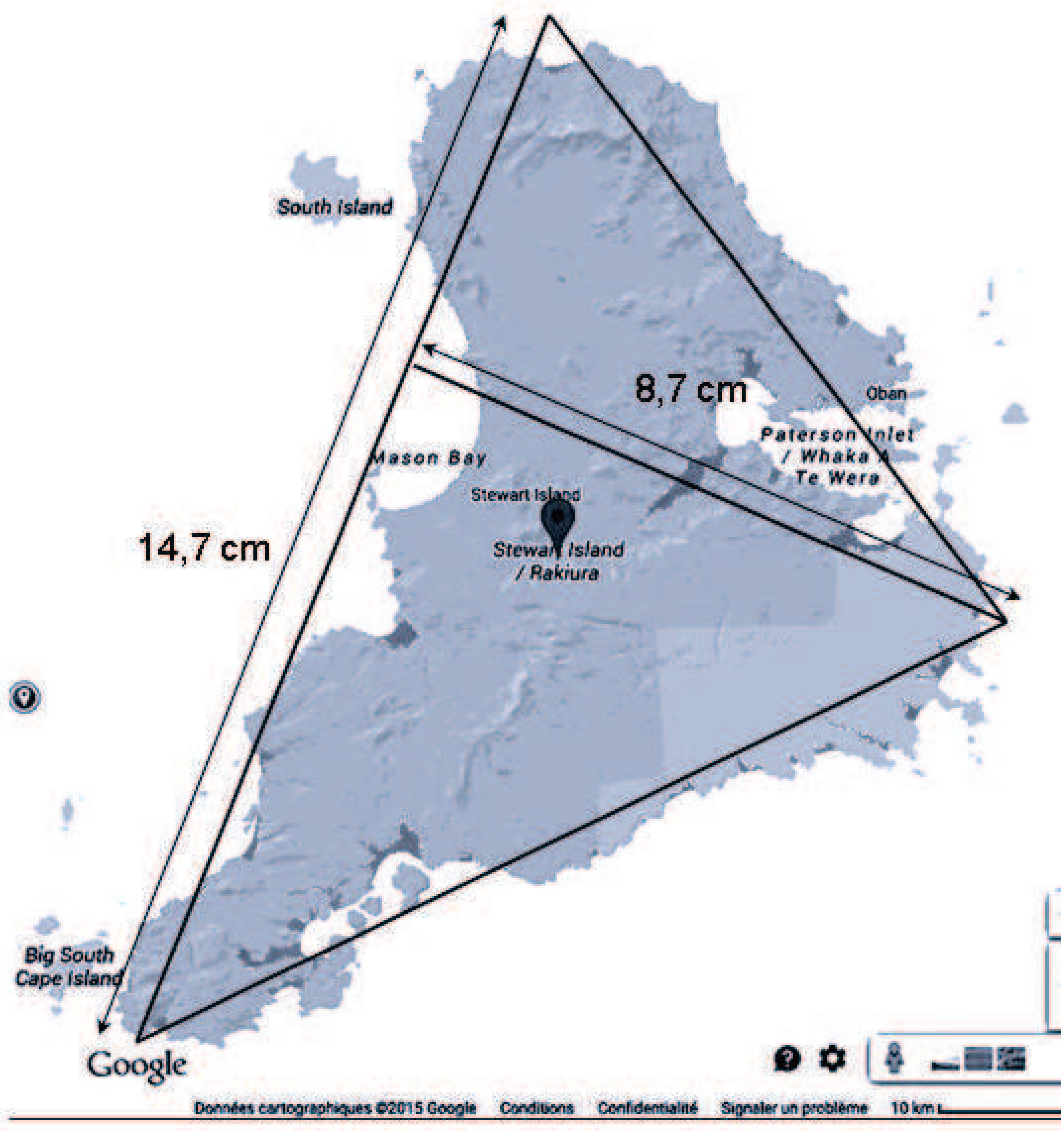
Remarque : L'exercice n°1 est inspiré de l'évaluation PISA 2012.

EXERCICE N°1

1) Estimation de l'aire de l'île Stewart

Différentes procédures sont possibles.

Procédure 1 : Remplacer l'île par une forme géométrique simple dont on sait calculer l'aire.
Ici l'on remarque que l'île à la forme d'un triangle (voir figure ci-dessous).



La procédure consiste en :

- Tracer un triangle approchant la forme de l'île et une de ses hauteurs.
- Mesurer la longueur de cette hauteur et de la base correspondante. Sur la figure ci-dessus, la longueur de la hauteur h est h = 8,7 cm et la longueur de la base correspondante b est b = 14,7 cm
- Calculer à l'aide de l'échelle (2 cm sur la carte correspondent à 10 km en réalité) les longueurs réelles. Sur la figure ci-dessus, les longueurs réelles, arrondies au km près, sont :

  $h = \frac{8,7}{2} \times 10$ km $\approx 43,5$ km et $b = \frac{14,7}{2} \times 10$ km $\approx 73,5$ km
- Calculer, en km^2, l'aire du triangle à l'aide de la formule : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

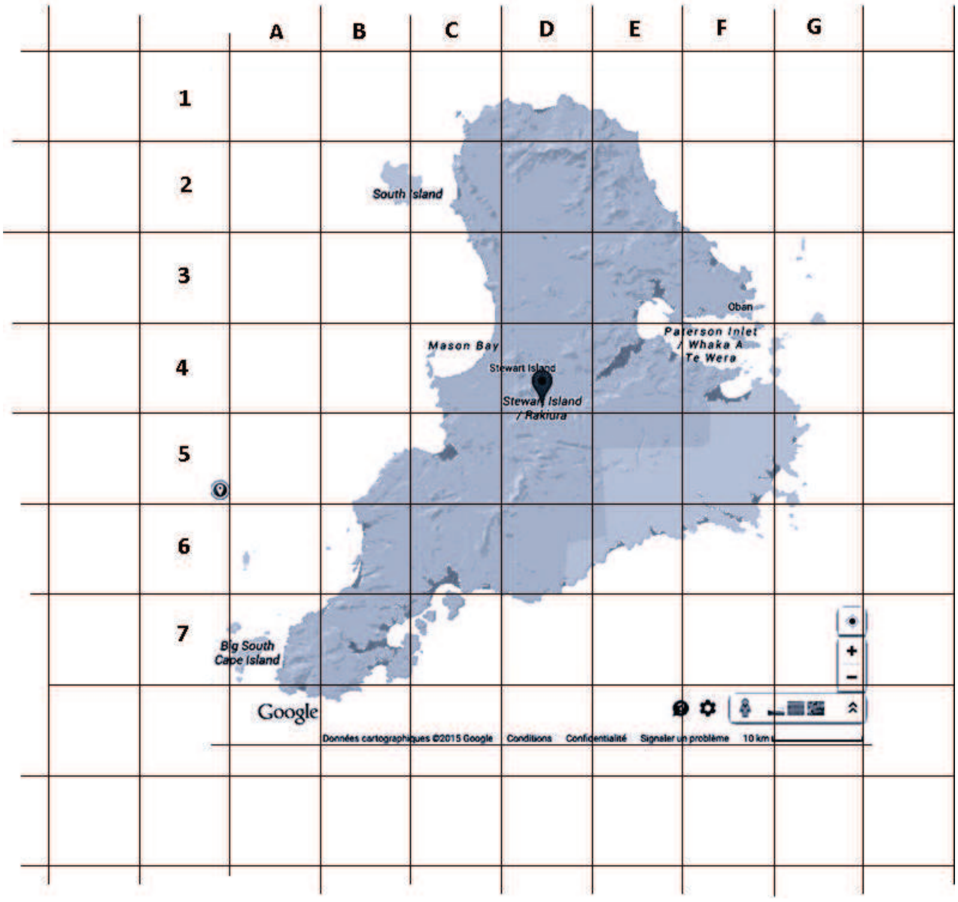
  Sur la figure ci-dessus, on obtient : $A = \frac{1}{2} \times 73,5 \text{ km} \times 43,5 \text{ km} = 1598,625 \text{ km}^2$ que l'on arrondit à $A \approx 1600 \text{ km}^2$

Remarque :
On pouvait inverser les deux dernières étapes en calculant l'aire du triangle avant de calculer les dimensions réelles. On obtenait alors :

- *Calculer, en cm^2, l'aire du triangle rectangle à l'aide de la formule : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$. Dans l'exemple ci-dessous, on obtient : $A = \frac{1}{2} \times 14,7 \text{ cm} \times 8,7 \text{ cm} = 63,945 \text{ cm}^2$ arrondi à 64 cm^2*
- *Calculer à l'aide de l'échelle l'aire réelle : 2 cm sur la carte correspondent à 10 km en réalité, donc un carré de 2 cm de côté sur la carte correspond à un carré de côté 10 km en réalité. D'où un carré d'aire $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ sur la carte correspond à un carré d'aire $10 \text{ km} \times 10 \text{ km} = 100 \text{ km}^2$ en réalité.*

  Dans l'exemple ci-dessous, l'estimation de l'aire réelle de l'île, arrondie au km^2 près, est égale à : $\frac{64}{4} \times 100 \text{ km}^2 = 1600 \text{ km}^2$.

Procédure 2 : Utiliser un quadrillage (Voir figure ci-dessous – La figure a été réduite)



La procédure consiste en :

- Réaliser un quadrillage à maille carrée suffisamment fin. Pour simplifier les relations on s'appuie sur l'échelle. Dans l'exemple ci-dessous, les carreaux du quadrillage ont pour longueur 2 cm sur la carte, soit 10 km en réalité. Faire des carreaux de 1 cm de côté sur la carte, soit 5 km en réalité, et d'aire 25 km^2 dans la réalité, permet d'avoir une estimation plus aisée à obtenir.
- Compter les carreaux pleins du quadrillage. Il y en a cinq : D2, D3, D4, D5 et E5.
- Par découpage-recollement, associer des carreaux incomplets pour obtenir un carreau plein (par exemple, A7 et B6) ou alors, estimer à l'aide d'une fraction simple ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$), l'aire des carreaux incomplets (aire de C5 = $\frac{3}{4}$ u avec u, l'aire d'un carreau ; aire de C1 = $\frac{1}{8}$ u).

On peut, par exemple, arriver à une aire de 17 u + $\frac{3}{8}$u, ce qui donne 1737,5 km^2

Remarque :
Pour information, l'île Stewart existe et a une superficie de 1746 km^2. Toute réponse comprise entre 1400 km^2 et 2000 km^2 est acceptable.

2) Calcul du pourcentage de variation de la masse entre le premier et le second œuf

Le coefficient multiplicateur permettant de passer de la masse du premier œuf à celle du second est donné par le rapport $\frac{110\,g}{78\,g} \approx 1{,}41$.
Il traduit le fait que **le second œuf est environ 41% plus lourd que le premier**.

3) a) Nombre de manchots dans la colonie à la fin de la deuxième année.

La première année, les 500 couples élèvent 500 poussins. La colonie compte alors 1500 individus dont 20% mourront dans l'année.
Il reste donc à la fin de la première année 80% de ces 1500 individus, soit $0{,}8 \times 1500 = 1200$ manchots (on pouvait aussi calculer 20% de 1500 ($\frac{20}{100} \times 1500 = 300$), soit 300 manchots à retirer des 1500 manchots).

Pour obtenir le nombre de manchots à la fin la seconde année, on reproduit le même raisonnement en partant de 1200 manchots, soit 600 couples. Ceux-ci élèvent 600 poussins. La colonie compte alors 1800 individus dont 20% mourront.

Il reste donc à la fin de la seconde année $\mathbf{0{,}8 \times 1800 = 1440}$ manchots (résultat que l'on pouvait obtenir en calculant 20% de 1440 ($\frac{20}{100} \times 1800 = 360$), soit 360 manchots à retirer des 1800 manchots).

Remarque :
On pouvait aussi raisonner en remarquant que chaque année, ce sont les mêmes opérateurs qui agissent sur la population de manchots.
En partant en début d'année d'une population de x individus, on obtient successivement $\frac{1}{2}x$ ou $0{,}5\,x$ couples, d'où autant de poussins. La population est alors de $\frac{3}{2}x$ soit $1{,}5\,x$ adultes ou poussins, dont 20% mourront dans l'année. En fin d'année, la population est donc de $0{,}8 \times 1{,}5\,x = 1{,}2\,x$, ce qui traduit une augmentation de la population de 20% chaque année.

3) b) Formules à entrer dans les cellules du tableur.

Le nombre contenu dans la cellule B2 correspond à la population de manchots en début d'année 01. Le nombre contenu dans la cellule C2 correspond à la population de manchots en fin d'année 01.
La formule à inscrire dans la cellule C2, puis à recopier vers la droite pour renseigner la ligne 2, doit permettre, à partir du nombre de manchots vivant à la fin d'une année, le calcul du nombre de manchots vivant à la fin de l'année suivante.

Formules correctes :

La formule III (= B2*1,5*0,8) est correcte. Elle reprend les deux étapes du calcul effectué dans la remarque ci-dessus ($0{,}8 \times 1{,}5\,x$).

La formule IV (= B$2*1,2) est correcte, même si le symbole $ est ici inutile (en recopiant vers la droite le numéro de ligne de toute façon ne changera pas). Cette formule reprend le résultat simplifié obtenu dans la remarque précédente (1,2 x).

La formule VI (= B2 + B2*20/100) est correcte. Elle s'appuie sur l'interprétation faite dans la remarque précédente : la population augmente de 20% chaque année. Le calcul est cependant effectué en deux temps : calcul des 20% d'augmentation, puis ajout au nombre d'individus vivants en début d'année.

Formules fausses :

La formule I (= B2 + B2/2 – 20%) est fausse. Pour traduire l'idée d'enlever 20%, l'écriture « -20% » devrait opérer multiplicativement sur la somme B2 + B2/2 correspondant au nombre total d'adultes et de poussins nés dans l'année. Pour devenir correcte, cette formule devrait être modifiée en = B2 + B2/2 – 20%*(B2 + B2/2).

La formule II (= B2*1,5 – B2*0,2) est fausse. Ecrite ainsi, elle correspond à considérer que seuls meurent 20% des adultes vivant en début d'année et aucun poussin. En effet l'opérateur « 0,2* » porte sur B2, population de début d'année. Pour devenir correcte, cette formule devrait être modifiée en = B2*1,5 – B2*1,5*0,2.

La formule V (= (B2+ B2/2) *0,2) est fausse. Elle conduit à évaluer le nombre de manchots morts au cours de l'année.

4) Vrai/Faux

Affirmation a

VRAI : en effet, en 2000, pour les trois espèces de manchots, le nombre moyen de poussins élevés par couple est supérieur à 0,8. Donc quelle que soit la répartition de ces espèces dans la population de manchots, la moyenne pondérée de ces trois nombres sera supérieure à 0,8 et donc à 0,6.

Affirmation b

FAUX : le diagramme permet d'affirmer que le nombre moyen de poussin élevé en 2007 par un couple de manchots Gorfou (environ 0,8) est le double du nombre moyen de poussin élevé par un couple de manchots Papou (environ 0,4). S'il y avait autant de couples de chaque espèce, l'affirmation serait vraie mais comme nous ne connaissons pas les effectifs de couples de chaque espèce, il est impossible de conclure positivement. Imaginons par exemple qu'il y ait deux fois plus de couples de manchots Papou que Gorfou, il y aurait alors eu en 2007 autant de poussins Papou que Gorfou.

Affirmation c

VRAI : en 2001, le nombre moyen de poussins élevés par un couple de manchots de Magellan était de 1. Il est d'environ 0,5 en 2004. Le nombre moyen de poussins élevés par un couple de manchots de Magellan a donc diminué.

5) Vitesse de nage

Les manchots les plus rapides nagent à la vitesse de 36 km/h soit 36000 m en 3600 secondes soit 10 m en 1 seconde c'est-à-dire 100 m en dix secondes.
Ils nagent donc 469,1 mètres en 46 secondes et 91 centièmes de seconde.

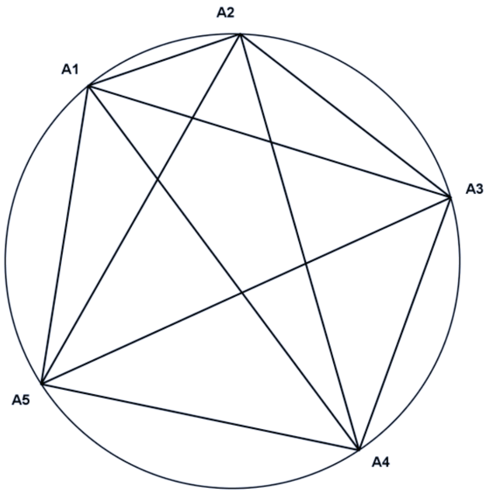
EXERCICE N°2

Partie A

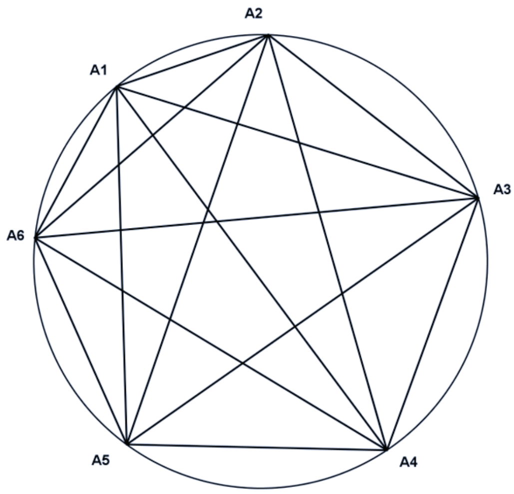
1) Nombres de segments joignant deux à deux, cinq, six ou onze points d'un cercle

Méthode 1 :

La position des points sur le cercle n'ayant pas d'importance, on peut faire un dessin et compter le nombre de segments tracés.



Pour n = 5, on obtient 10 segments



Pour n = 6, on obtient 15 segments

Remarque :
Lorsque le nombre de points augmente, les tracés et le comptage des segments deviennent délicats. On est amené à utiliser l'une des deux méthodes ci-dessous.

Méthode 2 :

Pour n = 5, chaque segment cherché correspond à un choix de deux points parmi les 5. On a 5 choix pour le premier point et 4 choix pour le deuxième ce qui donne 20 couples de points possibles. Mais chaque segment correspondant à deux couples (l'ordre des extrémités du segment n'a pas d'importance), il faut donc diviser ce nombre de couples par 2 pour obtenir le nombre de segments. Ainsi pour n = 5, on a 10 segments.

Méthode 3 :

Soit A1, A2, A3, A4 et A5, les 5 points choisis sur le cercle. On dénombre successivement, les segments dont une extrémité est A1, puis dont une extrémité est A2 et l'autre un point différent de A1, etc.

- Pour A1, on obtient 4 segments de seconde extrémité A2, A3, A4 et A5.
- Pour A2, on obtient 3 segments de seconde extrémité A3, A4 et A5 (le segment [A1A2] a déjà été pris en compte).
- Pour A3, on obtient 2 segments de seconde extrémité A4 et A5.
- Pour A4, on obtient 1 segment de seconde extrémité A5.

Pour n = 5, le nombre de segments est donc $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Par des raisonnements analogues on trouve :

Méthode 2 :

Pour n = 6, on a $6 \times \frac{5}{2} = 15$ segments.
Pour n = 11, on a $11 \times \frac{10}{2} = 55$ segments.

Méthode 3 :

Pour n = 6, on a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ segments.
Pour n = 11, on a $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ segments.

2) Généralisation

En généralisant la méthode 2, on a n choix pour le premier point et (n-1) choix pour le deuxième ce qui donne $n \times (n-1)$ couples de points possibles. Mais chaque segment correspondant à deux couples (l'ordre des extrémités du segment n'a pas d'importance), il faut donc diviser ce nombre de couples par 2 pour obtenir le nombre de segments. Ainsi pour n points, le nombre total de segments est $\frac{n\times(n-1)}{2}$.

En généralisant la méthode 3, on dénombre successivement :

- les segments dont une extrémité est A1 : il y en a (n-1) ;
- puis les segments dont une extrémité est A2 et l'autre un point différent de A1 : il y en a (n-2) ;
- etc.

Le nombre total de segments est donné par la somme S des n-1 premiers nombres entiers positifs :
S=(n-1) + (n-2) + … + 2 + 1

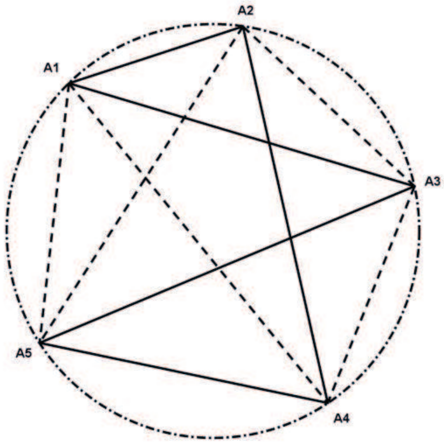
Remarque :
Les deux résultats sont bien égaux. Pour s'en convaincre, on peut écrire la somme S de deux façons différentes, puis additionner en colonne les termes deux à deux. On obtient (n-1) termes chacun égaux à n.

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 2 & + & 1 \\ S = & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-2) & + & (n-1) \\ \hline 2 \times S = & n & + & n & + \ldots + & n & + & n \end{array}$$

D'où $2 \times S = n \times (n-1)$ *et* $S = \frac{n\times(n-1)}{2}$

Partie B

1) a) Configuration à 5 points complétée

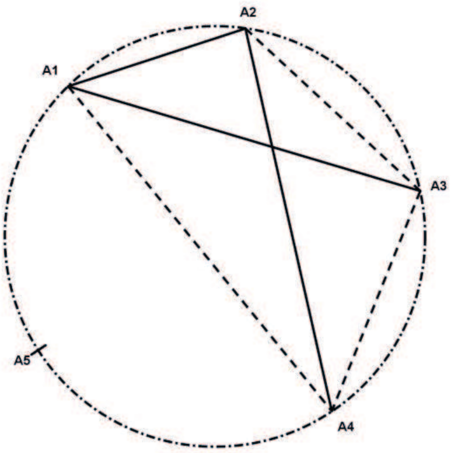


1) b) Unicité de la solution

La solution précédente est l'unique façon de compléter la configuration de façon à ce que n'apparaisse aucun triangle monochrome.
En partant de la situation initiale, on est obligé successivement :

- de colorier le segment [A1 A3] en noir (sans quoi le triangle A1 A3 A4 serait monochrome gris) ;
- de colorier le segment [A2 A3] en gris (sans quoi le triangle A1 A2 A3 serait monochrome noir) ;
- de colorier le segment [A2 A4] en noir (sans quoi le triangle A2 A3 A4 serait monochrome gris).

On obtient alors la configuration suivante :

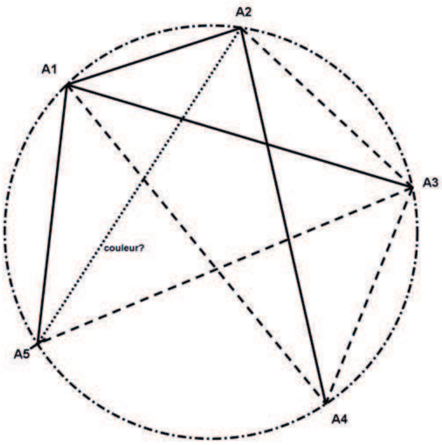


N'ayant aucune information sur les segments issus de A5, il faut alors choisir l'un d'entre eux et considérer deux cas, selon que ce segment est colorié en noir ou en gris.

Raisonnons par exemple sur le segment [A1 A5].

1er cas : le segment [A1 A5] est colorié en noir

On est alors obligé de colorier le segment [A5 A3] en gris (sans quoi le triangle A5 A1 A3 serait monochrome noir).
Mais alors, le segment [A5 A2] ne peut ni être colorié en noir (en raison du triangle A5 A1 A2) ni en gris (en raison du triangle A5 A3 A2).



Dans ce cas, il y a donc impossibilité à compléter le coloriage de la configuration sans faire apparaître de triangle monochrome.

2nd cas : le segment [A1 A5] est colorié en gris

On est alors obligé successivement :

- de colorier le segment [A5 A4] en noir (sans quoi le triangle A1 A5 A4 serait monochrome gris) ;
- de colorier le segment [A5 A2] en gris (sans quoi le triangle A5 A2 A4 serait monochrome noir) ;
- et pour finir, de colorier le segment [A5 A3] en noir (sans quoi le triangle A5 A2 A3 serait monochrome gris).

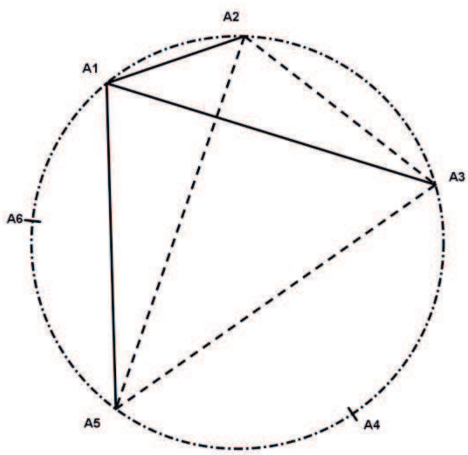
On retrouve la solution vue précédemment et il n'y a dans ce cas qu'une seule façon de compléter le coloriage de la configuration sans faire apparaître de triangle monochrome.

Au final, il n'y a bien qu'une seule façon de compléter la configuration précédente pour qu'elle ne comporte aucun triangle monochrome.

Remarque :
Les raisonnements seraient analogues si l'on avait choisi un autre segment issu de A5.

2) a) Possibilité ou non de compléter la configuration à 6 points

Il est impossible de compléter cette configuration sans faire apparaître de triangle monochrome. En effet pour éviter les triangles monochromes noirs, on est dans l'obligation de colorier les segments [A2 A3], [A5 A3] et [A2 A5] en gris. Mais on fait alors apparaître un triangle monochrome gris : le triangle A2 A3 A5.



2) b) Existence ou non d'une configuration à 6 points sans triangles monochromes

Non, il n'existe pas de configuration à 6 points ne comportant aucun triangle monochrome.

Le raisonnement vu à la question précédente se généralise et peut s'appliquer à toute configuration dans laquelle trois segments issus d'un même point sont coloriés de la même couleur, que celle-ci soit noire ou que celle-ci soit grise.
Dit autrement, on peut affirmer que dès qu'une configuration comporte trois segments issus d'un même point coloriés de la même couleur, il est impossible d'en compléter le coloriage sans faire apparaître un triangle monochrome.

Or dans une configuration à 6 points, il part 5 segments de chaque point.
Par exemple de A1, il part : [A1 A2], [A1 A3], [A1 A4], [A1 A5], [A1 A6].
Comme nous ne disposons que de deux couleurs, au moins trois d'entre eux sont coloriés de la même couleur. Le raisonnement précédent permet donc d'affirmer que toute configuration à 6 points comporte au moins un triangle monochrome.

Remarque :
On peut reformuler ce résultat en disant que pour colorier la configuration à 6 points sans faire apparaître de triangle monochrome, deux couleurs ne suffisent pas, mais que trois couleurs sont nécessaires. Des raisonnements analogues à ceux développés ici permettent de démontrer qu'avec trois couleurs, on peut colorier sans triangle monochrome les configurations comportant jusqu'à 16 points, mais que quatre couleurs sont nécessaires à partir 17 points.
Au-delà de ces valeurs, ce problème de coloration est complexe et reste en grande partie ouvert.

EXERCICE N°3

Partie A

1) Description de deux procédures

Procédure 1 : sans utiliser la mesure.
Les élèves peuvent procéder :
- En identifiant les pièces superposables entre les deux personnages. Par exemple les têtes, les bustes, etc.
- En mettant en correspondance des pièces ou ensemble de pièces, par découpage ou recollement. Par exemple, la jupe de la fillette peut être recouverte par le chapeau et les deux pieds du garçon, etc.

Pour conclure, il faut regarder si on a pu recouvrir la totalité d'un personnage sans utiliser toutes les pièces de l'autre.

Procédure 2 : en utilisant la mesure
La procédure consiste en :
- Choisir une unité de mesure.
- Paver (par le dessin ou mentalement) la figure à l'aide de cette unité d'aire.
- Compter le nombre de reports de l'unité d'aire.

Remarque :
Suivant l'unité de mesure choisie, la mesure peut être entière ou rationnelle.
Si l'unité de mesure u choisie est l'aire du plus petit triangle, on obtient :
Aire de la fillette = 36u et Aire du garçon = 40u.
Si l'unité de mesure u choisie est l'aire de la feuille de carton carrée, on a :
Aire de la fille = $2u + \frac{1}{4}u$ *et Aire du garçon* = $2u + \frac{1}{2}u$.

Aldo a donc utilisé plus de carton pour construire le personnage du garçon que pour celui de la fillette.

2) Deux notions travaillées à l'aide de cette activité

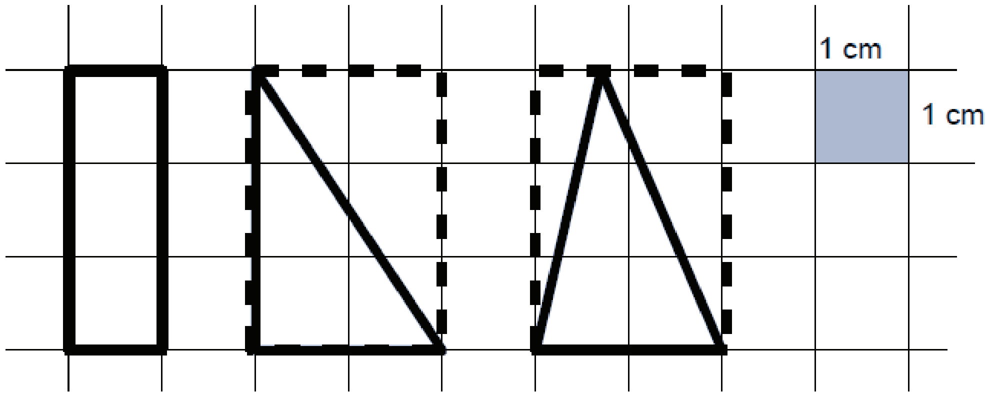
Dans le domaine « Grandeurs et mesure », cette activité permet de travailler la notion d'aire.
Dans le domaine « Nombres et calcul », elle peut permettre de travailler la notion de fraction, en particulier les fractions simples : un demi, un quart, …

3) Procédure erronée

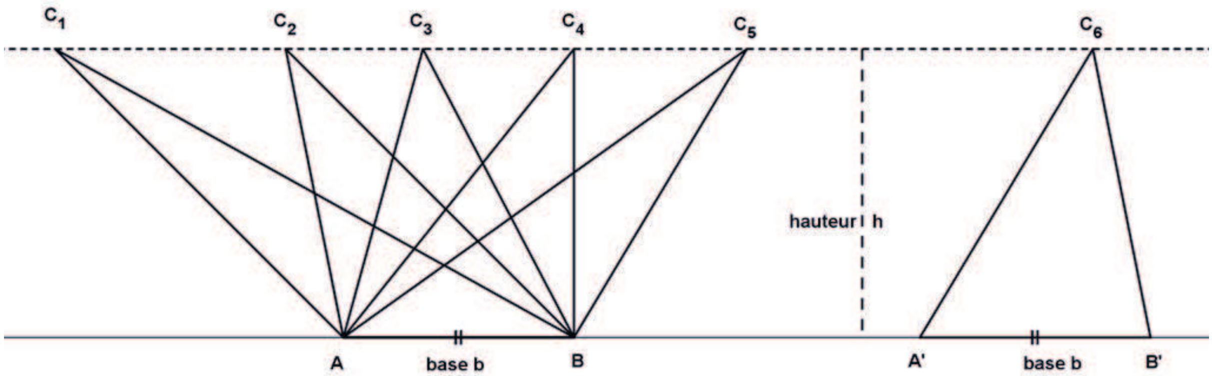
Une procédure erronée qu'un élève pourrait mettre en œuvre serait de compter et comparer les nombres de pièces nécessaires pour chacun des deux puzzles, 9 pièces pour le garçon, 17 pièces pour la fillette et en conclure qu'Aldo a utilisé plus de carton pour la fillette que pour le garçon.
Il peut avoir interprété « plus de carton », comme « plus de carton<u>s</u> », c'est-à-dire « plus de pièces de carton » et non comme « plus de feuilles carrées de carton ».

Partie B

1) Résolution de l'exercice



Remarques :
1) Un triangle rectangle est un demi-rectangle. Pour construire un triangle rectangle d'aire 3 cm² on pouvait s'appuyer sur tout rectangle d'aire 6 cm².
2) La formule du calcul de l'aire d'un triangle, $A = \frac{1}{2} b \times h$, montre que l'aire d'un triangle ne dépend que de sa base et de sa hauteur. En conséquence, lorsque des triangles ont même base et même hauteur, ils ont forcément même aire, sans pour autant avoir obligation d'être superposables.
Ainsi dans la figure ci-dessous les triangles ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4, ABC_5, $A'B'C_6$ ont tous même aire.



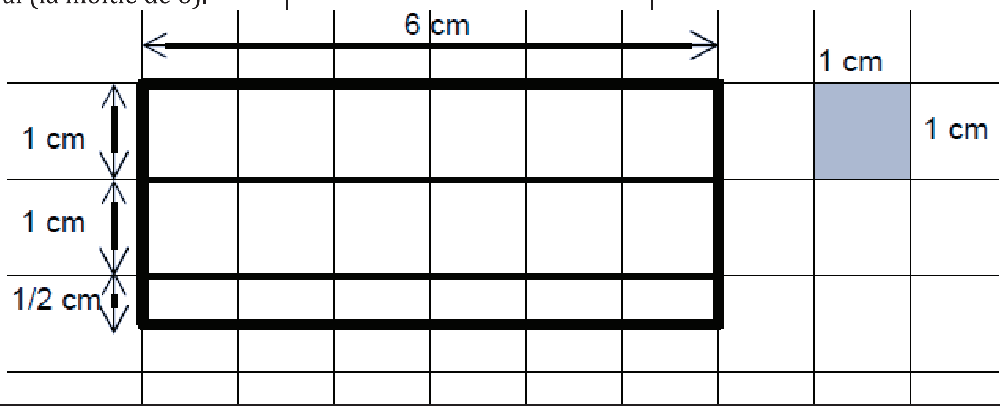
2) Construction d'un carré d'aire 3 cm²

Un carré de 3 cm² d'aire a des côtés de longueur $\sqrt{3}$ cm. Or $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
Un élève de CM2 ne peut pas construire à la règle graduée un carré d'aire 3 cm² : il est en effet impossible d'obtenir un côté de longueur $\sqrt{3}$ cm avec les graduations de la règle.
Il peut, au mieux, essayer de trouver un carré d'aire qui s'approche de 3 cm² en prenant pour longueur de côté soit 1,7 cm (mais c'est trop petit car $1{,}7^2 \approx 2{,}9$) soit 1,8 cm (mais c'est trop grand car $1{,}8^2 \approx 3{,}2$).
Le risque serait qu'il soit amené à croire qu'il est impossible de construire un carré d'aire 3 cm².

Partie C

	Procédure	Erreurs éventuelles	Hypothèses sur l'origine des erreurs
Aurélie Résultat faux	Elle calcule le périmètre du rectangle $(2L + l + l)$ avec comme unité de longueur le mm. Elle convertit le résultat obtenu en cm (division par 10 mentale).	Confusion aire et périmètre ou entre la formule permettant de calculer le périmètre d'un rectangle et celle permettant de calculer l'aire d'un rectangle. Suites d'égalités fausses : il n'y a pas d'équivalence entre les deux côtés de l'égalité. Conversion des mm en cm et non pas des mm² en cm². Absence d'unité pour l'aire	Cette confusion peut être interprétée comme due au fait que périmètre et aire sont associés à une même surface. Par ailleurs, le périmètre et l'aire peuvent être obtenus par des formules auxquelles les élèves peuvent ne pas donner de sens. Le signe « = » semble être utilisé ici pour traduire le cheminement de pensée de l'élève. Le rapport de conversion entre les mm² et les cm² n'est pas un rapport égal à 10 comme dans les autres unités vues à l'école. Il est souvent difficile en CM2 de donner du sens à la relation 100 mm² = 1 cm². Il serait souhaitable que les élèves convertissent d'abord les longueurs des côtés du rectangle en cm avant d'appliquer la formule de calcul d'aire. Oubli
Bastien Résultat faux	Il commence par convertir les longueurs des côtés du rectangle en cm. Il cherche ensuite à appliquer une formule pour trouver l'aire du rectangle (formule appliquée : $L \times l \times L \times l$).	La formule de l'aire d'un rectangle est fausse.	Le calcul de l'aire est bien associé à une multiplication mais le fait de prendre en compte les longueurs des quatre côtés du rectangle peut avoir pour origine : - Penser que la formule du calcul de l'aire d'un rectangle est de la même forme que celle donnant le périmètre d'un rectangle et qu'il faut uniquement transformer le « + » en « × ». - Penser, par effet de contrat didactique, que toutes les données de l'énoncé doivent être utilisées pour produire la réponse.

Célia Résultat faux	Elle applique la bonne formule de calcul de l'aire d'un rectangle, en prenant les longueurs des côtés en mm. Elle convertit les mm² en cm² en divisant mentalement par 10.	Utilisation d'un rapport de conversion de 10 (et non de 100) entre les mm² en les cm².	Erreur courante (voir Aurélie). Par ailleurs, la similitude de notation entre les unités d'aire et les unités de longueur (cm et cm² ; mm et mm²) peut également expliquer cette erreur.
Djamel Résultat juste	Il commence par convertir les longueurs des côtés en cm. Il partage le rectangle en deux rectangles de 6 cm sur 1 cm et un rectangle de 6 cm sur 0,5 cm (voir figure ci-dessous) : On ne sait pas comment il obtient l'aire d'un rectangle de 6 cm sur 1 cm : pavage à l'aide de carrés de 1 cm de côté qui sont ensuite comptés ou alors calcul mental de l'aire en appliquant la formule 6 cm × 1 cm. Le pavage (voir figure ci-dessous) semble être privilégié au vu de son calcul pour obtenir l'aire du rectangle de 6 cm sur 0,5 cm. Pour obtenir que 6 moitiés de cm² font 3 cm², il a pu procéder soit par découpage-recollement mental (deux moitiés de cm² font 1 cm²) soit par calcul (la moitié de 6).		



TROIS EXERCICES D'APRÈS UN SUJET DE BESANÇON

EXERCICE N°1

Partie A : étude de la course d'un coureur débutant

1) Après trois quarts d'heure de course

a) Distance parcourue par le coureur après trois quarts d'heure de course

La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h. On peut calculer la distance parcourue en trois quarts d'heure de la manière suivante : $\frac{3}{4}\text{h} \times 6\text{ km/h} = \mathbf{4,5\ km}$.

Autre méthode :

On peut aussi remarquer qu'en un quart d'heure, le coureur parcourt 1,5 km (4 fois moins que la distance qu'il parcourt en une heure), et en déduire qu'en trois quarts d'heure, il parcourt 3 × 1,5 km, soit **4,5 km**.

b) Distance parcourue par la voiture « catcher car » après trois quarts d'heure de course

La voiture « catcher car » part à 10 h 30, soit une demi-heure après le coureur. Après trois quarts d'heure de course, elle a donc roulé seulement pendant un quart d'heure.
Or l'énoncé indique que pendant le premier quart d'heure de son parcours, la voiture roule à 15 km/h : en un quart d'heure, elle parcourt donc $\frac{1}{4} \times 15$ km, soit 3,75 km.
Après trois quarts d'heure de course, la voiture a donc effectué 3,75 km.

c) Position de la voiture « catcher car » par rapport au coureur après trois quarts d'heure de course

3,75 km < 4,5 km,
donc **après trois quarts d'heure, la voiture « catcher car » n'a pas rattrapé le coureur.**

2) Expression de la distance *d* (en km) parcourue par le coureur débutant au bout d'une durée *t* (en heure)

Notons d la mesure de la distance parcourue par le coureur débutant, l'unité de longueur étant le km et t la durée de parcours correspondante, l'unité de durée étant l'heure.
La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h.
On a donc : d km $= t$ h × 6 km/h soit $\boldsymbol{d = 6\,t}$.

3) Expression de la distance *D* (en km) parcourue par la voiture au bout d'une durée *t* (en heure) inférieure à 1 h depuis le départ de la course.

Notons D la mesure de la distance parcourue par la voiture, l'unité de longueur étant le km et t la durée depuis le début de la course, l'unité de durée étant l'heure.

La durée est relevée à partir du départ de la course, c'est-à-dire que t est compris entre 0 et 10.

La voiture « catcher car » part à 10 h 30 donc, pour tout t compris entre 0 et 0,5, la distance parcourue est nulle (la voiture n'a pas encore démarré) : $D = 0$.

Pour toute durée de course comprise entre 0,5 heure et 1 heure, la voiture roule à 15 km/h pendant une durée égale à (t – 0,5) heure : elle parcourt donc une distance égale à 15 ($t - 0{,}5$) kilomètres.

Finalement, pendant la première heure de course, on peut écrire :

$$\boldsymbol{D} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si}\ \mathbf{0 \le t \le 0,5} \\ \mathbf{15\ (t - 0,5)} & \boldsymbol{si}\ \mathbf{0,5 \le t < 1} \end{cases}$$

4) Durée de la course du coureur entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car »

Pour que la voiture « catcher car » ait rattrapé le coureur, il faut qu'elle ait démarré… donc la durée cherchée est supérieure à 0,5 heure.
D'après les questions 2 et 3, pendant la première heure de course, au bout de la durée t (en h) :

- la mesure en kilomètres de la distance parcourue par le coureur est $d = 6\,t$;
- la mesure en kilomètres de la distance parcourue par la voiture est $D = 15(t - 0{,}5)$.

Il suffit alors de résoudre l'équation $d = D$ pour déterminer la durée éventuelle au bout de laquelle la voiture et le coureur auront parcouru la même distance (condition vérifiée lorsque la voiture rattrape le coureur).
On résout donc l'équation : $6t = 15(t - 0{,}5)$ (avec $0{,}5 \leq t \leq 1$).
On obtient : $6t = 15t - 7{,}5$ ou encore $9t = 7{,}5$ soit $t = \frac{7{,}5}{9} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.
$\frac{5}{6} < 1$ donc on est bien dans l'intervalle de validité de la formule établie dans la question 3).
Le coureur est donc rattrapé par la voiture « catcher car » au bout de $\mathbf{\frac{5}{6}}$ **h**,

Cette durée peut être exprimée en minutes : 1 h = 60 min,
donc $\frac{1}{6}$ h = $\frac{1}{6} \times 60$ min = 10 min et $\frac{5}{6}$ h = 5 × 10 min = 50 min.

Un participant qui court à 6 km/h est donc rattrapé par la voiture « catcher car » au bout de 50 minutes, soit à 10 h 50.

5) Distance parcourue par le coureur entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car » :

La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h : autrement dit, en une heure, il parcourt 6 km, et la distance qu'il parcourt est proportionnelle à la durée de son parcours.
La distance parcourue en $\frac{5}{6}$ h est donc égale à : $\frac{5}{6} \times 6$ km $=$ **5 km.**

Remarque :
On peut vérifier que la voiture a bien parcouru la même distance que le coureur au bout de 50 minutes de course ; en utilisant la formule établie dans la question 3, on obtient en effet :
$15 \times (\frac{5}{6} - 0{,}5) = 15 \times \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{6}\right) = 15 \times \frac{2}{6} = 5.$

Partie B : la course du vainqueur français 2014 (Thibaut Baronian) et du vainqueur mondial (Lemawork Ketema)

1) Distance parcourue par Thibaut Baronian

Thibaut Baronian a couru pendant 4 heures et 4 minutes avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car ». Pour déterminer la distance parcourue par le coureur, il suffit donc de trouver la distance parcourue par cette voiture au bout de cette durée.

La voiture ne roule pas pendant les 30 premières minutes de la course, donc elle a roulé pendant 3 heures 34 minutes.

On sait qu'à partir du moment où elle démarre, sa vitesse augmente selon les modalités indiquées dans le tableau :

- au cours de la première heure de son trajet, elle roule à la vitesse de 15 km/h donc elle parcourt 15 km ;
- au cours de la deuxième heure, elle roule à la vitesse de 16 km/h donc elle parcourt 16 km ;
- au cours de la troisième heure, elle roule à la vitesse de 17 km/h donc elle parcourt 17 km.
- au cours de la quatrième heure, elle roule pendant 34 minutes à la vitesse de 20 km/h. Or à cette vitesse, en une minute, elle parcourt $\frac{20}{60}$ km (puisque 1 h = 60 min) ; en 34 minutes, elle parcourt donc $34 \times \frac{20}{60}$ km $= \frac{34}{3}$ km.

Au total, en 3 heures et 34 minutes, la voiture « catcher car » a donc parcouru :
$15 \text{ km} + 16 \text{ km} + 17 \text{ km} + \frac{34}{3} \text{ km} = \frac{178}{3} \text{ km} \approx 59{,}3 \text{ km}$ à 0,1 km près.

Par conséquent, avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car », Thibaut Baronian a lui aussi parcouru $\frac{178}{3}$ km ; la valeur approchée au dixième près par défaut de cette distance est 59,3 km.

2) Étude de la vitesse de Thibaut Baronian pendant sa course

a) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la première partie de la course

On sait qu'il a parcouru les 42 premiers kilomètres de sa course en 2 heures et 48 min.
Pour exprimer en heures la durée du parcours, on utilise la relation 1 h = 60 min, soit 1 min = $\frac{1}{60}$ h.
La durée de la première partie de course est 2 heures et 48 minutes,
soit $2 \text{ h} + \frac{48}{60} \text{h} = 2 \text{ h} + \frac{8}{10} \text{h} = 2{,}8 \text{ h}$.
La distance parcourue pendant cette partie est 42 km.
La vitesse moyenne sur ce parcours est donc $\frac{42 \text{ km}}{2{,}8 \text{ h}} = 15 \text{ km/h}$.

b) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la seconde partie de sa course (après 42 km)

Thibaut Baronian a couru $\frac{178}{3}$ km en 4 heures et 4 minutes et a parcouru les 42 premiers kilomètres en 2 heures et 48 minutes.

Pour calculer sa vitesse moyenne sur la deuxième partie de son parcours, il suffit de déterminer la durée de cette deuxième partie de course, et la distance parcourue pendant celle-ci.

- La durée de la seconde partie de sa course peut être calculée en déterminant le complément à ajouter à 2 heures et 48 minutes pour atteindre 4 heures et 4 minutes : ce complément est égal à 12 minutes (pour atteindre 3 heures) auxquelles on ajoute 1 heure et 4 minutes (pour atteindre 4 heures et 4 minutes) ; il est donc égal à 1 heure et 16 minutes.
  On peut exprimer cette durée en heures :

  1 h 16 min = $1 \text{ h} + \frac{16}{60} \text{ h} = 1 \text{ h} + \frac{8}{30} \text{ h} = \frac{38}{30} \text{h} = \frac{19}{15} \text{ h}$.
- La distance parcourue au cours de la seconde partie de sa course peut être calculée par différence entre la distance totale parcourue pendant la course, et la distance parcourue pendant la première partie : $\frac{178}{3}$ km – 42 km = $\frac{178}{3}$ km– $\frac{126}{3}$ km = $\frac{52}{3}$ km.

On en déduit la vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la seconde partie de sa course :
$\frac{\frac{52}{3}\text{km}}{\frac{19}{15}\text{ h}} = \frac{52 \times 15}{3 \times 19} \text{km/h} = \frac{260}{19} \text{km/h} \approx 13{,}7 \text{ km/h}$ à 0,1 km/h près.
Sa vitesse moyenne au cours de la seconde partie de sa course a donc été environ $13,7$ km/h (à 0,1 km/h près).

c) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur l'ensemble de sa course

Sur l'ensemble de sa course, il a parcouru $\frac{178}{3}$ km, en 4 heures et 4 minutes.

Cette durée, exprimée en heures, est égale à : $4 \text{ h} + \frac{4}{60} \text{ h} = 4 \text{ h} + \frac{1}{15} \text{ h} = \frac{61}{15} \text{h}$.
La vitesse moyenne est donc :
$\frac{\frac{178}{3} \text{ km}}{\frac{61}{15} \text{ h}} = \frac{178 \times 15}{3 \times 61} \text{ km/h} = \frac{890}{61} \text{ km/h} \approx 14{,}6 \text{ km/h}$ à 0,1 km/h près.
Sa vitesse moyenne sur l'ensemble de sa course a donc été **environ $14,6$ km/h (à 0,1 km/h près).**

3) Durée de la course du vainqueur mondial 2014 (Lemawork Ketema)

Ce coureur a parcouru 78,58 km avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car ». Pour répondre à la question, on détermine d'abord la durée mise par la voiture pour parcourir cette distance.
Pendant la première heure de son trajet, la voiture a parcouru 15 km.
Pendant la deuxième heure, elle a parcouru 16 km ; au bout de deux heures, elle a donc parcouru 15 km + 16 km depuis le départ, soit 31 km.
Pendant la troisième heure, elle a parcouru 17 km, soit 31 km + 17 km = 48 km depuis le départ.

Il lui restait alors 30,58 km à parcourir avant l'instant où elle a rattrapé Lemawork Ketema (car 78,58 km – 48 km = 30,58 km).
Or pendant la quatrième heure et la cinquième heure de son trajet, la voiture roule à 20 km/h. À cette vitesse, elle parcourt 40 km en deux heures : il lui a donc fallu moins de deux heures pour parcourir 30,58 km, et a donc rattrapé le coureur en moins de cinq heures de trajet.

Plus précisément, on peut calculer la durée qu'elle a mise pour parcourir 30,58 km à 20 km/h :
$\frac{30{,}58 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 1{,}529$ h.
La durée du trajet de la voiture a donc été égale à 3 h + 1,529 h = 4,529 h.
On peut exprimer cette durée en heures et minutes : $\frac{529}{1000}$ h $= \frac{529}{1000} \times 60$ min $= 31{,}74$ min ≈ 32 min à la minute près.
La durée du trajet de la voiture a donc été égale à environ 4 heures et 32 minutes.

Le coureur étant parti 30 minutes avant la voiture, l**a durée de la course du vainqueur mondial en 2014 a donc été environ de 5 heures et 2 minutes (à la minute près).**

Partie C : interprétation du tableau

Calcul de la durée de la course quand on adopte une vitesse constante de 11 km/h

Dans la ligne correspondant à une vitesse constante de 11 km/h, les colonnes « Durée » et « Distance » donnent les durées et distances réalisables sur la course « Wings For Life Run » avant d'être rattrapé par la voiture.

Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans la question A.2., à la vitesse de 11 km/h, la distance d parcourue par le coureur au bout de t heures de course est égale à $11t$.

La voiture démarre au bout de 30 minutes et roule à 15 km/h pendant la première heure de son trajet.

En une heure et 30 minutes de course, la voiture roule pendant une heure et parcourt 15 km tandis que le coureur parcourt $11 \times 1{,}5$ km, soit 16,5 km. La voiture ne rattrape donc pas le coureur.

Pendant la deuxième heure de son trajet, la voiture roule à 16 km/h. Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans la question A.4. , la distance qu'elle parcourt au bout de t heures (avec $1 \leq t \leq 2$) est donc égale, en kilomètres, à $15 + 16(t - 1{,}5)$.

Pendant cette même durée, la distance parcourue depuis le départ par le coureur est égale, en kilomètres, à $11t$.

La voiture rattrape donc le coureur lorsque $15 + 16(t - 1{,}5) = 11t$ (avec $1 \leq t \leq 2$).

On résout cette équation : $5t = 9$ donc t = $\frac{9}{5}$ (qui est bien compris entre 1 et 2).

La voiture rattrape donc le coureur au bout de $\frac{9}{5}$ h. Or un cinquième d'heure est égal à 12 minutes, donc 9 cinquièmes d'heure sont égaux à une heure et 4×12 min, soit 1 heure et 48 minutes. On retrouve bien la durée indiquée dans le tableau (01:48:00).

EXERCICE N°2

1) Calcul des effectifs cumulés (remplissage de la colonne F)

Dans la colonne F, on calcule les effectifs cumulés croissants de la série des prix regroupés en classes. L'effectif associé aux classes [200 ; 300 [et [300 ; 400[réunies est égal à la somme des effectifs respectifs de ces deux classes. On peut donc entrer dans la cellule F3 la formule : $\boxed{\text{= F2 + E3}}$

Recopiée vers le bas, cette formule permettra de calculer les effectifs cumulés quelles que soient les classes considérées ; en effet, une fois que l'on a calculé les effectifs cumulés pour des classes consécutives, il suffit, pour prendre en compte une tranche supplémentaire dans le calcul des effectifs cumulés, d'ajouter aux effectifs cumulés déjà calculés, l'effectif associé à cette tranche supplémentaire.

2) Calcul des fréquences (remplissage de la colonne G)

On peut éliminer la formule $\boxed{\text{=E2/(SOMME(E2 : E10))}}$: entrée en G2, elle donne un résultat correct (fréquence des appareils photos dont les prix sont compris entre 200 € et 300 € parmi les appareils photos considérés), mais étirée vers la cellule G3, elle est transformée en $\boxed{\text{=E3/(SOMME(E3 : E11))}}$: l'effectif total des appareils photos n'est alors pas calculé correctement.

La formule $\boxed{\text{=E2/(SOMME(E\$2 : E\$10)}}$ est en revanche correcte : la présence du caractère $ permet de conserver la plage de cellules E2 : E10 pour le calcul de l'effectif total lorsque la formule est étirée vers le bas.

La formule $\boxed{\text{=F2/F10}}$ ne convient pas pour les mêmes raisons que la première formule (il suffirait de la transformer en $\boxed{\text{=F2/F\$10}}$ pour qu'elle convienne).

La formule $\boxed{\text{=E2/25*100}}$ convient pour la série de données considérée, mais ne résisterait pas à un changement d'effectif dans la colonne E.

Remarque :
On rappelle que quand on ajoute le caractère $ devant l'adresse d'une cellule, on parle de référence absolue, ce qui signifie que quel que soit l'étirement ou le copier coller, la formule de la cellule ne change pas. Sans $, on parle de référence relative, ce qui signifie que les indices des formules sont incrémentés du nombre de lignes et de colonnes lors du déplacement dans la feuille de calcul. Ainsi, par exemple, la formule « =E3+$F6 », après un copier coller de la cellule B7 à la cellule D10 (soit 2 colonnes lettres plus à droite et 3 lignes nombres plus bas), devient « =G6+$F9 ».

3) Indicateurs de position pour la série statistique considérée

Rappelons d'abord qu'il n'y a pas de consensus sur la définition de la médiane : selon les sources bibliographiques consultées ou les calculatrices ou les logiciels tableurs utilisés, on peut obtenir des réponses différentes pour la valeur de la médiane d'une série de données. Nous adoptons ici les définitions qui sont préconisées dans le document ressource pour l'enseignement des mathématiques *Organisation et gestion de données au Collège* (Eduscol, 2007) :

Médiane (empirique) : *la série des données est ordonnée par ordre croissant. Si la série est de taille impaire (2n+1), la médiane est la valeur du terme de rang n+1. Si la série est de taille paire (2n), la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et n+1.*

Premier quartile (empirique) : *c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % des données sont inférieures ou égales à q.*

Troisième quartile (empirique) : *c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75 % des données sont inférieures ou égales à q'.*

a) Classe à laquelle le premier quartile appartient

Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes : on constate que l'on n'atteint pas 25 % des données rangées par ordre de prix croissant en ne considérant que la première classe, et qu'on dépasse ces 25 % en considérant les deux premières classes. **Le premier quartile appartient donc à la deuxième classe : il est compris entre 300 € et 400 €.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants. Il y a 25 données dans la série, et $\frac{25}{100} \times 25 = 6{,}25$. Le 1er quartile est donc la 7ème valeur de la série des prix rangés par ordre croissant. Or dans la colonne E, on lit que 5 prix sont strictement inférieurs à 300 € (première classe), et que 10 prix sont strictement inférieurs à 400 € (première et deuxième classes réunies). **Le 7ème prix (et donc le 1er quartile) appartient donc à cette deuxième tranche [300 ; 400[.**

b) Classe à laquelle la médiane appartient

Cette classe est appelée parfois « classe médiane ». Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes et chercher la première classe permettant d'atteindre 50 % des données : **on trouve la classe [500 ; 600[.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants et chercher la classe à laquelle la 13ème valeur de la série appartient (25 = 12 x 2 + 1, donc on considère la 13ème valeur de la série) : on constate que **cette valeur appartient à la classe [500 ; 600[**.

c) Classe à laquelle le troisième quartile appartient

Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes : on cherche la première classe permettant d'englober plus de 75 % des données : on lit dans le tableau que **c'est la classe [700 ; 800[.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants. $\frac{75}{100} \times 25 = 18{,}75$. Le 3ème quartile est donc la 19ème valeur de la série des prix rangés par ordre croissant. Or dans la colonne E, on lit que 18 prix sont strictement inférieurs à 700 €, et que 21 prix sont strictement inférieurs à 800 €. **Le 18ème prix (et donc le 3ème quartile) appartient donc à la deuxième tranche [700 ; 800[.**

4) Représentation en diagramme circulaire

a) Association entre les classes et les secteurs qui les représentent dans le diagramme circulaire.

On peut ranger les angles des différents secteurs du graphique par ordre décroissant : pour cela, il suffit de découper ces différents secteurs et de les superposer, ou de les décalquer avant de faire une démarche similaire sur les gabarits ainsi obtenus, ou de les mesurer avec un rapporteur.
Une fois ce rangement fait, il suffit de mettre les secteurs ainsi rangés en correspondance avec les fréquences de chacune des classes également rangées par ordre décroissant.
En procédant ainsi, on obtient les rangements suivants, et les associations qui en découlent :

- Rangement des secteurs par angles au centre décroissant :

Numéros des secteurs	2 et 5	8	4	1, 6 et 7	3 et 9

- Rangement des classes par fréquences décroissantes :

Fréquences	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
Classes associées	[200; 300[[300; 400[	[600; 700[	[700; 800[	[400; 500[[500; 600[[1000; 1100[	[800; 900[[900; 1000[

- Association :

Classes	[200; 300[[300; 400[	[600; 700[	[700; 800[	[400; 500[[500; 600[[1000; 1100[	[800; 900[[900; 1000[
Numéro des secteurs	2 et 5	8	4	1, 6 et 7	3 et 9

b) Calcul de l'angle associé à la classe [600 ; 700[

On s'intéresse à la classe [600 ; 700[dans la série de données. D'après le tableau, la fréquence des éléments de cette classe par rapport à l'effectif total est égale à 0,16.
Or, dans un diagramme circulaire, les angles au centre des secteurs circulaires sont proportionnels aux effectifs représentés (et donc aux fréquences associées). L'angle du secteur circulaire représentant la classe [600 ; 700[est donc égal à $\frac{16}{100} \times 360°$, soit 57,6°.

EXERCICE N°3

1) Conclusions que l'on peut tirer du fait que ni la taille moyenne des garçons, ni la taille moyenne des filles n'ont changé après la prise en compte des deux élèves supplémentaires

Trois cas sont possibles.

Cas 1 : les deux élèves supplémentaires sont des filles

Dans ce cas, puisque la taille moyenne des filles est restée à 150 cm, **la taille moyenne des deux filles ajoutées au groupe est aussi égale à 150 cm** (autrement dit la somme des tailles de ces deux filles est égale à 2 × 150 cm).

En effet :

- la taille moyenne des filles en l'absence des deux élèves est égale à $\frac{S}{n}$ où S désigne la somme des tailles des filles en l'absence des deux élèves, et où n désigne le nombre de filles en l'absence des deux élèves. Cette moyenne est égale à 150 cm, donc $S = 150\ n$ cm.
- la taille moyenne des filles après le retour des deux élèves est égale à $\frac{S + t_1 + t_2}{n+2}$, où t_1 et t_2 désignent les tailles de ces deux élèves. Cette moyenne est aussi égale à 150 cm, donc $\frac{S + t_1 + t_2}{n+2} = 150$ cm, et donc $S + t_1 + t_2 = 150\ (n+2)$cm.
- Ainsi, en injectant la première expression de S dans cette dernière égalité, on obtient :
$$150\ n \text{ cm} + t_1 + t_2 = 150\ (n+2) \text{ cm}$$
d'où l'on déduit que : $t_1 + t_2 = 150 \text{ cm } \times 2$, et donc $\frac{t_1 + t_2}{2}$ = 150 cm.

Remarque :
On peut aussi utiliser la propriété suivante, qui permet d'exprimer la moyenne d'une série statistique en fonction des moyennes de deux sous-ensembles de cette série : si une série statistique est partagée en deux sous-groupes d'effectifs respectifs N_1 et N_2, et de moyennes respectives m_1 et m_2, alors la moyenne de la série complète est $\frac{N_1 m_1 + N_2 m_2}{N_1 + N_2}$.

Ici, on partage la série statistique des tailles des filles en deux sous-groupes :

- *le sous-groupe des tailles des filles en l'absence des deux élèves, d'effectif inconnu N, et de moyenne 150 cm ;*
- *le sous-groupe des deux élèves, d'effectif 2 et de moyenne inconnue m cm.*

La propriété rappelée ci-dessus permet d'exprimer la taille moyenne des filles après le retour des deux élèves de la manière suivante : $\frac{150N + 2m}{N+2}$ cm. *Or on sait que cette taille moyenne est égale à 150 cm.*
On en déduit que : $\frac{150N + 2m}{N+2} = 150$, *puis que* $150N + 2m = 150(N+2)$, *puis que* $2m = 300$. *Ainsi,* $m = 150$.
On retrouve alors la même conclusion que ci-dessus : dans ce premier cas, la taille moyenne des deux filles est égale à 150 cm.

Cas 2 : les deux élèves supplémentaires sont des garçons

Dans ce cas, par un raisonnement similaire à celui qui vient d'être fait, **la taille moyenne des deux garçons ajoutés au groupe est égale à 160 cm** (autrement dit la somme des tailles de ces deux garçons est égale à 2×160 cm).

Cas 3 : l'un des deux élèves supplémentaires est un garçon et l'autre élève est une fille

Dans ce cas, **la taille du garçon est 160 cm et la taille de la fille est 150 cm**. Justifions-le pour cette dernière (le raisonnement serait le même pour le garçon) :

- la taille moyenne des filles en l'absence de cette élève est égale à $\frac{S}{n}$ où S désigne la somme des tailles des filles en l'absence de cette élève, et où n désigne le nombre de filles en l'absence de cette élève. Cette moyenne est égale à 150 cm, donc $S = 150\ n$ cm.
- la taille moyenne des filles après le retour de cette élève est égale à $\frac{S + t_1}{n+1}$, où t_1 désigne la taille de cette élève. Cette moyenne est aussi égale à 150 cm , donc $S\ + t_1 = 150\ (n + 1)$cm.
- Ainsi, en injectant la première expression de S dans cette dernière égalité, on obtient :
  $$150\ n \text{ cm} + t_1 = 150\ (n + 1) \text{ cm}$$
  d'où l'on déduit que : $t_1 = 150$ cm.

Remarque :

La propriété rappelée en remarque lors du traitement du premier cas peut s'appliquer également ici. On partage la série statistique des tailles des filles en deux sous-groupes :

- *le sous-groupe des tailles des filles en l'absence de la fille supplémentaire, d'effectif inconnu N, et de moyenne 150 cm ;*
- *le sous-groupe constitué uniquement de cette élève, d'effectif 1 et dont la moyenne – inconnue – est égale à la taille de cette élève (notée t cm dans la suite).*

On peut exprimer la taille moyenne des filles après le retour de cette élève de la manière suivante : $\frac{150N+t}{N+1}$ cm.

Or on sait que cette taille moyenne est égale à 150 cm.

On en déduit que : $\frac{150N+t}{N+1} = 150$, *puis que* $150N + t = 150(N + 1)$, *puis que* $t = 150$.

On retrouve alors la même conclusion que ci-dessus : dans ce troisième cas, la taille de la fille supplémentaire est égale à la moyenne de la taille des autres filles, soit 150 cm.

2) Étude de la validité des conclusions proposées

a) « Zénon est toujours le plus petit garçon.»

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

L'affirmation peut être vraie, par exemple dans le cas suivant : les deux élèves absents le premier jour sont des garçons, de taille respective 158 cm et 162 cm. La somme des tailles des deux élèves est donc égale à 320 cm, soit 2 x 160 cm : la moyenne des tailles des garçons est donc bien inchangée, et Zénon, du haut de ses 130 cm, est resté le plus petit des garçons.

Elle peut également être fausse, par exemple dans le cas suivant : les deux élèves absents le premier jour sont des garçons, de taille respective 128 cm et 192 cm. La somme des tailles des deux élèves est égale à 320 cm, soit 2 x 160 cm : la moyenne des tailles des garçons est donc bien inchangée, mais Zénon n'est plus le plus petit des garçons (128 cm < 130 cm).

b) « Un des élèves est un garçon, l'autre est une fille. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Il suffit de considérer l'un des deux autres cas ci-dessus (question 1) pour voir que l'affirmation peut être fausse. Elle pourrait cependant être vraie, dans le cas où les deux élèves absents le premier jour seraient un garçon de taille 160 cm et une fille de taille 150 cm (question 1).

c) « Les deux élèves ont la même taille. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Il suffit de considérer l'un des exemples donnés ci-dessus (questions 1 et 2.a)) pour voir que cette affirmation peut être fausse. Elle pourrait cependant être vraie, dans le cas où les deux élèves absents le premier jour seraient deux garçons de taille 160 cm ou deux filles de taille 150 cm.

d) « La taille moyenne de l'ensemble des élèves n'a pas changé. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Considérons par exemple le cas d'une classe **avec le même nombre de filles que de garçons** (quand il n'y a aucun absent).

Si les deux élèves absents le premier jour sont un garçon de taille 160 cm et une fille de taille 150 cm, alors la taille moyenne de l'ensemble des élèves reste inchangée d'un jour à l'autre, et vaut 155 cm.

En revanche, si les deux élèves absents le premier jour sont deux garçons de taille 160 cm, alors après le retour des absents, la taille moyenne des élèves de la classe est 155 cm. Mais la veille, la classe comportait plus de filles que de garçons : la taille moyenne des élèves de la classe était alors plus proche de la taille moyenne des filles (150 cm) que de la taille moyenne des garçons (160 cm), et était strictement inférieure à 155 cm.