COPIRELEM

44e Colloque International

SUR LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ÉCOLES

Épinal

13 > 15 juin 2017

Manipuler, représenter, communiquer :

quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

Actes

C O P I R E L E M

44^{e} colloque international sur la formation en mathématiques des Professeurs des Écoles

Actes

Manipuler,
représenter,
communiquer :

quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

Épinal, 13, 14 et 15 juin 2017

SOMMAIRE

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Édith PETITFOUR, Maître de Conférences, ESPE de Mont-Saint Aignan, Université de Rouen Normandie, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), COPIRELEM, Présidente du Comité Scientifique

Anne BILGOT, Formatrice, ESPE de Paris, Université de Paris 4, Paris Sorbonne, IREM de Paris 7, COPIRELEM

Richard CABASSUT, Maître de Conférences, Laboratoire interuniversitaire des Sciences de l'Education (LISEC), Université de Strasbourg, IREM de Strasbourg, COPIRELEM

Valentina CELI, Maître de Conférences, ESPE d'Aquitaine, Laboratoire Cultures, Éducation, Sociétés (LACES), Université de Bordeaux COPIRELEM

Renaud DEHAYE, Formateur, ESPE de Lorraine, Université de Lorraine, IREM

Pierre EYSSERIC, Formateur, ESPE de l'académie d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université, IREM de Marseille, COPIRELEM

Pascale MASSELOT, Maître de Conférences, ESPE de Versailles, COPIRELEM, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

Arnaud SIMARD, Maître de Conférences, ESPE de Franche-Comté, IREM de Franche-Comté, COPIRELEM

André STEF, Maître de Conférences, Institut Elie Cartan de Lorraine (IECL), Université de Lorraine, Directeur de l'IREM de Lorraine

Claire WINDER, Formatrice, ESPE de l'Académie de Nice, Université Nice-Sophia Antipolis, COPIRELEM

COMITÉ D'ORGANISATION

Nicolas DE KOCKER, Formateur, Université de Lorraine, ESPE, COPIRELEM

Édith PETITFOUR, Maître de Conférences, Université de Rouen, ESPE, COPIRELEM

François BIHRY, Responsable des services administratifs et de gestion du site d'Epinal

Renaud DEHAYE, Formateur, Université de Lorraine, ESPE, IREM

Gilles LEUVREY, Formateur, directeur du site d'Epinal, Université de Lorraine, ESPE

Marie ROBIN, Secrétaire de gestion du site d'Epinal

Sylvie SPERNER, Secrétaire de l'IREM de Lorraine

BILAN SCIENTIFIQUE

Le 44e colloque de la COPIRELEM intitulé « ***Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?*** » s'intéresse à la question sémiotique des liens entre action, représentation et conceptualisation.

Dans ce colloque, nous avons cherché notamment à identifier les ressources sémiotiques (langage verbal, représentations écrites, actions avec du matériel, gestes, etc.) à disposition de l'enseignant dans des activités d'enseignement et d'apprentissage dans différents domaines des mathématiques. Nous nous sommes intéressés à la manière dont ces ressources sont ou peuvent être articulées. Nous avons interrogé le rôle des ressources sémiotiques dans des stratégies d'enseignement, dans l'enrichissement des connaissances des élèves, en particulier de ceux qui rencontrent des difficultés d'apprentissage.

La conférence d'ouverture questionne l'idée répandue dans les pratiques et la formation d'enseignants spécialisés que les élèves en difficulté ou en situation de handicap doivent manipuler pour apprendre des mathématiques dans des situations le plus simplifiées possibles. Teresa Assude (Aix-Marseille) montre, à travers une analyse d'exemples, l'insuffisance de la manipulation pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique.

La seconde conférence explore le rôle de l'articulation de registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. Anne-Cécile Mathé (Clermont Auvergne) et Caroline Bulf (Bordeaux) étudient les interactions entre *agir*, *parler* et *penser* en s'intéressant à la place du langage dans la construction des connaissances et l'émergence des savoirs géométriques.

La troisième conférence s'intéresse au rôle des gestes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ainsi qu'à leur articulation avec d'autres types de ressources sémiotiques (dont le discours en particulier). Cristina Sabena (Torino – Italie) étudie le support que les gestes peuvent offrir aux processus d'argumentation mathématique et elle propose des implications pratiques possibles pour la formation des enseignants.

Les textes de ces trois conférences figurent dans la Brochure des Actes.

Le colloque a donné lieu à de nombreux ateliers et communications. Les ateliers ont permis aux participants de travailler sur des questions relatives aux apprentissages mathématiques et à la formation des enseignants en lien avec le thème du colloque. Les communications ont présenté des pratiques de formation des Professeurs des Écoles ou des recherches universitaires liées à l'enseignement des mathématiques à l'école. Les textes produits ont été examinés par le Comité Scientifique. Les textes retenus sont disponibles sur le site de l'ARPEME, une fiche descriptive les annonce dans la Brochure des Actes.

Merci aux conférencières, merci à tous les animateurs d'atelier et auteurs de communication (orale ou affichée) pour leur travail d'écriture. Merci à tous les membres du Comité Scientifique pour leur travail de relecture et de conseils aux auteurs. Merci aux membres de la COPIRELEM pour leur relecture des textes. Au nom du Comité Scientifique, j'adresse aussi un grand merci au Comité d'Organisation qui a joué un rôle essentiel dans la réussite de ce colloque.

Édith Petitfour
Présidente du Comité Scientifique

CONFERENCES

ATELIERS

COMMUNICATIONS ORALES

COMMUNICATIONS AFFICHÉES

CONFÉRENCES

RELATIONS ENTRE SYSTÈMES SÉMIOTIQUES, MILIEUX ET TECHNIQUES MATHÉMATIQUES : MALENTENDUS, HYBRIDITÉ, INVENTIVITÉ

Teresa ASSUDE
Professeure des universités, Aix-Marseille Université
EA 4671 ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Résumé
Une idée souvent répandue dans les pratiques et la formation d'enseignants spécialisés est que les élèves en difficulté ou les élèves en situation de handicap doivent manipuler pour apprendre des mathématiques. Ainsi, le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées à ces élèves, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.
À partir d'exemples pris dans le cadre de recherches sur les pratiques inclusives en mathématiques, nous soulignons l'importance pour le travail mathématique de la sémioticité des différents milieux (matériels ou autres) proposés aux élèves. En particulier, nous montrons comment les systèmes sémiotiques à l'œuvre permettent l'émergence de techniques pour l'accomplissement des types de tâches proposés aux élèves. Nous questionnons ensuite la formation des enseignants spécialisés au regard de ce problème.

I - INTRODUCTION

Une doxa qu'on peut retrouver dans le champ d'intervention auprès des élèves en difficulté ou en situation de handicap est que leurs difficultés viennent en partie d'un manque de manipulation et qu'il faut les faire manipuler, et ainsi on leur propose des situations concrètes avec des objets matériels. Dans un travail de recherche sur ce qu'on apprend dans les Instituts médico-professionnels (IMPro), Horvais (2012) montre que les professionnels enquêtés affirment tous que, pour ces élèves, il faut du concret, et encore du concret, parce que ces élèves ont besoin de toucher, de manipuler. Cet exemple, parmi d'autres, indique que cette doxa s'appuie sur une opposition concret/abstrait qui laisse souvent dans l'ombre le fait que la manipulation matérielle n'est pas suffisante pour faire des mathématiques. Et pourtant les programmes insistent sur l'articulation entre le concret et l'abstrait, entre l'action et la représentation. Voilà ce que disent les programmes du cycle 2 à ce propos[1] : « *Au cycle 2, on ne cesse d'articuler le concret et l'abstrait. Observer et agir sur le réel, manipuler, expérimenter, toutes ces activités mènent à la représentation, qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations) ou symbolique, abstraite (nombres, concepts). Le lien entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle est toujours à construire et reconstruire, dans les deux sens.* »
Dans des sphères proches du système d'enseignement de mathématiques, nous trouvons aussi ce type de prise de position à ce sujet. Par exemple, dans un ouvrage destiné aux professionnels intervenant auprès d'élèves dyscalculiques, Hélayel et Causse-Mergui (2011) affirment : « *Tout le monde de nos jours a entendu parler de cette nécessité de faire « manipuler » les enfants. Mais beaucoup oublient que cela n'a qu'un but : pouvoir s'en passer.* » (p. 21)

Cette opposition concret/abstrait où le rôle de la manipulation est vu comme central ne date pas d'aujourd'hui. Par exemple, dans le dictionnaire pédagogique de Ferdinand Buisson (édition 1911), destiné aux acteurs de l'enseignement primaire, une entrée « manipulation » est consacrée à la place de la manipulation dans l'enseignement scientifique. Dans l'entrée « mathématiques », le double but « utilitaire et éducatif » de l'enseignement mathématique au primaire est d'emblée indiqué sans les opposer. Mais le

[1] B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015. Annexe 1 - Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).

rapport à la pratique et au concret est davantage mis en avant, comme on peut le voir dans le choix des problèmes mathématiques à proposer aux élèves :

« *L'arithmétique, devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre être du domaine de l'enseignement primaire. C'est, là, il nous semble, une grave illusion. Il ne faut pas perdre de vue que l'enseignement donné dans nos écoles primaires s'adresse aux masses profondes des populations scolaires rurales, vouées de très bonne heure au travail des champs, et aux enfants des classes ouvrières des villes, que réclament aussi dès l'âge le plus tendre l'atelier, l'usine ou le comptoir (…) L'arithmétique ne peut pas faire exception. Avant tout, l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes à l'école primaire ; et la marge est grande encore sans qu'on ait besoin de se jeter sur les curiosités de la science, sur les propriétés abstraites des nombres, sur les problèmes fantaisistes et compliqués à plaisir.* »

La prégnance du rôle de la manipulation et du concret dans les discours (et aussi dans les pratiques) des intervenants auprès des élèves en difficulté et en situation de handicap fait partie d'une tradition qui a des racines dans un rapport empiriste, sensualiste et intuitif de la connaissance à la réalité. Notre but est de montrer que, même dans un tel type de rapport, la place des représentations, du langage, de la sémiotique, est consubstantielle au travail mathématique de l'élève. Pour cela, nous présentons d'abord quelques outils théoriques pour aborder ce problème, et ensuite nous montrons quatre exemples qui nous permettent de mettre en exergue quelques fonctions et malentendus de l'usage des systèmes sémiotiques.

II - OUTILS THÉORIQUES ET QUESTIONS

La question de la dimension sémiotique de l'activité mathématique est présente dans la plupart des approches théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Comme le dit Radford (2014) : « *The problem of knowledge representation has been one of the most investigated and most discussed problems in mathematics education. And it has also been one of the most controversial ones.* » (p. 406) Effectivement les réponses théoriques et empiriques à cette question ne sont pas les mêmes selon les approches. Dans le cas de la théorie des situations didactiques, Brousseau prend en compte cette dimension à travers plusieurs outils, en particulier il modélise la notion de représentation (Brousseau, 2004). Dans la théorie des champs conceptuels, cette dimension est présente dans la définition même de concept et de champ conceptuel (Vergnaud, 1990). L'épistémographie est aussi une construction théorique qui place les outils sémiotiques au centre de son modèle (Drouhard, 2007, 2012). Les travaux de Radford (2014) sur la théorie de l'objectivation, les travaux d'Arzarello (2006) sur la notion de faisceau sémiotique, la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) en sont encore quelques exemples. Notre but n'est pas de faire un inventaire de tous les travaux de recherche à ce propos. Encore très récemment, l'étude de (Presmeg, Radford, Roth & Kadunz, 2016) fait un inventaire de travaux tenant compte de cette dimension. Nous n'allons pas mettre en débat ces approches les unes par rapport aux autres : nous nous bornerons à présenter certains outils théoriques issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1994), des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993, 1995) et de la sémiotique de Peirce (Neveu, 2011) qui nous permettront par la suite d'analyser nos épisodes et de montrer certains phénomènes.

1 Noésis et sémiosis

Dans l'introduction, nous avons vu que, dans certains discours, l'insistance sur la manipulation pour pallier les difficultés des élèves tend à minorer le rôle des représentations dans le travail mathématique. Or cette position est difficilement défendable lorsqu'on observe quels sont les ingrédients de ce travail. Duval (1993) parle du paradoxe cognitif de la pensée mathématique pour indiquer que : « *d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible* » (p. 38) Cet auteur reformule alors ce paradoxe cognitif de la manière suivante : « *Si on appelle **sémiosis** l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis** l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis* ». (p. 39-40)

Duval indique que trois activités cognitives liées à la sémiosis sont nécessaires pour qu'un système sémiotique devienne un registre de représentation. Il s'agit d'abord de la *formation* d'une représentation comme étant une représentation identifiable dans un registre donné. Ensuite le *traitement* d'une représentation implique la transformation de cette représentation dans le registre où elle a émergé. Finalement la *conversion* d'une représentation est la transformation d'une représentation de l'objet ou situation dans une représentation d'un autre registre que celui de départ, comme par exemple la transformation d'une droite dans le registre géométrique en une équation dans le registre algébrique. Ces différentes activités cognitives sont réglées en fonction des registres et du travail mathématique à faire. Par exemple, des règles de conformité doivent être suivies pour constituer une expression numérique (pour désigner la somme de 2 et 3, on peut écrire 2 + 3 mais non 2 3 +) ou des règles de traitement propres à un registre donné (on peut transformer l'expression $2x - 4 = 10$ en $2x = 10 + 4$, parce qu'il y a une règle qui permet de le faire).

2 Ostensifs et non ostensifs

Cette articulation entre objet mathématique et représentations sémiotiques dans l'activité mathématique est pensée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique comme une dialectique entre ostensifs/non ostensifs. Chevallard (1994) indique que faire des mathématiques consiste à manipuler des ostensifs qui permettent l'émergence de non ostensifs dans le cadre d'une pratique réglée :

« D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme ostensifs, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être réellement présents et que l'on peut effectivement manipuler dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets non ostensifs, que je nomme aussi émergents, et que l'on peut seulement évoquer à l'aide d'objets ostensifs. Lorsqu'un mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent ensemble au sein d'une pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement. » (p. 72)

La manipulation n'est pas ici simplement une manipulation d'objets matériels, c'est une manipulation d'ostensifs appartenant à un ou plusieurs registres. Les ostensifs ont une double valence : une valence instrumentale car ils permettent de faire ce qu'il y a à faire ; une valence sémiotique car ils permettent de montrer ce qu'on fait. Chevallard appelle instrument sémiotique un objet ostensif et sa double valence, et indique que le travail mathématique convoque une panoplie d'instruments sémiotiques d'un ou plusieurs registres.

Quatre registres d'objets ostensifs sont envisagés : le registre oral (le discours), le registre graphique ou scriptural (écrits, textes, graphiques,…), le registre gestuel (gestes, mimiques, regards,…) et le registre « matériel » des objets matériels. Ces registres ne sont pas indépendants, et peuvent être sollicités en simultané. Pourtant les différents registres n'ont pas la même valeur culturelle ou mathématique. Le registre gestuel est peu valorisé (par exemple, compter avec les doigts), le registre oral peut être plus valorisé dans une culture donnée, étant considéré comme plus proche de la pensée. L'écrit est le registre le plus valorisé en algèbre. Dans l'évolution de l'activité mathématique, il y a une réduction de l'épaisseur ostensive avec une prédominance du registre graphique/scriptural (Chevallard, 1994 ; Bosch & Chevallard, 1999).

Ces instruments sémiotiques et registres ostensifs sont des ingrédients de l'activité mathématique mais ils permettent aussi de décrire les techniques mises en œuvre pour accomplir des types de tâche, ou de décrire les technologies ou théories permettant de justifier ces techniques. Autrement dit, les instruments sémiotiques sont des ingrédients pour décrire des praxéologies mathématiques qui elles-mêmes permettent d'analyser l'activité mathématique (Chevallard, 1992).

Les outils théoriques issus des travaux de Duval nous aident à penser les activités cognitives liées à la sémiosis comme la formation, le traitement et la conversion des représentations sémiotiques. Les éléments issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard) nous permettent d'étudier l'activité mathématique par les instruments sémiotiques en lien avec les praxéologies mathématiques, les situations et les milieux dans lesquels vivent ces praxéologies mathématiques. La notion de milieu est considérée comme étant « ce sur quoi agit l'élève et qui agit sur lui » (Brousseau, 1998).

3 Dynamique du processus sémiotique

Une troisième dimension de notre instrument d'analyse concerne ce qui a trait aux signes et leur relation avec les objets et situations. Un certain nombre de travaux en didactique des mathématiques (Otte, 2005), et plus spécifiquement certains travaux sur les élèves en difficulté, utilisent la sémiotique de Peirce en tant que cadre d'analyse (Bloch, 2008 ; Conne, 1999 ; Giroux, 2008 pour ne citer que certains). Peirce définit le signe comme une relation triadique entre *l'objet* (entité mentale ou physique), le *representamen* (ce qui fait signe), et *l'interprétant* qui met en relation l'objet et le representamen : « Ma définition est la suivante : un representamen est sujet d'une relation triadique avec un second appelé son objet, pour un troisième appelé son interprétant, cette relation triadique étant telle que le representamen détermine son interprétant à entretenir la même relation triadique avec le même objet pour quelque interprétant. » (Peirce, 1978) Cette structure triadique est constitutive du modèle de Peirce fondée sur trois catégories philosophiques - des « conceptions de l'être » (Everaerd-Desmedt, 1990), - qui sont la priméité, la secondéité et la tiercéité.

Nous n'allons pas présenter tous les types de signes dégagés mais seulement ceux qui tiennent compte du mode de renvoi du representamen à l'objet. Dans ce cas, trois types de signes sont définis en fonction de deux variables : arbitraire/non arbitraire et motivation. Ces types de signes sont l'indice, l'icône et le symbole. Lorsqu'un signe est un indice, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est causale car il y a une relation de cause à effet avec les objets du monde : par exemple, la fumée est un indice de feu. Lorsqu'un signe est une icône, la relation objet/representamen est non arbitraire et la motivation est celle de ressemblance avec les objets du monde : par exemple, les onomatopées. Un signe est un symbole si la relation est arbitraire et la motivation conventionnelle : par exemple, le mot « chat » est arbitraire et conventionnel par rapport à l'animal « chat ». Par ailleurs, étant donné que l'interprétant met en relation les deux autres termes, le contexte d'interprétation est important. Peirce ne distingue pas penser et signifier, et la sémiose est un processus interprétatif et signifiant où representamen, objet et interprétant sont des fonctions (et pas des attributions) qui peuvent changer dans la dynamique du processus sémiotique.

4 Cadre d'analyse et questions

Pour terminer, un dernier élément nous paraît important pour notre cadre d'analyse. Actuellement, la sémiotique est définie comme la science des signes qui étudie la production, la codification et la communication des signes (Neveu, 2011). D'une manière plus restrictive, si nous prenons le sens étymologique de ce terme, il renvoie à ce qui est apte à noter, qui concerne l'observation. Il nous semble intéressant de faire le lien entre « sémiotique » en tant qu'adjectif et trois termes : agir – observer – noter. Des instruments sémiotiques permettent d'agir, d'observer l'action (la sienne mais aussi celle des autres) et de noter ce qui est signifiant de ces actions et observations.

Notre cadre d'analyse comporte trois dimensions :

- la dimension cognitive à travers trois activités cognitives qui sont la formation, le traitement et la conversion de représentations sémiotiques. Nous nous focaliserons ici surtout sur la formation de représentations sémiotiques dans une pluralité de registres (oral, scriptural, gestuel et matériel).
- la dimension mathématique et institutionnelle : nous étudierons sous cet angle les représentations sémiotiques comme éléments de techniques permettant d'accomplir des types de tâches dans des situations, des milieux et contrats déterminés.
- la dimension proprement sémiotique, relative aux types de signes convoqués par les élèves et les enseignants dans l'émergence des techniques en lien notamment avec la sémioticité des milieux. Pour cela, nous regarderons non seulement les actions et les discours mais aussi les observations et ce qui permet de les noter.

Nos questions sont celles de savoir **comment un élève entre ou non dans un contrat didactique qui tienne compte de la dimension sémiotique de l'activité mathématique**. **Qu'est-ce qui fait signe dans les différents milieux et comment l'élève s'en saisit-il pour mettre en œuvre des techniques mathématiques et accomplir des types de tâches mathématiques ? Quels sont les malentendus qui peuvent surgir et comment peuvent-ils se transformer en obstacle pour l'apprentissage ?**

III - ANALYSE DE QUATRE EXEMPLES

Nous avons pris quatre exemples dans nos travaux de recherche pour montrer un certain nombre de phénomènes sur la place de la sémiotique dans l'activité mathématique. Nous indiquerons, pour chaque exemple, le contexte du travail, la description et l'analyse d'un ou plusieurs épisodes. Le but n'est pas ici de présenter les recherches en question mais de montrer quelques épisodes significatifs relatifs à notre propos.

1 Paradoxe entre difficulté à conceptualiser et symbolisation abrupte

1.1 Contexte

Ce premier exemple est issu d'une recherche menée dans une classe CLIS[2] (Classe pour l'inclusion scolaire) destinée à des élèves sourds et malentendants. Le groupe d'élèves que nous avons observé était constitué par cinq élèves âgés de 8 à 10 ans de niveau CE2. Il s'agissait de reprendre les tables de multiplication car ils avaient des difficultés à les mémoriser selon l'enseignante. La situation mathématique était constituée par un type de tâche T1 « décomposer un nombre en un produit de deux nombres » et d'un milieu matériel constitué par des « bandes de papier de n carreaux », des ciseaux, du papier blanc et des stylos. Les épisodes choisis se passent lors de la première séance dont le synopsis est le suivant :

Temps	Types de tâches/Milieu matériel	Tâches des élèves : nombres choisis par l'enseignante
0- 8min	T1 avec des bandes	Paul : 20 Charlotte – Marie – Zénon : 12 Ruth : 8
8min - 14min	T1 avec des jetons	Mêmes nombres avec des jetons
14min - 23min	T1 avec des bandes et jetons	Paul : 9 Charlotte - Zénon : 10 Marie : 12 Ruth : 6

Cette séance peut être découpée en trois étapes. Dans la première étape (0 à 8 min), le type de tâche est T1 : bandes de carreaux à découper avec des valeurs différentes selon les élèves (8, 12 ou 20). La consigne est la suivante : « *Je veux que, dans cette bande, vous me découpiez des morceaux, mais il faut que ces morceaux soient tous pareils.* » Dans la deuxième étape (8 à 14 min), le même type de tâche est proposé aux élèves mais le milieu matériel change car il s'agit de partager un ensemble de jetons en parts égales. Dans la troisième étape (14 à 23 min), il s'agit d'une tâche du même type avec d'autres nombres.

1.2 Description des épisodes

Les deux épisodes 1 et 2, celui de Charlotte et celui de Paul, se passent pendant la première étape.

[2] Actuellement ces classes n'existent plus en tant que telles, elles ont été transformées officiellement en ULIS école (Unités Localisées d'Inclusion Scolaire) pour l'école primaire.

<table>
<tr><th colspan="2">Épisode 1 – Charlotte</th></tr>
<tr><td>Maîtresse : Tu as fait des paquets de combien ?
Charlotte : 6
Maîtresse : et l'autre paquet ?
Charlotte : 6
Maîtresse : Combien de paquets ?
Charlotte : 2
Maîtresse : 12 c'est égal à quoi ? (elle indique avec le doigt un paquet de 6)
Charlotte : 6
La maîtresse indique l'espace vide entre les deux paquets, trois fois, et ensuite l'autre paquet de 6
Charlotte : + 6
Maîtresse : écris-le
Charlotte écrit 66.</td><td></td></tr>
</table>

Dans cet épisode, on observe que Charlotte découpe la bande en deux paquets de 6 carreaux chacun, mais n'arrive pas à écrire ce que la maîtresse attend, à savoir 12 = 6 + 6. À aucun moment une consigne explicite n'est donnée dans ce sens. La maîtresse indique d'une manière ostensive, par des gestes, ce qu'il faut écrire. Malgré ces indications, Charlotte ne répond pas aux attentes et écrit 66.

Dans l'épisode 2, on observe que Paul a bien découpé la bande de 20 carreaux, il colle les morceaux sur une feuille de papier, il écrit 20 dans sa feuille et 4 sous chaque morceau. La maîtresse lui demande « *20 égal quoi ?* », et Paul répond « *20 + 4* ».

À la suite de ces deux épisodes, la maîtresse prend une décision qui n'était pas prévue au départ. Elle remplace les bandes de carreaux par des jetons et propose le même type de tâche aux élèves. Le milieu matériel change, et les élèves manipulent les jetons pour faire des paquets ayant le même nombre de jetons. L'épisode 3 se passe avec Paul dans cette deuxième étape de la séance.

<table>
<tr><th colspan="2">Épisode 3 – Paul</th></tr>
<tr><td>Maîtresse : Paul, alors 20 c'est égal à combien ?
Paul commence à compter les jetons.
Maîtresse : Pourquoi tu recomptes ? Combien tu en as ?
Paul : 20
Maîtresse : Combien tu as fait de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ?
Paul : 4
Maîtresse : Combien tu as fait de paquets de 4 ?
Paul : 5
Maîtresse : Voilà tu as compris, donc 20 c'est égal à combien ?
Paul ne répond pas tout de suite mais la maîtresse indique chaque paquet de jetons et l'espace vide entre chaque paquet pour lui faire dire « plus ».
Paul répond au fur et à mesure de ces indications : 4 + 4 + 4 + 4 + 4</td><td></td></tr>
</table>

Dans cet épisode, on observe que Paul partage sans problème les 20 jetons en 5 paquets de 4 jetons chacun. La maîtresse ne donne pas d'autre consigne concernant la représentation attendue. Par des questions telles que « combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? », et par ostension avec des gestes, elle arrive à ce que Paul donne une réponse acceptable par elle : 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

L'épisode 4 implique Zénon, un autre élève de la classe. Nous observons le même type de fait. Zénon sait partager 10 jetons en parts égales. Il fait 5 paquets de 2 jetons. Il n'écrit pas, et par le même procédé (ostension avec des gestes et questions ciblées), la maîtresse arrive à ce que Zénon écrive la relation : 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10. Nous observons aussi que Zénon a des difficultés pour répondre aux deux questions : « Combien tu as de paquets ? Combien tu as mis dans chaque paquet ? ». Il confond l'une et l'autre de ces questions mais arrive à donner les bonnes réponses après reprise des questions par la maîtresse.

1.3 Analyse des épisodes

Ces épisodes nous montrent un décalage entre ce que l'enseignante attend que les élèves écrivent et ce que les élèves comprennent de la situation. L'enseignante attend que les élèves écrivent une relation du type « 20 = 4 x 5 » ou « 20 = 5 x 4 ». Or la consigne donnée par la maîtresse ne précise pas qu'ils doivent écrire une relation qui correspond au partage égal qu'ils obtiennent par la manipulation. Il s'agit là d'un implicite qui pose des problèmes aux élèves et à l'enseignante. Et c'est par ostension que l'enseignante arrive à dépasser cet implicite en acceptant une autre représentation qui n'est pas celle attendue mais qui est acceptable pour elle. Il y a là un premier malentendu qui est contractuel.

Le deuxième élément à signaler est celui du changement de milieu matériel, des bandes de carreaux aux jetons, pour le même type de tâche. Les élèves n'ont eu aucun problème pour manipuler les bandes et répondre à la consigne. Et pourtant l'enseignante décide de les faire encore manipuler car elle estime que les difficultés des élèves viennent de leur difficulté à conceptualiser. Pendant un entretien, l'enseignante nous dit explicitement : « *parce qu'ils sont sourds ou malentendants ils ont des difficultés pour conceptualiser, donc il faut les faire beaucoup manipuler et visualiser* ». La décision de l'enseignante est fondée sur cet *a priori* sur les difficultés que les élèves sourds et/ou malentendants peuvent avoir sans tenir compte de l'observation de cette situation en particulier. Car les difficultés de ces élèves ne viennent pas forcément de la compréhension de la situation de partage mais probablement de deux facteurs : le premier est relatif aux malentendus contractuels, le deuxième est relatif à la symbolisation abrupte qui était celle attendue par l'enseignante. La relation formelle attendue n'est pas forcément celle que les élèves peuvent observer à partir du milieu et des actions sur le milieu. La sémioticité du milieu matériel aurait pu mener à la formation d'une représentation sémiotique mais pas celle attendue, et surtout si cela n'est pas dit explicitement dans la consigne. Nous voyons Charlotte écrire « 66 » probablement pour écrire « un paquet de 6 et un paquet de 6 », ou Paul écrire « 20 + 4 » pour indiquer probablement « la bande de 20 carreaux et un paquet de 4 carreaux ». Ces représentations dans le registre de l'écrit correspondent aux techniques qui ont permis d'accomplir la tâche dans le registre matériel. Que faire de ces représentations intermédiaires qui correspondent à ce qui fait signe pour les élèves face au milieu matériel et aux actions produites dans ce milieu ?

Dans l'exemple observé, l'enseignante guidée par ses conceptions *a priori* sur les difficultés d'élèves sourds, prend la décision de revenir sur la manipulation, ce qui ne résout pas vraiment le problème qu'elle avait pourtant observé (celui que les élèves n'arrivent pas à écrire la relation attendue).

2 « Malentendu sémiotique » ?

2.1 Contexte

Le deuxième exemple est pris dans le cadre d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté qui est l'aide pédagogique complémentaire (APC) proposée par l'institution scolaire. Notre exemple concerne 6 élèves de CM1 en difficulté. Il s'agit d'une situation d'introduction des fractions en tant que codage de la mesure de longueurs. Deux types de tâches sont proposés aux élèves : T1 - mesurer la longueur d'un segment en utilisant une unité non conventionnelle ; T2 - coder la mesure obtenue sous la forme d'une fraction (ou somme de fractions). Le milieu matériel est constitué par une bande-unité en papier, et par une feuille où sont représentés des segments, et où certains codages sont proposés. Les élèves doivent associer la mesure obtenue avec l'un de ces codages.

L'organisation de la séance d'APC est la suivante :

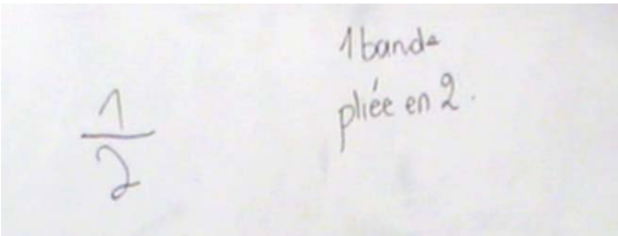
Synopsis	
Étape 1	Travail individuel de lecture de la consigne écrite sur la feuille
Étape 2	En groupe, vérification de la compréhension de la consigne
Étape 3	Travail individuel pour mesurer la longueur d'un segment en utilisant une bande-unité en papier
Étape 4	Dialogue au tableau élèves-enseignante autour d'un exemple fait par les élèves au tableau et sur les écritures proposées par les élèves. Il s'agit de coder la mesure d'un segment de longueur 2u + ½ u, u étant la longueur de la bande-unité.

2.2 Description de l'épisode

L'épisode choisi se déroule dans l'étape 4 où le travail se fait au tableau dans un dialogue enseignante-élèves. Les élèves doivent décrire la technique utilisée pour mesurer la longueur d'un segment et coder au fur et à mesure des actions décrites. La technique est ainsi racontée :

- on reporte une fois, deux fois la bande unité
- on plie en deux parts égales la bande unité lorsqu'on ne peut plus reporter une unité entière
- on reporte une part de cette bande-unité autant de fois que possible
- sinon, on plie encore en deux, et on reporte

Les élèves ont déjà vu des écritures du type 1u, 2u, 3u, et l'élève au tableau écrit « 1u » au-dessous des parts correspondantes à des bandes-unités. La question importante est celle posée par Pierre : « *Comment on écrit une bande à moitié?* ». L'enseignante demande aux élèves de proposer des écritures et plusieurs propositions sont écrites au tableau. Héloïse propose « ½ » au tableau :



L'enseignante dit alors : « *Héloïse propose cette écriture là (1/2). C'est exactement ça. Cette écriture, elle raconte précisément ça. J'ai pris une bande pliée en deux, j'ai pris un morceau de cette bande pliée en deux.* »

2.3 Analyse de l'épisode : quelle histoire raconte-t-on ?

Pour Héloïse (et aussi pour les autres élèves), l'écriture « ½ » représente et raconte une action qui est celle d'une « bande-unité pliée en deux » tandis que, pour l'enseignante, l'histoire est autre car cette notation représente « un morceau d'une bande-unité pliée en deux morceaux ».

Il y a un malentendu sémiotique entre l'enseignante et les élèves car cette représentation sémiotique ne raconte pas la même histoire. Ce malentendu a continué pendant cette séance et aussi pendant les deux séances de classe et une autre séance d'APC. Pour ces élèves, et aussi pour d'autres élèves de la classe, cette notation représente une action, tandis que pour l'enseignante cette notation correspond à une relation partie-tout. Or l'enseignante nous a parlé ensuite de la difficulté des élèves pour comprendre les fractions et pourtant ils arrivent à coder l'action de mesurage sous la forme d'une fraction. La difficulté des élèves venait surtout du décodage : ils arrivaient à identifier le dénominateur comme étant le partage de l'unité en x parts égales, mais ils n'arrivaient pas à identifier le numérateur comme le nombre de parts prises.

Des deux formulations « une bande pliée en deux » et « un morceau d'une bande pliée en deux morceaux », la plus proche du déroulement de l'action est celle de l'élève. Peut-être que, pour l'élève, le signe « ½ » est encore un signe iconique proche de l'action : 1 pour une bande unité, le trait correspond au pli, au partage, et le 2 pour le pli en deux morceaux. Pour l'enseignante, cette notation correspond plutôt à un signe symbolique qui représente une relation « partie-tout ».

Le malentendu sémiotique correspond à des significations différentes d'une même représentation sémiotique, ce qui peut devenir un obstacle pour les élèves et pour l'enseignante car pour les uns et les autres la notation est signifiante et il n'est pas évident de voir que ce n'est pas forcément la même signification en raison de la subtilité de cette différence.

3 Inventivité et hybridité sémiotique

3.1 Contexte

Le troisième exemple est pris dans le cadre d'une recherche sur une ULIS Collège (Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire) destinée à des élèves dyslexiques. Nous avons observé des élèves de cette ULIS qui étaient accueillis dans une classe de troisième en mathématiques. Nous avons proposé à l'enseignant de mathématiques et au coordonnateur de l'ULIS de travailler sur des problèmes mathématiques et sur le raisonnement. Les problèmes choisis ont déjà été travaillés dans des travaux de recherche (Hersant, 2008, 2010 ; Douaire, Argaud, Dussuc, Hubert, 2003 ; Ermel, 1999) pour que nous puissions comparer les techniques et les raisonnements mis en œuvre par ces élèves par rapport à d'autres élèves. Le théorème proposé est le suivant : la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de trois. La situation proposée suivait les différentes étapes proposées par Ermel (1997) et les élèves travaillaient en groupe. Dans un premier temps, on demande aux élèves de trouver trois nombres consécutifs dont la somme est S, S étant un multiple de 3. Dans un deuxième temps, la question est la même avec S non multiple de 3. Dans un troisième temps, il s'agit de formuler une conjecture qui réponde à la question : à quelles conditions le problème a-t-il toujours une solution ? Le quatrième temps est celui de la preuve.

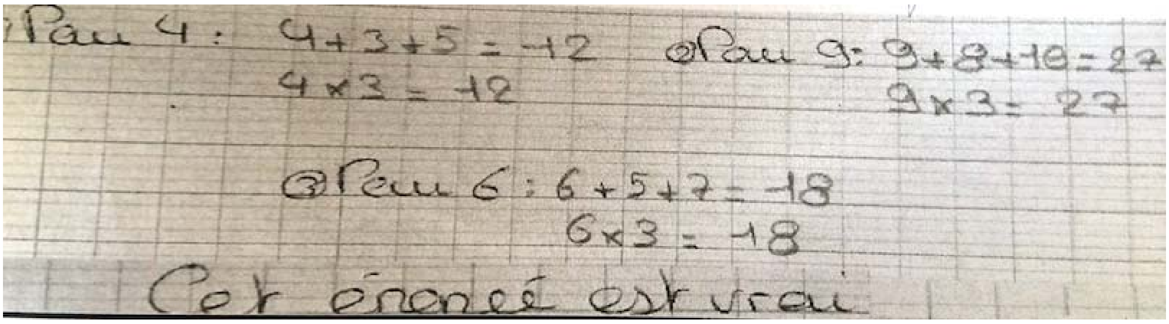
Nous ne présentons pas les détails des raisonnements et des techniques mis en œuvre par les élèves car nous intéressons à la quatrième étape et aux preuves proposées par les élèves qui ont travaillé en groupe.

3.2 Description des différents types de « preuves »

Plusieurs types de preuve[3] sont apparus mais le plus fréquent était la preuve pragmatique (Balacheff, 1987) avec des exemples numériques. Un deuxième type de preuve était une preuve discursive en utilisant le « nombre du milieu » : « si on additionne un nombre, plus celui d'avant, plus celui d'après, la somme c'est trois fois le nombre ». Le troisième type de preuve correspond aux preuves algébriques où on utilise les expressions littérales.

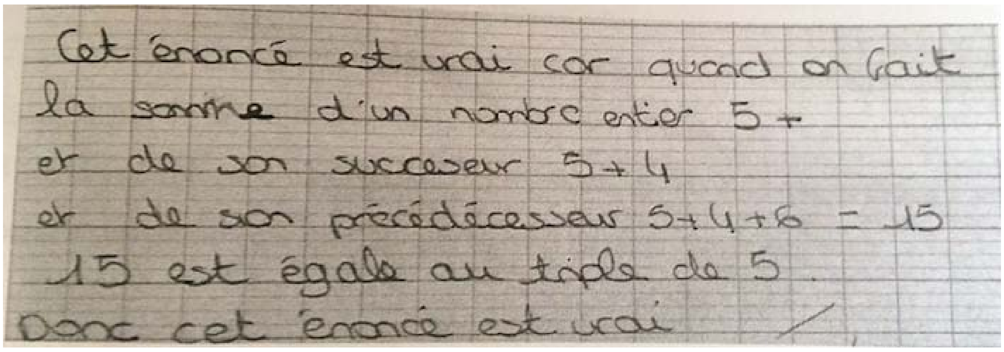
Pour illustrer les différents types de preuve, nous avons choisi quatre productions d'élèves qui nous paraissent significatives.

Preuve A - preuve pragmatique avec quelques exemples numériques

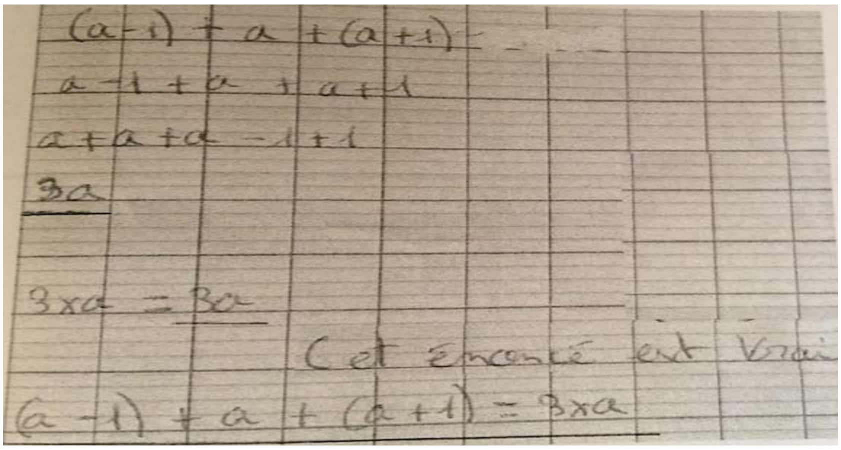


[3] Nous distinguons preuve et démonstration en suivant les travaux de Balacheff (1987).

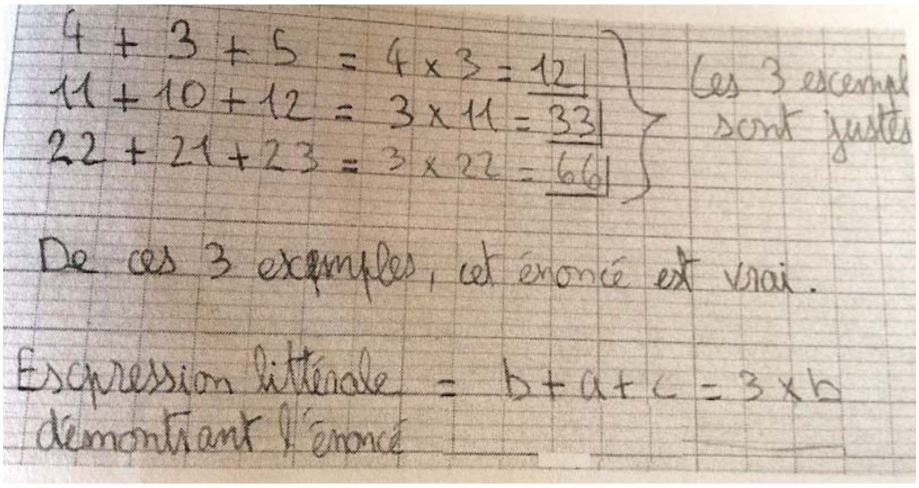
Preuve B - preuve discursive avec un exemple numérique



Preuve C - preuve algébrique



Preuve D - preuve « exemple générique » avec trois exemples numériques et une expression littérale



3.3 Analyse des productions : inventivité et hybridité sémiotiques

Dans les productions des élèves, plusieurs registres sémiotiques sont utilisés. Dans la preuve A, les élèves calculent les sommes à partir du « nombre du milieu » : pour 4, pour 9 et pour 6 en calculant la somme et en calculant le produit par 3. Ils concluent que l'énoncé est vrai. Dans ce cas, le registre numérique est le registre prédominant.

Dans la preuve B, deux registres sont utilisés : le langage naturel et le registre numérique, mais avec la prédominance d'un discours écrit. Les mots *successeur* et *prédécesseur* sont utilisés (même si les élèves se trompent) ce qui aurait pu être généralisable mais ensuite les élèves utilisent un exemple pour conclure que l'énoncé est vrai.

Dans la preuve C, le registre algébrique est prédominant. Dans ce cas, la lettre est utilisée pour désigner des objets (le nombre a), des relations (le prédécesseur $a - 1$ et le successeur $a + 1$, la somme de ces trois nombres génériques, multiple de 3). La lettre est un objet de calcul et des traitements des expressions (au sens de Duval) sont effectués pour arriver à des formes équivalentes qui permettent de démontrer le théorème.

La preuve D est tout à fait intéressante car elle montre un état intermédiaire entre une preuve par des exemples numériques et une démonstration. Deux registres sont utilisés, le registre numérique et le registre littéral. Les trois exemples numériques montrent, dans leur disposition spatiale, le rôle du « nombre du milieu ». Dans ces exemples, les élèves calculent et montrent que la somme des trois nombres consécutifs est un multiple du nombre du milieu. Cela est fait pour 4, 11 et 22, et ils concluent que l'énoncé est vrai. La suite de la preuve utilise les lettres pour généraliser. Dans ce cas, les premières lettres de l'alphabet a, b et c représentent les trois nombres consécutifs. Cela reste implicite car les relations mathématiques ne sont pas vraiment établies. Mais cela indique que l'élève n'a pas choisi ces lettres au hasard. La lettre b désigne le nombre du milieu, la lettre a le prédécesseur et la lettre c le successeur. La disposition spatiale reprend la disposition spatiale des exemples numériques. La conversion (au sens de Duval) du registre numérique dans le registre littéral conserve l'ordre : l'ordre des nombres consécutifs devient l'ordre alphabétique des lettres. La lettre n'est pas encore un objet de calcul mais elle montre déjà des relations.

Ce dernier exemple montre une certaine inventivité sémiotique par le groupe d'élèves qui utilisent les lettres dans l'ordre alphabétique pour indiquer des relations entre un nombre, son prédécesseur et son successeur. Cette inventivité peut être un élément important dans l'apprentissage du raisonnement, et peut être valorisée dans la classe. Certes, ce n'est pas encore une démonstration mais le processus de généralisation est déjà en marche, et l'usage d'une analogie est parlant.

Dans cet exemple, nous voyons que les représentations sémiotiques « intermédiaires » ont un rôle important. Elles sont « hybrides » car appartenant à des registres différents mais permettent de généraliser par analogie. La lettre représente un objet mais n'est pas encore un objet de calcul. En revanche, elle est aussi une lettre de l'alphabet, et l'ordre alphabétique est un élément pour montrer la relation de trois nombres consécutifs. Les lettres a, b et c utilisées sont des signes iconiques : le choix est non arbitraire et la relation de succession est motivée par l'ordre alphabétique.

Nous pouvons ainsi observer ce que les élèves savent déjà et pas seulement l'écart par rapport à l'attendu : la démonstration dans le registre algébrique. La réduction de l'épaisseur sémiotique dont parle Chevallard est ici à l'œuvre, mais l'analyse du processus de preuve montre que le système sémiotique employé est varié, recourt à plusieurs registres, et même à celui d'un domaine *a priori* extérieur aux mathématiques qui est celui des savoirs sur l'écriture alphabétique.

4 Prise de conscience de la place de la dimension sémiotique

L'exemple 4 est relatif au changement d'une enseignante par rapport aux situations proposées aux élèves d'une année à l'autre et à l'importance de la dimension sémiotique[4]. Dans le cadre d'un dispositif formation-recherche, nous avons travaillé avec quatre enseignantes spécialisées où des séances de formation alternaient avec des séances d'observation des classes et des séances d'analyse de ces séances de classe. Dans ce cadre, nous avons proposé à l'une des enseignantes d'analyser conjointement deux séances menées par elle et réalisées à trois ans d'intervalle sur le même type de tâche (dénombrer une collection d'objets) et le même support (usage d'une boîte métallique et de jetons). Cette enseignante intervenait dans une classe CLIS TFC (Troubles des Fonctions Cognitives). Nous allons rendre compte de ce que l'enseignante dit après visionnement de ces deux séances mais d'abord, nous présentons les éléments essentiels de comparaison entre ces deux séances sous la forme d'un tableau :

[4] Pour plus de détails, voir Assude, Tambone & Vérillon 2014.

La situation de la boîte (année n)	*La situation de la boîte (année n +3)*
Groupe de 4 élèves face au professeur Matériel : boîte et jetons Description : L'enseignante mettait un jeton à chaque fois en les dénombrant et les élèves devaient dire à la fin le nombre de jetons qui étaient dans la boîte. Ensuite l'un des élèves vérifiait en sortant les jetons et en les dénombrant.	Groupe de 3 élèves assis autour d'une table avec l'enseignante Matériel : Boîte, cubes rouges et bleus, bandes blanches pour que les élèves représentent les cubes, stylos de couleur rouge et bleue, bande numérique Description : L'enseignante mettait dans la boîte des cubes un à un. Les élèves avaient des bandes où ils dessinaient un rond pour chaque cube mis dans la boîte. D'abord l'enseignante mettait des cubes rouges et les élèves dessinaient des ronds rouges et écrivaient ce nombre sous les ronds, ensuite l'enseignante mettait des cubes bleus, les élèves dessinaient des ronds bleus et écrivaient le nombre de cubes bleus. Ensuite l'enseignante demandait le nombre de cubes rouges, le nombre de cubes bleus et le nombre total de cubes qui étaient dans la boîte. Les élèves avaient aussi une bande numérique personnelle où ils entouraient le nombre global de cubes.

Dans séance *n*, les élèves écoutaient les sons et dénombraient au fur et à mesure. Le registre convoqué est essentiellement le registre auditif. Lorsque les élèves avaient un moment d'inattention, ils n'avaient plus de moyen pour rattraper le dénombrement. Dans le cas de la séance *n+3*, les registres convoqués sont l'auditif, le gestuel et le scriptural. La correspondance entre un son et un dessin permet aux élèves de garder trace même si certains se sont trompés.

L'enseignante a pris conscience de la différence essentielle entre la séance *n* et la séance *n+3* trois ans après. Elle nous dit: « *Là je me rends compte que la phase que j'ai faite avec les nouveaux élèves de dessiner me paraît importante là je ne l'ai pas faite avec ces élèves j'ai passé directement, dessiner les jetons de deux couleurs différentes c'est quand même important.* » Et un peu plus loin : « *Ce qui a changé par rapport à cette situation c'est le passage à la symbolisation, oui quand ils tracent* ». L'enseignante a identifié un savoir professionnel acquis pendant notre dispositif de formation-recherche dans le fait de proposer des situations qui permettent aux élèves de passer à la symbolisation puisque cela est essentiel pour les élèves mais aussi en tant qu'outil d'observation du travail de l'élève (la double valence des ostensifs).

Dans ce cas, le milieu matériel constitué par la boîte, les cubes, les sons a évolué en un milieu hybride (le même matériel plus les dessins tracés et les nombres écrits en chiffres). Les signes-dessins tracés par les élèves sont des signes iconiques car proches des objets réels. Ce changement a permis de faire évoluer aussi les attentes par rapport aux objets de savoir. D'une part, de nouveaux enjeux de savoir (autres que le dénombrement) ont pu être proposés tels que les problèmes additifs (addition, soustraction, relation partie-tout). D'autre part des objets en train d'être acquis ou anciens (comme le dénombrement) ont pu être retravaillés à nouveau. Le changement de contrat didactique est devenu possible car le milieu hybride comporte non seulement les objets réels mais ces signes qui font mémoire et sur lesquels on peut revenir, soit pour retravailler, soit pour valider ce qu'on a fait.

IV - CONCLUSION : CE QUE LES EXEMPLES NOUS APPRENNENT

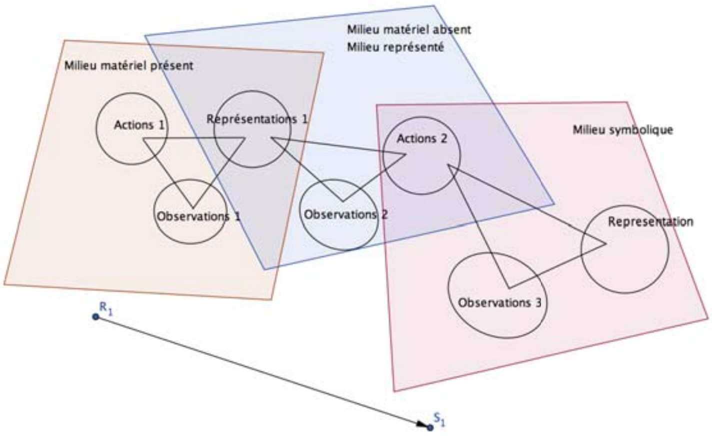
Notre point de départ a été le fait que le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées aux élèves handicapés ou en difficulté, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques et l'importance de la dimension sémiotique de l'activité mathématique a été maintes fois mise en évidence par divers chercheurs.

Le premier exemple montre que le retour à la manipulation mis en place par l'enseignante ne résout pas les difficultés des élèves qui n'ont pas de problème pour faire le partage en parts égales de la bande de carreaux ou de l'ensemble de jetons. L'écart est paradoxal entre la représentation de l'enseignante par rapport aux difficultés de conceptualisation des élèves sourds et la demande pressante de symbolisation « abrupte » sans consigne explicite dans ce sens. Le résultat de ce paradoxe est bien que les élèves se trouvent en difficulté, n'arrivent pas à entrer dans les attentes de l'enseignante et donnent des réponses induites par celle-ci. Le passage par un « moment iconique » et l'explicitation des attentes auraient pu être des facteurs importants pour que ces élèves puissent entrer dans le travail souhaité mais ceci serait à vérifier.

Le deuxième exemple nous a permis de mettre l'accent sur les malentendus sémiotiques entre enseignante et élèves. Tous racontent une histoire à propos de ce qui fait signe dans la notation « ½ » mais l'histoire n'est pas la même pour l'enseignante et les élèves. Pour ceux-ci, cette notation reste proche de l'action (une bande-unité partagée en deux parts égales) tandis que pour l'enseignante cette fraction code une relation « partie-tout ». Dans ce cas, le signe n'est pas le même étant donné que les interprétants sont différents par rapport au representamen « ½ ». Le malentendu sémiotique peut être pris comme un décalage entre interprétants du signe.

Le troisième exemple montre l'inventivité sémiotique des élèves face à un problème de preuve. Cette inventivité s'appuie dans notre cas sur l'hybridité des systèmes sémiotiques constitués par des éléments qui font signe dans des registres variés. Même si les attentes de l'enseignant correspondent à la preuve algébrique, et dans ce sens il y a une réduction de l'épaisseur sémiotique, les parcours sémiotiques des élèves doivent être pris en considération. Ces parcours sémiotiques, de formation, de traitement ou de conversion de représentations sémiotiques sont consubstantiels au travail mathématique de l'élève et se déroulent relativement aux objets, aux actions et aux observations des différents milieux auxquels les élèves sont confrontés. L'évolution de ces différents milieux – du milieu matériel à un milieu hybride ou un milieu symbolique – peut être une condition favorable pour aller vers la formalisation, la généralisation et la démonstration.

Un schéma de ces parcours pourrait être donné par :



Le travail mathématique de l'élève, comme le dit Chevallard, est constitué par une panoplie d'instruments sémiotiques qui lui permettent de mettre en œuvre des techniques (et plus généralement des praxéologies) pour accomplir différents types de tâches en lien avec différents milieux, ce qui constitue la situation mathématique pour l'élève. Ces milieux, et même le milieu matériel, portent en eux une sémioticité qui est virtuelle et va s'actualiser dans le travail. Qu'est-ce qui fait signe dans tel milieu pour tel élève ? Ce qui fait signe peut être donné non seulement par les actions sur le milieu mais aussi par les observations. Selon Peirce, le sens du signe est donné par la mise en relation de l'objet et du représentamen par l'interprétant dans des situations, à travers actions, observations et interprétations. Le rôle de l'action est essentiel dans le travail mathématique de l'élève, il a été maintes fois souligné dès les travaux de Piaget. Le rôle de l'observation aussi, mais nous voulons insister sur cet aspect. L'observation nous semble être un levier dans le travail de l'élève, et il ne s'agit pas seulement d'observations « naturalistes ». Il s'agit aussi de favoriser l'« apprendre à observer » comme moyen de valoriser la dimension sémiotique du travail mathématique : ce qui est propice à notation et concerne l'observation. C'est cela qui est indiqué dans notre schéma.

Les parcours sémiotiques commencent dès la manipulation matérielle, et les processus de signification sont des processus dynamiques où les signes sont en mouvement, comme l'indique Peirce qui ne distingue pas penser et signifier. Ces parcours sémiotiques évoluent et il incombe à l'enseignant de proposer d'autres milieux pour que la dialectique absence-présence puisse être un levier pour le travail mathématique de l'élève. Les objets matériels devenant absents, ce sont les représentamen-signes qui deviennent à leur tour des objets de l'activité mathématique. Les milieux « hybrides » deviennent alors les milieux pour l'action, pour l'observation, et pour ce qui peut advenir en tant que signe dans un processus d'interprétation.

Ces milieux « hybrides » peuvent ensuite devenir des milieux symboliques, des milieux condensant les processus interprétatifs antérieurs. Les recherches épistémologiques de Serfati (2005) sur le symbolisme mathématique montrent que l'avènement de l'écriture symbolique mathématique a été à l'origine d'une révolution dans les modes de pensée mathématique et dans la création de nouveaux objets mathématiques. Les difficultés du passage au symbolisme mathématique ne doivent pas être sous-estimées mais peuvent être prises en compte dans la conception des situations (voir un exemple pour les élèves en difficulté dans le travail de Giroux (2008)).

Dans nos exemples, et c'est pour ça que nous avons pris en compte cette dimension dans la sémiotique de Peirce, le mode de renvoi à l'objet apparaît comme très important, notamment lorsque les élèves doivent représenter les manipulations ou raconter les actions. La fonction du signe en tant qu'icône est importante par la ressemblance (en dépit des différences) entre objet et représentamen. Le moment « iconique » semble être un moment du processus interprétatif dans le cas du travail mathématique. Sans parler en ces termes, Serfati (2009) indique que : « *La reconnaissance visuelle d'une certaine permanence du symbolisme, comme immédiate, et libérée, dans un premier temps tout au moins, des nécessités de sens, est ainsi une conception épistémologiquement essentielle. Elle se range au registre de la synthèse, mais d'une synthèse particulière, synoptique.* » (p.1205) Telle notation mathématique peut raconter des histoires différentes pour tel élève, et des représentations intermédiaires (comme celle que nous avons vu dans l'exemple 3) peuvent être une étape dans le processus de symbolisation. Outre la dialectique entre présence/absence, une deuxième dialectique nous semble aussi à l'œuvre : celle entre connu/inconnu. Nos exemples ne nous permettent pas de montrer en acte cette dialectique mais les malentendus sémiotiques que nous avons observés peuvent bien être compris comme le difficile passage entre ce qui est observable et connu, et ce qui est inconnu ou n'est pas observable. Laisser advenir une certaine inventivité sémiotique peut être une étape importante pour l'élève si l'enseignant valorise ces « inventions » dans la classe, ce qui renvoie au rôle de l'enseignant et aux savoirs professionnels à ce propos.

Le quatrième exemple montre comment une enseignante a pris conscience de l'importance de la dimension sémiotique dans le travail mathématique de l'élève, même s'il est en difficulté. Cette enseignante est allée au-delà de la manipulation comme seule proposition et justification des situations proposées à l'élève, et des savoirs professionnels ont été construits. Ces savoirs, entre autres, sont relatifs au choix et à la gestion des situations à proposer aux élèves, des situations qui tiennent compte de la représentation, non seulement comme mémoire mais aussi comme moyen intrinsèque du travail mathématique de l'élève. Par ailleurs, ces milieux hybrides deviennent des lieux d'observation pour l'enseignant du travail de l'élève et de l'élève pour son propre travail et pour son évolution. La double valence des ostensifs apparaît donc pour l'élève et pour l'enseignant : ces signes permettent de faire mais aussi de voir ce que l'on fait.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO F. (2006) Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267–299.

ASSUDE T. & TAMBONE J. (2016). Épisodes biographiques d'une élève dyslexique relatifs à la résolution d'un problème mathématique. *Recherche en Education, 24*, 147-163.

ASSUDE T., TAMBONE J. & VERILLON A. (2014). Quels savoirs professionnels en mathématiques pour des enseignants de CLIS ? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 65, 141-150.

BALACHEFF N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

BARTOLINI-BUSSI M. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition) (pp. 746-783). New York: Routledge, Taylor and Francis.

CONFÉRENCE 1

BLOCH I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, 41, 91-113.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19-1, 77-124.*

BROUSSEAU G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, XXX-2, 241-277.

BUISSON F. (1911). Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire. Paris : Hachette.

CHEVALLARD Y. (1994). Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Revue SKOLE*, 1, 51-81.

CONNE F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne. In F. Conne & G. Lemoyne (éds.). *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

DOUAIRE J., ARGAUD H-C., DUSSUC M-P. & HUBERT C. (2003). Gestion des mises en commun par les maîtres débutants. In J. Colomb, J. Douaire, R. Noirfalise, *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes* (pp.53-69). Lyon : INRP.

DROUHARD J-P. (2007). *Epistémographie*. Projet de Note de Synthèse pour l'HDR (non publié).

DROUHARD J-P. (2012). *L'épistémographie. Mise au point d'un outil au service de la didactique*. Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques, pp.129-133.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern : Peter Lang.

ERMEL (1997), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris : Hatier.

ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve au cycle 3*. Paris : INRP.

EVERAERT-DESMEDT N. (1990), *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*. Liège : Mardaga.

GIROUX J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 28 (1)*, 9-62.

HELAYEL J. & CAUSSE-MERGUI I. (2011). *100 idées pour aider les élèves « dyscalculiques » et tous ceux pour qui les maths sont une souffrance*. Paris : Editions Tom Pousse.

HERSANT M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N*, 81, 57-75.

HERSANT M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques.* Habilitation à diriger des recherches, Nantes : Université de Nantes.

HORVAIS J. (2012) *Qu'apprend-on en IMPro ? Les apprentissages proposés aux adolescents déficients intellectuels dans les IMPro : quels choix, quelles pratiques, pour quoi faire ?* Thèse de l'université de Lyon 2, Lyon. http://fr.calameo.com/read/00094958849ac565104ba

NEVEU F. (2011). *Dictionnaire des sciences du langage* (2ème édition). Paris : Armand Colin.

OTTE M. (2005). *Mathematical epistemology from a peircean point of view*. Utrecht : PME.

PEIRCE C.S. (1978). *Écrits sur le signe*. Paris : Seuil.

PRESMEG N., RADFORD L., ROTH W. & KADUNZ G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Switzerland: Springer.

RADFORD L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

RADFORD L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 405-422.

SERFATI M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170.

AGIR-PARLER-PENSER EN GÉOMÉTRIE UN POINT DE VUE SÉMIOTIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMETRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Caroline BULF
Enseignante-chercheure, Université de Bordeaux
ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, EA7441
caroline.bulf@u-bordeaux.fr

Anne-Cécile MATHÉ
Enseignante-chercheure, Université Clermont Auvergne
ESPE Clermont-Auvergne, Laboratoire ACTé
a-cecile.mathe@uca.fr

Résumé
L'enseignement de la géométrie à l'école primaire s'appuie très largement sur un travail portant sur des dessins, qu'il s'agisse de les construire, de les reproduire ou de les décrire. Son objectif est de construire des savoirs portant sur des objets géométriques théoriques, leurs relations et propriétés. Un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie consiste donc, tout au long de l'école, à modifier le rapport des élèves aux dessins, d'objets matériels à représentations sémiotiques d'objets théoriques. Comment comprendre les leviers possibles de cette évolution ? Nous proposons d'explorer le rôle de l'articulation de registres de représentation sémiotique, graphique et langagier, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école. Dans le prolongement de recherches menées en didactique de la géométrie ces dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013), nous envisageons d'abord la manière dont il est possible de faire évoluer le regard des élèves sur les dessins, via des contraintes portées sur leurs traitements instrumentés en situation de reproduction de figures. Posant ensuite la question des interactions entre *agir*, *parler* et *penser* (Bernié, 2002), nous nous intéressons au rôle et à la place du langage dans la construction de connaissances et l'émergence de savoirs géométriques (Barrier & Mathé, 2014 ; Barrera Curin, Bulf & Venant 2016; Bulf, Mathé & Mithalal 2014). Nous complétons alors nos analyses de moments de classe et esquissons des pistes pour un travail dans et sur le langage, en appui sur des situations d'action, en géométrie à l'école.

Pourquoi (encore[1]) s'intéresser à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane à l'école, dans ce colloque dédié à la formation des enseignants ? Que peut apporter une approche sémiotique à la clarification des enjeux possibles de cet enseignement à l'école ? Quels outils peut-on en dégager pour l'enseignement et la formation ?

S'intéressant à la question de la formation des enseignants, Houdement et Kuzniak pointaient, à la fin des années 90, que « la géométrie concentrait (…) plusieurs handicaps : un déficit de connaissances chez les étudiants, peu de travaux en didactique, auxquelles s'ajoutait un désamour, non seulement des étudiants, mais aussi des enseignants de l'école primaire que ce domaine n'inspirait guère. » (Houdement, 2013, p.28). Aujourd'hui encore, force est de constater que l'enseignement de la géométrie à l'école reste un domaine souvent mal-aimé voire peu investi des enseignants du premier degré. Notre métier de

[1] XL^{e} Colloque de la Copirelem à Nantes (2013)

formatrices en ESPE[2] et nos échanges réguliers avec des professeurs des écoles, nous laissent à penser que ceux-ci éprouvent majoritairement des difficultés à en cibler les enjeux, rabattant alors souvent les objectifs d'apprentissage à l'acquisition de vocabulaire permettant de désigner des objets supposés déjà là ou à des exigences de motricité fine concernant l'usage d'instruments et la précision de tracés. Cette difficulté de la profession peut sans nul doute trouver ses origines dans plusieurs facteurs. Les recherches en didactique de la géométrie ont avancé depuis les années 90, notamment sous l'impulsion des travaux développés par le groupe dit « de Lille »[3] ces quinze dernières années (Duval, 2005; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé, & Leclercq, 2013). Nous ne pouvons toutefois que constater l'encore faible imprégnation de la formation initiale et continue des enseignants de résultats de recherches en didactique de la géométrie récents, et il nous faut reconnaître le temps, long, nécessaire à la transformation de résultats de recherche en outils opératoires pour les enseignants. Enfin, les ressources à disposition des enseignants nous semblent encore avoir du mal à constituer des outils qui puissent leur permettre d'enrichir les pratiques en géométrie (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014 ; Bulf & Celi, 2015). S'efforcer de montrer dans quelle mesure des recherches récentes en didactique de la géométrie peuvent contribuer à la clarification d'enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie plane à l'école et faire de résultats de recherches des outils pour les enseignants du premier degré et leur formation nous semblent donc constituer un chalenge d'actualité. Nous espérons, dans ce texte comme dans l'exposé auquel il fait suite, contribuer à notre modeste mesure à cette entreprise. Plus précisément, nous avons souhaité montrer qu'une approche sémiotique pouvait éclairer des questions de finalités et moyens d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie plane, pensés dans une continuité de la maternelle à la fin de l'école primaire.

Dans cette perspective, nous proposerons de revisiter les travaux du groupe de Lille en replaçant ses fondements théoriques dans le cadre d'une problématique sémiotique, en lien avec les travaux de Duval (1995, 2005) qui ont largement nourri les travaux du groupe. Nous mettrons en rapport le travail mené autour de la recherche d'une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessin (les situations de reproduction de figures) et la réflexion autour des liens entre interprétation et traitement graphique des dessins sur laquelle il repose. Nous illustrerons la manière dont ces travaux ont permis la déclinaison de situations d'action visant l'émergence d'objets et de propriétés géométriques divers, à travers l'exemple d'un travail mené autour du disque, le cercle et de leurs caractérisations, de la maternelle au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).
Nous proposerons ensuite un prolongement de cette approche en abordant la question de l'articulation entre registres sémiotiques graphique et langagier dans la construction de connaissances-savoirs géométriques à l'école. Comment mieux comprendre le rôle du langage, oral ou écrit, dans les processus d'apprentissage autour de situations d'action en géométrie ? Nous proposerons d'aborder cette question, large, en suivant deux pistes de réflexion.

Nous nous intéresserons d'abord au rôle du langage dans les processus d'évolution du rapport des élèves aux dessins lors de leurs confrontations à des situations d'action telles que celles évoquées précédemment. Nous illustrerons, à travers un exemple de moment de classe, la manière dont les moteurs de l'évolution des manières de voir le dessin des élèves résident alors à la fois dans l'évolution de leur manière d'agir et de leurs manières de parler.

Nous interrogerons ensuite les manières dont il est possible d'accompagner les élèves de la mobilisation de connaissances pour l'action (reproduire, construire un dessin) à l'identification des connaissances géométriques mises en jeu. Comment accompagner la transformation des connaissances, personnelles et contextualisées, en savoirs géométriques ? Nous présenterons alors quelques pistes explorées de manière

[2] École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

[3] Nous appellerons groupe de Lille un groupe de recherche du Nord de la France, actif de 2000 à 2010, auxquels ont participé M.-J.Perrin-Glorian, R.Duval, M.Godin, J-R. Delplace, O.Verbaere, B.Keskessa, C.Mangiante, T.Barrier, R.Leclercq, A.-C.Mathé. Le travail continue depuis 2010 sous des formes diverses.

plus récentes, autour de l'élaboration de situations de formulation et de validation en appui sur les situations de reproduction de figures. Nous évoquerons les spécificités, les potentialités de l'enchâssement de ces types d'activité mais aussi la grande variété des situations possibles.

I - D'UNE GEOMETRIE PHYSIQUE A UNE GEOMETRIE THEORIQUE : UNE MODIFICATION PROFONDE DU RAPPORT AUX DESSINS

Nous devons tout d'abord situer nos propos. Le thème de la géométrie (appelé « Espace et géométrie » dans les programmes de 2015 recouvre un domaine large, relevant de champs de connaissances divers. Parmi les attendus de l'école, nous pouvons ainsi distinguer (Berthelot et Salin, 1993) :

- des connaissances dites spatiales permettant de se repérer dans l'espace, de représenter des espaces ou des déplacements dans ces espaces, de maîtriser ses rapports avec l'espace sensible.
- des connaissances géométriques portant, elles, sur des objets théoriques, idéaux[4] tels que des solides, des figures planes, le segment, la droite, le point sur des propriétés de ces objets ou des relations entre ces objets (alignement, angle droit, perpendicularité…)

L'on sait depuis les travaux fondateurs de Berthelot et Salin (op.cité) l'importance d'un travail sur les connaissances spatiales à l'école et de leur articulation avec les connaissances géométriques, permettant de faire de ces connaissances un outil pour résoudre des problèmes pratiques. Nous ne négligeons pas cet aspect de l'enseignement de la géométrie à l'école. Toutefois, nous nous centrons ici sur la finalité théorique de cet enseignement à l'école, c'est-à-dire en ce qu'il vise la construction des connaissances et savoirs géométriques portant sur les objets idéaux de la géométrie. Nous nous restreignons même dans ce texte à une partie de cette finalité : celle portant sur la construction de connaissances sur des objets du plan (la géométrie plane). C'est donc à un aspect complémentaire de l'enseignement de la géométrie auquel nous nous intéressons ici, et dans nos travaux de manière plus générale. Nous partons d'une modalité de travail sans doute plus courante dans les pratiques et envisageons le travail en géométrie à partir de problèmes, divers, portant sur des formes ou des dessins, déjà là. Ces objets matériels ne sont bien sûr pas des objets du monde qui nous entoure, mais les élèves comme l'enseignant n'interrogent pas nécessairement leurs liens avec des objets de l'espace sensible et la nature de la modélisation dont ils sont issus. Ces formes, ces dessins, sont des objets donnés aux élèves, sur lesquels on leur propose de travailler, et qui sont acceptés comme des objets culturellement partagés.

Dans ce cadre, notre objectif consiste à mieux comprendre les enjeux et difficultés d'un enseignement de connaissances et savoirs géométriques, portant sur des objets théoriques, en appui sur des objets matériels tels que les formes et les dessins. Ce sont donc bien des questions d'ordre sémiotique que nous posons : Comment permettre à des élèves de voir dans ces objets matériels des représentants d'objets géométriques, idéaux ? Comment accompagner les élèves dans la construction de connaissances sur ces objets théoriques via un travail essentiellement placé dans le registre graphique des formes et des dessins ?

1 L'enseignement de la géométrie : le rôle central des dessins

Reprenant la célèbre distinction entre dessin et figure proposée par Arsac (1989), Parsysz (1989), Laborde et Capponi (1994) ou encore Chaachoua (1997), nous appelons dessin un objet matériel que l'on peut regarder, analyser à l'aide d'instruments, reproduire, construire… Ces dessins peuvent être des tracés sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur. Nous incluons aussi dans cette catégorie les formes géométriques, en bois ou en plastique, qui constituent des objets de travail courants au début de l'école.

[4] Nous parlons d'objets idéaux car ces objets n'ont pas d'existence dans le monde sensible qui nous entoure : les figures planes sont des objets du plan, sans épaisseur, les segments et droites sont des objets de dimension 1 (ligne sans épaisseur), la droite est un objet infini, etc.

Nous distinguons cet objet matériel que constitue le dessin de la figure, objet mathématique, théorique, dont le dessin est une représentation.

Pour les élèves, le dessin peut ou non représenter une figure. Dans l'activité géométrique des élèves, le dessin peut en effet avoir différents statuts, en lien avec la nature du travail engagé sur ce dessin et le mode de validation opéré (adapté de Chaachoua, 1997, p.19). Objet matériel étudié pour lui-même et lieu d'une expérimentation directe au début de l'école, le dessin est ensuite vu comme représentation sémiotique d'autres objets matériels, visés par la géométrie. Le travail est alors perçu comme un travail expérimental sur une classe d'objets, dont le dessin est un exemple générique. A la fin de l'école et surtout au collège, le dessin doit enfin être considéré comme représentation sémiotique, dans le registre graphique, d'objets théoriques de la géométrie. Le travail géométrique s'opère alors hors de l'expérimentation, dans le registre langagier, et vise la construction de preuves intellectuelles.

Ainsi donc, le dessin occupe une place centrale dans la géométrie de l'école comme du collège et l'un des enjeux majeurs de l'enseignement de la géométrie va consister, de la maternelle au collège, à accompagner les élèves vers un rapport *géométrique* à ces dessins. Mais que signifie exactement construire un rapport *géométrique* aux dessins ? Quelles conditions président la capacité à interpréter les dessins comme représentants sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques ?

Tout d'abord, tout le monde pourra s'accorder sur le fait que *la* géométrie n'est pas épistémologiquement *une* mais est polymorphe et poser la question d'un rapport *géométrique* hors contexte n'a pas de sens. Nous proposons ainsi de nous donner pour point de mire de la géométrie plane de l'école l'entrée dans la géométrie déductive du collège. Ce que nous entendons par *rapport géométrique aux dessins* désigne donc un rapport aux dessins idoine à l'entrée dans la géométrie déductive du cycle 4. La question que nous posons est alors celle de la caractérisation de ce *rapport géométrique aux dessins* et de la nature de la modification du rapport aux dessins, enjeu de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. À quoi doit-on préparer les élèves de l'école ?

Duval (1995) propose deux niveaux d'appréhension des dessins :

- la perception (que nous désignerons dans la suite par « la manière de voir » les dessins),
- les modalités et règles de traitements et de modifications (« les manières d'agir » sur ces dessins)

Dans la suite de ce texte, nous explorons successivement les questions suivantes. Que doit-on être capable de « voir » dans un dessin pour entrer dans la géométrie déductive au collège ? Que doit-on savoir faire sur un dessin pour pouvoir faire des démonstrations ?

2 La géométrie : une manière spécifique de voir les dessins

L'étude des interprétations possibles d'un dessin, en fonction de la manière de voir ce dessin mobilisée, et de la spécificité d'un regard géométrique sur les dessins est au cœur des travaux du groupe de Lille. Celle-ci a déjà fait l'objet de nombreuses publications (par exemple Duval & Godin, 2005, Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2013; Perrin-Glorian & Godin, 2014; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). Nous devons toutefois revenir dans ce texte, de manière synthétique, sur cette étude car elle fonde notre travail. En appui sur les travaux de Duval (1995), notre propos vise en particulier ici à mettre en évidence les fondements sémiotiques de cette étude.

De manière générale, la perception d'un dessin est guidée par l'identification et la prise en compte de différents éléments constitutifs de ce dessin. Cette analyse est susceptible de variations visuelles, de deux types : des variations liées à la dimension des objets considérés (des surfaces - de dimension 2, des lignes - de dimension 1 ou des points – de dimension 0) ; ou des variations qualitatives : la nature des formes considérées ou bien encore des questions de taille, d'orientation, de couleur, etc. Ces distinctions permettent de définir des éléments constitutifs d'un dessin. Celui-ci est vu comme une combinaison de valeurs pour chacune de ces variations, à partir desquelles on détermine des unités figurales élémentaires (Duval, 1995). Il existe donc une pluralité de manières possibles de voir les dessins. Et à la différence d'autres registres de représentation d'objets mathématiques (numération, arithmétique…), un dessin a une interprétation perceptive immédiate et quasi-automatique, mais celle-ci diverge de l'interprétation géométrique de ce dessin.

Prenons l'exemple des trois dessins de la figure 1. Hors de la géométrie, chez de jeunes élèves, la perception spontanée des dessins est guidée par la discrimination de formes ou surfaces (Duval & Godin, 2005). Un dessin, simple ou complexe, est d'abord interprété comme une surface ou un assemblage de surfaces juxtaposées (autant de formes que de contours fermés), comme illustré en figure 2. La prise en compte des couleurs, de l'orientation, de la taille joue un rôle important dans cette lecture spontanée des dessins. Ce sont sur ces valeurs sur lesquelles l'on s'appuie pour établir des liens de ressemblance, ou des relations d'ordre entre dessins.

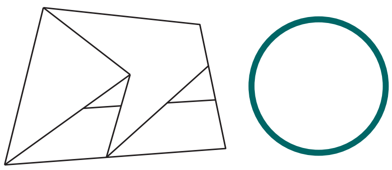


Figure 1

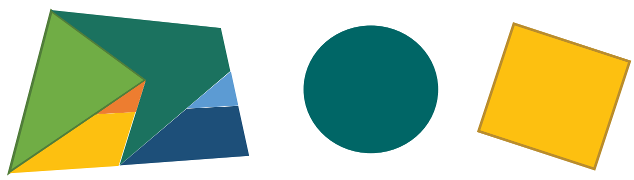


Figure 2

L'interprétation géométrique des dessins s'appuie quant à elle sur une manière de voir ces dessins bien différente. Nous illustrons en figure 3 ce que pourrait être une manière géométrique de voir ces trois dessins à la fin de l'école ou au début du collège.

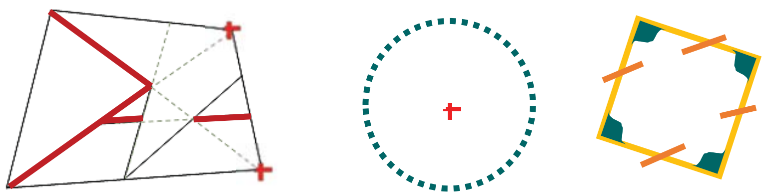


Figure 3

Il y a moins de variables visuelles pertinentes pour une interprétation géométrique des dessins, et les règles de prise en compte de ces variables ne sont pas homogènes. De manière générale, les couleurs ou orientations ne sont plus pertinentes car elles ne sont pas susceptibles d'accéder à des caractérisations géométriques des figures, ni de représenter des relations géométriques. Ces variables peuvent toutefois être utilisées pour faciliter la lecture géométrique d'un dessin, comme nous le faisons en figure 3. Le critère de la taille est lui plus complexe, il n'est en général pas à prendre en compte, sauf lorsque l'on s'intéresse à des relations entre des longueurs (par exemple pour caractériser les carrés parmi les rectangles).

La caractérisation des objets géométriques, celles de la fin de l'école et au début du collège tout au moins, s'appuie sur une prise en compte de propriétés portant sur des bords de surfaces (égalités de longueurs de côtés), des coins (angles droits), voire des lignes et des points (cercle comme une ligne, puis comme ensemble de points, à équidistance d'un centre par exemple). Les propriétés et relations géométriques ne portent pas sur des surfaces mais sur des objets de dimension 1 – des segments (égalités de longueurs) ou des droites (perpendicularité, parallélisme…) – ou de dimension 0 – des points (alignement, appartenance, équidistances…). Ainsi, porter un regard géométrique sur les dessins et identifier les objets et relations géométriques qu'ils représentent signifient être capable d'enrichir considérablement la manière de voir les dessins. Une analyse géométrique d'un dessin nécessite une capacité à un jeu complexe entre des unités figurales de dimensions 2, 1 et 0, appelé *déconstruction et recomposition dimensionnelles*. Notons que sur les dessins d'origine (figure 1), aucune variable visuelle ne peut représenter directement une propriété géométrique. Nous avons parfois besoin d'un codage pour rendre visible l'articulation entre manière de voir le dessin et définition dans registre langagier, comme nous le voyons dans la figure 3.

Interpréter les dessins comme représentations graphiques d'objets et de relations géométriques nécessite ainsi une modification profonde du rapport perceptif au dessin. Ceci constitue pour nous un des enjeux fondamentaux de l'enseignement de la géométrie à l'école.

3 La géométrie : des modalités de traitement des dessins spécifiques

Poursuivons notre effort de clarification de la teneur de la modification du rapport aux dessins que l'on peut viser tout au long de l'école, dans le but d'accompagner les élèves vers la géométrie de la fin de l'école et du début du collège. Intéressons-nous maintenant à la question des modalités de traitements des dessins. Que doit-on savoir faire sur un dessin en géométrie (du cycle 4) ? Quelles modalités de traitement et quelles modifications, internes au registre graphique, doit-on être capable d'effectuer sur un dessin pour mener à bien des démonstrations ?

Nous nous appuierons dans ce paragraphe sur un exemple de problème, que nous empruntons à Balacheff & Soury-Lavergne (1996, p.5), Mathé & Mithalal (à paraître). L'énoncé du problème est le suivant.

> *ABC est un triangle, P un point du plan qui n'est pas un sommet du triangle.*
> *P1 le symétrique de P par rapport à A;*
> *P2 le symétrique de P1 par rapport à B;*
> *P3 le symétrique de P2 par rapport à C;*
> *I le milieu de [PP3].*
> *Que dire du point I ?*[5]

Nous conviendrons dans un premier temps qu'explorer ce problème rend bien sûr nécessaire de faire un dessin, qui permette, comme évoqué précédemment, d'illustrer cet énoncé et de représenter, dans le registre graphique, la figure définie. Ce dessin pourra alors constituer un lieu d'expérimentation, de formulation de conjectures.

Toutefois, représenter les objets et propriétés géométriques de la figure dans un dessin n'est pas tout à fait suffisant… Construisons un triangle ABC, plaçons un point P tel que décrit, et construisons les points P1, P2, P3 puis le point I.

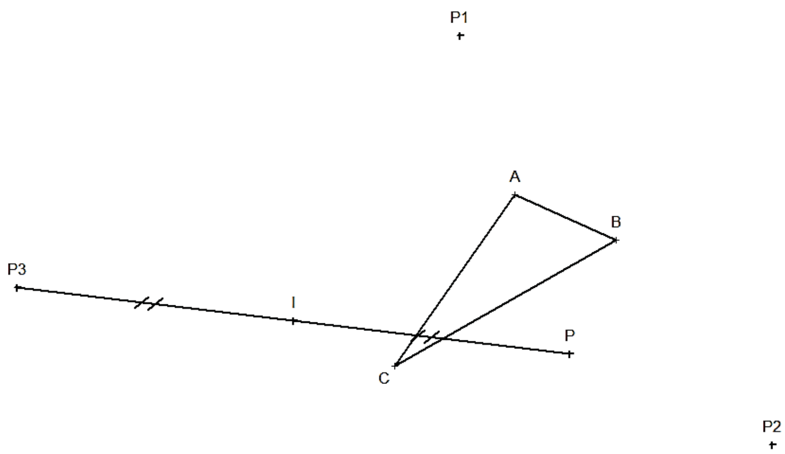


Figure 4

---

[5] La question est volontairement ouverte, cette formulation est bien sûr discutable si l'on considère le problème posé tel quel à des élèves de collège.

Cette représentation permet-elle de formuler une conjecture sur ce que peut représenter le point I par rapport aux points déjà construits ? Pas vraiment…

Explorer le dessin afin de parvenir à formuler une conjecture va nécessiter un traitement géométrique du dessin, c'est-à-dire d'agir sur le dessin pour faire apparaître des configurations qui nous permettent de raisonner.

L'on pourra par exemple tracer le quadrilatère ABCI et envisager l'idée que ce quadrilatère pourrait être un parallélogramme. Si l'on cherche maintenant à démontrer cette conjecture, on pourra être amené à tracer les deux triangles PP_1P_3 puis $P_1P_2P_3$. Ceci nous permettra de reconnaître des configurations dans lesquelles nous pouvons appliquer le théorème de la droite des milieux et démontrer que ABCI a deux côtés parallèles et de même longueur.

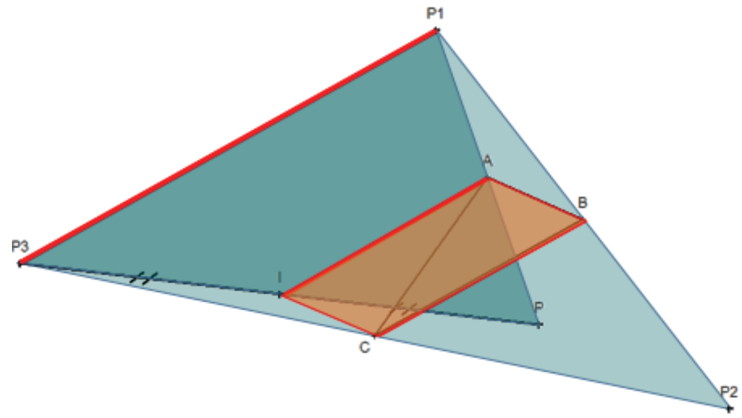


Figure 5

Nous le voyons à travers ce rapide exemple, l'activité de démonstration telle que visée au collège nécessite la capacité non seulement à opérer à un jeu complexe du regard porté sur les dessins, en termes de déconstruction et recomposition dimensionnelles, mais aussi à transformer le dessin par des règles propres à la géométrie. Les opérations de traitement du dessin, internes au registre sémiotique graphique et nécessaires à l'activité de démonstration, sont alors de différents types. Nous retiendrons en particulier ici que les élèves doivent être capables de rendre visible de l'implicite : faire apparaître des sous-dessins (et des « sur-dessins ») et unités figurales de différentes dimensions (segments, points, droites, surfaces) qui permettent de raisonner.

4 Premier bilan : des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école

Dans cette première partie, nous interrogions les conditions, cognitives, présidant une entrée dans une géométrie théorique, portant sur des objets, propriétés, relations géométriques idéaux, en appui sur un travail portant sur des objets matériels tels que les formes, les dessins. Nous avons alors mis en évidence qu'entrer dans la géométrie de la fin de l'école et du collège nécessite d'apprendre à voir et à traiter les dessins de manière spécifique. Or dans quelle mesure prépare-t-on les élèves de l'école à la géométrie du collège ? Quand et comment apprend-on aux élèves de l'école à voir et à traiter géométriquement un dessin ? Construire un rapport géométrique aux dessins, c'est-à-dire apprendre à analyser, interpréter, traiter géométriquement des dessins, constitue pour nous un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie à l'école.

Dans une perspective de formation, ces éléments de réflexion nous semblent susceptibles d'aider les enseignants du premier degré à clarifier des enjeux de l'enseignement de la géométrie plane à l'école. Ils constituent également des outils leur permettant d'interpréter les programmes et de penser des progressions cohérentes en géométrie plane, à l'échelle de l'école, d'un cycle ou d'un niveau. Enfin, faire de ces enjeux généraux des objectifs d'enseignement permet d'engager un travail autour de la question des situations d'apprentissage. Quelles sont les situations susceptibles de favoriser un enrichissement du regard des élèves sur les dessins et de leur apprendre à construire un rapport géométrique aux dessins ?

Nous présenterons, dans la suite de ce texte, différentes pistes didactiques explorées au sein du groupe de Lille mais aussi dans d'autres travaux s'inscrivant dans leur prolongement.

II - PREMIERE PISTE DIDACTIQUE : INTERACTIONS ENTRE MANIERES DE VOIR ET MANIERES D'AGIR

1 Les situations de reproduction de figures comme situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et l'importance des instruments

Le groupe de Lille et un certain nombre de recherches prolongeant ses travaux (Barrier, Hache & Mathé, 2014 ; Bulf & Celi, 2015, 2016) se sont donnés pour objectifs l'élaboration et l'analyse de situations visant à accompagner les élèves dans une évolution de leur rapport aux dessins. Ce travail peut aujourd'hui être interprété comme la recherche d'une situation fondamentale (au sens de Brousseau, 1998) de l'analyse géométrique de dessins. L'enjeu consistait ainsi à déterminer une famille de situations qui, par la nature du problème posé et les contraintes portées sur ce problème, pouvait amener les élèves à enrichir leur regard sur les dessins, vers la construction d'un rapport géométrique à ces dessins (au sens développé ci-dessus). L'intérêt de ces recherches s'est alors porté sur les situations de reproduction de figures, en prêtant une attention particulière au rôle des instruments mobilisés dans ce type d'activité.

Que signifie reproduire une figure ? Le problème générique consiste à réaliser une copie d'un dessin modèle donné (forme ou dessin, simple ou assemblage). Cette copie peut être à la même échelle que le dessin donné ou non. La reproduction du dessin peut se faire à partir d'une amorce (partie du dessin modèle) ou non, d'échelle ou d'orientation différentes ou non. Enfin, cette reproduction s'effectue à l'aide d'instruments imposés ou non. Ceux-ci peuvent être variés : gabarits, pochoirs, papier calque, règle, équerre … Un système de coûts sur l'usage des instruments peut même être envisagé, afin d'amener les élèves à mobiliser certains instruments plutôt que d'autres. Le problème générique de reproduction de figures donne ainsi lieu à une très grande variabilité de situations didactiques, selon la nature du dessin à reproduire, l'amorce éventuelle et, surtout, du type instruments mis en jeu. Soulignons que le dessin pouvant être reproduit à une échelle différente, dans une orientation différente, ce sont bien les caractéristiques géométriques du dessin que l'on cherche à reproduire, soit la *figure* géométrique qu'il représente. Nous parlons donc de reproduction de *figures*.

Attardons-nous un bref instant sur la question des instruments, variable didactique-clé de ces situations de reproduction. Par instruments, nous entendons les instruments de géométrie « classiques » (le crayon, la règle, la règle graduée, l'équerre, le compas…) mais aussi des gabarits (formes en carton, en plastique), des pochoirs, de la peinture… L'idée sous-tendant ce travail d'élaboration de situations est qu'il existe un lien étroit entre les instruments utilisés pour analyser et reproduire une figure et la manière de voir le dessin (les unités figurales identifiées, leurs propriétés et les relations perçues). Parmi ces instruments, nous pouvons en effet identifier des instruments mobilisant des informations sur des surfaces : les gabarits utilisés comme des pièces de puzzles, les pochoirs dont on colorie ou peint l'intérieur, l'équerre utilisée comme gabarit d'angles droits (vus comme coins). Nous les appelons instruments 2D. Nous pouvons également identifier des instruments permettant de tracer des lignes et mobilisant donc une déconstruction des dessins en termes de bords de surfaces (1D/2D), de segments, voire de droites des dessins. Il en est par exemple ainsi lorsque l'on utilise des gabarits ou des pochoirs pour tracer le contour de formes, lorsque l'on trace un dessin à la règle, un cercle au compas par exemple. Nous les appelons instruments 1D.

Penser ainsi le lien entre le traitement instrumenté et l'interprétation d'un dessin, en termes de surfaces, de lignes et/ou de points permet d'envisager des progressions, de la maternelle au cycle 3, visant à apprendre aux élèves à construire progressivement leur rapport à ces dessins, c'est-à-dire à leur apprendre à voir/analyser et traiter géométriquement ces dessins.

La présentation et l'analyse de progressions autour de telles situations a fait l'objet de nombreuses publications (Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007; Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2007; Perrin, Mathé, Leclercq, 2013 ; Mangiante & Perrin-Glorian, 2014 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). Nombre de situations proposées dans ces textes porte sur la reproduction de figures complexes et se donnent pour objectif d'apprendre aux élèves à

- passer d'une vision en termes surfaces à un jeu entre visions en termes de surfaces, de lignes (segments et droites) et de points ;
- identifier et utiliser pour résoudre le problème de reproduction des relations d'alignement (de segments, de segment et de points, de points) et d'appartenance (d'un segment à une droite, de point à une droite…).

En prenant appui sur une analyse spontanée de dessins complexes puis, par des contraintes portées sur les instruments, en amenant les élèves à enrichir leur analyse des dessins, ces situations visent ainsi l'émergence des objets géométriques élémentaires (le segment, la droite et le point) et la mobilisation de relations d'alignement et d'appartenance entre ces objets.

D'autres travaux ont également porté sur l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de progressions et de situations sur d'autres thèmes de la géométrie plane, au programme de l'école. Parmi ceux qui ont fait l'objet d'une publication, nous pouvons par exemple citer – de manière non exhaustive - les travaux autour du passage de la notion d'angle droit à celle de droites perpendiculaires (Barrier, Hache & Mathé, 2014), autour de la symétrie axiale (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013).

Nous ne souhaitons pas reprendre ici la présentation et l'analyse de situations déjà présentées à maintes reprises dans les textes cités ci-dessus. Nous choisissons dans ce texte d'illustrer la nature de ce travail autour de situations visant à modifier l'interprétation des élèves des dessins vers une analyse géométrique de ceux-ci, via la présentation d'une situation de reproduction dont nous avons étudié un certain nombre de variations dans le cadre d'une progression visant l'enseignement et l'apprentissage du cercle du cycle 1 au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016).

2 Exemple de variations autour d'une situation de reproduction de dessin, du disque au cercle

Un examen approfondi des problèmes de reproduction de figures planes dans les manuels français sur ces trente dernières années (Bulf & Celi, 2015) nous avait permis de relever un nombre important d'énoncés sur le cercle et le compas. Pour autant, nous avions mis en évidence le peu d'articulation entre différents usages du compas (traceur de ligne, reporteur d'une longueur de segment ou d'une distance entre deux points) et le fait que les différentes conceptions possibles du cercle (Artigue et Robinet, 1982) n'étaient que peu ou pas convoquées. Ce bilan nous a alors amenées à proposer des variations autour de situations de reproduction de figures visant à faire évoluer le regard géométrique des élèves sur l'objet cercle et à articuler différentes conceptions de ce dernier.

2.1 Principes adoptés et éléments d'analyse a priori

Dans le prolongement des travaux évoqués précédemment, notre travail est guidé par plusieurs « principes » relevant de travaux antérieurs en didactique des mathématiques : les travaux sur les conceptions du cercle d'Artigue et Robinet (1982), les travaux de Duval sur la visualisation (2005) et les travaux du groupe de Lille.

Les différentes façons de voir le cercle

Les travaux précurseurs d'Artigue et Robinet (1982) ont mis au jour différentes conceptions du cercle que nous avons reprises et adaptées dans le cadre de notre progression qui concerne l'école primaire (cycle 1 au cycle 3). Nous retiendrons pour notre travail que le cercle peut être vu comme :

- une forme arrondie dont on reconnaît l'allure générale (vision iconique)

- le contour d'un disque

- une surface délimitée par une ligne de courbure constante
- une ligne de courbure constante
- une ligne située à une distance constante (le rayon) d'un point donné (le centre)
- un ensemble de points situés à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre)
- une ligne ayant une infinité d'axes de symétrie
- une figure invariante par rotation

…

Ces différentes conceptions du cercle mobilisent des unités figurales (au sens de Duval) de dimensions différentes (surfaces 2D, contours de surface 1D/2D[6], lignes 1D, points 0D) pouvant être mises en relation de façon différente (par exemple : ligne de courbure constante *vs* ligne à égale distance d'un point donné). Cette caractérisation des conceptions du cercle en fonction des unités figurales considérées est cruciale pour la construction de la cohérence de notre progression. En effet, conformément aux apports des travaux du groupe de Lille, celle-ci vise à faire évoluer le regard des élèves sur l'objet disque ou cercle d'une vision en terme de surface à une vision entre terme de ligne vue comme contour d'une surface, ligne de courbure constante, ligne à équidistance d'un centre, jusqu'à l'appréhension de points appartenant à cette ligne et situés à équidistance du centre (figure 6).

Figure 6. Évolution et articulation des différentes façons de voir le cercle à l'école primaire.

Déjà à l'époque, Artigue et Robinet concluaient qu'« [i]l semble souhaitable que les objectifs de cet enseignement soient plus formulés en termes d'enrichissement et d'organisation cohérente de conceptions variées du cercle, tant ponctuelles que globales, statiques que dynamiques » (Ib., p.63).

Une même figure modèle comme témoin de l'évolution du regard

Nous avons choisi d'explorer une seule et même figure (figure 7) d'une part car celle-ci se retrouve de façon récurrente dans de nombreuses ressources pédagogiques (Bulf et Celi 2015, 2016) mais aussi de par les propriétés mathématiques et visuelles qu'elle offre et que nous détaillons dans la partie suivante.

[6] Nous rappelons la nomenclature de Duval (2005) : le dénominateur indique la dimension du support considéré, ici 2D renvoie à la dimension de surface, et le numérateur indique l'unité figurale désignée, autrement dit ici 1D désigne des lignes et 0D des points.

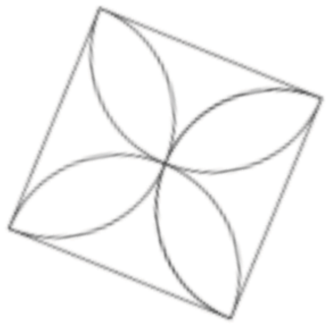


Figure 7. Figure-modèle.

L'on peut discerner une pluralité de manières possibles de voir et d'interpréter ce dessin, en fonction de la dimension et de la nature des sous-éléments considérés (Bulf et Celi, 2016). En particulier, il peut être interprété comme un assemblage par juxtaposition, conformément à l'analyse perceptive spontanée des dessins évoqués en partie I.3. L'on perçoit alors la figure 7 comme un assemblage de pièces d'un puzzle ayant par exemple la forme d'un triangle arrondi et la forme d'un pétale. Il peut également être interprété comme un « assemblages par superposition » (Duval, Godin, 2005, pp. 9-10), si l'on considère plutôt qu'il s'agit d'un assemblage de quatre demi-disques transparents posés sur un carré.

Un jeu sur certaines valeurs de variables didactiques bien choisies (les couleurs, le recours à diverses pièces matérielles de type puzzle, des tracés supplémentaires, etc.) permet de faire basculer une vision d'un assemblage par juxtaposition à celle d'un assemblage par superposition (et réciproquement).

Si l'on cherche à reproduire cette figure avec des instruments comme un compas par exemple, la vision globale en termes de surface n'est plus opératoire, il devient nécessaire de procéder à une analyse de la figure comme dans la figure 8.

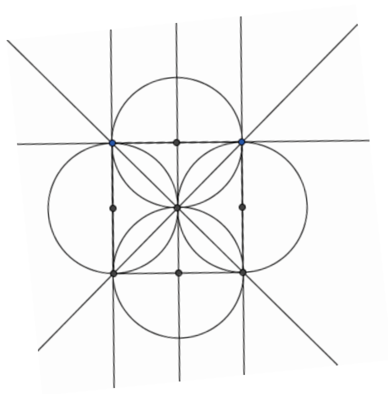


Figure 8. Analyse de la figure en faisant apparaître les unités figurales et leurs relations.

Aussi pour une visualisation non iconique, c'est-à-dire dépassant une simple reconnaissance de formes connues, il convient de dire que la figure est composée d'un carré et de quatre demi-cercles de centres respectifs les milieux des côtés du carré et passant chacun par le centre du carré. Chaque côté du carré est donc un diamètre d'un des demi-cercles. Les « tracés auxiliaires » favorisent la déconstruction dimensionnelle de la figure, nécessaire pour penser son éventuelle construction qui dépendra des instruments mis à disposition. Plusieurs relations entre ces unités figurales nous semblent donc intéressantes à exploiter dans le cadre de notre progression :

- le centre du carré, obtenu par intersection des diagonales du carré mais aussi comme point de concours des quatre demi-cercles ;

- les milieux des côtés du carré qui sont aussi centre des demi-cercles ;

- les côtés du carré qui sont aussi diamètre des demi-cercles.

En particulier la mobilité du regard sur ces différentes unités figurales et leurs mises en relation donnent les clés pour réussir sa reproduction.

Ainsi, les analyses visuelle et mathématique de ce dessin (figures 7 et 8) mettent en évidence une dialectique possible entre juxtaposition et superposition des formes mais aussi un travail intéressant des propriétés mathématiques intrinsèques. Ces analyses nous conduisent donc à retenir ce dessin pour dérouler notre progression autour des notions de disque et cercle.

Soucieuses de penser l'enseignement de la géométrie plane dans une continuité, tout au long de l'école, et d'articuler connaissances anciennes avec les connaissances nouvelles, nous ne pensons pas les différentes étapes de cette progression comme relevant d'un cycle particulier. Dans nos expérimentations en classe, le travail mené en cycle 3 reprend bien souvent les premières situations, elles-mêmes travaillées en cycle 1, puis les prolonge.

Au cœur de l'évolution de notre progression : l'évolution du rapport aux instruments

Comme évoqué précédemment, notre travail s'inscrit dans la lignée des travaux du groupe de Lille considérant le lien étroit entre *visualisation des formes* et *rôle des instruments*. La progression s'appuie sur les variables propres aux problèmes de restauration et plus largement ceux de reproduction, à savoir un support uni, une évolution de la nature de l'amorce, etc. Plus particulièrement l'évolution de notre progression se base sur celle des usages du matériel (le dessin étant toujours le même) : des gabarits de forme et leur superposition par transparence, aux contours de surface et intersections de lignes jusqu'à l'utilisation du compas.

Nous proposons, conformément aux travaux du groupe de Lille, une géométrie sans mesure centrée sur la recherche de levier permettant un changement de regard et la mise en relation des unités figurales qui composent la figure, tout en assumant une dialectique des différentes conceptions du cercle (au sens de Artigue et Robinet).

Trois types de variations sont proposés dans les parties suivantes. Ces différentes situations ont été également présentées dans Bulf et Celi (2016), certains éléments d'analyse sont directement repris de cette publication, d'autres sont issus d'expérimentations ultérieures, notamment au sein d'un groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand[7].

2.2 Une première situation d'action avec des gabarits transparents de demi-disque pour une vision surface et contour de surface

Dans cette partie, nous rendons compte d'éléments d'analyse de la situation en tenant compte des conditions dans lesquelles elles ont été expérimentées (une classe CE1-CE2 de la région bordelaise[8], dans une classe de Grande Section[9] et une classe de CE2-CM1[10] d'Auvergne). Autrement dit, les éléments d'analyses *a priori* dont nous rendons compte garantissent le caractère reproductible des situations mais les éléments d'analyse *a posteriori* qui correspondent à ces expérimentations sont donc aussi dépendants des conditions de ces expérimentations.

Les élèves doivent reproduire la figure 7 qui a été donnée soit sous cette forme soit sous forme d'une photo avec le même matériel manipulable.

---

[7] Groupe « Géométrie à l'école » animé par Anne-Cécile Mathé depuis septembre 2016 et réunissant une dizaine d'enseignants du premier degré et trois enseignants de collège.

[8] Classe de Caroline Tuphile (séance menée par C.Bulf) école de Gensac (33), Avril 2015.

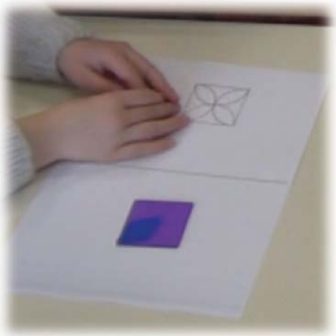
[9] Classe de Maire Gourjon, école de la Monne, Saint Saturnin (63)

[10] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

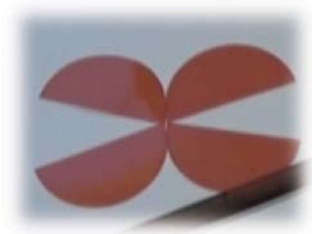
En Grande Section de maternelle, le matériel mis à disposition des élèves comprend des gabarits transparents de forme variée : disque, demi-disque, quart de disque, carré, losange, triangle, rectangle, hexagone. Ces élèves travaillent sur une feuille blanche comprenant la figure-modèle.

Dans la classe de CE1-CE2 comme dans celle de CE2-CM1, les élèves travaillent sans support, directement sur la table, la figure-modèle non accessible, seulement sous une forme agrandie et projetée au tableau. En outre, ces élèves de CE1 ont à leur disposition que des demi-disques rouges transparents.

Quelles que soient les conditions initiales du problème posé, lors de la rencontre des élèves avec la figure-modèle, les élèves (qu'ils soient en cycle 1, 2 ou 3) reconnaissent spontanément diverses formes : des « pétales », « des triangles arrondis », « des rosaces », des « ballons de rugby », etc. Ces propositions verbales témoignent d'une vision première du dessin essentiellement en termes de surfaces juxtaposées. De manière concordante avec cette appréhension spontanée du dessin, lors de la première phase de recherche, les manières d'agir des élèves (quel que soit leur cycle) portent sur des essais de juxtaposition des formes mises à disposition (figures 9) ; les élèves éprouvent des difficultés à percevoir la superposition de demi-disques.



Exemple de procédure d'élève en GS : les gabarits transparents de losange sont juxtaposés sur le gabarit carré.



Exemple de procédure d'élève en CE1 : les quatre gabarits de demi-disques transparents sont juxtaposés sur la table.

Figure 9. Des essais de juxtaposition de formes

Dans la classe de CE1-CE2, c'est l'introduction du gabarit transparent carré et la contrainte de devoir faire rentrer les autres gabarits « sans que ça déborde » qui forcent les élèves à passer d'un assemblage par juxtaposition à un assemblage par superposition. Ce changement de milieu matériel participe de l'apparition de nouvelles manières d'agir. En effet, les élèves prennent en compte différemment les gabarits et considèrent maintenant leur position relative. Par exemple, de nombreux nouveaux agencements sont expérimentés :

- Le bord droit du demi-disque (1D/2D) est superposé avec un bord droit (côté) du carré
- Le bord courbe du demi-disque (1D/2D) touche un autre bord (1D/2D) :
    - soit un côté du carré
    - soit un bord droit d'un autre gabarit de demi-disque
    - soit un bord courbe d'un autre demi-disque
- Les extrémités du diamètre du demi-disque (0D/2D) correspondent aux sommets du carré (0D/2D) ou « touchent » un côté du carré (sans déborder).

A travers ces nouveaux repères de position (permis par des superpositions possibles entre les gabarits) apparaissent de nouvelles connaissances d'action par rapport à la première phase d'action qui engagent l'élève dans un traitement de la figure d'une autre nature. En effet, l'élève prend maintenant en compte de nouvelles surfaces et contours de surfaces obtenus par ces nouveaux agencements (des superpositions) et la mise en relation d'unités figurales de dimension inférieure (1D/2D). Le gabarit du demi-disque n'est plus placé de façon aléatoire ou guidé par la reproduction d'une vision surface (position des pétales).

Nous verrons plus loin sous quelles conditions les élèves de Cycle 1 ont également fait évoluer leur regard sur le dessin.

Ces premières superpositions permettent de faire apparaître les « premiers contours » visibles de la figure-modèle. En effet pour réussir la reproduction, l'élève doit répéter un agencement particulier du gabarit de demi-disque par rapport au carré et tenir compte de celui déjà placé ; les nouvelles surfaces obtenues au fur et à mesure par superposition des gabarits de demi-disque (les « pétales ») assurent la validation du traitement effectué. Le bon placement des gabarits se vérifie également par le fait que les bords courbes ne font que « se toucher » au niveau du centre du carré (cette manière d'agir agissant comme un moyen de validation). A terme, les élèves peuvent aller jusqu'à se rendre compte que le gabarit carré n'est pas nécessaire et reconnaissent les côtés droits des gabarits de demi-disques comme les côtés du carré.

2.3 Une deuxième situation d'action pour une vision ligne

Comme déjà évoqué précédemment une évolution de cette situation peut être pensée en modifiant les instruments mis à disposition des élèves, faisant ainsi évoluer les enjeux de la reproduction. L'on peut proposer par exemple un gabarit carré et un seul gabarit de demi-disque opaque (figure 10).

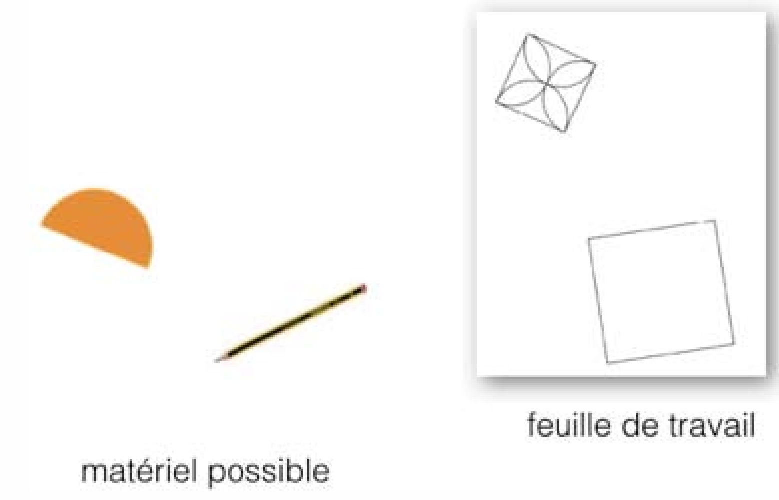


Figure 10. Deuxième situation d'action, pour une vision contour de surface et lignes

Cette fois l'enjeu de la reproduction réside dans le passage d'une vision surface à une vision contour de surface et lignes. Les élèves procèdent donc à un jeu de tracé de contours de surfaces et intersections de lignes avec cette fois un seul gabarit de demi-disque mobilisant la conception « courbure constante ». Les élèves devant reconnaître que le tracé de demi-cercle est obtenu par le tracé du contour avec le même gabarit en réitérant quatre fois le même traitement (du fait de l'isométrie du carré). Il s'agit de prendre en compte conjointement plusieurs contraintes :

- le côté du carré doit correspondre avec le bord droit du demi-disque ;

- les extrémités des bords droits du demi-disque doivent correspondre aux sommets du carré ;

- le tracé du contour du demi-disque doit passer par l'intersection des autres tracés d'arcs de cercle en un seul point (le centre du carré).

Ces différentes actions (placement des gabarits et tracés de contours) servent également de moyens de contrôle dans le traitement de la figure : en particulier si les arcs de cercle ne se coupent pas en un même point, les élèves perçoivent visuellement tout de suite que la reproduction est à reprendre. La nature de la figure (intersection des demi-cercles en un seul et même point qui est le centre du carré) se révèle un point d'appui essentiel pour faire fonctionner les allers-retours permanents entre déconstruction et reconstruction dimensionnelle : entre surface, bords de surface, contours, lignes et intersections de lignes (qui donnent un point).

Figure 11a. Exemple d'usage du gabarit de demi-disque pour reproduire la figure modèle.

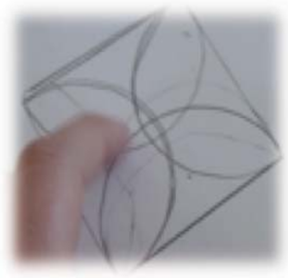


Figure 11b. Invalidation de la figure étant donné que les arcs de cercle ne sont pas concourants.

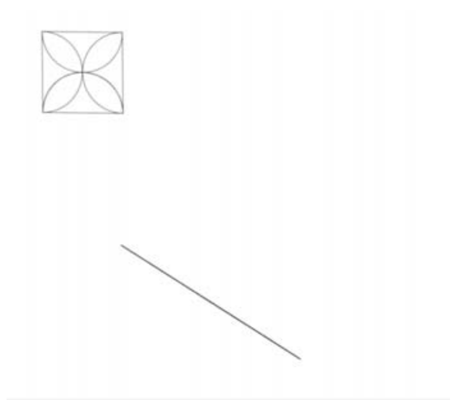
Figures 11. Contours de surface et intersections de lignes

L'analyse de ces deux situations d'action permet donc de mettre en évidence la façon dont le regard sur un même dessin évolue dès lors que les contraintes sur les instruments évoluent : d'une vision par juxtaposition à une vision par superposition (en introduisant le carré dans la première situation) ; d'une vision surface, contours de surface à une vision ligne, intersection de ligne (avec une réduction du nombre de gabarit - un seul gabarit de demi-disque opaque) et une amorce.

La troisième situation que nous proposons cherche maintenant à mettre en lien les unités figurales de la figure-modèle afin de pouvoir la reproduire avec un compas. Le cercle deviendra alors une ligne située à équidistance d'un centre…

2.4 Une troisième situation d'action pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle

Cette situation de restauration, s'adresse à des élèves de fin de cycle 2 et/ou de cycle 3. Il s'agit toujours de présenter aux élèves la même figure-modèle (figure 7) en leur proposant de la reproduire à partir d'une amorce (figure 12). Différentes amorces peuvent être proposées.



Actions	Coûts	comptes
Règle Informable pour tracer un trait	0	
Règle Informable pour reporter une longueur	10	
Règle graduée	20	
Gabarit d'angle droit	5	
compas	1	

Figure 12. Troisième situation d'action, pour une mise en relation des lignes et des points vers les propriétés du cercle. La feuille de travail n'est pas à l'échelle.

Les élèves ont à leur disposition :

- une règle non graduée : par exemple, une bande de papier cartonné plastifiée avec laquelle on peut tracer des lignes droites ;

- une règle pour reporter des longueurs : par exemple, une bande de papier cartonné que l'on peut plier pour mémoriser une longueur, ou sur laquelle on peut marquer une longueur à l'aide d'un crayon dans le but de la reporter ;

- un gabarit d'angle droit (on évitera de donner l'équerre où il y a un côté gradué) ;
- une règle graduée ;
- un compas.

Les instruments peuvent être utilisés sur le modèle (pour prendre des informations ou pour ajouter des éléments supplémentaires) et pour tracer la figure à restaurer à partir de l'amorce fournie. Nous intégrons cependant ici un système de coût sur l'utilisation des instruments disponibles.

Sur la figure-modèle, le recours à un instrument, quel qu'il soit, est gratuit. En revanche, sur la figure à restaurer, les règles de coûts sont les suivantes :

- tracer une ligne droite avec la règle non graduée est gratuit ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle prévue pour cet usage coûte 10 points ;
- utiliser un gabarit d'angle droit coûte 5 points ;
- reporter une longueur à l'aide de la règle graduée coûte 20 points ;
- utiliser le compas coûte 1 point, que ce soit pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur (prise sur le modèle ou sur la figure en construction).

Le but du jeu est de cumuler le moins de points possible (voir figure 12 pour un exemple).

Un tel système de coût sur les instruments favorise les procédures mobilisant le compas comme outil permettant la conservation puis le report d'une longueur (rayon du cercle, côté du carré) mais aussi comme outil permettant de tracer un cercle.

La validation des productions des élèves peut s'effectuer classiquement par superposition avec la figure attendue tracée au préalable sur du papier calque même si nous considérons *a priori* que les propriétés intrinsèques de la figure suffisent à sa validation (notamment du fait que tous les arcs de cercle doivent passer par le centre du carré, ce qui constitue un moyen de contrôle des tracés) mais aussi par un comptage du nombre de points utilisés pour la restauration (on peut annoncer le coût minimal possible).

Nous nous permettons de renvoyer directement à l'article de Bulf et Celi (2016) pour avoir une analyse *a priori* détaillée de cette dernière séance en fonction d'un catalogue d'amorces. Ce que nous pouvons retenir de cette situation de manière un peu plus générale, c'est qu'elle cherche à aller plus loin dans la déconstruction de la figure, dans le sens où on vise maintenant la mise en relation entre les unités figurales de dimension inférieure (1D et 0D) à l'aide du compas afin de reproduire la figure à moindre coût.

Cette situation est pensée (dans le cadre de cette progression) de façon à ce que, au regard de l'amorce choisie et du coût retenu sur les instruments, les élèves mettent en jeu une mobilisation et une organisation différente des propriétés du cercle et du carré. Par les contraintes de la situation, les élèves sont amenés à enrichir leur regard sur les unités figurales : les côtés du carré (1D) vus aussi comme diamètres du cercle (1D) ; les sommets du carré (0D) vus aussi comme extrémités des diamètres des cercles, le milieu des côtés du carré (0D) comme centre d'un cercle (0D), le point d'intersection des arcs de cercle (0D) comme centre du carré, etc. Ces différentes mises en lien étant soutenues par des relations de perpendicularité, d'alignement et de milieu (figure 8).

Certaines amorces favorisent *a priori* davantage un jeu de déconstruction et reconstruction de la figure-modèle (2D ⇄ 1D ⇄ 0D) mettant en jeu une conception plutôt ponctuelle du dessin dans le but de mobiliser en particulier les propriétés du cercle et sa caractérisation par la relation de distance (*centre ; point du cercle*). Certaines mobilisent par ailleurs d'autres connaissances géométriques au-delà des propriétés du cercle : prolongement de droites, intersection de droites pour obtenir un point, relation d'incidence et d'alignement, *etc*.

3 Bilan et questions nouvelles

Nous nous sommes données pour objectif d'apprendre aux élèves à analyser (perceptivement) géométriquement des dessins pour y voir des représentations sémiotiques d'objets, de propriétés et de relations géométriques et à être capables de traitements géométriques de ces dessins. Explorer cette visée nous a amenées à penser une situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins et des progressions autour de ces situations, via un jeu sur les instruments. Ce travail outille ainsi les enseignants pour penser des progressions dans la perspective d'une évolution cohérente du rapport des élèves aux dessins et choisir, analyser des situations didactiques.

Si l'on se réfère au cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), les situations envisagées jusqu'à maintenant constituent des situations d'action. Les élèves interagissent directement avec un milieu (les dessins, les instruments, l'amorce éventuelle…) qui est capable de rétroactions (opérationnalité de l'analyse du dessin au regard des instruments disponibles ou du coût sur l'usage des instruments, validité de la production par perception directe ou validation par calque…). La confrontation des élèves au problème et les rétroactions du milieu visent à faire évoluer les stratégies des élèves vers une procédure contenant en germe les connaissances et savoirs géométriques visés. Ces situations permettent ainsi l'émergence de connaissances pour l'action : analyser le dessin en termes de surfaces, de bords, de lignes, de points ; être capable de rendre visible de l'implicite grâce à un traitement des dessins idoine et opératoire ; utiliser les instruments pour reproduire les objets, propriétés et relations géométriques identifiés sur les dessins modèles. Ces connaissances apparaissent comme des outils nécessaires pour résoudre le problème de reproduction posé.

Plusieurs questions restent cependant en suspens et vont guider la suite de ce texte. De manière générale, prolongeant les éléments de réflexion développés précédemment, soulever ces questions nous amène à aborder la question de l'articulation entre registres graphiques et registres langagiers dans les apprentissages en géométrie (plane) à l'école.

D'une part, la mise en œuvre de ces situations en classe met en évidence le rôle indéniable des interactions langagières orales dans l'évolution des stratégies des élèves, qu'il s'agisse d'interactions entre élèves pendant qu'ils essaient de reproduire la figure ou d'interactions avec l'enseignant, de manière individuelle ou collective. Au fil de la confrontation à la situation d'action, se développe un langage qui permet la verbalisation de l'analyse des dessins et des procédures instrumentées mises en œuvre. C'est également souvent dans ces interactions langagières orales que se négocie une interprétation partagée des dessins et du problème. Or ce rôle des interactions langagières, verbales et orales, n'est pas jusqu'alors anticipé *a priori*. Mettre en place ces situations en classe va toutefois nécessiter de la part de l'enseignant une vigilance particulière au travail dans et sur le langage qui se développe autour de ces situations d'action. Nous essaierons dans la suite de ce texte de faire de résultats de recherche développés autour de cette question des pistes de réflexion et outils pour les enseignants et leur formation.

D'autre part, subsiste la question fondamentale des modalités possibles de transformation des connaissances pour l'action émergeant de la confrontation à ces situations en savoirs géométriques, visés par l'enseignant. L'objectif de l'enseignant est en effet, à terme, la formalisation de savoirs géométriques. Au regard des enjeux d'enseignement développés précédemment, ces savoirs sont de deux types au moins. Il s'agit d'une part de la désignation, voire d'une définition (locale) d'objets géométriques (le segment, la droite, le point, le cercle), de propriétés et de relations (alignement, appartenance, équidistance à un point…). Il s'agit également de construire un langage géométrique permettant de rendre compte d'une analyse géométrique des figures. L'écart est bien sûr grand entre la capacité des élèves à utiliser les instruments donnés pour reproduire un dessin, en appui sur une analyse de ce dessin, et leur capacité à formuler ces savoirs décontextualisés. La question que nous explorerons à la fin de ce texte est ainsi celle de l'insertion de ces situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales, prenant en compte ces enjeux de dépersonnalisation, décontextualisation et formulation des connaissances pour l'action en savoirs géométriques.

III - L'ARTICULATION ENTRE REGISTRES GRAPHIQUE ET LANGAGIER EN SITUATION D'ACTION

1 Vers une analyse en termes de modes *d'agir-parler-penser*

Notre approche consiste à considérer le langage comme partie prenante de l'activité du sujet en situation *via* la prise en compte de trois dimensions de cette activité : l'agir, le parler et le penser (Bernié, 2002). Les manifestations effectives (*a posteriori*) des modes d'agir-parler-penser d'un objet mathématique (baptisés *modes de fréquentation* dans (Bulf, Mathé, Mithalal, 2014)) cherchent à décrire un rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu (ici *cercle* ou *carré*…), à un moment de la confrontation de l'élève à la situation. Notre travail vise alors à étudier la manière dont ces modes de fréquentation évoluent au cours du déroulement d'une situation et en particulier la manière dont les traitements des objets dans les registres graphiques et langagiers interagissent dans ces processus d'évolution. En appui sur une analyse *a priori* des rapports possibles aux objets mathématiques, en particulier en termes d'unités figurales repérables, de dimension des objets considérés et de relations possiblement perceptibles entre ces unités, nos analyses *a posteriori* prennent pour observables ce que font et disent les élèves et l'enseignant (gestes, regard, signes, langage oral, etc.).

Afin d'illustrer notre propos, reprenons le traitement de la situation de reproduction de la rosace à quatre branches dans le contexte de la classe de maternelle (GS) dans les conditions déjà décrites précédemment (voir paragraphe 2.2). Le matériel construit un contexte de manipulation d'objets singuliers dans lequel chaque élève interprète la tâche en fonction de ses propres intérêts et de sa vision du dessin. Comme décrit dans la partie II la vision par juxtaposition domine au début de la résolution. Se joue alors dans les échanges langagiers avec l'enseignante une confrontation des différentes manières de parler (bord arrondi *vs* bord droit) amenant l'élève sur de nouvelle façon d'agir (voir figure 9) :

> « *est-ce que les* ***bords du losange*** *c'est* *arrondi* ? »
>
> « *oui c'est* *droit et c'est pointu* » « *regardez sur votre figure-modèle, les formes que vous voyez* »
>
> « *le* *rond* » « *alors le* *rond*, *c'est quoi* ? »…

Ainsi, les élèves s'emparent du demi-disque et cherchent à le superposer à la figure modèle. L'avancée de la résolution du problème se fait à la fois par un retour direct avec le milieu (voir partie 2) et par les interactions langagières.

Au cours des différentes situations d'action observées, que ce soit en GS ou en Cycle 2, les situations d'action sont le lieu où se rencontrent différents modes de penser, en lien étroit avec différentes manières d'agir et de parler.

Penser	Agir		Parler
Vision surface (2D)	**Juxtaposition** de formes		« Fleur », « pétales », « rosace », « papillon »
	GS : gabarits de losange	CE1 : gabarits de demi-disques	
		+ gabarit carré	« bords » « traits droits, pointus » *vs* « traits arrondis »
Surfaces de demi-disques Vers bords et contours de demi-disque (1D/2D)	**Superposition** des formes		
	GS : Superposition des demi-disques sur le disque modèle	CE1 : Superposition des gabarits transparents faisant apparaître de nouvelles formes	« on cherche des lignes arrondis qu'on va superposer sur la figure modèle »

Tableau 1. Dynamique des déplacements des modes d'agir, de penser et de parler du cercle.

Nous avons synthétisé la dynamique de ces déplacements de modalités de traitement instrumenté (manières d'agir) et langagier (manières de parler), en lien avec différentes interprétations du dessin, dans le tableau 1.

Au début de cette situation, que ce soit en GS ou en C2, les élèves parlent de « fleur », « pétales », « rosace », « ailes de papillon » etc. Nos analyses montrent alors une cohérence entre cette manière de décrire verbalement le dessin et les manières d'agir d'abord mobilisées (losanges, formes des pétales…), qui nous permet de reconnaître que les élèves sont dans une vision surface juxtaposées 2D (et aussi dans une vision iconique) du dessin.

Au fil de la confrontation des élèves à la situation, s'opèrent alors des déstabilisations de la manière dont les élèves interprètent le dessin et l'objet cercle. Les moteurs de l'évolution des élèves, vers une interprétation plus géométrique du dessin en termes de demi-disques superposés, peuvent alors résider soit dans l'évolution des modalités de traitement graphique du dessin (sous les contraintes matérielles de la situation d'action), soit dans la négociation des manières de parler et de désigner les objets (comme décrit précédemment). C'est donc l'articulation du travail entre registres graphiques et langagiers qui permet la co-construction d'une manière partagée et opératoire d'analyser le dessin.

Nous retenons de ceci deux choses fondamentales. Premièrement, l'activité géométrique lors de la résolution d'un problème peut se concevoir comme relevant de manières spécifiques *de penser* les objets géométriques en jeu vivant au travers de manières *d'agir* sur un environnement matériel et des manières *de parler* (actes de langage). Et, deuxièmement, les moteurs de l'évolution des procédures des élèves en situation d'action relèvent d'au moins de deux types d'interactions :

- interactions matérielles entre sujet et milieu,

- interactions langagières orales hors de cette situation adidactique.

2 Des pistes de réflexion pour la mise en œuvre de situations d'action en classe : verbalisation autour des situations d'action et secondarisation

Notre travail amène à porter une attention accrue à l'activité de désignation des objets (explicitations des unités figurales en jeu et de leurs relations) et son articulation avec les procédures d'action sur les objets mises en œuvre. Il nous aide à penser et anticiper les potentialités offertes par un travail dans et sur le langage lors des phases de verbalisation, au moment des mises en commun intermédiaires ou concluant les phases de recherche. Lors de la mise en œuvre des situations d'action en classe, ces moments constituent un lieu riche de construction d'un vocabulaire permettant la désignation des objets géométriques mobilisées pour l'action et les prémisses de la construction d'un langage permettant de verbaliser les procédures développées pour l'action. C'est dans le langage que l'enseignante appelle à une autre façon de parler, de faire et de voir : des relations sont formalisées, reprises, approfondies, permettant aux élèves de lever des implicites, de se mettre d'accord sur la façon d'agir et de parler. Dans ces mises en commun observées lors des différentes situations de la rosace décrites précédemment, l'enseignante questionne, fait formuler (reformuler), cherche à faire généraliser les élèves : on passe par exemple d'une formulation fortement ancrée dans un contexte d'action « j'ai fait ça, comme ça » à une formulation désignant la forme (2D) et les traits (1D) ; on passe de la formulation désignant l'action « on fait le contour du disque » à une reconnaissance explicite du « trait » ou de la « ligne » pour parler d'un « demi-cercle ». La dimension des objets en jeu évolue (passant des surfaces aux lignes), on met en mot, on convoque dans le langage les modes d'agir, faisant bouger les façons de penser et de parler des objets.

Dans le prolongement des phases d'action, ces mises en commun participent du processus qui consiste en la transformation des modes d'agir-penser-parler. Ces déplacements à la fois cognitifs et langagiers sont des témoins du processus, en cours, de secondarisation[11] des discours (Bernié 2002 ; Jaubert, Rebière 2012).

[11] La façon d'agir sur le matériel (ou dessins), les façons de parler, et les façons de penser, se transforment tout au long du processus d'apprentissage. C'est ce qu'on appelle la secondarisation des discours qui repose sur des déplacements à la fois langagiers et cognitifs via la mise en œuvre d'un discours spécialisé caractérisant la

IV - POTENTIALITES DE SITUATIONS DE FORMULATION ET DE VALIDATION EN GEOMETRIE

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence le rôle, non négligeable, des interactions langagières, verbales et orales, qui se développent autour de la reproduction de dessins. Participant de l'évolution des stratégies des élèves tout comme les rétroactions pragmatiques du milieu, ces interactions langagières orales constituent un lieu d'expression et de négociation de l'interprétation des dessins et des modalités possibles de traitement de ces dessins au regard du problème posé. Avoir en tête le rôle de ces interactions langagières nous semble ainsi participer à une meilleure compréhension des moteurs de l'évolution effective des stratégies des élèves. Organiser un travail dans le langage lors de la mise en œuvre de ces situations participe également à faire de ces interactions langagières un lieu d'apprentissage, visant la verbalisation des connaissances émergeant pour l'action et la construction d'un vocabulaire et de références partagées.

Malgré tout, ce travail dans et sur le langage autour de la reproduction de figures ne saurait permettre à lui seul la transformation de connaissances développées pour l'action en savoirs visées par ces situations de reproduction de figures. Revenons à la nature de ces savoirs visés.

Comme évoqué dans la partie I de ce texte, les enjeux de savoirs de ces situations sont pour nous d'une double nature.

(i) Il s'agit de faire émerger les objets et relations géométriques comme des outils pour résoudre des problèmes portant sur des dessins. Les savoirs visés relèvent alors de la désignation de ces objets (vocabulaire) et d'une définition, parfois locale et fonctionnelle, de ces objets. On pourra ainsi dire qu'un segment est porté par une droite, qu'une droite est un trait rectiligne n'ayant ni début ni fin, qu'un cercle est une ligne située à une distance R (le rayon) d'un point (le centre) …

(ii) Il s'agit également de la construction d'un rapport géométrique aux dessins et à la capacité à développer une analyse géométrique de ces dessins en figures. Ceci suppose la capacité à coordonner représentation de la figure dans le registre graphique (en lien avec analyse géométrique perceptive du dessin) et dans le registre langagier (être capable de formuler une analyse géométrique du dessin). Nous convenons que ces savoirs sont aujourd'hui des savoirs transparents à l'école (Margolinas & Laparra, 2011), où l'on estime très souvent qu'acquérir le vocabulaire suffit à être capable d'une analyse, à la fois perceptive et langagière, des figures. Or l'articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique et analyse discursive des figures, dans le registre langagier, ne va pour nous pas de soi. C'est par ailleurs très largement dans une articulation entre analyse perceptive des dessins, dans le registre graphique, et analyse portée par le langage que se développeront les activités géométriques attendues au collège et en particulier les activités de démonstration (voir l'exemple donné en partie I.3).

Ainsi donc, le travail dans le langage autour des situations d'action permet un premier mouvement de secondarisation vers la construction d'un vocabulaire partagé permettant de désigner les objets mobilisés et certaines actions sur ces objets. Il s'agit malgré tout essentiellement d'un langage de communication, contextuel et fonctionnel, en lien fort avec les traitements instrumentés du dessin développés. Un mouvement de dépersonnalisation et de décontextualisation est encore nécessaire pour permettre la transformation de ces connaissances pour l'action en savoirs géométriques. La construction d'un langage géométrique capable de porter l'analyse de figures reste également objet de travail. Forts des outils livrés par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), cette réflexion nous a ainsi conduits à explorer

communauté discursive des mathématiques à l'école : « les formes secondarisées témoignent d'une modification de sa compréhension [celle de l'élève] de l'activité en cours, de son rapport au monde, de la prise en compte de nouveaux éléments jusqu'alors ignorés, de ses déplacements énonciatif et cognitif, et de son institution en tant qu'acteur social dans le nouveau contexte » (Jaubert & Rebière 2012 p.6).

les potentialités de l'insertion de ces situations de reproduction de figures (situations d'action) dans des progressions plus globales articulant situations de formulation et de validation.

1 Situations de formulation autour de la reproduction de figures

D'un point de vue général, les situations dites de formulation, au sens de Brousseau (1998), sont des situations qui mettent en rapport au moins deux actants avec un milieu. Dans ces situations, l'action directe de l'un des actants sur le milieu n'est plus possible, car mise à distance. Leur succès commun exige que l'un formule les connaissances utiles à la résolution du problème à l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. Par ces contraintes, la situation rend ainsi nécessaire l'identification puis l'explicitation des connaissances nécessaires pour l'action, dans un langage partagé.

Dans notre cas, un élève (ou groupe d'élèves) sera confronté à un problème de reproduction d'un dessin modèle, avec contraintes sur les instruments, comme développé précédemment. Sa mission sera de formuler un message qui devra permettre à quelqu'un de reproduire la figure représentée par ce dessin modèle, avec les mêmes instruments, sans avoir vu le dessin modèle. Ces situations donnent lieu à une phase de validation dans laquelle on pourra mettre en regard le dessin modèle et le dessin produit et engager un travail autour des messages élaborés (informations manquantes, langage partagé…)

Bien évidemment, de nombreuses variations autour de cette situation de formulation générique sont envisageables, en fonction du niveau des élèves et des objectifs d'apprentissage langagiers. Ainsi, la formulation des connaissances par les élèves peut être orale ou écrite, verbale ou non verbale. Le récepteur peut-être un autre élève ou l'enseignante.

Nous présentons dans la suite quelques exemples de situations expérimentées en classe. Par souci de cohérence, nous reprenons ici le thème disque et cercle. Les situations présentées (succinctement) ci-dessous font suite à un travail de reproduction d'assemblages de formes et de dessins complexes (dont la situation de « la rosace » présentée ci-dessus).

1.1 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et désignation de ces sous-éléments 2D, formulation orale

La situation que nous présentons dans ce paragraphe fait suite à un travail de reproduction de figures complexes à l'aide de gabarits, faisant suite aux deux premières situations autour de la rosace présentées ci-dessus. Les élèves ont ainsi été amenés à identifier des disques, demi-disques, quarts de disque dans des dessins complexes et à les reproduire à l'aide de gabarits surfaces (sur le modèle ou à côté du modèle) ou de gabarits comme instruments de tracé de cercles, demi-cercles ou quarts de cercle. L'analyse des dessins s'est alors opérée en termes d'assemblages de formes juxtaposées et/ou superposées. Les élèves disposaient des gabarits et de crayons sur leur table.

Une première situation de formulation, en appui sur ces situations de reproduction de figures, consiste à proposer aux élèves un problème de reproduction analogue mais, cette fois-ci, en éloignant les gabarits de leur table de travail. Les élèves vont devoir commander à la personne détenant les gabarits la nature des formes souhaitées. La formulation est ici orale, le récepteur de la commande peut être l'enseignant ou un autre élève.

Nous ne nous attarderons pas dans ce texte sur cette situation, car c'est une situation rencontrée de manière assez classique dans les classes, parfois sous le nom de « jeu de la marchande ». À travers ce premier exemple, nous voulons surtout rattacher ce type de situation à la famille des situations de formulation autour de reproductions de figures que nous évoquons ici. Retenons tout de même que les enjeux de formulation portent ici sur la désignation des formes. Il s'agit de construire, utiliser, éprouver un vocabulaire qui permette de désigner sans ambiguïté les formes (2D) identifiées dans l'analyse des dessins et nécessaires à leur reproduction.

En fin de cycle 1 et début de cycle 2, des contraintes langagières imposées par l'enseignant lorsque les élèves viennent commander des formes pour reproduire un assemblage de formes à côté du modèle peuvent par ailleurs amener les élèves à distinguer surfaces et contours. Dans certaines classes de Grande Section et de CP d'Auvergne, les enseignants formulent par exemple une exigence sur la forme de la commande, demandant aux élèves de préciser : la forme souhaitée (gabarits-surface) et le nom de la forme que l'élève souhaite tracer. S'engage alors un travail extrêmement riche, qui amène les élèves à prendre en compte explicitement deux objets différents : la surface et son contour et pose la question de la désignation de ces deux objets. Si surfaces et contours sont désignés par le même mot dans le cas des carrés, des rectangles ou encore des triangles, nous disposons de deux mots différents pour désigner la surface et le contour d'un « rond » : le disque et le cercle.

1.2 Analyse d'une forme complexe en termes de surfaces superposées et représentation des relations ces sous-éléments 2D, formulation écrite

Une autre variante de situation de formulation, en appui sur la reproduction de figures complexes, consiste à engager les élèves dans une tâche de reproduction de figures, à l'aide de gabarits, puis à leur demander de produire un dessin qui permette à un élève n'ayant pas vu l'assemblage réalisé de le reproduire, ou de le reconnaître parmi un lot d'assemblages.

Dans l'exemple qui suit, extrait d'un travail mené en fin de cycle 1 et début de cycle 2, les élèves ont dans un premier temps à reproduire une forme sur le modèle à l'aide de gabarits. La forme et les gabarits donnés sont choisis de façon à amener les élèves à une décomposition / recomposition sous forme d'assemblage par superposition. Dans le prolongement du travail effectué en amont de cette séance, cette activité vise à faire acquérir aux élèves une mobilité de regard sur les dessins et la capacité à identifier des implicites et des prolongements de bords possibles. La figure 13 présente deux exemples de formes données et d'assemblages produits.

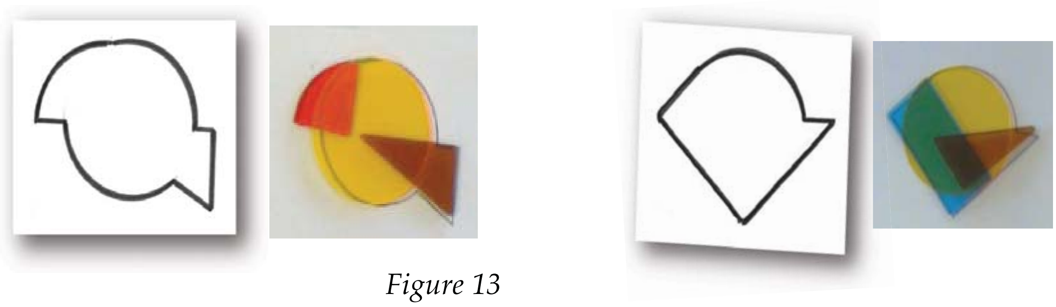


Figure 13

La seconde étape du travail consiste pour les élèves à produire un message écrit (sous forme de dessin) qui doit permettre à un autre élève de refaire l'assemblage produit, sans avoir un accès direct à cet assemblage. Les élèves ont alors très majoritairement utilisé les gabarits comme instruments de tracés de contours. Puis s'est posée la question de la manière de permettre aux élèves d'identifier les formes utilisées. La figure 14 présente des dessins réalisés.

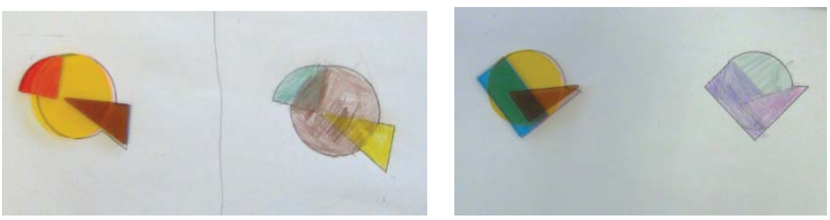


Figure 14

Les enjeux de formulation sont ici bien différents de ceux de la situation précédente. Il ne s'agit plus de construire et faire fonctionner en situation un vocabulaire partagé, mais de trouver un langage, écrit, permettant de rendre compte non seulement de la nature des formes en jeu mais aussi leurs positions relatives. Les élèves ont par exemple utilisé ici les gabarits comme instruments de tracé de contours puis ont dû trouver un moyen de distinguer, par un code graphique (la couleur), la juxtaposition ou la superposition des formes. Au cours de la phase de validation, des connaissances portant sur le nom des formes et à leurs positions relatives peuvent être verbalisées.

1.3 Déconstruction dimensionnelle d'une figure complexe et formulation d'une analyse géométrique de figures, formulation écrite

La dernière situation de formulation présentée vise à articuler l'analyse perceptive et instrumentée des dessins, dans le registre graphique, avec l'analyse discursive des figures. La situation générique est alors proche des situations d'émetteur –récepteur bien connues en formation des enseignants, mais nous l'intégrons ici dans une progression plus globale, prenant appui sur le travail préalable autour de reproductions de figures présentés précédemment. Dans ces situations, il s'agit pour les élèves de reproduire une figure (à partir d'une amorce ou non) puis de rédiger un message permettant à quelqu'un n'ayant pas vu le dessin modèle de construire la figure (à partir de la même amorce, à une échelle et dans une orientation différente). Nous retrouvons ici les objectifs de la situation de formulation précédente, mais la formulation visée est ici langagière, et nous avons fait le choix d'une formulation écrite.

Voici un exemple de mise en œuvre d'une telle situation dans une classe de CE2-CM1 d'Auvergne[12], proposée dans prolongement du travail amorcé par la situation présentée en partie II.2 de ce texte. Amenant à reproduire les demi-disques de la rosace à l'aide du compas, cette situation avait notamment permis aux élèves de voir le cercle comme une ligne située à équidistance d'un point, son centre. En appui sur la verbalisation des procédures de reproduction de la figure, l'enseignante avait institutionnalisé deux caractérisations du cercle, en ces termes :

- *Le cercle est le contour d'un disque*
- *Le cercle est une ligne qui est toujours à la même distance d'un point, appelé le centre du cercle. Cette distance s'appelle le rayon du cercle.*

  Attention : le mot « rayon » désigne à la fois cette distance et les segments joignant le centre et le cercle.

Comme évoqué précédemment, l'institutionnalisation permise par un travail dans le langage autour de la verbalisation des procédures instrumentées de reproduction de figures porte essentiellement sur le vocabulaire permettant de désigner le disque, le cercle, ses sous-éléments et une caractérisation du cercle via les relations entre ces objets (de dimensions 2, 1 et 0).

La suite du travail mené avec les élèves vise la construction d'un langage géométrique susceptible de rendre compte de l'analyse géométrique de figures contenant des cercles ou parties de cercles. Il s'agit de proposer des situations de formulation rendant nécessaire la désignation à la fois de sous-éléments de la figure, de dimensions 2, 1 et 0 mais aussi la caractérisation de positions relatives entre ces sous-éléments et la caractérisation de cercles ou parties de cercle par un centre et un rayon (ou un point passant par). Voici un exemple de telles situations proposées aux élèves dans la perspective de ce travail. Précisons qu'il s'agissait pour nous d'une première situation de formulation, proposant une figure supposée simple. À l'instar de la situation de la rosace (2.3), un groupe d'élèves dispose d'une fiche contenant un dessin modèle et une amorce (figure 15).

---

[12] Classe de Valérie Maillot, école Paul Lapie, Chamalières (63)

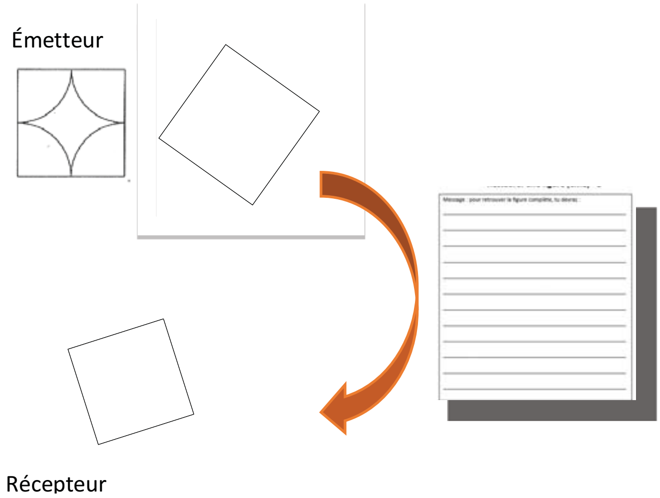


Figure 15

Ils n'ont à leur disposition qu'un compas et un morceau de papier (pliable). Leur première tâche consiste à reproduire la figure à partir de l'amorce donnée. Notons que l'amorce choisie impose une reproduction à une échelle et selon une orientation différente du dessin modèle. Le groupe a ensuite pour mission d'écrire un message permettant à un autre groupe de reproduire à son tour la figure modèle à partir uniquement d'une amorce de même nature (mais à une échelle et dans une orientation différente). Le message ne doit pas faire mention d'instrument et ne peut contenir de dessin. Après échange des messages produits, les élèves (ou groupe d'élèves) récepteurs complètent une amorce semblable à celle des émetteurs (à échelle et orientation différente) à l'aide des messages.

Dans une phase de validation, collective, l'enseignant affiche au tableau les dessins-modèles. En appui sur la comparaison des figures produites avec ces figures modèles mais aussi sur les commentaires des récepteurs à propos des messages, s'opère alors un travail, dans le langage, autour des messages produits : informations nécessaires pour retrouver sans ambiguïté la figure modèle, ordre de la description.

Pour cette figure, le type de message attendu est le suivant :

Construire quatre quarts de cercle à l'intérieur du carré. Les centres de ces quarts de cercle sont les sommets du carré. Leur rayon est égal à la moitié de la longueur des côtés du carré.

Sur cet exemple relativement simple, nous pouvons d'ores et déjà pointer les opérations de désignation nécessaires à la rédaction de ce message :

- Désigner des sous-éléments de la figure de dimension 2, 1 ou 0 (carré, sommets, cercle, côtés, milieu, centre)
- Expliciter des relations entre ces objets via la capacité de désignations multiples d'un même objet : le milieu d'un côté du carré est aussi centre d'un demi-cercle, les sommets du carré sont aussi centres des quarts de cercle…mais aussi caractériser les demi et quarts de cercles par leur centre et leur rayon

Cette situation prolonge ainsi l'activité de reproduction instrumentée de dessins en mettant en scène un travail de concordance de l'analyse géométrique de la figure dans les registres graphique et langagier.

L'expérimentation de ce type de situation en classe révèle à la fois la richesse et la difficulté de la mise en œuvre de ces situations. Malgré le travail important mené autour de la reproduction de figures, le travail dans le langage engagé autour du traitement instrumenté des dessins et l'institutionnalisation de caractérisations du cercle, les premiers messages produits par les élèves sont majoritairement très lacunaires, comme en témoigne l'exemple (figure 16).

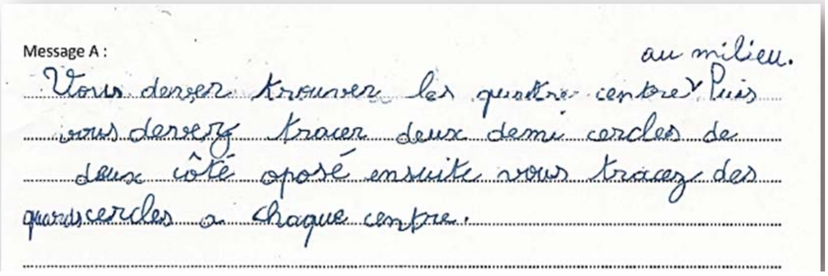

Message A :
Vous devez trouver les quatre centre au milieu. Puis vous devez tracer deux demi cercles de deux côté oposé ensuite vous tracez des quarts cercles a chaque centre.

Figure 16

Cette situation rend nécessaire un langage qui permet non plus de décrire la figure à reproduire mais de la définir. Ceci représente bien sûr toutefois un saut cognitif important pour les élèves et ce travail, pour être mené à bien, nécessite l'articulation de telles situations de formulation avec des situations de validation. Nous présentons, très succinctement ici, un exemple de telle situation.

2 Situations de validation autour de la reproduction de figures

Les situations de validation envisagées visent à dévoluer aux élèves la question la validité de l'analyse géométrique formulée, et à engager un travail autour de son caractère nécessaire et suffisant. Voici un exemple de situation mise en œuvre dans le prolongement de la situation de formulation présentée dans le paragraphe précédent.

La première étape consiste pour les élèves à restaurer une figure à partir d'un message fourni par l'enseignant et d'une amorce donnée. Le message, volontairement lacunaire, a été élaboré par l'enseignante sur le modèle des messages incomplets produits par les élèves dans la situation de formulation précédente. Dans une deuxième étape, l'enseignante organise une mise en commun des dessins produits, et une mise en regard de ces productions avec le dessin modèle attendu.

S'engage alors, dans une troisième étape, un travail autour du message, vers la formulation propriétés de la figure et relations entre des sous-éléments nécessaires à une description définitoire de la figure.

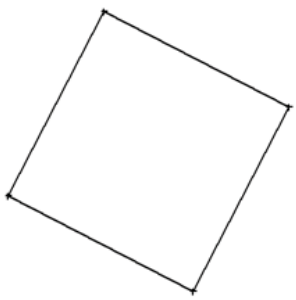
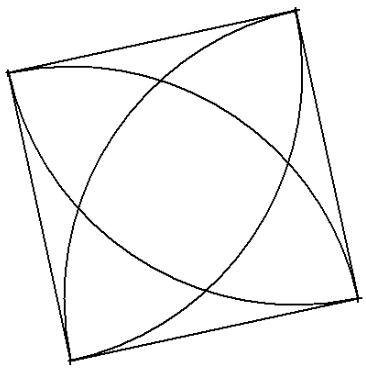
Etape 1	Etape 2	Etape 3
Amorce  Message : *Trace quatre quarts de cercle et c'est fini !* Commentaires :	 n modèle	Travail sur le texte, en appui sur les productions et commentaires des élèves Commentaires : Il manque les rayons des quart on ne s'est pas où on doit placée le quart sur les sommet au milieu. Encore endehord de la figure

Figure 17

Dans les situations de reproduction de figures présentées précédemment, le dessin est considéré comme représentation principale, autosuffisante de la figure : l'analyse langagière développée dans les phases de verbalisation remplit une fonction de description. Dans les situations de formulation comme celles décrites ci-dessus, *l'analyse langagière est considérée comme représentation principale, autosuffisante de la figure* (Duval, 2005, p.34): le dessin à une fonction d'illustration comme exemple ou contre-exemple. S'opère alors un nécessaire renversement du statut des énoncés produits sur le dessin : d'une description pragmatique de la figure, à une description définitoire de celle-ci. Ce travail nous semble ainsi extrêmement riche, participant d'un basculement dans l'interprétation du dessin et de l'objet de travail, du dessin à la figure. Nous entrevoyons là des pistes de réflexion vers un travail autour de la distinction entre dessins et figures, en appui sur l'articulation entre traitement instrumenté des dessins, dans le registre graphique, et traitement des dessins dans le registre langagier.

V - CONCLUSION

À travers ce texte, reprenant notre exposé lors de ce colloque, nous souhaitions rendre compte et articuler des recherches développées en France autour de l'enseignement de la géométrie ces quinze dernières années. Nous espérons avoir mis en évidence à la fois la forte cohérence et la complémentarité des approches sémiotiques proposées par ces recherches. Faisant de la construction d'une interprétation géométrique des dessins un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie plane à l'école, nous avons proposé des pistes explorant les potentialités d'une articulation entre construction d'un rapport géométrique aux dessins et travail visant l'évolution de modalités de traitements instrumentés et langagiers de ces dessins.

Les recherches que nous menons, en collaboration étroites avec des équipes d'enseignants, sont avant tout compréhensives. Elles nous livrent cependant des outils pour la formation des enseignants en didactique de la géométrie.

Prendre conscience de la spécificité que représente une interprétation géométrique des dessins et penser l'apprentissage de la géométrie comme la construction progressive d'un rapport géométrique aide en premier lieu à cerner des enjeux possibles de l'enseignement de la géométrie à l'école. Cela permet de comprendre les implicites des nouveaux programmes de 2015 et aide à penser des programmations et progressions possibles, de la maternelle au début du collège. La considération des liens étroits qu'entretiennent interprétation et traitements instrumentés des dessins permet ensuite de mieux comprendre les potentialités de situations de reproduction de figures, le rôle central des instruments et les jeux de variables possibles autour de ces situations. Enfin, un appui sur ces recherches nous permet d'attirer l'attention des enseignants sur le rôle crucial d'un travail dans et sur le langage, situé, dans les processus d'apprentissage en géométrie. Il nous permet d'une part un travail d'anticipation de phases de verbalisation lors de la mise en œuvre de situations de reproduction de figures en classe. Il nous permet également d'envisager, avec les enseignants, l'insertion de situations de reproduction de figures dans des progressions plus globales articulant situations d'action, de formulation et de validation, de la maternelle au cycle 3. Nous espérons ainsi suggérer des pistes vers de possibles éléments de formation visant à outiller les enseignants pour le choix et l'analyse de problèmes riches pour les classes.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. (1989) La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. *Actes de la 13ème conférence Psychology of Mathematics Education,* **I**, 85-92.

ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **3.2**, 5-64.

BALACHEFF N., SOURY-LAVERGNE S. (1996) Explication et préceptorat... Baron M. (ed.) *Explication et EIAO Rap. LAFORIA,* **96/33**, 37-50. Paris: Uni. Blaise Pascal

BAKTHINE M. (1984) *Esthétique de la création verbale.* Paris : Gallimard.

BARRERA CURIN I. R., BULF C., VENANT F. (2016) Didactique, Sémantique et métaphores : analyses de langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 39-78.

BARRIER T., MATHE A.C. (éds) (2014) *Langage apprentissage et enseignement des mathématiques*, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N,* **93**, 13-37.

BERNIE J.P (2002) L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de Pédagogie,* **141**, 77-88.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**, 39-56.

BULF C., CELI V. (2015) Une étude diachronique des problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3*, Grand N,* **96**, 5-33.

BULF C., CELI V. (2016) Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas, *Grand N*, **97**, 21-58.

BULF C., MATHE A.C., MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, **54**, 29-48.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA H. (1997) *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, **17**, 121-138.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang, Bern.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5-53.

DUVAL, R., GODIN, M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. (2013) Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. *Note pour l'Habilitation à Diriger des Recherches*. Université Paris Diderot.

JAUBERT M, REBIERE M. (2012) Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative, *forumlecture.ch, plate-forme internet sur la littératie*, http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, **79,** 33-60.

LABORDE C & CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14 (1)**, 165-210.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2015) Programmes d'enseignement de l'école, *BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.*

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.J. (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM*, Nantes 2013.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. *La construction des inégalités scolaires* (dir. J.-Y Rochex et J. Crinon), 19-32.

MATHE A.C & MITHALAL J. (*à paraître*) L'usage des dessins en géométrie, quelques enjeux pour l'enseignement, *Actes de la XIXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Paris 2017.

OFFRE, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J., VERBAERE, O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PARSYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse. Paris : Université Paris-7.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* **222**, 26-36.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C., LECLERCQ, R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90**, 7-41.

EXPLORER L'APPORT DES GESTES DANS LES PROCESSUS D'ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE DANS UNE PERSPECTIVE SÉMIOTIQUE

Cristina SABENA
Professeur associé en didactique des mathématiques
Département de philosophie et sciences de l'éducation, Universita di Torino (Italie)
cristina.sabena@unito.it

Résumé
L'intérêt pour le rôle des gestes dans les activités mathématiques et dans l'apprentissage des mathématiques se situe dans le thème plus large de la multimodalité de l'apprentissage, qui considère le rôle du corps et de l'activité avec signes et instruments dans la formation de la pensée. La perspective multimodale adoptée est intégrée dans une approche sémiotique. Cette approche considère une notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978) et elle encadre les signes dans un modèle systémique et dynamique : le modèle du « semiotic bundle » (« faisceau sémiotique »). Dans ce cadre, cette présentation[1] se focalise sur le rôle des gestes dans leur interaction avec les autres signes (le discours, en particulier) et étudie le support qu'ils peuvent offrir aux processus d'argumentation mathématique. Une étude de cas à l'école primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique fournit les données pour montrer que les gestes peuvent soutenir les élèves dans le développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité. À partir de là, des implications pratiques possibles pour les enseignants de mathématiques sont proposées.

I - LA MULTIMODALITE ET SES RACINES AU SEIN ET EN DEHORS DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Les origines de l'attention portée à la multimodalité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peuvent se retrouver dans d'importants travaux de recherche en didactique des mathématiques et pas seulement. Spécifiquement, ces travaux ont porté l'attention sur les processus d'apprentissage et d'enseignement ainsi que sur la nature de ces processus.

Dans le domaine de la didactique des mathématiques, l'attention portée aux processus a émergé dans les années 1990. J'aime, à ce propos, citer Hans Freudenthal dans ses conférences de Chine (China Lectures), là où il attire l'attention sur les processus au cœur de la recherche en didactique des mathématiques :

> "…the use and attention to processes is a didactical principle." [...l'utilisation et l'attention aux processus est un principe didactique]

À partir de cette période, beaucoup de travaux ont visé les processus de conceptualisation, d'apprentissage, de résolution problèmes, etc. des élèves de différents niveaux scolaires, en se focalisant sur les pratiques discursives et sur les transformations entre différents registres sémiotiques, oral ou écrit (Duval, 1995).

Mais, si l'on considère la phénoménologie des processus d'apprentissage dans la classe de mathématiques, on voit une variété d'actions et de productions activées par les élèves et par l'enseignant en utilisant simultanément des ressources différentes : bien sûr les mots (prononcés ou écrits) et les représentations écrites, mais aussi des formes d'expression extra-linguistiques (gestes, regards, ...) et l'utilisation de différents outils. En effet, au cours des dix dernières années, dans la recherche

[1] Une version de ce travail a été présentée dans une *Invited* Lecture à ICME13 à Hambourg, en juillet 2016. Les actes, en anglais, seront bientôt publiés.

internationale en didactique des mathématiques, plusieurs travaux soulignent l'importance et la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives, dans les processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques et plus généralement dans la pensée mathématique (Radford, Edwards & Arzarello, 2009). L'hypothèse de travail qui unit ces travaux est que ce type de ressources joue un rôle important non seulement dans la communication mais aussi dans les processus cognitifs, qui sous-tendent la production de la signification mathématique.

L'attention portée à la multimodalité provient cependant de travaux menés en dehors de la didactique des mathématiques, en particulier dans les domaines de la psychologie, de la psycholinguistique et des neurosciences ainsi que de travaux en sciences de la communication.

Dans les sciences cognitives, l'*embodied cognition* (« la cognition incarnée ») est une perspective qui attribue au corps un rôle central dans la formation de l'esprit. Lors du passage au nouveau millénaire, en 2000, l'ouvrage provocateur « Where Mathematics Comes From » de George Lakoff et Rafael Núñez a souligné le rôle crucial des aspects perceptuels et matériels dans la formation de concepts abstraits, y compris les concepts mathématiques. Ce nouveau point de vue a mis l'accent sur les fonctions sensorielles et motrices ainsi que sur leur importance pour la réussite de l'interaction avec l'environnement. En critiquant l'idéalisme platonicien et le dualisme cartésien entre le corps et l'esprit, Lakoff et Núñez (2000) préconisent que tous les types d'idées, y compris les idées mathématiques les plus sophistiquées, sont fondées sur nos expériences corporelles et se développent à travers des mécanismes cognitifs métaphoriques.

Cela a également ouvert un grand débat sur l'éducation mathématique au cours de ces années et a suscité une réflexion sur les origines des idées mathématiques dans l'homme, et (même) après ce déclencheur, plusieurs recherches ont souligné le rôle des expériences corporelles et kinesthésiques dans l'apprentissage des mathématiques (Arzarello & Robutti, 2008; de Freitas & Sinclair, 2014; Nemirovsky 2003; Radford et al., 2007; Roth, 2009; pour une vue d'ensemble voir Gerofsky, 2015).

L'idée que le corps joue un rôle dans la formation de la pensée n'est pas complètement nouvelle : pour cela, il suffit de relire les travaux de Piaget, Vygotsky, Montessori en psychologie et les perspectives phénoménologiques de Husserl et Merleau-Ponty. Quoi de nouveau dans l'*embodiment* ? Surement le rôle assigné aux métaphores en tant que les principaux mécanismes cognitifs pour l'abstraction. L'exemple classique est celui du temps conceptualisé comme espace (quand on dit « Noël approche », on parle en termes spatiaux d'un objet temporel) ou, en mathématiques, les ensembles comme des contenants (« l'élément est dans l'ensemble », on parle d'objets immatériels en termes d'objets matériels).

Plus récemment, la perspective de l'*embodiment* semble être confirmée par les résultats neuroscientifiques portant sur les « neurones miroirs » et sur les « neurones multimodaux » qui s'activent lorsque le sujet accomplit une action, lorsqu'il observe quelqu'un d'autre faire la même action, ainsi que lorsqu'il imagine cette action (Gallese et Lakoff, 2005). Sur la base de ces résultats, Gallese et Lakoff (*ib.*) offrent un nouvel apport théorique sur le fonctionnement du cerveau, selon lequel « action et perception s'intègrent au niveau du système sensori-moteur et non pas par le biais d'aires d'association supérieure » (*ib.*, p. 459). En particulier, un tel résultat apparaîtrait comme crucial non seulement pour contrôler le mouvement mais aussi pour planifier les actions, une activité typique de ce qui est généralement conçu comme « penser ».

Les termes 'multimodal' et 'multimodalité' reviennent alors à indiquer une caractéristique de la cognition humaine opposée à la 'modularité'. D'autre part, dans le champ de la communication le terme « multimodal » est utilisé en référence à des modalités multiples que nous avons pour communiquer et exprimer des significations auprès de nos interlocuteurs : mots, sons, images, etc. (Kress, 2004). De nombreuses études sur le rôle des gestes dans la communication et la cognition suggèrent une sorte de relation entre les différentes modalités. Par exemple, selon Calbris (2011) :

> One uses parallel sensory pathways, audio-oral and visuo-gestural, which interact in multimodal communication, that is, the ensemble of spoken linguistic, prosodic, intonational, gestural, postural, and facial activity that participants engage in when they 'talk'.

Ces potentialités communicatives attirent une attention croissante grâce à la diffusion de nouvelles potentialités technologiques, qui développent constamment de nouvelles possibilités d'interaction à travers nos corps (par exemple, les appareils touch-screen).

À l'instar de Radford, Edwards et Arzarello (2009), je considère la multimodalité comme se référant à l'importance et à la coexistence mutuelle d'une variété de modalités ou de ressources cognitives, matérielles et perceptives dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et plus généralement dans la construction du sens des concepts mathématiques :

> Ces ressources ou modalités incluent à la fois la communication symbolique orale et écrite ainsi que le dessin, le geste, la manipulation d'artefacts matériels et numériques, et plusieurs types de mouvements du corps. (*ib.*, pp. 91-92)

D'autre part, l'intérêt pour les aspects *embodied* et multimodaux nécessite la prise en compte des aspects sociaux, historiques et culturels dans la genèse des concepts mathématiques, qui ont été négligés par les perspectives qui réfèrent à l'*embodiment* (pour une critique, cf. Schiralli et Sinclair, 2003 ; Radford et al., 2005). Les mathématiques sont en effet « inséparables des instruments symboliques » et l'acte de savoir est un phénomène « culturellement modelé » (Sfard et McClain, 2002, p. 156) dans lequel l'utilisation des instruments et des signes joue un rôle important.

Cette limite principale de l'*embodiment* peut être surmontée en adoptant une approche sémiotique dans laquelle les dimensions sociales et culturelles sont considérées, et notamment je vais m'appuyer sur l'idée vygotskienne de signe, présentée dans la section suivante.

II - UNE APPROCHE SEMIOTIQUE POUR LA MULTIMODALITE

Dans la perspective vygotskienne sur le développement cognitif humain (ou développement culturel), les signes jouent un rôle crucial (Vygotsky, 1931-1978). Un tel processus général, qui tient compte de la formation de la conscience humaine par l'individualisation progressive des fonctions sociales inhérentes, s'appelle l'internalisation. En particulier, selon la loi génétique du développement culturel, il y a un passage des fonctions interpsychiques, qui sont partagées au niveau social, aux intrapsychiques, qui se rapportent à la personne au niveau individuel.

Grâce à leur signification sociale, les signes servent à l'individu pour exercer un contrôle volontaire sur son comportement, comme les signaux routiers signalent aux individus les événements permettant de régler leur conduite. Par analogie avec les outils dans le milieu du travail, les signes fonctionnent, sur le plan psychologique individuel, comme « moyens stimulants » qui représentent des caractéristiques ou des aspects de l'expérience socialement partagée et pilotent les processus mentaux de l'individu :

> L'invention et l'utilisation des signes comme moyens auxiliaires pour résoudre un problème psychologique (se rappeler, comparer quelque chose, rendre compte, choisir etc.) est analogue à l'invention des outils d'un point de vue psychologique. Les signes agissent comme instruments d'activité psychologique de la même façon que le rôle d'un outil de travail (*ib.*, p. 52).

Dans cette perspective, les signes sont considérés dans leur rôle fonctionnel en tant qu'outils psychologiques, permettant au sujet de réfléchir et planifier ses actions, et en tant que médiateurs culturels (Radford & Sabena, 2015).

Cela est une idée très générale du signe – qui diffère des cadres sémiotiques classiques, souvent adoptée dans la recherche en didactique des mathématiques, comme la notion de registre de représentation sémiotique de Duval (1995) – puisqu'elle ne pose pas de prescriptions sur ce que peut être un signe et sur les caractéristiques qu'il peut avoir : les gestes peuvent alors être considérés en tant que signes, comme Vygotsky (1931-1978) même l'a souligné dans son célèbre exemple du geste de *pointage* pour illustrer le processus d'internalisation à partir de la signification qu'une mère assigne au mouvement de la main de son enfant.

En prenant l'idée de signe vygotskienne, dans le but d'inclure des gestes ainsi que d'autres registres plus classiques, je me sers de l'outil « semiotic bundle » ou « faisceau sémiotique » (Arzarello, 2006 ; Arzarello et al., 2009 ; Sabena et al., 2012) comme un système composé de signes (ou ressources sémiotiques) différents et de leur relations mutuelles, qui sont produits par les élèves et éventuellement par l'enseignant durant l'activité mathématique : mots (prononcés ou écrits), schémas écrits, gestes, outils, etc. De façon similaire à l'idée de « système sémiotique », au sens de Radford (2002), le faisceau sémiotique inclut à la fois les registres classiques avec des règles de production et de transformation précises et codifiables (Duval, 2006), et les registres *embodied*, qui nous permettent de rendre compte en termes sémiotiques des processus multimodaux se produisant dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Un exemple peut être constitué par les mots, les gestes et les figures dessinées par les élèves pendant la résolution d'un problème géométrique.

Le faisceau sémiotique est caractérisé par deux aspects-clés :

- un caractère systémique, révélé par une analyse synchronique des relations entre les différents types de signes à un moment donné (comme une sorte de « photo sémiotique ») ;
- une nature dynamique, révélée par une analyse diachronique se focalisant sur les évolutions des signes et de leurs transformations dans le temps (une sorte de « film sémiotique »).

Les analyses synchroniques et diachroniques—qui ne sont distinguées que pour l'analyse—sont effectuées en regardant en détail les vidéos des activités de classe où les élèves sont engagés, avec leurs transcriptions multimodales, c'est-à-dire des transcriptions qui incluent non seulement les mots mais aussi l'enregistrement des gestes et d'autres types de signes.

Dans cette analyse, les gestes se manifestent de façon évidente comme des ressources multimodales présentes dans les processus d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. La section suivante est consacrée à l'approfondissement de cette question d'un point de vue théorique.

III - LES GESTES COMME RESSOURCES MULTIMODALES

Le fait d'inclure les aspects *embodied* dans l'analyse de la pensée et de l'apprentissage mathématique a fait émerger l'étude des gestes comme une composante cognitive et communicative importante.

Les gestes accompagnant le discours sont un phénomène commun, comme le travail précurseur de Kendon (1980) l'a souligné. En linguistique, pour la première fois, il a commencé à considérer les gestes comme un aspect constitutif de la communication, dans un contraste marquant avec les perspectives antérieures, qui les considéraient comme de simples ornements du discours, de rhétorique ou comme des moyens de décharge d'énergie excessive. La recherche s'est depuis intéressée à l'étude des gestes spontanés, qui sont habituellement faits dans un espace devant soi, nommé l'« espace gestuel », avec des mouvements souvent symétriques des mains, qui partent d'un état de repos, et reviennent à un état de repos. Plusieurs études psychologiques et psycholinguistiques ont mis en avant que le discours et les gestes spontanés — que l'on appellera simplement gestes dans la suite — sont étroitement liés et que faire des gestes est important non seulement dans les processus de communication mais aussi dans les processus liés à la pensée (McNeill, 1992, 2005 ; Goldin-Meadow, 2003).

Le discours et les gestes sont étroitement liés à plusieurs égards (McNeill, 1992) car ils sont temporellement simultanés :

- dans les aspects phonologiques (la phase centrale du geste coïncide avec le sommet de la phrase phonologique),
- dans les aspects sémantiques (au niveau de la signification),
- dans les aspects pragmatiques (leur fonction dans le discours).

Même dans le développement de l'enfant, le geste et le discours évoluent ensemble. Au niveau cognitif, les experts identifient la fonction importante d'alléger la mémoire de travail, en donnant la possibilité de mieux réorganiser les ressources cognitives (Goldin-Meadow et al., 2001).

Si déjà Vygotsky (1934-1986, p. 218) a souligné le rôle constitutif du langage dans la pensée, en affirmant qu'« une pensée n'est pas simplement exprimée par les mots ; elle naît avec eux », en psychologie, plusieurs travaux sur les gestes visent à élargir ce rôle constitutif du langage à l'unité discours-gestes. Citant McNeill (1992), on peut dire que « les gestes non seulement reflètent la pensée mais ont un impact sur la pensée. Les gestes, avec le langage, aident à constituer la pensée" (p. 242, souligné comme dans l'original). C'est dans cette hypothèse vygotskienne que je considère le rôle des gestes dans les activités mathématiques.

Ces interprétations cognitives offrent les éléments pouvant expliquer, par exemple, pourquoi nous faisons des gestes durant les conversations téléphoniques (Ruiter, 1995) ; pourquoi, lorsqu'il nous est empêché de faire des gestes, notre discours devient moins fluide ; ou pourquoi même les aveugles de naissance utilisent les gestes pendant qu'ils parlent. Ces phénomènes ne peuvent pas être expliqués seulement en termes de dimension communicative interpersonnelle : les gestes assument ainsi un rôle constitutif dans les processus de la pensée.

Les travaux sur les gestes ont fourni d'autres outils d'analyse, notamment, McNeill (1992) identifie quatre types de gestes :

- le geste iconique, s'il entretient une relation de ressemblance avec le contenu sémantique du discours (par exemple, incliner deux mains pour indiquer un toit) ;
- le geste métaphorique, similaire au geste iconique, mais avec un contenu visuel présentant une idée abstraite qui n'a pas de forme physique (un exemple classique est la main dans l'acte de tenir un objet, lorsqu'on fait référence à l'idée d'un « sujet donné » dans le discours) ;
- le geste déictique, s'il indique un objet, un événement, ou un lieu dans le monde concret ;
- le geste qui contribue à souligner des parties du discours (en anglais, 'beats').

Les gestes déictiques sont effectués généralement avec l'index levé (parfois avec des objets tenus dans la main, comme un stylo) et sont aussi appelés *pointage*. Apparemment simple, montrer du doigt est au contraire un acte complexe. En plus des *pointages* concrets (comme indiquer un livre sur la table), la recherche a identifié aussi des *pointages* abstraits, quand la main ou les doigts sont levés dans l'espace comme s'ils indiquaient quelque chose, alors que l'espace semble être vide. Selon l'interprétation de McNeill (ib., p. 173) :

> L'orateur semble montrer quelque chose du doigt dans l'espace vide, mais en effet l'espace n'est pas vide ; il est plein de signification conceptuelle. Cette déixis abstraite implique une utilisation métaphorique de l'espace dans lequel des formes spatiales sont données aux concepts.

Les types de gestes identifiés par McNeill (ib.) ne prennent pas en compte leurs caractéristiques physiques mais considèrent les relations avec l'information contextuelle : cela implique que le processus interprétatif nécessite la prise en compte du contexte plus large où le geste est effectué. En outre, il est important de souligner qu'un même geste peut être à la fois de diverses natures.

De plus, les gestes sont parfois caractérisés par la répétition : des caractéristiques distinctes d'un geste se reproduisent au cours du discours (pas forcement des gestes consécutifs), et la récurrence peut être signalée par la posture de la main, sa position, son orientation, son mouvement, son rythme, etc. (McNeill et al., 2001). Ce phénomène est appelé *catchment* et peut être relié à la cohésion du discours :

> En détectant les *catchments* créés par un orateur donné, nous pouvons voir ce que cet orateur est en train de combiner en unités plus larges du discours – quelles significations sont considérées comme similaires ou reliées et groupées ensemble, et quelles significations sont mises dans des *catchments* différents ou isolés, et sont ainsi vus pas l'orateur comme ayant des significations distinctes voire moins reliées. (ib., p. 10)

Dans le modèle du faisceau sémiotique, les *catchments* peuvent être identifiés grâce à une analyse diachronique : ils peuvent avoir une grande importance car ils nous renseigneraient sur les significations sous-jacentes dans le discours et dans ses dynamiques. Par exemple, dans le contexte de classe, étudier les *catchments* pourrait nous fournir des indices sur l'évolution des significations chez les élèves. De plus, les *catchments* peuvent contribuer à l'organisation d'un argument au niveau logique, comme identifiée dans des travaux précédents (Arzarello et Sabena, 2014).

Dans la suite, la loupe du faisceau sémiotique est appliquée à un ensemble de données empiriques portant sur les processus d'argumentations mathématiques, dans le but de répondre à la question suivante :

Quelle contribution spécifique peuvent donner les gestes, lorsqu'ils sont considérés comme des signes dans des faisceaux sémiotiques, pour les processus d'argumentation ?

L'analyse très fine, présentée ci-après, sera centrée sur une étude de cas. Le travail est fait à partir de données provenant d'enregistrements vidéos dans une classe de l'école élémentaire.

IV - UNE ETUDE DE CAS : LA COURSE A 20

L'étude de cas est centrée sur un jeu d'interaction stratégique appelé « La course à 20 » (Brousseau, 1997). Cette étude fait partie d'un projet de recherche orienté par la conception des jeux stratégiques afin de favoriser les processus de résolution de problèmes et d'argumentation, de l'école primaire à l'école secondaire.

Le jeu est joué par deux joueurs, qui cherchent à atteindre le nombre 20 en rajoutant, à tour de rôle, 1 ou 2. Précisément, le premier joueur dit 1 ou 2 ; le deuxième joueur doit rajouter 1 ou 2 au nombre précédent, et dire le résultat ; à ce moment, le premier joueur rajoute alors 1 ou 2, etc. Le joueur qui dit 20 en premier gagne le jeu. Dans la théorie des jeux, ceci est un jeu à information complète et parfaite, fondé sur des prises de décisions séquentielles. Comme le lecteur peut le vérifier, la stratégie gagnante consiste à commencer en premier et à suivre la séquence des nombres 2-5-8-11-14-17-20. Dans ce type de jeux, le joueur a besoin de trouver, *pour chaque* tour de son adversaire, le *tour correct* pour gagner le jeu. Ces processus peuvent être reliés au schéma logique de coordination d'un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel, comme dans le cas de nombreux théorèmes mathématiques.

Je vais m'appuyer sur des données provenant d'une discussion dans une classe de 4e année de l'école élémentaire (9-10 ans). Le débat démarre après des séances où les élèves ont joué le jeu en binôme en écrivant les nombres ajoutés sur des flèches qui vont de gauche à droite et les résultats sur une ligne qui va de gauche à droite (comme en Figure 1).

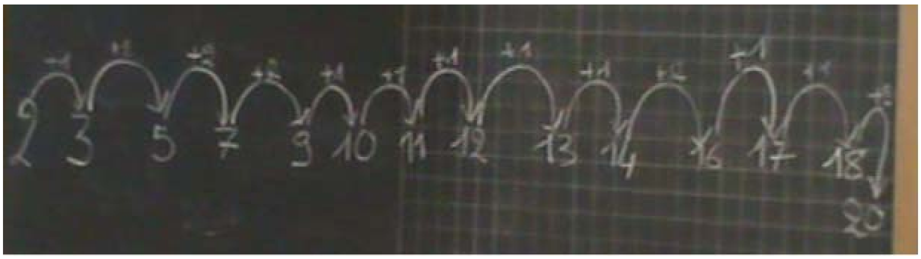


Figure 1. Modèle sémiotique introduit par l'enseignante pour jouer à la course à 20.

Ce modèle sémiotique a été introduit par l'enseignante pour permettre aux élèves de garder trace à la fois des nombres gagnants et des nombres ajoutés. Cette trace se voulait être un support pour les élèves dans leur recherche de régularités qui sont à la base de la stratégie gagnante.

La discussion est organisée à la suite d'un tournoi de classe, dans lequel un représentant de chaque équipe a joué le match au tableau (le dernier match est montré en Figure 1). L'enseignante débute une discussion en explicitant le but de *trouver une stratégie gagnante* et de *la justifier*.

Je vais me focaliser en détail sur les contributions de quelques élèves — Giulio, Eliana et Elisa – mais je vais d'abord donner quelques informations sur le contexte, pour faciliter la compréhension de l'analyse.

Au démarrage de la discussion, les nombres 14 et 17 sont identifiés immédiatement comme nombres gagnants : dans quelques cas les justifications sont fondées sur les tours possibles des deux joueurs, comme le dit Elena :

Elena : tu dois atteindre d'abord 14 et puis 17. Parce que si tu fais 14 plus 1 et tu obtiens 15 et après tu fais plus 2, et tu obtiens 17, après… tu fais plus 1 pour arriver à 18 et l'autre fait 2 et atteint 20. Tandis que si à 14 tu fais plus 2, tu arrives à 16 et l'autre fait plus 1 pour arriver à 17, l'autre 19 s'il fait plus 2, tu fais plus 1, et tu atteins 20. Donc en tout cas, de 14 à 17 tu arrives quand même à 20.

Dans d'autres cas, les élèves s'appuient sur les *observations empiriques* de ce qui est vraiment arrivé pendant le tournoi, comme Filippo :

Filippo : à mon avis selon comment j'ai joué pendant ces deux tours j'ai vu que je suis toujours arrivé sur le 14 et sur le 17. Donc, quand tu es à la fin du jeu, tu dois toujours arriver sur le 14 et sur le 17, parce que ces nombres sont les nombres chanceux qui te permettent de gagner.

Par induction à rebours, le nombre 11 commence à être identifié comme nombre gagnant et relié à 14 et à 17 :

Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17.

À ce moment, après environ 20 minutes de discussion entre élèves, Giulio propose une règle générale pour identifier tous les nombres gagnants :

Giulio : Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3 : de 20 tu enlèves 3 et tu arrives à 17 ; de 17 tu enlèves 3 et tu arrives à 14, je crois qu'un autre nombre gagnant pourrait être 11, pourrait être…8, pourrait être...5, pourrait être...2.

Avec la stratégie décrite, Giulio identifie tous les nombres gagnants à partir du résultat gagnant (20) et en procédant par des soustractions répétées, dans un processus d'induction à rebours, comme décrit dans la théorie des jeux. La stratégie est exprimée verbalement en termes généraux, sans référence à des simulations de tours, et elle est accompagnée par de nombreux gestes. Le tableau 1 présente la transcription de la partie initiale de l'affirmation de Giulio, enrichie de la composante gestuelle et de mots originaux en italien. Les mots soulignés indiquent qu'ils sont simultanés avec le geste montré et la même convention sera utilisée dans les tableaux suivants.

Quand il dit « tu enlèves toujours 3 », Giulio regarde le tableau noir, où la dernière correspondance est encore affichée, et bouge sa main de droite à gauche (du point de vue de l'élève) : ce mouvement peut être interprété comme indiquant la soustraction, en référence à la droite numérique, qui est très utilisée dans le curriculum italien. Avec cette interprétation, le geste peut être classifié comme un *geste métaphorique* indiquant la soustraction. Remarquons que, dans la version originale en italien, Giulio utilise le terme « togli », qui est employé à la fois dans le contexte de tous les jours pour dire « éliminer, enlever » et dans le contexte mathématique à l'école primaire pour indiquer « soustraire ».

Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3.	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17
Secondo me dato che i numeri vincenti si toglie sempre 3.	*Da 20*	*togli 3*	*e arrivi a 17*
a)  *La main ouverte bouge de droite à gauche*	b)  *Trois doigts levés*	c)  *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	d)  *Pointage abstrait vers le bas*

Tableau 1. Transcription multimodale de la première partie de la stratégie de Giulio

Le mouvement de la main de droite à gauche est répété quand la règle est appliquée pour identifier les nombres gagnants. D'après le tableau 1 (photos b et c) nous pouvons remarquer que lorsque Giulio dit « de 20 tu enlèves 3 », sa main bouge vers la gauche. En même temps, trois doigts sont montrés, et globalement nous retrouvons *deux références métaphoriques condensées dans un seul geste* :

- le mouvement de droite à gauche → soustraction (en référence à la ligne numérique)
- trois doigts → **nombre** 3 (en référence à la cardinalité)

Quand il complète la phrase et annonce les nombres gagnants, Giulio fait un *pointage* abstrait vers le bas, qui est simultané avec les nombres prononcés (dans le tableau 1, le cas du 17 est présenté dans la dernière colonne).

Si nous considérons la séquence dans son ensemble, nous pouvons voir que la soustraction par 3 est répétée pour obtenir 14 : cette répétition est exprimée aussi par la répétition de la même configuration gestuelle des trois doigts levés (les photos ne sont pas présentes pour manque de place). Le même geste métaphorique est donc répété dans un *catchement* exprimant que le nombre 3 est *toujours* soustrait, afin d'obtenir *tous* les nombres gagnants.

Ensuite (*Je crois qu'un autre…*), nous pouvons remarquer qu'une sorte de « *contraction sémiotique* » se produit à l'intérieur du faisceau sémiotique : le discours se réduit, mentionnant seulement les nombres gagnants, et passe à un niveau hypothétique (*cela pourrait être…*) ; et il paraît que même les gestes se réduisent dans leurs mouvements, pour terminer avec un rapide *pointage* abstrait vers le bas à gauche, en simultané avec l'annonce des nombres gagnants (8, 5, 2).

À ce point, l'enseignante demande à Giulio d'expliquer son idée. Voici ci-après la transcription verbale de l'argument de Giulio :

Enseignante : Explique bien cette idée.

Giulio : Parce que… c'est-à-dire, je sais pas, si tu arrives à 2… Je sais pas, je commence, je fais 1, non je fais 2, lui il arrive et met 1, je mets 2 et je suis arrivé à 5, que je crois être un autre nombre gagnant… oui, arrivé à 5… c'est un nombre gagnant, je crois. Après… il rajoute 2, disons, j'ajoute 1 et j'arrive à 8, qui est un autre nombre gagnant. Elle rajoute 1, j'ajoute 2 et j'arrive à…11, qui est un autre nombre gagnant. Il rajoute 2, j'ajoute 1, et j'arrive à 14, qui est un autre nombre gagnant, il rajoute 1 j'ajoute 2, nous arrivons à 17 qui est un nombre gagnant, il rajoute 1 ou 2, j'ajoute 1 ou 2 et je gagne.

La soustraction devient maintenant un mouvement en avant qui commence par le tout premier tour (numéro 2) d'un match imaginé entre lui et un autre joueur. Ce mouvement est produit par le biais d'une répétition de la même structure linguistique : « il rajoute…j'ajoute…et j'arrive à…, qui est un nombre gagnant ». Cette répétition n'est pas seulement une simple répétition de mots, mais elle est accompagnée d'une *structure de son rythmique* qui est préservée tout le long de la phrase et contribue à transmettre un caractère général à la règle détectée (de façon similaire à ce qui est discuté dans le contexte algébrique dans Radford et al. (2007).

Les gestes sont constamment présents, du premier tour simulé au dernier tour (gagnant). Le tableau 2 présente quelques photos des gestes accompagnant la toute première partie de la phrase de Giulio.

Je commence […], je fais 2	Lui, il arrive et met 1	Je mets 2	et je suis arrivé à 5
Io inizio […], faccio 2	*lui arriva lì e mette 1*	*Io metto 2*	*e sono arrivato a 5*
a)  *Deux doigts levés*	b)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*	c)  *Deux doigts levés*	d)  *La main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose*

Tableau 2. Transcription multimodale de la première partie de l'argument de Giulio.

Pendant qu'il annonce les tours d'un match fictif, Giulio fait à nouveau deux types de gestes métaphoriques. Quand il indique ses propres tours, le geste indique les nombres prononcés en levant le nombre correspondant de doigts, notamment deux doigts quand il dit « deux » (photos a et c dans le tableau 2). Lorsqu'il se réfère aux tours de l'autre joueur ou au résultat obtenu, il tient sa main ouverte vers le haut comme si elle contenait quelque chose (photos b et d dans le tableau 2) : dans ce cas la référence métaphorique est faite pour donner de la généralité aux nombres prononcés.

À un moment donné, en mentionnant un tour de l'adversaire, Giulio utilise une expression linguistique qui, en français, peut être traduite par « disons » ou « par exemple » (in italien c'est « tipo »), et qui peut être interprétée comme exprimant les germes du concept de « tout nombre ». Quand il dit « disons », l'élève effectue un geste qui consiste à faire tourner rapidement la main ouverte (tableau 3, photo a).

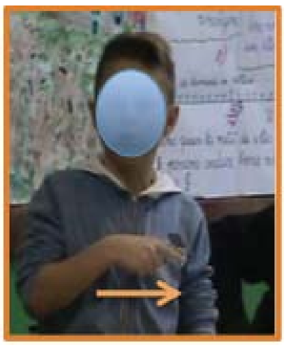
Après… il rajoute 2, disons	[…] Elle rajoute 1,	J'ajoute 2
Poi…lui aggiunge 2, tipo,	*[…] lei aggiunge 1,*	*Io aggiungo 2*
a)  *La main ouverte tourne rapidement*	b)  *Pointage abstrait vers la gauche*	c)  *Pointage abstrait vers la droite*

Tableau 3. La généricité multimodale transmise à travers le faisceau sémiotique.

Le geste est encore métaphorique et le faisceau sémiotique des mots et des gestes met en avant que le nombre 2, choisi pour indiquer le tour de l'adversaire, doit être considéré comme une possibilité parmi d'autres (tous les tours possibles) : c'est-à-dire un tour générique. Cette relation logique est en effet très délicate à gérer : l'articulation entre un quantificateur universel (pour tout tour de mon adversaire) avec un quantificateur existentiel (le tour que je vais choisir après lui). Nous remarquons que la combinaison multimodale de gestes et discours permet aux élèves de bien gérer cette relation.

À partir de là, en même temps que les tours des deux joueurs sont annoncés, des gestes de *pointage* abstrait sont effectués en *alternance spatiale* gauche-droite, ce qui indique visuellement l'alternance entre les deux joueurs dans le jeu (tableau 3, figures b et c). Cette alternance spatiale peut être interprétée comme une aide pour l'élève pour *garder le contrôle de son argument au niveau local*, c'est-à-dire pour contrôler le choix des tours et des contre-tours dans la séquence imaginée. L'alternance spatiale gestuelle est répétée plusieurs fois (*catchement*), pour tout couple de tours et contre-tours, avec le même rythme des mots qui l'accompagnent. Comme indiqué par McNeill (2005), les *catchments* gestuels donnent de la cohésion au discours. Dans ce cas, ils contribuent à *structurer l'argument entier au niveau global*.

Le modèle écrit, à travers lequel ils ont joué le jeu, a probablement aidé Giulio dans le développement de sa stratégie, en fonctionnant comme un outil intériorisé. En fait, quand il annonce la règle générale, il regarde au tableau (tableau 1, photo a), où le dernier match a été écrit (cf. Figure 1). Nous remarquons que ce match n'a pas été joué selon la stratégie de Giulio, et que, après ce moment initial, nous ne retrouvons aucune référence explicite aux matchs joués, par exemple avec des gestes de *pointage* au tableau ou à son cahier : cela peut être un autre indicateur du niveau général atteint par Giulio dans son argumentation.

Le débat se centre ensuite sur la stratégie de Giulio. Quelques élèves partagent immédiatement l'avis de Giulio et produisent leurs propres argumentations, comme Eliana :

> Eliana : Je suis d'accord avec Giulio parce que pratiquement, à chaque fois que tu dois atteindre un nombre chanceux tu dois rajouter 3, parce que d'abord tu rajoutes 1 et puis tu rajoutes 2 ou tu rajoutes 2 et puis tu rajoutes 1.

Eliana explicite que les nombres gagnants ou chanceux peuvent être atteints en *rajoutant* 3 (alors que Giulio a mentionné la soustraction par 3), et produit un argument pour cela, en faisant référence aux deux nombres 1 et 2 qui peuvent être joués dans le jeu. Quand elle dit « tu dois rajouter 3 », elle accompagne son discours avec un geste de la main droite qui tourne de gauche à droite (tableau 4, photo a), pouvant se référer à l'addition sur la droite numérique.

tu dois rajouter 3	parce que d'abord tu rajoutes 1	et puis tu rajoutes 2	ou tu rajoutes 2	et puis tu rajoutes 1
Devi aggiungere 3	*perché prima aggiungi 1*	*e poi aggiungi 2*	*o prima aggiungi 2*	*e poi aggiungi 1*
a)  *Main droite qui tourne de gauche à droite*	b)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	c)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*	d)  *Main gauche qui bouge de gauche à droite*	e)  *Main droite qui bouge de gauche à droite*

Tableau 4. L'argument d'Eliana sur la stratégie d'ajouter 3.

Eliana explique aussi d'où vient ce nombre 3, qui est la combinaison de possibles tours successifs des deux joueurs. En disant les nombres ajoutés pour composer 3, elle bouge d'abord sa main gauche de gauche à droite (photo b dans le tableau 4), puis sa main droite avec le même mouvement (photo c dans le tableau 4) ; elle mentionne les deux combinaisons possibles (1 + 2 ou 2 + 1) et répète la combinaison gestuelle dans un *catchment* (photo c-d dans le tableau 4).

Dans le cas de Giulio, nous pouvons remarquer l'alternance spatiale gauche-droite comme une référence métaphorique à l'alternance des deux joueurs, et nous pouvons remarquer un *catchment*. Mais, maintenant, à la différence de Giulio, le fait d'avoir deux joueurs en alternance est exprimé par Eliana *seulement* à travers son geste car dans son discours elle utilise toujours le pronom « tu », probablement avec un sens impersonnel.

À nouveau, nous pouvons identifier *deux composantes métaphoriques dans un seul geste* :

- mouvement de gauche à droite→ addition
- alternance spatiale → alternance des joueurs.

Immédiatement après Eliana, Elisa intervient :

Elisa : Donc en tout…si tu joues… tu rajoutes à chaque fois 3, et donc si tu peux arriver aux nombres où il y a 3… (*levant l'index et le pouce, photo a, Tab. 5)*, c'est-à-dire si… En tout ça fait 3 (*déplaçant les doigts levés de gauche à droite, photo b, Tab. 5*), parce que si tu rajoutes 1 (*déplaçant les doigts levés à sa gauche, photo c, Tab. 5*) et l'autre rajoute 2 (*déplaçant les doigts levés à sa droite, photo d, Tab. 5*), si tu rajoutes 2 et l'autre rajoute 1 (*répétant la séquence avec les doigts à sa gauche et puis à sa droite comme dans les photos c-d, Tab. 5*), en tout ça fait 3 (*bougeant à nouveau les doigts levés comme dans la photo b, Tab. 5*) et donc tu dois réussir à choisir les nombres qui sont…

Enseignante : à une distance…

Elisa : de 3.

si tu peux arriver aux nombres où il y a 3…	c'est-à-dire si… En tout ça fait 3	parce que si tu rajoutes 1	et l'autre rajoute 2
e quindi se tu riesci ad arrivare ai numeri in cui…in cui ci sono 3	*cioè se…in tutto fa 3*	*perché se tu aggiungi 1*	*e l'altro aggiunge 2*
a)  *Geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet.*	b)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé de gauche à droite*	c)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa gauche*	d)  *Geste de tenir-un-bâtonnet déplacé à sa droite*

Tableau 5. Geste condensant d'Elisa.

Elisa accompagne son discours avec un geste effectué avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet. Ce geste est effectué pour la première fois quand elle dit « il y a 3 » (photo a dans le tableau 5) et maintenu au cours de toute la phrase. Cela indique métaphoriquement une distance figée, de façon similaire à ce qui est décrit dans le contexte pré-analytique dans des études précédentes (Arzarello et al., 2009 ; Sabena, 2007 et 2008). Le mot « distance » n'est jamais prononcé (il sera prononcé immédiatement après, grâce à une suggestion de l'enseignante) : le geste complète ses mots en donnant une signification plus profonde à son discours multimodal.

Lorsqu'elle dit « en tout ça fait 3 », le geste de tenir-un-bâtonnet est déplacé de gauche à droite (photo b dans le tableau 5) : le mouvement de gauche à droite indique que la distance figée (de 3) permet de passer d'un nombre gagnant au suivant dans la séquence. L'élève porte ses yeux au tableau, où le dernier match est encore écrit, selon le modèle choisi par l'enseignante (figure 1). Dans ce modèle, les tours successifs sont écrits l'un après l'autre horizontalement. Le mouvement horizontal du geste d'Elisa pourrait être interprété dans ce milieu, en suggérant que le choix sémiotique de l'enseignante a été utile pour développer l'argumentation des élèves. En même temps, le geste pourrait se référer métaphoriquement à l'addition sur la droite numérique intériorisée. Nous retrouvons un autre exemple d'un *geste condensant des significations différentes*, à travers ses références métaphoriques et son caractère dynamique. Par le caractère condensant des gestes et dans la synergie avec le discours, les différentes significations arrivent à se connecter pour construire une partie importante de l'argument.

À travers la répétition du geste (ou *catchment*), le geste condensant se combine alors avec l'alternance spatiale se référant encore à deux joueurs (photos c et d dans le tableau 5) : le *catchment* soutient le passage d'une relation entre tours à une relation entre nombres qui peuvent justifier ces tours, et indique que cette distance ne varie pas tout le long de la séquence gagnante du jeu.

V - DISCUSSION

L'exemple présenté met en évidence que les significations mathématiques qui apparaissent dans l'enseignement et l'apprentissage sont de nature *multimodale*, ainsi que la discussion théorique proposée. Dans cette nouvelle conception, les *gestes*, la *posture* corporelle, les *actions kinesthésiques*, les *artefacts* et les *signes* en général sont considérés comme une gamme fructueuse de *ressources* à prendre en compte afin d'étudier comment les élèves apprennent et comment les enseignants enseignent. Ces ressources matérielles et sensibles ne sont pas considérées comme un simple épiphénomène de l'enseignement et de l'apprentissage : elles sont conceptualisées comme des *éléments centraux de la pensée mathématique des élèves et des enseignants*.

L'analyse présentée a également fourni un exemple d'analyse multimodale sémiotique avec l'instrument de faisceau sémiotique, avec sa notion large de signe s'appuyant sur les travaux de Vygotsky (1931-1978), et ses caractéristiques systémiques et dynamiques.

Il est intéressant de remarquer que les nouvelles technologies se sont révélées indispensables pour l'analyse des interactions entre les élèves et l'enseignant dans la classe et qu'elles ont relancé la prise en compte des aspects multimodaux dans l'apprentissage des mathématiques. Même si, au début des années 1990, une attention particulière avait été portée sur le « discours de classe » dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, l'utilisation des enregistrements vidéos a élargi la possibilité d'observer des phénomènes jusque-là inaperçus car indétectables. Les gestes et d'autres ressources *embodied* ont ainsi commencé à être considérés parmi les ressources permettant de développer la communication et la conceptualisation. Autrement dit, une forte impulsion vers de nouvelles théories a été donnée par des aspects méthodologiques, qui demandent de nouveaux outils d'analyse, comme le faisceau sémiotique.

En analysant les activités d'enseignement et d'apprentissage avec l'outil sémiotique de faisceau sémiotique, des résultats généraux et spécifiques ont été détectés. Je me suis concentrée en particulier sur le rôle des gestes dans leur interaction avec d'autres ressources sémiotiques utilisées dans la classe —le discours principalement, mais aussi les signes écrits— et j'ai abordé les processus d'argumentation des élèves du primaire dans le contexte des jeux d'interaction stratégique. À partir de l'exemple, d'abord on peut tirer quelques résultats fins sur le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves. Ensuite, j'élargis la discussion sur les implications pour les professeurs.

1 Le rôle des gestes dans les processus argumentatifs des élèves

À travers une analyse qualitative-interprétative, j'ai montré que *les gestes peuvent contribuer au développement d'argumentations qui s'appuient sur des considérations empiriques pour passer à un plan hypothétique où l'on approche la généralité*. L'étude de cas apporte un éclairage sur *comment* les gestes peuvent donner ce soutien. En particulier, j'ai identifié trois caractéristiques spécifiques :

- la *contraction sémiotique*,
- le *caractère condensant des gestes*,
- *l'utilisation de l'espace gestuel dans un sens métaphorique* combiné avec des *catchments*.

Ces aspects sont brièvement discutés par la suite, en référence à l'analyse des données présentée dans la partie précédente.

Lorsque Giulio identifie et/ou exprime (nous n'avons pas assez de renseignements pour le décider) la règle générale consistant à « enlever toujours 3 », nous remarquons que ses phrases deviennent de plus en plus courtes, et à la fin il annonce simplement les nombres gagnants, accompagnés par des gestes de *pointage* abstrait (tableau 1, figure d). Il s'agit d'une sorte de *contraction sémiotique* qui a été retrouvée même dans d'autres contextes et avec des élèves d'âges différents, tels que la généralisation de *pattern* et les représentations graphiques de fonctions (Sabena et al., 2005 ; Sabena, 2007). D'un point de vue épistémologique, la contraction sémiotique caractérise le symbolisme mathématique moderne, et d'un point de vue cognitif elle est un mécanisme précieux. Radford (2008, p. 94) relie la contraction à la focalisation de l'attention sur des éléments importants dans une certaine situation et à un niveau de conscience plus profond :

> La contraction est un mécanisme pour réduire l'attention aux aspects qui apparaissent comme importants. C'est pourquoi, en général, la contraction et l'objectivation impliquent le fait d'oublier. Nous avons besoin d'oublier pour être capables de nous focaliser.

La contraction sémiotique peut être retrouvée aussi dans ce que Vygotsky (1934-1986) appelle « discours intérieur », décrit en discutant le langage comme un système de signes paradigmatique. Le discours intérieur est décrit au niveau structurel par une réduction syntactique et par une réduction phasique, et au niveau sémantique par l'agglutination. La *réduction syntactique* est une forme spécifique d'abréviation qui limite les sujets des phrases et garde les prédicats purs. L'articulation syntactique s'avère donc minimisée à la pure juxtaposition de prédicats. La *réduction phasique* consiste à minimiser les aspects phonétiques du discours, notamment en écourtant les mots eux-mêmes (par exemple, en écrivant « u » au lieu de « you », en anglais ; « ct » au lieu de « c'était » ou « kom » au lieu de « comme », en français). L'*agglutination* consiste à combiner les mots, en collant des significations (concepts) différentes dans une seule expression (par exemple, « highway », composé de « high » et « way »). De nos jours, les systèmes de communication de messagerie instantanée sur les smartphones exploitent largement les contractions sémiotiques (combinées avec des caractéristiques iconiques supplémentaires, comme les émoticons), typiquement dans la communication informelle entre personnes qui partagent la plupart des informations contextuelles.

Puisque la syntaxe se réduit, Vygotsky (ib., p. 244) affirme que la sémantique entreprend un mouvement contraire, avec la mise en avant du sens :

> Avec la syntaxe et le son réduits au minimum, le sens est mis en avant plus que jamais. Le discours intérieur fonctionne avec la sémantique, non pas avec la phonétique.

Nous pouvons observer que les gestes, en raison de leur nature spatiale et kinesthésique, ne nécessitent pas de processus d'agglutination pour combiner des significations, à la différence du langage verbal : c'est l'activation elle-même des gestes qui peut produire la combinaison de plusieurs significations comme le fait l'agglutination . Une forme spécifique de contraction sémiotique caractérisant les gestes est en effet ce que j'appelle un geste « *mélangeant* » ou « *condensant* », c'est-à-dire un geste exprimant dans le même temps (au moins) deux significations différentes. Nous avons vu les deux exemples suivants :

- Giulio, et son geste de droite à gauche effectué avec trois doigts levés, indiquant le nombre 3 *et* la soustraction (tableau 1, photos b et c);
- Elisa, avec deux doigts levés comme s'ils tenaient un bâtonnet, déplacés de gauche à droite, qui peuvent être interprétés comme indiquant une distance, *et* le fait que cette distance permette de passer d'un nombre gagnant au suivant (tableau 5, photos b et c). Le discours simultané spécifie que cette distance vaut 3, obtenu comme la somme de 1 et 2.

Dans les deux exemples, les gestes condensent (ou mélangent) deux significations en combinant une composante dynamique avec la forme de la main : cette caractéristique dynamique a été observée aussi par Calbris (2011) dans ce qu'elle appelle « gestes polysignes ». Dans des études précédentes dans le domaine mathématique (Sabena, 2007, 2008, 2010), le caractère condensant des gestes a été identifié dans le contexte des fonctions et des graphiques, et associé aux aspects iconiques des gestes. Dans l'étude ici présentée, cette caractéristique est montrée dans le domaine arithmétique, et associée avec des aspects *métaphoriques* des gestes, en suivant la classification de McNeill (1992). En condensant deux significations différentes, chacun de ces gestes établit deux types différents de références métaphoriques, dont une met en jeu la droite numérique, un outil didactique suggéré par le curriculum italien. En exploitant l'espace pour raisonner sur les nombres, la droite numérique elle-même a une nature métaphorique. Un processus de mélange double ou même multiple semble donc être activé par les gestes métaphoriques typiques des domaines mathématiques. Ce sujet demande une réflexion approfondie sur la signification de « métaphoriser » au niveau cognitif et au niveau sémiotique, et des recherches plus approfondies sont nécessaires (pour des résultats préliminaires employant les métaphores cognitives et les espaces mélangés, voir Sabena et al., 2016).

Il paraît que la métaphoricité soit aussi liée à l'utilisation de l'espace gestuel avec l'*alternance spatiale*, comme nous l'avons vu dans les cas de Giulio et de Eliana. Giulio bouge sa main à gauche et à droite quand il parle des tours et des contre-tours dans son match fictif (tableau 3, photos b-c), tandis qu'Eliana alterne sa main gauche et sa main droite pour le même but (tableau 4, photos b-c et d-e). *À travers l'alternance spatiale des gestes, l'espace vide acquiert du sens*, qui, dans nos données, semble être lié à une sorte de *niveau local*, soit dans le jeu (les tours successifs imaginés, dans le cas de Giulio), soit dans l'argument mathématique (les nombres à rajouter pour composer le 3, dans le cas d'Eliana).

Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse, une telle alternance spatiale se répète plusieurs fois, en réalisant ce qui, dans les études sur les gestes, est appelé un *catchment* et considéré comme donnant de la cohésion au discours (McNeill, 2005). Dans cette étude de cas, le *catchment* gestuel est interprété comme une aide pour les élèves dans la structuration de l'argument au *niveau global*. Les résultats précédents sur la façon dont des positions spatiales opposées sont exploitées en termes de gestes pour indiquer des cas s'excluant mutuellement semble confirmer cette interprétation (Arzarello & Sabena, 2014).

Dans l'intérêt de l'analyse, nous avons ici discuté une après l'autre les différentes caractéristiques des gestes qui contribuent à donner un sens général et une structure au processus d'argumentation. Cependant, comme nous pouvons le remarquer en revenant à l'analyse des données, beaucoup de ces caractéristiques s'entremêlent ; de plus, l'analyse des gestes nécessite la prise en compte du faisceau sémiotique dans son ensemble. Par exemple, seulement une analyse systémique des mots et des gestes peut montrer comment, même s'il décrit un certain match hypothétique entre lui et un autre joueur, l'argument de Giulio contient des aspects essentiels transmettant une généralité : la répétition rythmique de la même structure linguistique, accompagnée par le *catchment* correspondant (tableau 2 et 3) ; l'utilisation de mots génériques accompagnés par un geste générique (tableau 3, photo a), l'utilisation de *pointages* abstraits avec l'annonce de tours possibles (tableau 3, photos b et c). Dans le cas de l'argument d'Eliana, il est frappant d'observer comment les gestes et les mots se complètent l'un l'autre d'une façon synchronique.

Si nous analysons les contributions des élèves d'une façon diachronique, nous pouvons tirer d'autres renseignements, qui nous donnent des éléments pour décrire l'évolution de la discussion en classe dans une perspective multimodale. Pour donner un exemple, il est intéressant de remarquer comment l'alternance spatiale de Giulio avec sa main droite évolue en l'alternance d'Eliana avec deux mains, une après l'autre (voir tableau 4) ; dans ce dernier cas, le sujet du discours d'Eliana ne change pas (c'est toujours « tu »), en montrant une tension vers les relations arithmétiques plutôt que vers l'interaction stratégique du jeu. Cela ouvre la voie à l'intervention suivante d'Elisa, portant sur les « nombres où il y a 3 ».

Les dernières considérations sont réservées aux implications didactiques de cette analyse très fine.

2 Implications pour les professeurs

Des recherches en cours indiquent que l'enseignant peut avoir un rôle important dans l'évolution des signes à l'intérieur du faisceau sémiotique et dans la construction de « chaînes sémiotiques multimodales » permettant au sens mathématique de se développer à travers les processus d'argumentation (Maffia & Sabena, 2015, 2016).

Évidemment, les choix de l'enseignant ne sont jamais neutres en rapport avec l'utilisation d'une ressource sémiotique dans la classe, y compris les gestes. Un exemple dans nos données est le modèle sémiotique à travers lequel la Course à 20 a été présentée aux élèves et à travers lequel les élèves ont joué le jeu (figure 1). Nous avons remarqué que ce choix—qui résonne avec l'outil didactique de la droite numérique—a fourni un outil essentiel aux élèves non seulement pour jouer le jeu mais aussi pour développer des argumentations sur comment gagner le jeu. En particulier, l'argument d'Elisa portant sur la « distance de 3 » entre les nombres gagnants montre sa relation avec le modèle sémiotique écrit avec lequel le jeu a été joué. Les résultats de cette analyse semblent donc offrir des éléments pour valider le choix de l'enseignant. En tout cas, discuter pourquoi pour Elisa (et pour d'autres élèves) ce choix a fonctionné tandis que pour d'autres une réflexion plus poussée a été nécessaire, va au-delà de l'objectif de cette analyse.

Le débat en classe s'avère être un moyen approprié pour favoriser le développement d'argumentations à travers des ressources multimodales comme celle décrite, où les élèves peuvent exploiter les gestes parmi les autres ressources sémiotiques. Cela demande évidemment que les gestes soient considérés comme légitimes dans la classe, comme dans le cas analysé, ou l'enseignante soutient Elisa dans son 'argument multimodal', en considérant l'apport de son geste et en lui donnant le mot manquant.

Plus généralement, l'enseignante peut alors profiter de la synergie des ressources sémiotiques dans une perspective multimodale. Ainsi elle peut :

- acquérir une *meilleure compréhension des processus cognitifs des élèves* en faisant attention à leurs gestes, outre leurs mots et leurs écrits ;
- *utiliser les gestes* et, plus généralement, les ressources sémiotiques d'une manière consciente.

Sur le deuxième point, à l'aide de l'analyse du faisceau sémiotique, nous avons remarqué un phénomène récurrent dans nos classes, appelé le « *jeu sémiotique* » entre l'élève et le professeur (Arzarello et al., 2009 ; Arzarello et al., 2011). Le jeu sémiotique se produit lorsque les enseignants répètent les signes multimodaux des élèves (typiquement, un geste), et ajoute d'autres signes (typiquement, des mots) pour que les significations évoluent vers les formes mathématiques culturellement établies. De cette façon, l'enseignant implicitement *encourage* l'élève à produire et expliciter ses pensées (de façon multimodale) et *l'aide* à progresser des significations personnelles vers les significations institutionnelles.

Mais dans quelles conditions cela peut-il fonctionner ?

Le jeu sémiotique peut être joué si l'enfant, à l'aide d'une sorte de signe, exprime quelque chose de significatif par rapport aux connaissances mathématiques. Il appartient à l'enseignant de saisir de tels moments. Dans une perspective vygotskienne, on peut dire que les mots, les gestes et les signes écrits peuvent être considérés comme des indices de l'enfant dans une Zone de Développement Proximal (Vygotsky, 1931/78).

Pour sensibiliser les enseignants aux aspects multimodaux de l'enseignement et de l'apprentissage, nous leur proposons de mener, au moins une fois dans leur expérience professionnelle, une analyse multimodale d'une leçon de classe.

Cette valeur éducative a été testée dans notre groupe de recherche à Turin et a contribué à la réflexion sur la formation des enseignants en Italie (2014). Le groupe de recherche, dans lequel s'est développée la réflexion et l'étude sur la multimodalité de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, est dirigé par le professeur Ferdinando Arzarello et est composé de chercheurs en éducation mathématique et d'enseignants. Les enseignants participent à toutes les phases de la recherche, de la discussion des choix théoriques et de la conception et réalisation du projet à la collecte et à l'analyse des données, selon leurs possibilités et leur disponibilité : dans le double rôle des enseignants et des chercheurs, le terme «enseignants-chercheurs» est utilisé. Certains enseignants-chercheurs participant au groupe de recherche de Turin se sont engagés à effectuer eux-mêmes l'analyse des ressources multimodales, à partir de vidéos réalisées dans leurs classes pendant les cours. Les enregistrements vidéo ont été réalisés par des chercheurs, ou par des étudiants de premier cycle ou, dans des cas plus rares, par les enseignants eux-mêmes. Typiquement, on a enregistré le travail de groupe des élèves sur un problème difficile et la discussion menée par l'enseignant. L'analyse sémiotique par les enseignants a généralement été menée comme suit. La vidéo est d'abord analysée par le professeur de la classe à partir de laquelle elle a été prise : l'enseignant produit un résumé de ce qui s'est passé et extrapole les épisodes les plus significatifs, qui sont parfois des parties très importantes de l'activité. Ce choix dépend de l'intérêt de recherche du groupe, sur la question qu'on **veut** comprendre à fond, du problème de recherche finalement. L'analyse produit un document écrit, souvent sous la forme d'une table appelée « ligne sémiotique », qui montre la transcription des signes multimodaux qui interviennent, en insistant sur leur développement dans le temps (à titre d'exemple, un extrait qui fait référence à la discussion sur le **vingtième** temps analysé ci-dessus est donné en annexe). La ligne sémiotique est ensuite présentée au groupe de recherche, où les points cruciaux sont discutés, avec la visualisation et la discussion des vidéos connexes. La ligne sémiotique est ensuite enrichie d'autres éléments d'analyse et constitue un outil partagé de réflexion sur la pratique pédagogique. Ce travail - certainement très coûteux en termes de temps - nous a permis en termes de recherche de comparer les intuitions découlant de l'analyse théorique avec la pratique de classe et de donner des preuves empiriques, ou vice versa a permis d'identifier des phénomènes récurrents dans les films, donnant une caractérisation théorique, comme dans le cas des jeux sémiotiques. Cependant, il a également apporté des résultats en termes de formation pour les enseignants qui ont participé au travail d'analyse, surtout en leur faisant prendre conscience de nombreux aspects sous-estimés dans la perception de leurs interactions avec les étudiants.

Une analyse de ce type peut être considérée comme une loupe sur des situations éducatives, un zoom assez précis. Bien sûr, il est impensable de pouvoir l'appliquer à toutes les situations d'enseignement, en particulier pour l'analyse temporelle et la réalisation qu'elle exige ! Toutefois, ce processus permet d'activer les systèmes de contrôle et d'analyse de leurs actions et de leurs paroles, mais aussi de prêter plus d'attention aux gestes et aux « langages corporels » utilisés par leurs élèves, d'améliorer leurs interprétations et même d'être en mesure de mieux orchestrer les discussions dans le cours de mathématiques.

Par rapport à cela, je rapporte l'expérience d'une enseignante (participant aux travaux du groupe de recherche de Turin) :

> *Au cours de l'activité, je n'avais aucune perception de ce qui se passait et du rôle que joueraient mes actions, j'étais trop impliquée à viser à atteindre l'objectif. Ce fut grâce à l'analyse de la ligne sémiotique, que, rétrospectivement, le nouvel horizon sur la compréhension des processus d'enseignement - apprentissage pour la première fois est devenu très clair : en me regardant moi-même interagir avec les enfants, je pouvais comprendre la portée des gestes (l'utilisation des doigts, des mains, du corps) et des mots, pour établir des liens utiles à la connaissance. Au cours de l'activité, je savais que les gestes, en plus du discours, des signes écrits et des instruments, pourraient servir à la compréhension, mais je ne savais pas pourquoi, ni surtout comment.* (l'enseignante B.V., rapporté in Arzarello et al., 2011, p. 131).

En d'autres termes, pour ces enseignants, la réalisation de la ligne sémiotique a été un outil important pour la transposition méta-didactique (Arzarello et al., 2014) de l'approche multimodale des mathématiques. Le rôle du 'courtage' des chercheurs a été fondamental à cet égard, de même que l'établissement de « communautés de recherche » dans le cadre de projets de recherche. Des recherches plus approfondies sont nécessaires pour dévoiler et exploiter à fond les potentialités **de ce type d'instrument pour la formation des enseignants sur une plus grande échelle**, où les liens avec le monde de la recherche sont plus distendus.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Guest Eds.), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (pp. 267-299).

ARZARELLO, F., & ROBUTTI, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 720–749, 2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

ARZARELLO, F., & SABENA, C. (2014). Analytic-structural functions of gestures in mathematical argumentation processes. In L. D. Edwards, F. Ferrara & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment* (pp. 75-103). Charlotte, NC (US): Information Age Publishing, Inc.

ARZARELLO, F., PAOLA, D. ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

ARZARELLO, F, ROBUTTI, O., SABENA, C., CUSI, A., GARUTI, R., MALARA, N., MARTIGNONE, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 347-372). Dordrecht, Olanda: Springer.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L., FERRARA, F., SABENA, C., ANDRÀ, C., MERLO, D. SAVIOLI, K., VILLA, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Edizioni Erickson.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

CALBRIS, G. (2011). *Elements of meaning in gesture*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins Publishing Company.

DE FREITAS, E., & SINCLAIR, N. (2014). *Mathematics and the body*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

DE RUITER, J. P. (1995). Why do people gesture at the telephone? In Biemans M, Woutersen M (Eds.), *Proceedings of the Center for Language Studies Opening Academic Year '95-96* (pp. 49-56). Nijmegen: Center for Language Studies.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

GALLESE, V., & LAKOFF, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology* 22, 455-479.

GEROFSKY, S. (2015). Approaches to embodied learning in Mathematics. In English, L.D. & Kirshner, D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (Third Edition). New York and London: Routledge.

GOLDIN-MEADOW, S. (2003). *Hearing gesture. How our hands help us think*. The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, and London, England.

GOLDIN-MEADOW, S., NUSBAUM, H. KELLY, S. D., & WAGNER, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, 12, 516-522.

KENDON, A. (1980). Gesticulation and speech: Two aspects of the process of utterance. In M.R. Key (Ed.), *The relation between verbal and nonverbal communication* (pp. 207-227). The Hague: Mouton.

KRESS, G. (2004). Reading images: Multimodality, representation and new media. *Information Design Journal*, 12(2), 110-119.

LAKOFF, G., & NÙÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

MAFFIA, A., & SABENA, C. (2015). Networking of theories as resource for classroom activities analysis: the emergence of multimodal semiotic chains. In C. Sabena, B. Di Paola (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Resources and obstacles, Proc. CIEAEM 67, Quaderni di ricerca didattica*, 25-2 (pp. 405-417). Aosta, July 20-24, 2015.

MAFFIA, A., & SABENA C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitànyi (Eds.), *Proc. 40th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3* (pp. 235-242). Szeged, Hungary: PME.

MCNEILL, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.

MCNEILL, D., QUEK, F., MCCULLOUGH, K-E., DUNCAN, S., FURUYAMA, N., BRYLL, R., … ANSARI, R. (2001). Catchments, prosody and discourse. *Gesture*, 1(1), 9-33.

NEMIROVSKY, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zillox (Eds.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 105–109). Honolulu, HI: PME.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

RADFORD, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, Vol. 40(1), 83-96.

RADFORD, L., & SABENA, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157–182). New York: Springer.

RADFORD, L., BARDINI, C., & SABENA, C. (2007). Perceiving the general: The semiotic symphony of students' algebraic activities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507-530.

RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 91 - 95.

RADFORD, L., BARDINI, C., SABENA, C., DIALLO, P., & SIMBAGOYE, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 113–120). Melbourne: University of Melbourne, PME.

ROTH, W.M. (2009). (Ed.), *Mathematical representation at the interface of body and culture*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

SABENA, C. (2007). *Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching-learning processes in early Calculus*. PhD. Dissertation, University of Torino (Italy).

SABENA, C. (2008). On the semiotics of gestures. In L. Radford, G. Schumbring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 19-38). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

SABENA, C. (2010). Are we talking about graphs or tracks? Potentials and limits of 'blending signs'. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 105-112). Belo Horizonte, Brazil: PME.

SABENA, C., RADFORD, L., & BARDINI, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 129-136). Melbourne, Australia: University of Melbourne, PME.

SABENA, C., KRAUSE, C., & MAFFIA, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *Relazione al XXXIII Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica Giovanni Prodi*, Rimini 28-30 Gennaio 2016. http://www.airdm.org/sem_naz_2016_25.html

SABENA, C., ROBUTTI, O., FERRARA, F., ARZARELLO, F. (2012). The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: examples in pre- and post-algebraic contexts. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 231-245). Grenoble: La Pensée Sauvage.

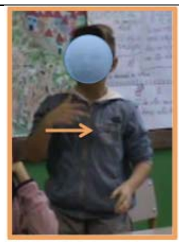
SCHIRALLI, M., & SINCLAIR, N. (2003). A constructive response to 'Where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics,* 52(1) 79–91.

SFARD, A., & MCCLAIN, K. (2002). Analyzing tools: perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the learning sciences*, 11(2&3), 153-161.

VYGOTSKY, L. S. (1931/78). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman. Cambridge, MA, and London: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1934/86). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press. (Revised edition, translated and edited by A. Kozulin. Original work published in 1934).

VII - ANNEXE – EXTRAIT DE LIGNE SEMIOTIQUE

	1. [00:00]	2.				3.
Mots de l'élève	Diego : 11 est un nombre important peut-être, parce que peut-être mon équipe rajoute 2 et ça fait 13, l'autre équipe rajoute 1 et arrive à 14, j'ajoute 1, 15, ils rajoutent 2 et ça fait 17	*Giulio:* Je crois que pour les nombres gagnants tu enlèves toujours 3	De 20	tu enlèves 3	et tu arrives à 17	
Gestes de l'élève		 *La main ouverte bouge de droite à gauche*	 *Trois doigts levés*	 *Trois doigts levés bougent de droite à gauche*	 *Pointage abstrait vers le bas*	
Mots de l'ensei-gnante						Explique bien cette idée
Gestes de l'ensei-gnante						

ATELIERS

MALENTENDUS SÉMIOTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ

Catherine HOUDEMENT
PU, ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Édith PETITFOUR
MCF, ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé
Cet article propose l'étude d'une situation d'apprentissage de la numération décimale, choisie et mise en œuvre par une enseignante spécialisée travaillant dans un Institut Médico-Éducatif (IME), ainsi que ses effets sur l'activité des élèves. Les séances, réalisées avec des adolescents handicapés atteints de déficience intellectuelle, s'appuient sur le concret et la manipulation comme moyens d'apprendre des mathématiques. Cette étude s'intéresse à la dimension sémiotique de la mésogenèse (Sensevy, 2007) et porte un regard particulier sur les différents signes activés lors des interactions entre élèves (Arzarello, 2006 ; Radford, 2003).

I - INTRODUCTION ET INSERTIONS THÉORIQUES

1 Une approche compréhensive et situationniste

Nous participons toutes deux à la formation de professeurs des écoles titulaires qui se préparent à passer une certification complémentaire, le CAPA-SH (Certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap). Dans ce cadre, nous observons des pratiques d'enseignants[1] et des pratiques d'élèves. Notre recherche[2] vise d'abord à comprendre ce qui se joue dans la classe ou le groupe d'élèves, dans les relations et interactions entre propositions / réactions de l'enseignant et réactions / propositions des élèves.

Assumant cette dimension compréhensive, nous qualifions aussi notre approche de situationniste. Nous observons les élèves en situation de classe, sans porter une attention pointue aux informations données par un diagnostic neuropsychologique, par la mention du handicap, par les empêchements *a priori* qu'ils devraient entraîner chez l'élève. Nous suivons en cela Vergnaud :

[C'est oublier que] la connaissance est adaptation, quel que soit l'appareil neuronal dont dispose le sujet apprenant, et par conséquent les moyens d'aider un enfant victime d'un accident du développement ou d'un traumatisé crânien sont, à certains égards au moins, les mêmes que ceux utilisés pour aider les enfants ou adultes en situation ordinaire. (Vergnaud, 2004, p.1)

Tout sujet, même lourdement frappé, peut mettre en œuvre des ressources alternatives, qui même si elles sont plus coûteuses, psychologiquement, que les moyens ordinaires, n'en permettent pas moins d'accomplir des gestes, des raisonnements et des opérations, qui ne semblaient pas, ou plus, a priori accessibles. (Vergnaud, 2004, p.2)

---

[1] Dits « stagiaires », mais qui, pour certains, ont une longue pratique de la classe dans laquelle ils font leur stage (jusqu'à plus de 10 ans).

[2] Nous remercions l'ESPE de Rouen Normandie qui a soutenu cette recherche (Projet Sémiotique dans l'enseignement spécialisé dans École inclusive et prise en compte de la diversité des élèves dans Recherches collaboratives sur le site http://espe.univ-rouen.fr/).

2 Quelques mots sur la sémiotique

2.1 Sémiotique en général

La sémiotique étudie la production, la codification et la communication de signes. Elle a dépassé l'étude de la langue grâce notamment aux travaux de Charles Sanders Peirce (1839-1914)[3]. Un autre sémioticien célèbre est Umberto Eco (1932 – 19/2/2016).

Selon Peirce et d'autres chercheurs développant un modèle sémiotique triadique (le triangle sémiotique), la sémiotique étudie les relations entre les trois pôles suivants : référent ou objet ; signes ou représentations sémiotiques ; interprétations. Nous retiendrons ces expressions de préférence aux nombreuses autres de la littérature sémiotique[4].

Par exemple, dans le domaine de la langue, un mot est un signe, le référent est ce à quoi ce mot fait référence et l'interprétation est ce qu'en comprend la personne qui entend ou lit ce mot. L**e contexte influe sur l'interprétation du signe :** le mot volume, par exemple, est interprété différemment selon qu'il est associé à une collection de livres, à un environnement sonore ou à un aquarium.

Un objet a de multiples signes qui lui font référence. Certains signes ont plus de « ressemblance » que d'autres avec l'objet (pour ceux qui connaissent l'objet). Une photo d'un objet réel est souvent plus « fidèle » qu'un schéma, une photo « parle » souvent beaucoup plus qu'un mot. Le chant d'un pinson est un signe qui évoque en général la présence d'un oiseau, sans plus de détail ; avec un peu d'entraînement, on reconnait le chant du pinson. Une interprétation n'est pas figée. Peirce s'intéresse au **processus d'évolution des interprétations** et met en avant ce mouvement d'une interprétation à une autre.

Un signe ne peut donner à voir, entendre, sentir qu'une facette de l'objet, il ne peut pas rendre compte de l'objet dans son entièreté. Le chant du pinson ne fournit ni la taille du pinson, ni la couleur de son plumage.

Une personne confrontée à un signe interprète ce signe en fonction des connaissances qu'elle a de l'objet que ce signe est censé représenter.

2.2 Sémiotique et mathématiques

Des chercheurs ont déjà développé cette approche sémiotique en s'intéressant plutôt aux pratiques mathématiques expertes. Par exemple, Chevallard (1994) a introduit dans la Théorie Anthropologique du Didactique la distinction ostensif et non ostensif. Plus généralement, Vergnaud (1990) intègre une facette sémiotique, dans son modèle de la conceptualisation : « les formes langagières et non langagières qui permettent de représenter le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145) sont un des trois volets du concept.

Pour Duval (2006), les mathématiques sont un domaine particulièrement sensible aux questions sémiotiques : en effet les objets mathématiques sont par essence théoriques, ils sont perceptivement et instrumentalement inaccessibles, ils ne sont « visibles » que par leurs représentations sémiotiques, leurs signes. Dans une vision mathématique naturaliste, une représentation sémiotique tend à se subsister à l'objet mathématique qu'elle dénote. Or le signe n'est pas l'objet. Duval affirme qu'en mathématiques, la multiplicité des représentations sémiotiques d'un même objet est cruciale pour appréhender cet objet et qu'une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Plus précisément Duval distingue deux types de transformations fondamentales : les transformations à l'intérieur d'un système sémiotique et les conversions d'un système sémiotique en un autre. Par exemple, les nombres ont plusieurs représentations sémiotiques organisées en systèmes : écritures décimales finies ou non, écritures fractionnaires : « 4/3 » donne immédiatement à voir « 4 partagé en 3 » ; « 1,333… » donne immédiatement à voir l'ordre de grandeur, entre 1 et 2 ; cet ordre de grandeur aurait aussi pu être obtenu par une transformation de « 4/3 » en « 1 + 1/3 ». Bien sûr,

---

[3] Des textes des actes de la COPIRELEM ont déjà utilisé et précisé cette approche : Bloch, 2009 ; Martinelli, 2012.

[4] Par exemple, Peirce utilise les termes : objet, representamen et interprétant.

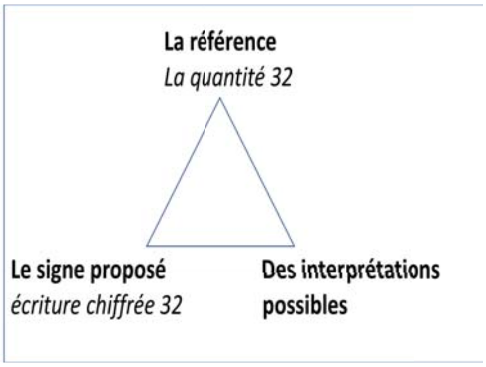
l'interprétation des écritures n'est pas transparente : comme toute représentation sémiotique, elle est à construire…

L'approche sémiotique, et certains outils de Peirce, permettent de prendre en compte l'usage et l'interprétation par les élèves, notamment dans l'enseignement spécialisé, des signes mathématiques (Bloch, 2009), souvent décalés par rapport aux usages et interprétations usuelles dans les mathématiques.

Pour rendre compte de ces différences d'interprétations, nous utiliserons le terme de « malentendu sémiotique » avec les sens suivants :

- un décalage, une contradiction entre deux interprétations d'un même signe par un même sujet ;
- une interprétation personnelle et « décalée » d'un signe mathématique culturellement fixé.

Prenons l'exemple suivant qui rend bien compte de la complexité et des emboitements sémiotiques : on demande à un élève de CP (en mars) de produire une collection de cubes dont la quantité est donnée par le signe « 32 », à partir du matériel usuel de la classe, une boîte avec plus de dix barres de dix cubes emboîtés (chaque barre est d'un seul tenant), une boîte avec plus de cinquante cubes en vrac.

Analyse sémiotique. Il faut produire un signe matériel de la « référence » dont « 32 » est un signe.	
	La production de l'élève permet de faire des hypothèses sur son interprétation du signe « 32 ». *Cette production est donc elle-même un signe que l'enseignant peut interpréter.* Par exemple une collection donnée sous la forme de 3 barres de dix cubes et 2 cubes isolés ou emboîtés peut être considérée comme le signe d'une interprétation correcte (certes locale) des aspects décimal et positionnel de l'écriture indo-arabe. Une collection de 32 cubes en vrac sera vue comme le signe d'une interprétation correcte du signe « 32 », sans plus. En revanche, la production constituée d'une barre de trois cubes juxtaposée à une barre de deux cubes sera considérée comme le signe d'une interprétation erronée de l'écrit indo-arabe, **d'un malentendu sémiotique.**

L'approche sémiotique développée notamment par Arzarello (2006) et Radford (2003) est aussi un outil puissant pour rendre compte de l'activité des élèves, de leur engagement et du traitement de la tâche (mathématique ou non), à partir des signes qu'ils émettent, qu'ils soient verbaux, graphiques, gestuels. Petitfour (2015) a largement exemplifié dans sa thèse l'utilisation de cette approche pour observer et comprendre les différentes facettes de l'activité d'un élève dyspraxique aux prises avec l'injonction d'une construction instrumentée.

3 Nos questions

Il est relativement connu que les réactions et productions des élèves de l'enseignement spécialisé sont très variées et couvrent un spectre large de « possibles ». Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de s'appuyer sur les « signes » (oraux, graphiques, gestuels, liés à du matériel, des artefacts…) que nous renvoient les élèves, en interaction entre pairs ou avec l'enseignant, pour comprendre comment ils fonctionnent et quelle cohérence ils développent. La présente étude s'attelle donc au repérage de tels signes et à la construction d'hypothèses sur les interprétations des élèves des différents éléments de l'activité mathématique.

II - ANALYSE *A PRIORI* DE LA SITUATION « BULLETIN DE COMMANDE »

1 Éléments de contexte et données recueillies

Notre étude porte sur une séquence d'enseignement de la numération décimale. La classe support de l'observation est une classe d'un Institut Médico-Éducatif (IME) avec 7 élèves de 12-13 ans déficients intellectuels. Nous suivrons plus particulièrement trois élèves (Nick, Mélanie et Angèle), dont un diagnostiqué dyspraxique visuo-spatial (Nick). L'enseignante de cette classe suit la formation CAPA-SH dans laquelle nous intervenons. Elle a élaboré et mis en œuvre en novembre 2016 une situation de numération, contextualisée par une commande fictive de craies, pour travailler avec ses élèves la décomposition des nombres.

Nous avons filmé la troisième séance qui a eu lieu le jeudi 17 novembre 2016 et avons enregistré différents échanges à propos de cette séance. Pour cette étude, nous nous appuyons donc sur différentes données issues :

- des échanges par mail entre enseignante et chercheures huit jours avant la séance ;
- d'un entretien d'auto confrontation, trois mois après la séance (février 2017) ;
- des échanges entre stagiaires de la même promotion dans le cadre de la formation CAPA-SH, lors d'un visionnement de cette même séance, trois mois et demi après la séance.

L'extrait étudié concerne l'activité « Bulletin de commande » (cf. annexe 1) proposée à Nick, Mélanie et Angèle. Ces trois élèves travaillent sur des fiches (cf. le *document élève* de l'annexe 1) dans le « coin-maths » de la salle, espace avec une table, du matériel qui sera précisé par la suite et des affichages mathématiques au mur : un tableau des nombres (figure 1) et trois bandes numériques (figure 2).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 1. Tableau des nombres

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																			

Figure 2. Trois bandes numériques

Après un « jeu du furet », rituel de comptage de « un en un » de 50 à 30, puis de 11 à 80 mené avec les sept élèves de la classe, l'enseignante invite Nick, Mélanie et Angèle à travailler ensemble dans le « coin-maths » tandis qu'elle s'occupera d'une autre élève. Les trois élèves reçoivent chacun un « bulletin de commande de craies » à compléter (cf. annexe 1) et disposent de matériel : un bac avec des bâtons en vrac, des paquets de dix bâtons élastiqués et des paquets de cent bâtons (constitués de dix paquets de dix bâtons) également élastiqués (cf. la photo du *matériel à disposition* de l'annexe 1). Les paquets ont été produits par les élèves lors d'une première séance (le jeudi 10 novembre). On ne sait suite à quelle consigne, les élèves ont voulu dénombrer des bâtons : « ils ont fait les paquets de cent avant… c'est eux qui ont voulu les compter, ils sont passés par les paquets de dix et de cent… on n'a jamais fini de compter la boîte entière, c'est un travail que j'avais pas prévu en fait. » (Extrait d'un entretien avec l'enseignante, février 2017). Lors d'une deuxième séance, le lundi 14 novembre, Nick et Angèle ont travaillé sur une activité (et une fiche) analogue à celle de la troisième séance, pour des commandes de

10, 30, 42, 55, 100 et 120 craies. Ils étaient alors accompagnés par l'enseignante dans l'utilisation du matériel : « c'est moi qui ai proposé le matériel d'emblée […] la fois d'avant, ils prenaient le matériel, par exemple pour faire cent, ben, par dizaine, dix, vingt, trente, … en comptant de dix en dix. » (Extrait d'un entretien avec l'enseignante, février 2017).

Nous proposons dans le paragraphe suivant une analyse *a priori* didactique. Comme toute analyse *a priori*, elle résulte d'une analyse préalable, complétée après le déroulement de la séance. Elle bénéficie aussi des apports des participants à l'atelier. Nous compléterons ensuite cette analyse par une analyse des signes (analyse sémiotique), en appui sur le document fourni aux élèves et le matériel disponible. Pour communiquer plus facilement, nous parlerons d'analyse didactique et d'analyse sémiotique, même si, pour nous, l'analyse sémiotique fait partie de l'analyse didactique. En revanche, il serait extrêmement complexe de faire une analyse sémiotique *a priori* des actions/productions des élèves.

2 Analyse *a priori* didactique

Nous considérons que la fiche de travail (cf. *document élève* de l'annexe 1) est conçue avec un seul type de tâches mathématiques, se déclinant de différentes façons en fonction d'un choix de valeurs des variables didactiques. Nous présentons ce type de tâches, les variables didactiques et nous exposons les techniques de résolution possibles, au sens de Chevallard (1999), c'est-à-dire les manières d'accomplir la tâche, compte tenu de l'institution dans laquelle elle se réalise.

2.1 Type de tâches et consigne

Le type de tâches mathématiques, sous-tendu par l'activité contextualisée de remplissage du bulletin commande de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité », consiste à décomposer un nombre écrit en chiffres en nombre de dizaines et nombre d'unités, voire de donner la décomposition **canonique** du nombre en dizaines et nombre d'unités[5].

On peut remarquer que dans cette fiche, il n'y a pas de consigne. Nous savons que Nick et Angèle ont travaillé sur un bulletin de commande analogue lors de la séance précédente.

Le premier tableau impose une décomposition canonique en dizaines puisque dans la colonne « Boîtes de craies livrées » les élèves ont à compléter les pointillés de la réponse pré-remplie « …… boîtes de 10 ». Le second tableau permet différentes décompositions en dizaines et unités avec la réponse « ….. boîtes de 10 et …… craies à l'unité » à compléter. L'effet des premiers items, couplé à celui du contrat didactique, peut laisser supposer que l'on cherche le nombre maximum de boîtes de dix craies associé au nombre minimum de craies à l'unité.

2.2 Variables didactiques

Les variables didactiques sont la taille des nombres (nombres de trois chiffres inférieurs à 200 ou pas), le fait que le nombre soit (ou pas) un multiple de dix, le fait qu'il y ait (ou non) un « 0 » au rang des dizaines, les relations entre les nombres successivement proposés, la présence (ou non) de matériel (bâtons), la disponibilité (ou pas) de groupes compacts de dix bâtons et/ou de cent bâtons, les supports autorisés, tels que tableau de nombres organisés (comme celui affiché au mur), bande numérique, tableau de numération, abaque…, calculatrice, brouillon.

2.3 Techniques de résolution

Différentes techniques sont envisageables pour les élèves, plus ou moins performantes ou plus ou moins adaptées selon le nombre de craies commandées. Nous les présentons ainsi que des mises en œuvre mettant en jeu différents systèmes sémiotiques.

[5] Nous appellerons « décomposition canonique en unités de numération » la décomposition qui donne les nombres maxima d'unités de numération des rangs les plus élevés : par exemple 10 centaines 16 dizaines n'est pas une décomposition canonique en centaines et dizaines de 1160 ; en revanche 11 centaines 6 dizaines l'est.

Techniques en appui sur l'interprétation de l'écriture chiffrée

T_0 : Utilisation de relations connues. Des relations connues entre le nombre donné et le nombre de dizaines correspondant peuvent être utilisées, comme la relation « cent, c'est dix dizaines » qui, si elle a été mémorisée, permet de trouver de façon immédiate qu'il faut « 10 boîtes de 10 » pour une commande de 100 craies lorsque l'on revient au contexte des craies. En contexte, des relations trouvées entre nombre de craies commandées et nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » livrées et des calculs sur ces relations (produit par un entier ou somme de deux relations) peuvent être utilisées. Par exemple, le nombre de « boîtes de 10 » pour 200 craies commandées peut être déduit en doublant le nombre de « boîtes de 10 » pour 100 craies commandées. Autre exemple, le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » pour 246 craies commandées peut être déduit en ajoutant ceux correspondant à 100 craies et 146 craies.

T_1 : Troncature. Le nombre maximum de « boîtes de 10 » est donné par une troncature à la dizaine du nombre donné et le nombre de « craies à l'unité » correspond au chiffre des unités du nombre donné. La troncature peut se faire par lecture directe sur l'écriture chiffrée ou à l'aide d'un tableau de numération que l'on complète. Si besoin, la lecture peut être accompagnée par des signes graphiques, par exemple un trait de séparation entre le chiffre des dizaines et celui des unités comme sur la figure 3. Elle peut être aussi accompagnée par l'utilisation du doigt (figure 4) ou de la main (figure 5) : par exemple le doigt ou la main cache le chiffre le plus à droite pour permettre la lecture du nombre de dizaines, puis le laisse apparent en cachant cette fois les autres chiffres.

Figure 3

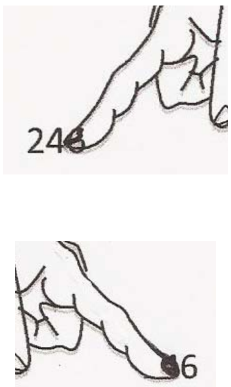


Figure 4

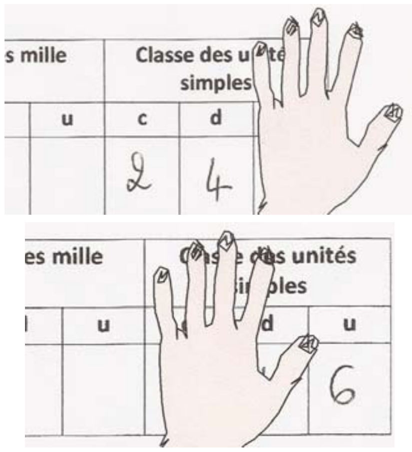


Figure 5

T_2 : Décomposition canonique en appui sur l'écriture chiffrée. Le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » peut être trouvé avec la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités du nombre donné à partir de son écriture chiffrée. Ensuite sont utilisés l'égalité entre 1 centaine et 10 dizaines, un calcul du nombre total de dizaines et la correspondance d'une dizaine avec une « boîte de 10 » et d'une unité avec une « craie à l'unité ». Par exemple, 246 se décompose en 2 centaines, 4 dizaines et 6 unités. Sachant que 1 centaine est égale à 10 dizaines, 2 centaines sont égales à 20 dizaines, 246 se décompose donc en (20 + 4) dizaines et 6 unités, soit en 24 dizaines et 6 unités. Il faut donc 24 « boîtes de 10 » et 6 « craies à l'unité ».

T_3 : Décomposition canonique en unités de numération en appui sur la lecture du nombre. Le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » peut être trouvé avec la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités du nombre donné à partir de la lecture de son écriture chiffrée. Ensuite sont utilisés l'égalité entre cent et dix dizaines, la relation entre le nom d'un multiple de dix et le nombre de dizaines correspondant, un calcul du nombre total de dizaines et la correspondance d'une dizaine avec « une boîte de 10 » et d'une unité avec une « craie à l'unité ». Par exemple, 246, lu « deux-cent-quarante-six », se décompose en « deux-cents », « quarante » et « six ». Sachant que « cent » est égal à « dix dizaines », « deux-cents » est égal à « vingt dizaines », sachant aussi que « quarante » est égal à « quatre dizaines », « deux-cent-quarante-six » se décompose donc en « vingt-quatre dizaines », et « six unités ». Il faut donc 24 « boîtes de 10 » et 6 « craies à l'unité ».

Autres techniques, en appui sur la structuration de la comptine orale ou du calcul

T_{41} : Ajouts de 10. Le nombre de « boîtes de 10 » à commander peut être déterminé par des additions réitérées de 10 jusqu'au nombre cible (c'est-à-dire jusqu'au nombre de craies à commander ou sinon jusqu'au plus grand nombre de la suite de sommes inférieur au nombre de craies à commander), suivi du dénombrement des termes 10 de la somme calculée. Le nombre de « craies à l'unité » correspond à la différence entre le nombre donné et le nombre cible.

T_{42} : Retraits de 10. Le nombre de « boîtes de 10 » à commander peut être déterminé par des retraits successifs de 10 à partir du nombre donné tant que cela est possible (résultat de la soustraction supérieur ou égal à 10), suivi du dénombrement des termes 10 retranchés. Le nombre de « craies à l'unité » correspond au reste inférieur à 10.

Les techniques T_{41} et T_{42} sont en réalité au moins doubles car elles se déclinent version écrite et version orale avec appui mémoriel gestuel ou écrit. Les additions ou soustractions peuvent être calculées mentalement ou à l'aide des opérations successivement posées. Les résultats successifs peuvent aussi être trouvés grâce à l'énumération montante ou descendante de la comptine des nombres de dix en dix avec repérage pris sur les doigts (les doigts jouent le rôle d'instrument mémoriel), repérage sur un tableau de nombres (idem) ou à l'aide d'un marquage de traits sur une feuille par exemple. Le dénombrement des termes 10 se fait alors par comptage ou reconnaissance de configurations de doigts ou de marques.

Il existe d'autres techniques de type calcul qu'on ne développera pas : *T_{43} : Multiplication par 10 à trous ; T_{44} : Division par 10.*

Techniques en appui sur une représentation matérielle ou graphique

Ces techniques reposent sur la construction d'une collection organisée et équipotente à celles des craies commandées, suivie d'un dénombrement de « paquets de 10 » et de « craies à l'unité ». La construction d'une collection équipotente à celle des craies commandées peut être réalisée avec une représentation, matérielle ou graphique, des craies et boîtes de craies. Par représentation matérielle, nous entendons des objets tangibles manipulables : les bâtons à disposition peuvent être utilisés, en considérant par exemple qu'un bâton représente une craie et que dix bâtons élastiqués représentent une boîte de 10 craies. Une représentation graphique peut être sous forme d'un dessin de craies et de boîtes de craies (en appui sur les photos de l'énoncé ou sur les connaissances culturelles des élèves) ou encore sous forme de signes graphiques plus schématiques (par exemple un trait ou un rond pour représenter une craie, etc.).

Nous distinguons les techniques en fonction du mode de construction de la collection équipotente à celles des craies commandées.

T_5 : à partir de la représentation de « craies à l'unité ». La collection de craies est construite de « un en un », par une représentation matérielle ou graphique des craies, au fur et à mesure de l'énoncé d'un mot nombre de la comptine numérique jusqu'à la quantité de craies commandée. On réalise ensuite – ou bien au fur et à mesure – des « boîtes de 10 » jusqu'à ce qu'il reste moins de dix unités isolées. Pour cela, on regroupe les bâtons par dix en mettant un élastique autour, ou bien on les dispose dans une configuration donnée (par exemple, on réalise des lignes de dix bâtons) ; sur une feuille de papier, on peut par exemple entourer les traits par dix, on peut aussi faire les tracés dans une configuration où les paquets de dix seront visuellement repérables, etc. Pour terminer, on dénombre les « boîtes de 10 » réalisées et les « craies à l'unité » restantes.

T_6 : à partir de la représentation de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité ». La collection de craies est construite de dix en dix, par une représentation matérielle ou graphique des « boîtes de 10 », au fur et à mesure de l'énoncé d'un mot nombre de la comptine des dizaines (« dix, vingt, trente, … ») jusqu'au nombre de craies à commander (si c'est un multiple de 10) ou sinon jusqu'au plus grand nombre inférieur au nombre de craies à commander. La collection de boîtes de craies est ensuite complétée, lorsque le nombre n'est pas multiple de 10, par des craies à l'unité.

T_7 : à partir de la représentation de « boîtes de 100 », de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité ». La collection de craies est construite en appui sur la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités du nombre donné à partir de son écriture chiffrée ou en appui sur la lecture orale de cette écriture

chiffrée. Avec le matériel, on prend un nombre de bâtons correspondant au nombre d'unités, un nombre de « paquets de 10 » correspondant au nombre de dizaines et un nombre de « paquets de 100 » correspondant au nombre de centaines. On transforme chaque « paquet de 100 » en enlevant l'élastique, on libère ainsi dix « paquets de 10 ». On réunit alors les « paquets de 10 » obtenus avec les paquets analogues pour dénombrer l'ensemble de ces paquets.

3 Analyse sémiotique préalable

Nous cherchons à répertorier les signes produits par des actions intentionnelles de l'enseignante et des élèves telles que parler, écrire, dessiner, faire des gestes, manipuler un artefact, dans l'environnement des élèves et pendant l'activité. Dans ce paragraphe, nous nous limitons aux signes oraux, matériels et graphiques en circulation dans l'environnement de la classe et pour lancer le travail. Évidemment parmi les signes liés aux quantités figureront les noms de nombres à l'oral, avec leurs fonctions usuelles : désigner une quantité (dix craies, dix bâtons, deux boites…) ; désigner une mesure de quantité (nombres sans unité, expressions telles que « boîte de dix », « paquet de cent ») ; oraliser un nombre écrit en chiffres.

3.1 Signes écrits liés aux quantités

Des signes conventionnels liés aux quantités sont présents dans la fiche réalisée par l'enseignante, avec l'écriture en chiffres du nombre de craies dans une boîte et celle des nombres de craies commandées. Le premier nombre apparaît dans les expressions « boîtes de 10 craies » et « boîtes de 10 », les autres sont présentés dans la colonne d'en-tête « Nombre de craies commandées » dans les deux tableaux appelés « bulletins de commande » (100, 120, 150, 160, 200 pour le premier tableau ; 101, 146, 246, 333, 350 pour le deuxième). Des étiquettes sur lesquelles est écrit « 100 » sont présentes dans le bac de matériel, attachées aux paquets de cent bâtons, bâtons groupés en dix paquets de dix.

D'autres nombres écrits en chiffres sont affichés dans le « coin-maths » où se déroule l'activité : à la gauche des élèves, les nombres de 0 à 100 sont présentés dans un tableau organisateur de nombres (sur chaque ligne, les nombres ont le même nombre de dizaines et sur chaque colonne le même nombre d'unités, cf. tableau 1) ; devant les élèves sont affichées trois bandes de nombres (de 0 à 39, de 40 à 79 et de 80 à 100, cf. tableau 2).

Pour compléter la fiche, les élèves doivent écrire des nombres, mesures de quantité, tandis que les unités de ces quantités (« boîtes de 10 », « craies à l'unité ») ne sont pas à leur charge, elles sont déjà inscrites dans la colonne à compléter.

3.2 Matériel lié aux quantités

L'activité mathématique est contextualisée par une commande de craies à réaliser, avec une contrainte sur la forme de la commande pour provoquer la décomposition du nombre de craies à commander en nombre de « boîtes de 10 » et nombre de « craies à l'unité ».

Les craies sont évoquées sur la fiche des élèves par des signes écrits avec le terme « craies » et les expressions « craies toutes seules », « craies à l'unité », « boîte de 10 », « boîtes de craies », « boîtes de 10 craies ». Elles le sont aussi par la photo d'une « craie à l'unité » et celle d'une « boîte de 10 craies », présentées dans un tableau avant les bulletins de commande. Les élèves ont pu voir les objets réels (la craie et la boîte) lors de la séance précédente.

Des bâtons censés représenter les craies sont à disposition des élèves. Ces objets matériels sont en vrac dans un bac, soit groupés par dix avec un élastique, soit groupés par cent avec dix paquets de dix élastiqués, soit isolés. Le lien entre les craies et cette représentation par des bâtons a été pris en charge par l'enseignante lors de la séance précédente, suite à l'impossibilité de manipuler le « vrai » matériel, la quantité de boîtes de craies dans la classe n'étant pas suffisante. Possibilité est donc laissée aux élèves de réaliser des actions avec ce matériel.

3.3 Signes liés aux consignes et à l'organisation des tâches

Sur la fiche, le contexte est posé par les mots « commande » et les acteurs de la commande sont mentionnés : « Les professeurs de l'IMPro » et « les classes des petits ». Le travail à faire n'est pas explicité. Il faut repérer dans le tableau les pointillés comme lieu de la réponse à écrire et coordonner les informations du tableau pour savoir quel type de réponse est attendu. *A priori*, savoir ce qu'il faut faire nécessite un accompagnement de l'enseignant sauf si ce type de présentation a déjà été rencontré dans la classe.

Le premier tableau associe langage écrit (« craie à l'unité », « boîte de 10 craies ») et photos correspondantes. Les deux autres tableaux ont pour titre « bulletin de commande ». Chacun associe le nom des clientes ou de la classe (1ère colonne) au nombre de craies commandées (2ème colonne) et aux boîtes de craies livrées (3ème colonne). La présentation synoptique choisie est censée représenter un bulletin de commande. La première colonne ne sert à rien pour la résolution de la tâche mathématique. Les tableaux ont autant de lignes que d'items. La présentation en tableau permet de limiter la répétition de la tâche.

Remarquons que la lecture de ces tableaux n'est pas analogue à celle requise pour le tableau de nombres affiché dans le « coin-maths ».

Un tableau est aussi un signe qui rend compte de liens entre des informations : regrouper des informations sur une même ligne est une façon schématique de rappeler (ou d'installer) le contexte et la tâche prescrite, les organiser en colonnes est une façon de rendre compte du même type de tâche par colonne. L'intention de l'enseignant est sans doute que le tableau se parcoure par ligne, sans attention particulière à l'information de la première colonne. Mais l'élève peut aussi l'appréhender par colonne…[6]

3.4 Signes en lien avec la pratique de l'enseignante

Dans ce paragraphe, nous relevons ce que l'enseignante nous donne à voir de certaines de ses croyances.

L'enseignante choisit de contextualiser la tâche demandée par une situation plongée dans l'environnement scolaire des élèves (ceux-ci connaissent les professeurs, les locaux et les classes, on a besoin de craies). La volonté de l'enseignante, exprimée dans l'entretien d'auto-confrontation, est « d'ancrer ça [l'activité] dans une partie de leur réalité pour les aider à se projeter ». L'enseignante conserve cependant une situation artificielle : il est impossible de savoir à l'avance à l'unité près combien de craies seront consommées, une commande « authentique » est contrainte au moins par boîtes de dix, un bon de commande se fait en général par école… Cette pratique de pseudo-authenticité est usuelle dans l'enseignement ordinaire et spécialisé. L'enseignante cherche à préparer l'enrôlement dans la tâche, mais garde le contrôle des tâches proposées. Elle suppose que les élèves s'engageront moins facilement dans une tâche moins motivée socialement.

L'enseignante choisit de mettre à disposition des élèves un matériel, des bâtonnets, plus commode (et plus disponible) que des craies. Ce matériel peut avoir pour elle une double fonction (confirmée dans l'entretien) : aider à se représenter le problème des craies et aider à « décomposer des nombres ». Le double contexte (craies et bâtons) occasionne une tâche supplémentaire pour les élèves (transparente pour l'enseignante) : représenter les craies par des bâtons. Cette tâche n'est pas inintéressante puisque cela les entraîne à l'invariance de résultats dans deux contextes différents (craies et bâtons). Travailler directement dans le contexte bâtons eut été une autre possibilité.

Dans la continuité de la séance d'avant, l'enseignante choisit de présenter données et travail à faire dans un tableau. On peut supposer qu'avec cette présentation condensée l'intention de l'enseignante est de réduire le temps de lecture et d'écriture des élèves. L'enseignante organise la série de tâches de même type (décomposition canonique en dizaines et unités) dans deux tableaux, ce qui montre qu'elle prend en compte une variable didactique à deux valeurs (non, oui), à savoir la présence d'unités isolées.

Les informations fournies dans les deux colonnes de droite du tableau ne sont pas symétriques : la colonne du milieu ne comporte que des mesures, celle de droite des quantités (mesures et unités). Cela peut être le signe d'une connaissance faible du rôle des unités pour les grandeurs discrètes. Les entêtes donnent bien les unités de mesure (craies, boîtes de craies), mais sans repréciser leur lien (une boîte, c'est dix craies).

[6] Les trois élèves commenceront d'ailleurs par discuter des souvenirs liés à la fréquentation des enseignants mentionnés dans la première colonne et interpelleront l'enseignante à ce sujet.

III - ANALYSE DE LA RÉALISATION DU DÉBUT DE L'EXERCICE

Rappelons que notre recherche se situe dans une approche compréhensive de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Le but de nos analyses est de comprendre comment les concepts mathématiques se forment à travers les « actions pour soi » et les interactions sociales, lorsque les élèves font des mathématiques, avec l'hypothèse de travail qu'elles sont constitutives de leurs apprentissages. Nous nous référons ainsi à la théorie de l'objectivation (Radford, 2006). Nous cherchons donc à prendre en compte les signes provisoires des élèves et la nature provisoire de leurs interprétations dans les processus d'apprentissage, mais aussi à identifier les blocages et les malentendus sémiotiques qui se développent dans leur activité mathématique.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la réalisation du début de l'exercice, c'est-à-dire au remplissage par les trois élèves du premier bulletin de commande. L'épisode démarre soixante-quinze secondes après le lancement de l'activité par l'enseignante :

Prof : Mélanie, Nick, Angèle, je vais vous donner une activité, toujours la même chose le bon de commande et qui ressemble à ce que vous avez fait, comme ça Mélanie, tu, ben tu vas travailler avec eux, ils vont te montrer ce qu'ils ont fait, et on pourra voir après pour les milliers, parce que c'est là où ça coinçait la semaine dernière.

L'épisode étudié (cf. annexe 3) fait suite à des échanges de souvenirs liés à la fréquentation des enseignants des classes des petits mentionnés dans la première colonne du tableau, échanges qui mettent d'ailleurs en évidence l'effet distracteur du contexte choisi.

Dans un premier temps, nous allons identifier la façon de procéder des élèves pour trouver le nombre de boîtes de craies livrées en mettant en lien leurs procédures avec les techniques de résolution présentées dans l'analyse *a priori* de la partie précédente. Dans un second temps, nous identifierons les malentendus sémiotiques qui se produisent lors de l'activité des élèves.

1 Procédures utilisées par les élèves pour compléter le premier tableau

1.1 Quelques éléments méthodologiques

Sur le plan méthodologique, notre analyse est basée sur une transcription multimodale de l'épisode, réalisée à partir de nos données (vidéos et enregistrements de la séance). Nous utilisons le concept de faisceau sémiotique, qui est un système composé de différents signes – mots (parlés ou écrits), représentations écrites, formes d'expression extra linguistiques (gestes, regards, etc.), matériel, etc. – et de leurs relations mutuelles, produits par les élèves et leur enseignant dans des activités de classe (Arzarello, 2006). La transcription multimodale est constituée d'une ligne sémiotique (cf. la conférence de Sabena dans ce même colloque) présentée sous forme d'un tableau (cf. la transcription de l'épisode relatif à la commande de 100 craies en annexe 2). Sur la première ligne, nous inscrivons des repères de temps, instants auxquels démarre chacune des interventions, ce qui donne ainsi des informations précises sur leur durée. Nous numérotons les interventions chronologiquement sur la seconde ligne et sur la troisième, nous notons leurs auteurs. Nous présentons ensuite les signes observés et leurs auteurs en introduisant autant de lignes que nécessaires en fonction de ce que les données nous permettent de relever. Par exemple, dans l'épisode étudié, nous avons relevé des mots parlés et des mots écrits (notés respectivement en caractères droits et en italique sur la transcription), ainsi que des formes d'expression corporelle (regard, gestes, action avec du matériel), que nous présentons par une description écrite ou par des photos ou dessins. Ainsi, sur la ligne sémiotique, sont représentés d'une part, le caractère systémique du faisceau se référant aux relations entre les différents types de signes à un certain moment, et d'autre part, sa nature dynamique se focalisant sur les évolutions des signes et leurs transformations au cours du temps.

Si notre grain d'analyse sémiotique se situe au niveau micro (de l'ordre de la seconde), nous confortons aussi nos interprétations par une analyse didactique plus globale.

1.2 Procédures des élèves

Mélanie

Mélanie se montre capable de formuler oralement la tâche, en s'appuyant sur un exemple suite à l'expression par Nick de ce qu'il faut faire, « des paquets de dix » : « faut qu'tu r'gardes combien il en faut d'dix, combien il faut d'dix euh cent, combien il faut de boîtes de dix pour faire cent » (78). Les gestes de pointage qui accompagnent son discours (*frappés sur « 10 »* à la lecture de « boîtes de 10 » et *frappés sur « 100 »* à la lecture de ce nombre de boîtes de craies commandées) montrent qu'elle décode bien ce qui est attendu dans cette présentation de la tâche sous forme de tableau. Absente lors de la séance précédente, elle ne peut s'appuyer sur l'activité analogue déjà réalisée, comme le peuvent Angèle et Nick.

Mélanie interprète *paquets de dix* par *nombre de dix*. On la voit dénombrer les *dix* avec ses doigts pour la commande de cent craies (technique T_{41}) : elle lève successivement ses doigts de la main gauche à partir du pouce en pointant chaque doigt avec son crayon tenu dans la main droite, puis elle lève successivement ceux de la main droite tout en murmurant la comptine numérique de dix en dix jusqu'à cent. Elle reconnaît alors la configuration *dix doigts*, ce qui lui permet d'écrire le nombre 10 dans la case réponse. Dans cette action, nous pouvons dire que Mélanie utilise ses doigts comme artefact pour trouver la réponse. Pour Mélanie, les doigts considérés comme signe sont utilisés avec deux valences (Chevallard, 1994) : une valence instrumentale quand elle les utilise pour énumérer gestuellement les dizaines, une valence sémiotique quand elle reconnaît comme dix la configuration de tous ses doigts levés.

Mélanie complète ensuite de plus en plus rapidement le nombre de craies commandées sans utiliser ses doigts. Nous pouvons supposer qu'elle utilise la technique T_1 de troncature des nombres, par lecture directe sur l'écriture chiffrée, après avoir repéré le lien entre 100 et 10 dans sa première ligne complétée. Des exercices ultérieurs confirment sa capacité à repérer une relation entre les nombres d'une ligne d'un tableau pour la réinvestir sur les autres lignes.

Angèle

Angèle signale dès le départ son incompréhension du travail attendu (75. « eh faut faire quoi là, j'ai pas compris ? »). La formulation de la tâche sur un exemple par Mélanie la conduit à donner oralement, sans hésitation et sûre d'elle, le nombre de *boîtes de dix* (78) nécessaires pour la commande de 100 craies, puis celle de 120 (79. « Bah dix ! », 89. « Ça fait douze ! »). Pourtant, elle ne cesse de réclamer de l'aide à l'enseignante et à Mélanie pour faire l'exercice (« Madame, j'ai pas compris », « Faut nous aider Mélanie, hein »). Il se peut que l'organisation écrite en tableau ne lui permette pas de comprendre la tâche. Elle ne semble pas faire le lien entre ses réponses et ce qui doit être dans le tableau, ni avoir d'idée sur la façon de procéder pour résoudre l'exercice. Il est possible qu'elle utilise, pour les commandes de 100 et de 120 craies, la technique T_0 en appui sur un résultat connu. Les mêmes deux premières lignes du tableau ont en effet déjà été complétées trois jours plus tôt avec l'aide de l'enseignante, et Angèle peut avoir mémorisé les résultats.

Pour la commande de 150 craies, Angèle dit en hésitant : « ça fait cinq » et se reprend, sans doute, comme le laisse supposer son regard sur le « 15 » qu'est en train d'écrire Mélanie (« ça fait combien ? Quinze »). Nous pouvons faire l'hypothèse d'une confusion entre chiffre des dizaines et nombre de dizaines dans sa réponse « cinq » donnée au départ.

Angèle complète les lignes suivantes probablement en copiant les résultats notés par Mélanie tout en continuant à solliciter de l'aide (95. « Maîtresse, je suis perdue, Mélanie, elle ne nous aide pas aussi »). Mais il se peut aussi qu'elle ait repéré des régularités entre nombres écrits en chiffres et réponses précédentes.

Nick

Nick exprime la tâche à réaliser ainsi : « Tu fais des paquets de dix », ce qui correspond à une étape d'une technique s'appuyant sur une représentation matérielle, *a priori* la technique T_5 qui part des bâtons ou des craies isolées et qu'il a mise en œuvre avec l'enseignante trois jours plus tôt. *Faire des paquets de* *dix* ne semble référer pour Nick qu'au matériel, qu'il ne cherche pas à utiliser cependant, peut-être parce que le bac de bâtons ne lui est pas accessible depuis sa place et que ni Mélanie, ni Angèle, ne s'en servent pour compléter le tableau. Aucune concrétisation de ce que suggère Nick (*faire des paquets de dix*), et qui correspond à ce qu'il a retenu de la séance précédente quand l'enseignante leur a demandé de se rappeler de ce qui a été fait (« on a fait des paquets d'dix »), n'apparaît de façon visible dans ses procédures de résolution de l'exercice. Pour commencer, il utilise probablement la réponse « bah dix » formulée par Angèle, en enchaînant oralement avec l'énoncé d'une procédure erronée, en appui sur la réponse pré-remplie « … boîtes de 10 » du tableau (figure 7).

Nick : ça fait dix plus dix ça fait vingt

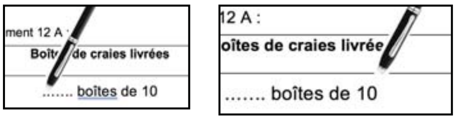


Figure 7. Procédure erronée de Nick.

Il écrit les réponses « 10 », « 12 » et « 5 » dans son tableau après leur formulation orale par Angèle et il continue de façon autonome en écrivant « 6 » comme nombre de « boîtes de 10 » pour la commande de 160 craies. Il semble partager la confusion d'Angèle entre chiffre des dizaines et nombre de dizaines. Il rectifie ses deux réponses par « 15 » et « 16 » suite à l'intervention d'Angèle (« ça fait combien ? Quinze »). Le « 40 », inscrit comme nombre de « boîtes de 10 » pour 200 craies commandées, pourrait provenir de la somme des quatre « 10 » des lignes précédentes. Nous entendons en effet par la suite, à plusieurs reprises, Nick tenter d'ajouter des nombres du tableau. La présentation sous cette forme contribue peut-être à cet « automatisme ».

2 Malentendus sémiotiques

Nous identifions deux types de malentendus au sein des faisceaux sémiotiques : des malentendus liés à des connaissances mathématiques et des malentendus de type interactionnel.

2.1 Malentendus liés à des connaissances mathématiques

Nick semble considérer que les nombres écrits en chiffres sont là pour être ajoutés entre eux, qu'une réponse doit s'appuyer sur un calcul. Pour la réponse de la première tâche (Mme Couvet), l'enseignante attend l'écriture du nombre « 10 » dans le vide laissé, pour obtenir *10 boîtes de 10*, implicitement *10 boîtes de 10 <u>craies</u>*. Or, suite à l'intervention d'Angèle qui donne à l'oral la réponse dix (79. « bah dix ! »), Nick déclare : « Ça fait dix plus dix, ça fait vingt » en pointant les deux places de *dix* dans la case concernée (82). Et il reformule en passant des mesures aux grandeurs suite à l'interrogation de Mélanie et en utilisant le même pointage : (84) « Ça fait dix boîtes, puis on en prend dix ». Ainsi, l'écrit est mal décodé par Nick, son interprétation semble révéler un malentendu sur la fonction de l'écrit en chiffres, qui ne serait proposé qu'afin de calculer. Cette hypothèse est corroborée lors du moment de la correction (hors annexe 3) avec l'enseignante, quand Nick dénombre cent bâtons en les comptant par paquets de dix (« dix, vingt, trente, …, quatre-vingt-dix, **cent** ») et conclut : « Ça fait cent-dix ». L'expression « de 10 » dans « boîtes de 10 » déclenche chez lui un ajout. En outre, à la fin du remplissage du premier tableau, on l'entend calculer à voix basse et énoncer le résultat suivant : « ça fait mille cinq cent quatre-vingt-cinq » comme s'il avait voulu ajouter tous les nombres du tableau.

Angèle, s'intéressant à la deuxième tâche (120 craies), oralise de façon erronée le nombre 120 dans sa réponse (87. « Ça fait douze, deux cent-vingt »), « prononçant » en quelque sorte deux fois le 2. Elle est immédiatement reprise par Mélanie (« **Cent-**vingt »), ce qui ne fait pas varier sa réponse (« Ça fait douze ! »). Ce malentendu est lié à la conversion entre oral et écrit en chiffres d'un nombre.

Les réponses correctes d'Angèle, dix et douze, peuvent être connues de mémoire (réponses à la même tâche réalisée trois jours plus tôt) ou trouvées par une analyse de l'écriture chiffrée des nombres. L'analyse de l'écrit est corroborée dans la troisième tâche (150 craies), où Angèle déclare cinq (pour les boîtes de dix) du tac au tac (91. « Ça fait … cinq »), le cinq repris par écrit par Nick (92). Cette réponse erronée nous semble traduire la difficulté de l'interprétation de la dizaine : chiffre dans le nombre ou nombre maximal de « dix » contenus dans le nombre.

Nous relevons ainsi plusieurs types de malentendus, qui ne sont pas inconnus des didacticiens et peuvent être liés par exemple à :

- la fonction des nombres écrits en chiffres dans la vie scolaire : par exemple pour Nick, les nombres semblent par moment très détachés des quantités qu'ils représentent, comme le constatent Drouhard & al. (1994) pour des élèves de collège étudiant l'algèbre ;
- l'utilisation conjointe de l'oral d'un nombre et de son écriture en chiffres pour dénombrer (Mounier, 2016) ; notamment le fait qu'un chiffre ait un nom différent selon sa position dans le nombre : le 4 de « 34 » se dit quatre ; le 4 de « 43 » se dit quarante.

2.2 Malentendus de type interactionnel

L'enseignante engage les trois élèves à travailler ensemble (« comme ça Mélanie, tu, ben tu vas travailler avec eux, ils vont te montrer ce qu'ils ont fait ») : Angèle et Nick ont travaillé avec l'enseignante lors de la séance précédente sur le même type de fiche, Mélanie était absente. Ainsi, l'enseignante installe le travail de groupe et dévolue la consigne de travail à Nick et Angèle.

Or les interventions d'Angèle montrent qu'elle ne se sent pas, par rapport à Mélanie, en position haute (Suau & Assude, 2016) de *celle qui donne la consigne*, bien au contraire. Ses attendus d'un travail de groupe ne sont pas en accord avec ceux que prévoit l'enseignante, compte tenu de la position haute qu'Angèle accorde habituellement à Mélanie (87. « Faut nous aider Mélanie hein »). Angèle semble accorder de l'importance à l'avis de Mélanie, qu'elle considère comme *celle qui sait*, sans doute aussi parce que Mélanie travaille habituellement avec deux élèves d'un meilleur niveau (information donnée par l'enseignante lors de l'entretien d'auto-confrontation). Comme Mélanie n'obtient pas l'aide qu'elle attend, elle se tourne vers l'enseignante « Maîtresse je suis perdue, Mélanie, elle nous aide pas aussi ». La dynamique interactionnelle qu'a voulu mettre en place l'enseignante ne fonctionne pas. Finalement c'est Mélanie qui initie le travail.

Lorsque Mélanie explique à Angèle ce qu'il faut faire en s'appuyant sur la première tâche (78. « faut qu'tu r'gardes combien il en faut d'dix, combien il faut d'dix euh cent combien il faut de boîtes de dix pour faire cent »), Angèle répond « bah dix ! » comme une évidence pour elle. Mélanie réplique par un geste des mains d'une durée assez longue (5 secondes) en tournant la tête à Angèle et sans mot dire. Durant ce geste, Nick dit à Angèle : « tu fais comme tu veux » (80) : on peut penser qu'il interprète ainsi le geste de Mélanie. Angèle enchaîne directement en interpelant l'enseignante et en exprimant son incompréhension de ce qu'il faut faire (81. « Madame, j'ai pas compris »). Cela peut découler aussi de son interprétation du geste de Mélanie, geste qui ne valide pas sa réponse, voire qui l'invalide !

Mélanie cependant n'est pas en mesure de valider ou d'invalider la réponse d'Angèle au moment où celle-ci la formule. Juste après, on la voit en effet mettre en œuvre une technique d'énumération avec les doigts en énonçant la comptine de dix en dix jusqu'à cent et noter la réponse « 10 » sur sa feuille. Les propos de Mélanie qui suivent son geste peuvent aussi éclairer en différé le sens de ce qu'elle veut transmettre par ce geste : Angèle et Nick ont déjà fait l'exercice, donc ils devraient savoir, alors qu'elle, elle ne l'a pas fait (85. « vous l'avez fait quand ? quand j'étais pas là, eh ben voilà, vous l'avez fait ! »). Nous identifions donc le sens du geste donné par Mélanie et les différentes interprétations qui en sont faites par Angèle et Nick comme un *malentendu de type interactionnel*.

Concernant le travail de groupe entre les trois élèves, si Angèle est en attente d'aide de la part de Mélanie, en revanche, elle ne tient absolument aucun compte des tentatives d'aide proposées par Nick : elle semble ne pas l'entendre et ne faire confiance qu'à Mélanie. Pourtant, celui-ci fait preuve d'une attitude ouverte et disposée à des échanges en groupe, conformément à ce qui a été demandé par l'enseignante. Il répond à la question d'Angèle lorsqu'elle demande ce qu'il faut faire (77. « Tu fais des paquets de dix »), il donne aussi réponse à la question de Mélanie (85. « Vous l'avez fait quand ? ») en prenant la peine de réfléchir à quand l'exercice a été fait, même si cela n'apporte rien à la résolution de la tâche (86. « j'ai fait … je réfléchis, euh, j'ai fait lundi »), il traduit la réponse gestuelle de Mélanie par le langage pour éclairer Angèle, il est réceptif aux réponses données à l'oral par Angèle et Mélanie, il les intègre dans sa réflexion. Ainsi, il va prendre les réponses « 10 », « 12 » et « 5 » pour les trois premiers items, déduire la réponse « 6 » pour le quatrième, puis transformer les « 5 » et « 6 » en « 15 » et « 16 » quand il entendra Angèle affirmer « quinze ». Enfin, il corrigera la première réponse « 10 » du premier tableau en « 101 » quand Mélanie parlera des cent-une craies du <u>deuxième</u> tableau. Cet incident nous laisse supposer que Nick n'exerce aucun contrôle sur ses réponses. Pour la transformation de « 10 » en « 101 », nous identifions un *malentendu-mal vu* que l'on peut peut-être attribuer aux difficultés de Nick à se repérer sur une feuille et dans un tableau, vu ses troubles visuo-spatiaux.

Mélanie, quant à elle, ne cherche pas à faire un travail de groupe, elle accepte juste d'expliciter ce qui est attendu. Elle refuse de prendre le rôle d'aidant qu'Angèle veut lui attribuer (97. « Moi j'peux pas travailler, vous aider et travailler en même temps, moi aussi faut qu'j'travaille. »).

Cette analyse met en évidence que les élèves peuvent ne pas comprendre soit ce qui est attendu d'eux, le tableau semble avoir un effet perturbateur sur Angèle et Nick, soit le rôle qui leur a été attribué au sein du groupe de travail : Angèle attend de l'aide de la part de Mélanie ; Mélanie réalise l'activité individuellement, ne se sentant pas capable de travailler et d'apporter de l'aide en même temps aux deux autres ; Nick essaie d'échanger avec Angèle et Mélanie, mais semble *parler dans le vide*, par exemple sa traduction erronée de « 10 boîtes de 10 » par « ça fait dix plus dix, ça fait vingt » n'est pas contestée par Mélanie alors qu'elle obtient une autre réponse en utilisant ses doigts au même moment. Ces malentendus peuvent avoir un impact déterminant sur la construction des concepts mathématiques visés car ceux-ci se réalisent dans un contexte interactionnel et *incarné*.

Grâce à cette observation il est possible de voir que le rôle que l'enseignante assigne à certains élèves (aider Mélanie à comprendre la consigne pour Angèle et Nick) et l'estimation que chacun a des connaissances de l'autre (la hiérarchie entre *sachants* que les élèves ont intégrée) influencent les interactions et les réponses. Ce phénomène n'est pas inconnu, il entre en résonance avec ce qu'a pointé Butlen (2012), lors de l'échec d'Yvan (Butlen 2012, p.141) dans un jeu de course à vingt entre deux élèves psychotiques. Il semblerait qu'un élève de l'enseignement spécialisé ait plus de mal à détacher la tâche scolaire de l'environnement matériel, social et affectif dans lequel elle s'insère. Il met en œuvre moins de contrôles de type mathématique sur les propositions de réponse (les siennes ou celles de ses pairs).

En brève conclusion, il nous semble avoir montré qu'une analyse sémiotique, en complément d'une analyse didactique au sens où nous l'entendons, nous permet d'enrichir nos connaissances sur les façons d'élèves de l'enseignement spécialisé d'interagir, d'apprendre, de comprendre les mathématiques et d'avancer sur les dimensions autres que linguistique et graphique de l'activité mathématique.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ARZARELLO F. (2006) Semiosis as a multimodal process, *Relime*, **vol.9**, extraordinario 1, 267-299.

BLOCH I. (2009) Enseignement des mathématiques à des élèves "en difficulté" : quelques outils pour la formation, à partir de situations et d'une étude des signes mathématiques, 63-79, in *Actes du 35e colloque COPIRELEM, Bombannes 2008*.

BUTLEN D. (2012) Questions autour de l'enseignement des mathématiques en ASH : deux exemples de recherche. Réflexions et perspectives. 126-148, In *Actes du Séminaire National de Didactique* 2012, ARDM

CHEVALLARD Y. (1994) Ostensifs et non ostensifs. *Conférence de Turin*. En ligne sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***19*** **(2)**, 221-226.

DROUHARD J.-P, LEONARD F., MAUREL M., PECAL M., SACKUR C. (1994) Calculateurs aveugles, dénotation et entretiens "faire faux". *Séminaire Franco-Italien II de Didactique de l'Algèbre* (Nice).

DUVAL R. (2006) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, 67-89, in *Actes du 32ème colloque COPIRELEM : Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs. Strasbourg 2005*. IREM de Strasbourg.

MARTINELLI E. (2012) Nombres et sémiotique peircienne, in *Actes du 38e colloque COPIRELEM. Dijon 2011*.

MOUNIER E. (2016) École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***36*** **(3)**, 347-396.

PETITFOUR E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris 7.

RADFORD L. (2003) Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students'Types of Generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, **5(1)**, 37-70.

RADFORD L. (2006) Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.

SUAU G. & ASSUDE T. (2016) Pratiques inclusives en milieu ordinaire : accessibilité didactique et régulations. *Carrefours de l'éducation,* ***42***, 155-169.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***10*** **(2-3)**, 133-170.

VERGNAUD G. (2004) Un cadre général en guise d'introduction. *La nouvelle revue de l'AIS,* **27**, 1-7.

V - ANNEXES

1 Annexe 1 : “Bulletin de commande”

1. *Document élève :*

La commande de craies pour les classes des petits

Les professeurs de l’IMPro commandent des craies.
Le marchand ne vend que des boîtes de 10 et des craies toutes seules (à l’unité).

Craie à l’unité	
Boîte de 10 craies	

Voici le bulletin de commande des professeurs du bâtiment 12 A :

Clientes	Nombre de craies commandées	Boîtes de craies livrées
Mme C.	100	……. boîtes de 10
Mme F.	120	……. boîtes de 10
Mme D.	150	……. boîtes de 10
Mme M.	160	……. boîtes de 10
Mme V.	200	……. boîtes de 10

Voici le bulletin de commande pour le collège du C. :

Classes	Nombre de craies commandées	Boîtes de craies livrées
Classe de 6°	101	….. boîtes de 10 et …... craies à l’unité
Classe de 5°	146	….. boîtes de 10 et …... craies à l’unité
Classe de 4°	246	….. boîtes de 10 et …... craies à l’unité
Classe de 3°	333	….. boîtes de 10 et …... craies à l’unité
Classe de SEGPA	350	….. boîtes de 10 et …... craies à l’unité

2. *Matériel à disposition*

2 Annexe 2 : Ligne sémiotique de l'épisode “commande de 100 craies”

An : Angèle, Ni: Nick, Me: Mélanie

		1'30	1'31	1'34		1'36	
		79	80			81	
		An	Me	Ni	Me	An	Me
MOTS	An	bah dix !				Madame j'ai pas compris	
	Me						*murmure la comptine de dix en dix*
	Ni			tu fais comme tu veux			
CORPS	An						
	Me						*lève successivement ses doigts : main gauche à partir du pouce, pointant avec son crayon dans main droite (cinq frappements)* 
	Ni						

		1'38				1'41	1'42	
		82				83	84	
		Me	Ni			Me	N i	
MOTS	An							
	Me	*Murmure* ... quatre-vingt, quatre-vingt-dix, cent				Heinein ?		
	Ni		ça fait dix	plus dix	ça fait vingt		Ça fait dix boîtes	puis on en prend dix
CORPS	An							
	Me					*s'apprête à écrire, puis cherche un autre stylo*		
	Ni				*regarde Me*			

		1'46	1'49		1'54			2'04
		85	86		87	88	89	90
		Me	Ni	Me	An			
MOTS	An				faut nous aider Me hein			
	Me	vous l'avez fait quand, quand j'étais pas là, eh ben voilà, vous l'avez fait.	j'ai fait ... je réfléchis, euh, j'ai fait lundi					
	Ni							
CORPS	An							
	Me			*écrit « 10 » sur la 1ère ligne*				
	Ni							*écrit « 10 » sur 1ère ligne*

3 Annexe 3 : Réalisation du début de l'exercice

75 An : eh faut faire quoi là j'ai pas compris ?

76 Me : en fait faut qu'tu …// *pointe sa feuille 4 fois*

77 Ni : tu fais des paquets de dix

78 Me : faut qu'tu r'gardes combien il en faut d'dix, combien il faut d'dix euh cent, combien il faut de boîtes de dix pour faire cent *// pointe sur l'énoncé*

79 An : bah dix !

80 Me : *réponse uniquement gestuelle qui ne dit ni oui, ni non*

// Ni : Tu fais comme tu veux

81 An : Madame j'ai pas compris

82 Ni : ça fait dix *// pointe* (2) plus dix *// pointe (3)*, ça fait vingt….

// Me *compte sur ses doigts de 10 en 10 en allant jusque 100*

83 Me : hein ?

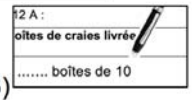
84 Ni : Ça fait dix boites, puis on en prend dix

85 Me : vous l'avez fait quand, quand j'étais pas là, eh ben voilà, vous l'avez fait. *Elle écrit 10 sur la première ligne.*

86 Ni : j'ai fait ... je réfléchis, euh, j'ai fait lundi

(2)

(3)



An : faut nous aider Me hein

87 An *affirmative :* ça fait douze, deux cent vingt

88 Me *la reprend :* <u>cent</u> vingt !

89 An : ça fait douze !

90 Ni *écrit 10 sur la 1ère ligne, 12 sur la 2ème du premier tableau*
Ni à voix basse : cent cinquante, *il réfléchit le nez en l'air*
// Me écrit 12 sur la 2ème ligne du premier tableau

91 An : ça fait ... cinq

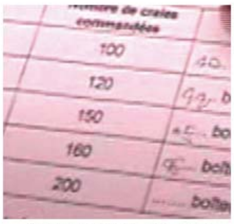
// Me : Attends *(elle n'a pas encore écrit 15)*

92 Ni : ouais, *Ni écrit 5 sur la 3ème ligne du premier tableau*
// Me écrit 15 sur la 3ème ligne du premier tableau

93 An : ça fait combien ? Quinze *(affirmative)* quinze
// Me écrit 16 sur la 4ème ligne du premier tableau
// Ni écrit 6 sur la 4ème ligne du premier tableau

94 Ni *regarde An et corrige son 5 en 15 et son 6 en 16 (4)*
// Me écrit 20 sur la 5ème ligne du premier tableau

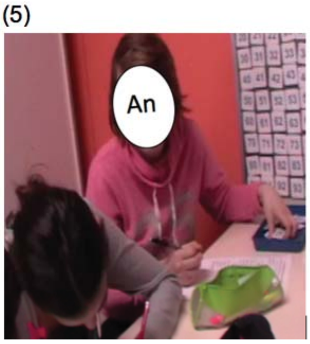
95 An : maîtresse je suis perdue. Me elle nous aide pas aussi *(5)*
An essaie de regarder discrètement sur Me qui en est à compléter la 1ère ligne du second tableau.



(4) Feuille de Ni

96 Prof : j'arrive, une seconde An
Prof travaille avec Alex : tu dessines la commande qu't'as préparée (*main sur les bâtons)*, t'imagine que c'est des craies hein parce que je n'ai pas assez de craies (*montre la boîte de craies)* pour vous donner des boites entières

(5)



97 Me : moi j'peux pas travailler, vous aider et travailler en même temps, moi aussi faut qu'j'travaille
// Me complète la 2ème ligne second tableau
// Ni écrit 40 sur la 5ème ligne du premier tableau.
La 1ère ligne du second tableau le laisse perplexe

98 Me *finit le second tableau.*

// Ni *Tout bas, pour lui :* qu'est ce qu'on voit au six ? *// pointe avec son crayon « 6° » sur la fiche.* N'importe quoi ! ça fait mille cinq cent quatre-vingt-cinq

99 Me : voilà, là, mettons cent, cent un, combien il faut d'boites de dix

//An : dix et un

100 Me : et une craie de l'unité, eh ben voilà ! fesez ça hein !

Ni : moi j'l'ai fait, *Ni corrige la 1ère ligne du premier tableau en écrivant 1 après le 10 pour obtenir 101.*

DU MATERIEL ET DES ACTIVITES DE MANIPULATION POUR SOUTENIR UN APPRENTISSAGE CONSTRUCTIF DES FRACTIONS ET DES OPERATIONS SUR LES FRACTIONS DE 10 A 14 ANS.

Isabelle BERLANGER
Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
isabelle.berlanger@galilee.be

Thérèse GILBERT
Maitre-assistante, Haute École Galilée (Bruxelles)
Groupe d'Enseignement Mathématique GEM (Louvain-la-Neuve)
therese.gilbert@galilee.be

Résumé
Cet atelier présente des activités de manipulation et de réflexion pour établir ou revoir le sens des règles sur les fractions et les opérations associées. Il s'agit d'utiliser des gabarits sur transparents pour déterminer des fractions représentées par des aires. Les aires sont choisies de telle façon que les différentes opérations et les règles associées se présentent naturellement. Nous évoquerons notamment le (un des) sens de la fraction, l'équivalence de fractions, le passage de la division à la barre de fraction et l'addition. Ces activités sont conçues pour la fin du premier degré et le début du deuxième (cycle 3 et début du cycle 4) et sont utilisées en formation d'enseignants. Notre travail s'appuie sur (et prolonge) des travaux tels que ceux de Rouche (1998) et Géron (2015).

I - ORIGINE DU PROJET ET OBJECTIFS

Le matériel et les activités ici présentés ont été conçus par un groupe de travail du Groupe d'Enseignement Mathématique[1], entre 2014 et 2017. Ils ont été présentés pour la première fois au congrès de la SBPMef[2] en 2015.

Les fractions constituent un sujet crucial à la charnière primaire-secondaire. Pleinement étudiées aux cycles 3 et 4, on les rencontre plus tard encore dans le domaine du calcul algébrique, des fractions rationnelles et des probabilités.

Un grand nombre d'élèves de tous niveaux d'enseignement sont en grande difficulté face aux fractions et ces difficultés perdurent bien au-delà de l'enseignement obligatoire, comme en témoignent notre propre expérience de formateurs et diverses études sur le sujet[3].

Une telle présence dans le cursus scolaire mérite une compréhension en profondeur des notions liées aux fractions. Parmi ces notions, les opérations sur les fractions, qui occupent une grande place dans les apprentissages, au cœur de la liaison primaire secondaire, sont à notre connaissance peu documentées.

Ces constats nous ont lancés à la recherche de situations problématiques permettant de *construire* les connaissances sur les fractions, et pas seulement de les mettre en jeu dans la résolution de problèmes.

---

[1] GEM, Louvain-la-Neuve, Université catholique de Louvain, Belgique.

[2] Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

[3] Voir par exemple Géron (2015 & 2016) ou Carette (2009).

L'objectif de cet atelier est de découvrir des activités de *manipulation*, de *représentation* et d'*expression* pour travailler le sens et la construction de notions liées aux fractions.

Précisons d'emblée que les activités qui suivent ne constituent pas une séquence de cours à tester telle quelle. Elles doivent être aménagées, adaptées au public, aux prérequis des élèves. Les participants tantôt ont vécu les activités destinées aux élèves, tantôt ont été invités à les adapter ou en concevoir d'autres en utilisant le même matériel. Certaines consignes sont spécifiquement destinées aux enseignants, elles incitent à prendre du recul.

II - L'ATELIER

1 À vue d'œil

La toute première consigne est la suivante.

Déterminez à l'œil les fractions représentées sur les deux vignettes ci-dessous.

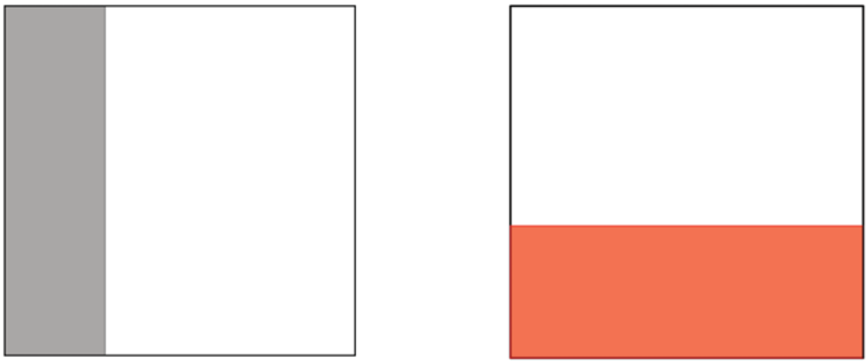


Figure 1

Élément important : **dès à présent et pour toutes les activités, l'unité est la même : il s'agit du carré apparaissant à la** figure 1.

Différentes réponses sont rapidement proposées par les participants : $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{10}$ pour la première vignette ; $\frac{1}{3}$ ou "entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$" pour la deuxième. Comment les départager ? Impossible sans outil supplémentaire. La manipulation du matériel va permettre de vérifier et préciser les estimations.

2 Découverte du matériel

Chaque participant reçoit une pochette (figure 2 et figure 3) dans laquelle se trouvent :

- une série de grilles transparentes (découpées), à positionner librement sur les vignettes ;
- une "fenêtre" servant de gabarit pour créer soi-même des vignettes (nous y reviendrons plus tard).

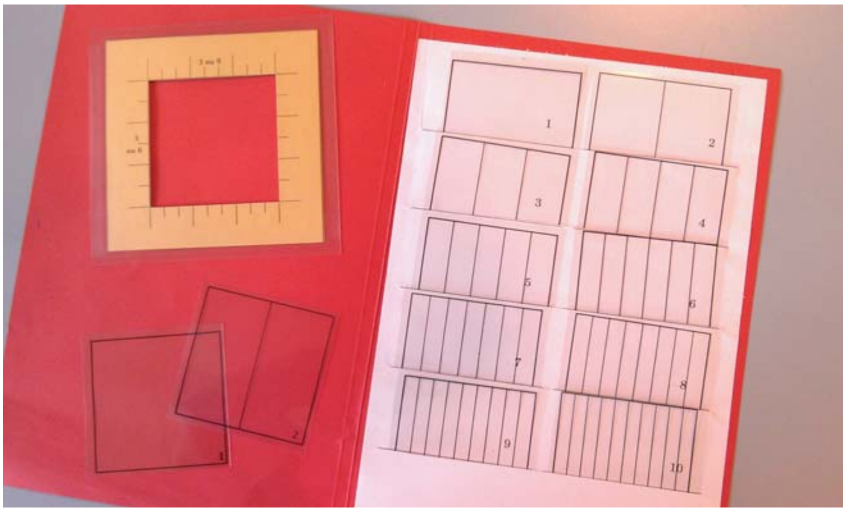


Figure 2. Matériel

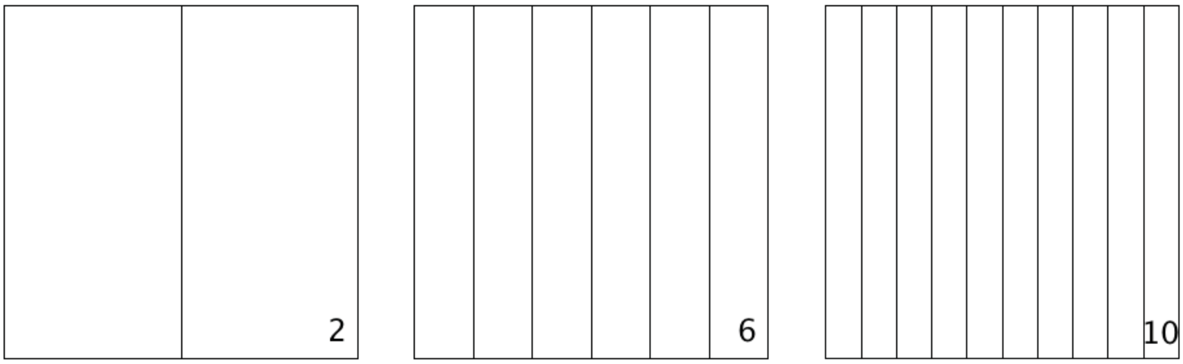


Figure 3. Exemples de grilles

Les réponses ne tardent pas, mais ne font pas l'unanimité pour la première vignette : s'agit-il de $\frac{2}{7}$ ou de $\frac{3}{10}$? Comment convaincre son voisin que l'on a été "plus précis que lui" ? Si l'utilisation des grilles seules laisse planer le doute, leur superposition est sans appel : $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{10}$, "*ce n'est pas la même chose*". La différence entre les deux apparait sous forme d'une mince bande blanche, que l'on ne cherche pas à ce stade à quantifier, mais qui est bien présente. Nous proposons, en cas de doute, d'illustrer cette différence à l'aide d'un logiciel de géométrie[4], qui permet de trancher en zoomant fortement sur la zone incriminée (figure 4).

[4] Ici à l'aide d'un fichier GeoGebra faisant partie du matériel.

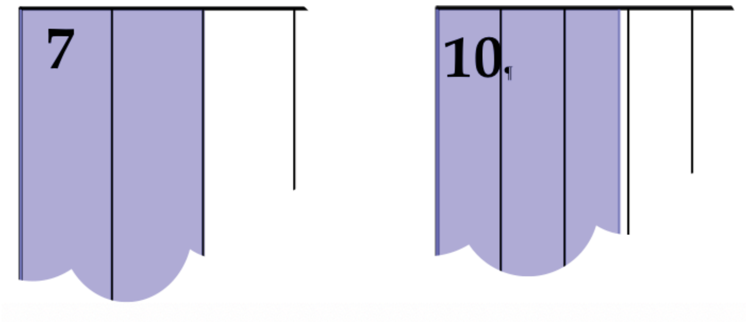


Figure 1. Zoom à l'aide d'un logiciel de géométrie

Le matériel est complété par un jeu de fiches en couleur proposant différentes vignettes, classées par thèmes[5]. La première série de fiches ne vise pas un apprentissage en particulier ; les fiches contiennent des vignettes très variées. Le but est de se familiariser avec le matériel, de (re)découvrir différents aspects des fractions, de faire émerger (ou de casser) certaines représentations. Les participants, ou les élèves en classe, travaillent ici à plusieurs sur une même fiche, pour favoriser les échanges d'idées. À ce stade, les participants ont sous les yeux les vignettes des figures 5 à 16, et l'unique consigne suivante :

« Déterminez les fractions représentées en utilisant les transparents ».

Précisons que, lors des essais effectués dans des classes de différents niveaux d'âge, les élèves n'ont jamais rencontré de problème particulier pour s'approprier le matériel. Sa manipulation ne nécessite pas d'explications préliminaires. Si des erreurs surviennent malgré tout (par exemple, des élèves ne se soucient pas que les grilles s'ajustent bien à la partie colorée), il est même bienvenu de les "laisser venir" pour mieux les surmonter ensuite. Nous reprenons ci-après quelques éléments-clés des découvertes associées à ces premières explorations, qui dévoilent déjà quelques atouts du matériel.

Tout d'abord, certains cas particuliers – délibérément redondants – permettent d'installer quelques images de base bien utiles : des *fractions simples* de type $\frac{1}{n}$ (figure 5), la notion de *double* (ou de *moitié*) (figure 6) ou encore *les fractions complémentaires* (par rapport à l'unité) (figure 7). La grille "2" (celle qui fournit la fraction $\frac{1}{2}$) sera naturellement utilisée pour vérifier que certaines bandes ont bien été coupées en deux, comme à la deuxième vignette de la figure 5 (où un tel découpage a même eu lieu dans les deux directions, horizontalement et verticalement) et à la figure 6.

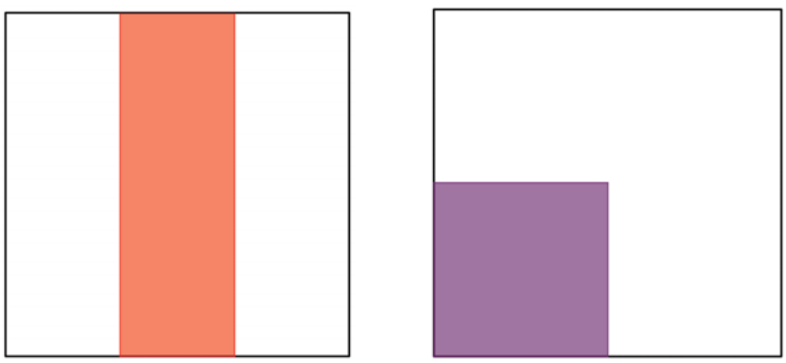


Figure 2. Les fractions simples $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$

[5] Quelques-unes de ces fiches sont reproduites en annexe.

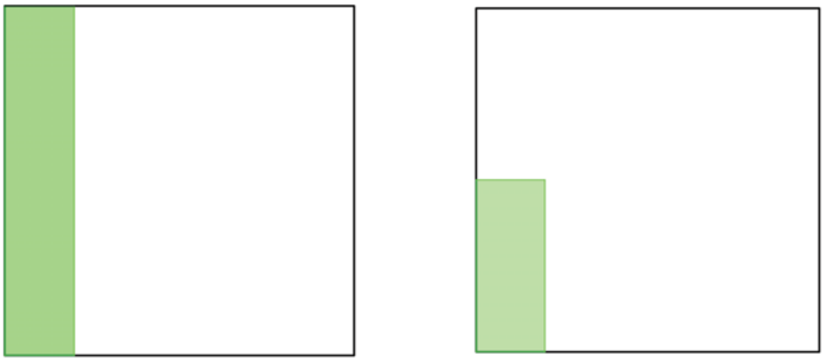


Figure 6. La fraction $\frac{1}{5}$ et sa moitié

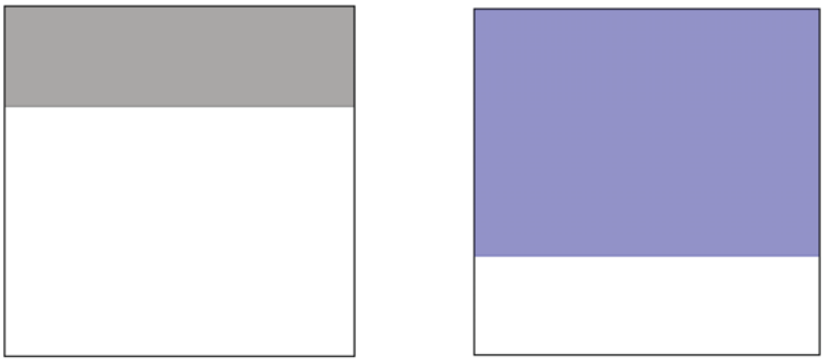


Figure 7. Les fractions complémentaires *les* $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$

Ensuite, la présence d'une même fraction simple, $\frac{1}{2}$ par exemple, sous de multiples formes, y compris non rectangulaires (voir les vignettes de la figure 8), permet d'avoir bien à l'esprit la *conservation de l'aire* en jeu ici : la fraction $\frac{1}{2}$ est représentée par une aire qui, quelle que soit sa "forme" ou sa "position", vaut toujours la moitié du carré-unité. Si nécessaire, le matériel peut aider à s'en convaincre, par exemple en déposant la grille "2" sur la figure et en procédant mentalement par décomposition-recomposition de la partie colorée, qui forme en tout $\frac{1}{2}$, comme suggéré à la figure 9.

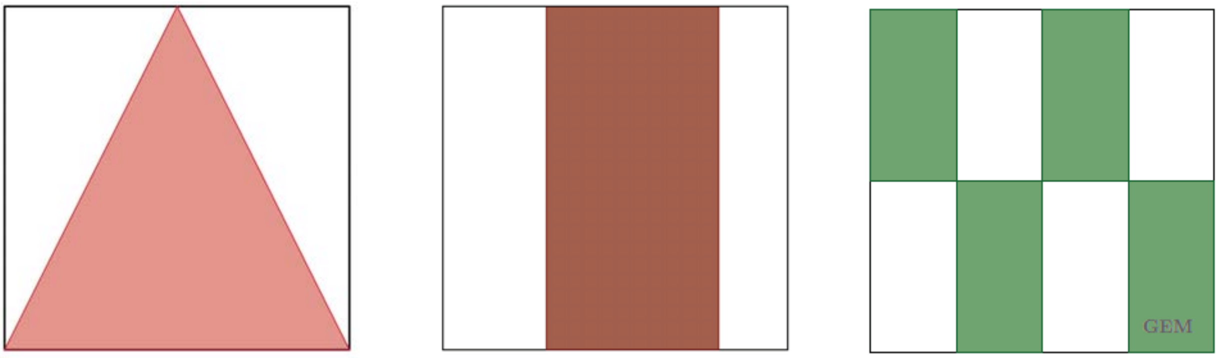


Figure 3. Différentes représentations de $\frac{1}{2}$

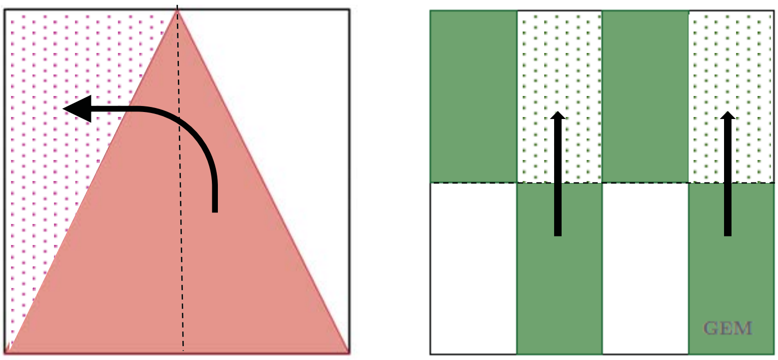


Figure 4. *Voir dans sa tête la fraction* $\frac{1}{2}$

La présence de *fractions supérieures à un* a également été remarquée (figure 10). On visualise particulièrement bien leur signification : il y a "débordement" du carré-unité. L'expérience nous a révélé qu'il était utile de mettre à disposition des élèves un transparent "unité", qui permet de se convaincre qu'une unité, même "déplacée" (les élèves font "glisser" le transparent pour s'en assurer), reste toujours une unité !

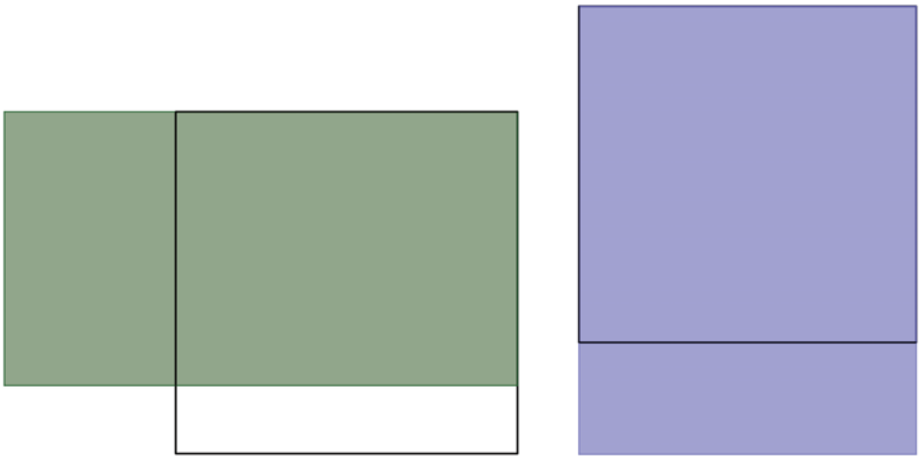


Figure 5. Fractions supérieures à 1

À contrario, la présence de parties qui "débordent" du carré initial alors que la fraction correspondante reste inférieure à l'unité (comme sur les deux premières vignettes de la figure 11) peut déranger certains élèves. Ce dérangement, et d'autres encore, sont plutôt bienvenus ; ils permettent de casser quelques fausses représentations : non, une fraction du carré ne doit pas obligatoirement être rangée *à l'intérieur* du carré ; non, elle ne doit pas être poussée "dans les angles" (figures 5, 8 et 11) ; oui, elle peut être tournée ou décalée par rapport aux sous-unités disponibles (deux dernières vignettes de la figure 11)… Plus les élèves se questionnent à propos de ces cas "bizarres", plus ils ont de chance de progresser dans leurs représentations.

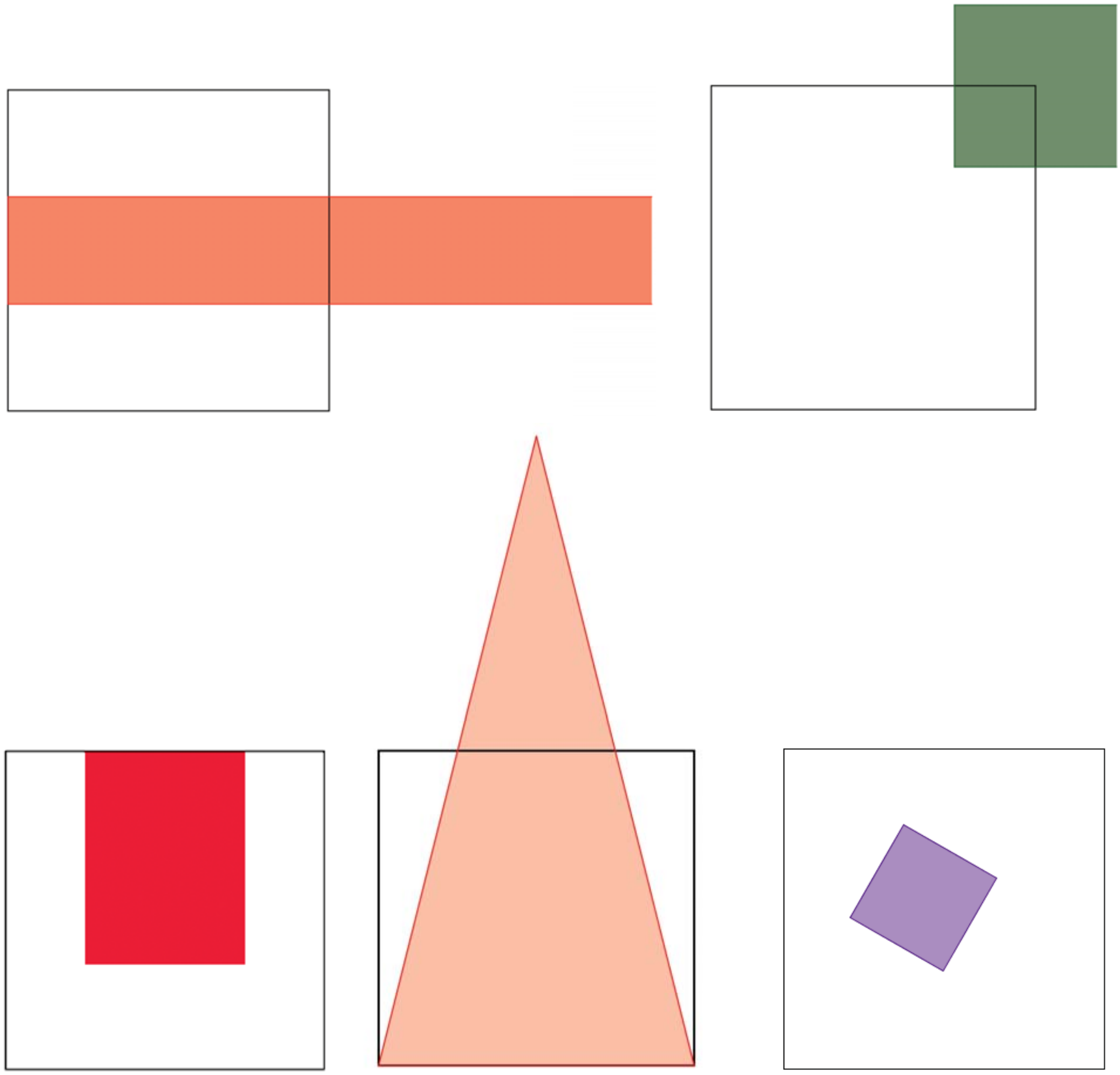


Figure 11. Quelques cas déroutants

De manière générale, la manipulation des transparents encourage et facilite une certaine mobilité entre les différents points de vue à l'œuvre à travers les activités : différentes "lectures" d'une même vignette, différentes représentations pour une même fraction, différentes fractions pour une même représentation. Les transparents peuvent en effet facilement être utilisés de *multiples manières*, qui ne génèrent pas forcément les mêmes images mentales. On peut les déposer "horizontalement" ou "verticalement", juxtaposer deux grilles (figure 12), les faire glisser (par exemple figure 13) ; on peut superposer les bandes "dans le même sens" et observer l'agencement des sous-unités (figure 14 à droite, par superposition des grilles "2" et "3") ; on peut aussi – c'est souvent une grande trouvaille ! – les *croiser,* ce qui permet de découvrir ou revoir, entre autres, que " $\frac{2}{10}$, *c'est comme* $\frac{1}{5}$ " (figure 6)ou " $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{1}{3}$, *c'est* $\frac{1}{6}$ " (figure 14 à gauche). En déplaçant mentalement les carreaux formés par le croisement des grilles (comme suggéré par les vignettes de la figure 15), en décomposant et recomposant les figures, on jette les bases des futures opérations sur les fractions, et ce sans faire aucun calcul.

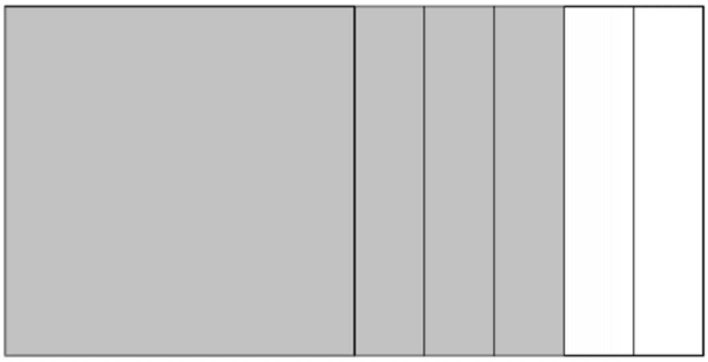


Figure 12. Juxtaposition des grilles « 1 » et « 5 »

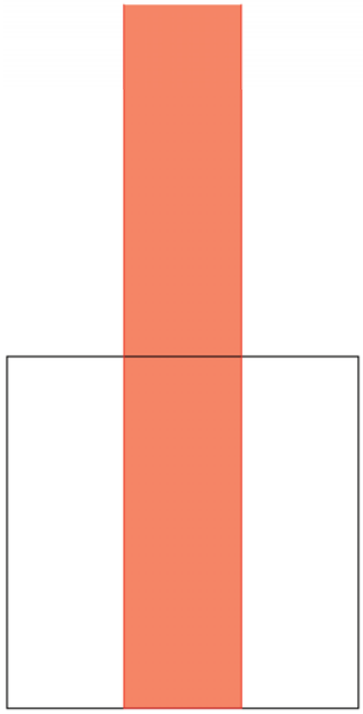


Figure 13. Voir $\frac{2}{3}$ en glissant le transparent « 3 »

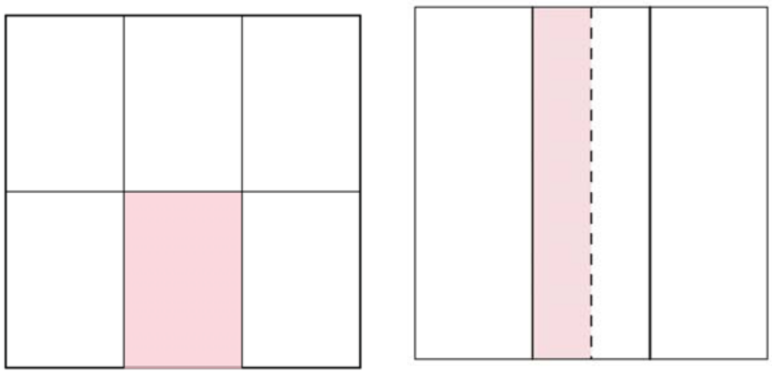


Figure 14. Deux manières de représenter « $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ »

Figure 15. Croisement de grilles

Par ailleurs, l'outil fait la part belle à *l'estimation*, une compétence utile à développer chez les élèves. Au fil des manipulations, l'œil s'aguerrit et le choix des transparents à utiliser devient plus sûr. Et en cas d'erreur, on peut toujours se poser la question d'un meilleur ajustement : "*Avec des* $\frac{1}{6}$*, ça ne tombe pas juste, dois-je plutôt choisir des* $\frac{1}{5}$ *ou des* $\frac{1}{7}$ *?*". Ici les sous-unités ne sont pas données d'emblée – ce qui force à se poser la question et à faire un choix parmi les transparents – mais elles sont facilement accessibles – ce qui dispense de fastidieux mesurages.

Enfin, notons pour terminer que certaines vignettes colorées ne montrent *pas* le carré-unité (figure 16). C'est là une manière de remettre au premier plan la question de l'unité. Quelle est-elle, si on ne la voit plus ?

Figure 6. Carré-unité non apparent

Nous incitons ainsi l'élève à se rappeler qu'un choix a été posé au départ, qu'il s'agit toujours d'une convention : sans unité déterminée, pas de fraction représentée. Mais ce simple rappel n'est certainement pas suffisant ; il serait bénéfique pour l'élève d'être confronté à une *variation de l'unité*, ce que ne permet pas notre matériel. Cette lacune devra être compensée par l'utilisation conjointe d'autres outils.

3 Création de vignettes

Lors des séances de travail avec le matériel, nous aimons alterner activités *d'analyse* et activités de *création* de vignettes par les participants. Rien de tel pour se faire une idée des représentations des élèves que de leur demander de concevoir eux-mêmes une vignette, éventuellement sous certaines contraintes.

Pour faciliter ce travail de représentation, nous fournissons à chaque participant un gabarit plastifié (figure 17. Une « fenêtre », recto et verso – que nous appelons *fenêtre* – qui permet de produire aisément un carré de la bonne taille ainsi que les différentes sous-unités reprises dans les transparents (à l'exception toutefois des septièmes), sans rien devoir mesurer.

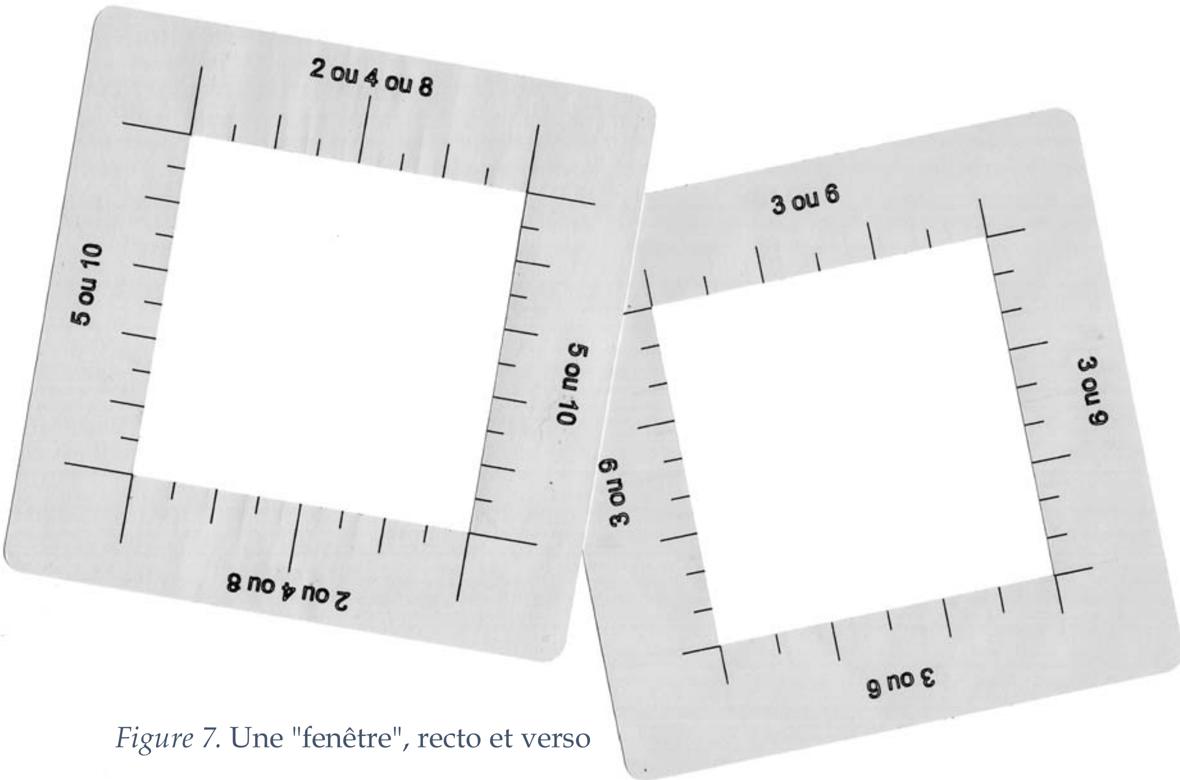


Figure 7. Une "fenêtre", recto et verso

Voici quelques exemples de consignes en ce sens :

- Trouvez d'autres représentations du demi. Pour cela, vous pouvez utiliser les "fenêtres".
- Représentez une fraction puis passez votre composition à votre voisin pour qu'il la détermine.
- En utilisant des fenêtres et les transparents, représentez les fractions $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$ et $\frac{5}{18}$ par des rectangles.

Les découvertes faites auparavant vont ici pouvoir être activement exploitées. On peut par exemple évoquer le croisement des transparents "3" et "5" pour créer des $\frac{1}{15}$, et en colorier 8 morceaux pour représenter $\frac{8}{15}$. Quelle que soit la manière dont on s'y prend, cela revient à dessiner un rectangle de dimensions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, ou $\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{5}$, ou toute autre combinaison adéquate.

4 L'équivalence de fractions

Après une première phase de découverte tous azimuts de la notion de fraction, nous abordons des points de matières plus spécifiques. Il arrive tout naturellement que, pour une même vignette, différentes fractions soient proposées. Il se peut ainsi que *l'équivalence* de fractions soit évoquée dans la première partie, mais il s'agit ici d'y revenir en profondeur, en terminant par la rédaction d'une synthèse qui en montre le sens.

Le matériel et les activités sont conçus pour aider l'élève à se forger des images mentales durables. Il faut évidemment qu'il puisse à terme se détacher du matériel, mais, à ce moment, il devrait pouvoir facilement évoquer mentalement les images qui lui ont permis de comprendre la première fois. "*Ah oui, c'est comme quand on croisait les grilles…, 1/12 rentre trois fois dans 1/4*".

Voici une suite d'activités qui permet de cheminer vers la synthèse attendue. Notons l'intérêt de la question 1.c), qui oblige l'élève à se détacher des grilles qu'il a sous la main et à entrer pleinement dans l'argumentation.

1. a) Déterminez les fractions représentées par les parties colorées en utilisant les transparents.

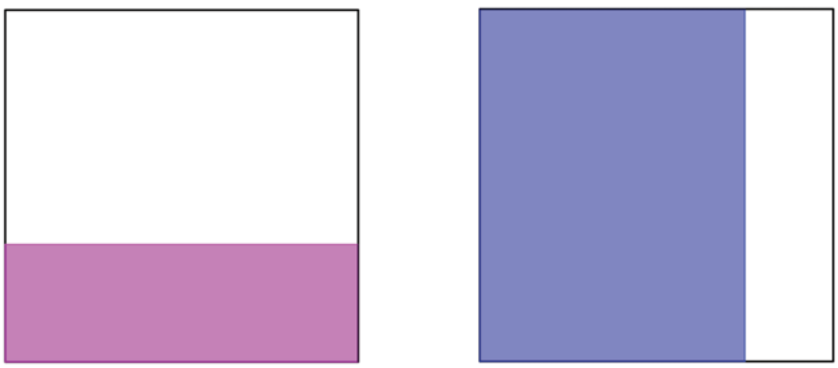


Figure 8

b) Déterminez d'autres fractions possibles pour ces mêmes parties et montrez à l'aide des transparents qu'elles conviennent bien.

c) Déterminez encore d'autres fractions possibles que les transparents ne vous permettent pas d'illustrer. Trouvez des arguments pour convaincre vos collègues que vous avez raison.

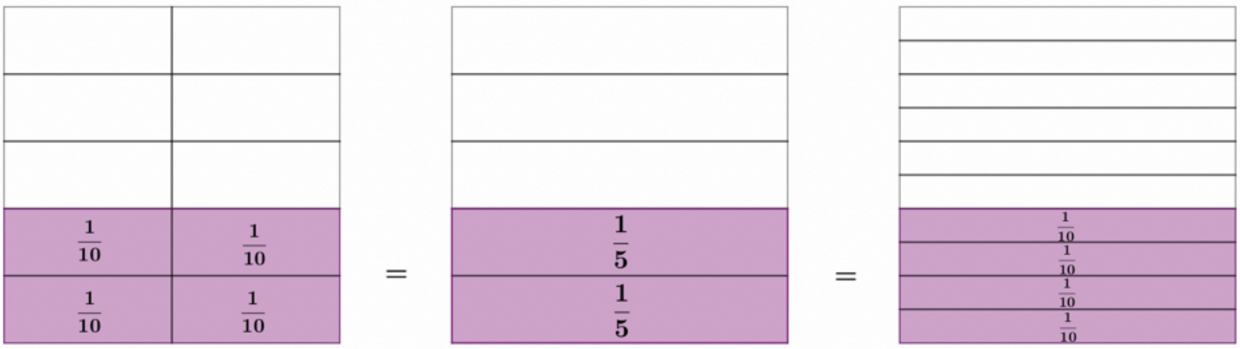
2. En utilisant des fenêtres et les transparents, représentez la fraction $\frac{1}{4}$ puis trouvez-lui une autre écriture en utilisant d'autres transparents. Même question pour $\frac{4}{6}$ et $\frac{9}{6}$.

3. Trouvez une fraction équivalente à $\frac{2}{5}$. Écrivez un texte avec dessin qui explique à un élève qui aurait été absent pourquoi ces deux fractions sont égales.

Lors des manipulations, nous insistons sur la *justification* des observations : "*Pourquoi est-ce que ça marche comme ça et pas autrement ?* ". Avec les transparents, l'élève peut voir concrètement que $\frac{1}{10}$ est deux fois plus petit que $\frac{1}{5}$, ou que "$\frac{1}{12}$ entre trois fois dans $\frac{1}{4}$". Ainsi, l'équivalence de fractions apparait plus naturellement : "si les morceaux sont *deux fois plus petits*, je dois en prendre *deux fois plus* pour avoir la même chose".

Voici une idée de la synthèse que l'on peut entrainer les élèves à produire.

SYNTHÈSE : ÉQUIVALENCE DE FRACTIONS



$\times 2$ On prend 2x plus de morceaux.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$\times 2$ Les morceaux sont 2x plus petits.

Si on prend des morceaux deux fois plus petits,
il faut en prendre deux fois plus pour garder la même part du carré-unité.

On dit que $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{10}$ sont des fractions *équivalentes*, car elles représentent la même partie de l'unité.

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre,
on obtient une fraction équivalente.

Des participants attirent l'attention sur la difficulté du passage du langage courant à l'écriture mathématique, bien présente ici : "les morceaux sont deux fois *plus petits*", se traduit à l'écrit par une flèche accompagnée d'un "x2", alors qu'en toute logique, on attendrait un ": 2". Encore une fois, la nécessité de bien installer les premières images des fractions se fait sentir. Nous pensons que les transparents peuvent y contribuer, notamment parce qu'ils montrent toujours les sous-unités ensemble formant l'unité (sur le transparent, les cinquièmes vont par cinq), et que leur superposition fait voir les concordances entre sous-unités ($\frac{2}{10}$ et $\frac{1}{5}$ se superposent exactement).

Pour terminer, soulignons que – comme bien souvent en classe – les images porteuses de sens ne sont pas ici les mêmes pour les uns et les autres. Pour voir que $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, certains préfèrent superposer les $\frac{1}{5}$ et les $\frac{1}{10}$ "dans le même sens" (horizontalement ou verticalement), tandis que d'autres trouvent l'équivalence beaucoup plus claire lorsque les grilles de $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$ sont croisées pour donner des $\frac{1}{10}$. Et si le $\frac{1}{10}$ obtenu en croisant les transparents ne "ressemble pas" à priori à la bande de $\frac{1}{10}$, il y a bien moyen d'argumenter qu'il s'agit de parties de même aire, par découpage et assemblage, ou parce qu'elles entrent chacune dix fois dans l'unité. La facilité avec laquelle le matériel permet de passer d'une représentation à l'autre est, ici encore, un atout.

5 De la division à la barre de fraction

Pourquoi 5 : 6 est-il égal à $\frac{5}{6}$? On a d'un côté une opération de base, la division, majoritairement interprétée en primaire comme partage *d'un certain nombre d'unités* (ici, "*Je partage 5 unités en 6*"), et de l'autre une fraction, qui évoque d'abord le partage d'*une unité* en un certain nombre de parts (ici, "*Je partage une unité en 6, et j'en prends 5 parts*"). Il n'est pas évident que les résultats de ces deux partages coïncident ! Il y a ici une difficulté à surmonter.[6] Voyons comment l'utilisation des transparents peut aider les élèves à faire des liens entre ces deux représentations.

On donne la consigne suivante, et on invite les participants à utiliser les transparents ou la fenêtre pour représenter leur solution : « Six amis achètent ensemble cinq pizzas et veulent se partager ce repas équitablement. Comment faire ? Quelle part recevront-ils chacun ? Illustrez votre réponse en représentant les pizzas par des carrés. »

Il n'est pas facile de partager directement 5 pizzas en 6 parts égales ; dans tous les cas, il faut un peu ruser. Sur la figure 19, on a reproduit trois des solutions proposées.[7]

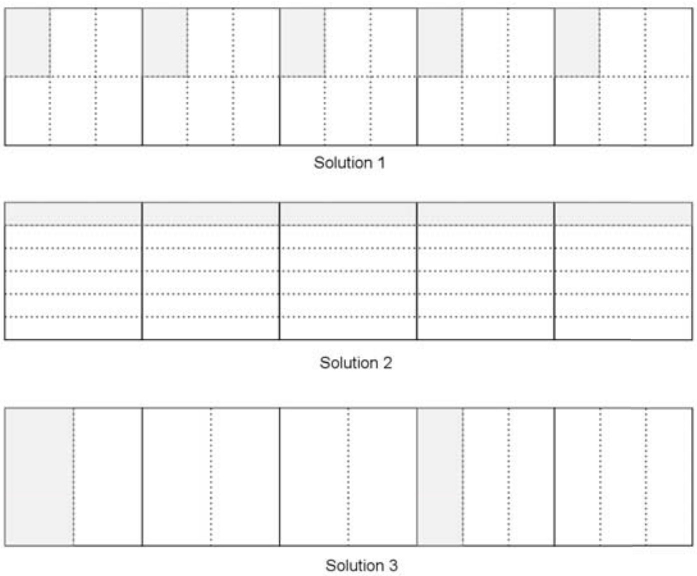


Figure 19. Comment partager 5 pizzas en 6 ?

[6] Une autre difficulté, qui vient se greffer sur la première, concerne l'interprétation de l'égalité qui lie les deux écritures. En primaire, le signe "=" appelle le plus souvent, dans la tête des élèves, une "réponse" à donner, et il n'est pas évident qu'une fraction puisse jouer ce rôle – surtout si les fractions n'ont pas encore acquis pour l'élève leur statut de nombre. Cet aspect des fractions n'est pas pris en charge par le matériel présenté ; il est important d'être conscient de ces limites.

[7] Pour des raisons de mise en page, les carrés-unités ne sont pas ici de même grandeur que précédemment.

Dans la première solution, chacune des 5 "pizzas" a été partagée en 6, et chacun prend un morceau de chacune (on peut imaginer qu'elles ont des gouts différents et que chacun veut gouter à tout) ; dans la deuxième, on s'est arrangé pour partager en 6 bandes égales les 5 pizzas mises côte à côte ; dans la troisième solution, les trois premières pizzas sont partagées en 2, procurant 6 morceaux, et les 2 pizzas restantes ont été chacune partagée en 3, ainsi chacun mangera $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ de pizza.

Que nous apprend cette activité ? Le problème, extrait de son contexte, demandait $5 : 6 \ = ?$,

ce que montre bien et de façon directe la solution 2. Et qu'obtient donc chacun des amis ? Les solutions 1 et 2 montrent 5 parts valant chacune $\frac{1}{6}$ de l'unité, donc $\frac{5}{6}$ en tout, pour chacun d'eux.

On a donc

$$5 : 6 \ = \ 5 \, . \, \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \ .$$

On a donc construit une image pour comprendre le passage de la division à la barre de fraction.

De plus, la solution 3 nous montre, de façon plutôt originale, que

$$5 : 6 \ = \ (3 : 6) + (2 : 6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ .$$

6 Somme de fractions[8]

Les participants ont d'abord vécu une activité[9] pour élèves, testée dans une classe de primaire.

> « 1. La somme de deux fractions vaut $\frac{1}{2}$. Quelles peuvent être ces deux fractions ?
>
> Représentez pour convaincre. »

Cette activité est riche tant pour les élèves, que l'on peut inciter à trouver plusieurs solutions, à argumenter, à communiquer, que pour le professeur qui a ainsi accès à leurs représentations privilégiées et peut observer leurs erreurs (le changement d'unité en cours de travail, illustré dans la deuxième production de la figure 20. Deux productions d’élèves en est une bien résistante).

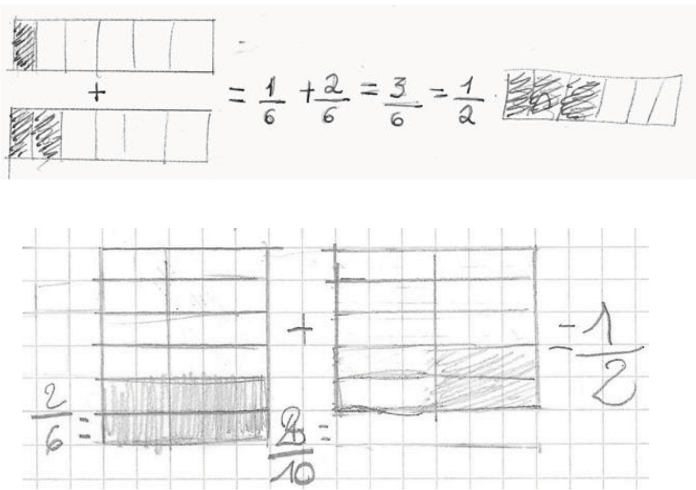


Figure 20. Deux productions d’élèves

[8] Cette partie concernant la somme de fractions a été relatée dans le récent ouvrage du Groupe d'Enseignement Mathématique, *Le plaisir de chercher en mathématiques* (Gilbert & Ninove, 2017).

[9] Le défi initial vient de P. Sullivan et P. Lilburn (2010), *Activités ouvertes en mathématiques*, Chenelière Éducation. Les autres consignes ont été créées au GEM en 2016.

Dans la suite du travail avec les élèves, nous proposons des vignettes qui font naturellement émerger la *somme* de fractions. On y trouve deux parties colorées, ou éventuellement une, qu'il faut mentalement décomposer (figure 21). L'ingrédient-clé de la technique opératoire de l'addition – à savoir la recherche de sous-unités communes aux différentes parties et à l'unité – est alors évoqué. Il s'agit dès lors de se concentrer sur ce point pour avoir une chance de montrer le sens de la procédure que les élèves vont devoir construire.

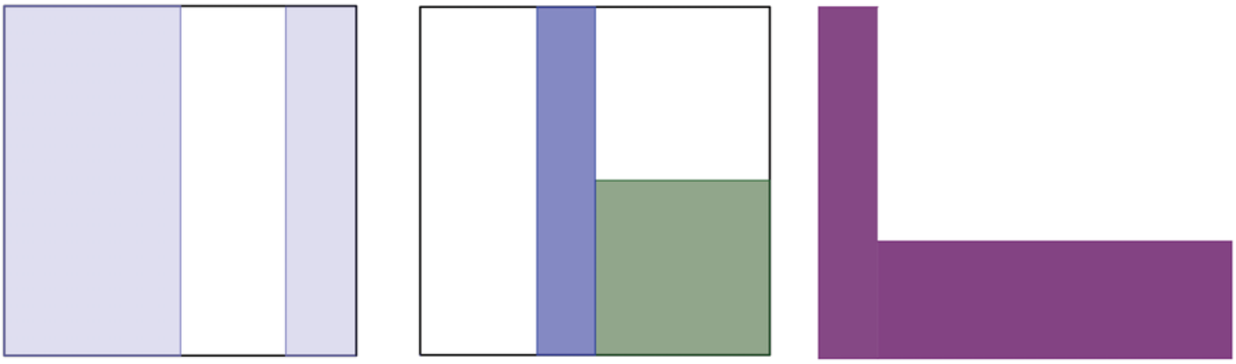


Figure 9. Somme de deux fractions

Lors de l'atelier, nous avons plutôt travaillé la consigne suivante, qui s'adresse aux enseignants. Ceux-ci sont invités à concevoir eux-mêmes des vignettes permettant de travailler les difficultés typiques de l'addition de fractions.

> « 2. Construisez des parties colorées qui permettent de faire émerger l'addition de fractions.
> a) Au moins une des figures construites doit permettre aux élèves de penser à une somme de fractions de dénominateurs différents.
> b) Au moins une des figures construites doit permettre aux élèves de penser à une somme de fractions
> — de dénominateurs différents,
> — non multiples l'un de l'autre,
> — mais dont le "dénominateur commun" peut facilement être mis en évidence. »

Essayons de représenter $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Si on place les parties représentant les fractions comme à la figure 22, il est difficile de déterminer la fraction correspondant au tout. Si on croise les deux parties dans le carré unité (figure 23), il faut tenir compte de la superposition partielle des deux bandes. Mais les participants construisent aussi des vignettes sans superposition et où le dénominateur commun est tout aussi accessible par croisement des transparents (figure 24).

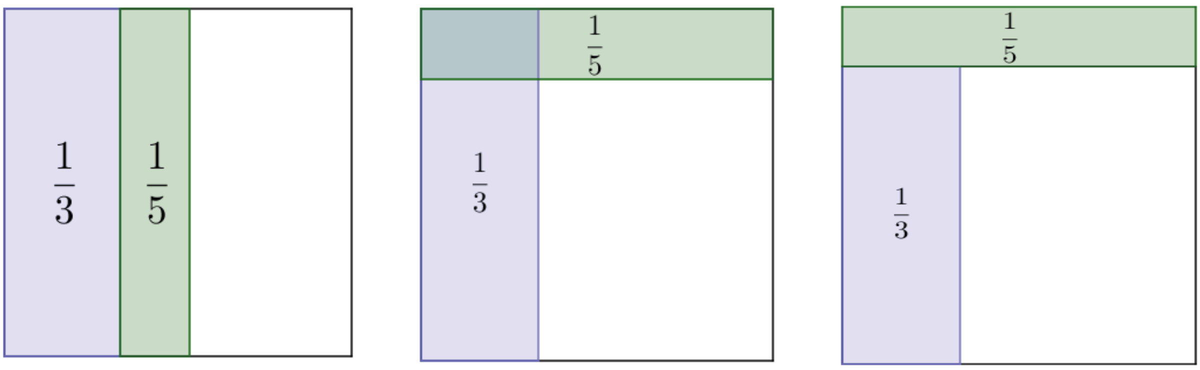


Figure 10 *Figure 11* *Figure 12*

C'est aussi le cas de celles que nous proposons. La figure 21, à gauche, fait apparaitre la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, avec le dénominateur commun 10 (la sous-unité commune $\frac{1}{10}$) facilement accessible par superposition des transparents (ou en choisissant directement la grille "10"). Au milieu est représentée la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$. Les $\frac{1}{12}$ sont disponibles par croisement des transparents "6" et "2". Certains participants ont plutôt visualisé des $\frac{1}{24}$, ce qui permet de souligner que le dénominateur commun n'est pas unique.

Enfin nous terminons par une discussion autour de la vignette de la figure 25, qui permet de synthétiser les découvertes.

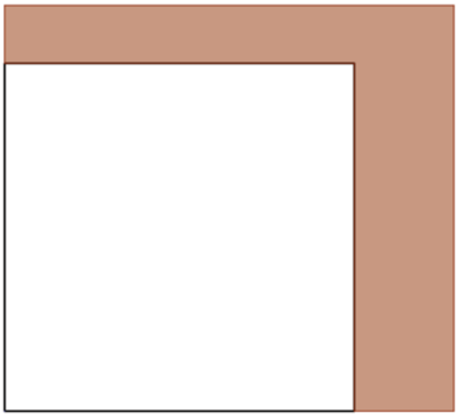


Figure 13.

Des essais avec différentes grilles (figure 26) nous mettent rapidement sur la piste de trois "morceaux" :

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+? \ .$$

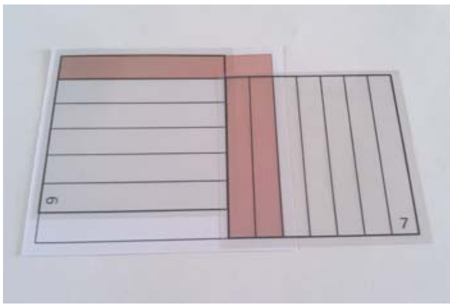


Figure 26. Choix des transparents « 6 » et « 7 »

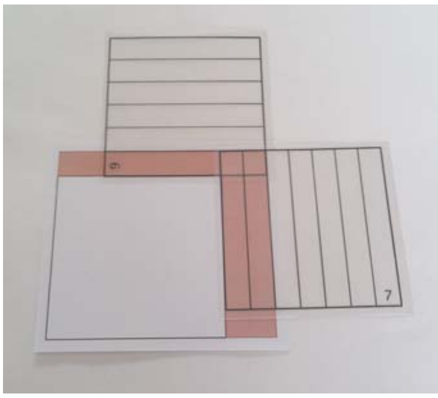


Figure 27. Détermination du dénominateur commun

Étant donné la disposition des grilles, on peut penser à les croiser pour obtenir le morceau inconnu, qui vaut donc $\frac{2}{42}$ (**Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**). Voilà les $\frac{1}{42}$ disponibles pour exprimer la somme par une seule fraction :

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}+\frac{2}{42} = \frac{7}{42}+\frac{12}{42}+\frac{2}{42} = \frac{21}{42} \ .$$

Le fait de s'autoriser à "sortir du carré" est ici un atout, car il permet de représenter les sommes et de repérer naturellement le dénominateur commun sans superpositions gênantes, comme ce serait le cas dans une représentation plus classique à l'intérieur du carré-unité (figure 23).

Certains ne manqueront pas de remarquer que la vignette de la figure 25 représente finalement la fraction $\frac{1}{2}$. L'utilisation du matériel ne nous mène donc pas à la solution simplifiée, mais ce n'est pas gênant, car la manipulation doit petit à petit céder le pas à l'argumentation mathématique. Après le travail réalisé sur l'équivalence de fractions, on peut à présent être convaincu que $\frac{42}{21} = \frac{1}{2}$ sans avoir besoin de le "voir".

III - CONCLUSION

Tout au long de cet atelier, nous avons voulu mettre en évidence l'importance que nous accordons à la *construction du sens* dans les apprentissages en mathématiques. Par les activités concrètes proposées – réalisables dans nos classes – nous avons voulu montrer comment, dans le domaine des fractions et des opérations sur les fractions, ce sens peut progressivement s'installer, soutenu par des activités de *manipulation*, de *représentation* et d'*expression.*

Ces trois facettes de l'activité mathématique en jeu ici sont à nos yeux indissociables. Manipuler ne suffit pas ; pour s'ancrer, les notions ont besoin d'être représentées et exprimées. Le va-et-vient entre manipulations, représentations et verbalisation va contribuer à la création d'images mentales, qui resteront disponibles, en toile de fond, pour les apprentissages futurs, permettant *in fine* à l'élève d'utiliser le savoir acquis.

Mais, réciproquement, le seul accès à des constructions théoriques – telles que des définitions et descriptions de procédures reprises dans un manuel – même accompagné de représentations et d'"explications", si performantes soient-elles, ne suffit pas non plus. L'élève doit, d'une manière ou d'une autre, *s'approprier* ces explications. L'enjeu ici était de montrer comment des activités de manipulation peuvent le soutenir efficacement dans ce travail.

Il n'est évidemment pas question de sortir des transparents chaque fois qu'on voudra additionner deux fractions ! À terme, l'utilisation efficace des savoirs acquis suppose que l'élève puisse se *détacher du matériel* qui a contribué à la naissance de ces savoirs, même s'il peut l'évoquer mentalement aussi souvent que nécessaire.

N'oublions pas de dire également quelques mots sur les limites de ce matériel et des séquences d'apprentissage qui l'accompagnent. Nous n'avons pas la prétention ici de présenter un outil "clé sur porte" qui serait la solution pour l'enseignement des fractions et le remède miracle à toutes les difficultés évoquées en commençant. Il s'agit d'un matériel parmi d'autres, dont nous avons tenté de faire découvrir les spécificités et atouts. Il sera de toute manière toujours préférable de varier les contextes d'apprentissage et d'utiliser plusieurs outils complémentaires.

Le présent matériel vise principalement deux aspects de l'objet "fraction", celui de la *fraction-opérateur* et de la *fraction-mesure*. Il permet la découverte des fractions comme portions d'une aire-unité. Dans ce cadre on rencontre naturellement l'équivalence, mais aussi l'addition et la multiplication, ainsi que la comparaison de fractions. Les activités vécues dans cet atelier ne sont qu'un petit aperçu des activités existantes. La fraction-rapport, par exemple, n'y a pas été abordée.

Il reste également à intégrer les présentes activités dans le continuum des apprentissages visant les fractions, qui s'étale sur plusieurs niveaux. Ce matériel n'a pas été conçu pour entamer le travail sur les fractions, ni pour le clôturer. Nous ne proposons ici ni exercices de fixation, ni problèmes d'application qui montreraient l'utilité des fractions au quotidien ou dans les mathématiques. L'idéal serait que l'élève puisse à terme résoudre des problèmes faisant intervenir des fractions, en convoquant si nécessaire des images que le matériel a contribué à construire.

Enfin, nous remercions les participants à l'atelier pour leur intérêt, leurs remarques pertinentes et la rédaction du rapport. Certains d'entre eux nous ont fait part de leur intention de tester le matériel. Nous serons ravies de recevoir un écho de leurs expérimentations mathématiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CARETTE V., CONTENT A., REY B., COCHE F., GABRIEL FL. (2009) *Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire, Rapport final de la recherche n°126/07 financée par la Communauté française*. Bruxelles : Université libre de Bruxelles (ULB).

GEM (1999) De la fraction-tarte au nombre, in *Proceedings de la 3e université d'été européenne "Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique"*, Louvain-La-Neuve, 261-318.

GERON C. & AL.(2016) À la liaison primaire-secondaire : l'apprentissage des fractions, *Losanges,* **32,** 3-18.

GERON C. & AL. (2015) À la liaison primaire-secondaire : la fraction dans tous ses états, *Losanges,* **31,** 8-17**.**

GILBERT T., NINOVE L. (dir.) et le Groupe d'enseignement mathématique (2017) *Le plaisir de chercher en mathématiques, de la maternelle au supérieur, 40 problèmes.* Louvain-la-Neuve, Belgique : PUL.

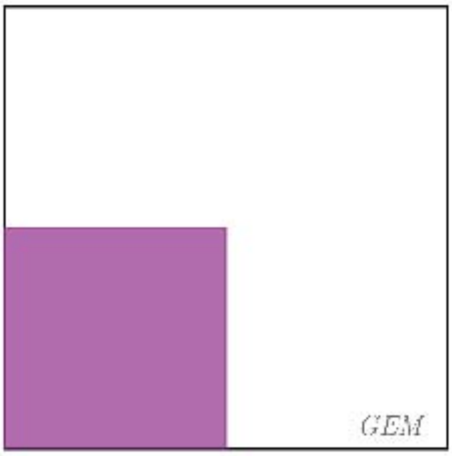
Nguyen T.-L. (2015) *Quel matériel (concret ou informatique) utiliser pour comprendre les fractions et les identités remarquables ?* Travail de fin d'études, Haute École Galilée (ISPG), Bruxelles.

KINDT M. (2004) *Positive Algebra, a collection of productive exercices,* on http://www.primas-project.eu, Freudenthal Instituut, 103-114.

ROUCHE N. (1998) *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

V - ANNEXE

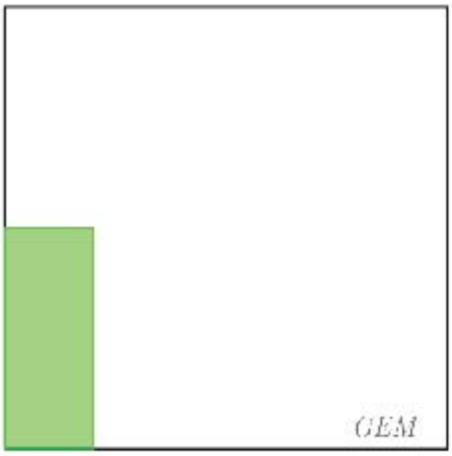
Fiche 1.4



a

b

c

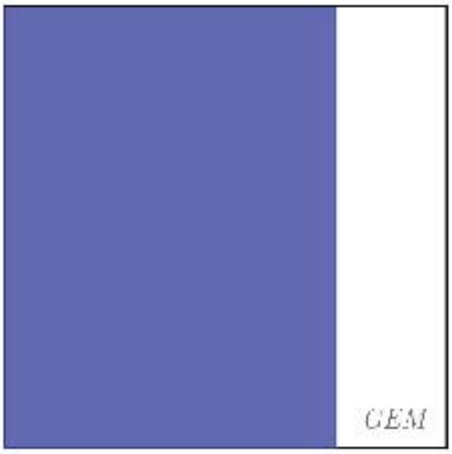


d

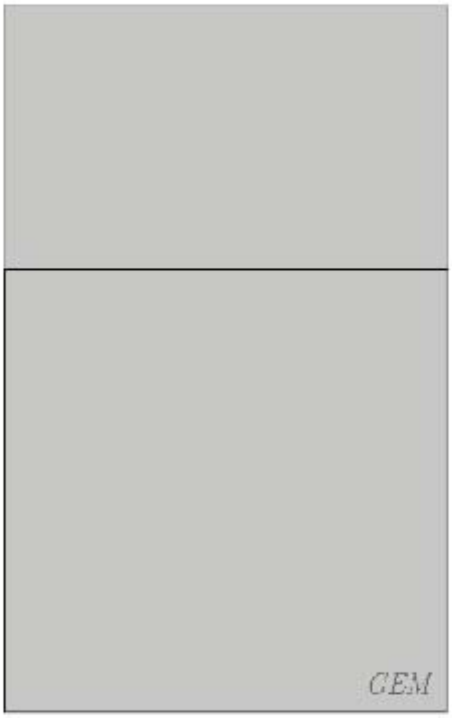
Les fractions 16 GEM, janvier 2007

Fiche 2

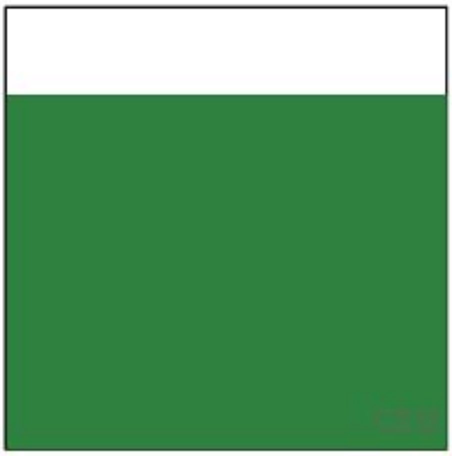
a



b



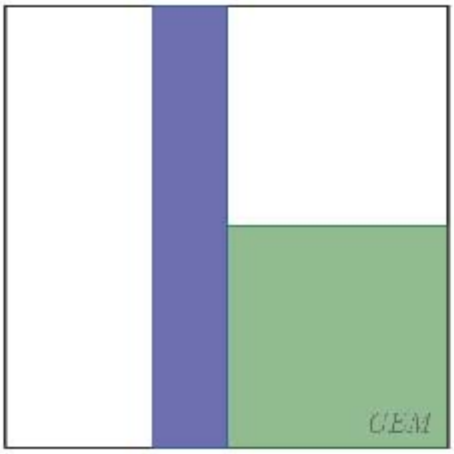
c



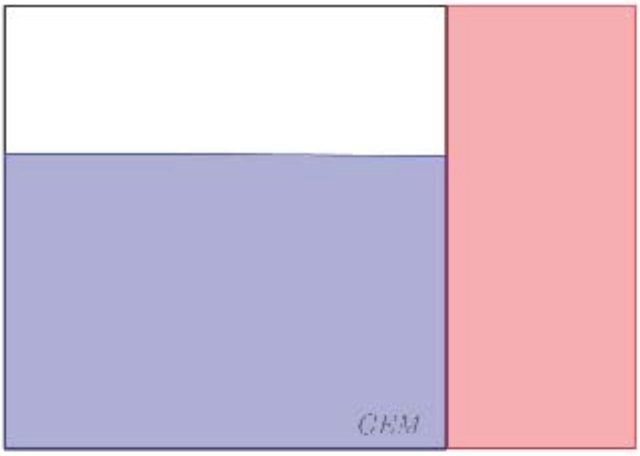
d

Fiche 3.3

a



b



c

JEU ET MANIPULATION EN CYCLE 3 POUR L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Nicolas PELAY
Plaisir Maths R&D, IMAG
Nicolas.pelay@plaisir-maths.fr

Résumé
Le contrat didactique et ludique permet d'analyser la façon dont un jeu est mis en place lors d'une séance d'enseignement ou une animation, et nous soutenons la thèse que la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place au cours d'une activité dépend du jeu qui est utilisé. Un jeu mathématique possède intrinsèquement certaines potentialités, que l'enseignant/animateur active selon les objectifs didactiques qu'il s'est fixés pour le jeu qu'il souhaite mettre en place dans sa classe. Nous allons développer cette thèse sur deux exemples de jeux présentés lors de l'atelier.

Plaisir Maths, structure de diffusion des mathématiques, conçoit et anime des jeux et des activités mathématiques et ludiques, en appui sur des recherches menées en didactique des mathématiques sur la dialectique jeu/apprentissage et les problématiques de diffusion (Pelay, 2011 ; Boissière, Pelay & Rougetet, 2017). Les concepts didactiques sont utilisés de façon théorique pour analyser les activités menées et de façon pratique pour concevoir des animations et les jeux. Nous nous inscrivons dans une approche expérimentale de l'enseignement des mathématiques et nous défendons la thèse selon laquelle le jeu est un moteur de la dévolution et permet de favoriser les apprentissages mathématiques. En animant et en expérimentant les jeux sur plusieurs années, et dans de nombreux contextes (scolaires, périscolaires et socioculturels), nous développons une approche théorique sur l'utilisation des jeux mathématiques pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

Dans cet atelier, nous avons souhaité faire prendre conscience aux participants de la diversité des jeux mathématiques, et connecter leurs réflexions sur le jeu à la réflexion théorique et didactique sur la notion de contrat didactique et ludique.

L'atelier s'est déroulé de la façon suivante :

- Dans une première partie, les participants ont joué par petits groupes pour découvrir différents jeux par eux-mêmes, avec la particularité que tous les jeux contenaient une dimension manipulatoire importante.
- Dans une deuxième partie, une réflexion sur les liens entre jeu et apprentissages a été menée avec les participants par rapport à ce qu'ils pensaient être un bon jeu pour la classe. Nous avons ensuite présenté les travaux didactiques en cours menés actuellement sur le jeu à Plaisir Maths.

Ce compte-rendu est structuré en deux parties. Nous présentons tout d'abord les réflexions théoriques directement en lien avec certains jeux découverts par les participants. En prolongement des travaux didactiques menés sur le contrat didactique et ludique (Pelay, 2011), nous cherchons à montrer qu'il existe un lien entre un jeu et le contrat didactique et ludique qui peut se mettre en place à partir de ce jeu. Nous nous appuierons sur deux exemples de jeu pour le montrer.

I - DEFINITION DU CONTRAT DIDACTIQUE ET LUDIQUE

Le concept de contrat didactique et ludique est défini comme l'ensemble des règles et des comportements, explicites et implicites, entre un animateur et un ou plusieurs participants à un projet qui lie explicitement ou implicitement le jeu et l'apprentissage (Pelay, 2011). Ce concept a été élaboré dans la thèse de Pelay (2011) pour l'étude des contextes d'animation scientifique, la définition est basée sur la définition du contrat didactique donnée dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et la définition du contrat ludique élaborée par Duflo (1997) dans son travail philosophique sur les activités réelles de jeu.

Le concept de contrat didactique et ludique permet d'analyser la façon dont un jeu est mis en place lors d'une séance d'enseignement ou une animation qui vont faire interagir deux pôles : un pôle ludique et un pôle didactique.

- Le cœur du pôle didactique, c'est le savoir mathématique. Il est le noyau autour duquel se noue une partie de la relation didactique. Le mot « didactique » renvoie à la définition de la didactique des mathématiques comme l'étude scientifique des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques entre les hommes ou les institutions humaines.
- Le cœur du pôle ludique, c'est la légaliberté. Ce sont les règles dans et par lesquelles se noue la relation ludique. Le mot « ludique » renvoie à la définition du jeu au sens de Duflo « invention d'une liberté dans et par les règles ». Les règles du jeu, implicites et explicites, définissent les relations ludiques entre les joueurs.

Si ce concept a été initialement conçu dans les contextes d'animation scientifique, nous faisons aujourd'hui l'hypothèse de sa validité en contexte scolaire. Les expérimentations menées en contexte scolaire montrent en effet qu'il est possible de faire vivre en classe de véritables moments ludiques, et que le concept garde sa pertinence pour analyser la nature des interactions – didactique et/ou ludique – entre un enseignant et ses élèves. C'est pourquoi dans la suite de l'article nous noterons enseignant/animateur, signifiant que le jeu peut être utilisé par un enseignant ou animateur, tout en notant bien sûr que les contextes peuvent être faiblement ou fortement didactiques.

Mettre en place un jeu dans un contexte didactique, c'est tenter pour l'enseignant/animateur de faire vivre au cours d'une séance des enjeux ludiques et des enjeux didactiques, avec le souhait généralement que les élèves aient pu jouer et apprendre des mathématiques. Le concept de contrat didactique et ludique, permet de distinguer dans nos analyses des phases didactiques, des phases ludiques, mais aussi des phases didactiques et ludiques au cours desquelles les élèvent jouent et apprennent des mathématiques en même temps. Il rend possible une compréhension plus fine de l'investissement et/ou le désinvestissement des élèves dans l'activité, la façon dont les élèves vont apprendre en s'amusant, les éventuels dysfonctionnements d'une activité, etc.

II - LES LIENS ENTRE LE JEU ET LA NATURE DU CONTRAT DIDACTIQUE ET LUDIQUE

Les façons d'utiliser un jeu en classe sont très diversifiées (Sossa & Bossu 2007, Eysseric & al., 2012) et peuvent se faire sur différents types de jeu : jeux de société, adaptation de jeux traditionnels, énigmes mathématiques, casse-tête, matériel de manipulation, etc.

Nous défendons la thèse que la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place au cours d'une activité dépend du jeu qui est utilisé. Un jeu mathématique possède intrinsèquement certaines potentialités, que l'enseignant/animateur active selon les objectifs didactiques qu'il s'est fixés pour le jeu qu'il souhaite mettre en place dans sa classe. Nous allons montrer sur deux exemples de jeux ce que signifie que le contrat didactique et ludique soit de nature différente pour chacun des deux jeux.

1 Chamboul'Math

Chamboul'math est un jeu qui est constitué de 36 bûchettes de bois (33 sont numérotées de 1 à 33, et 3 bûchettes non numérotées qui forment le toit de la tour) et quatre dés classiques (numérotés de 1 à 6). Les bûchettes sont mises en place dans une tour qui a onze niveaux de trois bûchettes placées côte à côte le long de leur long côté, et chaque niveau est tourné de 90 ° par rapport au précédent (comme le montre la figure 1).

Figure 1

Ce jeu peut être joué de 2 à 4 joueurs, individuellement ou en équipes, et dure environ 15-30 minutes. Chaque joueur lance à son tour les quatre dés. Puis, en utilisant une fois le résultat de chaque dé et les opérations de son choix, il fait un calcul dont le résultat doit être compris entre 1 et 33, ce qui lui donne la possibilité d'essayer d'enlever la bûchette correspondante au résultat de son calcul sans faire s'effondrer la tour. S'il réussit, il marque autant de points que le nombre sur la bûchette et c'est au joueur suivant, sinon la tour s'effondre, le joueur déduit ses points de son résultat, et on fait le compte total des points de chacun des joueurs, le gagnant étant celui qui a le plus de points. Combinant les valeurs des dés et les opérations mathématiques, l'élève est donc amené à faire de nombreux calculs en un temps restreint pour y parvenir.

Le contrat didactique et ludique établi est explicitement énoncé et évident : ici, pour jouer, il faut faire des opérations pour pouvoir retirer des bûchettes sans faire s'effondrer la tour. Jouer et faire des calculs mathématiques sont conjointement liés : il n'est pas possible de jouer sans faire des calculs. Les participants disposent des outils mathématiques dont ils ont besoin pour jouer, et les règles du jeu les énoncent clairement. L'enjeu ludique « enlever des bûchettes sans faire s'effondrer la tour » est un moteur essentiel de la dévolution. Les élèves aiment le fait d'avoir à retirer une bûchette avec habileté, s'amusent à voir la tour pencher, devenir de plus en plus fragile au fur et mesure du jeu, et s'effondrer après la maladresse d'un des joueurs. C'est ce qui les motive directement à faire des calculs pour identifier les bûchettes qu'ils sont autorisés à enlever. Ils sont généralement très appliqués pour enlever la bûchette, et s'investissent dans les calculs pour trouver la bonne bûchette à enlever. Plus les élèves mobilisent de types d'opération différents, plus ils ont de choix dans les bûchettes qu'ils peuvent retirer, et plus ils peuvent gagner de points.

Exemple de nombres obtenus avec le lancer (2, 3, 4, 6) :

Nombre obtenu		Opérations utilisées
15	$2 + 3 + 4 + 6$	Addition
11	$3 - 2 + 4 + 6$	Addition & soustraction
9	$4 - 3 + 2 + 6$	Addition & soustraction
5	$6 + 4 - 3 - 2$	Addition & soustraction
3	$6 + 3 - 4 - 2$	Addition & soustraction
16	$2 \times 3 + 4 + 6$	Multiplication & Addition
17	$2 \times 4 + 3 + 6$	Multiplication & Addition
19	$2 \times 6 + 3 + 4$	Multiplication & Addition
20	$3 \times 4 + 2 + 6$	Multiplication & Addition
24	$3 \times 6 + 2 + 4$	Multiplication & Addition
30	$2 \times 3 \times 4 + 6$; $2 \times 3 + 4 \times 6$	Multiplication & Addition
26	$2 \times 4 + 3 \times 6$	Multiplication & Addition
18	$2 \times 3 \times 4 - 6$;	Multiplication & soustraction
10	$3 \times 6 - 2 \times 4$	Multiplication & soustraction
25	$4 \times 6 + 4 - 3$	Multiplication, Addition, soustraction
5	$4 + 6/(3\times2)$	Addition, Division, multiplication
1	$(3\times4)/(6\times2)$	Multiplication, Division

L'enjeu ludique est très fécond pour amener les élèves à développer des stratégies de calcul variées et mobiliser certaines opérations. Au départ, les élèves ont tendance à utiliser l'addition uniquement en sommant les 4 valeurs des dés. Mais ils se retrouvent très vite bloqués (car la bûchette a déjà été prise), et ils doivent alors mobiliser d'autres opérations : soustraction et multiplication. Ils découvrent aussi que la multiplication est nécessaire pour retirer les bûchettes qui ont une grande valeur. Au fur et à mesure du jeu et des parties, les élèves développent ainsi des habilités de calcul. Pour autant, le contrat didactique et ludique reste identique : il s'agit toujours de calculer et d'enlever les bûchettes. Lorsque les élèves vont apprendre la multiplication, et plus tard la division, le jeu reste inchangé, et les modalités de mise en place du jeu dans la classe aussi. Grâce à l'usage de cette nouvelle opération, de nouvelles bûchettes deviennent accessibles, et rendent le jeu plus stratégique. Cette dimension stratégique jeu favorise donc la progression des apprentissages, car plus l'élève dispose de possibilités de calcul et de façons de combiner les opérations ensemble, plus il aura de choix et donc de possibilités de gagner dans le jeu. Et même si ce n'est pas nécessairement un objectif didactique explicite, il est aussi question d'optimisation lorsque l'élève cherche à obtenir le plus grand nombre possible.

Dans le cas de « Chamboul'Math », jouer et faire des mathématiques sont complètement liés, et cela donne une grande marge de manœuvre à l'enseignant pour mettre en place le jeu dans sa classe. Il peut faire jouer le jeu par petit groupe, ou en classe entière, avec un jeu par groupe de 2 ou 4 élèves. Il peut aussi faire s'entrainer les élèves sur des lancers de dés particuliers : quels sont tous les nombres qu'il est possible d'obtenir avec le lancer (2, 3, 4, 6) en utilisant uniquement l'addition et la multiplication ?

2 Puzzle « Carré + carré »

Tous les jeux mathématiques ne génèrent pas un type de contrat didactique et ludique de la nature de Chaboul'Math ; le jeu que nous allons détailler maintenant ne génère pas une activité mathématique immédiate : le contrat didactique et ludique qui se met en place est différent, d'abord purement ludique, puis didactique.

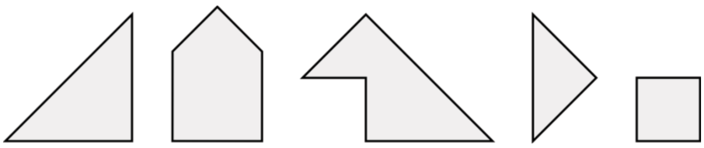


Figure 2. Pièces du carré + carré = carré

Carré + carré = carré est un jeu de type de « tangram », composé de cinq pièces planes, comme indiqué sur la figure 2, et qui se réalise en deux étapes. La première étape consiste à faire un carré avec les 4 pièces non carrées, la seconde consiste à faire un carré avec toutes les pièces. La particularité de ce puzzle est que la première étape se fait assez facilement, mais que la deuxième étape est beaucoup plus difficile. Les élèves rentrent très facilement dans le jeu, ils ont généralement envie de résoudre le défi, et le fait de réussir la première étape est très stimulant pour eux. En revanche, ils se heurtent à la difficulté de la deuxième étape, et c'est cela qui va générer un type de contrat didactique et ludique différent.

Les puzzles ont un type particulier de contrat qui évolue généralement dans le temps. Au début, lorsque le participant découvre le puzzle, il joue simplement, découvre les mécanismes et essaie de le résoudre par des manipulations sur les pièces. Cette première étape du contrat, nécessaire pour que le participant appréhende le puzzle, est purement ludique. C'est la non résolution du puzzle qui va générer des questions de type « Quelle est la solution ? », « C'est impossible ? », « Comment fait-on pour trouver la solution ? ». C'est le joueur lui-même – et non l'enseignant - qui initie généralement la deuxième étape du contrat qui est de nature plus didactique. L'élève a envie de connaître la solution et devient demandeur d'explications de nature didactique, et c'est cette évolution du joueur vers une approche rationnelle qui peut conduire l'enseignant vers l'introduction d'enjeux mathématiques.

L'enseignant peut par exemple donner des indices ou susciter chez l'élève des questions de nature didactique :

- Où sont les angles droits du carré ?
- Quelle est la taille du nouveau carré ?

Le jeu est un puissant moteur de la dévolution, et contrairement à Chamboul'Math qui était un jeu instaurant d'emblée un contrat didactique et ludique, la mise en place du contrat didactique et ludique avec « Carré + Carré » se fait en deux temps, c'est l'élève lui-même qui devient demandeur d'un contrat didactique. Pour que cette activité puisse fonctionner de façon optimale, il est souhaitable de faire en sorte que les élèves initient eux-mêmes l'évolution du contrat, et le rôle d'enseignant va être de devoir gérer cette envie des élèves de connaître la solution sans générer des frustrations trop importantes.

A l'école élémentaire, les enjeux didactiques se situent au niveau de la représentation du carré, comme figure à 4 angles droits et 4 côtés de taille égale. Même lorsque la taille du côté du carré a été donnée, les élèves ont des difficultés à se représenter le carré, et à se forcer à mettre les pièces dans un espace contraint. La gestion didactique peut tourner autour des enjeux suivants :

- leur faire construire le gabarit du carré, qui aidera à trouver la solution,
- leur demander de repérer les angles droits et faire des assemblages avec des angles droits,
- leur demander de trouver les assemblages de pièces qui donnent la longueur du carré souhaitée.

L'intérêt de ce puzzle est aussi que sa possibilité de résolution est liée au théorème de Pythagore, car il est possible de connaître la taille du carré à obtenir grâce au théorème.

Figure 3. Une illustration du théorème de Pythagore

III - CONCLUSION

Nous avons montré comment il est possible de caractériser les jeux mathématiques par rapport à la nature du contrat didactique et ludique qu'ils sont susceptibles de générer. Pour certains jeux comme le ChamboulMath, la mise en place même du jeu crée un contrat de nature didactique et ludique, car les enjeux didactiques et les enjeux mathématiques sont liés dès le début de l'activité. Pour d'autres, la mise en place d'un jeu génère d'abord un contrat ludique, qui est ensuite susceptible d'évoluer en un contrat didactique par les questions qu'il va générer sur la résolution. Nous cherchons à identifier les différents types de contrat, car nous pensons que cela génère différentes façons d'utiliser le jeu en classe et de mener une activité ludique de façon optimale pour favoriser les apprentissages.

Une autre question, abordée dans l'atelier, mais qui n'a pu être approfondie, est celle de pouvoir identifier les critères de choix d'un jeu pour les enseignants, et de pouvoir catégoriser ces critères, et voir s'il est possible de les rattacher à certaines des propriétés des jeux ? Un débat a été mené pour identifier ces différents critères à partir de la question suivante : « Qu'est-ce qu'un bon jeu mathématique pour la classe ? ». Les réponses se trouvent en annexe, mais ne peuvent pas pour l'instant être analysées avec notre élaboration théorique.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BOISSIERE A., PELAY N., ROUGETET L. De la théorie des jeux à l'élaboration d'actions d'enseignement et de vulgarisation : le cas de jeux de type Nim, *Petit X*, numéro 104

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée sauvage.

DUFLO C. (1997) *Jouer et philosopher*, Paris, PUF.

EYSSERIC P., MASSELOT P., WINDER C., (2012) *De l'analyse mathématique de jeux traditionnels à la conception de situations d'apprentissage pour l'école primaire*, Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM. Dijon 2011. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève.

PELAY N. (2011) *Jeu et apprentissages didactiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Lyon.

PELAY N. (2016) La méthodologie des trois pôles : une méthodologie de recherche et développement pour l'animation scientifique, *Questionner l'espace, Les méthodes de recherche en didactique (4)*

SOSSA L., BOSSUT C., (2007) *De l'utilisation des jeux du commerce en formation initiale et continue*, Actes du XXXIIIe colloque COPIRELEM sur la formation des maîtres. Dourdan 2006. Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?

ANNEXE 1

Réponses des groupes de travail

Qu'est-ce qu'un bon jeu mathématique pour la classe ?

Réponse 1 :

« Un bon jeu en classe recèle un fort potentiel, contient une part de hasard, est source de motivation, un vecteur d'apprentissages et de compétences, favorise la coopération ; sa règle du jeu est accessible, un bon jeu favorise la socialisation ».

Réponse 2 :

« Tout le monde, chaque élève, participe. Notion de plaisir. Met en jeu une ou plusieurs compétences mathématiques »

- faire réfléchir les élèves,
- permet aux élèves d'enrichir une notion mathématique ou de réinvestir des notions connues,
- permet de proposer une différenciation,
- développe des compétences civiques et sociales ».

Réponse 3 :

« Ludique, aspect plaisir. Accessible à tous, différenciable. Compétences mathématiques (introduire une notion, réinvestir une notion, remédier »

« Un bon jeu mathématique est un jeu où les élèves :

- prennent du plaisir, s'amusent, trouvent des intérêts,
- ont besoin de peu de connaissance ; pré-requis,
- manipulent, touchent les objets ».

Réponse 4 :

« Notion de plaisir. Respect des règles. Stratégie, recherche. Réflexion, mobilisation de connaissances, situation ludique, notion de gagner/perdre, collaboration. On peut le faire différentes fois, et avoir toujours du plaisir et de la motivation : les stratégies évoluent. »

Réponse 5 :

« Motivation. Plaisir. Réflexion, stratégie, collaboration/opposition, connaissances mathématiques »

FORMER LES PE À UTILISER LE JEU AU SERVICE DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES AU CP

Aline BLANCHOUIN
PESPE Site de Livy-Gargan (93)
aline.blanchouin@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
PESPE Site de Livy-Gargan (93)
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé
Dans ce texte, nous développons les éléments de travail issus de l'atelier que nous avons animé. Il s'agissait d'analyser une séance filmée de mathématiques en Cours Préparatoire (CP) dont le support principal était la bataille navale afin d'aborder la problématique de la formation des PE lorsqu'ils choisissent de recourir à des configurations d'enseignement-apprentissage (Blanchouin, 2017) mobilisant le jeu. Dans un premier temps, nous apportons des informations sur le contexte d'enseignement, puis nous procédons à l'exploitation du visionnage de la vidéo en élaborant un synopsis possible du scénario didactique qui s'est réellement déroulé. Nous proposons, alors, l'analyse faite conjointement avec les participants (formateurs Espe et Dsden) à partir de l'inventaire des leviers et obstacles à l'apprentissage de tous les élèves. La seconde partie du texte complète l'analyse précédente en caractérisant le dilemme « faire apprendre – faire jouer ». Pour ce faire, nous croisons le modèle de l'agir enseignant (Bucheton, 2009) et de la didactique des mathématiques (Brousseau, Vergnaud) en interrogeant d'une part, la pertinence du savoir en jeu au regard des programmes actuels et celle des caractéristiques de la bataille navale réellement proposée aux élèves au regard du jeu canonique, et d'autre part, le caractère opportun des gestes d'ajustements de la PE. Après avoir conclu sur la séance, nous suggérons d'accompagner les enseignants polyvalents lorsqu'ils veulent faire des « maths en jouant » en les invitant à interroger l'ensemble des logiques épistémique, pragmatique et relationnelle (Vinatier 2013) de leur action et en utilisant leurs outils de travail habituels pour élaborer des réponses sous forme de compromis. La conclusion est l'occasion d'évoquer des prolongements pour la formation et de proposer, pour cette thématique du jeu à l'école, la fréquentation des travaux de Pelay (2010).

INTRODUCTION

Pour enseigner, l'enseignant polyvalent peut recourir au jeu. Si c'est une invitation institutionnelle des programmes de 2015 pour la maternelle (apprendre en jouant, p.4), au Cours Préparatoire (CP) à l'école élémentaire, nous avons constaté que lorsque le PE « fait mathématiques », il propose volontiers à ses élèves de « jouer ». La raison principale est de les motiver en enseignant d'une façon jugée inhabituelle, favorisant le sens, et particulièrement adaptée à leur jeune âge (en opposition avec les séances : fichier ; sur ardoise pour notamment le calcul mental ; de découverte avec matériel…). Elle s'accompagne souvent de motifs complémentaires comme : faire manipuler, différencier, proposer un temps de respiration dans la journée (Blanchouin, 2015).

En classe, cela se traduit par une diversité de configurations d'enseignement-apprentissage (types de séances) mobilisant le support du « jeu », qui ont « leurs bonnes raisons d'être » du point de vue de l'exercice de la polyvalence au quotidien du PE. En ce sens, les deux grandes configurations que nous proposons de distinguer sont des instruments de leur activité quotidienne pour tenir ensembles « le programme des différentes disciplines » et « le rythme hebdomadaire des 4j ½…» (Blanchouin, 2017). Ce sont :

- des « séances canoniques » (au regard de la forme scolaire définie avec Reuter, 2005), inscrites dans une séquence dont le scénario s'appuie sur un / des jeux, pour aborder un nouvel apprentissage ou « remédier » (comme c'est le cas de la séance analysée dans cette contribution) ;
- des « ateliers jeux » ou des « séances–projet » (de type défi math ou de liens entre disciplines) pour consolider des apprentissages, faire des mathématiques autrement ou encore pour gérer l'hétérogénéité des élèves.

L'inscription qui est la nôtre dans la didactique disciplinaire et professionnelle, nous conduit en formation, à retenir légitime le recours au « *jeu* » des PE, comme support de contenus d'enseignement et de scénarii de séances. Il ne s'agit donc pas de combattre son usage ou de le normaliser, mais bien d'accéder aux définitions que se donnent le PE du sens et de l'efficience de cet usage dans son enseignement en math pour l'accompagner afin que tous ses élèves apprennent. Car, « le jeu peut être un bon moteur pour que l'élève construise des connaissances, mais encore faut-il bien identifier les enjeux du jeu et des mathématiques visées, et s'assurer de leur adéquation. (…) Quand une activité est proposée aux élèves sous la forme d'un jeu, il faut donc s'assurer que la finalité du jeu permet de mettre en place les conditions favorables à l'acquisition de connaissances mathématiques bien identifiées » (Dorier et Maréchal, 2008, p.71).

Dans cette perspective, la contribution qui suit reprend la double visée de l'atelier qui était de :

1- Décrire et comprendre le recours au « jeu » en mathématiques du PE en proposant de croiser le modèle de l'agir enseignant (Bucheton, 2009) et de la didactique des mathématiques (Brousseau ; Vergnaud).

2- Discuter des conséquences pour la formation initiale des PE, même si faute de temps, la partie finale n'a pu être réalisée telle quelle (cela s'est réduit à une présentation rapide de notre point de vue) et qu'*in fine* la question s'est invitée de façon plus moins latente tout au long de l'atelier.

Dans un premier temps, nous présentons la séance visionnée lors de l'atelier et un premier niveau d'analyse issu des échanges entre les participants de l'atelier. Dans la seconde partie, après avoir explicité nos références théoriques et la méthode retenue, nous poursuivons l'analyse en repérant comment l'enseignante a géré la tension entre forme scolaire (Reuter, 2005) et forme ludique (Brougère, 2010). Nous terminons en évoquant des retombées pour la formation.

Enfin, la conclusion est l'occasion de prolonger la réflexion sur deux aspects, la formation des PE en mathématiques et la méthode utilisée pour l'analyse.

I - PRESENTATION DE LA SEANCE ET PREMIÈRE ANALYSE

1 La « bataille navale » en séance 2, après une première séance sur fichier ressentie comme difficile par la PE

1.1 Informations sur le contexte

M. est une PE d'à peine 30 ans qui enseigne depuis 6 années en Seine Saint Denis, et depuis 4 ans dans la même école située en Rep. C'est la seconde fois qu'elle a en charge un CP et elle a été auparavant en contact la pluspart du temps, avec des élèves de Cours Moyen. Elle a décidé de participer au Lieu d'Education Associé auquel nous participons[1] pour « avoir un retour sur mes pratiques de classe et voir comment font les autres PE de CP ». C'est dans ce cadre que la séance a été filmée. Son cahier journal fait office de fiche de préparation et donne accès aux éléments d'anticipation suivants pour la fin de la matinée du vendredi 20 janvier 2017 :

[1] Le LéAEvalNumC2, crée en septembre 2017, associe des enseignants de la circonscription de Montreuil (93) et des enseignants-chercheurs de l'Espe de Créteil, dont Nadine Grapin, Eric Mounier et Nathalie Sayac du LDAR (Paris Diderot) qui en assurent la co-direction.

10h45-11h Calcul Mental j19	
8+6 = 14	10+8 = 18
4+7 = 11	9+3 = 12
11+2 = 13	16+3 = 19
11h-12h Maths : case du quadrillage	
La bataille navale. Expliquer le but (Vocabulaire : bataille → combat ; naval → dans la mer) Il faut trouver les bateaux en donnant les coordonnées (1 chiffre, 1 lettre). Sur ardoise, écrire les coordonnées du petit bateau. Faire des croix visibles puis en cachant derrière le tableau. Faire venir un élève qui prendra ma place.	

Figure 1. Description dans le cahier journal d'après la récréation

Nous voyons que la PE désire travailler sur « les cases d'un quadrillage » (son objectif) à partir de la bataille navale (un support « jeu ») lors d'une séance de mathématiques d'une heure placée après 15' de calcul mental. Pour justifier cette séance (aux élèves et lors de l'entretien post séance), M. évoque la difficulté de ses élèves, la veille, à réaliser les exercices du fichier (Math tout terrain, pp 66-67, leçon 28-Quadrillages). Enfin, tandis qu'un enjeu autour du vocabulaire est visible, a contrario, il s'avère difficile de s'imaginer le déroulement du jeu et l'ensemble des règles utilisées.

1.2 Descriptif de la séance à partir d'un enregistrement vidéo

L'enregistrement vidéo en continu de la séance (soit 24', la séance ayant duré la moitié du temps prévu) est traité en procédant complémentairement à la réalisation d'un synopsis et à la transcription des énoncés oraux et para verbaux de certains épisodes voire de certaines phases.

Nous retenons avec Falardeau et Simard (2011, p.96-121), que « le synopsis d'une séquence d'enseignement consiste essentiellement *à réduire* la masse des données recueillies en classe en une unité saisissable sous forme de scénarios, *à découper* les éléments dans la séquentialité du déroulement de l'enseignement et *à hiérarchiser* les éléments découpés en sous-éléments ordonnés ». La réduction, le découpage et la hiérarchisation des éléments président à des choix qui engagent des critères et la définition de l'enjeu accordé à l'élaboration même du synopsis.
Pour ce qui nous concerne, il sert à poser un premier regard sur l'intrigue de la co-activité en identifiant « des séquences narrativisées et hiérarchisées » dont le découpage en phases minutées cherche à mettre en relation :

- la fonction de la phase pour l'avancée du scénario didactique,
- et les apprentissages (hypothétiques à partir de ce qui s'est déroulé) des élèves

Nous avons donc choisi, lors de l'atelier, après une mise en commun des synopsis réalisés par les trois groupes, de présenter en vis-à-vis le nôtre. Si nous le comparons (dans sa forme simplifiée) au synopsis apparu lors de la mise en commun, il se singularise par une dénomination des phases opposant « présentation de la tâche / activité des élèves » et par la signalisation des durées (figure 2).

La séance de 24' comporte alors 5 phases : la première de transition avec le moment de calcul mental, la dernière clôturant la séance et trois phases opposant « présentation de la tâche / activité des élèves ».

Notre synopsis simplifié : 5 phases	Synopsis apparu lors de la mise en commun (prise de notes au tableau)
1/ Transition avec S1 math (CM, tâche Vendredi) *1'15* **2/** Annonce du jeu de la bataille navale **1'50 ;** Lancement de la tâche 1 [exemples] **55'' ;** 4 exemples [codages de bateaux à l'oral] **2'32** **3/** Lancement de la tâche 2 [partie 1 du jeu] **1'13** ; jeu à l'oral (18 élèves) **10'25** **4/** Lancement de la tâche 3 [partie 2 du jeu] ; jeu à l'oral identique à la partie 1 (8 élèves) **6'** **5/ Clôture de séance (mieux réussir les exercices du fichier lundi)** *quelques secondes*	-Justification-Remise en contexte : pourquoi cette activité ? -Vocabulaire de la « bataille navale » -Règles du jeu -Les exemples -Le jeu : donner des coordonner + venir au tableau **Episodes nommés** - Codage : X, ≈ - jeu - 33'38 + facile - Bintou et le manuel - « B, A » - L'élève bloqué à C

Figure 2. Synospis simplifié de la séance

Pour la suite de l'analyse, nous avons transmis aux participants un tableau synoptique plus détaillé, faisant apparaître quelques épisodes par phase et une transcription du déroulé de la tâche 2, c'est-à-dire de la première partie de bataille navale (Annexe 1).
L'ensemble a servi de support commun pour engager le questionnement autour de la pertinence de la mise en scène du savoir (tâches ; gestes professionnels), ou autrement dit, des leviers et obstacles pour les apprentissages des élèves du déroulé réel du scénario didactique.

2 Analyse de la séance par les participants

Les leviers et obstacles identifiés par chacun des trois groupes (Annexe 2) ont été mutualisés oralement et ont abouti à ce premier niveau d'analyse :

- **Les leviers à l'apprendre**

- Le fait même *d'utiliser un jeu* rompt avec le recours habituel des exercices du fichier afin de motiver les élèves.

- *L'organisation du jeu* à partir de la grille cachée de la maîtresse (panneau latéral) oblige les élèves à utiliser l'outil mathématique.

- *La présentation du jeu* à partir d'exemples collectifs et d'une explication graduelle des règles évite une surcharge au début.

- *Le déroulement du jeu* permet une correction individualisée des élèves qui se trompent.

- *La procédure* est montrée plusieurs fois de façon gestuelle, même si c'est toujours la même et qu'elle n'est jamais accompagnée par une description orale (implicite).

- **Les obstacles à l'apprendre**

- Aucun *traitement de l'erreur* n'est mis en œuvre.

- *L'objet de la correction* est circonscrit au « bon codage » et ne porte pas sur la procédure.

- *La validation* se fait uniquement par l'enseignante.

- *Les échanges entre élèves ne sont pas stimulés* : les réactions des élèves auraient pu être exploitées pour construire le savoir - imprégnation progressive par observation des bons élèves qui aurait aussi permis aux moins bons élèves de réussir.

- *Le transfert* entre le plan vertical (tableau) et le plan horizontal (fichier) n'est pas explicité.
- *Il n'y a pas recours à un vocabulaire spécifique* pour désigner les choses apprises et certaines formulations de la PE ont un caractère implicite par rapport à ce qui est à apprendre.
- Il n'existe pas de *phase d'institutionnalisation* et il n'y a pas de lien avec *le repérage*.

Pour synthétiser, nous sommes tombés d'accord sur le fait que la force majeure de la séance résidait dans le choix au recours au jeu mais :

- qu'une tension existe à propos de l'adaptation faite du jeu : si l'organisation matérielle et la règle retenue (faire couler les bateaux de la maîtresse) servent la participation successive de tous et une correction individualisée, les interactions langagières entre élèves ne sont pas favorisées.
- que le savoir en jeu n'est jamais explicité que ce soient lors des corrections (caractéristiques de l'étayage de la PE) ou lors d'une autre phase (choix du scénario didactique). De plus, le transfert entre les plans vertical (du tableau) et horizontal (ardoise, fichier..) n'est jamais abordé.

Pour poursuivre l'analyse, nous avons proposé d'explorer la tension « faire apprendre » - « faire jouer ». Faute de temps, nous avons choisi de communiquer nos ancrages théoriques, la méthode retenue et nos conclusions.

C'est l'objet de la seconde partie de cet article.

II - ANALYSE DE LA SEANCE DU POINT DE VUE DE LA TENSION ENTRE FAIRE APPRENDRE ET FAIRE JOUER

1 Présentation de la méthode retenue pour notre analyse

1.1 L'objet de l'analyse

Dans la perspective d'une approche didactique prenant en compte le travail réel et ses dilemmes, nous cherchons à caractériser les compromis opératoires réalisés par le PE pour tenir ensembles les deux intentions que sont le « faire apprendre » et « faire jouer les élèves pour enseigner ». L'analyse du scénario didactique réel est ainsi conduite en repérant les caractéristiques du « jeu qui s'est déroulé » et les gestes d'ajustements du PE afin de mettre en vis-à-vis les obstacles aux apprentissages des élèves et les leviers au service de la dimension ludique du moment d'enseignement-apprentissage.

1.2 Les analyseurs et référentiels théoriques

- **L'ancrage théorique : deux cadres principaux renforcés[2] pour la circonstance**

L'analyse du champ conceptuel selon Vergnaud (1991) permet d'interroger la pertinence du savoir (niveaux macro et méso) au regard des programmes actuels. Cette analyse du champ conceptuel complétée par une analyse selon le modèle de « l'agir enseignant et de ses ajustements » (Bucheton, 2009) permet de repérer le jeu des préoccupations situées de la PE lors de la séance lors de chaque phase[3].

Afin de caractériser « la potentialité d'apprentissage du jeu réellement proposé », le croisement entre didactiques disciplinaire et professionnelle est complété par :

- d'une part, l'identification des valeurs des variables didactiques concernant les règles du jeu et les aspects matériels (Dorier et Maréchal, 2008) ;
- d'autre part, le recours à la définition de Brougère (2010, p 45) du caractère ludique d'une activité. L'auteur retient cinq critères : le second degré (différentes modalités du faire semblant) ; la décision d'entrer dans le jeu et l'action de décider dans le jeu ; l'existence de la règle (imposée, négociée, construite ou non au cours du jeu) ; la minimisation des conséquences (aspect de frivolité) ; l'incertitude du dénouement.

---

[2] Pour davantage de précisions, Blanchouin A., Pfaff N. (2017, pp3-6) Former les enseignants polyvalents à l'analyse de séances de mathématiques. *Actes du XXXXIIIème Colloque COPIRELEM.*

[3] Les cinq préoccupations sont : l'étayage, le tissage, l'atmosphère, le pilotage et les objets de savoirs.

- **Présentation générale de la méthode retenue pour analyser une configuration d'enseignement-apprentissage mobilisant le jeu**

Faire apprendre

Faire jouer pour enseigner

Référentiels par rapport aux savoirs

- Champ conceptuel *(Vergnaud, 1991)*

- Programmes 2015 et avant

Caractérisation de l'activité du PE :

Gestes d'ajustements *(Bucheton, 2009)*

Référentiels par rapport au jeu

- Définition de l'activité ludique (*Brougère, 2010)*

- Caractérisation du jeu à partir des variables concernant les règles et les aspects matériels *(Dorier, Marcéchal, 2008)*

Interroger les caractéristiques du scénario didactique réel (valeurs de variables du jeu et gestes professionnels du PE) en termes de :

- *Leviers pour « faire jouer les élèves »* en référence aux 5 critères de Brougère

- *Obstacles pour « faire apprendre les élèves »* en référence au champ conceptuel de la notion (Vergnaud) et des programmes scolaires.

Figure 3. Schématisation

2 L'analyse de la séance : caractérisation du dilemme « faire apprendre » - « faire jouer »

2.1 Pertinence du savoir en jeu (niveaux macro et méso) au regard des programmes actuels

- **Les savoir en jeu à partir de l'analyse du champ conceptuel**

Nous cherchons à repérer les classes de problèmes relatives à la notion impliquée puis à lister les différentes procédures possibles pour chaque classe de problème.

Si nous nous limitons au repérage *sans parler de déplacement*, nous ne pouvons identifier que deux grandes classes de problèmes :

1/ Indiquer la position d'une case dans un quadrillage :
Une case est marquée dans un quadrillage. Il s'agit d'indiquer la position de cette case.

2/ Situer une case dans un quadrillage en fonction d'une description donnée.
La position de la case est indiquée. Il s'agit de la placer sur le quadrillage.

Chacune de ces 2 classes principales se divise en deux sous-classes de problèmes suivant le mode de désignation de la position de l'objet : le langage oral ou un code symbolique avec des nombres ou des lettres.

Toutes les procédures pour résoudre ces classes de problèmes se basent *d'une part*, sur le fait de reconnaître les bandes verticales et horizontales (souvent appelées colonnes et lignes) comme appartenant à un réseau de bandes parallèles et *d'autre part*, sur l'identification d'une case comme étant située à l'intersection de deux bandes du quadrillage.

Précisons que l'appellation ligne et colonne peut générer des incompréhensions chez les élèves car ils acceptent plusieurs significations : le mot colonne désigne un support vertical dans un ensemble architectural ou une section verticale d'une page et le mot ligne est souvent connu des élèves comme étant un trait de la page sur lequel ils écrivent. Or la ligne dans le quadrillage pour repérer une case est une section horizontale entre deux lignes prises ici dans le sens de trait…

Le repérage est facilité si la case est située dans la première bande horizontale ou dans la première bande verticale. Sinon, le repérage s'établit soit à partir d'un code (nombre et lettre), soit en indiquant la position de chaque bande à laquelle la case appartient. Ce qui sous-entend qu'une origine a été choisie pour chaque réseau de bandes.

Exemple : parler de la 3ème ligne n'a de sens que si l'auditeur connaît la ligne à partir de laquelle l'ordre est effectué.

Ajoutons que le transfert entre le repérage sur un quadrillage placé au tableau et un quadrillage sur une table, soit dans deux plans différents (vertical -tableau- et horizontal –table-), ne va pas de soi, les référentiels changeant. En effet, *au tableau*, la verticalité fait référence au fil à plomb et l'horizontalité est déterminée par un niveau à bulle alors que *sur une feuille posée sur une table*, verticalité et horizontalité sont définies par rapport aux bords de la feuille.

Lorsque le réseau de bandes parallèles est discerné, deux procédures permettent de repérer une case :

- *Identifier toutes les cases appartenant à chaque bande pour trouver l'intersection des deux bandes.*

Exemple sur le quadrillage 1 ci-dessous : toutes les cases de la bande C sont repérées puis toutes les cases de la bande 4.

- *Déterminer une bande (verticale ou horizontale) à laquelle la case appartient puis se décaler de case en case en les énumérant avec la suite des numéros qui positionne les cases de l'autre bande.*

Exemple sur le quadrillage 2 ci-dessous : on repère la bande colonne correspondant au symbole C. On se décale de case en case à partir de la première case située dans cette colonne, en repérant chaque case : C1, C2….

Quadrillage 1 Quadrillage 2

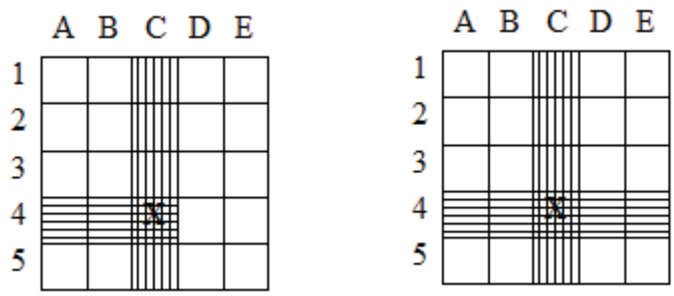


Figure 4. Les quadrillages

Ces deux procédures sont possibles quelle que soit la taille du quadrillage mais plus les nombres de bandes horizontales et verticales du quadrillage sont grands, plus le risque d'erreurs dans le repérage augmente.

- **Le savoir en jeu et les programmes**

Le programme 2015 *est très différent de celui de 2008* en ce qui concerne le repérage sur un quadrillage.

En 2008, l'apprentissage du repérage sur un quadrillage consistait à savoir coder et décoder des cases et des nœuds sur un quadrillage. En 2015, le codage et décodage sur un quadrillage servent à prévoir, représenter et réaliser des déplacements. Les termes « cases et nœuds » ne sont plus employés dans le BO et les situations indiquées pour travailler cette compétence concernent la programmation d'un robot et d'un personnage sur un écran. En résumé et de façon un peu caricaturale, on pourrait dire que l'enjeu n'est plus d'apprendre à jouer à la bataille navale mais d'apprendre à jouer à scratch junior.

Les objectifs de la séance, tirés du fichier qu'utilise M., « *Maths tout terrain* », se révèlent donc davantage conformes à la prescription de 2008 qu'à celle de 2015 ; ce qui est le cas d'ailleurs de plus de la moitié des manuels de CP et CE1.

- **Le choix des tâches au regard des programmes et du champ conceptuel**

Les 4 exemples de la première tâche sont destinés à expliquer le codage d'une case pour indiquer sa position, connaissance nécessaire pour jouer. Ce code étant donné dès le début, l'intérêt et la signification de celui-ci restent implicites. Les tâches suivantes consistent en deux parties de jeu aux règles identiques lors desquelles il s'agit d'indiquer la position d'une case avec un codage (lettre, nombre) avant de situer cette même case sur un quadrillage placé dans un plan vertical. Comme dit précédemment, cette tâche correspond plus au programme 2008 qu'au programme actuel. Enfin, pour les trois tâches, les élèves ne disposant pas d'une feuille (ou ardoise) avec le quadrillage, le problème de repérage dans des quadrillages situés dans deux plans différents (verticalement -tableau- et horizontalement –table-) ne peut être abordé. De plus, la forme de travail en collectif oral tout au long de la séance, peut a priori limiter les échanges entre élèves et l'engagement dans une activité cognitive de chacun.

Ceci étant dit, à présent attachons-nous à interroger le jeu de la bataille navale réellement proposé (tâches 2 et 3) au regard de l'objectif qui lui est assigné de repérage de cases avec coordonnées.

2.2 Caractéristiques de la bataille navale réellement proposée aux élèves et les adaptations faites par rapport au jeu canonique

Nous allons nous appuyer sur Dorier et Maréchal (2008), qui pour compléter l'analyse a priori, lorsqu'un jeu est mobilisé en mathématiques, définissent les variables didactiques en référence au jeu « canonique ».

Dans le cas présent qui intéresse le jeu de la bataille navale, nous avons identifié 11 variables dont, si l'on suit la distinction des auteurs cités, 6 relatives aux règles du jeu et 5 aux aspects matériels. Les écarts entre les valeurs du jeu proposé par M. et du jeu couramment joué (Annexe 3) sont rendus visibles dans les deux tableaux suivants. C'est ainsi que nous avons accès aux adaptations réalisées par l'enseignante.

- **En ce qui concerne les 6 variables relatives aux règles du jeu « canonique » :**

Variables	**Caractéristique du jeu proposé**	**La bataille navale « touché-coulé » est un jeu de société** www.zapmeta.fr/Chercher_le_Web
Joueur	2 équipes : la PE contre la Classe	2 joueurs
Critère de réussite	2 bateaux à couler pour l'équipe de la « Classe » ; la PE n'en a pas à couler	Couler les bateaux de l'autre avant que les siens ne le soient
Durée de la partie	Les 2 bateaux de la PE sont coulés	Le 1er joueur ayant coulé les bateaux de l'adversaire
Intervention dans le jeu	Dans l'équipe « Classe », les élèves jouent à tour de rôle en étant désignés par la PE	Phase d'action individuelle dans le déroulé du jeu : les joueurs jouent l'un après l'autre
Positionnement des bateaux	Choix de la PE (il était prévu qu'un élève prenne la place de la PE à la 2e partie mais cela n'a pas été le cas)	Choix libre de chacun des deux joueurs pour ses bateaux
Propositions de positionnements	nombre illimité	nombre illimité

Deux adaptations majeures apparaissent au niveau des règles du jeu :

1) Il n'y a pas de réciprocité dans le combat au cours d'une partie, chaque joueur (ou équipe de joueur) a un seul rôle : couler le bateau adverse/se faire couler ses bateaux le plus tard possible. De plus, entre les deux parties, ce rôle ne change pas : aucun élève (ou groupe d'élèves) n'a à repérer sur le quadrillage si les positions orales données sont celles choisies pour leurs bateaux. L'incertitude du jeu change de nature et le faire semblant (entrée dans la fiction) peut être amoindri.

2) L'intervention directe dans le jeu des élèves en proposant une position de bateau se fait à l'initiative de la PE qui désigne ainsi « son adversaire du moment ». La décision des élèves d'agir dans le jeu est en cela limité a priori. A contrario, on peut y percevoir une minimisation des conséquences car l'élève appartient à une équipe et ne joue qu'une fois, même s'il nous semble qu'elle est tributaire de l'avancée dans le jeu (la dramaturgie liée au temps qui passe, voit a priori l'enjeu du coup proposé se renforcer au fil de la partie).

- **En ce qui concerne les 5 variables relatives aux aspects matériels du jeu :**

Variables	**Caractéristique du jeu proposé**	**La bataille navale « touché-coulé » est un jeu de société** www.zapmeta.fr/Chercher_le_Web
Taille du quadrillage	5x5	10x10

Type de codage	Lettres pour les colonnes et chiffres pour les lignes (id. manuel)	« *Qu'elle soit en version électronique ou non,* la grille de jeu est toujours la même, numérotée de 1 à 10 horizontalement et de A à J verticalement. *Conventionnellement, les joueurs placent des pions blancs sur la grille lorsque les coordonnées n'ont pas touché de bateau adverse, et rouge lorsqu'une touche a été faite* »
Nombre de bateaux à couler	Détermination par la PE du nombre de 2 bateaux à couler	Un même nombre à contractualiser entre joueurs « *Chacun a une flotte composée de 5 bateaux* »
Dimension des bateaux	Dimension univoque : une case	Dimensions variables « *Les bateaux sont les suivants : 1 porte-avion (5 cases), 1 croiseur (4 cases), 1 contre-torpilleur (3 cases), 1 sous-marin (3 cases), 1 torpilleur (2 cases). Au début du jeu, chaque joueur place ses bateaux sur sa grille. Celle-ci est toujours numérotée de A à J verticalement et de 1 à 10 horizontalement* »
Support matériel du quadrillage	- Quadrillage affiché au tableau central ; - Quadrillage caché tableau latéral droit	fiches individuelles avec 2 grilles ; plateaux de jeu

Pour les aspects matériels, à part le type de codage, les valeurs choisies pour les quatre autres variables par M. pour apprendre en math en jouant à la bataille navale sont différentes :

- le quadrillage est plus petit, réduisant en cela les possibles et les erreurs de repérage ;

- le nombre de bateaux à couler est moindre, ce qui réduit le nombre de coups gagnants. Mais comme le quadrillage est plus petit, cela permet de ne pas banaliser la réussite et de cultiver ainsi l'incertitude ;

- l'absence de variété des dimensions des bateaux réduit l'aspect stratégique en ne permettant pas les anticipations qu'offrent la position d'un « bateau touché ». L'entrée dans la fiction est aussi amputée, on ne peut s'imaginer la scène du bateau exposé à sombrer aux coups suivants…

- le support de jeu est adapté aux règles retenues. Pour autant, l'élève n'a pas à coder la case dont il donne oralement les coordonnées. En cela, il n'est pas invité à expérimenter le passage de la lecture de « sa grille de propositions » (ardoise, feuille, plan horizontal) à celle « de son équipe » (au tableau, plan vertical).

2.3 Les gestes d'ajustements de la PE et les tâches réellement proposée

- **Le scénario réel au grain de la séance à partir du synopsis simplifié**

Nous retenons de la lecture du synopsis simplifié (figure 2), quatre éléments de l'activité de M. :
- M. cherche à faire du lien (tissage externe) en début de séance avec le moment précédant la matinée et en fin de séance avec le retour aux exercices du fichier ;
- M. a choisi d'introduire rapidement le jeu avec 4 exemples au cours desquels les élèves n'ont pas à coder la case de façon écrite ou à la positionner dans une grille individuelle (nature de l'étayage, objet de savoir). Tout se réalise à l'oral comme lors du reste de la séance (nature de l'étayage et pilotage humain) ; les élèves n'utilisent jamais l'ardoise (pilotage matériel) prévue dans le Cahier Journal ;
- M. a choisi de ne pas faire évoluer la composition des équipes entre les 2 parties, en ne déléguant pas son rôle à un/des élèves, alors qu'elle l'avait également prévu (objet de savoir, pilotage et atmosphère) ;
- enfin, notons que les 2 parties de jeu (tâches 2 et 3) durent environ 17' soit 70% de la séance et que tous les élèves sont passés au tableau sous les yeux de l'enseignante (étayage, atmosphère, pilotage temporel).

- **Le scénario réel au grain de la phase : gestes d'ajustements du PE et tâches réellement proposées aux élèves**[4]

[4] L'Annexe 4 présente une synthèse des préoccupations et gestes de M. sur l'ensemble de la séance

A l'aide du tableau synoptique détaillé et de la retranscription partielle (Annexe 1), nous caractérisons, à présent, le scénario didactique réel, phase par phase en nous centrant sur les cinq préoccupations situées de M., en référence à Bucheton (2008).

La phase 1, *de transition avec le moment de calcul mental* est courte (pilotage temporel serré d'environ 1'). M. demande aux élèves de ranger les ardoises qui viennent d'être utilisées (pilotage matériel) tout en demandant aux élèves responsables « d'effacer le tableau » et « de la mise à jour de l'emploi du temps de la classe (désignation « mathématiques » après « calcul mental ») » de réaliser leurs tâches. Le fait de changer de séance (tissage externe) est renforcé en précisant que pour la suite, « il n'y a pas besoin du fichier, que de ses yeux et de son cerveau ». La préoccupation de contrôle du groupe qui affleure est accompagnée d'un geste de pilotage matériel : M. vérifie en se déplaçant que tous les élèves ont rangé leur tables.

La phase 2 débute par *la justification de la séance* « on va reprendre l'activité sur le quadrillage du fichier d'hier, car ce n'était pas si facile que ça pour tout le monde » (tissage externe et objet de savoir) puis par *l'annonce du support de travail* « on va faire un jeu » (atmosphère, objet de savoir). M. écrit au tableau sans le prononcer le titre du jeu tandis que les élèves s'essaient à le déchiffrer (tissage interne). Quand elle a fini, elle désigne un élève pour lire à haute voix « bataille navale » (atmosphère, pilotage humain et temporel) puis *prend le temps de préciser les deux termes* (comme signalé dans le cahier journal) aux élèves lors d'un moment de « vocabulaire » (pilotage temporel, objet de savoir, étayage).

Après ces 2 minutes, *le lancement proprement dit de la première tâche commence*, tandis que la fonction (faire des exemples pour jouer ensuite) n'apparaît implicitement qu'une minute plus tard (tissage interne) : M. propose « d'imaginer que c'est la mer et que ça c'est mes bateaux » (étayage, atmosphère) en plaçant 2 morceaux rectangulaires sur 2 des *25 cases du quadrillage (5*x*5, avec codage.* Etayage) affiché au tableau (pilotage matériel). Elle explique que le but est « de couler les bateaux (un élève dit en même temps de faire la course) et que pour cela « il faut réussir à retrouver la position car on n'a pas le droit de se déplacer (objet de savoir, tissage interne, étayage). « On va donc devoir utiliser des renseignements (objet de savoirs, étayage) ». Un élève propose d'utiliser les lettres et nombres du quadrillage. M. montre alors (geste associé au mot) les colonnes « pour les lettres » et les lignes « pour les nombres ».

Le but du jeu et le codage présentés, *M. invite les élèves à trouver la position des 2 bateaux.* Les pilotages temporel (*30s* pour le 1er bateau et *50s* pour le second) et humain (pas d'échanges entre élèves sollicités) sont serrés. Pour le 1er bateau, M. interpelle la classe en substituant le mot de « place » à celui de « position » : « *par exemple*, mon bateau rouge, il est où (B2) ? Comment je vais pouvoir appeler sa place ? Il est à quelle place ? ». Le codage sert même, à certains moments, à nommer le bateau et non plus sa position : « mon bateau rouge, on va pouvoir l'appeler B 2 ». Pour le 2e bateau, des élèves lèvent le doigt pendant que d'autres expriment à haute voix leur proposition. Sur ce, M. précise qu'il y a des règles à respecter (de prise de parole) et désigne un élève (atmosphère). M. interpelle B. (un élève que le Chercheur vient d'aller voir) qui a ouvert son fichier et qui y poursuit les exercices de la veille en lui signifiant de le ranger (atmosphère, étayage, tissage externe). M. enlève les bateaux et repositionne le bateau rouge en D1, puis interroge un élève qui indique deux lettres D et E. La PE corrige en indiquant qu'on doit dire une lettre et un chiffre mais sans aucune autre explication (étayage). Là encore, le codage sert à nommer le bateau : « Il s'appelle B1 ». Elle replace enfin le bateau bleu (C4) et interroge un élève qui donne la bonne réponse. L'explication de M. est la même que précédemment : « parce que quand je regarde en haut, il y a le C et quand je regarde au bout de ma ligne, il y a le 4 ». Le fait que la case appartienne à la fois à une colonne et une ligne n'est pas clairement formulé (étayage, objet de savoir). Le pilotage temporel s'est accéléré (durée 20s).

Pour cette phase 2, *à propos de la tâche réellement proposée ici (objet de savoir),* notons que :

- M. a fait le choix de donner immédiatement un code aux élèves au risque de rendre implicite l'intérêt et la signification de celui-ci ;

- les élèves ne disposant pas d'un quadrillage à utiliser (feuille, ardoise), ses usages dans les plans horizontal et vertical ne peuvent être mis en relation (action, langage oral) ;

- les mots *ligne et colonne* ne sont pas explicités : les différentes cases d'une même colonne ou d'une même ligne ne sont ni énumérées, ni montrées. De plus, le lexique spécifique (ligne, colonne, position) est peu présent chez la PE et n'est pas sollicité chez les élèves pour s'exprimer ;

- la procédure est peu rendue public pour plusieurs raisons : une gestuelle qui s'avère peu monstrative ; l'absence de précision à propos du fait de commencer par la lettre ou le nombre (ce qui sous-entend que les deux possibilités sont offertes).

Pour les phases (3 et 4, environ 17') de jeu, à propos de l'objet de savoir, nous retrouvons l'absence de quadrillage posé sur la table à remplir, le caractère implicite du savoir (désignation gestuelle peu précise pour visualiser le repérage de la case, commentaire oral à propos de la procédure très peu présent et mobilisation d'un lexique non spécifique-étayage et tissage interne), la même modalité de travail en collectif oral (pilotage humain). La mise en place matérielle des parties est rapide (40s pour la 1ère afin de placarder une affiche et placer ses bateaux et quelques secondes pour la 2ème pour changer les bateaux et effacer les cases désignées de la partie précédente). Pour la 1ère partie, la consigne est transmise en 30s : M. précise que les « renseignements, une lettre, un chiffre », « ça a un nom compliqué, des coordonnées ». Elle explique les symboles retenus pour un bateau coulé (X) ou une proposition « dans l'eau (≈) » et dit que les élèves cette fois-ci (tissage interne) vont jouer contre elle (atmosphère) pour couler ses 2 bateaux placés sur le quadrillage affiché sur le pan latéral du tableau, qu'ils ne peuvent voir (pilotage matériel). La partie qui dure 10 minutes voit 18 élèves venir au tableau tandis que la seconde s'achève au bout de 8 « coups », en 6 minutes. Lors des deux parties, le déroulement du jeu est identique : après que l'élève interrogé ait proposé une case codée, M. précise à la classe si un des bateaux a été coulé (« dans l'eau » ou « plouf ») avant que l'élève ne se déplace au tableau pour écrire le symbole dans la case indiquée. Lorsqu'il montre bien la case correspondant au codage énoncé, M. ne fait aucun commentaire et ne demande aucune justification ni l'avis des autres élèves (atmosphère, étayage). Elle enchaîne alors en invitant la classe à chercher une autre proposition et désigne concomitant un autre élève (pilotage temporel et humain) pour cela, alors que plusieurs doigts sont levés. La conduite du jeu est tout aussi « rythmée » lorsque l'élève se trompe de case car M. n'engage toujours pas la discussion (atmosphère, pilotage humain) : les autres élèves sont invités à confirmer l'erreur (objet de savoir) et l'étayage de l'élève interrogé porte sur l'aide à réussir et non sur les procédures de repérage. Cette aide, essentiellement visuelle (désignation avec des mouvements assez généraux : son doigt part de la case vers le haut ou vers la gauche), est de même nature que celle de la phase d'introduction du jeu, lors des 4 exemples (tâche 1)

En fin de séance (phase 5, quelques secondes), M. décroche les affiches et récupère ses bateaux, et dit aux élèves qu'elle pense qu'ils ont compris et qu'elle espère qu'à présent, lundi, ils réussiront mieux les exercices du fichier. Elle ajoute qu'elle a vu qu'ils avaient beaucoup aimé (et précise qu'elle aussi) et qu'elle mettra le jeu en autonomie.

2.4 Conclusion à propos de la tension « faire jouer » - « faire apprendre »

Pour appréhender la façon dont intentions ludique et didactique cohabitent chez M., nous avons choisi de nous centrer sur les phases de jeu du scénario réel (70% de la séance), à partir des caractéristiques de son activité et des adaptations du jeu (les valeurs de variables concernant les aspects matériels et les règles du jeu). Le tableau ci-après propose, pour la valeur choisie de chacune des 11 variables, un commentaire en deux volets. Ainsi, la tension gérée par M. pour faire des mathématiques en jouant est mise à jour en investiguant concomitant les leviers pour « faire jouer » et les obstacles « à l'apprendre ».

Valeurs des variables	**Les leviers** pour l'intention de « faire jouer » les élèves	**Les obstacles** aux apprentissages
Choix de 2 équipes : *PE contre la classe*	Motive les élèves : ils ont tous le même enjeu (trouver les bateaux). Permet à l'élève désigné d'oser proposer une case : L'absence d'opposition directe entre 2 équipes permet à un élève de se tromper sans remettre en cause le gain de la partie.	Diminue la réflexion sur une stratégie gagnante : le développement de conjectures et de repérage de stratégie n'est pas favorisé par le fait que les élèves n'aient eux-mêmes en charge la protection de leurs bateaux pour en écho, avoir leur stratégie de protection pour attaquer la flotte ennemie.
Critère de réussite : *2 bateaux à couler pour la classe*	Maintient l'envie de jouer : L'unicité des rôles fait que les élèves savent qu'ils gagneront mais pas quand. Dans cette classe, à l'évidence, l'expérience ponctuelle (moment du 2ème coulage) de « battre la maîtresse » suffit.	Diminue l'explicitation des procédures : l'enjeu de l'élève interrogé est de trouver la case du bateau et non pas de formuler (oralement) les procédures qui permettent le repérage de la position.
Durée de la partie : *jusqu'à ce que les 2 bateaux soient coulés*	Permet à plusieurs élèves de faire des propositions de codage pour la position du bateau.	Oblige à diminuer le temps des interventions des élèves : en cas d'erreur, l'aide est tournée vers la réussite plutôt que vers la compréhension.
Intervention dans le jeu : *élèves désignés par la PE*	Permet à la PE de choisir l'ordre des élèves interrogés : choisir plusieurs élèves en difficulté à la suite pourrait casser le rythme du jeu.	Rend difficile le choix des élèves : la complexité de la tâche est difficilement contrôlable pour adapter le choix de la désignation de l'élève en fonction de ses compétences identifiées en début de séance.
Positionne--ment des bateaux : *choix de la PE*	Facilite l'activité : un des bateaux de la 1e partie est sur la 1e bande où les cases sont plus faciles à repérer.	
Propositions de positionne--ments : *nombre illimité*	Maintient l'envie de jouer : la classe va gagner quoiqu'il en soit.	Oblige à diminuer le temps des interventions des élèves : Aucune explicitation du codage et du décodage lorsque l'élève le fait bien.
Taille du quadrillage : *5x5*	Facilite l'activité et rythme le jeu : le quadrillage n'est composé que de 25 cases ce qui permet à la classe de gagner assez rapidement.	Diminue la réflexion : les élèves peuvent construire une procédure valable sur un quadrillage de 5 sur 5 mais pas de 10 sur 10.
Codage : *Lettres pour les colonnes et chiffres pour les lignes*	Favorise l'entrée dans le jeu : Pas de perturbation pour « penser-encoder une case » avec le codage imposé comme dans le manuel et dans le jeu usuel.	Diminue la réflexion : la nécessité du codage en amont du jeu n'a pas été sollicitée.
Nombre de bateaux à couler : *2*	Maintient les élèves dans le jeu : le gain n'est pas jugé impossible.	Diminue la réflexion : impossibilité d'inférer des cases des choix précédents puisqu'aucun bateau n'est situé sur plusieurs cases.
Dimension	Facilite l'activité : les élèves « fragiles »	Diminue la réflexion : le développement

des bateaux : *une case*	n'ont pas d'inférences à faire à partir de cases où un bateau est touché.	de conjectures et de repérage de stratégie n'est pas favorisé par le fait qu'aucun bateau ne soit sur au moins 2 cases.
Support matériel du quadrillage : *au tableau un quadrillage pour la classe et un quadrillage caché*	Permet de contrôler le jeu et de motiver les élèves : plus rapide que si les élèves avaient un quadrillage individuel et le quadrillage caché magistralement est consulté en écartant juste ce qu'il faut le panneau latéral droit du mur pour annoncer le « verdict : plouf ou coulé ».	Rend difficile le repérage : le support unique au tableau empêche un travail sur le plan horizontal et il n'est pas évident que tous les élèves passent aisément du vertical à l'horizontal.

Figure 5. Réflexions à partir du choix des valeurs de variables

Les choix de valeurs des variables du jeu et de son matériel, les gestes situés d'introduction des règles du jeu en deux temps (à partir d'exemples puis le lancement avec les affiches et la précision des symboles pour les conséquences de la désignation-plouf/coulé-), puis les gestes de conduite du jeu (mode de désignation des élèves-joueurs, gestion des corrections successives et des déplacements au tableau, registres de communication) concourent à la fluidité du déroulement du jeu et au maintien dans le jeu des élèves de cette classe. Ce qui fait dire à M. qu'ils étaient « dans le jeu », même si la forme ludique n'est pas pleinement investie (choix relatif de rentrer dans le jeu des élèves et univers fictionnel réduit au seuls « coulé et plouf »). Mais pour cette classe, au regard du contrat pédagogique quotidien, l'existence de règles du jeu qui minimisent les conséquences par rapport aux enjeux scolaires et qui garantissent l'incertitude du dénouement suffisent au plaisir de jouer d'autant plus que :

- toutes les valeurs choisies des variables matérielles réduisent la réflexion des élèves par rapport au jeu canonique ;
- l'étayage lors de la correction (lexique, gestuelle, formulation commentée) ne favorise pas l'activité cognitive des élèves.

En fait, le rythme imprimé au jeu par M. est aussi la conséquence de l'absence d'identification, lors de la conception du contenu de la séance, des procédures possibles pour repérer une case et d'un étayage doublement oral et gestuel. C'est ainsi que le critère d'évaluation que retient M. pour dire que son objectif est atteint est la seule quasi absence « d'erreurs » de la part des élèves. Au-delà du fait que ce soit un geste professionnel encore en construction, les limites de l'analyse a priori sont peut-être à aller chercher du côté du caractère pas « strictement mathématique » de la notion enseignée.

Il reste qu'elle et eux ont passé « un bon moment » qui compte dans l'histoire de la classe (comme peuvent l'être les sorties scolaires, les spectacles, par exemple… ou encore un défi math ?) et qui, en s'inscrivant comme un temps fort partagé, devient une ressource pour l'enseigner/l'apprendre au quotidien.

3 Le recours au jeu à l'école à partir de l'analyse de l'activité de M.

Nous avons vu, avec nos outils de mise à distance didactique et d'analyse du travail, que les critères ludiques et didactiques pour évaluer la réussite d'une séance conçue pour apprendre ne vont pas de soi, et qu'en cela, ils nécessitent un accompagnement.

Dès lors, questionner en formation le recours au jeu en math, pour nous, passe par le fait de proposer des pistes (règles, conseils, outils) pour la conception de contenu d'enseignement prenant en compte la triple logique d'action du PE (Vinatier 2013) :

- de l'apprendre de tous les élèves de la classe (logique d'action épistémique) ;
- de la dynamique inter subjective Enseignant - élève / Enseignant - ensemble des élèves/ les élèves entre eux (logique d'action relationnelle) ;
- et de l'avancée dans le programme du cycle d'apprentissage (logique d'action pragmatique).

Plus précisément, en formation, il s'agit d'œuvrer sur deux grands enjeux :

1/ Avoir à la conscience que les questions à se poser pour recourir au jeu à l'école concernent chacune de ces logiques d'actions qui sont à « tenir ensembles » :

Quel intérêt pour les apprentissages des élèves ? Savoirs, compétences mobilisées Moment de l'apprentissage (découverte, entraînement, consolidation…)	Dimension épistémique de la logique d'action
Comment associés les aspects « sérieux (épistémiques) » et « ludiques » du jeu ? Quel équilibre entre : - d'une part les caractéristiques du jeu qui favorisent la forme ludique (le faire semblant, l'incertitude, la prise de décision, l'absence de conséquences, des règles) - d'autre part, un étayage (pour entrer dans le jeu, jouer, clôturer le jeu) qui serve « l'apprentissage scolaire »	Relationnel / Epistémique
Quelle mise en scène du jeu ou encore quelles caractéristiques ludiques : - de l'environnement : Lieu, temps, matériel (place objet ludique), modalité de travail - de la conduite lors de la séance : introduction, déroulement, clôture-debriefing - de la journée en classe : programmation math ; déroulé de la journée/semaine d'une période	Pragmatique / Epistémique

2/ Trouver des réponses aux questions dans des outils de travail pluriels dont ceux habituels.

Registres	Exemples de questions	OUTILS de travail
Epistémique	Compatibilité entre l'objet d'apprendre et la ressource cognitive mobilisée dans le jeu	- Analyse du champ conceptuel - Mise à distance de « son activité de joueur » / « hypothèse sur joueur expert » / « hypothèse sur joueur de l'élève de ce niveau de classe »
	L'évolution possible du jeu pour une progression dans les objets d'apprendre	Identification de la progression autour de la notion (champ conceptuel)
	La validation de la notion visée par l'apprentissage (qui valide et comment ?)	Identifier les erreurs possibles et ce qui permet de les comprendre
Relationnel	La motivation par le jeu pour tous ?	Analyse de la participation possible de chacun à partir de la connaissance des élèves au quotidien et en EPS : Hypothèses par rapport à la culture ludique (5 critères de Brougère)
Pragmatique	Nombre de séances et durée de celles-ci ?	Cahier Journal ; semainier. Programmation/progression. Proportion entre la durée des séances de jeu / au programme ; usage régulier dans la discipline /toutes les disciplines.
	Entrée dans le jeu facile ?	Liste des règles du jeu et identification du matériel nécessaire pour construire le jeu.

CONCLUSION

L'analyse de la séance visionnée a rendu visible la tension inéluctable qu'engendre la conception de « situations didactiques avec un potentiel ludique » (Pelay, 2010, p55) pour apprendre les math en jouant. Ainsi, afin que les jeux soient moins souvent retenus en fonction du plaisir (supposé) qu'ils provoquent en classe, et qu'ils intéressent des contenus mathématiques plus centraux (Tièche-Christinat, 2001)[5], nous venons de proposer un champ de questionnements pour outiller la réflexion du PE.
Si nous l'avons produit en réponse à la problématique du recours au jeu à l'école, il nous semble qu'il peut intéresser celle relative à la place de la manipulation lors d'une séance/ séquence, d'autant plus

[5] Enquête sur le rapport des enseignants de Suisse romande aux innovations

que les PE associent très souvent le fait de jouer au motif de faire manipuler leurs élèves ; motif au cœur de la définition du sens qu'ils se donnent « du bien faire » leur travail. Or s'ils sont convaincus qu'il faut que les élèves manipulent pour construire leur savoir, cette idée « est porteuse de graves malentendus. Si les questions se résolvent par du matériel, alors il n'y a aucune raison (sauf l'obéissance) pour s'investir dans des écrits, des tracés. […]. Les mathématiques naissent parce que tout ne se résout pas par manipulation » (Briand 2010). Dès lors, l'objectif, en formation, est d'aider les PE à repérer, en fonction du moment d'enseignement-apprentissage (place dans l'année scolaire et place dans la progression), les plus justes compromis entre « faire comprendre » et « faire réussir la tâche », en agissant concrètement. C'est ainsi qu'en écho à la problématique autour de la dialectique jeu/apprentissage, nous pensons que cela passe par le fait de résoudre la tension entre manipuler/conceptualiser en prenant en compte les préoccupations situées d'ordre pragmatiques (temps de manipulation au sein d'une séance, séquence, lors de la journée, gestion matérielle, spécificité et familiarité du matériel, modalité de travail…) et relationnelles (participation de chacun, action directe-langage).
Ajoutons qu'en formation, l'analyse de l'activité des PE lors de séances « jeux », que bon nombre cherchent à mettre en place, nous paraît être également un levier pour que la définition du champ conceptuel soit perçue comme un outil de travail pour concevoir (analyse a priori) et réguler (analyse a posteriori) l'enseignement en mathématiques. En effet, force est de constater la résistance persistante des enseignants, stagiaires ou non, que nous rencontrons depuis des années, à faire le point sur les connaissances en jeu en termes de concepts, procédures, classes de problèmes et variables didactiques.
Mobiliser le modèle de l'agir enseignant de Bucheton peut permettre de faire émerger chez les PE, la nécessité d'une planification plus précise. Par exemple, interroger la pertinence des gestes langagiers au service des préoccupations d'étayage et de tissage peut favoriser la prise de conscience de la nécessité de se questionner à propos de *l'explicitation* en termes : d'existence (« dois-je expliciter ? »), de contenu (« que dois-je expliciter ? ») et de moyens didactiques (« comment ?»). Complémentairement, le repérage des gestes de pilotage peut aider à prendre acte qu'il faut aussi s'interroger sur l'environnement matériel (avec quoi ?), spatial (où ?), humain (modalité de travail ?), temporel (quand ?).

Enfin, pour conclure, nous désirons aborder les limites de la méthode d'analyse que nous avons déployée. En effet, celle-ci n'a pas accordé de place au point de vue des élèves, ne retenant pour caractériser leur activité que la seule ressource cognitive. Or, les ressources émotionnelles, sémiotiques et sociales nous semblent impératives à identifier pour décrire les ressorts ludiques de l'engagement (ou non) des élèves dans le jeu. Ainsi, « tous les enfants n'apprécient pas les jeux qu'on leur impose en classe de mathématiques et leurs aspects ludiques sont diversement perçus. La situation est donc périlleuse et il n'est pas acquis qu'un jeu soit toujours le meilleur moyen d'arriver à faire apprendre dans une ambiance ludique » (Tièche-Christinat, 2001, p 71). Le plaisir du jeu est avant tout personnel, éminemment subjectif. Pour comprendre l'articulation jeu/apprentissage dans tout contexte ludique d'apprentissage, Pelay (2010) étudie la façon dont interagissent les pôles didactiques, dont le cœur est le savoir mathématique, et ludique, dont le cœur sont les « règles dans et par lesquelles se noue la relation ludique » (en référence à Duflo 1993). Pour ce faire, il propose le concept de contrat didactique (Brousseau) et ludique (Duflo), défini comme « l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, *entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants"* dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné (p280) ». Dans cette perspective, l'analyse des interactions entre M. et ses élèves apporterait un autre éclairage sur le caractère « ludique » de la configuration d'enseignement/apprentissage. La caractérisation en termes « d'effets, de rupture et de variété de contrats » (Brousseau) permettrait également d'aborder la question des malentendus à propos des enjeux épistémiques et ludiques conférés par chacun des acteurs à ce moment de classe.

III - BIBLIOGRAPHIE

BLANCHOUIN A. (2015) *La journée de l'enseignant polyvalent du primaire : étude sur une année du cours d'action quotidien en CP*. Thèse de doctorat. Paris 13, Sorbonne Paris Cité.

BLANCHOUIN A., PFAFF N. (2017) Former les enseignants polyvalents à l'analyse de séances de mathématiques. *Actes du XXXXIIIème Colloque COPIRELEM juin 2016*, Puy en Velay.

BRIAND J. (2010) Réflexions actuelles sur les mathématiques à l'école primaire. *Café pédagogique. Le mensuel* **112**.
http://www.cafepedagogique.net/lemensuel/lenseignant/primaire/elementaire/Pages/2010/112_elem_briand.aspx

BROUGERE G. (2010) Formes ludiques et formes éducatives In J. Bédard et G. Brougère (dir.) *Jeu et apprentissage : quelles relations ?* Sherbrooke, Editions du CRP, pp. 43-62.

BUCHETON D. (2009) *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Octares.

DORIER JL., MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition. *Grand N,* **82**, pp69-89.

FALARDEAU E., SIMARD D. (2011) L'étude du rapport à la culture dans les pratiques enseignantes : le synopsis comme outil de réduction et d'organisation des données, *Recherches qualitatives,* **30(2)**, pp. 96-121.

PELAY N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat. Education. Université Claude Bernard - Lyon I.

REUTER Y. (2013, 3ème édition) *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques.* Bruxelles, De Boeck.

TIECHE-CHRISTINAT (2001) L'innovation en mathématiques et ses priorités : le regard des enseignants de Suisse romande. *Math-École* **n° 196**, pp. 13-16.

VERGNAUD G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie,* **96**, pp. 79-86.

VINATIER I. (2013) *Le travail de l'enseignant. Une approche par la didactique professionnelle*. Bruxelles, De Boeck

IV - ANNEXES

Annexe 1	Synopsis et Transcription partie 1 de la bataille navale
Annexe 2	Obstacles et leviers dégagés par chacun des 3 groupes
Annexe 3	Jeu canonique de la bataille
Annexe 4	Bucheton sous forme de schéma

1 ANNEXE 1 : Tableau synoptique détaillé et transcription partie de jeu 1

- **Tableau synoptique plus détaillé utilisé pour la suite de l'analyse**

<table>
<tr><th colspan="2">Phases</th><th>Eléments descriptifs de la co-activité</th></tr>
<tr><td colspan="2">Transition S1 math (CM, tâche Vendredi) et S2
1'15</td><td>- M. demande de ranger l'ardoise.
- M. invite 2 élèves responsables : élèves « effaceur et EDT –Mathématiques
- M. précise qu'il n'y a pas besoin du fichier, que des yeux et de son cerveau, tout en vérifiant que tout le monde a rangé sa table.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tâche 1
oral collectif
(présentation du jeu avec 4 exemples)

5'17
(25%)</td><td>Annonce du jeu
1'50
Tissage Fr</td><td>- M. annonce qu'on va reprendre l'activité sur le quadrillage du fichier, car ce n'était pas si facile que ça pour tout le monde.
« On va faire un jeu » et écrit le nom du jeu au tableau sans le dire. Les élèves essaient de décoder. A la fin, elle désigne une élève pour nommer à haute voix « la bataille navale ».
-M. explique les mots bataille et navale.</td></tr>
<tr><td>Lancement (consigne)
55''</td><td>« On va imaginer que c'est la mer ». M. place 2 papiers successivement (bateaux) sur 2 des cases du quadrillage affiché au tableau en expliquant que ce sont les bateaux. M. dit que le but est de couler les bateaux (1 élève évoque de faire la course) et que pour cela où faut réussir à retrouver la position car on n'a pas le droit de se déplacer.
« On va devoir donc utiliser les renseignements ». Un élève propose d'utiliser les lettres et les nombres (codage existant sur le quadrillage affiché).
M. montre alors rapidement les colonnes en disant que c'est pour les lettres et de même pour les lignes.</td></tr>
<tr><td>Activité des élèves
4 exemples (codage de la position de 4 bateaux)
2'32</td><td>2 premiers exemples 1'25
(30'') Par exemple mon bateau rouge il est où (B2)? Comment je vais pouvoir appeler sa place ? Il est à quelle place ? Les élèves lèvent le doigt.
(50'') Et mon $2^{\text{ème}}$ bateau il est où (E5)? Les élèves répondent en cœur. Non il y a des règles à respecter. 1^{e} désigné. M. reformule et montre l'intersection.
Incident Bintou 15''
Bintou a sorti son fichier et poursuit ce qu'elle avait fait la veille
2 exemples supplémentaires 55''
(35'') Placement du bateau rouge qu'elle vient d'enlever (D1)
(20'') Placement du bateau bleu auparavant enlevé (C4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tâche 2
oral collectif
(1^{e} partie de bataille navale, 18 élèves interrogés)

11'05 (50%)</td><td>Lancement
1'13</td><td>Préparation matérielle 42'
M. enlève bateaux, place son affiche // les élèves émettent des hypothèses sur ce qu'ils vont faire. M dit que cela va être plus difficile.
Consigne 31'
-Trouver les coordonnées (chiffre, lettre) ;
-Explication du code « couler ; ou non » : X ; ≈</td></tr>
<tr><td>Jeu en 18 coups (activité)
10'25</td><td>Succession de 18 interventions individuelles au tableau après désignation orale d'une position
Cf transcription (annexe 3) à partir d'indicateurs concernant le repérage de :
- L'activité de l'élève venant au tableau (proposition orale et désignation dans l'espace vertical du quadrillage du tableau)
- L'activité de la PE : geste langagier d'ajustement</td></tr>
<tr><td>Tâche 3
oral collectif
(2^{e} partie de bataille, 8 élèves interrogés)
autour de 6'</td><td colspan="2">Lancement : consigne ; M. change de place des bateaux sur « son affiche » et efface les codages précédemment donnés
Jeu en 8 coups (activité) : succession de 8 activités individuelles
M. a gardé le même rôle (pas de délégation) et conduit le jeu de la même façon. Il se termine plus vite par le fait du hasard.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clôture de séance
qq secondes</td><td>- M. indique aux élèves qu'ils retrouveront le fichier et qu'elle espère que cette fois-ci tout le monde réussira parce que là cela a été le cas.
- M. précise que comme le jeu leur a plu, elle le rendra accessible « en autonomie » (fin de séances lorsque s vitesses de travail des élèves diffèrent).</td></tr>
</table>

- **Transcription**

PE : M, à ton avis, où se trouve mon bateau ?
M : … C …
PE : Il me faut une autre information. C, y en a plein des C (*sans rien montrer*)
Un élève dit 3
M : 3
PE : C, 3. Dans l'eau. Viens, viens nous montrer où se trouve C, 3.Tu nous montres C, 3 et tu nous mets une petite vague parce que tu es tombée dans l'eau. Dans C, 3, ici, tu nous mets une petite vague. Il est où C, 3 ?
M place correctement. Aucun commentaire
PE : K
K : D…
PE : D, 5. Plouf
K veut placer en A5
PE : Est-ce que ça c'est D5 ?
él : Non
PE : C'est pas ce qu'il m'a dit ; c'est quoi ça ? (*montre la case*)
él : A
PE : Ça c'est A5, tu m'as dit D. C'est où D,5
K : D c'est là (*montre la lettre D*)
PE : D, 5 c'est où alors ?
K : Là (*montre la case A 5*)
él : Non
PE : Là tu es dans le A (*remonte avec son doigt vers le A*)
K : Là (*place correctement*)
PE : Ah, est-ce que c'est là cette fois ?
él : Oui
PE : Oui. Comme ça tu es dans le D et dans le 5 (*remonte rapidement avec son doigt de la case vers le D et se déplace de la case vers le 5*). Z.
Z : D 2
PE : Plouf dans l'eau
Z vient placer (on ne voit pas)
PE : Très bien.

La suite est résumée dans le tableau suivant.

Proposition de l'élève	Case montrée par l'élève	Enoncé oral de la PE	Geste repéré de la PE
D2 D1	 D3 D1	Regarde, il y en a déjà deux dans Le D. Il ne faut pas dire celle-là. Est-ce que c'est D1 ? Tu as raison, c'est dans le D mais ça c'est dans le 3. Il est où D1 ? Vas-y c'est très bien	Désigne de loin la colonne D Aucun Aucun
A5	A1 A5	Ah si c'est là, tu m'as pas eu parce que ça, c'est pas A5. Tu m'as dit A5. Là c'est A1. Il est où A5 ? Oui. C'est là.	 Montre le 1 Aucun
E3	Hésite E3	Tu m'as dit E3 Aucun	Aucun
B5	Va vers D Montre B B5	Tu m'as dit B. C'est où B ? D'accord. C'est où 5 ? Aucun	Aucun Aucun
A4	A4	Aucun	Aucun
D4	D4	Aucun	Aucun

E1	E1	Aucun	Aucun
A1	A1	Aucun	Aucun
C5	C5	Aucun	Aucun
A3	A3	Aucun	Aucun
B1	B1	Aucun	Aucun
C2	C2	Aucun	Aucun
B3	B3	Aucun	Aucun
B5 B4	Hésite B3 B4 B5 B4	Montre-moi B5. Il est où ? Ici ? Tu es sûre que c'est 5 ça ? C'est B combien ? Ah B4 parce que B5 c'est déjà pris. Tu m'as dit B4. Tu mets une vague dans B4 Aucun	 Montre le 4 Montre la lettre B puis revient à la case B4 et déplace son doigt un peu vers le chiffre 4 Montre la case Aucun
E2	E2	Aucun	Aucun

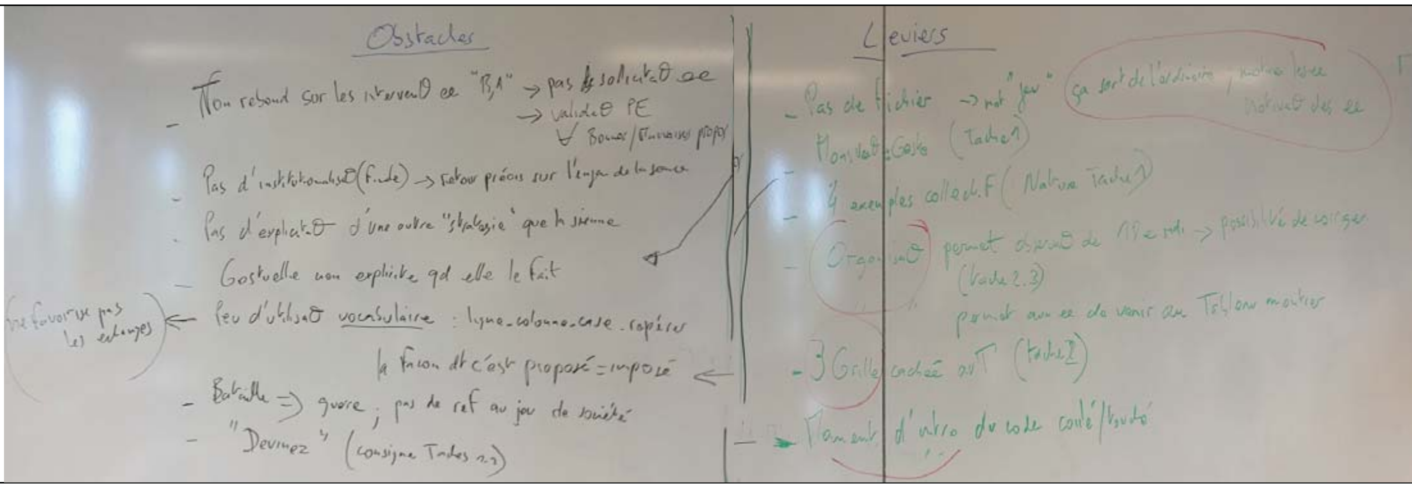
2 ANNEXE 2 : Obstacles et levier à l'apprendre : la réflexion des participants

- **Les productions de chacun des 3 groupes**

	LEVIERS à l'apprendre	OBSTACLES à l'apprendre
G1	-La grille de la maîtresse est cachée et donc oblige les élèves à utiliser l'outil mathématique -Motivation des élèves -Réactions des élèves qui auraient pu être exploitées pour construire le savoir : *Exemples donnés (épisodes non situés) :* un élève dit « c'est caché ? Comment on va faire ? » ? un élève « B, A » PE « y'a plein de C »	Pas de traitement de l'erreur Validation uniquement par l'enseignante Absence de phase d'institutionnalisation
G2	-Le jeu motive les élèves -Observations de plusieurs activités individuelles -Correction individualisée des élèves qui se trompent	-Pas d'utilisation de vocabulaire pour désigner les choses apprises (mots : colonnes, lignes, cases…) -Implicite de certaines formulations : « des C il y en a beaucoup » -Pas de validation -Lien avec le repérage pas fait
G3	- PAS de fichier = motivation différente - jeu = motivation différente - montrer la procédure de façon gestuelle (mais PAS explicitée oralement et intersection PAS visible... aurait été possible avec deux bandes colorées transparentes) - 4 exemples collectifs - règles expliquées au fur et à mesure du jeu (codage vague et croix pour « plouf » et « coulé ») = pas de surcharge dès le début, amené au moment nécessaire - grille cachée pour contraindre à utiliser les coordonnées - chaque élève interrogé individuellement ET vient montrer sur le quadrillage au tableau, ce qui pourrait permettre de traiter l'erreur	- bataille = guerre : PAS explicite pour le jeu - jeu habituel détourné sans être précisé (PAS deux équipes) - lignes et colonnes : mentionnées sans être expliquées (déjà fait la veille ? MAIS si élèves en difficulté la veille, forcément, il faut y remédier !), - vocabulaire précis pas assez présent : case, repéré, intersection... - ne propose pas aux élèves de valider si la proposition de l'élève au tableau est correcte - mot « deviner » (≠ déduire !) - codage « vague et croix » posé par l'enseignant PAS construit par les élèves - aucune stratégie explicitée par validation méta-cognitive - pas de traitement de l'erreur par sollicitation de

	- imprégnation progressive par observation des bons élèves qui aurait aussi permis aux moins bons élèves de réussir	réflexions individuelles ou conflits socio-cognitifs : réponse imposée - PAS de validation par le matériel - PAS de phase d'institutionnalisation (retour ce qui a été appris, les procédures efficaces) - correction de la réponse et PAS de la procédure - transfert plan vertical (tableau) au plan fichier (horizontal) non explicité - ces chiffres ne sont pas des « nombres » mais des « numéros » !

- **La mutualisation des réflexions lors de la mise en commun**



3 ANNEXE 3 : La bataille navale « canonique » www.zapmeta.fr/Chercher_le_Web

La bataille navale, appelée aussi touché-coulé, est un jeu de société dans lequel deux joueurs doivent placer des « navires » sur une grille tenue secrète et tenter de « toucher » les navires adverses.

Le gagnant est celui qui parvient à couler tous les navires de l'adversaire avant que tous les siens ne le soient. On dit qu'un navire est coulé si chacune de ses cases a été touchées par un coup de l'adversaire.

Le principe du jeu de bataille navale semble trouver son origine dans le jeu français « L'Attaque lors de la Première Guerre mondiale ». On a aussi trouvé des liens de parenté avec le jeu de E. I. Horseman en 1890 (Baslinda) et on dit que des officiers russes y auraient joué antérieurement à la première guerre. La première version commerciale du jeu fut publiée en 1931 par la Starex Novelty Co. sous le nom de Salvo.

4 ANNEXE 4 : Les 5 préoccupations de M. lors de la séance – À partir de Bucheton

ETAYAGE (*6 fonctions d'aide en ZPD de Bruner*)

Aide aux élèves à apprendre / à se mettre au travail

- Aide psycho socio affective

Enrôlement : adhésion grâce au jeu

Le maintien de l'orientation : rappel à l'ordre les écarts ; annonce à se préparer à proposer une nouvelle case

Le contrôle de la frustration : indique les erreurs et aide à les corriger en ne revenant pas aux procédures

- Aide cognitive

La réduction des degrés de liberté : le codage est donné dès le départ

La signalisation des caractéristiques déterminantes : peu présente car elle ne revient pas aux procédures, les termes sont vagues (en haut, sur le côté) et il n'y a pas d'aide à la visualisation

La démonstration ou présentation de modèles : + /- lors de l'activité 1 ; Ø pendant le jeu

TISSAGE

Liens EXTERNES avec :

+ la séance précédente et suivante : justifie la séance par le fait que la veille cela a été difficile et clôture sur la reprise avec réussite des exercices du fichier

-Pas de ref explicite à l'encart « j'apprends » et Ex1et 4

? lien avec repérer des infos ds un tableau

Liens INTERNES :

- Pas de précision sur l'objet d'apprendre en début de séance ni fin de séance

-Pas d'explicitation entre l'activité 1 (codage seul) et le jeu.

+ Annonce entre 2 parties du jeu et enjeu

+ Nom du jeu / Français

OBJETS de SAVOIRS

MACRO

N1 l'enjeu de savoir : «codage et décodage des cases dans un quadrillage » défini par pp66-67 du fichier utilisé et non p/r aux BO 2015. «*Le codage et le décodage servent à prévoir, représenter et réaliser des déplacements » ; Les situations indiquées pour travailler cette compétence concernent la programmation d'un robot et d'un personnage sur un écran.*

MESO

N2 progressivité. Pas de progression (découverte nécessité d'un codage ; introduction des classes de problèmes et contrôle des procédures) = après séance du fichier « difficile », reprise « Ex1 » pour introduire la séance et usage du jeu de la bataille à l'instar de l'Ex4 AFIN de « reprendre les 2 pages du fichier » la séance d'après.

MICRO

N3 le jeu choisi en cohérence avec l'enjeu choisi.

Ecart avec le prévu - : ardoise pour coder ; élève devenant meneur de jeu ; choix d'une modalité uniquement collective toute la séance

N4 les 3 tâches proposées (4 exemples ; partie1 ; partie 2)

1/ Environnement : quadrillage uniquement au tableau ; oral collectif ; pas de trace visible du codage de chacun (pas de matériel) ; pas d'écriture des coordonnées des cases choisies.

2/ Peu de lexique pour rendre explicite la procédure (- : intersection, bande, H/V, ligne/colonne, origine/départ ; absence de visualisation de la classe comme à l'intersection de 2 bandes

Découpage en phases de la séance
Synopsis simplifié

Transition avec S1 math (CM, tâche Vendredi) *1'15*
Annonce du jeu de la bataille navale 1'50
Lancement 55''et 4 exemples [codages de bateaux à l'oral] 2'32
Lancement partie 1 du jeu 1'13 et jeu (18ee) 10'25
Lancement partie 2 et jeu à l'oral (8ee) 6'
Clôture de séance (mieux réussir les exercices du fichier lundi) *qques secondes*

PILOTAGE serré, fluide, avec la préoccupation d'enchaîner les propositions orales des élèves et que les élèves désignés restent le moins longtemps possible au tableau

-Temps : rythme soutenu des propositions des élèves lors des 4 exemples comme lors du jeu.

-Espace : tout se passe au tableau et derrière le tableau (pour le jeu) que les élèves ne voient pas en fin de partie

-Organisation humaine : en collectif toute la séance

-Matériel : quadrillage affiché au tableau (problème passage au plan horizontal) doublé d'un quadrillage préparé ; représentation « 2 bateaux » (4exemples) ; existence de codes (jeu : ∞, X).

ATMOSPHERE

-Altérité et bienveillance du PE +++ (dialogue E-classe parsemé de phrases pour maintenir une ambiance de jeu)

-Partage des « places » du PE avec les élèves –

°La PE reste la maitre du jeu et ne délègue pas sa place (alors que c'était prévu) ou ne la partage pas (il aurait pu être en équipe avec 1 à2 élèves)

°Non sollicitation d'élèves ou très ponctuellement pour réagir sur le codage de l'élève qui a indiqué la position oralement

°Non sollicitation d'arguments du choix de la position proposée

MANIPULATION ET DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE POUR L'APPRENTISSAGE DU CONCEPT DE TRIANGLE AU CYCLE 3

Anne VOLTOLINI
Doctorante, IFE, ENS Lyon
Laboratoire S2HEP
anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé
Dans cet atelier j'ai présenté une situation utilisant les technologies numériques pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas au cycle 3, élaborée dans le cadre d'un travail de thèse. L'enjeu de la situation est, d'une part de faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle, en particulier d'amener une vision ligne 1D du triangle. D'autre part, la situation doit faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un nouvel instrument, le compas, autre que la règle graduée pour réaliser cette construction. L'atelier a permis aux participants de découvrir la situation didactique articulant des cahiers informatisés à l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon. Ils ont testé et analysé cette articulation, qualifiée de duo d'artefacts numérique et matériel, du point de vue de ses potentialités didactiques. Nous avons discuté des apports de l'usage d'un environnement numérique comme une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et entre des constructions géométriques aux instruments.

Dans Voltolini (2017), je me suis interrogée sur la possibilité d'élaborer des situations pour le cycle 3, mobilisant les technologies numériques, qui engagent les élèves dans l'acquisition de connaissances géométriques sur les figures. Mon intention était de construire des situations didactiques qui n'obligent pas dans un premier temps à aller jusqu'à la conceptualisation du point de dimension 0 difficilement appréhendable par les élèves de l'école primaire. Plus particulièrement je souhaitais faire exister une vision 1D des figures et mon hypothèse était que les technologies numériques pouvaient être un moyen pour accompagner la conceptualisation 1D des figures géométriques. En outre, mon idée n'était pas d'utiliser un environnement numérique à la place d'activités dans l'environnement papier-crayon mais d'utiliser les technologies numériques conjointement à des activités papier-crayon. C'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel et artefact numérique au sein d'une même situation que j'ai donc travaillé.

Au cours de l'atelier les participants ont découvert une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, pour la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. L'objectif du duo d'artefacts et de la situation est double : d'une part introduire le compas comme instrument géométriquement pertinent pour construire un triangle et d'autre part amener une vision 1D du triangle. Les participants ont pu mettre en œuvre une analyse de la situation en termes d'apprentissage et d'évolution des connaissances du triangle au fil de la situation.

I - NUMERIQUE ET MATERIEL : QUELLE COMPLÉMENTARITÉ ?

L'objet de ma recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques, pour l'apprentissage des mathématiques, comme environnement complémentaire à des manipulations matérielles dans l'espace sensible. Les résultats de la recherche en didactique (Hoyles & Lagrange, 2010) (Drijvers et al., 2016), assurent du potentiel des technologies numériques pour apprendre les mathématiques. Cependant, je suis persuadée de la nécessité de ne pas simplement substituer les environnements numériques à des manipulations dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon. Mon expérience d'enseignante m'a convaincue que la différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et matériel, pouvait être une potentialité à exploiter. C'est donc dans la perspective d'une mobilisation conjointe de deux environnements, numérique et sensible, ou numérique et papier-crayon que j'ai travaillé.

Mon hypothèse de départ était que la variété des supports et la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel dans une même situation, pouvaient être favorables à la conceptualisation. Les travaux de Maschietto et Soury-Lavergne (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015) qui ont conçu des situations consistant à associer un artefact matériel donné et un environnement numérique mettent en évidence que ce qui se passe en termes d'apprentissage dans l'environnement sensible, lors de l'utilisation de l'outil matériel, est différent de ce qui se passe lors des manipulations dans l'environnement numérique. Les travaux de ces auteures se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, numérique et matériel. Elles montrent que la complémentarité et les ruptures entre les artefacts, numérique et matériel, sont favorables à la conceptualisation. De manière analogue, mon idée principale n'est pas de substituer un environnement numérique à l'utilisation d'un outil matériel ; c'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel, artefact numérique que j'ai travaillé.

Je me suis donc interrogée sur les conditions dans lesquelles l'articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel pouvait être une plus-value pour les apprentissages. L'objectif de mon travail était de caractériser ce qui fait duo afin de donner une définition de ce que je qualifie de duo d'artefacts numérique et matériel.

1 Caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel

J'ai défini un duo d'artefacts comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre aux critères suivants :

- une situation didactique (Brousseau, 1998) qui organise un milieu représentant les savoirs à acquérir et ainsi fonde les conditions de l'émergence et de l'évolution des conceptions (Balacheff, 1995a) ;
- des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) associées provoquées par des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation de chaque artefact ;
- une orchestration (Trouche, 2003) pertinente des artefacts numériques et matériels dans la situation optimisant le duo par le choix raisonné du recours à l'un puis à l'autre artefact.

1.1 Une situation didactique pour faire exister le duo

« Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre » (Bruillard & Vivet, 1994) l'utilisation d'outils, numérique et matériel, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique.

La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel, éléments essentiels du milieu; elle combine les environnements, numérique et sensible ou papier-crayon, et met en œuvre l'articulation entre les manipulations de chaque artefact. Il s'agit, pour un apprentissage donné, d'élaborer un milieu riche en rétroactions en tirant profit des potentialités de chaque artefact tout en intégrant les contraintes de chacun. De plus, la situation permet la dévolution au sujet à la fois du milieu et des actions/rétroactions judicieuses avec ce milieu, en particulier avec chaque artefact.

Dans un duo d'artefacts, la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel donné est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. Le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour la conceptualisation. L'objectif est que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier que l'artefact numérique sollicite de nouvelles stratégies de résolution ; il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de chercher à ce que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celle de l'artefact matériel.

1.2 Des genèses instrumentales associées

Une analyse des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) et des schèmes d'utilisation (ibid) de l'artefact matériel participe à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. Ainsi l'approche instrumentale fournit-elle le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel. D'autre part, l'approche instrumentale permet d'étudier les genèses instrumentales de chaque artefact, numérique et matériel, et d'analyser le bénéfice de chacune d'elles en termes d'apprentissage.

Dans un duo, l'artefact numérique élaboré doit autoriser des transferts de schèmes d'utilisation d'un artefact vers l'autre. Mais l'artefact numérique doit aussi favoriser la construction de nouveaux schèmes; des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation doivent être engendrés par le duo (Figure 1). L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage. De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches. Les instruments fondés par le sujet (Rabardel, 1995) lors de la mobilisation d'un duo ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore l'instrument 1.

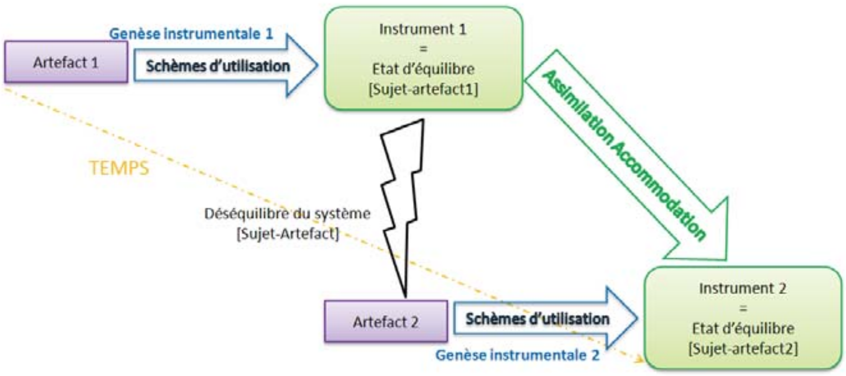


Figure 1. Le duo engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre

Afin de guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle, une orchestration instrumentale (Trouche, 2004) des deux artefacts du duo doit être envisagée. L'élaboration d'une situation et l'orchestration du recours aux artefacts est un enjeu didactique de l'élaboration d'un duo. Il s'agit de trouver des modes d'exploitation qui optimisent le duo par un choix raisonné du recours à l'un puis l'autre artefact. Envisager l'orchestration des artefacts du duo oblige à analyser la contribution de chacun dans la situation d'apprentissage.

2 Des manipulations dans les deux environnements numérique et matériel

Plusieurs études (Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015) font ressortir les avantages des manipulations d'objets numériques par rapport aux manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible. En particulier des études sur le micromonde de la géométrie dynamique mettent en évidence la facilité avec laquelle les jeunes enfants peuvent voir et explorer une grande variété de formes, et ainsi découvrir des relations entre les formes. Les environnements de géométrie dynamique s'avèrent efficaces pour l'apprentissage de la géométrie dès l'école primaire. Un environnement numérique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques, éléments du milieu, avec lesquels l'utilisateur pourra interagir et ainsi acquérir des connaissances en contexte. Un duo d'artefacts doit donc inciter à des manipulations dans l'environnement matériel et dans l'environnement numérique.

Cependant, de simples manipulations, d'objets matériels ou numériques, n'assurent pas un apprentissage. Ce qui est important c'est la façon dont ces objets numériques et matériels, sont conçus et utilisés. Il est en effet nécessaire de problématiser les manipulations par des questionnements et de les inclure dans un contexte plus général qui donne du sens aux objets à manipuler.

II - UN DUO D'ARTEFACTS NUMÉRIQUE ET MATÉRIEL POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE

L'enjeu pour moi, dans la thèse, était donc de composer un duo pour un apprentissage choisi et d'analyser à la fois le processus de composition du duo et de la situation qui le mobilise, ainsi que les effets du duo sur l'apprentissage et la conceptualisation.

J'ai choisi de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. L'artefact matériel du duo est donc le compas. Il s'agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mette en œuvre le duo. Mon objectif est de donner du sens à l'usage du compas dans cette tâche de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

1 Un problème du cycle 3 : la construction du triangle à la règle et au compas

Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte des programmes du cycle 3, et d'une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Cette construction du triangle à la règle et au compas (Figure 2), est emblématique de l'enseignement de la géométrie comme construction d'un polygone à la règle et au compas. Dans l'enseignement, elle n'est souvent associée qu'à une procédure de tracé et non à la conceptualisation du triangle. En outre, cette construction repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves.

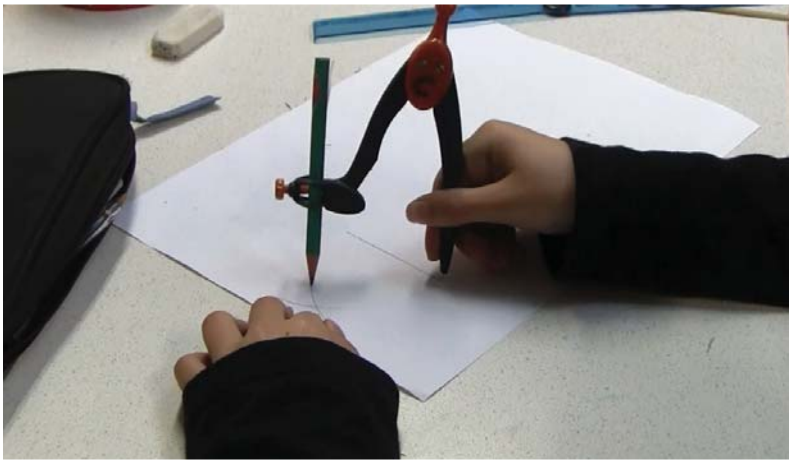


Figure 2. Un triangle déterminé par un côté et le troisième sommet obtenu comme intersection de lignes

1.1 La règle graduée un obstacle à franchir

La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent spontanément le triangle à la règle graduée uniquement. La règle graduée est un artefact à partir duquel sont élaborés deux instruments. Un instrument pour l'alignement qui permet de tracer des droites, des segments et un instrument de mesure de longueurs. La règle graduée permet donc aussi en mobilisant simultanément les deux instruments de tracer des segments de longueurs données. Étant donné que, dans leur scolarité, les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, je me suis interrogée sur l'éventualité que l'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données soit potentiellement un obstacle. La résistance de cet obstacle tient à une vision 2D du triangle comme « une surface délimitée par trois côtés » ; elle tient aussi au fait que souvent les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. La règle est alors l'instrument naturellement associé au tracé du triangle car elle permet de tracer ses trois côtés de mesures données. Brousseau (1998) explique que le franchissement d'un obstacle représente un palier dans le développement cognitif du sujet. Le franchissement d'un obstacle requiert un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance. L'obstacle est franchi si la situation et les outils disponibles suscitent l'opération mentale requise. Introduire le compas dans la construction du triangle nécessite une autre vision du triangle, une autre déconstruction du triangle.

1.2 Une construction qui repose sur la conceptualisation du point

Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 3) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas, en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial. Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3e sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer.

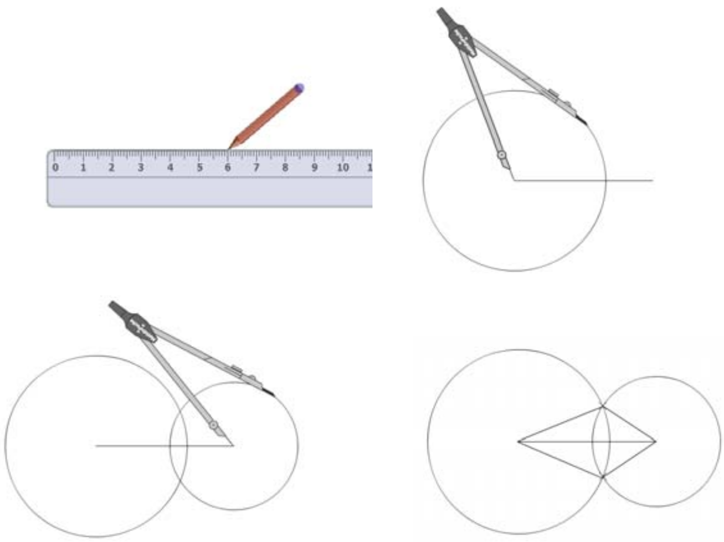


*Figure 3***.** Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas

La construction du triangle à la règle et au compas présente donc deux difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves. D'autre part le compas ne produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercles) n'appartenant pas au triangle.

1.3 Trois idées directrices pour l'élaboration d'une situation et d'un duo d'artefacts

Induire la pertinence géométrique de l'utilisation du compas dans cette construction ainsi qu'amener une vision 1D du triangle étaient mes enjeux dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et d'une situation qui le met en œuvre. A la lumière des travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (Duval & Godin, 2005), (Perrin-Glorian & Godin, 2014), j'ai formulé trois idées directrices pour l'élaboration d'une situation.

Une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point

Je cherchais à adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point difficilement appréhendable par les élèves était au cœur de mes préoccupations. Je cherchais donc à élaborer un duo d'artefacts favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.

Un nouvel instrument compas dans la construction du triangle

Les genèses instrumentales du compas pour tracer un cercle ou pour reporter une longueur ne permettent pas aux élèves de l'utiliser dans la construction du triangle. Le duo et la situation devaient donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction d'un triangle.

Une nouvelle caractérisation du cercle

Je souhaitais aussi profiter de l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas pour faire évoluer les connaissances sur le cercle. Mon intention était donc aussi que la situation mobilisant un duo d'artefacts numérique et matériel amène le cercle comme outil dans la construction du triangle et renforce le concept de distance constante associé au cercle.

1.4 Introduction d'un environnement numérique

La déconstruction du triangle 2D en éléments 1D ne peut être obtenue par la seule utilisation de la règle et du compas. Cette décomposition 1D du triangle nécessite l'utilisation d'instruments différents. C'est pourquoi il m'a semblé intéressant d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour élaborer un artefact qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par l'usage de la règle et du compas.

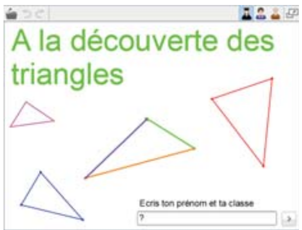
L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des outils usuels de géométrie pouvait aussi être un moyen de proposer une phase de rupture face à l'obstacle de la règle graduée. Les tâches proposées dans l'environnement numérique devaient conduire l'élève à prendre conscience de la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas autre que la règle graduée pour réaliser la construction d'un triangle de longueurs des côtés données.

2 Une situation qui articule compas matériel et cahier informatisés

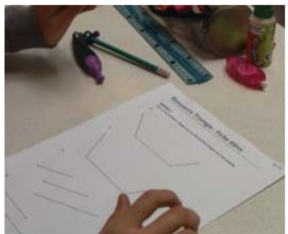
2.1 Une situation en quatre phases

La situation est constituée de deux cahiers informatisés et de deux activités papier-crayon (Figure 4). L'orchestration des artefacts, numérique et matériel, du duo a été pensée de manière à alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Quatre phases successives sont à traiter : un cahier informatisé et une activité papier-crayon puis un second cahier informatisé et une deuxième activité papier-crayon.

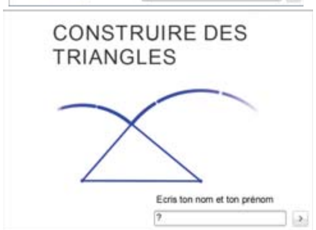
Phase 1



Phase 2



Phase 3



Phase 4

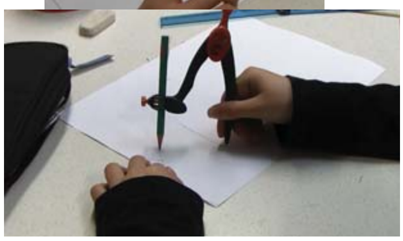


Figure 4. Une situation en quatre phases qui alterne cahiers informatisés et activités papier-crayon

2.2 De la manipulation de segments numériques à la construction au compas

Ayant pour double objectif d'amener le compas dans la construction du triangle et de provoquer la conceptualisation 1D du triangle, mon intention était de proposer des tâches qui détachent les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre ces côtés en particulier d'identifier qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours former un triangle.

Ce sont les choix de variables didactiques qui vont provoquer la genèse instrumentale du nouvel instrument compas et qui vont permettre l'évolution des connaissances sur le triangle. Je considère trois variables didactiques potentielles : les longueurs des segments, les déplacements possibles des segments, les outils disponibles.

Un premier cahier informatisé : A la découverte des triangles

J'ai développé un environnement numérique qui inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Il s'agissait d'utiliser les potentialités du numérique pour,d'une part, favoriser l'expérimentation et l'étude des objets mathématiques et, d'autre part, élaborer un milieu riche en rétroactions qui aident les élèves à réfléchir sur les aspects mathématiques de leur action et qui permette la mise en œuvre de stratégies, leur évolution et donc l'enrichissement des connaissances géométriques du triangle.

Le premier cahier d'activités informatisé nommé « À la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5). Les cinq pages d'activités de ce cahier informatisé, amènent à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes donnés (page 1), et déterminer si trois segments donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2, 3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

Les longueurs des segments présents sur chaque page

Je souhaitais que les élèves puissent prendre conscience qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours obtenir un triangle. Ainsi, dans ce premier cahier informatisé j'ai choisi de proposer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres qui ne la vérifient pas. Page 1, un triplet de longueurs permet d'aboutir à un triangle plat. En revanche les longueurs sont choisies de manière à ce que tous les triangles perceptibles à l'écran de l'ordinateur soient théoriquement constructibles. En effet, les cas limites dans lesquels il serait possible de former perceptivement un triangle à l'écran alors que les longueurs ne vérifient pas l'inégalité triangulaire sont exclus.

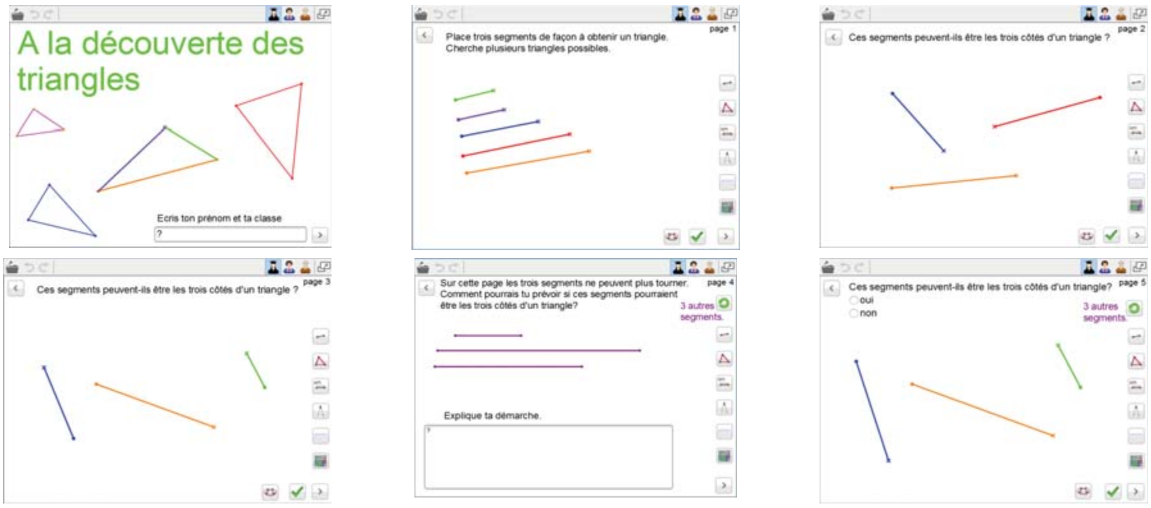
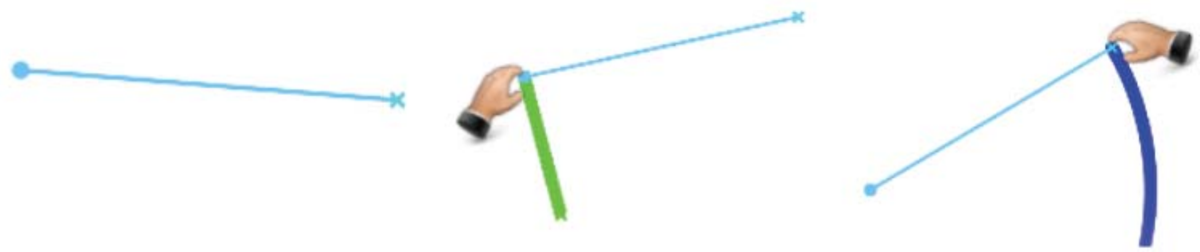


Figure 5. Illustration des différentes pages du premier cahier informatisé « À la découverte des triangles »

Les déplacements possibles des segments

Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 6). La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment.



Segment asymétrique : une extrémité ronde et une extrémité cruciforme

Le segment est déplacé par translation

Le segment est déplacé par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe

Figure 6. Des segments asymétriques à l'écran et dans leur comportement

Dans ce cahier, l'asymétrie de déplacement des segments provient d'une contrainte du logiciel Cabri Elem[1] utilisé dans le cadre de ce travail. En effet dans le logiciel Cabri Elem, pour créer un segment de longueur fixe celui-ci doit être le rayon d'un cercle. Ainsi l'extrémité correspondant au centre du cercle peut être déplacée librement ce qui translate le segment, et l'autre extrémité ne peut être déplacée que par rotation sur le cercle. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens comme nous le verrons dans le travail en atelier.

Des outils de géométrie dynamiques disponibles

Sur toutes les pages d'activités de ce cahier, des outils de géométrie dynamique sont disponibles. Dans ce cahier sont présents les outils segment, triangle, mesure, compas-gd, règle graduée-gd et calculatrice. Dans la conception des cahiers informatisés, nous avons fait le choix de proposer sur chaque page une boîte à outils de géométrie dynamique disponible même lorsque ceux-ci ne sont pas nécessaires pour réaliser la tâche. Ils sont présents sur chaque page du cahier comme les outils matériels, le crayon, la règle, l'équerre et le compas sont disponibles dans les activités de géométrie en papier-crayon. L'usage de certains outils de géométrie dynamique sera nécessaire à la résolution des problèmes proposés dans le second cahier informatisé.

Une première activité papier-crayon qui poursuit l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés

Dans l'environnement papier-crayon, les tâches proposées devaient conduire les élèves à poursuivre l'exploration du triangle en ses trois côtés. La première activité papier-crayon consiste donc à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 7). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segment et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la suivante : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas.

Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

[1] Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans notre travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

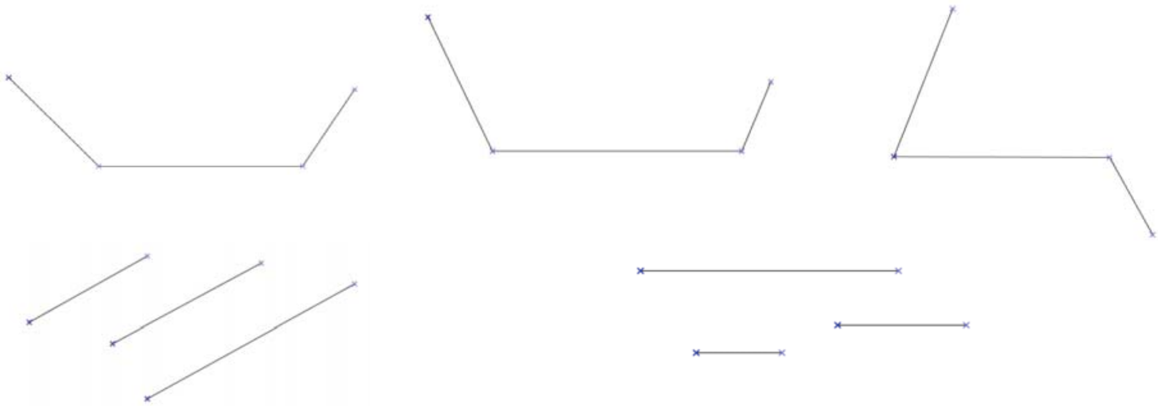


Figure 7. Les cinq configurations de la première activité papier-crayon

Un second cahier informatisé et une seconde activité papier-crayon

Les deux dernières phases de la situation n'ayant pas été analysées dans l'atelier, je ne les présente ici que succinctement.

Le second cahier informatisé, « Construire des triangles », a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercles doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. La technologie Cabri Elem nous permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Cette opportunité à été utilisée pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle.

La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

III - L'ATELIER ET LES DÉBATS

Les participants à l'atelier ont pu étudier les deux premières phases de la situation : le premier cahier informatisé ainsi que la première activité papier-crayon. Ils ont découvert le duo implémenté dans la situation et ont mis en évidence la plus-value de ce dernier pour provoquer la genèse instrumentale du compas dans la construction du triangle et l'effet de la situation sur l'évolution des connaissances du triangle.

1 Le premier cahier informatisé « À la découverte des triangles »

Dans un premier temps, les participants ont étudié le premier cahier informatisé « À la découverte des triangles » (Figure 5). Ils ont pris en main le cahier, ce qui leur a permis de découvrir la manipulation des segments dynamiques, les stratégies possibles pour résoudre les différentes tâches proposées. Des extraits vidéo de l'activité de certains élèves étaient aussi à la disposition des participants ce qui leur a permis d'identifier les stratégies mises en œuvre par les élèves et les difficultés rencontrées par ces derniers.

1.1 Des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques

Après cette phase de découverte, l'analyse du cahier a porté sur les valeurs des variables didactiques en jeu et sur les stratégies qu'elles induisent. Le candidat artefact numérique du duo a lui aussi été interrogé.

L'environnement numérique permet de faire apparaître les segments côtés du triangle, déjà présent mais pas dans la bonne position. Les longueurs des côtés proposées sous forme de segments et non par leurs mesures favorisent un travail sur les longueurs et non sur les mesures. Un tel environnement permet aussi de créer des segments qui peuvent pivoter autour d'une extrémité.

Les longueurs des segments

Dans les différentes pages du cahier informatisé « À la découverte des triangles », les longueurs des segments proposés, permettent à l'élève de rencontrer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire, et d'autres qui ne la vérifient pas. Ainsi dans certains cas le triangle peut-il être formé alors que dans d'autres il ne le peut pas. Le triangle plat peut aussi être rencontré sur la première page. Ces valeurs de variables didactiques révèlent le problème d'existence ou non du triangle qui ne peut être résolu avec une conception[2] 2D du triangle. La mise en œuvre de contrôles sur les longueurs des segments s'impose, ce qui nécessite la mobilisation d'une nouvelle conception du triangle. La question de la permanence des longueurs des segments numériques est abordée. L'environnement numérique permet de proposer des segments côtés de longueurs fixes alors que les outils matériels ne permettent pas d'avoir cette permanence des longueurs dans l'environnement papier-crayon.

Les déplacements des segments

Dans ce premier cahier informatisé, seules deux valeurs de cette variable sont attribuées aux segments : le double déplacement d'un segment par translation et par rotation dissociées, ainsi que le déplacement par translation uniquement. La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Lorsque les segments proposés apparaissent asymétriques dans leur représentation à l'écran, leur déplacement est double : l'extrémité ronde ainsi que tout point du segment autorise un déplacement par translation et l'extrémité cruciforme autorise le déplacement par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. Lorsque les segments ont deux extrémités rondes (page 5 du cahier) le seul déplacement autorisé est celui par translation uniquement.

La discussion s'engage sur la différence entre l'usage de baguettes matérielles et la manipulation de segments numériques. Les segments numériques asymétriques dans leurs déplacements sont les éléments centraux du milieu constitué par ce cahier informatisé. En effet, l'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements, par translation et par rotation autour d'une extrémité, contrairement aux manipulations d'objets matériels lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ainsi l'environnement informatique met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques et provoque la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique. C'est cet instrument qui va induire l'usage du compas matériel pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon.

1.2 L'apprentissage inclus dans la stratégie gagnante

Un participant fait remarquer que ne pas pouvoir pivoter les deux extrémités du segment induit la stratégie gagnante. En effet, l'asymétrie de mouvement des segments conduit à la mise en œuvre d'une stratégie gagnante efficace pour former un triangle. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la mise en œuvre d'une stratégie par ajustements. Les ajustements faciles à réaliser sont les ajustements par rotation et c'est ainsi que la stratégie « ligne brisée » prend forme. Une stratégie gagnante efficace pour former un triangle à partir des segments proposés dans l'environnement numérique, consiste à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle sera ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 8). Ainsi l'environnement numérique crée un milieu qui met en évidence la rotation, indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques et conduit à la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante porteuse d'apprentissage (Voltolini, 2014). En effet cette stratégie est associée à une conception 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée. De plus, la ligne brisée

---

[2] Le mot conception est considéré au sens de Balacheff et du modèle cK¢ (Balacheff 1995a). « Une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation. » « Une conception est caractérisée par un ensemble de problèmes pour lesquels elle apporte des outils de résolution. »

amène à penser la ligne brisée qui ne peut se fermer et donc l'inexistence du triangle (Figure 8). Cette nouvelle conception contient une structure de contrôle nouvelle par rapport à la conception initiale 2D du triangle. Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas.

Un triangle est une ligne brisée fermée — La ligne brisée ne peut être fermée pour obtenir un triangle

Figure 8. Illustration de la stratégie « ligne brisée », stratégie porteuse d'apprentissage

Cette stratégie « ligne brisée » est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une reconstruction du triangle 2D à partir de la ligne brisée 1D.

La question de la place du plus grand segment au centre de la ligne brisée ou non est soulevée dans la discussion. Dans le cahier informatisé les rétroactions placent toujours le grand segment au centre. Or les vidéos montrent que les élèves essaient des configurations avec chaque segment au centre de la ligne brisée. Il serait donc pertinent de prévoir la rétroaction correspondant à la disposition des segments proposée par l'utilisateur. Nous notons néanmoins que les lignes brisées avec le plus long segment entre les deux autres sont plus efficaces. En effet, elles permettent une anticipation plus facile de la position du troisième sommet.

2 La première activité papier-crayon

Dans un second temps, la première activité papier-crayon et son articulation avec le cahier informatisé ont été étudiées. Des extraits vidéo de l'activité de certains élèves étaient à la disposition des participants afin de leur permettre une identification des stratégies mises en œuvre par les élèves et des difficultés rencontrées par certains. Il s'agissait de s'interroger sur l'instrument compas qui peut émerger de l'articulation du cahier informatisé avec la première activité papier-crayon. La conceptualisation du triangle tout comme sa déconstruction dimensionnelle 1D, restaient, elles aussi, au cœur des discussions.

2.1 La ligne brisée comme élément de continuité du duo

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique nous a permis de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que j'ai intégré dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie « ligne brisée » fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement par rotation au compas matériel.

2.2 Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment

La première activité papier-crayon (Figure 7) est prévue de manière à faire mobiliser le compas matériel. Les manipulations directes et continues des segments n'étant plus possibles, les outils de géométrie vont être mobilisés pour remplacer les déplacements par translation et rotation de l'environnement numérique. Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial (Figure 9).

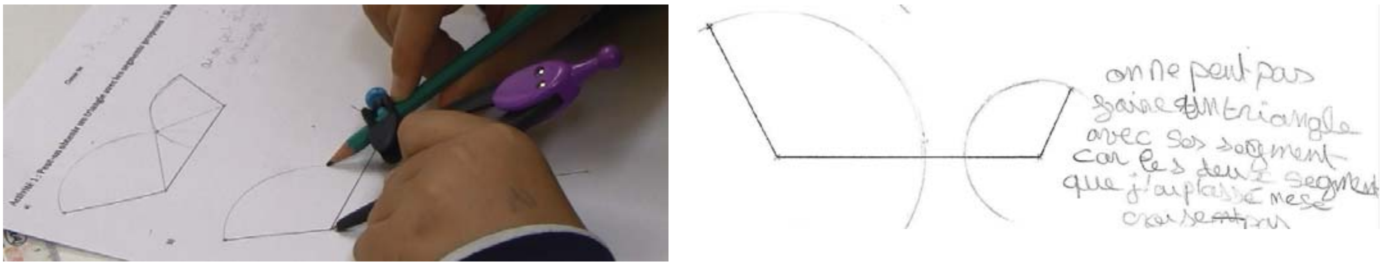


Figure 9. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la construction du triangle

La mobilisation du compas matériel est coordonnée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique dans le premier cahier informatisé. D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe et une mine qui tourne. D'autre part, l'instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisations qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment à l'aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas puis piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe, écarter les branches et poser la mine sur l'extrémité à pivoter, enfin pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible. On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. Dans chaque schème d'utilisation pour pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l'utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe (la permanence des longueurs n'est pas automatique) ; le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas, il faut tracer le segment résultat du pivotement.

2.3 Une vision 1D du triangle comme une ligne brisée de trois segments, fermée

La stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas (Figure 9) est une stratégie mise en œuvre par les élèves comme le montrent les vidéos. La discussion s'engage sur le fait que les élèves adaptent la stratégie ligne brisée mise en œuvre dans le cahier informatisée à l'environnement papier-crayon. Une hypothèse pour expliquer ce transport de stratégie d'un environnement à l'autre est que fermer une ligne brisée est moins coûteux que d'assembler les trois segments.

Cette stratégie, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas et, d'autre part, induit des conceptions nouvelles du triangle et du cercle. La conception 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments, est mobilisée ; elle permet de résoudre le problème de construction du triangle ainsi que le problème d'existence ou non du triangle (Figure 9).

2.4 Une conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment pivoté

Le passage par la ligne brisée et l'utilisation du compas pour pivoter ses segments extrêmes engagent aussi une nouvelle conception du cercle : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. Le compas qui pivote un segment déjà tracé consolide la représentation de distance constante associée au cercle. Les participants notent que dans le cas du compas qui pivote le segment ne reste pas visible entre ses branches (Figure9). La mobilisation d'autres matériels tels que des ficèles ou des bandelettes (Figure 10) qui permettent de rendre visible le segment qui pivote pourraient être complémentaires aux segments numériques et au compas pour renforcer le concept de distance associé au cercle.

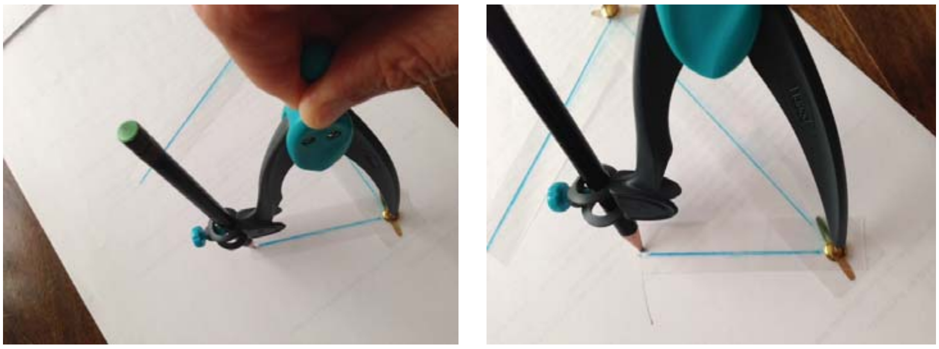


Figure 10. Des bandelettes plastiques qui se déplacent avec le crayon du compas pour rendre visible le segment entre les branches du compas

La question de la prise de conscience par les élèves des deux lieux possibles pour le troisième sommet du triangle est aussi posée. Dans les expérimentations réalisées en classe très peu d'élèves tracent les deux triangles solutions. Même lorsque des cercles complets sont tracés et donc que les deux positions possibles du troisième sommet apparaissent, un seul triangle est tracé : celui « du dessus ». La place des segments dans la feuille pourrait être une nouvelle variable didactique. Par exemple, présenter des segments suffisamment hauts dans la feuille pour que seul le triangle « en dessous » puisse être construit.

3 Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle au fil de la situation

Des expérimentations de la situation ont été réalisées durant trois années consécutives dans deux classes de CM2 d'une école Rep+ de l'agglomération grenobloise. Ces tests successifs dans de réelles conditions de classe ont participé à l'élaboration du duo et de la situation. L'analyse de 34 productions d'élèves de la dernière année d'expérimentation nous a permis d'obtenir des résultats concernant les effets du duo et de la situation sur les apprentissages.

Le duo, par l'alternance des activités instrumentées dans les environnements numériques et papier-crayon permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas (Figure 11).

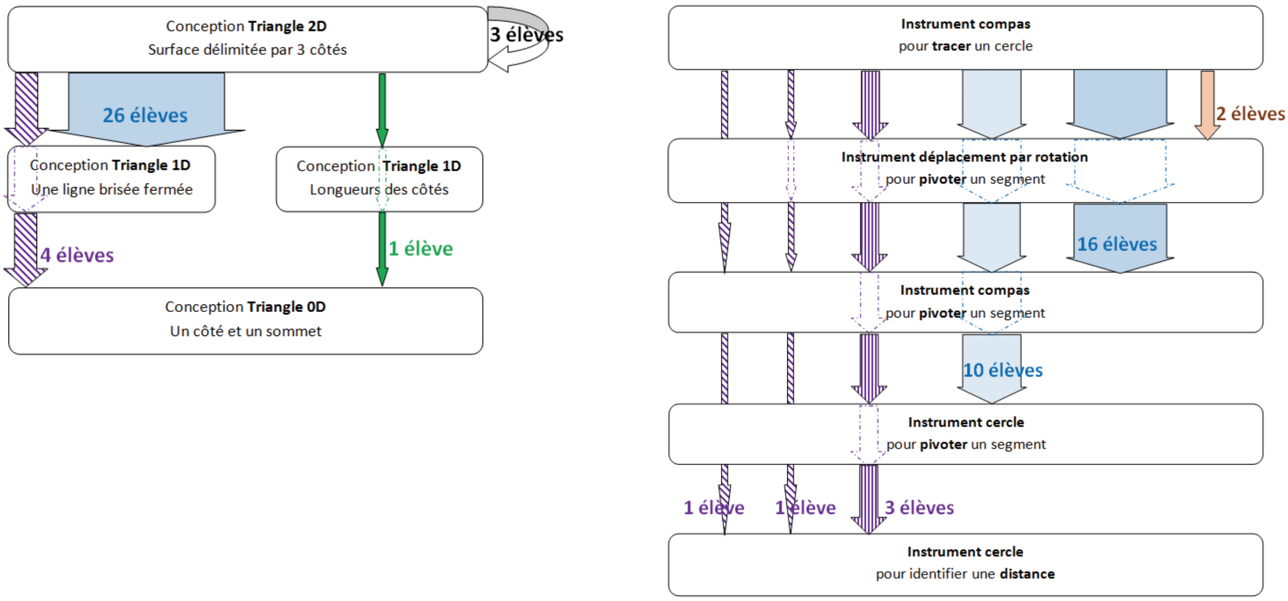


Figure 11. Bilan des parcours de conceptions du triangle et d'instruments identifiant le nombre d'élèves par parcours

Le duo sollicité dans la situation incite à la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée » pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon pour au moins 26 élèves sur 34. La ligne brisée et la stratégie associée constituent une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas dans un premier temps à aller jusqu'au point de dimension 0 pour construire le triangle à la règle et au compas. Les 26 élèves qui mettent en œuvre la stratégie « ligne brisée » dans l'environnement papier-crayon développent une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment. Les 5 autres élèves, qui ont tracé le triangle à la règle et au compas sans l'intermédiaire de la ligne brisée, ont mis en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle jusqu'au point 0D.

IV - CONCLUSION

Mon intention, dans ce travail, était de créer une situation utilisant les technologies numériques pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas. L'enjeu était de dépasser la procédure de tracé. Mon objectif était double : d'une part, amener le compas et sa pertinence géométrique dans la construction du triangle et d'autre part faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle. L'objet de cette recherche était donc d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à l'environnement papier-crayon et à l'utilisation du compas. Il s'agissait d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour franchir l'obstacle de la règle graduée qui produit le segment côté et pour amener le compas qui lui produit des tracés auxiliaires. Mon intention principale était de mettre l'accent sur la possibilité de faire exister une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D sans nécessairement aller jusqu'au point, obtenu comme intersection de lignes, difficilement appréhendable par les élèves de l'école primaire. J'ai donc développé un duo d'artefacts, déplacement par rotation dans un environnement de géométrie dynamique et compas matériel, et une situation didactique en quatre phases qui sollicite ce duo en articulant successivement cahier informatisé et activité papier-crayon. Utilisée en articulation avec des activités papier-crayon, la manipulation de segments dynamiques d'apparence et de comportements asymétriques a montré qu'elle pouvait être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des constructions géométriques aux instruments. Des observations en classe montrent la mise en œuvre d'une stratégie « ligne brisée », stratégie gagnante dans l'environnement numérique adaptée à l'environnement papier-crayon. Cette stratégie provoque à la fois une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment et induit des conceptions nouvelles du triangle et du cercle : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments et un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. Tracer une ligne brisée de trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas est une stratégie efficace pour construire un triangle à la règle et au compas qui n'oblige pas la conceptualisation du point d'intersection des deux arcs de cercle ; cette intersection des deux arcs de cercle est identifiée comme le point de rencontre des segments côtés de la ligne brisée. Cette stratégie « ligne brisée » et la conception du triangle 1D-ligne brisée qui lui est associée incluent le problème d'existence ou non du triangle : si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent le triangle existe, s'ils ne se rencontrent pas le triangle n'existe pas. Ainsi l'usage des technologies numériques dans un duo d'artefacts est-il une valeur ajoutée à l'outil matériel compas qui aide à franchir l'obstacle de la règle graduée et à introduire la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle et qui participe à l'élaboration et à l'évolution des connaissances sur le triangle.

Ce travail s'est focalisé sur le développement d'un environnement numérique qui incite à des manipulations pour enrichir le compas matériel. Le duo d'artefacts créé met en relation le déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique et le compas matériel. Ce travail pourrait être prolongé par l'étude de manipulations d'objets matériels. Pourrait-on développer un artefact matériel qui puisse constituer un duo avec le premier cahier informatisé et précisément la manipulation de segments numériques ? Composer par exemple, un duo bandelettes matérielles et segments numériques, nous semble pouvoir être prometteur à la fois pour la conceptualisation du triangle, spécifiquement pour sa déconstruction dimensionnelle 1D en une ligne brisée fermée, et pour amener le compas dans sa construction géométrique. Un tel duo serait aussi plus pertinent pour renforcer le concept de distance associé au cercle, pivoter une bandelette au compas permet de garder visible le segment entre les branches du compas tout au long du pivotement.

V - BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N. (1995a). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) (pp. 219–244). Presented at the Séminaire de Didactique et Technologies cognitives en mathématiques, Grenoble France.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage Grenoble, France.

BRUILLARD, E., & VIVET, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *14*(1.2), 275–304.

DRIJVERS, P., BALL, L., BARZEL, B., HEID, M. K., CAO, Y., & MASCHIETTO, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5–53.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7–27.

HOYLES, C., & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0

MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 959–971. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3

PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, (222), 28–38.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.

SINCLAIR, N., & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Lyn D. English; David Kirshner,.

SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, *47*(3), 435–449. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3

TROUCHE, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécéssite des orchestrations* (HDR). Montpellier.

TROUCHE, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 181–197.

VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, *94*, 25–46.

VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3* (Thèse de doctorat). Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon France.

QUELLES TRACES POUR OPERATIONNALISER LES APPRENTISSAGES DANS UN JEU ARTICULANT TANGIBLE ET NUMERIQUE ?

Jean-Pierre RABATEL
Chargé d'études, Institut Français de l'Éducation
ENS de Lyon, Équipe EducTice
jean-pierre.rabatel@ens-lyon.fr

Jean-Luc MARTINEZ
Chargé d'études, Institut Français de l'Éducation
ENS de Lyon, Équipe EducTice
jean-luc.martinez@ens-lyon.fr

Résumé
OCINAÉÉ (Objets Connectés et Interfaces Numériques pour l'Apprentissage à l'École Élémentaire) est un projet de recherche en e-éducation (2014-2016). Il propose des situations d'apprentissage des mathématiques au travers de jeux utilisant du matériel tangible (cartes, plateau de jeu, stylet) qui communique avec un environnement numérique par l'intermédiaire d'un petit robot mobile, d'un téléphone et de tablettes (Mandin, De Simone et Soury-Lavergne, 2016 ; Soury-Lavergne, 2016). L'un des quatre jeux, *Voyage dans le plan*, concerne l'orientation, le repérage spatial et le codage d'un déplacement (Rabatel et Soury-Lavergne, 2018). La collaboration est un élément nécessaire à la réussite dans ce jeu, en particulier lorsqu'elle s'appuie sur la production de traces. Ce jeu amène les élèves à prendre conscience que les traces sont nécessaires à la résolution de la situation problème proposée.

Cet atelier propose de réfléchir aux traces obtenues dans un jeu articulant tangible et numérique et dans quelle mesure ces traces peuvent rendre les apprentissages davantage opérationnels.

Pour cela, nous présentons succinctement le projet OCINAÉÉ (partie I) puis le jeu *Voyage dans le plan*, support des traces à étudier (partie II). Les expérimentations conduites au cours du projet ont permis l'observation et le recueil des traces produites par le dispositif et les élèves. Nous les présentons dans leur contexte (partie III) avant d'en proposer une typologie en fonction du support sur lequel elles sont produites, de leur origine, de leur nature et du rôle qu'elles occupent dans la résolution du jeu (partie IV). Enfin, les participants à l'atelier ont été invités à prolonger les présentations pour analyser la situation pédagogique et identifier les évolutions possibles et les conditions associées pour obtenir des traces favorisant la collaboration et la résolution du problème (partie V).

I - PRESENTATION DU PROJET OCINAÉÉ

Le projet OCINAÉÉ – Objets Connectés et Interfaces Numériques pour l'Apprentissage à l'École Élémentaire – financé par le programme e-éducation « Investissements d'avenir », s'est déroulé de 2014 à 2016, en partenariat avec les entreprises digiSchool et Awabot, le centre ERASME de la Métropole de Lyon et l'IFÉ, en collaboration avec de nombreux participants dont 38 enseignants du primaire et du collège. Le projet a conçu et étudié des situations d'apprentissage des mathématiques mettant en jeu des objets matériels tels que plateaux de jeu, cartes, stylets, connectés à une plate-forme numérique par l'intermédiaire d'un petit robot mobile, d'un téléphone et de tablettes.

Quatre jeux ont été conçus lors d'ateliers de co-conception et expérimentés auprès de 2091 élèves de cycles 2 et 3 des écoles et collèges de la métropole de Lyon. Plusieurs boucles itératives ont contribué tout au long du projet à la conception et à l'amélioration des jeux d'un point de vue à la fois didactique et pédagogique. Les expérimentations ont permis le développement de questions de recherche relatives à l'articulation du tangible et du numérique dans les situations d'apprentissages, à la collaboration entre les élèves dans les jeux et leur rôle sur l'évolution des stratégies de résolution de problème. Les quatre jeux permettent l'apprentissage du calcul, de la numération décimale des nombres entiers et décimaux, du repérage spatial et de l'orientation, du codage des positions et trajectoires en regard des nouveaux programmes des cycles 2 et 3. Chaque jeu a été conçu pour proposer une structure identique au cycle 2 et cycle 3 afin de favoriser la continuité des apprentissages.

II - LE JEU VOYAGE DANS LE PLAN

Photo n°1 : Jeu Voyage dans le plan. Exemple d'une partie Aller-simple avec les éléments et les obstacles

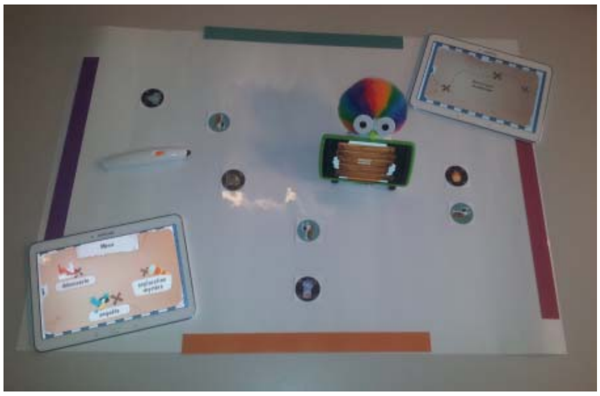


Photo n°2 : Jeu Voyage dans le plan. Exemple d'une partie Exploration mystère avec les éléments et les obstacles

Voyage dans le plan est un jeu collaboratif pour travailler l'orientation, le repérage spatial et le codage de déplacements d'un robot dans un espace à deux dimensions représenté par un plateau. Il peut être joué à 2, 3 ou 4 joueurs. Les rôles des joueurs ne sont pas choisis par le dispositif et la répartition des actions entre les joueurs n'est pas imposée par le jeu.

Le jeu se décline en trois missions, et chaque mission en deux niveaux de difficultés afin de répondre aux besoins de tous les élèves de cycles 2 et 3. Quelle que soit la mission choisie, le but du jeu reste le même. A la suite d'une tempête, les quatre éléments naturels, l'eau, l'air, le feu et la terre, ont été dispersés à la surface du plateau. Il s'agit de piloter le robot pour aller récupérer les quatre éléments.

Nous nous intéresserons à la mission *Exploration mystère* (plutôt fin de cycle 3) qui utilise un plateau blanc. La première étape du jeu consiste à disposer les jetons des quatre éléments et des obstacles sur le plateau d'après les indications données par le dispositif sur la carte de l'une des tablettes. La seconde étape (phase d'entraînement) permet de s'entraîner à piloter le robot à l'aide d'un codage d'une suite d'instructions sur les tablettes pour comprendre la manière dont il se déplace. La troisième étape consiste à récupérer fictivement en deux tentatives les quatre éléments en un seul trajet et en évitant les obstacles. Pour cela, le robot devra passer au-dessus des jetons éléments. Durant la phase d'entraînement, les joueurs considéreront le passage du robot au-dessus du jeton comme une réussite, sans retirer les jetons du plateau sous peine de perdre son emplacement précis, ce qui serait de nature à compromettre la poursuite du jeu. Par contre, durant la troisième étape, lorsque le robot passera au-dessus des jetons, si le codage comprend l'instruction « ramasser un élément », le robot poursuit son trajet. Si l'instruction est erronée, le robot signale l'erreur. L'instruction « ramasser un élément » se fait à l'aide d'une instruction précise (pince) et doit être correctement placée dans la série des instructions de déplacements du robot.
Le déplacement du robot est programmé à l'aide de commandes de pilotage (photo n°3). Les joueurs auront choisi en début de partie un mode de pilotage : soit le mode absolu, soit le mode relatif.

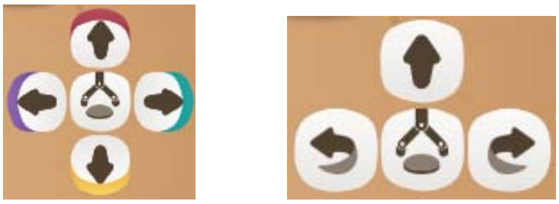


Photo n°3 : à gauche, la commande de pilotage en mode absolu
et à droite la commande de pilotage en mode relatif

Avec la commande **Pilotage absolu**, les directions sont fixées tels les points cardinaux. Les instructions de pilotage sont constituées de quatre flèches. Chaque flèche fait avancer le robot d'un pas en direction d'un des bords du plateau.

Avec la commande **Pilotage relatif**, les directions sont données par rapport au robot. Les instructions de pilotage sont constituées de trois flèches. La flèche rectiligne fait avancer le robot d'un pas devant lui. Les flèches courbes, à droite et à gauche, font pivoter le robot sur lui-même sans le faire avancer. Elles permettent d'orienter le robot dans la direction souhaitée.

L'utilisation des commandes de l'un ou l'autre des modes de pilotage par les joueurs génère une suite d'instructions qui s'affiche sur une tablette. Ces instructions seront réalisées par le robot sur le plateau dès validation par les joueurs.

Photo n°4 : Les différents jetons sur le plateau

Sur la photo n°4, le robot arrive dans une nouvelle case en évitant un jeton obstacle. Il vient de passer au-dessus du jeton élément « air ». Le robot s'avance sur le jeton élément « terre ». Le déplacement du robot valide ainsi la série d'instructions des joueurs.

Le déroulement du jeu pour la mission Exploration mystère

La première étape du jeu consiste à disposer les jetons « éléments » et « obstacles » sur le plateau en suivant les instructions données par les deux tablettes. Pour chaque élément ou obstacle, il faut :

- avec la tablette « loupe », scanner le jeton et valider. Pour viser, placer le jeton sous la tablette, le faire apparaître dans le viseur puis superposer le cercle du viseur avec le bord du jeton ; après validation, l'endroit où doit être posé le jeton est indiqué sur l'autre tablette qui reproduit l'état actuel du plateau de jeu.
- Avec le stylet, pointer la bonne position sur le plateau et appuyer sur le bouton du stylet. Ici surgit la première problématique du jeu : l'orientation. Le plateau est orienté, mais les élèves ne savent pas dans quelle direction. De plus, le dispositif ne prend pas en compte la position des tablettes autour du plateau de jeu, ce qui peut générer un problème à résoudre pour les élèves.
- Déposer le jeton sur la position choisie.

Les tablettes indiquent si l'élément ou l'obstacle a été bien placé.

La seconde étape permet aux joueurs de s'entraîner à piloter le robot pour récupérer les éléments. Cette étape n'est pas limitée, ni par le temps ni par le nombre d'essais. Il faut :

- utiliser les commandes de pilotage pour coder le déplacement du robot jusqu'à la position voulue ;

- valider pour démarrer le robot ;
- une tablette affiche les codages sélectionnés, l'autre visualise sur sa carte le trajet suivi par le robot.

Après chaque essai, le robot revient sur sa position de départ.

Quand les joueurs sont prêts, ils passent à la dernière étape. La sortie de l'étape d'entraînement est définitive. Cette étape est la plus délicate pour les élèves, car elle leur donne à résoudre plusieurs problèmes. Ils doivent, à travers leurs entraînements, trouver quel est le « pas » du robot (de quelle distance il se déplace avec une instruction de codage). La problématique d'orientation est toujours présente et elle est différente selon le mode de pilotage choisi (absolu ou relatif). De plus, pour pouvoir réussir leur codage (qui peut demander jusqu'à plus de 30 instructions), ils doivent comprendre la nécessité de garder une trace de leurs essais de codage et engager une nécessaire collaboration de ce point de vue. C'est cette nécessité de trace et sa variété qui sont au cœur de notre atelier et qui sont présentées dans ces actes.

La troisième étape du jeu consiste à récupérer avec le robot les quatre éléments en un seul trajet dans un ordre choisi par les joueurs et en évitant les obstacles. Les joueurs n'auront que deux tentatives.

Chaque tablette donne une information différente et complémentaire de l'autre tablette. Selon les phases du jeu, l'une présente la consigne et l'autre la carte avec la position repérée par le stylet (l'élément si le repérage est juste ou une croix rouge si le repérage est faux). Ou dans une phase suivante, l'une indique les instructions de codage des déplacements du robot, en pilotage absolu ou relatif et l'autre la carte avec la trajectoire suivie par le robot. Et le contenu des tablettes change de tablette à chaque essai. Cette dissémination des informations sur les différents supports rend nécessaire la collaboration entre les élèves pour résoudre le problème posé.

III - LES TRACES PRODUITES PAR LES ELEVES

1 La collaboration au service des traces

La collaboration est un élément nécessaire à la réussite dans ce jeu. Les informations nécessaires à la résolution du problème sont réparties sur les différents objets tangibles et connectés : chacun des joueurs peut n'avoir accès qu'à une partie des informations s'il regarde les seuls supports qui se trouvent à proximité de lui. Ces informations sont réparties sur différents supports :

- le plateau de jeu orienté par le dispositif autour duquel les joueurs peuvent se déplacer ;
- les jetons-éléments posés sur le plateau ;
- le robot posé sur le plateau, orienté dans le sens de son déplacement ;
- les tablettes proposant alternativement des consignes, le pad d'instructions de codage des déplacements du robot et la reproduction du plateau de jeu sous forme de carte avec les positions des jetons-éléments à récupérer ;
- les rétroactions du dispositif après une action des joueurs concernent soit la question de la position soit celle des trajectoires :
    - pour la position des jetons-éléments : la carte de la tablette indique si la position est bien repérée (le jeton-élément cesse de clignoter et se fige) ou en cas d'erreur, la position cliquée sur le plateau (une croix rouge avec une temporisation d'effacement pour contraindre les joueurs à prendre l'information avant de l'effacer) ;
    - pour le déplacement du robot : sur la carte de la tablette, les traces des déplacements du robot représentés par des pointillés apparaissant au rythme du déplacement du robot sur le plateau.

A chaque essai, le contenu alterne d'une tablette à l'autre. Cette spécificité contraint les joueurs à devoir orienter à chaque fois les tablettes et se positionner eux-mêmes par rapport au plateau et tablettes. Ainsi, la production de traces sur un support toujours orienté comme le plateau est de nature à faciliter la réussite de la partie.

Les joueurs, mobiles autour du plateau de jeu, changeant les tablettes de position à la fois par rapport à eux-mêmes et au plateau de jeu, doivent prélever l'ensemble de ces indices nécessaires à la résolution du problème, indices disséminés sur les différents supports, et les interpréter après réorientation.
Les joueurs doivent donc communiquer, échanger, se montrer les supports d'informations pour apporter aux autres joueurs les informations dont ils ont, eux seulement, pris connaissance. D'autre part, ces informations sont généralement orientées par rapport au support qui les contient et au joueur qui les porte. Or, les joueurs se déplacent, emportant avec eux ce support, modifiant sans cesse l'orientation de l'information.

De plus, les joueurs ne pensent pas toujours à regarder l'ensemble des supports pour prélever toutes les informations qui leur seraient utiles. Au cours des premières parties, c'est souvent le hasard des déplacements qui leur font voir l'affichage apparu sur une tablette. Par la suite, ils intègrent que les informations sont réparties sur tous les matériels et adoptent le plus souvent une organisation qui permet à chaque joueur de faire part de l'information qu'il détient ou va détenir.

2 Quelques exemples de traces d'élèves



CM2 - Exploration mystère - Facile – Pilotage absolu

Photos n°5, 6 et 7 : Traces des trajectoires sur le plateau et des instructions sur le bord du plateau

Dans les différentes situations représentées sur les photos n°5 à 10, les élèves ont noté la trajectoire que suit le robot sur le plateau (grandes flèches) et également indiqué la suite d'instructions qu'ils veulent coder avec des petites flèches sur l'un de ses bords.

Cette trace peut être la reproduction des instructions figurant sur la tablette ou bien la trace de leur recherche avant de les saisir sur le pad de commande de la tablette, quel que soit le mode de pilotage, en mode absolu ou relatif. Seule la nature de la trace elle-même va différer pour prendre généralement une forme identique à celle des commandes des tablettes.



Stratégies des élèves du *CM2 - Exploration mystère - Facile – Pilotage relatif*

Photos n°8, 9 et 10 : Forme des traces identiques à celles des commandes de la tablette

3 point de vue des traces

Ce jeu souhaite amener les élèves à prendre conscience que les traces sont nécessaires à la résolution de la situation problème proposée. En fait, si l'on cherche à caractériser les situations problèmes, il y en aurait trois :

- orienter les objets les uns par rapport aux autres et par rapport aux joueurs ;
- construire un repérage du plan (dans la version plateau uni) c'est-à-dire un pavage du plan en fonction des pas du robot. Ce deuxième problème n'est pas véritablement posé par le jeu ;
- déterminer une suite d'instructions qui permettent de piloter le robot et de lui donner une trajectoire voulue. En revanche, c'est pour la résolution de cette situation problème que des essais sont réalisés et qu'il est nécessaire de mémoriser et partager (grâce à la collaboration, à cause de la complexité, à cause de la contrainte de deux essais finaux).

3.1 Première situation de jeu

Les élèves ont tracé la trajectoire du robot au feutre sur le plateau (photo n°11) après avoir déterminé le sens du déplacement et le nombre de pas du robot. Ils ont posé les cartes à côté et dans le sens de la trajectoire tracée. Le nombre de cartes correspondant au nombre de pas du robot a été déterminé empiriquement et perceptivement de façon proportionnelle à l'emprise du robot sur le plateau.

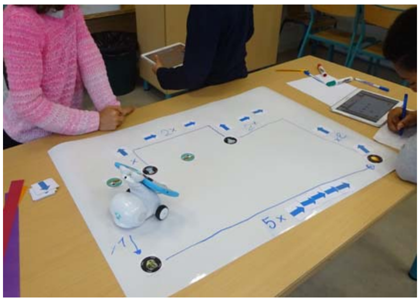


Photo n°11 : Traces de la trajectoire sur le plateau. Joueurs et dispositif tous orientés de la même façon

Il n'y a pas de recours à un repère orienté (absence de points cardinaux ou de couleurs) et les flèches posées sur le plateau correspondent aux instructions de la tablette. Les flèches posées sur le plateau indiquent une direction correspondant à la trajectoire que suivra le robot. Mais les élèves dialoguent face à face et les directions données par la tablette n'ont pas la même signification selon que le joueur se trouve face au plateau et dans le même sens que le déplacement du robot ou en face avec une situation orientée à l'inverse. On observe d'ailleurs que le joueur qui tient la tablette s'est tourné dos au plateau pour que lui-même, sa tablette, l'autre joueur qui écrit (à droite) et tous les éléments du dispositif aient la même orientation.

Une première trace papier est produite pour garder la mémoire du codage après de nombreux essais répétant les mêmes erreurs (photo n°12). C'est une trace reproduisant les trajectoires du robot sur le plateau.

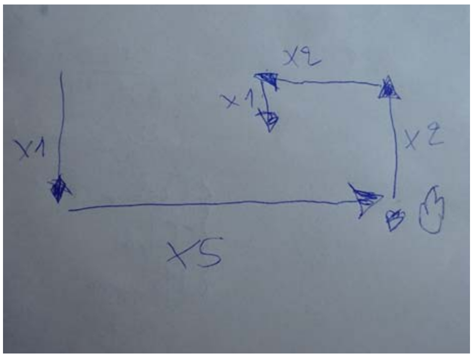


Photo n° 12 : Traces reproduisant la trajectoire du robot

Puis une deuxième trace est produite par les élèves à partir de la première. Elle ressemble au codage en ligne de la liste d'instructions figurant sur l'une des tablettes.

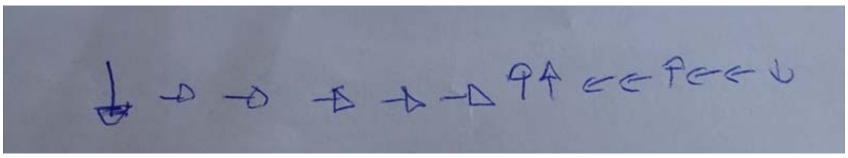


Photo n° 13 : Traces reproduisant la suite d'instructions à coder

3.2 Deuxième situation de jeu

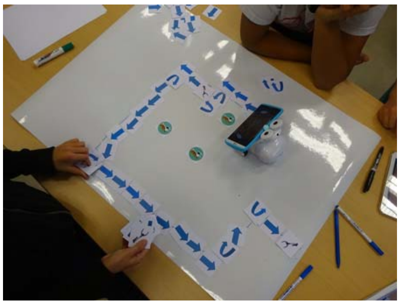


Photo n°14 : Traces de la trajectoire avec des cartes fléchées ne prenant pas en compte le nombre de pas du robot

Dans cette situation (photo n°14), la longueur d'un pas du robot n'a pas été déterminée par les joueurs. C'est la taille des cartes qui, posées sur la trajectoire tracée au feutre, détermine le nombre d'instructions nécessaires au déplacement. Une carte correspond-elle à un pas ? La flèche tourne à gauche/à droite pose question aux élèves qui ne savent pas où la mettre car celle-ci ne correspond pas à un déplacement du robot mais juste à une rotation.

Les essais successifs vont peu à peu amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de définir le pas, ce qui se fera par tâtonnements et essais-erreurs.

IV - TYPOLOGIE ET ROLES DES TRACES DANS LE JEU VOYAGE DANS LE PLAN

Pour analyser les diverses traces produites par le jeu, nous nous appuierons sur la mission *Exploration mystère* avec un plateau blanc jouée par des élèves de fin de cycle 3 (CM2 – 6ème) et sur la mission *Aller simple* avec un plateau quadrillé jouée par des élèves de CE1.

1 Nature des traces produites

Au cours des expérimentations conduites au printemps dernier, il a été possible de commencer une typologie des traces selon ce qu'elles représentent, qui les produit et de quelle façon. Ce recueil reste à l'état de chantier et demande encore d'être enrichi de données et d'analyses. Durant les expérimentations, les traces observées sont produites :

- par les élèves sans aucune indication du dispositif autre que celle des jetons et du robot posés sur le plateau ;
- par le dispositif suite aux actions des élèves ;
- par les élèves en fonction des indications données par le dispositif ;
- par les élèves à l'aide du matériel fourni par le dispositif.

Les traces représentent des positions, des trajectoires, des orientations et des instructions de codage.

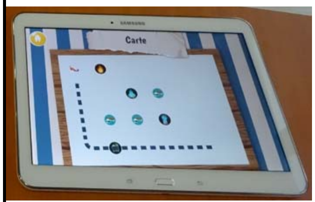
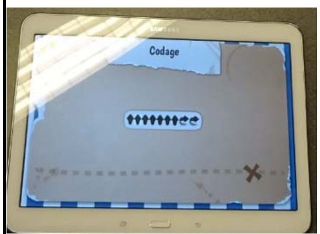
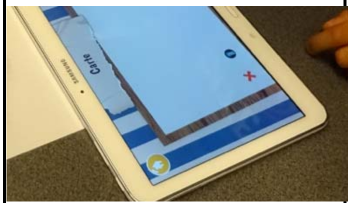
2 Quelles traces selon le support ?

Photo n°15 : Traces produites par les élèves

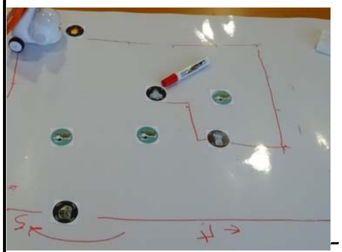
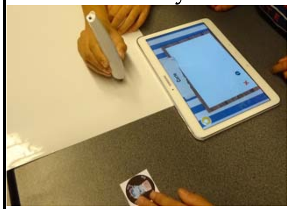
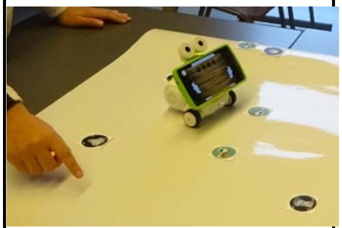
Photo n°16 : Traces produites par le dispositif

Les supports peuvent être tangibles (plateau de jeu, cartes, jetons, bandes de couleur, cartes-flèches, feuille de papier, …), numériques (téléphone, tablettes) et à la croisée des deux (robot).Les traces sur les tablettes

2.1 Les traces sur les tablettes

Traces = Trajectoires	Traces = Instructions	Traces = Orientation	Traces = Position
- Traces non permanentes produites par le **dispositif** suite au codage des instructions de déplacement du robot par les élèves sur la tablette.  Les pointillés sur la tablette représentant les déplacements du robot sur le plateau.	- Instructions produites par les **élèves** à partir du pad de flèches de codage du déplacement du robot.   Ces instructions s'effacent lorsque les joueurs passent à l'étape suivante.	- Traces du mode de pilotage absolu affichées par le **dispositif**  - Traces du mode de pilotage relatif affichées par le **dispositif**.  	- Erreur de positionnement du jeton : le **dispositif** affiche une croix rouge sur la tablette  - Positionnement correct du jeton : le **dispositif** fige l'image du jeton qui cesse de clignoter 

2.2 Les traces sur le plateau (sur l'espace de déplacement du robot)

Traces = Trajectoires	Traces = Instructions	Traces = Orientation	Traces = Position
 - Le déplacement du robot, validant ou pas les instructions de codage, constitue un ensemble de traces non permanentes produites par le **dispositif** suite au codage des instructions de déplacement du robot par les élèves sur la tablette. -------------  Traces continues non orientées produites par les **élèves** -------------  Traces discontinues orientées produites par les **élèves** Une flèche = un pas ?	 Le nombre de pas du robot a été déterminé par tâtonnements. Son codage se fait à l'aide des initiales des bandes de couleur en référence aux bandes d'orientation (Orange, Bleu, Violet, Rouge) à la place des flèches. Les traces des **élèves** représentent à la fois le nombre de pas et l'indication de la direction de la trajectoire.	- Les bandes de couleur ne sont pas utilisées par les **élèves**. Ils ont créé leur propre système de référence, ils ont inscrit les 4 points cardinaux (nord, sud, est, ouest) sur le plateau  ------------- - La position du robot et son déplacement dans une direction donnée constituent un ensemble de traces non permanentes.	- Trace des **élèves** non marquée et fugitive : le clic avec le stylet  - Pose du doigt et/ou placement du jeton sur la position cliquée sur le plateau en référence à la carte de la tablette  ------------- - La position du robot et son déplacement dans une direction donnée constituent un ensemble de traces non permanentes.

Dans la mission du jeu *Aller simple* utilisant le plateau quadrillé (photos n°17 et 18), les élèves pointent la case dans laquelle se trouve le jeton. La trace fugitive produite par les élèves demande moins de précisions par rapport à la même situation dans la mission du jeu *Exploration mystère* (photos n°19 et 20).

Photos n°17 et 18 : Le quadrillage aide au repérage des positions par les élèves

Photos n°19 et 20 : L'absence de repères est à gérer par les élèves

Perception d'alignements et alignement du dispositif : quelles différences pour les joueurs ?

Les photos ci-après représentent la situation de quadrillage implémenté par le dispositif numérique : quelque soit la position sélectionnée dans une case du quadrillage, elle sera considérée comme correcte par le dispositif. Imaginons jouer avec un plateau blanc sans aucun repère visuels autres que les indications de la carte de la tablette et les jetons posés au fur et à mesure sur le plateau.

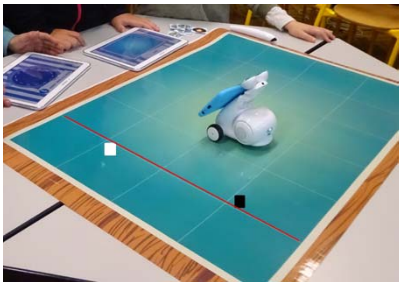


Photo n°21 : Cas 1

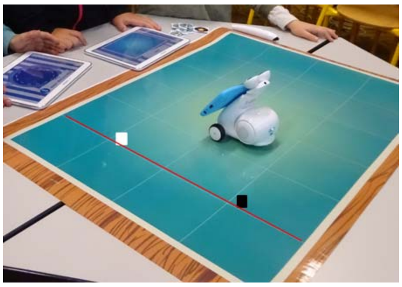


Photo n°22 : Cas 2

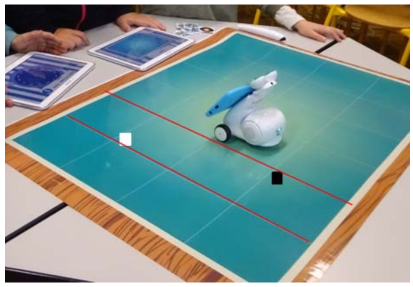


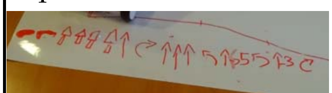
Photo n°23 : Cas 3

Prenons le cas 1 (photo n°21). Après avoir posé les jetons blanc et noir, les joueurs ont visuellement l'assurance qu'ils sont alignés et vont coder le déplacement du robot en conséquence. Or, pour le dispositif, ces deux jetons ne sont pas alignés comme ils le seraient pour le cas 2 (photo n°22). La différence est difficilement perceptible visuellement pour les joueurs mais le dispositif intègre très distinctement cette différence d'alignement.

Dans le cas 3 (photo n°23), les jetons ne sont visuellement pas alignés à l'inverse de ce que considère le dispositif. Les conséquences pour le codage du déplacement du robot par les joueurs peuvent être importantes et provoquer, au moins au début, des incompréhensions entre les codages considérés comme corrects par les joueurs et les déplacements du robot suivant la logique du dispositif.

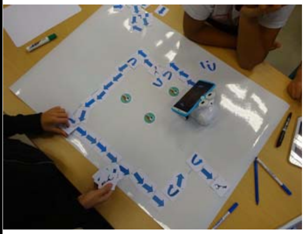
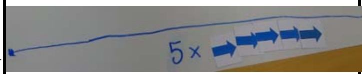
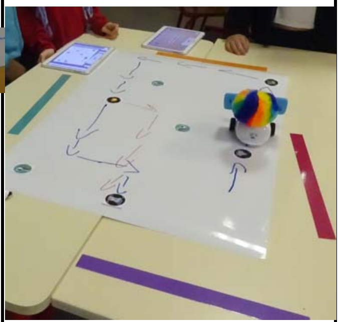
2.3 Les traces sur le bord du plateau (hors de l'espace de déplacement du robot)

Les traces observées produites sur le bord du plateau sont celles des élèves qu'ils font seuls ou bien selon les indications fournies par le dispositif comme les bandes de couleur pour orienter le plateau.

Traces = Trajectoires	Traces = Instructions	Traces = Orientation	Traces = Position
	Traces des **élèves** : les Instructions sont obtenues par tâtonnement après plusieurs essais de déplacement du robot 		- Les points cardinaux sur le plateau - Placement des bandes de couleur (pilotage absolu) après essais-erreurs - Les points cardinaux sur le plateau sont désignés en fonction du pad

			d'instructions sur la tablette

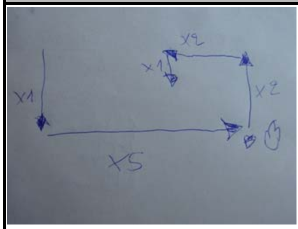
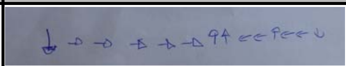
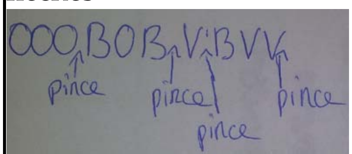
2.4 Les traces avec les cartes, les bandes de couleur ou les jetons

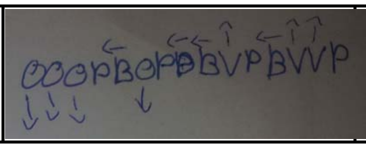
Traces = Trajectoires	Traces = Instructions	Traces = Orientation	Traces = Position
- Traces des **élèves :**  Les cartes représentent la trajectoire du robot, leur nombre ne dépend pas du nombre de pas du robot. Leur nombre a une fonction de remplissage de l'espace à parcourir par le robot entre deux points donnés.	- Traces des **élèves :**   Les cartes représentent le nombre de pas du robot déterminé par une succession d'essais-erreurs. Mais l'écriture "5x→→→→→" fait redondance, les joueurs n'ayant pas choisi entre la représentation des 5 pas avec 5 flèches et leur nombre seulement avec une seule flèche pour la direction (« 5 → » ou « 5×→ »).	- Les bandes de couleur fournies par le **dispositif** sont placées autour du plateau après un ou plusieurs tests de déplacement du robot dans une ou plusieurs directions 	- Traces produites par les élèves selon les indications fournies par le **dispositif**. Les jetons sont posés sur le plateau à l'endroit cliqué avec le stylet et validé par le dispositif.  La précision pour désigner la position du jeton par le clic puis ensuite de déposer le jeton sur sa position diffère selon que le plateau est blanc, sans aucun repère, ou bien qu'il s'agisse du plateau quadrillé de la mission *Aller simple*.  Avec le plateau blanc, les élèves ignorent s'il existe d'autres points correspondant à cette position. S'ils n'y prennent garde, ils peuvent déposer le jeton à côté de cette position et fausser ainsi le codage du déplacement à venir.

			 Avec le plateau quadrillé, il est suffisant pour le dispositif que les élèves désignent n'importe quel point de la case et la position sera considérée comme correcte.

2.5 Les traces sur une feuille

Toutes les traces observées produites sur une feuille sont uniquement celles des élèves. On pourrait imaginer des traces mixtes, venant à la fois des élèves et d'autres du dispositif comme les bandes ou les cartes. Le support « feuille » diffère de celui du « bord du plateau » car la trace sur la feuille reste permanente et peut être conservée, réutilisée et affichée lors des mises en commun avec toute la classe par exemple.

Traces = Trajectoires	Traces = Instructions	Traces = Orientation	Traces = Position
 - Les traces des **élèves** reproduisent en réduction celles écrites sur le plateau. C'est aussi une représentation des déplacements du robot sur le plateau.	 - Traces des **élèves** pour la mémorisation des instructions après un essai (celles de la tablette s'effacent) ------------- - Anticipation des instructions de codage du déplacement ou reproduction de celles figurant sur la tablette ------------- -Instructions codées à l'aide des initiales des couleurs des bandes d'orientation à la place des flèches  --------------- - Codage mixte initiales-flèches directionnelles : redondance ou explication ou pour se rassurer ?		

V - GROUPES DE TRAVAIL : QUELLES TRACES POURRAIENT PRODUIRE LES ELEVES ?

L'atelier proposait aux participants de relever les traces favorisant la collaboration et la résolution du problème, le moment du jeu durant lequel elles intervenaient et leur rôle. Ils devaient analyser la situation pédagogique et ses évolutions possibles (éléments tangibles, consignes, etc.) pour favoriser la production de traces par les élèves et s'interroger sur comment encadrer la production de traces pour les instructions de codage, pour l'orientation, pour la recherche de trajectoires et de pas du robot, pour les améliorer et les rendre plus utiles pour les apprentissages.

De même, pour encourager à la collaboration et aider à la résolution du problème, comment et à quelles conditions les traces pourraient-elles favoriser la collaboration ? Qu'attendons-nous des traces produites par les élèves ? Quel impact les traces peuvent-elles avoir sur les apprentissages ? Quel dispositif pourrait inciter les élèves à recourir par eux-mêmes aux traces ? A d'autres étapes du jeu, quelles traces pourraient être utiles ?
Les échanges ont permis de caractériser le contexte des traces. Les traces sont nécessaires pour communiquer. Quelles situations de communication peuvent contraindre les joueurs à produire des traces ?

1 Des traces différenciées pour des tâches différenciées

1.1 Des cartes de dimensions égales à celles du pas du robot

Des cartes du type  sont proposées avec le jeu. Leurs dimensions (5cmx5cm) sont très inférieures à celles du robot et à la longueur de son pas. Cette trace matérielle proposée par le dispositif pourrait être différente selon les joueurs auxquels elle s'adresse. Par exemple, pour des joueurs éprouvant des difficultés pour trouver le nombre de pas nécessaires pour un déplacement donné, l'enseignant pourrait donner des cartes aux dimensions correspondant à celles du robot sur le plateau (photo n°24).

La juxtaposition des cartes sur le plateau constituerait une aide au codage du déplacement du robot, tant pour le nombre de pas que pour la direction de la trajectoire.

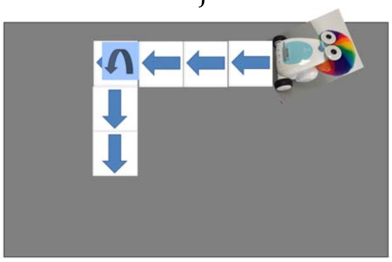


Photo n°24 – Cartes de la taille du pas du robot

1.2 Des cartes-bandes de longueur d'un pas du robot

On pourrait conserver les cartes existantes (5cmx5cm) et rajouter des cartes-bandes  de longueur égale à celle du pas du robot. Elles permettraient de représenter la seule trajectoire, et la direction serait donnée par une carte flèche posée à côté de la trajectoire (photos n°25 et 26).

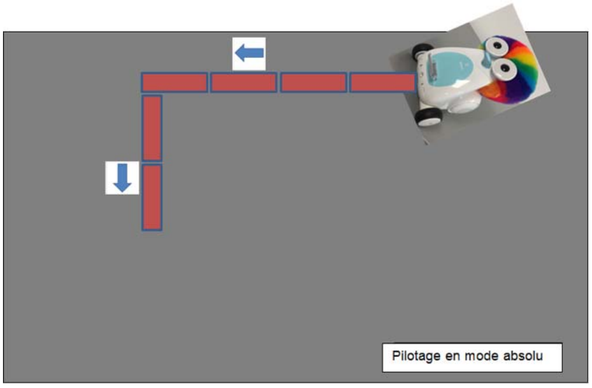


Photo n°25 - *Utilisation des cartes bandes correspondant au pas en pilotage absolu*

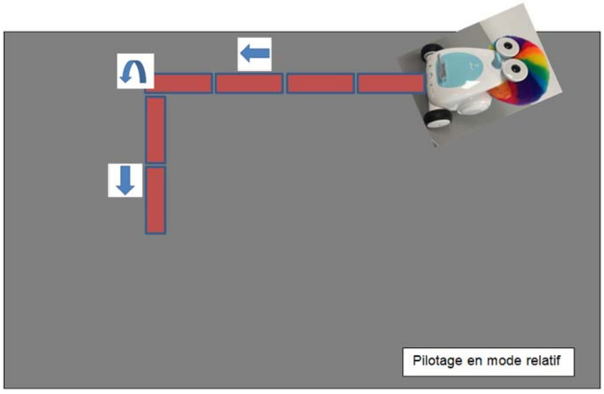


Photo n°26 - *Utilisation des cartes bandes correspondant au pas en pilotage relatif*

2 Des situations de codage-décodage

Dans ces situations, les participants ont proposé que les groupes de joueurs communiquent entre eux leurs traces de trajectoires ou d'instructions.

2.1 Situation°1

Un groupe code un déplacement du robot, le teste puis produit un message destiné à un autre groupe qui doit à son tour tester le codage ; la validation peut se faire sur la trace du déplacement du robot sur le plateau du groupe auteur ou bien par le déplacement du robot lui-même.

2.2 Situation°2

On demande à un groupe d'écrire le codage du déplacement du robot dans un labyrinthe tracé sur le plateau.

2.3 Situation°3

Un groupe code un déplacement puis filme le déplacement du robot par le téléphone posé sur lui. À partir de la vidéo, demander à un autre groupe le codage du déplacement du robot selon son point de vue.

2.4 Situation°4

Un groupe choisit un mode de pilotage, code un déplacement du robot et le filme par-dessus. L'autre groupe visionne la vidéo, place un élève à chaque angle du plateau pour coder ce même déplacement avec des points de vue différents. Pour réussir, ils doivent comparer et compléter les codages produits selon leur point de vue.

VI - CONCLUSION

Comme on a pu le voir, la résolution de la situation problème proposée par le jeu passe nécessairement par la production de traces de la part des élèves. Elles peuvent être très variées et nécessitent une nécessaire collaboration entre eux. Il est à noter cependant que les élèves ne ressentent pas forcément spontanément cette nécessité, bien qu'elle soit suggérée par le dispositif ou encore par le matériel mis à disposition (feutres effaçables, plateau blanc, chiffon, feuilles, …). Une explication peut être, par exemple, que les élèves n'ont pas d'habitude d'avoir « le droit » d'écrire sur un plateau de jeu. Il est donc, à un moment, nécessaire d'expliciter le fait qu'il faut garder trace des essais de codage. Comme il est dit dans le guide pédagogique du jeu, les traces, leur rôle et les formes qu'elles peuvent prendre doivent être travaillés lors de mises en commun programmées dans une séquence d'apprentissage.

Nous avons également remarqué, lors des expérimentations que nous avons effectuées, que, dans un groupe de joueurs, celui qui « prend le stylo », qui a l'idée de produire des traces, devient naturellement le leader du groupe et entraîne derrière lui les autres joueurs. Cela a une répercussion déterminante pour la résolution du problème.

VII - BIBLIOGRAPHIE

MANDIN, S., DE SIMONE, M. et SOURY-LAVERGNE, S. (2016). Robot Moves as Tangible Feedback in a Mathematical Game at Primary School. Dans M. Merdan, W. Lepuschitz, G. Koppensteiner et R. Balogh (dir.). *Advances in Intelligent Systems and Computing: Vol. 457. Robotics in Education: Research and Practices for Robotics in STEM Education* (p. 245-257). From: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-42975-5_22/fulltext.html

SOURY-LAVERGNE, S. (2016, juillet). *Duos of Artefacts, Connecting Technology and Manipulatives to Enhance Mathematical Learning*. Communication présentée à 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01492990/document

RABATEL, J.-P. et SOURY-LAVERGNE, S. (2018). Faire des mathématiques avec des cartes et un robot, le projet OCINAEE. In *Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : Quelles orientations ? Quels enjeux ? Actes du 43e Colloque de la COPIRELEM* (p. 304-317). ARPEME.

À PROPOS DE L'USAGE DE PUZZLES GÉOMETRIQUES EN CLASSE

François DROUIN
APMEP Lorraine
françois.drouin2@wanadoo.fr

Résumé
La manipulation de pièces de puzzles géométriques trouve sa place dans les temps d'enseignement mathématique de cycle 1. L'atelier avait pour objectif de présenter d'autres exemples d'utilisation en cycle 1 ou à destination des élèves des cycles 2 et 3. Des puzzles moins connus ont été utilisés, l'apport de la couleur et du quadrillage ont été des points souvent évoqués. Ont été utilisés des moments de formation de futurs Professeurs des Écoles, des expérimentations en classe ou lors d'animations destinées à des élèves, ainsi que des pistes de recherche explorées au sein de la régionale Lorraine et du groupe national « Maths et Jeux » de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)[1].

La manipulation de pièces de puzzles géométriques trouve sa place dans les temps d'enseignement mathématique de cycle 1. En fin d'école maternelle, il est mentionné dans les programmes que les élèves doivent être capables de « reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides) » (BO n°2 du 26 mars 2015, p.16).

Au cycle 1, les premiers puzzles manipulés sont des encastrements pièce à pièce. Par la suite, les pièces s'emboitent de manière unique pour réaliser un dessin figuratif. Enfin sont introduits des assemblages de formes géométriques utilisées pour le recouvrement de silhouettes d'objets ou de personnages. L'ensemble des pièces est utilisé pour de nombreux motifs et les recouvrements ne sont plus nécessairement uniques. Ces assemblages issus du découpage d'une forme géométrique sont couramment nommés « puzzles géométriques ». Pour les expérimentations évoquées pendant l'atelier, cette définition a été étendue : seules certaines pièces seront utilisées pour certains assemblages, ou des collections de pièces identiques seront utilisées, formant une catégorie nommée ici « puzzles à pièces identiques ».

Dès le cycle 1, les élèves ont manipulé des pièces extraites d'un découpage de carré pour une recherche des recouvrements possibles de formes géométriques dont le nom leur était connu, les élèves recouvrent des rectangles pour former des motifs géométriques non figuratifs.

Au cycle 2, « La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles » (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, p. 83). La manipulation des pièces sera petit à petit complétée par la reproduction de ce qui a été obtenu. Le quadrillage visible sur une face des pièces sera petit à petit une aide à la reproduction des pièces et à certains de leurs assemblages. Les élèves auront à « s'orienter et se déplacer en utilisant des repères, coder et décoder pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements, …, sur un quadrillage, … » (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, p. 84).

« Dès le CM1, on compare et on classe des surfaces selon leur aire. La mesure ou l'estimation de l'aire d'une surface à l'aide d'une surface de référence ou d'un réseau quadrillé est ensuite abordée » (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, p. 209). « Pour construire ou compléter des figures planes par symétrie, différentes procédures seront abordées au cours du cycle. Elles évoluent et s'enrichissent par un jeu sur les figures, sur les instruments à disposition et par l'emploi de supports variés » (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, p. 213). Sera également évoquée l'aide apportée par certains puzzles non

[1] http://www.apmep.fr

plans pour la vision dans l'espace et l'introduction de la grandeur « volume ». Les occasions d'utiliser des puzzles géométriques sont nombreuses pendant les deux premières années du cycle 3.

L'atelier avait pour but d'élaborer des réponses à des questions se posant lors d'une utilisation régulière de puzzles géométriques dans ces trois cycles (Des pièces identiques ? Des pièces de couleurs différentes ? Des pièces quadrillées ? Varier les puzzles utilisés ? Des pièces retournables ? Quels supports pour les productions des élèves ? Pour quels contenus mathématiques ? Dans quel cycle ? Seulement pour la géométrie plane ? Quels liens avec des usages « hors la classe » ?)

Trois moments ont été abordés : « reconnaître les pièces et leur placement », « transmettre », « comparer, mesurer », « retourner, tourner, glisser », pouvant former la trame d'un cheminement commencé au cycle 1 et complété au collège lors de la dernière année du cycle 3.

Mes années d'analyse d'activités en classe me donnent la conviction que la manipulation des pièces de puzzles géométriques facilite la compréhension, l'assimilation et l'utilisation de contenus géométriques. Actuellement en retrait de mes activités professionnelles, j'ai tenu à partager les productions de mes étudiants, mes expérimentations dans des classes ainsi que des pistes de recherche explorées récemment dans le cadre associatif de l'APMEP.

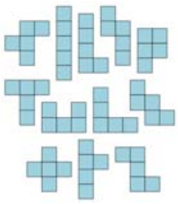
I - PUZZLES GEOMETRIQUES UTILISES LORS DE L'ATELIER

Dans un premier temps, les participants ont manipulé librement les pièces des puzzles proposés, proposant des nouvelles pistes d'utilisation.

Ils ont ensuite mis en œuvre des activités expérimentées avec des élèves. D'autres activités ou pistes de recherche ont été évoquées : la sitographie en fin de ce document permet d'y avoir accès.

Voici les puzzles utilisés.

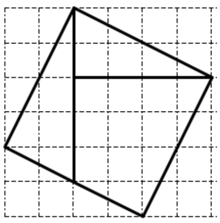
Les pentaminos

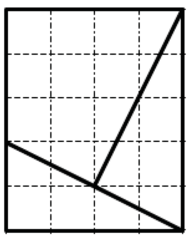


Ils sont formés par les assemblages de cinq carrés identiques adjacents par au moins un côté. Commercialisés sous des noms divers, ils peuvent être utilisés dès le cycle 1.

Pendant l'atelier ont été manipulés des ensembles de douze pièces unicolores pour des activités non exclusivement destinées au cycle 1.

Le puzzle à trois pièces





Il fait partie de la famille de puzzles évoquée en 2013 lors d'un atelier du colloque COPIRELEM de Nantes (Groupe IREM Premier degré Draguignan, 2013).

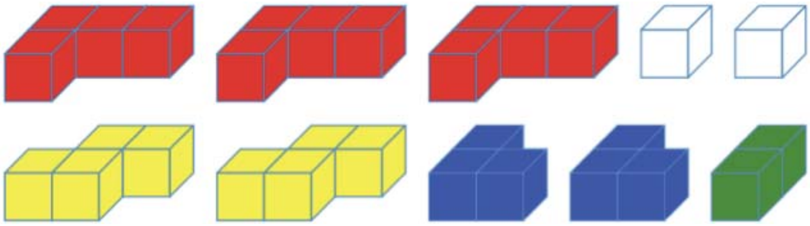
Pendant l'atelier, ont été manipulés des exemplaires sur lesquels un quadrillage était visible sur une des faces (les pièces deviennent non retournables, réaliser des trapèzes n'est plus envisageable, ce qui n'est pas un souci car ces quadrilatères ne figurent pas dans les programmes).

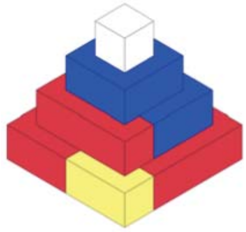
Le Carré de Metz

Ce puzzle a été créé à l'occasion des Journées Nationales de l'APMEP à Metz en 2012.

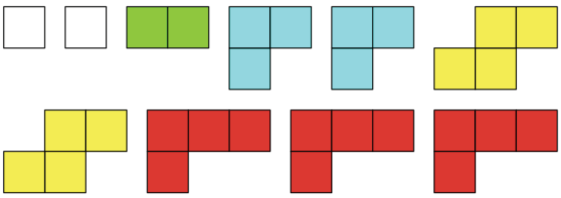
Ces trois types de puzzles ont été manipulés pendant l'atelier, mais seuls les deux premiers ont été le support d'activités commentées.

La pyramide aztèque et le puzzle aztèque



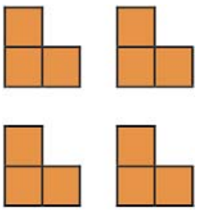


Ces dix pièces ont été diffusées par le groupe Jeux de l'**I**nstitut de **R**echerche pour l'**E**nseignement des **S**ciences et de la régionale de l'APMEP de Toulouse. Celles utilisées pendant l'atelier avaient les couleurs utilisées pour la recherche menée actuellement au sein du groupe Jeux et Maths de l'APMEP. Le choix a été fait de fixer les couleurs des pièces de la pyramide aztèque et du puzzle aztèque. La raison première était de faciliter la circulation dans le groupe des documents de recherche et d'observer si l'utilisation de ces couleurs pouvait faciliter l'entrée dans des contenus mathématiques.



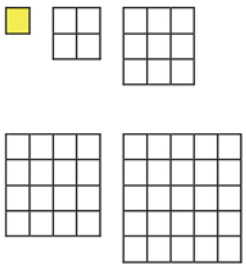
Les dix pièces du puzzle aztèque sont les dix bases des pièces formant la pyramide aztèque. Les pièces sont retournables. Les couleurs sont celles utilisées actuellement au sein du groupe Jeux et Maths de l'APMEP.

Les « Petits L »



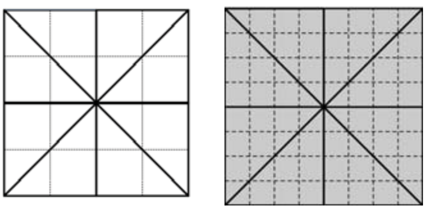
Ces pièces sont des « Rep-figures » ou « Rep-tuiles[2] », leurs dessins à une échelle quelconque peuvent être pavés par des pièces à l'échelle 1. Une pièce de cette famille est le carré.

« Les Petits L » peuvent être aussi considérés comme éléments d'un puzzle géométrique à pièces identiques.



Dessiné à une échelle quelconque, le carré peut être pavé par des carrés jaunes « échelle 1 ».

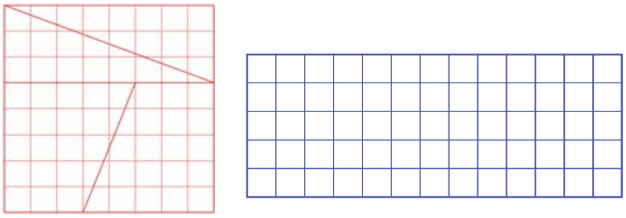
L'Octogramme



Ce puzzle a été repéré dans « …lege Spiele ! Eine Anthologie der Legespiele » (Koch, 1987). Il est le support d'activités dans Jeux École 2 (APMEP, 2013). Les pièces manipulées pendant l'atelier montraient deux types de quadrillage. L'Octogramme est un puzzle géométrique à pièces identiques, ses pièces sont aussi des « Rep-figures ».

2 https://fr.wikipedia.org/wiki/Reptuile : les rectangles et les triangles ont les propriétés énoncées par Solomon W. Golomb.

Le puzzle de Lewis Carroll

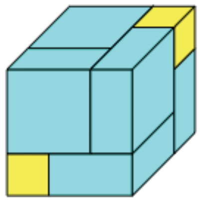


Un découpage du carré formé de 64 carreaux unitaires est sollicité pour le recouvrement d'un rectangle formé de 65 carreaux unitaires : ce puzzle géométrique a été utilisé pour inciter à prendre du recul à propos de ce qui est vu lors de la manipulation de pièces de puzzles géométriques.

Trois découpages d'un cube

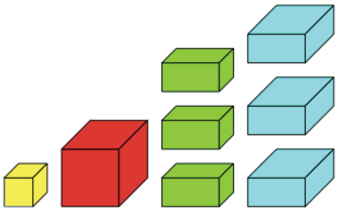
Pour une visualisation de $(a+b)^3$

Pour une visualisation de $(a+b)^3$ imaginée par Cardan

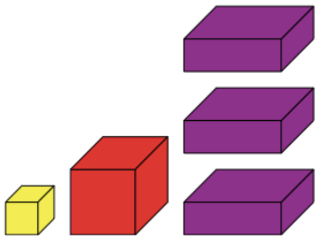


Un découpage de cubes imaginé par Conway

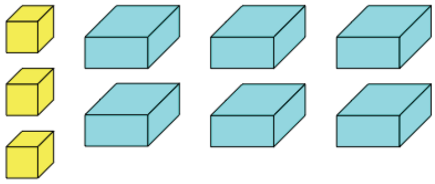
Les pièces utilisées



Pour une visualisation de $(a+b)^3$



Pour une visualisation de $(a+b)^3$ imaginée par Cardan

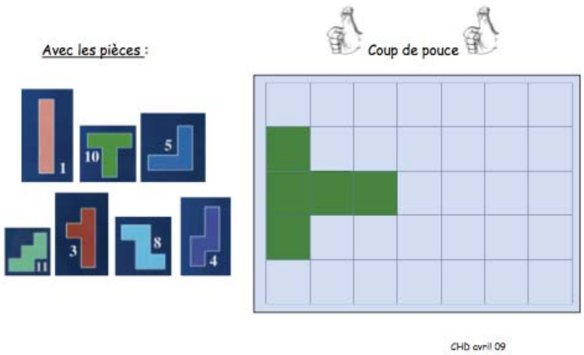


Un découpage de cubes imaginé par Conway.

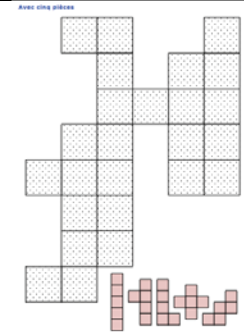
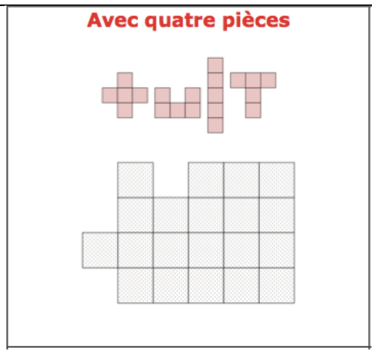
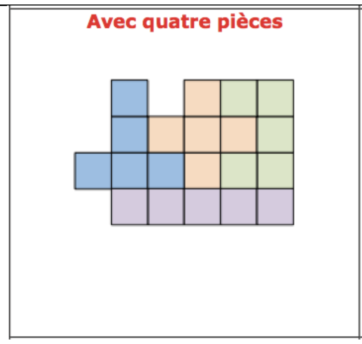
Les identités remarquables évoquées ici n'ont pour but que d'expliquer l'origine des découpages. Les pièces utilisées lors de l'atelier étaient réalisées en carton unicolore.

II - RECONNAITRE LES PIECES ET LEUR PLACEMENT

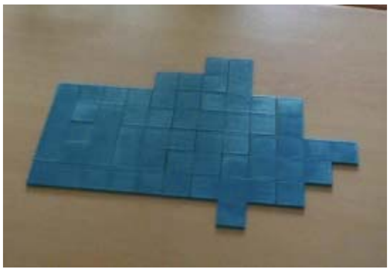
1 Avec les Pentaminos

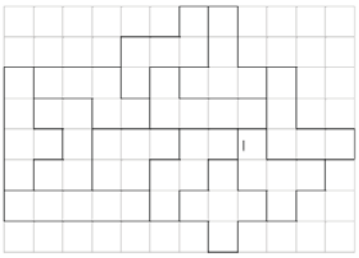


Lors d'utilisations des pièces du jeu Katamino ©, l'élève reconnaît-il la couleur ou la forme de ce qu'il va manipuler ? Ces deux reconnaissances sont à travailler, mais pour privilégier celle liée à la forme, les activités présentées et les manipulations pendant l'atelier utilisaient des ensembles de pièces d'une même couleur.

		
Les pièces doivent être reconnues par leur forme, les possibilités de placement de certaines d'entre elles peuvent être anticipées.	Les pièces symétriques ont au plus quatre placements possibles, les pièces non symétriques en ont huit.	Utiliser des pièces symétriques puis introduire petit à petit l'utilisation de pièces non symétriques permet d'imaginer une progressivité dans les activités.

Dès le cycle 1, l'élève constate que certaines pièces ont besoin d'être retournées pour être placées. La reproduction d'assemblages dessinés ou photographiés met en situation les positions relatives de pièces voisines. À partir du cycle 2, les élèves commencent à reconnaître les pièces en utilisant les noms choisis par Solomon W. Golomb (le « F », le « W », le « X », etc.).

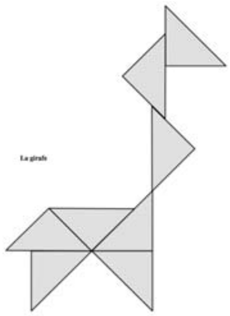




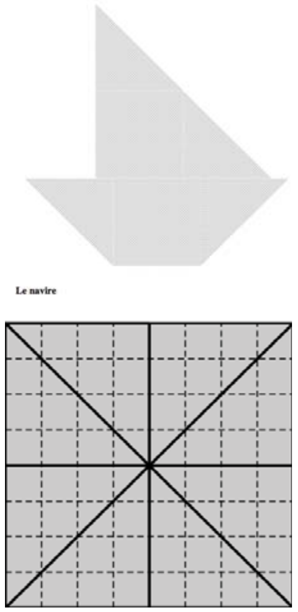
Pendant le temps de manipulation libre des pièces, un dauphin est apparu. Un élève ayant devant lui cet assemblage et les douze pièces d'un jeu pourrait le reconstruire. Dans un deuxième temps, les dessins des pièces placées pourraient ensuite utilisés.

2 Avec l'Octogramme

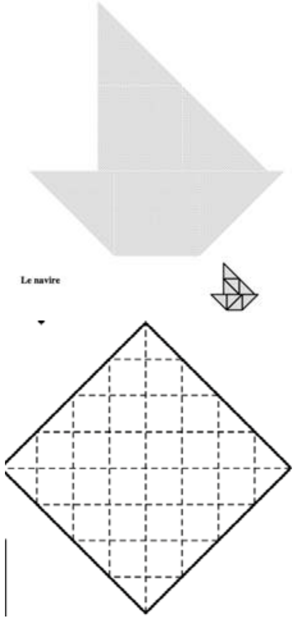
Les huit pièces sont identiques : seules sont à reconnaître leur position dans l'ensemble. Concernant cette girafe, le placement des triangles reste aisé. Les trois silhouettes sont à l'échelle des pièces utilisées. À côté de la deuxième, est dessinée la solution à échelle réduite, dans la troisième, les pièces sont dessinées placées. Les deux derniers peuvent venir en aide.



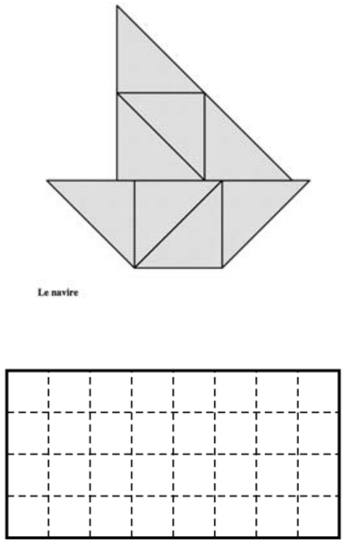
Le placement des pièces est moins immédiat dans le cas de configurations plus compactes. Le repérage de placements d'un nombre plus important de pièces est un élément intervenant dans une série progressive de silhouettes à recouvrir.



Un réseau quadrillé visible sur les pièces est une aide aux orientations possibles des pièces.



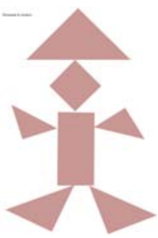
Avec quatre pièces de l'Octogramme



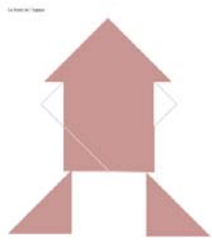
Avec quatre pièces de l'Octogramme

3 Avec les pièces du Carré de Metz

En 2010, des étudiants PE M2 ont utilisé les pièces du Carré de Metz pour créer des silhouettes et réfléchir à une progressivité des dessins à proposer. Toutes les pièces sont utilisées. De moins en moins de positions de pièces sont immédiatement reconnaissables, comme dans les trois exemples ci-dessous. Une autre variable est de faire varier le nombre des pièces dans les ensembles de pièces non directement repérables : « la fusée de l'espace » permet la reconnaissance du placement de trois pièces, les quatre autres forment un carré. L'étape précédente serait de proposer une silhouette avec trois pièces reconnaissables et les quatre autres regroupées en deux ensembles de deux pièces.



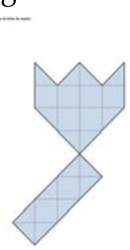
Monsieur le coureur



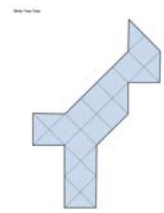
La fusée de l'espace

La maison avec la grande cheminée

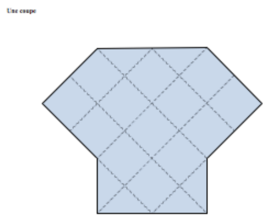
Le quadrillage présent sur les pièces est une contrainte rendant moins aisée la réalisation de silhouettes figuratives. La créativité des étudiants est restée vive à propos des noms de leurs assemblages. J'ai insisté avec eux à propos de l'aide apportée par le quadrillage pour l'orientation des pièces et la prise en compte d'alignements de traits.



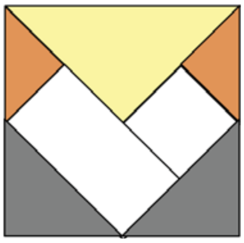
Fleur sous la brisée du matin

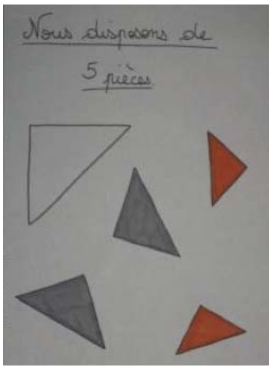


Birdy Nam Nam



Une coupe



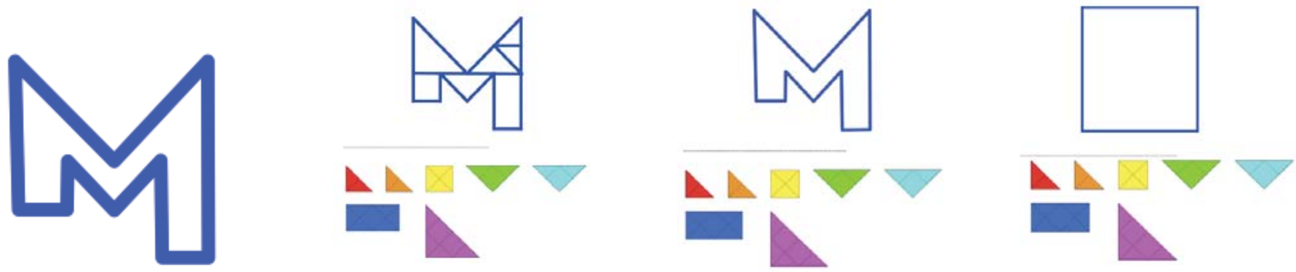


En 2012, dans le cadre d'un module « Sciences en Société » à l'IUFM site de Metz, une étudiante PE M2 a utilisé en Grande Section de Maternelle des couleurs différentes pour que les élèves puissent facilement associer les triangles de même taille.

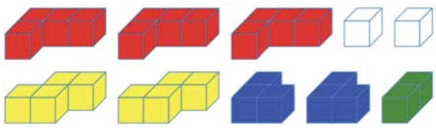
Était proposée la recherche des différents recouvrements de triangles puis de carrés pour lesquels des gabarits étaient donnés.

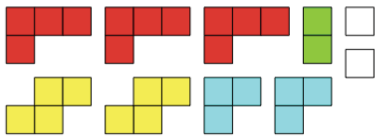
En 2017, à l'occasion de la semaine des mathématiques, une collègue Professeur des Écoles a préféré utiliser sept couleurs différentes dans ses propositions pour les trois classes de l'École Maternelle.

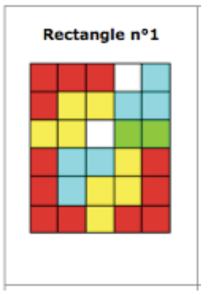
Les pièces sont reconnues une par une, la taille des triangles n'est pas sollicitée dans cette activité.

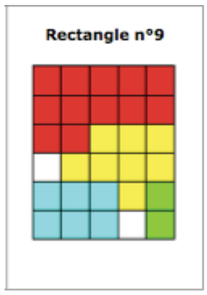


4 Avec les pièces de la pyramide aztèque et du puzzle aztèque



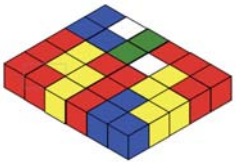


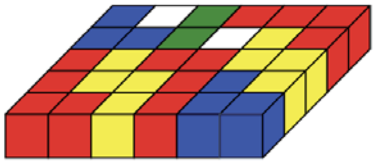




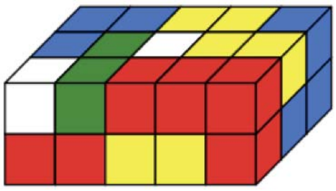
En 2017, des élèves de Moyenne Section, ont recouvert des rectangles 6×5 disposés dans un plateau « à bords ». Plus tard, ils seront amenés à reconstituer ces rectangles à partir de dessins non à l'échelle des pièces. Dans le cas du rectangle n°1, les pièces sont reconnues immédiatement, leur position et leurs placements relatifs sont l'objet de l'activité. Pour le rectangle n°5, des pièces ne sont plus reconnues immédiatement. Cependant, le recouvrement de ce type de rectangle en fin de progression a été réussi par les élèves (le quadrillage présent sur les pièces et les rectangles à recouvrir n'a guère été utilisé). En fin de cycle 2, l'utilisation de ce rectangle 6×5 a été reprise en ajoutant des contraintes. Un dessin aux dimensions du rectangle à obtenir servait de plan de travail. Le rectangle a été recouvert, la contrainte de ne faire se toucher les pièces qu'au maximum par un sommet a été dans l'ensemble surmontée. Obtenir un rectangle tel que les pièces de même couleur n'aient aucun point de contact a été plus ardu (le rectangle n°1 est un tel rectangle).

En CM1



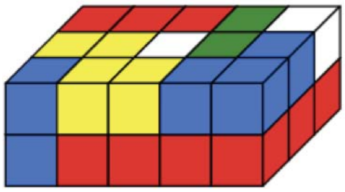


En CM2



Par devant

Par devant



Par derrière

Par derrière

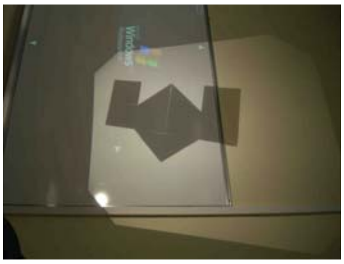
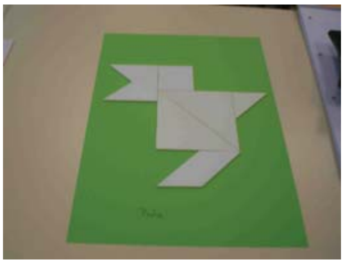
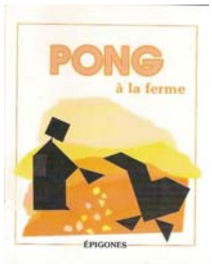
Les élèves avaient à leur disposition des maquettes, des photos et des dessins des solides à reconstruire. Le solide pris en main a permis de constater que l'œil ne pouvait pas voir plus de trois faces et qu'il en était de même sur les photos et les dessins. L'usage des couleurs a facilité les liens entre ce que l'œil voit, ce que le doigt peut toucher et ce qui est représenté. À la construction réussie de ces solides a suivi la réalisation d'autres assemblages formant ces mêmes pavés. Certaines faces dessinées par les élèves ont permis à un autre groupe de reconstruire le pavé.

III - TRANSMETTRE

Les textes officiels évoquent la compétence « communiquer », ce qui peut être considéré comme un synonyme du titre de cette partie. L'élève commence à transmettre à lui-même ce qu'il a réalisé, prenant conscience que ce qu'il a fait correspond à ce qui est demandé et pourra par la suite être confié à d'autres. Dans un groupe, les élèves se transmettent mutuellement leurs remarques pour constituer un ensemble destiné à un autre groupe, à la classe entière, à une autre classe ou à un adulte. Ces transmissions peuvent être orales, gestuelles, écrites, sous forme d'affiches, de photos, de documents électroniques. Par ailleurs, « argumenter », « prouver » se font également au travers choses transmises. L'utilisation en classes de puzzles géométriques est une occasion de faire vivre ces divers types de transmission.

1 Avec les pièces du Tangram

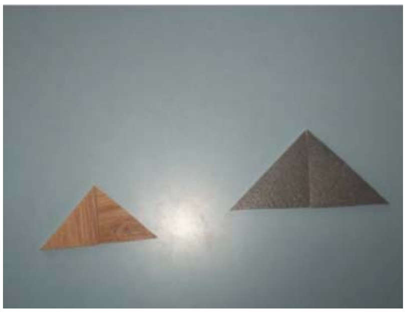
En 2011, lors d'une rencontre entre des étudiants de la Haute École Robert Schuman de Virton et des étudiants de Master 2 de l'IUFM de Lorraine, site de Metz, un rétroprojecteur a été utilisé pour permettre à chaque étudiant de montrer rapidement à tous une de leurs productions. En 2017, une caméra reliée à un ordinateur et à un vidéoprojecteur permet de montrer l'assemblage. Avec le rétroprojecteur, ce qui était projeté est déformé, ce souci se règle avec les outils informatiques actuels. Ce souci de déformation est également présent lors les photos prises pour être transmises aux participants.

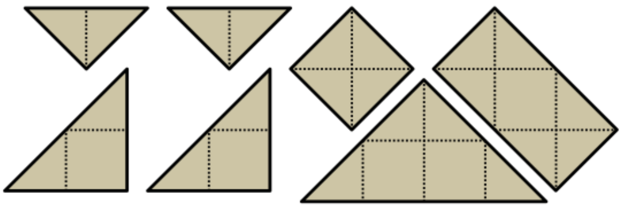




Le but était d'imaginer comment intégrer les créations dans un récit dans le cadre d'un travail pluridisciplinaire : création d'un affichage ou d'un album racontant une histoire imaginée en classe. Des albums tels « PONG à la ferme » (Daniel Picon – Éditions Épigones 1997) intègrent dans un récit illustré des personnages réalisés avec les sept pièces du Tangram. Pendant le temps de la rencontre avec les étudiants de Virton, l'écriture d'un scénario n'a pu se faire, faute de temps. Dessiner les réalisations en utilisant l'outil informatique s'est avéré nécessaire pour une future intégration sans déformation des assemblages utilisés.

2 Avec les pièces du Carré de Metz

En 2012, l'étudiante utilisant les triangles du Carré de Metz avec ses élèves de Grande Section avait d'abord envisagé le dessin par les élèves des triangles obtenus. Cela s'est révélé être un obstacle à la recherche, l'utilisation de photos a ensuite été décidée. La mise en commun étant longue (de nombreuses photos à comparer), elle ensuite choisi pour la séance suivante de dessiner les nouvelles réponses sur l'affichage collectif du groupe. Le couloir de l'école a servi de premier lieu de présentation des affiches, cependant la mise en commun s'est faite pour la classe entière dans le coin regroupement (les affiches ont été reprises pour être commentées une à une).





Avec une pièce je sais obtenir un carré.

Réussiras-tu avec deux pièces ?

Réussiras-tu avec trois pièces ?

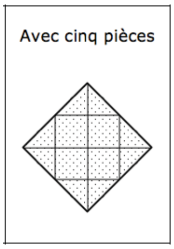
Réussiras-tu avec quatre pièces ?

Réussiras-tu avec cinq pièces ?

Réussiras-tu avec sept pièces ?

Et avec six pièces ?

Cette activité a été utilisée plusieurs fois avec des élèves de Cours Moyen. Ils devaient dessiner les carrés trouvés sur du papier quadrillé différemment. Ces dessins devaient servir à comparer avec ce qui avait été trouvé par d'autres élèves. La dernière question a pour but de favoriser la réponse « Je n'ai pas encore trouvé » : la réalisation est impossible, la preuve ne pourra être envisagée qu'au cours du collège.



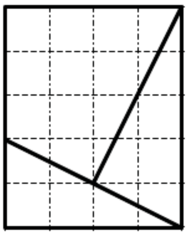
En aide étaient prévus sur des cartes ou sur une feuille de papier des dessins des carrés à obtenir, il a finalement fallu souvent fournir des carrés dessinés à l'échelle des pièces.

Les feuilles de papier rassemblant les dessins des carrés à construire viennent en aide : le carré n'est plus à reproduire, seules le sont les délimitations des pièces utilisées. Ces documents créés par les élèves permettent de valider et de comparer les solutions trouvées.

Concernant les dessins des élèves, les pièces sont encore souvent utilisées comme gabarit : la reproduction de dessins sur quadrillage est à retravailler pour que le quadrillage présent sur les pièces rende service à la transmission à d'autres.

Le travail sur papier quadrillé est utilisé lors de la mise en commun des réponses apportées aux questions apportées par les élèves aux questions posées.

3 Avec le puzzle à trois pièces



Quelques questions posées à des élèves de CM1

Avec ces trois pièces, peut-on réaliser un triangle ?

Avec ces trois pièces, réalise le plus possible de quadrilatères différents.

Est-on sûr du nom donné à ce qui a été construit ?

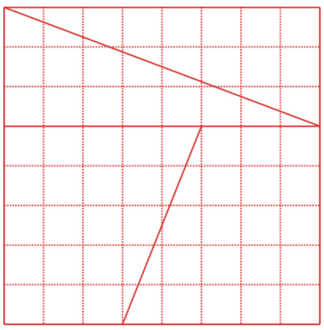
Est-on sûr de ce qu'on voit ?

Le quadrillage présent sur une face des pièces incite à ne pas les retourner. Il n'a que peu servi lors des manipulations. La reproduction sur papier quadrillé ne s'est pas faite aisément, des directions autres que verticales, horizontales ou « diagonales de carrés » ont mis du temps à être gérées. Pour une future mise œuvre, sera nécessaire en travail préalable par exemple la reproduction d'une des pièces et de plusieurs de ses positions.

Les reproductions sur papier sont utilisées pour diffuser les propositions vers d'autres groupes d'élèves pour une validation de la réponse à la première question et l'examen des ensembles de quadrilatères trouvés (ces ensembles pouvant être alors complétés).

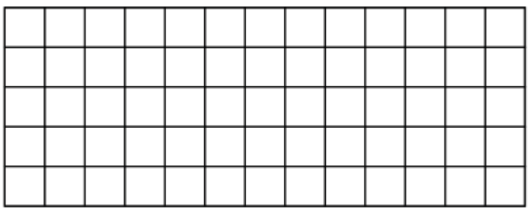
D'autres questions ont été posées à des élèves de CM2 : Saurais-tu refaire le triangle ? Saurais-tu expliquer comment tu as procédé ? Comme avec les participants de l'atelier, du temps a été pris pour réfléchir aux mots à utiliser avant de commencer les déplacements d'un assemblage déjà réalisé. Les verbes « glisser » et « tourner » ont été choisis pour correspondre aux gestes explicatifs des élèves. D'autres auraient peut-être pu être utilisés en classe en laissant les élèves choisir, valider ou invalider des propositions de leurs camarades, le but étant de faciliter les transmissions d'informations permettant la reconstruction du polygone demandé.

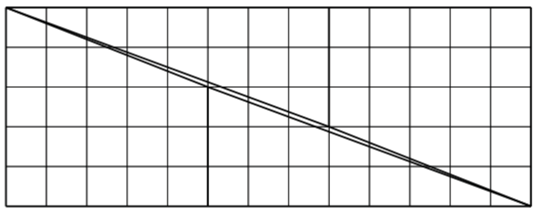
4 Avec le puzzle de Lewis Carroll[3]



Pendant l'atelier, des participants ont échangé à propos de l'utilisation du puzzle de Lewis Carroll (64 ou 65 ?) pour inciter les élèves à prendre un peu de recul à propos de ce qui est vu et amorcer des justifications en utilisant certains instruments, le papier quadrillé étant considéré lui aussi comme un instrument.

Les élèves de CM2 rencontrés pendant la Fête de la Science n'ont guère été perturbés par les deux valeurs différentes obtenues. Le fait que les pièces utilisées devaient permettre d'obtenir des aires égales pour les assemblages construits n'était pas pour eux une évidence : ils se sont arrêtés aux valeurs numériques obtenues par l'utilisation de formules.



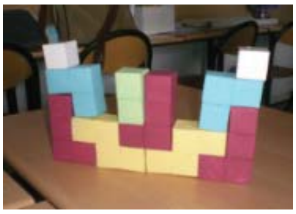


La manipulation des pièces ne fait pas apparaître le « trou » d'aire 1, contrairement à ce qui se passe lors de reproduction des pièces dans un rectangle quadrillé (à la Fête de la Science, des carreaux de 1,5cm de

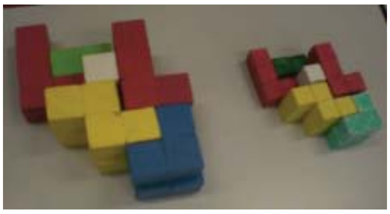
[3] http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Puzzle_Carroll_.pdf

côté sont utilisés). Cette activité trouvera sa place en classe lorsqu'à la question « Pourquoi es-tu certain que ce qui est construit (tracé) est un carré ? », des élèves n'ont à transmettre que des réponses comme « Je le vois bien. ». Le dessin sur papier quadrillé sera par la suite utilisé par d'autres élèves pour convaincre leurs camarades.

5 Avec les pièces de la pyramide aztèque



Pendant le temps libre de manipulation des pièces, une enseignante de cycle 1 a réalisé cet assemblage, reprenant le type de construction faite par les élèves avec par exemple les pièces du jeu Katamino ©. Cette photo peut être utilisée pour la réalisation par d'autres du solide construit. Cependant, dans certains cas, une photo ne suffira pas, une vue derrière le solide permettra de lever les ambiguïtés de certaines prises de vue.

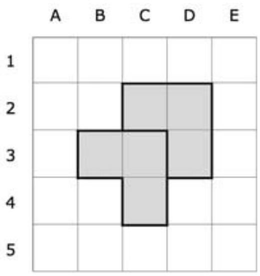


Une autre possibilité serait de fournir un autre jeu et de demander la reconstruction du premier solide. L'élève peut aller observer d'autres visions de l'assemblage à reproduire. La photo ci-contre a été prise en 2016 pendant la Fête de la Science à Metz-Bridoux. Un élève âgé d'un peu moins de six ans a construit un solide et a dû le reconstruire avec le second jeu, ce qui pour moi est un premier cas de transmission à soi-même.

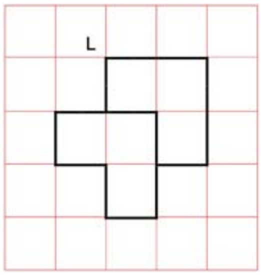
Les pièces des deux jeux étaient de dimensions différentes pour faciliter le tri des pièces. Dans une classe de cycle 1, il sera demandé à un autre groupe d'élèves de reconstruire ce qu'ont réalisé leurs camarades. L'assemblage confié est une première transmission d'un groupe vers l'autre : les informations sont visuelles facilitées par la couleur des pièces. À l'intérieur du groupe qui reconstruit l'assemblage, les transmissions se font oralement ou par gestes.

6 Avec les « Petits L »

Cette activité a été proposée fin juin 2017 à des élèves de CE2.



Des cases recouvertes dans le quadrillage : elles sont repérées par le nom des lignes et des colonnes.



Les trajets pour le pourtour : deux côtés de carreau vers la droite, 2 côtés de carreau vers le bas, 1 côté de carreau vers la gauche, etc.

Les cases recouvertes par les pièces

C2	D2	B3	C3	D3	C4			

Les trajets pour le pourtour

D2	B2	G1	B1	G1	H1	G1	H1	D1	H1		

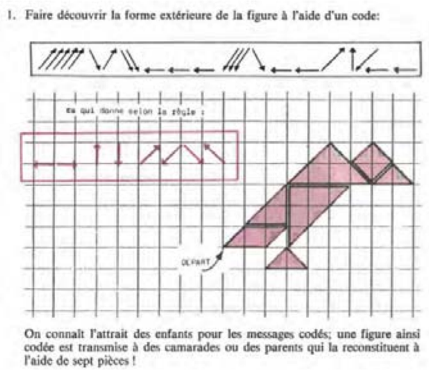
Après avoir codé et décodé des exemples d'assemblages proposés par l'enseignant, les élèves ont été amenés à créer puis coder des assemblages de trois et quatre pièces. Ces codages étaient ensuite confiés à d'autres élèves qui devaient les décoder puis retrouver les assemblages initiaux. Un temps a été pris pour s'assurer de la compréhension du codage des cases recouvertes et des déplacements sur le pourtour. De nombreuses confusions ont été repérées entre « dénombrer des carreaux » et « dénombrer des côtés de carreaux ». Des erreurs ont empêché la reconstruction de certains assemblages.

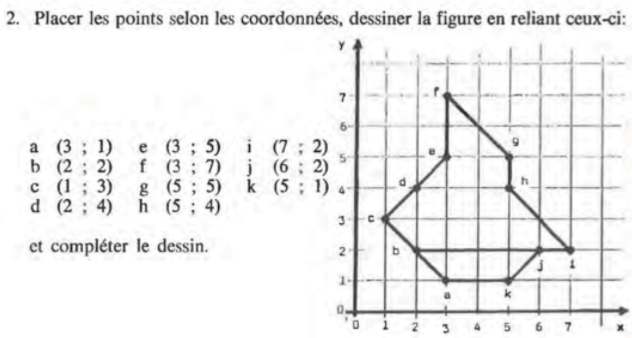
Après discussion avec l'enseignante de la classe, il a été envisagé de refaire vivre l'activité avec des élèves de CE1, en utilisant des flèches verticales et horizontales pour coder les déplacements.

Pendant l'expérimentation, pressés de confier leurs codages à leurs camarades, les élèves n'ont pas pris le temps d'une vérification de ce qu'ils transmettaient. Lors d'une future mise en œuvre de cette activité, cette vérification devra être faite au sien du groupe de codeurs, bien que cela n'exclue pas la persistance d'erreurs.

Des participants à l'atelier ont fait la remarque que les codages proposés permettaient une rencontre avec la notion d'aire (nombre de carreaux recouverts) et de périmètre (nombre de déplacements unitaires pour le pourtour) en mettant en avant les mesures avant que les grandeurs associées ne soient introduites. Il est à noter que l'activité a été mise en œuvre en CE2, elle pourra être reprise dans les classes de Cours Moyen donnant un intérêt à certains dénombrements de carreaux de pourtours et de carreaux intérieurs.

L'idée de ces codages et décodages est venue de la lecture d'un article de la revue suisse « Math Ecole » (Goerg et Schaerer, 1979).





Le Tangram était alors utilisé, causant des déplacements suivant les directions des carreaux du quadrillage (Les « Petits L » n'imposent que des déplacements horizontaux et verticaux).

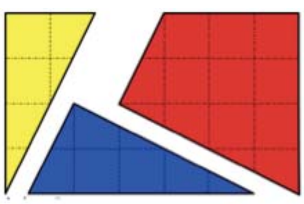
Le codage des sommets du polygone ne pourra être envisagé en cycle 2 ou 3 qu'en envisageant des graduations « chiffres » et « lettres » sur les axes de coordonnées.

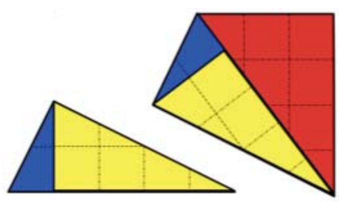
Pendant le temps libre de manipulation des pièces, un participant a commencé la réalisation d'un labyrinthe, ouvrant la porte à de nouvelles pistes de recherche : comment coder ce labyrinthe, peut-on placer d'autres « Petits L », etc.

IV - COMPARER MESURER

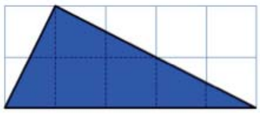
1 Avec le puzzle à trois pièces

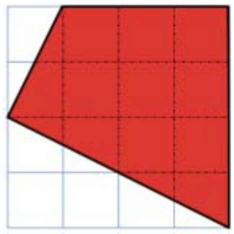
Ordonner les pièces de celle ayant la plus petite aire à celle ayant la plus grande aire peut se faire visuellement ou par recouvrements.



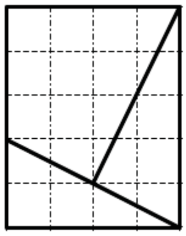


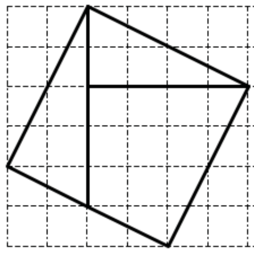
Sachant que l'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle, le quadrillage présent sur les pièces permet un calcul de l'aire de chaque pièce.





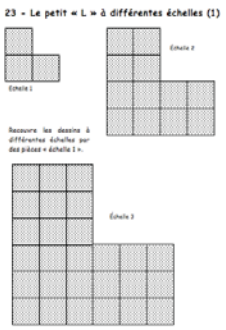
La question suivante a été posée à des élèves de CM2 : les carreaux du quadrillage sont des carrés de 1 cm de côté, quelle est la longueur du côté du carré construit ? Des mesures ont été faites sur les dessins faits par les élèves, sans surprise, des valeurs différentes ont été trouvées.

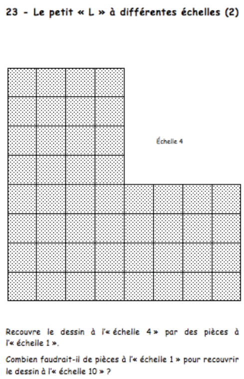




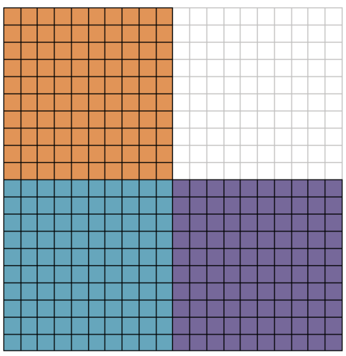
Les calculatrices ont été utilisées pour trouver un nombre qui multiplié par lui-même donne un produit égal à 12. Des valeurs approchées au millimètre près ont été trouvées. La recherche s'est poursuivie et les élèves ont compris qu'ils pouvaient augmenter le nombre de chiffres après la virgule mais ne réussissaient pas à atteindre un résultat égal à 12. Comprendre que 3,46 cm est plus précis que 3,4 cm et 3,5 cm et donc que 3,46 est un nombre compris entre 3,4 et 3,5 a été une intéressante intrusion dans l'étude des nombres décimaux.

2 Avec les « Petits L »





Après le recouvrement des dessins aux échelles 1, 2, 3 et 4, il est demandé à des élèves de CM2 le nombre de pièces nécessaires pour recouvrir un dessin à l'échelle 10. L'examen des nombres 1, 4, 9, 16 leur a permis d'envisager 10×10 comme nombre. Leur point de vue a été conforté par l'examen des écarts entre 1, 4, 9, 16 (ils ont alors envisagé que les écarts suivants étaient, 9, 11, 13, etc.).



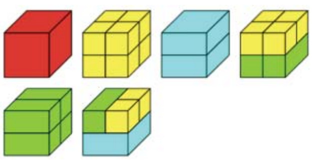
Une troisième méthode aurait pu être mise en avant : il y a 3×100 « carreaux unités » dans la pièce dessinée à l'échelle 10.

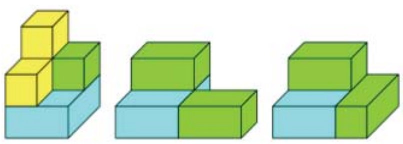
Il y a 3 « carreaux unités » dans la pièce dessinée à l'échelle 1.

100 pièces seront donc nécessaires.

Cette méthode n'utilise pas les nombres de pièces utilisées pour les échelles 1, 2, 3 ou 4 mais pourra rendre service au cas où une question comme « et à l'échelle 100 ? » apparait dans la classe.

3 Avec les trois découpages de cube





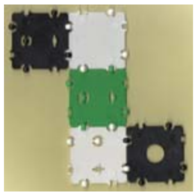
Les pièces peuvent être utilisées pour la fabrication de la grandeur « volume ». Les exemples ci-contre montrent des solides de même volume, d'autres pourraient être des solides de volume double et moitié.

En cycle 3, la mesure de certains volumes précède souvent la compréhension de la grandeur rencontrée. La grandeur « capacité » peut être appréhendée par des remplissages d'objets. Les participants à l'atelier ont évoqué la possibilité d'étudier le débordement causé par ces solides plongés dans de l'eau, ce qui n'est guère possible avec les solides en carton amenés lors de l'atelier. À la question « qu'est-ce qui me permet de dire que deux assemblages de pièces ont même volume ? », j'ai avancé la réponse « il y a autant de bois dans les deux assemblages », me référant à d'autres pièces non apportées lors de l'atelier. Cette réponse peut être considérée comme non satisfaisante !

V - RETOURNER, TOURNER, GLISSER

1 Avec les Pentaminos

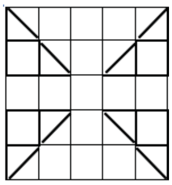


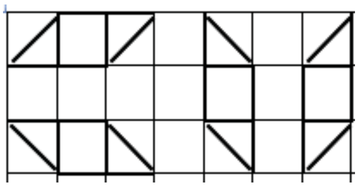



S'agit-il de la même pièce ? Combien avez-vous trouvé de positionnements différents pour les autres pièces ? La manipulation de tels assemblages de carrés apporte des réponses à ces questions dès le cycle 1.

2 Avec les pièces du Carré de Metz ou du Tangram




Quatre positions pour cette pièce posée sur un quadrillage

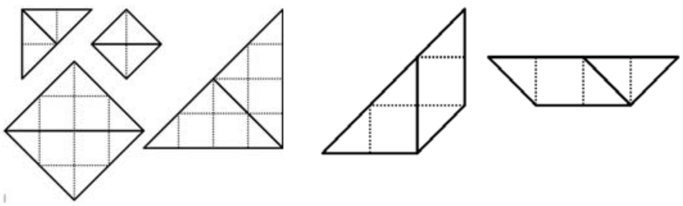

Quatre positions pour cette pièce posée sur un quadrillage

Les pièces du Carré de Metz sont quadrillées sur une de leurs faces, du papier quadrillé comme les pièces est utilisé. À partir du cycle 2, les différentes positions trouvées sont reproduites sur la feuille de papier. Les verbes « tourner » et « retourner » sont mis en situation. Dans un premier temps, les pièces sont utilisées comme gabarit, puis en fin de cycle, les dessins sont faits sur la feuille en utilisant le crayon et la règle. Au cours du cycle 3, le quadrillage utilisé pour les dessins est différent de celui apparent sur les pièces, mettant en situation les notions d'agrandissement et de réduction.

Avec les étudiants avait été envisagé l'usage de pièces de Tangram quadrillées sur les deux faces, le verbe « retourner » vient alors en complément des deux verbes précédents.

Quelle pièce du Tangram ne reprend jamais sa place après un retournement ? Cette question posée aux élèves est un écho aux propositions de Michel Demal et Danièle Popeler (cellule de géométrie du département de la H.E.H–Mons) dans leur plan d'activités pour l'école maternelle et permet de différencier les pièces non symétriques des pièces symétriques.

En CM2, les pièces seront assemblées pour former des assemblages symétriques. Le papier quadrillé sera utilisé pour la collecte de ce que les élèves ont trouvé.



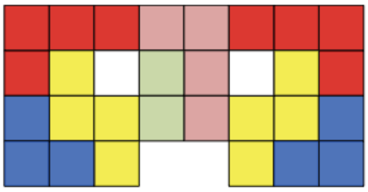
Voici quelques exemples avec deux pièces du Tangram.

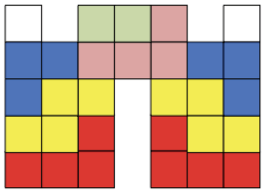
La recherche peut se poursuivre avec trois pièces, quatre pièces, etc. ou avec les pièces d'autres puzzles géométriques.

La symétrie orthogonale est utilisée pour réaliser d'autres objets mathématiques.

3 Avec le puzzle aztèque

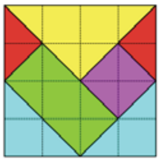
Une pièce rouge et la pièce verte sont assemblées pour former un rectangle. Il est demandé aux élèves de CM2 de placer de façon symétrique les autres pièces du puzzle puis de dessiner ce qu'ils ont réalisé sur une feuille quadrillée.





Pour les élèves, placer une pièce symétrique d'une autre pièce se gère plus facilement que placer ou déplacer symétriquement deux pièces.

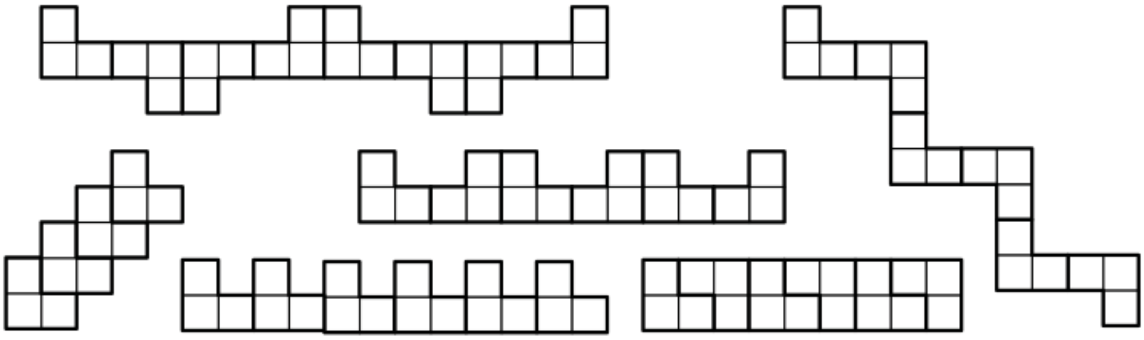
4 Avec le Carré de Metz

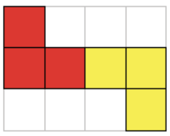


Des déplacements symétriques des deux triangles rouges ou des déplacements symétriques des deux triangles bleus permettent la réalisation de formes symétriques. Celles-ci ne sont pas coloriées de façon symétrique, ce qui n'a pas perturbé les élèves à qui a été proposé ce type d'activité.

5 Avec les « Petits L »

En 2010, des frises ont été imaginées par des étudiants de M2 pendant une séance d'**U**nité d'**E**nseignement de **D**iversification. « Sciences en société ». Leur analyse permet l'utilisation des verbes « tourner » et « glisser ».





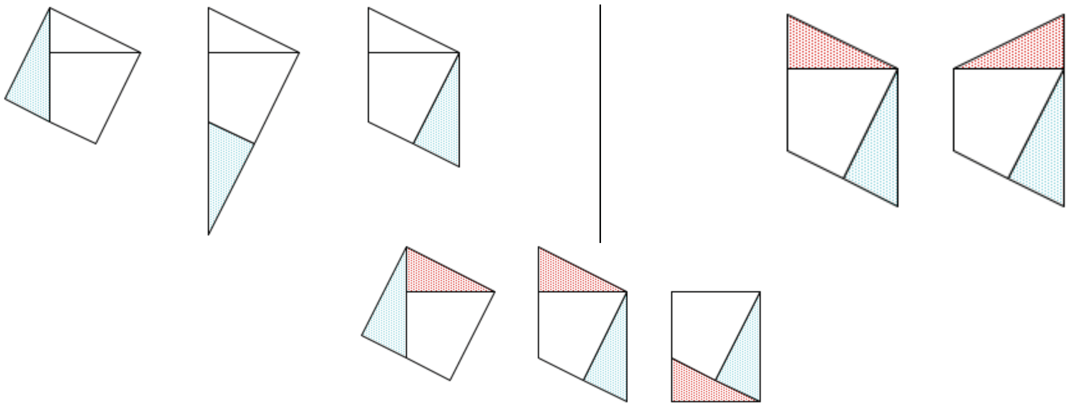
Une pièce rouge est placée sur la partie rouge du dessin. Quels mouvements faire subir à la pièce pour qu'elle recouvre la partie jaune du dessin ? Une possibilité est de dire que la pièce sera **glissée** puis **tournée**. Au cours moyen, il sera précisé que la pièce a **glissé** de deux côtés de carreaux vers la droite et **tourné** d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre (le point autour duquel la pièce a tourné pourra être recherché).

Cette utilisation de pièces identiques est un écho aux chapitres 4 (Rencontres avec les symétries dans l'art africain) et 11 (Frises ornementales et groupes ») du document « Pour une culture mathématique accessible à tous » (CREM 2004) ».

6 Avec le puzzle à trois pièces

Tourner, glisser, retourner : ces mots seront utilisés pour décrire les déplacements des pièces, qu'elles soient quadrillées ou non. Les trapèzes hors programme seront considérés comme des quadrilatères ayant deux côtés parallèles.

L'utilisation des trois mots « glisser », « tourner » et « retourner est une préparation à ce qui sera plus tard rencontré en cycle 4.



VI - CONCLUSION

Charnay (1997-1998) évoquait trois temps dans l'appréhension des objets mathématiques par les élèves.

Le temps de la géométrie « perceptive » : un carré est un carré parce que je le reconnais globalement comme tel (début de l'école primaire).

Le temps de la géométrie "instrumentée" : un objet est un carré parce qu'à l'aide d'instruments adaptés (compas, équerre, règle), je peux vérifier certaines propriétés (fin de l'école primaire).

Le temps de la géométrie "mathématisée" : un carré est un carré parce qu'en fonction d'informations déduites, je peux en énoncer certaines propriétés (collège).

La manipulation de pièces de puzzles géométriques et les reproductions des productions d'élèves sur du papier quadrillé permettent de faire vivre ces trois temps : le dernier point initialement prévu pour être rencontré au collège est vécu dès le Cours Moyen car des informations peuvent être déduites des propriétés des polygones éléments du puzzle. Que de bonnes raisons pour continuer à utiliser ces ensembles de pièces !

Mon souhait est que des enseignants en situation de recherche continuent à explorer les possibilités d'utilisation de ces puzzles.

VII - SITOGRAPHIE

Les pentaminos

http://apmeplorraine.fr/doc//brochures/Pentaminos_2007_2017.pdf : une brochure de l'APMEP Lorraine dont une grande partie est utilisable avec des élèves de Cours Moyen.

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Pentaminos_Cycle1.pdf
http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Pentaminos_Cycle2.pdf : des propositions d'utilisation aux cycles 1 et 2 issues d'échanges entre des joueurs des régionales Lorraine et Champagne-Ardenne de l'APMEP.

http://chdecole.ch/wordpress/katamino-pentaminos/: de nombreuses pistes d'utilisation avec de très jeunes élèves des pièces du jeu KATAMINO ©.

L'Octogramme

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/octogramme_IUFM_Metz.pdf : des silhouettes imaginées par des étudiants

Le Carré de Metz

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/P2_02_Diaporama.pdf : le diaporama utilisé aux Journées de Metz.

http://apmeplorraine.fr/old/modules/espaces/ecole/etudiants_IUFM_M2_2012/1e_DIEHL.pdf : l'expérimentation d'une étudiante.

Le Tangram

http://apmeplorraine.fr/old/modules/espaces/ecole/etudiants_IUFM/TANGRAM_Virton_Metz.doc : les versions informatisées des créations des étudiants.

http://apmeplorraine.fr/old/modules/coinjeux/jeux5/13_tangram/13_avec_un_tangram_quadrille.pdf : des triangles et quadrilatères avec 2, 3, 4… pièces.

http://apmeplorraine.fr/old/modules/espaces/ecole/Puzzles_geometriques/Tangram.zip : pour des assemblages symétriques réalisés avec les pièces.

http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/Mathecole_89.pdf : Tangram - Marcel Goerg et Henri Schaerer, 9-19, pour retrouver les codages évoqués pendant l'atelier.

http://www.ssrdm.ch/mathecole/crbst_133.html: Tangram - Marcel Goerg et Henri Schaerer, 4-19, pour des agrandissements et des mesures des aires des pièces.

Le puzzle à trois pièces

http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV127.pdf : compte rendu d'expérimentation en classe de CM1 et CM2, 15- 24.

http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV128.pdf : à propos de l'aire des pièces, 5-18.

Les « Petits L »

http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV124.pdf : compte rendu d'expérimentation en classe de CM1 et CM2, 11-21.

La « pyramide aztèque » et le « puzzle aztèque »

http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/IMG/pdf/activites_dans_l_espace.pdf : pour accéder au document contenant la présentation des pièces de la « pyramide aztèque » (groupe « Jeux Mathématiques » de **I**nstitut de **R**echerche pour l'**E**nseignement des **S**ciences et de la Régionale **APMEP** de Toulouse).

http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV133.pdf : compte rendu d'expérimentation en classe de CM1 CM2.

http://www.prise2tete.fr/forum/viewtopic.php?id=6394 : défi utilisant trois pièces du « puzzle aztèque ». http://www.apmeplorraine.fr/pv/PV132.pdf : compte rendu d'expérimentation.

Autres liens

Michel DEMAL et Danièle POPELER : http://www.uvgt.net/

Roland CHARNAY : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_N.php?num=62&rang=4 : pour retrouver aux pages 45 et 46 les trois temps dans l'appréhension des objets mathématiques

https://fr.wikipedia.org/wiki/Reptuile : pour des compléments à propos des Rep-tuiles appelées aussi Rep-figures.

Solomon W. Colomb : https://fr.wikipedia.org/wiki/Solomon_W._Golomb : pour retrouver les noms habituellement utilisés des douze pentaminos.

CREM 2004 : https://publications-eb3ad.firebaseapp.com/Culture%20math/00%20-%20Pour%20une%20culture%20math%C3%A9matique%20accessible%20%C3%A0%20tous%20-%20Rapport%20complet.pdf : « Rencontres avec les symétries dans l'art africain « (chapitre 4) et « Frises ornementales et groupes » (chapitre 11) – CREM 2004.

http://www.apmep.fr/Maternelle-Premier-degre : une partie du coin « jeux » de l'APMEP.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

APMEP Groupe Jeux. (2009) Jeux École. APMEP, ACL.

APMEP Groupe Jeux. (2013) Jeux École 2. APMEP, ACL.

CHARNAY R. (1997-1998) De l'école au collège, les élèves et les mathématiques. *Grand N*, **62**, 35-46.

Groupe IREM Premier degré Draguignan (2014) Activités géométriques à partir de puzzles géométriques et tangram. in *Actes du XLe colloque COPIRELEM*, IREM de Nantes.

CREM (2004) Pour une culture mathématique accessible à tous, élaboration d'outils pour développer des compétences citoyennes.

DROUIN F. (2007) Avec des pentaminos. APMEP Lorraine.

DROUIN F. (2010) Avec notre exposition « OBJETS MATHEMATIQUES ». APMEP Lorraine.

DROUIN F. (2014) Le Carré de Metz et le Pavé de Metz. APMEP Lorraine.

DROUIN F. (à paraître) Au Jardin des Enfants de la Science. APMEP Lorraine.

GOERG M. & SCHAERER H. (1979) TANGRAM *Math École,* **89**, 9-20.

GOERG M. & SCHAERER H. (1980) TANGRAM *Math École,* **92**, 2-23.

KOCH K. H. (1987) Lege Spiele ! Eine Anthologie der Legespiele. Dumont taschenbücher.

QUELS APPORTS DE LA PROGRAMMATION POUR LA REPRODUCTION D'UNE FIGURE GEOMETRIQUE ? PERSPECTIVES POUR LA FORMATION

Christophe BILLY
COPIRELEM, ESPE de Toulouse Midi-Pyrénées
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Richard CABASSUT
COPIRELEM, Université de Strasbourg
LISEC EA 2310
richard.cabassut@unistra.fr

Edith PETITFOUR
COPIRELEM, ESPE de Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Arnaud SIMARD
COPIRELEM, ESPE de l'Université de Franche-Comté
LMB, FR-EDUC
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Frédérick TEMPIER
COPIRELEM, ESPE de Versailles
LDAR (EA 4434) Université de Cergy-Pontoise, UR UA UCP UPD UPEC
frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé
Les nouveaux programmes du cycle 3 (MEN, 2015) associent l'enseignement de la géométrie à une initiation à la programmation. Si la géométrie dynamique a apporté un point de vue nouveau sur la géométrie (Assude et Gelis, 2002), qu'en est-il de la programmation ? En nous appuyant sur des travaux de didactique de la géométrie (Perrin-Glorian et Godin, 2014 ; Petitfour, 2015), nous interrogeons les apports et les limites de cette approche de la géométrie à travers la programmation par la comparaison de la mise en œuvre d'une tâche de reproduction d'une figure géométrique dans différents environnements. Des perspectives pour la formation sont esquissées à la fin.

INTRODUCTION

Les programmes de 2015 (MEN, 2015) ont introduit l'algorithmique et la programmation aux cycles 2 et 3 à travers des activités de repérage dans l'espace au cycle 2 et de repérage dans l'espace et géométrie au cycle 3. Les activités de programmation apparaissent comme un support à la construction d'apprentissages dans ces domaines (espace et géométrie) : « Des activités géométriques peuvent être l'occasion d'amener les élèves à utiliser différents supports de travail : papier et crayon, mais aussi logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation ou logiciels de visualisation de cartes, de plans » (MEN, 2015, p.198).

Les connaissances spatiales et géométriques concernées sont les suivantes : « **(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations** […] avec de nouvelles ressources comme […] des logiciels d'initiation à la programmation » (MEN, 2015, p.211) et « **Reconnaître et utiliser quelques connaissances géométriques** [...] Exemples de matériels : papier/crayon, logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation » (MEN, 2015, p.212).

Il existe également un document d'accompagnement "initiation à la programmation"[1] avec notamment une annexe proposant des exemples de construction de figures avec le logiciel de programmation Scratch.

Les activités spatiales et géométriques apparaissent réciproquement comme des points d'appui pour permettre une initiation à la programmation : « Une initiation à la programmation est faite à l'occasion notamment d'activités de repérage ou de déplacement (programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran), ou d'activités géométriques (construction de figures simples ou de figures composées de figures simples) » (MEN, 2015, p.214).

En partant de ces préconisations des programmes, le but de cet atelier est de questionner les apports et limites de l'utilisation de la programmation pour développer ou réinvestir effectivement des connaissances géométriques, dans le cas d'une activité de reproduction de figure géométrique. En effet, alors que la géométrie dynamique a apporté un point de vue nouveau sur la géométrie (Assude et Gelis, 2002), qu'en est-il de la programmation ?

Pour cela nous avons proposé aux participants de réaliser une même tâche de reproduction dans différents environnements : logiciel de programmation, logiciel de géométrie dynamique et papier-ciseaux. Pour l'analyse des connaissances et compétences en jeu, nous nous appuierons sur les travaux récents en didactique de la géométrie (Perrin-Glorian et Godin, 2014 ; Petitfour, 2015) permettant de rendre compte de connaissances géométriques et compétences visuo-spatiales en jeu dans la reproduction de figures.

Nous avons choisi d'utiliser Scratch comme logiciel de programmation (préconisé par les programmes) et GeoGebra comme logiciel de géométrie dynamique. Nous avons écarté les « robots » (Probot, Thymio, …) suite à des difficultés techniques d'utilisation pour obtenir des tracés suffisamment précis, ce qui nous amène à penser que leur utilisation dans l'enseignement (tracés géométriques) n'est pas tout à fait adaptée à l'école primaire pour le moment.

I - REPRODUCTION D'UNE FIGURE GEOMETRIQUE

La figure géométrique que nous avons choisie est la figure 1 ci-dessous :

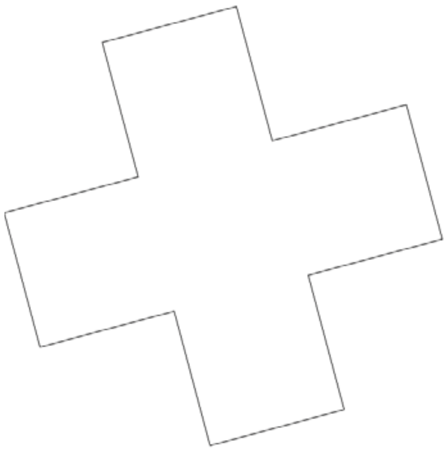


Figure 1

Il s'agit d'une figure pouvant être considérée comme complexe car composée de figures simples (carrés ou rectangles ou les deux). Cette figure possède certaines régularités (motifs isométriques par translation, rotation ou symétrie). Sa reproduction peut donc amener à utiliser certaines caractéristiques des logiciels choisis : des boucles dans le logiciel de programmation Scratch et des juxtapositions de carrés dans le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. L'environnement papier-ciseaux permet

[1] http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Initiation_a_la_programmation/92/6/RA16_C2_C3_MATH_inititation_programmation_doc_maitre_624926.pdf

d'exploiter la symétrie de la figure grâce au pliage. Une analyse de la tâche de reproduction sera proposée dans la partie II.

Lors de l'atelier, les participants ont d'abord été invités à reproduire cette figure dans l'environnement Scratch ainsi que dans un deuxième environnement parmi le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra ou l'environnement papier-ciseaux. Nous avons ensuite organisé une mise en commun des productions. Voici des exemples de constructions réalisées dans l'atelier suivies de commentaires sur leur réalisation et d'exemples de réalisations obtenues dans d'autres contextes (en classe ou en formation).

1 Reproductions avec Scratch

1.1 Reproduction 1 avec Scratch

Script 1

Production classique que l'on retrouve dans 4 groupes. Un motif a été reconnu (dans le script ci-dessus mais d'autres ont choisi) et reproduit quatre fois.

À ce stade, les problèmes suivants ont été soulevés :

- la procédure d'initialisation n'est pas évidente car dépendante de l'orientation initiale du lutin qu'il faut identifier ;
- la taille de la figure obtenue peut être trop petite (par exemple lorsque l'on conserve la valeur choisie par défaut pour le bloc « avancer de »). La figure sera alors en partie cachée par le lutin. Certains groupes choisissent 100 au lieu de 20 dans l'instruction "avancer de", d'autres déplacent le lutin à la fin du script et d'autres enfin changent le lutin choisi par défaut (le chat) en le remplaçant par la flèche (↓) pour visualiser également l'information sur l'orientation du lutin ;
- la taille de la scène[2] est imposée et oblige à estimer un ordre de grandeur du pas à inscrire dans l'instruction "avancer de" si l'on souhaite que la figure soit entièrement visible[3] ;
- si la place prise par la figure sur la scène n'a pas été anticipée, le lutin peut "sortir de la scène" (il disparaît) et se pose alors le problème de le faire revenir. La seule solution trouvée dans l'atelier a été d'utiliser l'instruction "aller à x : 0 y : 0". La question s'est posée de savoir si cette situation ne pouvait pas être retenue pour donner du sens au repérage dans le plan et à l'utilisation d'un système de coordonnées de points ;

[2] Dans Scratch, la « scène » est l'espace de l'écran permettant de visualiser les objets créés. Il s'agit d'un rectangle de 480 pixels par 360 pixels. Elle est munie d'un repère dont l'origine est le centre de ce rectangle.

[3] Tout comme dans l'environnement papier-crayon pour prévoir si la figure sera réalisable sur la feuille proposée, il faut ici anticiper sur les dimensions des côtés.

- l'unité de longueur est implicite ("avancer de 100") : il s'agit du pixel (unité graphique particulière) ;

Une fois cette première réalisation effectuée, plusieurs groupes ont cherché à rendre leur programme plus « efficace » (moins d'instructions). Les animateurs ont également proposé de produire un script permettant d'obtenir la croix en utilisant le moins de fois possible (voire une seule fois) l'instruction "avancer".

1.2 Reproduction 2 avec Scratch

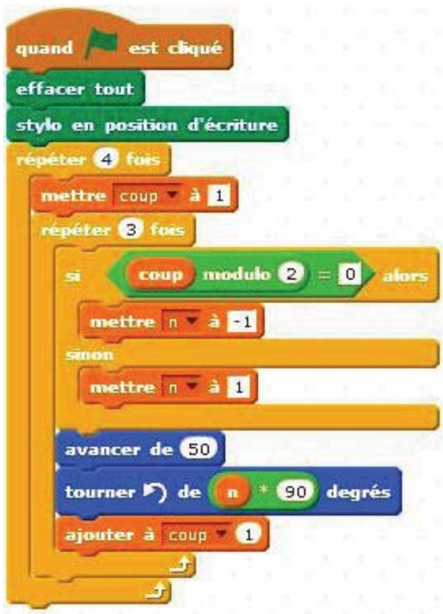
<table>
<tr>
<td>


Script 2
</td>
<td>


Script 3
</td>
<td>


Script 4
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Dans ces trois productions les groupes ont cherché à minimiser le nombre d'actions "avancer" et "tracer" en utilisant l'action "répéter" sur des motifs repérés sur la figure.</td>
</tr>
</table>

Dans le script 5, produit par un groupe, il est intéressant de noter que la contrainte forte "n'utiliser qu'une seule fois l'instruction avancer " engage à mobiliser des connaissances mathématiques hors de portée des élèves de l'école ou du collège.



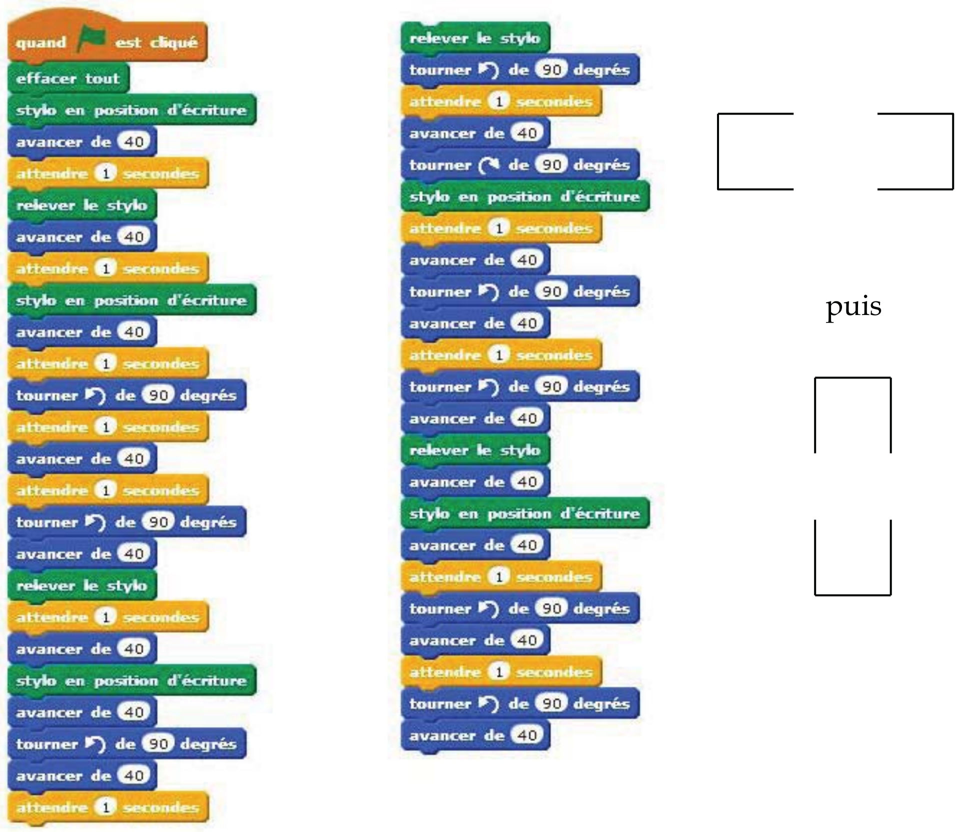
Script 5

Dans cet environnement, comme dans les autres, les contraintes posées sur les outils disponibles (leur nature, le nombre d'utilisations possible, etc.) sont des variables didactiques de la situation de reproduction. Un groupe a proposé de donner un coût aux instructions plutôt que d'en limiter le nombre, le but étant de trouver une suite d'instructions permettant d'obtenir la figure au moindre coût.

Tous les groupes ont utilisé au moins une boucle ce qui traduit effectivement la reconnaissance d'un motif que l'on souhaite répéter. C'est ici un point important de l'algorithmique et de la programmation, terrain d'expression des mathématiques comme "science des modèles" (Kahane, 1995-1996). Modestement sur cette tâche, chacun a cherché à reconnaître un motif pour tirer parti de l'environnement Scratch permettant de réaliser à moindre coût la répétition dudit motif. Une analyse moins poussée aurait conduit à réaliser les tracés de segment un à un, les uns après les autres (en exprimant l'idée d'un déplacement pas à pas) comme nous avons pu l'observer dans des classes à qui nous avions proposé la même tâche de reproduction :

- le script 6 a été obtenu dans une classe de Cm1-Cm2. On notera une utilisation erratique des mesures d'angle ;
- le script 7[4] a été obtenu en classe de quatrième et permet d'obtenir la figure comme superposition de deux rectangles ;

Script 6



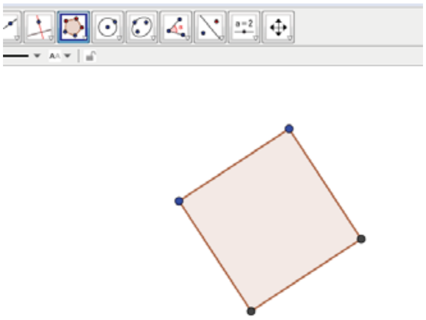
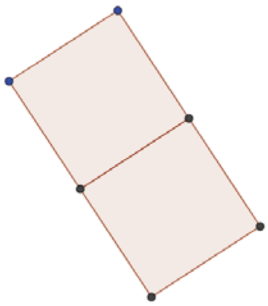
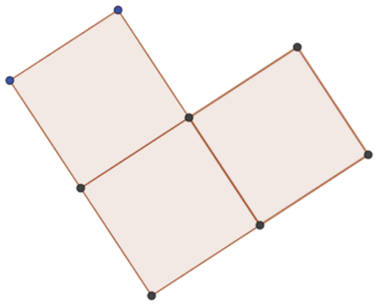
Script 7

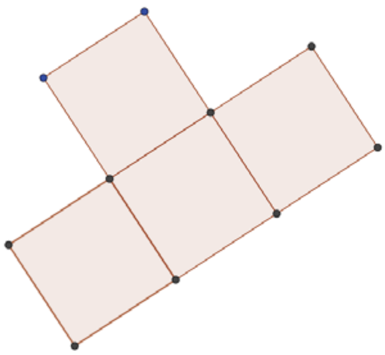
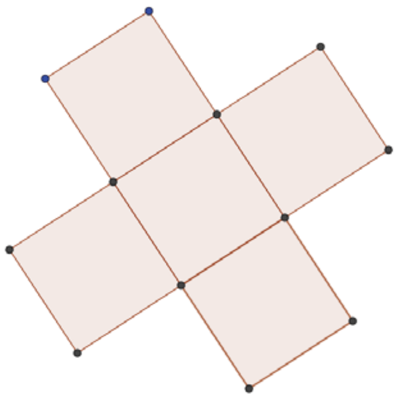
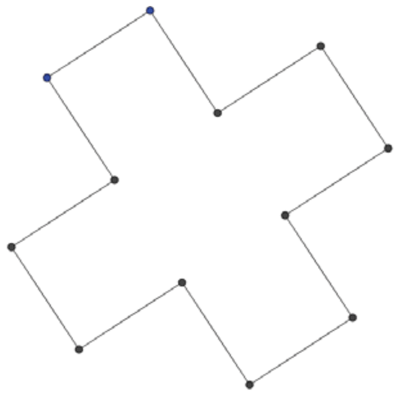
4 Pour des raisons de mise en page le script 7 a été scindé en deux colonnes.

2 Reproductions avec GeoGebra

2.1 Reproduction 1 avec GeoGebra

Dans la construction suivante, le groupe a utilisé la fonction « polygone régulier à 4 côtés ». Cette fonction permet d'afficher à l'écran des carrés colorés, ce qui conduit à les appréhender comme des surfaces et la figure construite (la croix) comme un assemblage de ces surfaces juxtaposées.

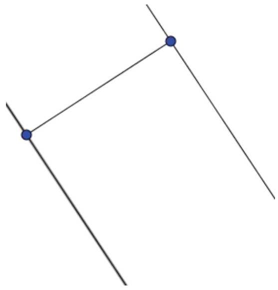
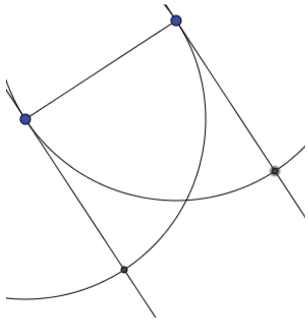
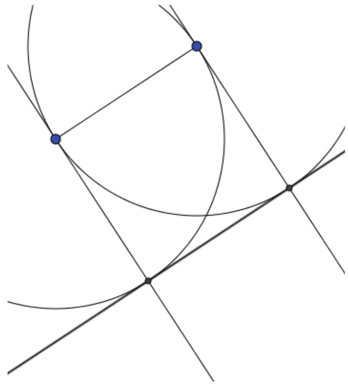
1. Tracé d'un carré comme polygone régulier à 4 côtés 	2. Tracé d'un deuxième carré juxtaposé au premier en utilisant deux sommets du premier carré 	3. Tracé d'un troisième carré par la même méthode 

4. Tracé d'un quatrième carré par la même méthode 	5. Tracé d'un cinquième carré par la même méthode 	6. Tracé de segments formant les côtés de la figure et effacement des 5 carrés intérieurs. 

Une variante de cette construction est apparue : un groupe a utilisé les mêmes étapes de construction mais en utilisant la symétrie axiale d'axe la droite support d'un des côtés du carré, ce qui met en jeu cette connaissance géométrique supplémentaire.

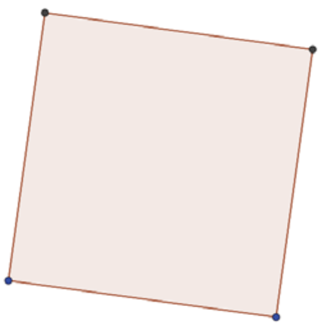
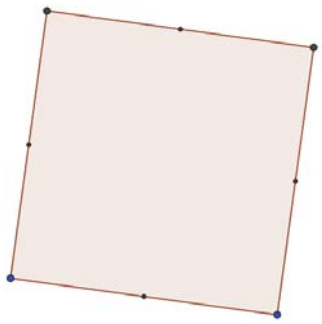
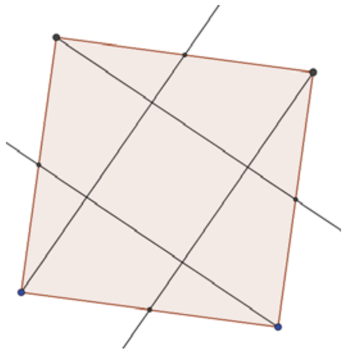
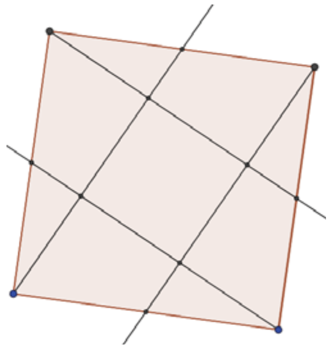
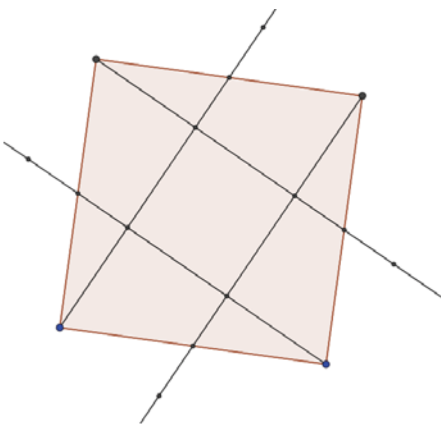
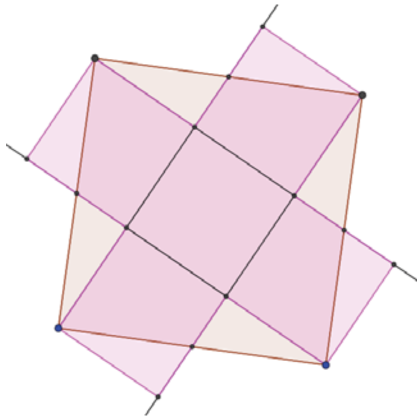
2.2 Reproduction 2 avec GeoGebra.

Un groupe a réalisé la construction côté par côté en utilisant la fonction « droite perpendiculaire » pour obtenir des angles droits et la fonction « cercle » pour les reports de longueurs. Cette réalisation s'appuie sur des relations entre les segments qui constituent le contour de la figure.

1. Tracé d'un segment et ses extrémités 	2. Tracés de droites perpendiculaires 	3. Tracés de cercles pour reporter la longueur du segment et création de points d'intersection 	4. Tracé d'une droite passant par les deux points obtenus 	Etc. …

2.3 Reproduction 3 avec GeoGebra

Le travail de ce groupe suit une analyse très fine des sous-figures et sur-figures liées à la figure initiale. La familiarité avec des figures du même type utilisées dans les sujets de concours l'a orienté vers cette production. Il est à noter que sans recours à des tracés sur un brouillon, l'analyse ci-dessous aurait été beaucoup plus compliquée.

1. Tracé d'un carré comme polygone régulier à 4 côtés 	2. Placement des milieux des côtés de ce carré 	3. Tracé de demi-droites d'origine un sommet du carré et le milieu d'un côté opposé 
4. Création des points d'intersection obtenus entre les demi-droites 	5. Tracés des symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés du carré 	6. Construction du polygone en joignant les points de la figure obtenus aux étapes précédentes. 

Les participants des différents groupes sont assez familiers avec l'utilisation de GeoGebra, ainsi, peu de problèmes ont été signalés pour la prise en main. De manière implicite, la résistance au déplacement a été prise en compte pour la reproduction de la figure.

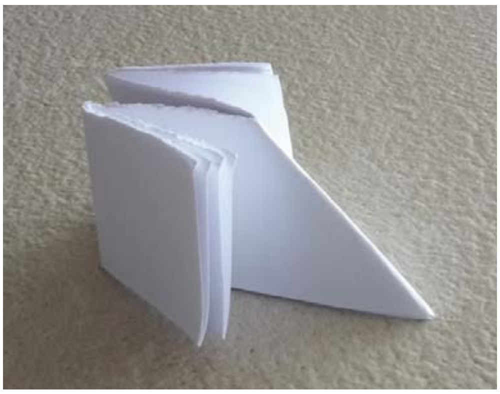
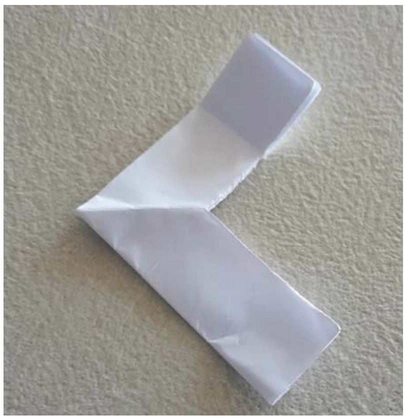
3 Reproductions dans l'environnement papier-ciseaux

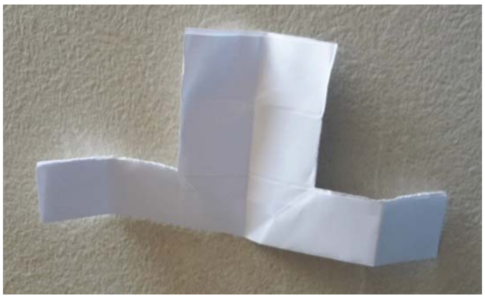
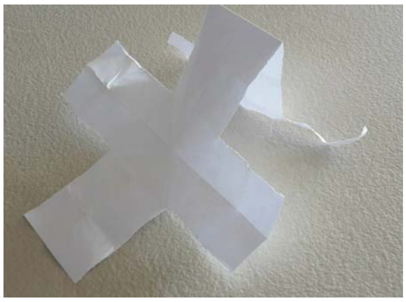
L'environnement papier-ciseaux n'est pas classique. Il a été clarifié en début de mise en activité. Les participants ont à leur disposition le modèle de la croix à reproduire, une feuille A4 blanche et une paire de ciseaux. La reproduction doit être d'un seul tenant. On appellera « coup de ciseaux » l'opération qui consiste à découper la feuille de manière rectiligne (coupe aussi longue que l'on veut, sans changement de direction). Les participants peuvent plier la feuille comme ils le souhaitent. Bien entendu, la reproduction de la figure doit pouvoir être justifiée même si sa réalisation peut être approximative (tout comme dans l'environnement papier-crayon). L'introduction de contraintes sur l'utilisation des instruments (les ciseaux) est également possible dans cet environnement, ce qui a été fait dans l'atelier en introduisant la consigne « donner le moins de coups de ciseaux possibles ». Cela a permis aux participants d'approfondir leur recherche en travaillant sur d'autres procédés possibles.

Les participants n'étant pas familiers de cet environnement, il a fallu passer par une phase d'essais-erreurs pour parvenir à des reproductions satisfaisantes. On notera que plusieurs groupes ont tout d'abord utilisé le modèle de la croix, qu'ils ont plié en faisant se superposer les bords par transparence, pour essayer de trouver le nombre (et le lieu) de coups de ciseaux minimal. Presque tous les groupes ont choisi implicitement que la reproduction finale ne devait pas avoir de superposition de surface. Cette décision implique un minimum de deux coups de ciseaux (dont le premier est généralement pour passer du format A4 à une feuille carrée). Or, sans cette contrainte implicite, une réalisation en un seul coup de ciseaux est possible.

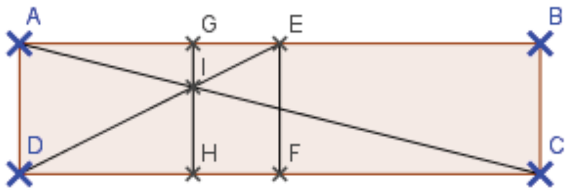
3.1 Reproduction 1 en papier – ciseaux

La reproduction ci-dessous est la réalisation classique en deux coups de ciseaux. Le premier coup de ciseaux sert à passer du format A4 à une feuille carrée. Ensuite, par un jeu de superposition (correspondant à des symétries axiales de la figure), un second coup de ciseaux permet d'obtenir, après dépliage, une reproduction de la croix. La transcription ci-dessous permet de visualiser, à rebours, les pliages suffisants :

1. Après avoir obtenu une feuille carrée puis plié trois fois en deux et une fois en trois…on coupe une fois… 	2. Et on déplie… 	3. Ceci est le quart de la croix…attention, c'est à ce stade que le pliage en trois est intervenu ! 

4. Le pliage en trois est visualisable	5. La croix, suite aux découpes après pliage	6. Une possibilité en un seul coup de ciseaux est de se passer de l'étape qui consiste à rendre la feuille de départ carrée et de superposer les morceaux superflus.
		

Une discussion a animé cette réalisation suite au passage obligatoire par un pliage en trois parties égales. Ce pliage est-il justifiable mathématiquement ou est-il seulement une construction « à l'œil » ? Une construction peut être réalisée en s'appuyant sur le théorème de Thalès (cf. Figure 2) : on obtient le point I par pliage selon [AC] et [DE], puis on obtient [DH] par un pli bord à bord passant par I. On notera que le questionnement autour de la légitimité du pliage en trois peut s'appliquer pour le pliage en deux dit « bord à bord ».

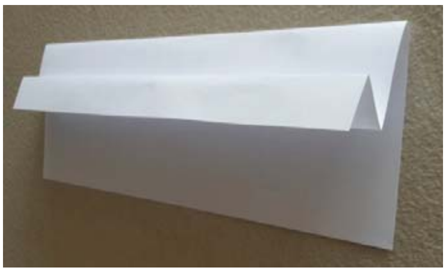
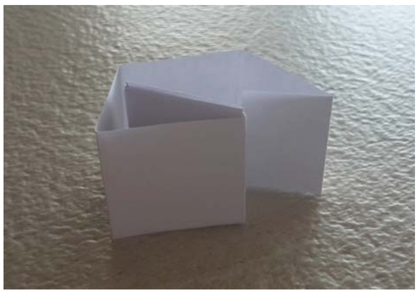


ABCD rectangle, E milieu de [AB].
I est le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
G est le projeté orthogonal de I sur (AB).
AG=1/2CH
GE=1/2DH
Si on pose GE=1 alors DH=2=AG et CH=4
d'où CD=6 et AG=2 donc AG=1/3 CD.

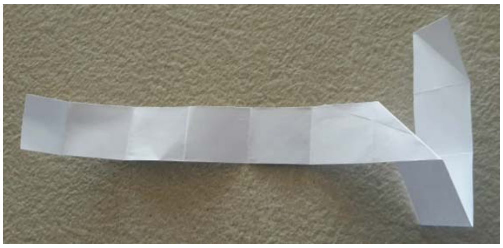
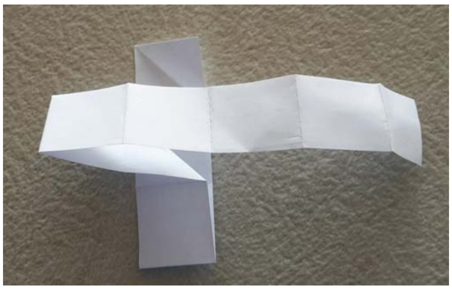
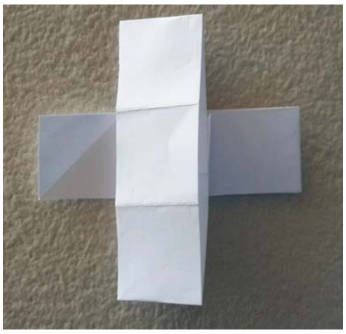
Figure 2. Partage d'une feuille en trois rectangles superposables par pliage

3.2 Reproduction 1 en papier – ciseaux

La production ci-dessous a été proposée par une étudiante de M2 familière des origamis à qui la tâche de reproduction a été proposée. L'idée est de découper, en un seul coup de ciseaux, une bande à bord parallèle suffisamment fine pour y faire apparaitre 9 carrés superposables. Ensuite, par pliage, on peut reproduire la croix souhaitée (avec des superpositions de carrés).

1. En pliant bord à bord trois fois de suite, on obtient une bande à bords parallèles suffisamment fine.	2. Une fois la bande coupée[5], on initialise la création des carrés.	3. La bande est pliée pour faire apparaître au moins 9 carrés superposables.
		

[5] A ce stade, le « coup de ciseaux » est rectiligne même s'il faut cisailler plusieurs fois (tout dépend de la longueur de la lame !) L'opération de découpe peut intervenir après avoir construit les carrés. La découpe est alors plus imprécise (dû aux superpositions) mais le coup de ciseaux est plus net.

4. Pliage type origami.	5. On obtient la croix avec plusieurs superpositions.	6. Objet final.
		

II - OUTILS D'ANALYSE D'UNE TACHE DE REPRODUCTION DE FIGURES

Nous présentons maintenant quelques outils d'analyse permettant de rendre compte des connaissances et compétences en jeu dans une tâche de reproduction de figures, en appui sur des travaux de recherche concernant les différentes visions sur les figures (Perrin-Glorian et Godin, 2014) et l'action instrumentée (Petitfour, 2015). Nous utiliserons ces outils dans la partie suivante pour réaliser une analyse comparée de la tâche de reproduction de la croix dans les trois environnements étudiés.

Une tâche de reproduction de figures nécessite un enchaînement d'*actions instrumentées*. Nous appelons de telles actions celles d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise corporellement des objets techniques, soit pour analyser des relations géométriques représentées graphiquement, soit pour produire des objets graphiques représentant des objets géométriques. Par exemple, la vérification d'un alignement de deux segments avec la règle (analyse d'une relation géométrique) et le tracé d'une droite avec la règle (production d'un trait droit représentant la droite) sont des actions instrumentées.

Les *objets techniques*, dépendant de l'environnement de travail, sont par exemple :

- la règle, l'équerre, le compas dans l'environnement papier-crayon ;
- les outils « cercle (centre-point) », « droite perpendiculaire » dans l'environnement technologique du logiciel GeoGebra ;
- « avancer de 10 pas », « répéter 10 fois » dans l'environnement technologique de Scratch ;
- la paire de ciseaux dans l'environnement papier-ciseaux.

Les *objets graphiques* – traces du crayon sur une feuille de papier dans l'environnement papier-crayon, traces sur un écran dans un environnement technologique, plis et traits de découpe dans l'environnement papier-ciseaux – ont des caractéristiques spatiales qui rendent compte de propriétés géométriques de la figure.

Nous distinguons les trois visions suivantes des figures (Perrin-Glorian et Godin, 2014) que nous illustrons avec la figure étudiée dans l'atelier :

- dans une vision « surfaces », on peut voir une surface (par exemple la croix de la figure 3), des surfaces juxtaposées, comme les cinq carrés de la figure 4 ou le rectangle et les deux carrés de la figure 5. On peut voir aussi des surfaces qui se chevauchent, par exemple la croix et un carré sur la figure 4 et les deux rectangles sur la figure 5. On peut également voir des lignes mais seulement en tant que bords de surface. On peut voir par exemple le contour de la croix (figure 6). Cette vision étend la notion de forme 2D évoquée par Duval (2005) ;

Figure 3

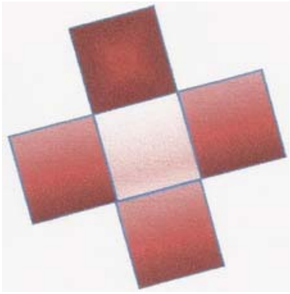


Figure 4

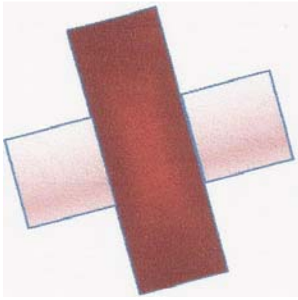


Figure 5

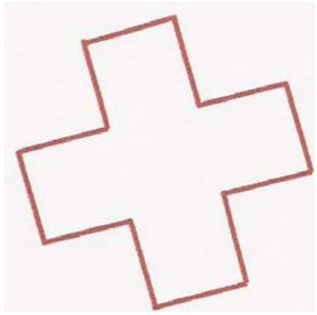


Figure 6

- dans une vision « lignes », on peut voir la figure comme constituée de lignes pouvant se tracer à la règle et au compas (figure 7). Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de droites supports des côtés ;
- dans une vision « points », on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes (figure 8) ;

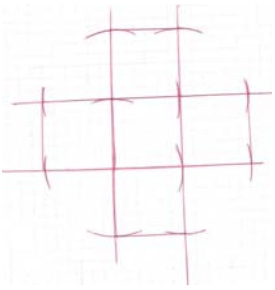


Figure 7

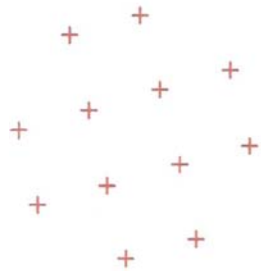


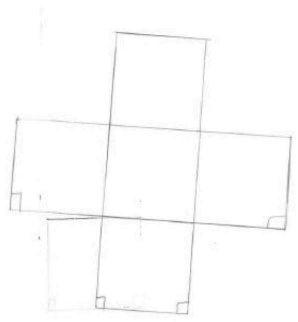
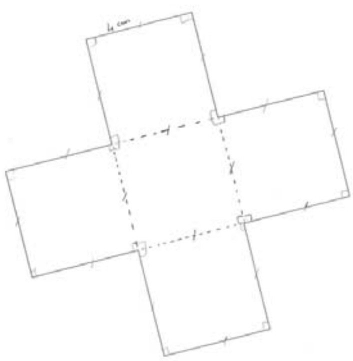
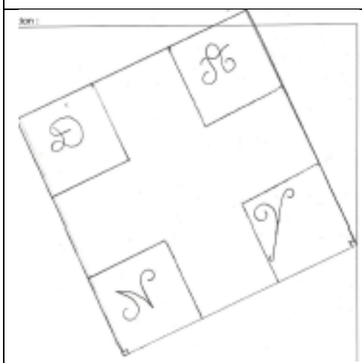
Figure 8

Les actions instrumentées mettent en jeu différents types de compétences (organisationnelles, manipulatoires, visuo-spatiales) et de connaissances (techniques, graphiques, géométriques). Nous nous intéressons ici aux connaissances géométriques et aux compétences visuo-spatiales :

- les *connaissances géométriques* sont relatives à la définition des objets géométriques et aux relations qui peuvent exister entre eux comme la perpendicularité, l'alignement, ...
- les *compétences visuo-spatiales* concernent la capacité à réaliser une analyse visuelle pour prélever et interpréter des informations spatiales (repérage d'objets graphiques, repérage de relations spatiales entre ces objets). Elles concernent également la capacité à réaliser une déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005), à passer d'une vision « surfaces » à une vision « lignes » et « points ».

Nous illustrons la mise en jeu de ces connaissances et compétences dans une analyse de productions d'élèves de cycle 3, qui avaient la tâche de reproduire la croix dans l'environnement papier.

Productions des élèves	**Compétences visuo-spatiales sous-jacentes à la construction**	**Connaissances géométriques sous-jacentes à la construction**
 « J'ai utilisé le compas pour tracer les arcs de cercle et l'équerre pour relier les traits, le crayon à papier pour tracer les traits. »	A la jonction de la vision « surfaces » et de la vision « lignes » : tracé du contour segment par segment Repérage d'égalités de longueur des côtés du polygone Alignements de côtés et angles droits non repérés (direction des côtés prise « au jugé »)	Les points d'un arc de cercle sont équidistants de son centre Égalité de longueurs

 « Cette figure est une croix qui se compose de deux rectangles. »	Vision « surfaces » : chevauchement de deux rectangles Repérage de la relation entre les deux rectangles	Propriétés du rectangle « Un quadrilatère ayant deux côtés de même longueur, chacun perpendiculaire à un troisième côté, est un rectangle. » Angle droit
 « La figure est composée de 5 carrés de 4 cm. »	Vision « surfaces » : juxtaposition de cinq carrés Repérage de l'organisation spatiale des carrés	Propriétés du carré « Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits est un carré » Angle droit, égalité de longueur
	Vision « lignes » Repérage de demi-droites supports des côtés Repérage d'alignement de côtés, de la relation de perpendicularité	Report de longueur sur une demi-droite à partir d'un point Angle droit, égalité de longueur
	Vision « lignes » et « points » Construction d'une sur-figure par prolongement de côtés Repérage d'égalités de longueur, d'alignements et d'angles droits	Alignement, égalité de longueur, angle droit, point d'intersection

III - ANALYSE COMPAREE DES REPRODUCTIONS DANS LES TROIS ENVIRONNEMENTS

	Compétences visuo-spatiales	Connaissances géométriques
Logiciel de programmation	La vision « surfaces » avec la ligne vue comme le contour d'une surface est principalement mobilisée, soit dans sa globalité ("identifier que tous les côtés de la croix ont la même longueur"), soit en repérant "quatre fois un même parcours"(*Script* 2). Cette appréhension spatiale de la figure est associée à un point de vue « dynamique » avec les idées de déplacement, de chemin à parcourir provoquées par la nature des blocs disponibles comme "avancer de" qui permet, le stylo étant en position d'écriture, de tracer un segment. La réalisation de la tâche dans cet environnement nécessite également de "se mettre à la place du lutin (décentration et orientation) et de passer de l'espace au plan comme si on dessinait sur le sol de la cour." La scène étant de taille donnée fixe sans possibilité de zoom, la croix est à reproduire dans un espace contraint qui engage à estimer la taille possible des segments.	L'égalité des longueurs, les angles droits et leur mesure sont identifiés comme connaissances géométriques mobilisées dans la tâche de reproduction. La capacité à "décomposer une figure complexe en figures élémentaires" est à mettre en relation avec la recherche d'économie dans l'écriture du programme.
Logiciel de géométrie dynamique	Les visions "lignes" et "points" sont en jeu dans les constructions utilisant les droites et cercles alors que la vision "surfaces " est en jeu dans celles utilisant un assemblage de cinq carrés. Cette dernière peut être induite dans cet environnement par la possibilité d'utiliser dans le menu l'outil "polygone régulier" qui permet de tracer à moindre coût un carré puis de compléter la figure avec quatre carrés.	Les multiples procédés de construction envisageables dans cet environnement conditionnent les connaissances mises en jeu : cercles (distances égales), symétrie centrale et axiale (conservation des distances, image du carré), propriétés du carré.
Papier-ciseaux	Deux visions semblent privilégiées dans cet environnement. La vision "surfaces" conduisant à inclure la figure dans un carré ou à la voir comme la juxtaposition de carrés ; la vision "lignes" dans la reconnaissance et éventuellement le prolongement des axes de symétrie des différents carrés identifiés. Ces deux visions se répondent entre elles lorsque des propriétés de symétries, du carré par exemple, donnent des superpositions de segment (les côtés). Ici, la vision du « contour » est à l'intersection de la vision	L'environnement et la contrainte imposés engagent à décomposer en figures simples la figure complexe, cette dernière s'obtenant comme juxtaposition (après symétries essentiellement) de ces figures simples. Les propriétés géométriques recensées par les groupes sont principalement liées, dans cet environnement, à celles des symétries : axe de symétrie d'un segment pour obtenir son milieu, les diagonales d'un carré sont axes de symétrie de ce carré qui peut aussi être

	« surfaces » et de la vision « lignes ». La vision « points » peut aussi être mobilisée lorsqu'il s'agit d'identifier le milieu d'un segment par exemple.	vu comme deux triangles rectangles isocèles juxtaposés. L'utilisation de compositions de symétries est à mettre en relation avec la recherche d'un nombre minimal de coups de ciseaux.

IV - UNE EXPERIMENTATION EN FORMATION

Nous avons proposé cette tâche de reproduction en formation initiale à des professeurs des écoles stagiaires. Quatre ateliers correspondant à quatre environnements différents ont été mis en place :

Atelier 1 : papier-crayon avec comme contrainte d'utiliser l'équerre le moins de fois possible

Atelier 2 : papier-ciseaux avec comme contrainte de réaliser le moins de coups de ciseaux possible

Atelier 3 : GeoGebra (sur tablettes)

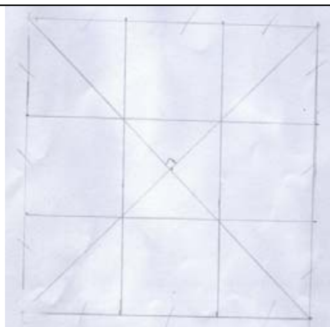
Atelier 4 : Scratch (sur tablettes)

Sur chacun des ateliers, deux groupes (de deux ou trois stagiaires) travaillent en parallèle. Ce dispositif vise à confronter, lors de la mise en commun, les productions obtenues d'une part au sein d'un même environnement et d'autre part dans des environnements distincts.

Voici un compte-rendu de quelques productions obtenues lors de la mise en œuvre.

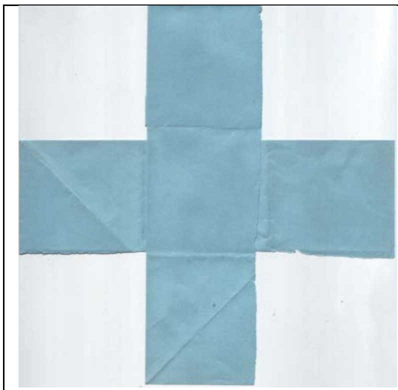
Atelier 1 (papier-crayon)

Les deux groupes ont utilisé la même sur-figure pour leur reproduction : le « grand » carré. Voici la reproduction réalisée dans un groupe.



Le groupe a d'abord réalisé le « grand » carré en utilisant deux fois l'équerre. Dans un second temps, en cherchant à minimiser le nombre d'utilisations de l'équerre, une étudiante a proposé d'exploiter la propriété sur les diagonales du carré pour n'utiliser qu'une fois l'équerre (construction du « grand » carré à partir de ses diagonales).

Les quatre groupes ont fait des découpages variés. Les découpes obtenues ne sont pas toujours d'un seul tenant. Elles ne mobilisent pas les mêmes visions de la figure : cinq carrés juxtaposés pour la première et la quatrième et un grand carré auquel on enlève quatre carrés dans les « coins » pour les deuxième et troisième figures.

		
Première figure	*Deuxième figure*	*Troisième figure*
Chevauchement de deux rectangles	Pliages et découpage par utilisation de la symétrie mais avec une erreur liée au non respect des longueurs des côtés (pliage en quatre).	Pliages et découpage par utilisation de la symétrie. Le partage en trois a été obtenu par un pliage par essais successifs de superpositions.

Le quatrième groupe a réalisé la reproduction déjà présentée en I. 3.2.

Pour les ateliers 3 (GeoGebra) et 4 (Scratch) les productions ont été similaires à celles obtenues dans l'atelier (cf. partie I).

La comparaison de ces différentes constructions lors de la mise en commun a permis de mettre en évidence les différents regards que l'on peut être amené à porter sur une même figure.

Un changement de regard peut être provoqué au sein d'un même environnement en instaurant des contraintes sur la nature et le nombre d'utilisation des instruments autorisés. On cherche alors à faire émerger en formation le point de vue exprimé par Duval (2005) affirmant que "la reproduction ne constitue pas un seul type de tâches, mais il y a autant de types de tâches de reproduction que de types d'instruments utilisés. La variation des instruments est une variable didactique essentielle (…)."

Le changement de regard peut aussi être induit par le changement d'environnement dans lequel la tâche est proposée. Par exemple, les groupes de l'atelier Scratch ont tous mobilisé une vision « surface » (par son contour) alors que dans les environnements GeoGebra ou papier-crayon, outre des visions surface (par juxtaposition ou superposition), des visions lignes et points sont aussi apparues. Cela avait déjà était mis en évidence dans la partie III.

Une fois que les étudiants prennent conscience de cette variété de regards possibles sur une même figure, le travail se poursuit par une réflexion sur la façon de faire évoluer les élèves d'une vision « surfaces » vers une vision « lignes » ou « points », cette dernière étant nécessaire à une entrée dans la géométrie pratiquée au collège.

V - CONCLUSION

Que peut-on retenir comme apports et limites de cette approche de la géométrie à travers la programmation que nous avons illustrée par la mise en œuvre d'une tâche de reproduction d'une figure géométrique dans différents environnements ?

Remarquons dans un premier temps que la connaissance nouvelle (ici celle se rapportant à la programmation en environnement Scratch) peut être un obstacle à la mobilisation des autres connaissances (ici les connaissances géométriques). Nous avons vu précédemment qu'un manque de connaissances de l'environnement Scratch sur les tailles de la croix, du lutin, de la scène, du placement du lutin sur la scène ou de l'orientation du lutin peuvent poser problèmes. Nous avons indiqué également avoir écarté les robots car des connaissances techniques sur le paramétrage des robots dans les mouvements de rotation n'étaient pas accessibles au niveau de l'école primaire. Et souvent dans l'enseignement ou la formation les problèmes de connaissances techniques sur l'environnement dominent les problèmes didactiques ou mathématiques (Cabassut et Trestini, 2006). Il faut donc en préalable avoir anticipé ces problèmes de connaissances de l'environnement afin qu'ils ne viennent pas perturber les problèmes mathématiques à résoudre.

L'environnement « programmation avec Scratch » amène à mobiliser des compétences visuo-spatiales pour résoudre le problème proposé. C'est alors une vision « surfaces » avec la ligne vue comme le contour d'une surface qui est en jeu, avec les notions de repérage et de déplacement jouant un rôle essentiel dans la reproduction. C'est une différence importante avec les autres environnements. Certaines notions géométriques peuvent prendre un nouveau sens dans cet environnement, comme la notion d'angle, qui apparaît dans Scratch comme « angle de rotation ».

Une autre spécificité de cet environnement est aussi liée au fait d'amener à repérer des répétitions de motifs dans la figure, ce qui n'est pas essentiel dans d'autres environnements. Par exemple le bord de la figure peut être décomposé selon quatre lignes brisées superposables. La justification de ces répétitions, perçues dans un premier temps, mobilise des connaissances géométriques. Les élèves se contenteront-ils d'une validation perceptive ou mobiliseront-ils une validation géométrique ? Dans ce cas il faut repérer le risque de dévalorisation de la validation géométrique que fait courir l'environnement de programmation s'il se contente d'une validation perceptive ou pragmatique (c'est vrai parce que je le vois ou parce que l'action a réussi).

Ces compétences visuo-spatiales (éventuellement en lien avec des connaissances géométriques) ont permis de mettre en œuvre des compétences de programmation : ceci peut illustrer les apports de la géométrie au domaine « algorithmique et programmation ».

En effet, la notion de programme est une connaissance travaillée dans ce type d'activité. Certes les élèves ont pu s'exercer, dans les activités de reproduction ou de construction d'une figure dans l'environnement papier-crayon, à la rédaction d'un programme de construction. De même avec un logiciel de géométrie dynamique, ils ont pu choisir dans des menus déroulants des actions qui, de manière cachée, étaient traduites en programmes adressées à l'ordinateur qui les exécutait. Ici l'élève produit un programme en langage Scratch, en s'initiant à la syntaxe rigoureuse des différentes instructions de ce langage, aux caractéristiques de linéarité des séquences d'instructions et d'écriture par blocs. Le type d'activité de reproduction semble bien se prêter à cette initiation à la programmation.

Un second point abordé porte sur l'instruction de répétition. Elle nécessite le repérage d'un modèle (en anglais pattern, qu'on peut traduire aussi par motif). Ici la connaissance en algorithmique et programmation apporte à la connaissance géométrique un nouveau regard : celui qui repère les modèles (motifs ou pattern). Le concept d'invariant est fondamental en géométrie pour classer les différents objets et les caractériser : l'invariance de la longueur, de l'angle, etc. Le rôle de la symétrie dans l'analyse de la figure à reproduire a été déterminant pour plusieurs productions présentées précédemment. La répétition peut apparaître en mathématiques : elle est même formalisée dans le raisonnement par récurrence. Mais elle apparaît moins naturellement qu'en algorithmique et programmation, car ce concept de modèle (pattern) dépasse le cadre de la géométrie et se retrouvera plus tard dans les calculs itératifs, puis récursifs jusque dans les structures algébriques. Et c'est ce repérage d'un modèle dans l'objet considéré qui apporte un nouveau regard sur la géométrie et sur les mathématiques.

Nous avons vu se dessiner une progression classique dans l'apprentissage d'un nouveau domaine « algorithmique et programmation » : apprendre ce domaine avec les mathématiques connues (par exemple apprendre sur les tailles de la croix, du lutin, de la scène, du placement du lutin sur la scène ou de l'orientation du lutin à partir d'activités mathématiques), apprendre des nouvelles mathématiques à partir de la programmation en Scratch (par exemple repérer des modèles dans un objet géométrique ou un objet mathématique) puis apprendre de manière intégrée des mathématiques et de la programmation en Scratch. Il s'agit de détailler cette progression dans des parcours d'étude et de recherche intégrant mathématiques, algorithmique et programmation. Pour cela Trouche (2014) invite à concevoir des « orchestrations instrumentales [qui] sont les dispositifs que le maître doit construire dans la classe pour guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle ». Mais ce travail doit rassembler une équipe pluri-disciplinaire : « Concevoir des orchestrations instrumentales et plus généralement des scénarios d'exploitation didactique, est une nécessité dans les environnements technologiques complexes. Mais cela ne peut pas être du ressort d'un seul professeur. L'ingénierie didactique est un travail complexe, qui devrait reposer sur la recherche d'équipes pluridisciplinaires, associant des informaticiens, des didacticiens, des mathématiciens et des professeurs » (Trouche, 2014, p.190). Tout un programme !

Enfin, nous avons également présenté dans la dernière partie une expérimentation en formation initiale des enseignants du dispositif utilisé pour l'atelier, c'est-à-dire la comparaison de la reproduction d'une même figure dans différents environnements. L'expérimentation montre une variété importante de procédures utilisées par les futurs enseignants qui permet de les faire réfléchir ensuite aux apports et limites de l'environnement de programmation Scratch, tout comme cela a été fait au cours de l'atelier. Cela permet également de les former sur les différentes visions possibles d'une figure ainsi que sur les variables didactiques permettant de faire évoluer le regard sur les figures. Cette situation apparaît donc plus généralement comme un possible point de départ pour un travail sur la didactique de la géométrie en formation.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., GELIS J.M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école élémentaire, *Educational Studies in Mathematics*, 50, 259-287.

CABASSUT R., TRESTINI M. (2006) Les TIC dans la formation et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, en collaboration avec Riemlinger P. et Trestini M., *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5-53.

KAHANE J.-P. (1995 - 1996) Mathématiques et formation. *Petit x*, **40**, 5-14.

MEN (Ministère de l'Education Nationale) (2015) Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).

PERRIN-GLORIAN M.-J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, **222**, 26-36.

PETITFOUR E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris 7.

TROUCHE L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques, quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, **55**, 181-197.

MANIPULER, REPRESENTER, COMMUNIQUER DANS LES ATELIERS MONTESSORI

Marie-Line GARDES
MCF, ESPE Université Lyon 1
Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Philippine COURTIER
Doctorante, Université Lyon 1
Institut des Sciences Cognitives Marc Jeannerod
Philippine.courtier@isc.cnrs.fr

Résumé
Les recherches sur les effets de la pédagogie Montessori sont rares et certains résultats apparaissent contradictoires selon les études (Denervaud & Gentaz, 2015). Dans le cadre d'une recherche sur les effets de cette pédagogie en milieu défavorisé et dans l'enseignement public, nous nous interrogeons sur la nature des apprentissages mathématiques effectués grâce aux ateliers Montessori. Par exemple, quels aspects de la construction du nombre sont en jeu dans ces ateliers ? Permettent-ils de développer les compétences attendues en fin de cycle 1 ? D'un point de vue didactique, peut-on modéliser ces ateliers avec des situations d'action, formulation, validation ? Dans cet article, nous nous focalisons plus spécifiquement sur les activités de manipulation, représentation et communication mises en jeu dans les ateliers mathématiques Montessori.

Introduction

Actuellement en France, l'intérêt pour les pédagogies alternatives et en particulier pour la pédagogie Montessori ne cesse de se développer. En témoignent des rééditions ou traductions des ouvrages de Maria Montessori (par exemple, (Montessori, 2015, 2016a, 2016c)), de nombreuses publications d'enseignants (par exemple, (Alvarez, 2016; Morin, 2017; Poussin, 2017)), des articles et dossiers dans la presse (par exemple, *Le Point* n°2348 du 7 septembre 2017, *Parents* n° 569 en mai 2017, émission « Montessori Superstar » sur France Culture[1] le 24 septembre 2017) ainsi que des films (comme *Ecole en vie*, sorti en 2016 ou *Le maître est l'enfant*, sorti en septembre 2017). Certains de ces auteurs (par exemple, Poussin, 2017) avancent l'argument des mauvais résultats aux études internationales (notamment PISA, OECD, 2016) pour justifier ce regain d'intérêt, en particulier par les enseignants. Du côté de la recherche, peu d'études se sont intéressées aux effets de la pédagogie Montessori sur les apprentissages et certains résultats apparaissent contradictoires (pour une revue, voir (Denervaud & Gentaz, 2015)).

Dans le cadre d'une recherche sur les effets de cette pédagogie en milieu défavorisé et dans l'enseignement public, nous nous interrogeons particulièrement sur la nature des apprentissages mathématiques effectués grâce aux ateliers Montessori. Par exemple, quels aspects de la construction du nombre sont en jeu dans ces ateliers ? Permettent-ils de développer les compétences attendues en fin de cycle 1 ? Plus particulièrement, dans le cadre de ce colloque, nous nous sommes demandé quelles activités de manipulation, représentation et communication sont possibles puis effectives dans les ateliers mathématiques Montessori.

Etudier ces ateliers de ces points de vue est particulièrement intéressant dans la mesure où la manipulation a un rôle central dans les apprentissages avec cette pédagogie. En effet, tout apprentissage débute par la manipulation d'un matériel didactique spécifique, conçu pour travailler, selon Maria Montessori, sur un concept particulier. Se pose ainsi la question de comprendre la nature de cette manipulation, son rôle dans le « passage du concret vers l'abstrait » et son articulation avec des

[1] En podcast sur : https://www.franceculture.fr/emissions/rue-des-ecoles/montessori-superstar (consultée le 30/12/17).

représentations et des phases de communication. Dans la figure 1, la photo met en scène plusieurs enfants d'une classe Montessori et on peut observer des manipulations d'objets différents, des interactions entre les enfants qui travaillent avec les lettres mobiles et différentes représentations du nombre (des cartons avec des écritures chiffrées, des barrettes de billes, des barres et des cubes en bois).

Figure 1. Activités dans une classe Montessori

Les objectifs de l'atelier présenté lors du colloque étaient donc, d'une part présenter la pédagogie Montessori et quelques ateliers spécifiques aux apprentissages mathématiques et d'autre part, questionner les activités *manipuler, représenter, communiquer* dans ces ateliers Montessori. Ainsi, après une courte présentation de notre projet de recherche et de la pédagogie Montessori, nous avons détaillé quelques ateliers Montessori spécifiques aux apprentissages mathématiques. Nous avons ensuite invité les participants à s'intéresser à la sémiotique en jeu dans ces ateliers, en manipulant eux-mêmes le matériel. Dans cet article, nous reprenons ce plan, en ajoutant les apports de nos échanges avec les participants de l'atelier, notamment dans notre conclusion qui présente des éléments de réponse à la question : quelles manipulation, représentation, communication dans les ateliers Montessori ?

I - PRESENTATION DE NOTRE RECHERCHE

L'origine de cette recherche est une rencontre avec des enseignants de maternelle de l'enseignement public (en milieu défavorisé REP+) qui expérimentent cette pédagogie dans leur classe. Soucieux d'évaluer leur enseignement, ils nous ont demandé si nous pouvions construire et mettre en place un protocole de recherche pour évaluer les effets de leur enseignement avec la pédagogie Montessori sur les apprentissages.

L'objectif principal de notre projet de recherche est donc de savoir si l'utilisation de la méthode Montessori en école maternelle peut avoir des effets bénéfiques par rapport à l'école « traditionnelle » pour les enfants français issus de milieu socio-économique défavorisé. La méthodologie de recherche consiste en une double étude, transversale et longitudinale, sur un échantillon randomisé et contrôlé d'enfants dans une école maternelle publique de milieu défavorisé (Ecole Maternelle Ambroise Croizat à Vaulx-en-Velin). L'étude transversale a pour but d'évaluer l'impact cognitif de l'approche Montessori sur des élèves de maternelle d'une même classe d'âge. Nous comparons ainsi les compétences mathématiques, les compétences verbales, les compétences sociales et les compétences de contrôle exécutif d'enfants de 5 à 6 ans des classes Montessori à celles d'enfants du même âge dans des classes « traditionnelles ». L'étude longitudinale a pour objectif d'évaluer l'impact de l'approche Montessori sur le développement cognitif des élèves de maternelle pendant 3 ans. Chaque année, nous testons ainsi tous les enfants de 3 à 6 ans de l'école et nous suivons ces enfants longitudinalement pendant 3 ans à l'aide des mêmes tests. Nous comparons les gains à ces tests année après année des enfants des classes Montessori et des enfants de classes « traditionnelles » de même âge.

Pour évaluer les capacités cognitives des enfants dans cette méthodologie, nous utilisons des outils relevant de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques. En effet, nous testons les capacités verbales, sociales et le contrôle exécutif (Diamond, 2013) à l'aide de tests standardisés et normés, utilisés en psychologie cognitive (par exemple, un subtest de l'Evaluation du Langage Oral de Khomsi (2001); deux subtests de l'Evaluation Des fonctions cognitives et Apprentissages de Billard & Touzin (2012)). Ces tests, sans effet plafond (Heissling, Traxel, & Schmidt, 2004), que nous re-proposons chaque année à tous les enfants de l'échantillon, évaluent, d'une part les évolutions d'un même enfant sur les trois années de l'étude, et d'autre part les performances des enfants par rapport à une population de référence (de même âge). Ils permettent également de faire une étude comparative des deux publics (Montessori versus « Traditionnel »). Les résultats sont analysés avec des méthodes statistiques (tests inférentiels paramétriques ou non paramétriques et statistiques bayésiennes). Les compétences mathématiques sont évaluées de deux manières différentes : avec un sous-test d'une batterie de tests standardisée et normée (Woodcock-Johnson-III de Woodcock, McGrew, & Mather (2001)) et avec une évaluation diagnostique sur les compétences numériques du cycle 1. Cette évaluation diagnostique a été élaborée par nos soins, en appui sur des recherches en didactique des mathématiques ((ERMEL, 1995; Laurençot-Sorgius, Vaultrin, & Bergeaut, 2008; Margolinas & Wozniak, 2012; *Spécial Grand N Maternelle : Approche du nombre, Tome 1*, 2001) et sur les attendus des programmes de cycle 1 de l'école maternelle (MEN, 2015). L'enjeu de cette évaluation diagnostique est de mener une étude qualitative des compétences numériques des élèves des classes de maternelle impliquées dans la recherche en analysant plus précisément la maîtrise des concepts en jeu (par exemple les procédures mises en œuvre par les élèves, les erreurs effectuées, etc.). Ces analyses seront complétées par une étude didactique complémentaire : celle des ateliers mathématiques Montessori, du point de vue du savoir, de l'activité de l'élève et du rôle de l'enseignant. Nous pensons que ces analyses permettront d'apporter des éléments de compréhension sur la nature de la construction du nombre dans cette pédagogie. C'est dans ce cadre-là que nous avons présenté cet atelier à la COPIRELEM.

II - LA PEDAGOGIE MONTESSORI

Dans cette partie, nous présentons en quelques mots les grands principes de la pédagogie Montessori puis nous détaillons la vision des mathématiques de Maria Montessori. Enfin, nous présentons les ateliers de mathématiques pour les enfants de 3 à 6 ans ainsi que la progression associée.

1 Principes de la pédagogie Montessori

La pédagogie Montessori tient son nom de la médecin italienne, Maria Montessori, qui l'a développée à partir du début du 20e siècle. Maria Montessori s'est d'abord intéressée à la pédagogie lorsqu'elle a travaillé auprès d'enfants déficients intellectuels en hôpital psychiatrique. Puis, on lui a proposé d'ouvrir une école maternelle pour des enfants sains d'un quartier défavorisé. Elle a alors profité de cette opportunité pour faire de cette école une salle d'expérimentation où elle observait les enfants travailler avec différents matériels qu'elle leur proposait. De cette observation, elle a déduit des conditions favorables à l'apprentissage du jeune enfant et c'est ainsi qu'elle a mis au point sa méthode pédagogique.

Néanmoins, plus qu'une méthode, Maria Montessori a proposé des principes de développement de l'enfant sur lesquels elle a basé sa philosophie d'enseignement. D'abord, elle a décrit que l'enfant nait doté d'un « esprit absorbant » (Montessori, 1959, 2010) et d'une motivation à apprendre qui le pousse à explorer son environnement et à s'y adapter de plus en plus consciemment. Ensuite, que lors de cette exploration, l'enfant passe par des « périodes sensibles » (Montessori, 1936, 2016a) au cours desquelles il est particulièrement attiré par certains apprentissages et donc réceptif à les assimiler facilement et rapidement. Enfin, elle a avancé que tous les enfants ne progressent pas au même rythme et qu'il faut donc permettre à ces derniers d'exploiter leurs périodes sensibles au moment adapté.

Dans la salle de classe, ces principes se traduisent par plusieurs spécificités concernant l'environnement offert aux enfants et la posture de l'enseignant. L'environnement est une classe multi-âge d'enfants qui travaillent en autonomie, les concepts académiques à partir d'un matériel allant du concret vers l'abstrait. Le matériel est d'abord manipulable puis progressivement les enfants s'en détachent jusqu'à passage à l'écrit. Chaque matériel est laissé à disposition des enfants en exemplaire unique et organisé spécifiquement dans la classe selon le domaine de compétence et son degré d'abstraction. Le fonctionnement en autonomie est régi par des règles universelles, qui encouragent la collaboration entre les enfants et la discipline sans récompenses ni punitions. L'adulte a une connaissance étendue de ces règles et adopte une posture de médiateur entre l'enfant et son environnement. Par exemple, il propose aux enfants de longues plages horaires de travail sans interruption pendant lesquelles il leur présente individuellement les activités qui correspondent à leur niveau de progression, les aide lorsqu'ils le sollicitent et se met en retrait pour observer ses élèves et tenter de repérer leurs périodes sensibles (Montessori, 1909, 2015).

2 La pédagogie Montessori et les mathématiques

Pour Maria Montessori, l'esprit humain est un « esprit mathématique », c'est-à-dire qu'il a la capacité, d'une part à imaginer et d'autre part à abstraire.

> *L'esprit est naturellement porté à distinguer les qualités [par exemple couleur, son, forme] indépendamment des objets. […] Cet esprit n'a pas seulement la possibilité d'imaginer, qui permet de voir ce qui ne se perçoit pas directement, mais il possède la possibilité de synthétiser, d'extraire des innombrables choses qu'il rencontre autour de lui [des qualités]. Cette propriété dirige naturellement l'esprit vers les abstractions.* (Montessori, 2010, p. 148)

Cet esprit mathématique « se construit à travers l'exactitude » (*Ibid.* p.148), c'est-à-dire l'ordre et la précision. Pour cela, Maria Montessori a construit un matériel, qu'elle qualifie d'*abstractions matérialisées*, dans le sens où la matérialisation permet à l'enfant d'accéder à l'abstraction. Abstraire, c'est isoler mentalement une propriété d'un objet afin de la considérer pour elle-même. Par exemple, présenter plusieurs objets identiques qui ne se différencient que par leur couleur puis manipuler et expérimenter sur ces objets (former des paires d'objets de même couleur par exemple) permet à l'enfant d'isoler la notion de couleur et de la travailler pour elle-même. Le matériel proposé décompose ainsi les concepts en éléments simples et isolés les uns des autres. Chaque matériel fait travailler un de ces éléments et chaque élément n'est travaillé que dans un seul matériel (cf. la présentation des ateliers de première numération ci-dessous). L'enfant explore alors sensoriellement des notions abstraites, séparément, ce qui lui permet ensuite de les catégoriser puis de les abstraire. Petit à petit il va se détacher du matériel, c'est en ce sens que la pédagogie Montessori parle de passage à l'abstraction.

Pour Maria Montessori, la rencontre avec les mathématiques débute très tôt, avec l'utilisation du matériel de vie pratique. Ces ateliers aident l'enfant à perfectionner la coordination de ses mouvements, à agir avec précision et développent sa concentration. Par exemple, le matériel appelé « les cadres » isole une technique d'habillement particulière (boutons, bouton-pression, fermeture éclair, nœuds, etc.) et permet à l'enfant de se perfectionner dans chaque technique en répétant le mouvement de nombreuses fois, l'aidant par ailleurs à devenir autonome pour s'habiller. Puis la rencontre avec les mathématiques se poursuit avec le matériel sensoriel qui permet à l'enfant d'abstraire de manière sensorielle et matérialisée certains concepts, tels que la couleur, le poids, la forme, la texture, la taille, le son ou encore l'odeur. Chaque matériel sensoriel isole l'une de ces « qualités »[2], en éliminant ou en minimisant les autres. Par exemple, le matériel « les barres rouges » (cf. figure 2) permet à l'enfant de reconnaître les différences de longueur. En effet, dans cet atelier, l'enfant doit placer les barres rouges (même forme – prisme rectangulaire à section carrée, même couleur, même taille de section, même matériau mais longueur différente) dans un ordre précis : de la plus petite (qui mesure 10 cm) à la plus grande (qui mesure 1m).

[2] Terme utilisé par Maria Montessori.

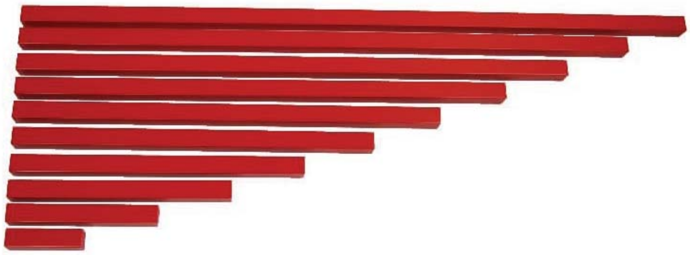


Figure 2. Les barres rouges Montessori

Pour Maria Montessori, ce matériel en particulier donne à l'enfant les bases sensorielles pour appréhender les quantités. Ensuite les mathématiques sont travaillées *pour elles-mêmes* à travers un matériel spécifique appelé « matériel de mathématiques ». Ce matériel est présenté à l'enfant lorsqu'il a manipulé la majorité du matériel de vie pratique et du matériel sensoriel. Le matériel de mathématiques isole certaines notions mathématiques, telles que les quantités, les symboles ou la parité, ce qui va permettre à l'enfant d'analyser chacune de ces propriétés présentées séparément par un matériel concret (cf. la présentation des ateliers de première numération ci-dessous).

Dans les nombreux ouvrages publiés par Maria Montessori plusieurs concernent les mathématiques. Dans *Pédagogie Scientifique Tome 1*, livre qui présente la démarche scientifique menée pour construire puis théoriser sa pédagogie, quelques pages sont consacrées aux mathématiques (Montessori, 1909, 2015, pp. 202–220). Elle y présente les premiers ateliers de numération en donnant quelques conseils de mise en œuvre en classe. Plus tard, deux ouvrages sont entièrement consacrés aux mathématiques, il s'agit de *Psicoarithmética* et *Psicogeometria* (Montessori, 1934a, 1934b). Dans ces deux livres, Maria Montessori présente l'ensemble du matériel mathématique qu'elle a construit et détaille les concepts mathématiques travaillés. Elle précise ainsi quel élément du concept est isolé et travaillé dans chaque atelier.

3 Les ateliers mathématiques 3-6 ans

Les ateliers de mathématiques dans la pédagogie Montessori visent dès la maternelle l'introduction de la numération décimale et du calcul. Pour cela, les premiers principes d'enseignement sont les suivants : exposer d'abord l'enfant aux quantités, puis aux symboles et enfin à l'association entre les quantités et les symboles. Viendront ensuite la présentation du système décimal, les quatre opérations et les fractions (Montessori, 2016c, p.11).

Comme cela a été écrit plus haut, le matériel de mathématiques élaboré par Maria Montessori décompose les concepts en éléments simples et isolés les uns des autres. Chaque matériel est alors inséré dans une progressivité et ne peut être utilisé que si l'élément de concept travaillé précédemment est acquis. Par exemple, le premier atelier permet d'appréhender la notion de quantité avec une grandeur continue, le second atelier confronte l'enfant aux symboles de l'écriture chiffrée puis le troisième à l'association d'une quantité à un symbole. Ces ateliers doivent être utilisés dans cet ordre précis. Viennent ensuite des ateliers sur la notion de quantité avec des collections discrètes (cf. ci-dessous).

L'Association Montessori Internationale[3] (AMI) propose un classement du matériel de mathématiques pour les enfants de 3 à 6 ans en six catégories[4], à l'intérieur desquelles plusieurs ateliers se suivent. Cette classification est la suivante :

- **Première numération de 1 à 10** – 6 ateliers
    - Les barres numériques (barres rouges et bleues)
    - Les chiffres rugueux
    - L'association des barres numériques et des chiffres
    - Les fuseaux

[3] L'Association Montessori Internationale a été créée en 1929 par Maria Montessori et a pour buts de promouvoir et défendre la pédagogie de Maria Montessori mais aussi de former des éducateurs à cette pédagogie. Ses membres sont principalement des éducateurs Montessori, des formateurs Montessori ou des parents.

[4] A consulter sur https://www.montessori-france.asso.fr/page/166600-la-charte-qualite (consultée le 30/12/17).

  - Le jeu des jetons
  - Le jeu de mémoire des nombres
- **Le système décimal** – 6 ateliers
  - Premier Plateau : présentation des quantités
  - Les symboles
  - Deuxième plateau : la formation des grands nombres
  - Les opérations avec le système décimal : matériel du système décimal pour les opérations
  - Les timbres
  - La Table des points
- **La numération suite** – 6 ateliers
  - Numération de 11 à 19 : les perles de couleur
  - La première table de Seguin
  - La deuxième table de Seguin
  - La Chaîne de 100
  - La Chaîne de 1000
  - Le meuble des perles de couleurs (compter en sautant)
- **La mémorisation des opérations** – 11 ateliers
  - Le serpent de l'addition
  - Le Tableau d'addition
  - Les Tables de mémorisation de l'addition 1, 2, 3,4 avec contrôles (1 et 2)
  - Le serpent de la soustraction
  - Le Tableau de la soustraction
  - Les Tables de mémorisation de la soustraction 1 et 2 et contrôle (1)
  - Les perles de couleur (mémorisation de la multiplication)
  - Le tableau de la multiplication
  - Les Tables de mémorisation de la multiplication 1, 2,3 et contrôles (1 et 2)
  - Le Tableau de division
  - Les Tables de mémorisation de la division 1 et 2
- **Passage à l'abstraction** – 4 ateliers
  - Le petit boulier
  - Le matériel des hiérarchies
  - Le grand boulier
  - La grande division avec tubes
- **Les fractions** – 1 atelier
  - Les fractions

La progression s'effectue dans cet ordre-là, même si certains ateliers peuvent être utilisés en parallèle (par exemple les barres numériques et les chiffres rugueux). Dans la suite de cet article, nous présentons uniquement les six ateliers de première numération[5] de 1 à 10.

III - LES ATELIERS DE PREMIERE NUMERATION

Le cœur de l'atelier proposé au colloque était de faire découvrir aux participants quelques ateliers de mathématiques de la pédagogie Montessori et d'engager une première réflexion didactique sur les mathématiques travaillées. Nous leur avons donc proposé de manipuler différents matériels en petits groupes et d'essayer de répondre aux questions suivantes : Quelle(s) notion(s) mathématique(s) est (sont) sous-jacente(s) ? Quels peuvent être les objectifs d'apprentissage ? Quelles peuvent-être les tâches

[5] Dans la suite, lorsque nous utilisons ces termes « ateliers de première numération », nous faisons référence aux ateliers de Maria Montessori.

des élèves ? Quelle(s) consigne(s) donneriez-vous aux élèves ? Quelle progression proposeriez-vous pour ces ateliers ?

Le matériel proposé était le suivant :

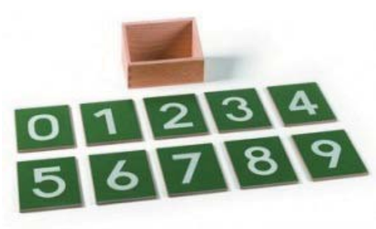
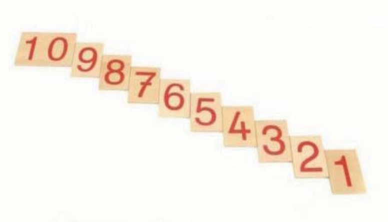
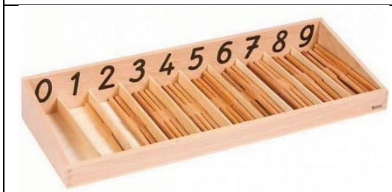
 *NB : Le matériel proposé était similaire à celui recommandé par l'AMI pour la matière et les couleurs. En revanche, il n'était pas à l'échelle. Normalement chaque unité mesure 10cm, ici, elle mesurait 1cm (ce qui modifie la manipulation).*	 *NB : Le matériel proposé n'était pas similaire à celui proposé par l'AMI (matières différentes) et il a été acheté dans le commerce.*	 
Les barres numériques	Les chiffres rugueux	Association barres numériques et chiffres[6]
 *NB : Le matériel proposé était celui recommandé par l'AMI et acheté chez un fournisseur agréé par l'AMI.*	 *NB : Le matériel proposé a été acheté dans le commerce, il semble fidèle mais n'est pas une reproduction agréée par l'AMI.*	 *NB : le matériel proposé se limitait à des étiquettes faites par nos soins. L'AMI ne recommande pas particulièrement de matériel spécifique pour cet atelier.*
Les fuseaux	Le jeu des jetons	Le jeu de mémoire des nombres

Figure 3. Matériels des ateliers de première numération

Nous développons ci-dessous les réponses à ces questions à partir des écrits de Maria Montessori (Montessori, 2015, 2016c). Pour chaque atelier, nous détaillons le matériel de l'atelier, le lien qu'il a avec d'autres ateliers, les objectifs mathématiques principaux et secondaires, la notion mathématique spécifiquement travaillée et des éléments de la présentation de l'atelier faite par l'enseignant à l'enfant, notamment la « leçon en trois temps ». Précisons que cette « leçon en trois temps » est utilisée pour « fixer les idées de l'enfant en lui apprenant une nomenclature exacte » (Montessori, 2016b, p. 104). Maria Montessori a repris cette méthode d'Edouard Seguin[7]. Comme son nom l'indique, elle s'opère en trois étapes et individuellement. Dans le premier temps - « le mot », l'éducateur donne le nom précis de l'objet à l'enfant. Dans le second temps - « la reconnaissance », l'éducateur demande à l'enfant de donner ou montrer l'objet qui possède la caractéristique qu'il est en train d'apprendre. Enfin, dans le troisième temps - « la prononciation du mot », c'est l'éducateur qui montre l'objet et demande à l'enfant de le nommer pour vérifier qu'il a bien appris le mot (Montessori, 2016b).

[6] Vocabulaire utilisé couramment dans la pédagogie Montessori (voir par exemple (Montessori, 2015)).

[7] Edouard Seguin (1812-1880) est un psychiatre français, ayant exercé surtout aux Etats-Unis et connu pour ses travaux pionniers au 19e siècle dans l'éducation des enfants déficients mentaux.

1 Atelier 1 : Les barres numériques

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Cet atelier est le premier atelier de mathématiques proposé pour les 3-6 ans. Il fait suite à un atelier de vie sensorielle : les barres rouges (cf. figure 2). Les barres numériques (ou appelées aussi barres rouges et bleues) ont des caractéristiques communes avec les barres rouges (même forme – prisme rectangulaire à section carrée, même longueur, même taille de section, même matériau) et une « qualité » différente : chaque barre est colorée avec une alternance de rouge et de bleu tous les 10 cm (cf. figure 4). Avec les barres rouges, l'enfant aura appris à les distinguer selon leur longueur et à les ordonner de la plus petite longueur à la plus grande longueur. Cela lui permet ainsi d'effectuer la première tâche de l'atelier des barres numériques : placer les barres en « escalier » en alignant le côté rouge à gauche.

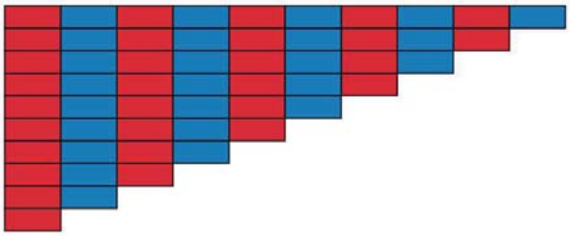


Figure 4. Rangement en « escalier » des barres numériques

Les objectifs mathématiques principaux de cet atelier sont l'introduction des quantités de 1 à 10 et la désignation des quantités de 1 à 10. Deux objectifs mathématiques secondaires sont précisés : l'introduction au concept de l'unité (préparation au système décimal) et la mémorisation de la suite des nombres de 1 à 10. Pour Maria Montessori, la « qualité » travaillée avec ce matériel est la quantité (Montessori, 2016c). Dans *Pédagogie scientifique tome 1*, elle précise qu'une difficulté de la numération réside dans la compréhension de l'augmentation d'une collection à chaque fois qu'on ajoute une unité (Montessori, 2015). Autrement dit, il s'agit de comprendre que tout nombre s'obtient en ajoutant un et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente. Pour faciliter cet apprentissage, elle propose alors une présentation des quantités avec une grandeur continue (la longueur). En effet, le fait que les unités soient réunies mais distinctes (grâce à l'alternance des couleurs) sur chaque barre, associé au fait de ranger les barres dans un ordre précis, permet de voir (visuellement et par le toucher) que la quantité augmente lorsqu'on ajoute 1 (une unité). Pour Maria Montessori, ce matériel facilite la compréhension du concept de quantité et met en évidence les relations entre les quantités. De plus, il permet à l'enfant d'apprendre à compter.

La présentation[8] de l'atelier à l'enfant par l'enseignant consiste d'abord à demander à l'enfant de ranger les barres dans un ordre précis (voir figure 4) puis à proposer une leçon à trois temps :

Temps 1 : Prendre la barre de 1, pointer la section et dire « c'est 1 ». Prendre la barre de 2, dire « c'est 2 » puis pointer chaque section en disant « 1, 2, c'est 2 ». Faire de même pour les barres suivantes. Proposer ensuite à l'enfant de le faire.

Temps 2 : Reposer les barres devant l'enfant, dans l'ordre puis lui demander "montre-moi 1, montre-moi 2, montre-moi 3". Ensuite faire de même en plaçant les barres dans le désordre. Faire les demandes dans l'ordre (1-2-3) puis dans le désordre (par exemple 3-1-2).

Temps 3 : Demander à l'enfant "Qu'est-ce que c'est ?" en montrant les barres une par une. Les barres sont d'abord placées devant l'enfant dans l'ordre puis en désordre. Les questions portant sur les quantités se posent également d'abord dans l'ordre puis dans le désordre.

Notons que lors de la première présentation du matériel, seules les barres de 1, 2 et 3 seront présentées à l'enfant.

---

[8] Source consultée le 30/12/17 : http://albummontessori.blogspot.fr/

Il s'agit d'un blog écrit par une éducatrice Montessori formée par l'AMI. Elle a rendu public ses « albums », c'est-à-dire la présentation des différents ateliers Montessori. Il semble qu'ils soient assez représentatifs de ce qui est dispensé dans les formations AMI.

2 Atelier 2 : Les chiffres rugueux

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Le matériel de cet atelier est composé de dix cartes présentant l'écriture chiffrée des nombres de 0 à 9 en papier de verre (cf. figure 3). Cet atelier peut être introduit en parallèle de l'atelier précédent. Un matériel similaire est également utilisé par les enfants pour apprendre les lettres (*i.e.* les lettres rugueuses).

L'objectif mathématique principal de cet atelier est la reconnaissance des nombres de 1 à 10 à partir de leur écriture chiffrée. Le caractère rugueux des chiffres a été pensé par Maria Montessori pour faciliter cette reconnaissance par la vue et par le toucher. L'objectif mathématique secondaire est la préparation à l'écriture des nombres grâce au toucher. Pour Maria Montessori, cet atelier est nécessaire pour ensuite travailler l'association entre les quantités et les symboles numériques (Montessori, 2016c, p. 5).

La présentation[5] de l'atelier à l'enfant par l'éducateur consiste en une leçon à trois temps :

Temps 1 : Prendre une carte et toucher l'écriture en papier de verre avec l'index et le majeur, dans le sens de l'écriture, et dire pour le 5, "5 c'est 5". Proposer à l'enfant de le faire.

Temps 2 : Demander à l'enfant "Montre-moi 5", « Montre-moi 6 », dans l'ordre puis dans le désordre.

Temps 3 : Demander à l'enfant " Qu'est-ce que c'est ?" en pointant une carte (par exemple la carte où il y a le 5), dans l'ordre puis dans le désordre.

La première présentation de cet atelier ne propose que trois cartes à la fois. Les nombres ne sont pas nécessairement présentés dans l'ordre et ceux qui se ressemblent ne sont pas présentés en même temps (le 6 et le 9 par exemple). Enfin, le 0 n'est introduit qu'une fois l'atelier des fuseaux présenté (cf. ci-dessous).

3 Atelier 3 : Association barres numériques / symboles numériques

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Le matériel de cet atelier se compose, d'une part des barres numériques, et d'autre part de petits cartons présentant les écritures chiffrées des nombres de 1 à 10 (cf. figure 3). Cet atelier est nécessairement présenté après les deux premiers ateliers (barres numériques et chiffres rugueux). En effet, il nécessite une bonne connaissance des quantités, introduite par les barres numériques, et des symboles en écriture chiffrée, introduits avec les chiffres rugueux.

L'objectif mathématique principal de cet atelier est la construction du lien entre quantité et symbole grâce au comptage. Les objectifs mathématiques secondaires sont doubles : d'une part préparer aux opérations et d'autre part introduire le système décimal.

La présentation de l'atelier à l'enfant, se fait en plusieurs étapes. Nous en donnons quelques-unes ci-dessous[9] :

1e présentation : Poser les barres numériques dans le désordre. Prendre le carton 10 et le poser devant l'enfant. Montrer la barre correspondante et inviter l'enfant à compter en la touchant (toucher chaque section rouge et bleue). Déposer le carton 10 au bout de la barre correspondante (à droite). Prendre le carton 7, le poser devant l'enfant. Lui demander de trouver la barre correspondante puis de déposer le carton au bout. Faire de même avec les autres cartons.

2e présentation : Les barres numériques sont posées en désordre sur un premier tapis et les cartons avec les écritures chiffrées sont déposés sont un second tapis éloigné. Prendre un carton, le montrer à l'enfant et lui demander d'aller chercher la barre correspondante puis déposer le carton au bout de la barre numérique. Continuer avec les autres cartons. Les barres numériques et les cartons doivent être placés comme en figure 5.

[9] Pour plus de détails, consulter le site http://albummontessori.blogspot.fr/

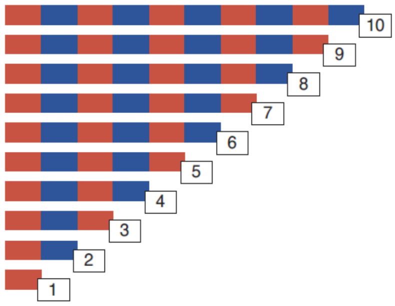


Figure 5. Association quantité/symbole

3[e] présentation : Les barres numériques sont posées en désordre sur un premier tapis et sur un second tapis éloigné sont déposés les cartons avec les écritures chiffrées. Montrer une barre numérique à l'enfant et lui demander d'aller chercher le carton avec l'écriture chiffrée correspondante. Lui faire lire les nombres dans l'ordre puis dans le désordre.

L'atelier évolue ensuite vers d'autres tâches et en particulier vers les compléments à 10 (Montessori, 2016c, p. 7) : si on met la première barre à la suite de la neuvième barre, on obtient 10. De même pour 8 + 2, 7 + 3 et 6 + 4.

4 Atelier 4 : Les fuseaux

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Le matériel de cet atelier est composé d'une boite compartimentée en 10 cases (numérotées de 0 à 9), de 45 fuseaux et de 10 élastiques (ou rubans) (cf. figure 3). L'exercice consiste à placer dans chaque compartiment, en les comptant un à un, la quantité de fuseaux correspondante au nombre indiqué. Après vérification qu'aucune erreur de comptage n'ait été commise, chaque groupe de fuseaux est attaché avec un ruban[10]. Cet atelier est présenté après l'atelier de l'association des barres numériques et des écritures chiffrées. En effet Maria Montessori précise que cet atelier est un « test de l'expérience acquise avec les barres numériques, dans la mesure où l'enfant reconnaît le nombre et, sans incitation, regroupe les fuseaux nécessaires pour le représenter » (Montessori, 2016c, p. 10). Contrairement à l'atelier précédent, les symboles sont proposés dans un ordre fixe et les quantités sont mobiles, c'est-à-dire que les unités sont séparées et non fixées.

Les objectifs mathématiques principaux de cet atelier sont la constitution du nombre à partir des unités distinctes, la reconnaissance de 0 comme désignation d'une quantité nulle et la compréhension du concept de cardinalité. Les objectifs secondaires sont le renforcement de la mémorisation de la séquence des nombres et la préparation au calcul mental. La notion mathématique travaillée est la quantité, via des objets discrets. Maria Montessori précise en effet que ce deuxième atelier répète le comptage des unités (pour les nombres de 0 à 9) déjà effectué avec les barres numériques mais qu'avec cet atelier, les unités sont représentées par des objets identiques mais séparés (Montessori, 2016c, p. 9). Ainsi il est conçu pour que l'enfant découvre que des quantités discrètes peuvent former une collection et correspondent à un symbole. De plus, elle précise que ce matériel propose à l'enfant les symboles numériques inscrits au-dessus des compartiments comme point de départ et non la quantité comme c'est le cas avec les barres numériques. Enfin, les fuseaux attirent l'attention de l'enfant sur le premier nombre de la série : le zéro, qui ne correspond à aucune quantité car il n'y a aucun fuseau.

La présentation[11] de l'atelier à l'enfant, par l'éducateur, s'effectue de la manière suivante : nommer le matériel puis inviter l'enfant à lire les nombres inscrits sur les casiers. Ensuite prendre un fuseau, le nommer "1" puis le mettre dans le casier 1. Prendre deux fuseaux, l'un après l'autre en comptant et les mettre dans le casier 2 puis les assembler avec un élastique. Proposer à l'enfant de terminer le rangement des fuseaux dans les casiers. A la fin, lui faire constater que dans le casier 0, il n'y a aucun fuseau.

---

[10] Aujourd'hui les rubans sont remplacés par des élastiques.

[11] Source consultée le 30/12/17 : http://albummontessori.blogspot.fr/

5 Atelier 5 : Le jeu des jetons

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Le matériel de cet atelier se compose de 55 jetons et de chiffres en bois[12] (symboles en écriture chiffrée), de 1 à 10 (cf. figure 3). L'exercice consiste à placer les chiffres en bois dans le bon ordre (de 1 à 10) puis à associer à chacun le nombre correspondant de jetons. Les jetons doivent être mis selon une configuration précise : par rangées de deux (cf. figure 6). Cet atelier est présenté après les fuseaux car là, les symboles et les quantités sont mobiles en même temps. De plus, Maria Montessori précise que « cet exercice est un test pour vérifier si l'apprentissage s'est effectué, c'est-à-dire si la séquence des nombres est connue ainsi que leur association avec la quantité qu'ils représentent » (Montessori, 2016c, p. 10).

Les objectifs mathématiques principaux de cet atelier sont le renforcement de la connaissance qu'un nombre est constitué d'unités distinctes, la vérification de la connaissance de la séquence des nombres, le renforcement de la maîtrise de la cardinalité et de l'ordinalité et la compréhension du concept de pair et impair. Un objectif mathématique secondaire est précisé : la préparation à la division par 2.

La présentation[9] de l'atelier à l'enfant, par l'éducateur consiste en plusieurs étapes dont une leçon à trois temps :

Etape 1 : inviter l'enfant à mettre les chiffres en bois dans l'ordre, les uns à côté des autres puis lui demander de lire la séquence.

Etape 2 : Inviter l'enfant à poser la quantité de jetons correspondant sous les nombres, de façon ordonnée, en commençant par le 1. Lui montrer si nécessaire comment les placer (comme sur la figure 6).

Figure 6. Configuration des jetons

Etape 3 : une leçon en trois temps pour introduire le concept de parité.

Temps 1 : Séparer, quand cela est possible, les jetons en deux colonnes et déplacer le nombre correspondant vers le haut. Nommer les nombres pairs, en glissant l'index entre les deux colonnes de jetons (« ça passe »), et dire "Pair". Montrer les nombres impairs et dire "Impair" (on ne peut pas passer le doigt « ça coince »). Dire "2, 4, 6, 8, 10, c'est pair, pair c'est toujours par deux, on peut passer le doigt". Inviter l'enfant à répéter. Dire "1, 3, 5, 7, 9, c'est impair". Inviter l'enfant à répéter.

Temps 2 : Demander à l'enfant "Montre-moi un nombre pair, un nombre impair".

Temps 3 : Demander à l'enfant "Qu'est-ce que c'est ?" en montrant un nombre. L'enfant doit répondre pair ou impair.

L'atelier peut évoluer : l'enseignant peut inviter l'enfant à compter de deux en deux ; lui demander, sans compter, de déterminer si un tas de jetons représente un nombre pair ou impair ou encore de construire une collection de jetons correspondante à une écriture chiffrée.

6 Atelier 6 : Le jeu de mémoire des nombres

Explicitation du matériel de l'atelier et lien avec d'autres ateliers : Le matériel de cet atelier se compose de plusieurs étiquettes où, sur chacune, est inscrit un nombre en écriture chiffrée (entre 0 et 10) et d'objets divers (cf. figure 3). Cet atelier est proposé lorsque les enfants reconnaissent les nombres écrits et que leur signification numérique leur est connue.

Les objectifs mathématiques principaux de cet atelier sont de renforcer la notion de nombre, et d'aider l'enfant à transférer la connaissance du nombre d'un matériel pédagogique à des objets de la vie quotidienne. L'objectif mathématique secondaire est d'entrainer la mémoire de l'enfant.

[12] Dans Psychoarithmetic, Maria Montessori décrit le matériel avec 45 objets et les symboles de 0 à 9.

La présentation[13] de l'atelier par l'éducateur consiste à inviter l'enfant à tirer une étiquette et puis à aller chercher la quantité d'objets équivalente au nombre inscrit sur le papier. Les collections d'objets sont déjà préparées sur le bureau de l'éducateur. L'enfant doit choisir la collection dont la quantité d'objets correspond au nombre tiré, l'étiquette étant restée à sa place. Ensuite, il pose les objets sur la table, dans la même configuration que les jetons (cf. figure 6) puis l'éducateur vérifie. Précisons que cet atelier n'est pas présenté dans *Psychoarithmetic* (Montessori, 2016c) mais dans *Pédagogie scientifique, Tome 1* (Montessori, 2015) où Maria Montessori détaille la mise en œuvre de cet atelier[14].

Pour Maria Montessori, la progressivité de ces ateliers repose sur les éléments suivants : d'abord on présente la représentation d'une quantité et les symboles numériques séparément (par les barres numériques et les chiffres rugueux), puis on travaille l'association entre quantités et symboles numériques (barres numériques et symboles numériques), ensuite on demande de déterminer la quantité correspondante à un symbole numérique (les fuseaux) puis de construire la séquence des nombres avec la quantité qui leur correspond (le jeu des jetons) et enfin, de reconnaitre une collection d'objets divers correspondante à un cardinal donné où le nombre est écrit en chiffre (le jeu de mémoire) (Montessori, 2016c, p. 11). Selon elle, ces six ateliers constituent la période pré-élémentaire de l'arithmétique (*Ibid.*, p.11) et permettent à l'enfant d'acquérir les notions fondamentales pour débuter l'apprentissage du calcul.

Dans la suite de cet article, nous proposons une réflexion didactique sur ces ateliers en effectuant une synthèse de nos premiers résultats de recherche et des discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier du colloque.

IV - PREMIERES REFLEXIONS DIDACTIQUES SUR CES ATELIERS

Nous n'avions volontairement pas précisé aux participants la manière dont les élèves utilisent ce matériel dans la pédagogie Montessori, ni détaillé le rôle de l'enseignant. Nous voulions en effet que les participants imaginent les potentialités du matériel et des situations d'apprentissage possibles.

A propos de l'atelier 1 – les barres numériques, les participants ont questionné l'apport des couleurs alternées et la pertinence de présenter les quantités avec une grandeur continue (longueur). Certains ont envisagé d'appréhender la notion de parité à l'aide des couleurs alternées (les barres représentant un nombre pair ont autant de tronçons rouges que bleus, les barres représentant un nombre impair ont un tronçon rouge de plus). La configuration précise (cf. figure 4) de rangement en escalier a été envisagée, sans toutefois accorder une grande importance à l'alignement des tronçons rouges à gauche ou la disposition de l'escalier avec la petite marche en bas.

Pour l'atelier 2 – chiffres rugueux, l'ensemble des participants a imaginé l'objectif de ce matériel : toucher sensoriellement les chiffres rugueux, avec pour objectif la préparation à l'écriture chiffrée, le nom des nombres et éventuellement l'ordre des premiers nombres de la comptine numérique. Plusieurs participants ont mentionné l'absence de signe pour montrer le sens de l'écriture (par exemple une flèche, une gommette rouge pour le départ, verte pour l'arrivée, etc.), indice utilisé par de nombreux professeurs des écoles utilisant un matériel similaire mais non associé à la pédagogie Montessori. L'intérêt de ce matériel a été mis en évidence : il permet de mettre en relation différentes désignations du nombre (écrite et orale) en mobilisant trois sens (vue, toucher et ouïe).

Pour l'atelier 3 – association barres numériques et symboles, les participants se sont posés plusieurs questions sur la place de cet atelier dans les apprentissages numériques : est-ce le premier matériel de mathématique proposé en petite section ? Est-ce le premier matériel de numération ? Est-ce qu'ils ont déjà travaillé l'association quantité-symbole avant ?

En ce qui concerne l'atelier 4 – les fuseaux, les participants ont imaginé facilement la tâche de l'enfant : réaliser une collection d'objets d'un cardinal donné. Ils ont envisagé plusieurs procédures-élèves : mettre

[13] Source : (Montessori, 2015).

[14] La présentation de cet atelier est toutefois très succincte et il est difficile de comprendre les différentes étapes de sa mise en œuvre. Par exemple, il n'est pas clair que les collections soient toujours préparées à l'avance sur le bureau de l'enseignant. Dans ce cas, il pourrait s'agir de réaliser une collection d'objets dont le cardinal est donné.

les fuseaux dans l'ordre des cases (croissant), dans l'ordre décroissant, dans un ordre aléatoire, en comptant un à un, en comptant par groupe, en ajoutant un à la collection précédente, en mettant l'élastique après réalisation d'une collection, ou à la fin quand toutes les cases sont remplies. Ils ont également questionné l'intérêt d'avoir un élastique pour lier les fuseaux dans chaque case.

Pour l'atelier 5 – le jeu des jetons, l'objectif mis en avant par les participants est la constitution d'une collection d'objets (les jetons) dont le cardinal est donné en écriture chiffrée. Ils n'ont pas évoqué de configuration particulière pour les jetons. L'ordre des nombres a été discuté sans que ce ne soit une nécessité pour construire les collections d'objets. Plusieurs ont évoqué le lien entre cet atelier et celui des fuseaux dans la mesure où l'objectif est le même. Il permet ainsi de proposer une autre représentation de la notion de quantité afin de mieux se l'approprier.

A propos de l'atelier 6 – le jeu de mémoire, les participants ont souligné l'existence de ce type de situation dans l'enseignement non montessorien et ont imaginé différentes situations (action, formulation, validation) avec ou sans éloignement dans l'espace, avec ou sans éloignement dans le temps, avec ou sans communication à autrui. Cependant la tâche de l'élève était plutôt de construire une collection correspondante à un cardinal donné et non une tâche de reconnaissance de collection d'un cardinal donné. Ils n'avaient en effet pas imaginé que les collections d'objets seraient déjà constituées. De plus, ils ont évoqué une diversité des objets au sein d'une collection, ce qui ne semble pas être le cas dans l'atelier imaginé par Maria Montessori.

D'une manière générale, nous avons pu observer que les participants ont :

- relevé une certaine richesse du matériel proposé pour travailler la notion de quantité et la construction d'une collection dont le cardinal est donné ;
- imaginé de nombreuses tâches mathématiques pour les élèves lors de la manipulation de ce matériel ;
- envisagé différentes modalités d'utilisation en classe de ce matériel.

A partir de ces réflexions et de leurs connaissances de la pédagogie Montessori, les participants nous ont posé de nombreuses questions sur la gestion de ces ateliers par les enseignants et sur les tâches mathématiques qui étaient sous la responsabilité des élèves. Afin d'apporter des premiers éléments de réponses, nous avons choisi de montrer quatre vidéos sur :

- Les tâches de l'élève dans l'atelier des barres numériques.
  Dans la vidéo[15]*, on voit un enfant manipuler les barres numériques pour les mettre dans l'ordre (cf. figure 4) puis les associer aux symboles numériques (cf. figure 5).*
- Les tâches de l'élève dans l'atelier des chiffres rugueux.
  Dans la vidéo[16]*, on voit différentes étapes liées à l'écriture chiffrée : chiffre rugueux, puis tracé dans la semoule, sur une ardoise, etc.*
- Les tâches de l'élève dans l'atelier des fuseaux.
  Dans la vidéo[17]*, on voit un enfant réaliser l'atelier des fuseaux, c'est-à-dire mettre le bon nombre de fuseaux dans chaque compartiment.*
- Une présentation[18] de l'atelier du jeu des jetons par une éducatrice Montessori à un enfant.

Nous avons choisi de montrer des vidéos pour plusieurs raisons. D'une part, nous voulions apporter des éléments de réponses précis sur les tâches des élèves dans ces ateliers de mathématiques, et d'autre part, nous voulions montrer un exemple de présentation d'atelier, tant cette pratique peut être loin des pratiques connues dans l'enseignement non montessorien. Enfin, nous voulions éveiller l'esprit critique des participants et susciter des discussions d'un point de vue didactique sur ces ateliers mathématiques, en partant d'une même référence. Cependant, il n'a pas été facile de choisir ces vidéos. En effet, peu de

[15] https://www.youtube.com/watch?v=NYKx8LIYkr4 (consultée le 10/06/17)
[16] https://www.youtube.com/watch?v=ttG7b9VEOEU (consultée le 10/06/17)
[17] https://www.youtube.com/watch?v=7ysRqkvl2r0 (consultée le 10/06/17)
[18] https://www.youtube.com/watch?v=fHz1fXo5E4A (consultée le 10/06/17)

vidéos montrant des ateliers de mathématiques sont disponibles en libre accès sur Internet. Cette contrainte nous a conduites à montrer des vidéos où les enfants savent visiblement déjà faire la tâche mathématique demandée. On ne capte ainsi pas un moment d'apprentissage en cours, on observe un apprentissage terminé. Pour la vidéo de la présentation, c'est la seule que nous avons trouvée qui met en scène une présentation d'atelier de mathématiques. Nous savions qu'elle serait clivante pour des formateurs[19], mais qu'elle permettrait justement de débattre et de soulever de nombreuses questions (telles que le contenu mathématique délivré, la nature de la validation ou encore l'institutionnalisation).

Après le visionnage des vidéos, les participants ont été étonnés de la « rigidité » que peuvent présenter ces ateliers dans la pédagogie Montessori en termes de consignes données par l'éducateur et tâches à réaliser par élève. Ils imaginaient une liberté plus grande de l'élève dans l'exploration du matériel. Certains ont questionné la dimension « résolution de problème » dans ces ateliers : permettent-ils de résoudre un problème en mettant en œuvre une démarche expérimentale ? Permettent-ils d'explorer plusieurs pistes de résolution possible ? Nous tenterons d'apporter quelques éléments de réponses à ces questions dans la partie suivante. La vidéo de présentation du jeu des jetons a effectivement entraîné de nombreuses réactions des participants. Plusieurs ont été « choqués » par certains éléments tels que :

- le contenu mathématique délivré (« chiffre pair, chiffre impair » - au lieu de nombre),
- le glissement de contrat – effet Topaze (Brousseau, 1998) : l'éducatrice montre avec insistance à l'enfant qu'il s'est trompé en pointant les jetons et il change sa réponse.
- la conclusion de la présentation – effet Jourdain (Brousseau, 1998) : L'éducatrice valide, comme si l'élève avait compris et précise : « voilà aujourd'hui tu as appris les chiffres pairs et impairs ».

De notre point de vue, ce qui nous étonne le plus dans cette vidéo, c'est, d'une part que le concept de parité est certes matérialisé (et en ce sens concret) mais pas du tout explicité, et d'autre part qu'il n'est pas compris (et encore moins acquis) par l'enfant. En effet, il semblerait qu'il doive découvrir tout seul, en étudiant le geste de l'éducatrice, que *pair* signifie « on peut partager les jetons en deux colonnes qui contiennent le même nombre de jetons » et *impair* signifie « ce n'est pas possible de partager les jetons en deux colonnes qui contiennent le même nombre de jetons », impossibilité matérialisée par le jeton qui est au milieu des deux colonnes. Or on observe bien, dans la leçon en trois temps que cette association n'est pas du tout comprise par l'enfant. En effet, il se trompe plusieurs fois lorsqu'il faut ensuite montrer un nombre pair ou impair et lorsqu'il faut dire si un nombre est pair ou impair (cf. annexe 1).

Même si nous ne pouvons pas nous baser sur quelques vidéos, qui plus est disponibles en libre accès sur Internet et qui semblent idylliques[20], de nombreuses questions se posent sur ces ateliers de mathématiques de la pédagogie Montessori : qu'apprend l'enfant en manipulant ce matériel ? Est-ce restreint à des gestes ? À un apprentissage de techniques ? Quel est le sens qu'il donne à ce qu'on lui montre ? Comment construit-il un savoir ? De quel type d'accompagnement l'enfant bénéficie-t-il dans la réalisation de la tâche ? Est-ce qu'il existe des phases de verbalisation où l'enfant explique comment il a réalisé la tâche ? Y-a-t-il des phases d'institutionnalisation ? Si oui, de quelles natures sont-elles ? A l'heure actuelle, nos recherches sont encore trop précoces pour pouvoir répondre à ces questions. Il est en effet nécessaire, d'une part d'analyser plus finement les ateliers de mathématiques et les présentations associées, et d'autre part, d'observer les enfants et l'éducateur en classe lors de la manipulation de ces ateliers.

V - QUELLES MANIPULATION, REPRESENTATION ET COMMUNICATION DANS CES ATELIERS ?

Dans cette partie, nous apportons quelques éléments de réponses à la question de la sémiotique en jeu dans ces six ateliers de première numération.

---

[19] Voir la transcription du contenu de la vidéo en annexe 1.

[20] Les participants nous ont interpellés sur les sources des vidéos. Elles semblent en effet mises en scène pour promouvoir la pédagogie. C'est certainement le cas puisqu'elles proviennent de blog ou site Internet écrits par des enseignants qui pratiquent cette pédagogie dans leurs classes.

1 Quelle manipulation ?

Il est évident que ces ateliers permettent aux enfants de *manipuler*. Mais de quelle manipulation s'agit-il ? Est-ce la manipulation ou de l'expérimentation (Dias, 2012) ? Les enfants sont-ils placés dans une démarche d'investigation (Gardes, 2017) ?

Nos premières réflexions, dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), nous mènent à penser que l'enfant est placé dans une situation d'action. En effet, il est dans une situation d'apprentissage où il doit résoudre un problème en utilisant ses connaissances pour agir sur le milieu. Par exemple, dans le jeu des jetons, il doit tout d'abord placer les nombres dans l'ordre puis construire des collections de jetons représentant une quantité (connaissances qu'il a apprises dans les ateliers précédents). Dans certains ateliers, le milieu lui renvoie des rétroactions pour contrôler ses actions. Par exemple, dans le jeu des jetons, à la fin, s'il reste des jetons ou s'il n'y en a pas assez pour représenter 10, il sait qu'une erreur aura été commise avant. On peut alors considérer que cette phase est a-didactique et engage une certaine dialectique de l'action entre l'enfant et le milieu. Notons que pour cela, l'atelier doit être présenté au préalable par l'enseignant.

En accord avec Dias (2008), nous considérons l'expérimentation et la manipulation dans un rapport dialectique et non en opposition, dont l'objectif principal est d'aider au passage progressif de la perception à l'abstraction. Selon lui, manipuler, c'est déplacer, manier, toucher, palper, actionner et utiliser ; expérimenter, c'est contrôler, essayer, tester, vérifier et éprouver. Il s'agit ainsi de dépasser l'idée du « tâtonnement » au profit de la notion d'action : agir selon une intention, grâce à une organisation et en appui sur un raisonnement, pour atteindre un but.

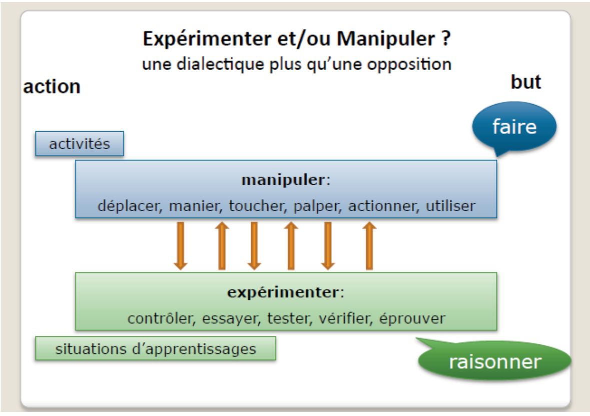


Figure 7. La dialectique expérimenter/manipuler[21] (Dias, 2012)

On retrouve, dans cette vision des mathématiques, celle de Maria Montessori qui préconise d'aller du concret vers l'abstrait via le matériel, en le manipulant, de manière précise et organisée pour explorer certaines propriétés mathématiques d'un concept, de manière séparée. De ce point de vue-là, on peut considérer que, dans la pédagogie Montessori, les élèves manipulent et expérimentent. Mais Dias va plus loin dans la définition de l'expérimentation. En effet, il précise que « l'expérimentation telle que nous l'entendons n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière) et la validation (par la preuve) » (Dias, 2008, p.27). Or dans les ateliers Montessori, il nous semble que l'expérimentation est limitée. D'une part, la phase d'action peut être réduite à une reproduction des gestes proposés par l'enseignant dans la présentation de l'atelier, et d'autre part, les phases de formulation et de validation ne sont pas toujours présentes (cf. les paragraphes suivants).

Ainsi, selon nous, les enfants, dans la pédagogie Montessori, manipulent, expérimentent parfois mais ne sont pas dans une démarche d'investigation de type expérimentale (Gardes, 2017). En effet, le but et l'utilisation de l'atelier sont connus, mais ils ne sont pas amenés à formuler de conjectures et très rarement engagés dans un processus de preuve (*i.e.* argumenter). Les présentations des ateliers semblent trop guidées pour pouvoir engager les élèves dans une réelle démarche d'investigation.

[21] Figure empruntée à Dias : http://dias.thierry.pagesperso-orange.fr/ForPE/conf_experimenter_manipuler.pdf (consultée le 30/12/17)

2 Quelle représentation ?

Les ateliers de première numération proposent différentes représentations de la quantité et des nombres. En effet, la quantité est d'abord appréhendée avec une grandeur continue (les barres numériques) puis avec des objets discrets (fuseaux, jetons, objets divers dans le jeu de mémoire). Les nombres sont représentés sous les trois dimensions du triple code de Dehaene (1992) : dimension analogique (dans les ateliers avec barres numériques, fuseaux, jetons), dimension visuelle arabe (chiffres rugueux, fuseaux, jetons, jeu de mémoire) et dimension auditive verbale (chiffres rugueux, fuseaux, jetons). Les liens entre ces différentes représentations sont davantage axés sur l'articulation entre les représentations analogique et visuelle arabe. En effet, le symbolisme numérique est introduit très rapidement (en parallèle du premier atelier des barres numériques) et est présent ensuite dans tous les ateliers. Même si la désignation auditive verbale est présente également dans ces ateliers, elle n'est pas travaillée pour elle-même. On peut d'ailleurs remarquer qu'elle n'est pas explicitement mentionnée dans les trois moments-clés décrits par Maria Montessori pour l'apprentissage des mathématiques, à savoir exposer d'abord l'enfant aux quantités, puis aux symboles et enfin à l'association entre les quantités et les symboles (Montessori, 2016c, p.11).

Nous avons également remarqué que certaines représentations analogiques « courantes » telles que les doigts de la main, les dés ou encore les nuages de points, ne sont pas travaillées à travers ces ateliers de première numération. De même, seul le jeu de mémoire des nombres propose aux enfants de créer des collections avec des objets divers et non imposés.

Enfin, nous nous interrogeons sur la place des représentations spontanées des enfants pour le nombre. *A priori*, ils ne sont pas (ou peu) amenés à produire une représentation personnelle et spontanée d'une quantité, d'une collection d'objets ou d'un nombre, comme cela pourrait être fait dans une situation de communication à autrui (Margolinas & Wozniak, 2012). Ce point est toutefois à analyser plus en détail, notamment lors d'un temps d'observation en classe. En effet, même si cela n'est pas décrit dans la présentation puis la manipulation d'un atelier, un enfant pourrait avoir recours à une représentation spontanée d'un nombre (par exemple une configuration de dés dans le jeu des jetons) et l'enseignant pourrait laisser vivre cette représentation avant d'intervenir (i.e. lui montrer à nouveau la configuration demandée par le jeu des jetons).

3 Quelle communication ?

Lors de la présentation des ateliers de première numération, l'enseignant s'appuie sur un langage verbal, des actions avec le matériel et des gestes pour communiquer avec l'enfant. Par exemple, dans la leçon en trois temps, l'éducateur nomme le matériel, le manipule et montre sa signification (par exemple pour les barres numériques, il dit « c'est deux » puis il montre avec un geste le premier tronçon en disant *un* puis le second tronçon en disant *deux*). Il invite ensuite l'enfant à reproduire ces actions et gestes. Il n'y a *a priori* pas de phases de communication, au sens formulation, c'est-à-dire de description d'une situation, d'explicitation d'une démarche ou d'un raisonnement ou encore d'exposition d'une argumentation, qui sont envisagées. Néanmoins, on peut faire l'hypothèse que ces phases de communication peuvent se produire lorsqu'un enfant est amené à présenter un atelier à un autre enfant (ce qui se produit parfois).

De même, pendant la réalisation d'un atelier, des phases de verbalisation pourraient apparaître lors d'interaction entre plusieurs enfants sur la réalisation d'une tâche ou l'explicitation du fonctionnement de l'atelier. Mais Maria Montessori n'évoque pas de situations où l'enfant serait amené à expliciter ce qu'il fait avec le matériel. Cependant, nous pouvons là encore faire l'hypothèse que ponctuellement, l'enfant en fasse la demande à l'éducateur ou inversement, par exemple pour valider la réalisation d'une tâche ou un résultat. Des observations en classe seront ici nécessaires pour pouvoir identifier la présence de telles phases, les caractériser et les quantifier.

Concernant les phases de validation, elles semblent être de deux natures : d'une part certaines sont portées par le matériel, d'autre part certaines sont effectuées par l'éducateur. Le matériel est qualifié d'auto-validant, dans la mesure où il permet d'avoir certaines rétroactions. Par exemple, on peut voir visuellement que les barres numériques ne sont pas mises en « escalier ». Dans ce cas-là, la validation de la tâche « mettre les barres en escalier » est portée par le matériel et la situation et peut être à la charge de l'élève. En revanche, dans d'autres cas, une validation extérieure semble nécessaire. Maria Montessori évoque pour l'atelier des fuseaux et pour l'atelier du jeu de mémoire une validation explicite de la « maîtresse » :

> *Quand il croit avoir fini, il est bon qu'il appelle la maîtresse afin qu'elle vérifie.*
>
> *La maîtresse arrive, déplie les billets [i.e. les étiquettes], lit et jette des exclamations de satisfaction quand elle constate qu'il n'a pas été fait d'erreur.* (Montessori, 2015, p.206-208).

Pour comprendre plus en profondeur la nature des phases de validation et leur rôle dans l'apprentissage, il semble là encore nécessaire de faire des observations en classe.

Enfin, nous nous interrogeons sur la présence et la nature de phases d'institutionnalisation. En effet elles ne sont pas (ou peu) évoquées dans les écrits de Maria Montessori ainsi que dans les descriptions des différents ateliers. Nous trouvons en effet peu de traces de la reconnaissance des savoirs ou des pratiques, enjeux de l'apprentissage attendu via un atelier. Par exemple, on peut se demander si la « qualité » isolée et travaillée dans un atelier est reconnue et signifiée à l'enfant comme un savoir. Les observations en classe devraient également nous permettent d'apporter des éléments de réponses à ces questionnements.

VI - QUELLE CONSTRUCTION DU NOMBRE DANS LES ATELIERS DE PREMIERE NUMERATION ?

Dans le cadre de notre recherche, nous cherchons également à identifier quels éléments de la construction du nombre peuvent être travaillés à travers les ateliers de première numération.

Nos premières analyses mettent en évidence que le matériel de première numération permet *a priori* aux enfants d'acquérir certains attendus de cycle 1 (cf. annexe 2). En particulier les attendus *quantifier des collections jusqu'à 10 au moins* et *lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix* sont pris en charge par ces 6 ateliers. Ce qui semble cohérent avec leurs objectifs de présenter les quantités, les symboles numériques puis de travailler leur association. Les attendus *évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques* et *utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités* peuvent être acquis grâce aux ateliers des barres numériques et du jeu de mémoire. En effet, nous pouvons faire l'hypothèse que les élèves puissent mobiliser des procédures non numériques (par comparaison des tailles des barres numériques par exemple) ou numériques (dénombrement par comptage un à un par exemple, comme l'envisage Maria Montessori) pour réaliser le rangement des barres numériques en escalier, l'association des barres numériques et des symboles ou la reconnaissance d'une collection dont le cardinal est donné. L'attendu *réaliser une collection dont le cardinal est donné* est travaillé à travers les ateliers des fuseaux et du jeu des jetons. En effet, dans les deux cas, les enfants doivent mettre la quantité d'objets (fuseaux ou jetons) correspondante à un nombre écrit en chiffres. L'attendu *mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales ou écrites sur une quantité* est partiellement pris en charge dans les ateliers. Ces derniers amènent en effet l'enfant à mobiliser différentes représentations du nombre (analogique, auditive verbale et visuelle arabe) pour communiquer sur une quantité, mais se focalisent sur l'articulation entre les dimensions analogique et visuelle arabe. De plus, comme nous l'avons souligné plus haut, certains symboles analogiques comme les doigts ou les dés ne sont pas travaillés. De même, il semble que les enfants sont peu amenés à mobiliser des symboles représentant les nombres de manière spontanée et non conventionnelle. Enfin, l'atelier des barres numériques permet de travailler un aspect de la décomposition des nombres : l'itération de l'unité. En effet, il est construit pour mettre en évidence le fait que *tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente*, attendu de fin de cycle 1.

D'autres attendus, en revanche, ne semblent pas travaillés pour *eux-mêmes* dans les ateliers de première numération. Par exemple, aucun des 6 ateliers ne fait spécifiquement réaliser une collection de quantité égale à une autre en utilisant le dénombrement (attendu *utiliser le dénombrement pour réaliser une collection de quantité égale à une collection proposée*). La correspondance terme à terme comme procédure non numérique pour évaluer ou comparer deux collections semble peu prise en charge par ces ateliers (i.e. dans les présentations et les manipulations décrites), même si c'est parfois une procédure pertinente et efficace (par exemple pour comparer deux barres rouges et bleues). De même l'aspect ordinal du nombre n'est *a priori* pas abordé par les ateliers de mathématiques (attendus *utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions*). En effet, il semble réduit à la connaissance de l'ordre des nombres dans la comptine numérique. Cet aspect est plusieurs fois mentionné dans les objectifs mathématiques des ateliers (par exemple dans les fuseaux et dans le jeu des jetons). Or, de notre point de vue, cet ordre des nombres dans la séquence relève davantage de la connaissance de la comptine numérique plutôt que l'aspect ordinal du nombre. En accord avec Margolinas et Wozniack (2012), nous considérons que l'aspect ordinal du nombre est lié au repérage d'une position. Nous ne sommes pas convaincues que les enfants comprennent, à travers ces ateliers, que le 2 dans la séquence des nombres de 0 à 10 signifie qu'il est en deuxième position après le 0. D'autre part, peu ou pas de travail n'est engagé autour de la reconnaissance d'une constellation de dé ou de domino ou même d'une quantité représentée avec les doigts de la main. Enfin, l'apprentissage de la comptine numérique ne s'effectue pas via un matériel spécifique où elle serait l'objectif d'apprentissage mathématique principal. Elle semble être davantage travaillée à travers différents matériels de numération, comme objectif secondaire (les fuseaux, le jeu des jetons puis l'atelier de comptage linéaire par exemple). Ainsi l'attendu *dire la suite des nombres jusqu'à trente* n'est pas spécifiquement travaillés via les ateliers de première numération. Précisons que ces attendus de fin de cycle 1 ne sont *a priori* pas pris en charge dans les ateliers de première numération mais cela ne veut pas nécessairement dire qu'ils ne sont pas du tout travaillés. Des études complémentaires, de l'ensemble des ateliers de mathématiques ainsi que de la pédagogie Montessori dans son ensemble, seront nécessaires pour déterminer s'ils ne sont pas étudiés à d'autres moments et à l'aide d'autres matériels disponibles dans la classe. Enfin, soulignons également que d'autres compétences sont particulièrement travaillées dans les ateliers Montessori de première numération, comme *mettre dans l'ordre les nombres de 1 à 10* ou encore *écrire les nombres avec des chiffres*. Pour cette dernière compétence, elle est explicitement prise en charge par l'atelier des chiffres rugueux. Dans certaines présentations, il est suivi des tâches suivantes : écrire les nombres en chiffres dans la semoule, sur une ardoise, sur du papier plastifié ou encore sur une feuille (voir par exemple la vidéo citée précédemment).

Pour résumer, voici un tableau (cf. figure 8) illustrant les attendus de fin de cycle 1 qui peuvent être **potentiellement** pris en charge par les ateliers Montessori de première numération.

Attendus de fin de cycle 1	*Ateliers Montessori Première numération*
Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.	*OUI - partiellement*
Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour : - comparer deux quantités - constituer une collection d'une taille donnée - réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.	*OUI* *OUI* *OUI* *NON*
Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.	*NON*
Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.	*OUI - partiellement*
Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.	*NON*
Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.	*OUI*
Quantifier des collections jusqu'à dix au moins Les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.	*OUI* *NON* *NON*

Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.	*NON*
Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.	*NON* *OUI*

Figure 8. Tableau des attendus de fin de cycle 1 potentiellement pris en charge par les ateliers Montessori de première numération

VII - CONCLUSION

Le fondement de la pédagogie Montessori est l'accompagnement du développement naturel de l'enfant, via un environnement préparé adapté aux caractéristiques et aux besoins de son âge. L'enfant décide lui-même du moment où il va manipuler le matériel proposé, devenant ainsi déclencheur de ses apprentissages. Maria Montessori qualifie sa méthode de *pédagogie scientifique* (Montessori, 1909) dans le sens où elle l'a construite dans une démarche de type expérimentale : observation rigoureuse des enfants et de leurs réactions, description et explication des phénomènes observés (par exemple l'esprit absorbant) puis exploitation de ces phénomènes dans une perspective pédagogique. Grâce à de nombreuses observations et expériences dans les *Maisons des Enfants*, elle a petit à petit affiné ses idées théoriques et construit son matériel pédagogique. Concernant les mathématiques, Maria Montessori qualifie l'esprit humain d'*esprit mathématique* qui serait notre capacité à imaginer d'une part et abstraire d'autre part. Le matériel de mathématiques qu'elle a élaboré décompose les concepts en éléments simples et isolés pour permettre à l'enfant de découvrir ces concepts dans un processus partant du concret et allant vers l'abstrait. Nous avons ainsi mis en évidence une certaine cohérence dans la progressivité des ateliers de première numération proposés aux enfants dans les classes Montessori 3-6 ans. Tout d'abord le concept de quantité est présenté avec des grandeurs continues (les barres numériques) pour montrer des unités distinctes mais unifiées. Parallèlement, les symboles numériques sont introduits à l'aide des chiffres rugueux puis un travail sur l'association d'une quantité à un symbole numérique est mené. Ensuite, le concept de quantité est présenté avec des grandeurs discrètes, les unités sont donc des objets « séparés » (des fuseaux, des jetons) puis le travail est centré, d'une part sur l'association d'une quantité à un symbole numérique donné (les fuseaux) et d'autre part, sur la construction de la séquence des nombres avec la quantité qui leur correspond (le jeu des jetons). Enfin, un travail de reconnaissance d'une collection d'objets correspondante à un nombre donné (écrit en chiffre) est proposé pour clore la séquence intitulée première numération par Maria Montessori.

D'un point de vue didactique, nous nous sommes intéressées, dans un premier temps, à la sémiotique en jeu dans ces ateliers. En effet, si le matériel et les principes fondamentaux de la méthode Montessori garantissent des activités de manipulation, nous nous interrogeons sur la nature de cette manipulation. En particulier, le fait que les présentations puis l'utilisation des ateliers soient très codifiées nous laisse penser qu'ils ne permettent pas à l'enfant d'entrer dans un projet d'expérimentation (au sens de Dias, 2008). Nous faisons l'hypothèse qu'il fait plutôt « l'expérience de » alors qu'une démarche de type expérimentale le place dans « faire l'expérience sur » (Dias, 2008, p. 36). Concernant les représentations, nous avons mis en évidence la présence des trois dimensions du triple code (Dehaene, 1992) avec toutefois une focalisation sur l'articulation entre les dimensions analogique et visuelle arabe. Nous avons soulevé l'absence *a priori* de mobilisation de représentations spontanées du nombre par les élèves ainsi que l'absence de recours à des configurations conventionnelles telles que les doigts ou les dés. Enfin, nous nous interrogeons sur la présence et la nature de phases de communication. S'il semble clair qu'il existe de nombreuses interactions entre les enfants dans une classe Montessori, les phases de formalisation et de validation (au sens de Brousseau, 1998) semblent plus difficiles à identifier et à caractériser. La présentation des ateliers ne laisse par exemple pas (ou peu) de place à l'explicitation par l'enfant de sa réflexion ou de sa démarche. La validation semble portée, soit par la situation via le matériel, soit par l'enseignant mais l'existence de situations de validation reste encore à déterminer. Enfin, nous avons évoqué la question de l'institutionnalisation : l'élément simple et isolé du concept mathématique d'un atelier est-il mis en évidence et identifié comme savoir ? Sous quelles formes l'enseignant propose aux élèves des moments d'institutionnalisation ? Cette question est cruciale dans la mesure où les concepts étant « décomposés » en éléments isolés, il semble important, à un moment donné, de procéder à une « reconstruction » pour finaliser le processus de conceptualisation (au sens de Vergnaud, 1991).

Dans un second temps, nous avons exposé notre réflexion sur la nature des apprentissages autour de la construction du nombre via ces ateliers de première numération. Ainsi, ces ateliers travaillent l'aspect cardinal du nombre, sous la tâche emblématique de l'association d'une quantité à sa représentation chiffrée et en particulier la réalisation d'une collection d'objets de cardinal donné (les fuseaux, le jeu des jetons et le jeu de mémoire). Nous avons ainsi mis en évidence qu'ils prenaient en charge un certain nombre des attendus de fin de cycle 1, en particulier *Réaliser une collection dont le cardinal est donné ; Quantifier des collections jusqu'à dix au moins* et *Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.* D'autres sont partiellement pris en charge, comme *Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques* et *Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.* Nous avons également remarqué que la désignation chiffrée est introduite très tôt, ce qui laisse peu de place à un travail de la quantité indépendamment du nombre. Enfin, certains attendus ne sont pas travaillés dans ces ateliers, à savoir, *Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ; Parler des nombres à l'aide de leur décomposition* et *Dire la suite des nombres jusqu'à trente.* En effet, nous avons relevé l'absence de tâche faisant travailler l'aspect ordinal du nombre ou la comptine numérique pour elle-même. Précisons cependant que cela ne signifie pas que ces tâches sont totalement absentes de la pédagogie Montessori, elles pourraient être prises en charge dans d'autres activités.

Pour approfondir ces premières réflexions didactiques, sur la sémiotique et sur la construction du nombre dans la pédagogie Montessori, il nous est apparu nécessaire de poursuivre nos recherches. C'est ce que nous faisons actuellement dans le cadre de la recherche présentée plus haut (cf. paragraphe I). D'une part, nous menons une analyse praxéologique de l'ensemble des ateliers de mathématiques (3-6 ans) avec leurs présentations associées ; et d'autre part, nous débutons une analyse de la mise en œuvre de ces ateliers en classe, notamment avec l'étude des rôles de l'enseignant et des élèves grâce à la théorie des situations didactiques. Pour conclure, ces analyses didactiques nous semblent particulièrement pertinentes à mener dans un contexte où cette pédagogie prend de plus en plus d'ampleur auprès des professeurs des écoles, expérimentés comme débutants. Elles permettent d'avoir une analyse objective du savoir en construction et des phénomènes d'enseignement-apprentissage en jeu. Pour la formation d'enseignant ces analyses pourraient aider les formateurs à pouvoir répondre à cet engouement et à pouvoir suivre des professeurs des écoles mettant en œuvre cette pédagogie (ou des éléments de cette pédagogie) dans leurs classes. Dans ce cadre-là, nous avons organisé en mai 2017, avec l'ESPE de Lyon une journée à destination de formateurs (au sens large, c'est-à-dire formateurs ESPE, PEMF, IEN, CPC) pour discuter de ces questions-là. Les objectifs étaient, d'une part de chercher à comprendre cet engouement de la part des enseignants, et d'autre part de réfléchir aux outils dont nous disposions et/ou qu'il faudrait construire pour avoir un regard critique et distancié sur cette pédagogie. Cette première journée sera suivie d'une seconde journée, en mars 2018 pour les enseignants avec comme objectifs de mieux comprendre la pédagogie Montessori et de l'analyser sous divers points de vue (par exemple une analyse didactique des premiers ateliers mathématiques comme faite dans cet atelier).

VIII - BIBLIOGRAPHIE

ALVAREZ, C. (2016). *Les Lois naturelles de l'enfant: La Révolution de l'éducation*. Paris: Les Arènes.

BILLARD, C., & TOUZIN, M. (2012). L'EDA: Évaluation Des fonctions cognitives et Apprentissages. *Ortho Éditions*.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

DEHAENE, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, ***44***(1), 1–42.

DENERVAUD, S., & GENTAZ, E. (2015). Les effets de la «méthode Montessori» sur le développement psychologique des enfants: une synthèse des recherches scientifiques quantitatives. *Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant*, ***27***(139), 593–598.

DIAMOND, A. (2013). Executive Functions. *Annual Review of Psychology, 64*(1), 135-168.

https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques: un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Université Claude Bernarnd Lyon 1.

DIAS, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris: Magnard.

ERMEL. (1995). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cycle des apprentissages-grande section de maternelle*. Paris: Hatier.

GARDES, M.-L. (2017). DémarcheS d'investigation et recherche de problèmes. In *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux !* Canopé (sous presse).

HESSLING, R.M, TRAXEL, N.M. & SCHMIDT, T.J. (2004). Ceiling Effect. In M. Lewis-Beck, A. E. Bryman & Liao, T.F, *The Sage encyclopedia of social science research methods*. Sage Publications. http://dx.doi.org/10.4135/9781412950589.n102

KHOMSI, A. (2001). *ELO: évaluation du langage oral*. ECPA, Les Editions du Centre de psychologie appliquée.

LAURENÇOT-SORGIUS, I., VAULTRIN, M., & BERGEAUT, J.-F. (2008). *Evolution des compétences numériques en Grande Section. Autour du repérage des compétences dans les domaines mathématiques en cycle 1 et 2*. Toulouse: IUFM Midi-Pyrénées - Université Toulouse 2, IREM de Toulouse.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle: une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.

MEN. (2015). Programme de l'école maternelle. *Bulletin Officiel Spécial N° 2 Du 26 Mars 2015*.

MONTESSORI, M. (1909). *Il metodo della pedagogia scientifica*. Città di Castello, Lapi.

MONTESSORI, M. (1934a). *Psico arithmética*. Barcelona: Casa Editorial Araluce.

MONTESSORI, M. (1934b). *Psicogéometria*. Barcelona: Casa Editorial Araluce.

MONTESSORI, M. (1936). *L'enfant*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (1959). *L'esprit absorbant*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (2010). *L'esprit absorbant*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (2015). *Pédagogie scientifique. Tome 1 : la maison des enfants*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (2016a). *L'enfant*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (2016b). *Le manuel pratique de la méthode Montessori*. Paris: Desclée de Brouwer.

MONTESSORI, M. (2016c). *Psychoarithmetic*. Amsterdam: Montessori-Pierson Publishing Company.

MORIN, M. (2017). *La pédagogie Montessori en maternelle*. Paris: ESF Sciences Humaines.

OECD. (2016). *Résultats du PISA 2015 (Volume I): L'excellence et l'équité dans l'éducation*. Paris: OECD Publishing.

POUSSIN, C. (2017). *La pédagogie Montessori*. Paris: Presses Universitaires de France.

Spécial Grand N Maternelle : Approche du nombre, Tome 1. (2001). Grenoble: IREM de Grenoble.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *RDM*, ***10****(2.3)*, 133–169.

WOODCOCK, R. W., MCGREW, K. S., & MATHER, N. (2001). *Woodcock-Johnson tests of achievement*. Itasca, IL.

IX - ANNEXE 1 : TRANSCRIPTION DE LA VIDEO DE PRESENTATION DES JETONS

La vidéo met en scène la présentation du jeu des jetons par une éducatrice Montessori (E) à un enfant (JM) - https://www.youtube.com/watch?v=fHz1fXo5E4A

Etape 1 : **l'enfant doit mettre les nombres dans l'ordre**.

E : Alors Jean-Marc, là on va faire le matériel des chiffres et jetons d'accord ? Donc tous les chiffres ainsi que le nombre 10, on va essayer de les mettre dans l'ordre. Alors lequel on va mettre en premier ?
JM : Alors parce que c'est tout le temps le 1.
E : Très bien. Après ?
JM : Après 2.
JM met ensuite tous les nombres dans l'ordre. Puis une fois terminé, il récite : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Etape 2 : **l'enfant doit associer la quantité de jetons à l'écriture chiffrée**.

E : Est-ce que maintenant tu peux mettre les jetons dessous, donc sous le 1, on va mettre…
JM : 1
E : 1 jeton. Après…
JM : 2, c'est comme ça qu'il faut le mettre [*Il fait référence à la configuration des jetons en deux colonnes*]
E : Très bien

On voit ensuite (en accéléré) l'enfant réaliser les collections de jetons, dans la configuration attendue. Si cette configuration n'est pas précise, on voit l'éducatrice replacer les jetons.

Etape 3 : la leçon en trois temps

Temps 1 : la connaissance - l'enfant découvre les nombres pairs et impairs.
L'éducatrice dit : « Alors maintenant, tu vas bien regarder ce que fait mon doigt, regarde ». Elle passe son doigt entre les deux colonnes de jetons pour les nombres pairs et s'arrête sur le jeton du milieu pour les nombres impairs. Ce geste est accompagné d'une parole : « impair » (pour le 1), « pair » (pour le 2), « impair » (pour le 3), « pair » (pour le 4). Puis l'enfant fait la même chose (geste et parole).

Temps 2 : la reconnaissance - l'enfant doit reconnaitre un nombre pair ou impair.
L'éducatrice dit : « Alors est-ce que tu peux me montrer un chiffre qui est pair ? ». Il montre le 2. L'éducatrice lui demande : « et un chiffre qui est impair » ? Il montre le 1. Puis elle poursuit : « et un autre chiffre qui est pair ? » L'enfant montre d'abord le 3 puis hésite entre le 3 et le 4 et montre finalement le 4. L'éducatrice poursuit : « et un chiffre qui est impair ? » - il montre le 3, « et un autre chiffre qui est pair ? » - il montre le 5. L'éducatrice fait une grimace, il montre alors le 6.

Temps 3 : la vérification - l'enfant doit dire quels nombres sont pairs ou impairs.
L'éducation montre 7 et lui demande : « et alors celui-là, il est comment ? pair ou impair ? ». L'enfant répond : « pair ». L'éducatrice pointe alors du doigt le jeton du milieu pour montrer qu'elle ne peut pas séparer les jetons en deux colonnes. Du coup, il dit : « impair ». Elle poursuit, en montrant le 8 : « et le 8 il est comment ? ». Il répond : pair. Elle montre le 10, il dit imp…pair. Elle fait le geste de séparation des jetons en deux colonnes et lui repose la question. Il dit pair. Elle termine par : « et le 9 il est comment ? ». Il répond : « pair ».

Enfin, elle conclut la leçon : « Bravo, tu vois aujourd'hui on a appris les chiffres pairs et impairs grâce aux chiffres et jetons ».

X - ANNEXE 2 : ATTENDUS DE FIN DE CYCLE 1

Nous reproduisons ci-dessous la liste des attendus de fin de cycle 1 (MEN, 2015) pour ce qui concerne la partie *Construire les premiers outils pour structurer sa pensée*, et plus spécifiquement la construction du nombre.

Utiliser les nombres

- Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.
- Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.
- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.
- Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.

Étudier les nombres

- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.

10 OU DIX : QUELLE EST LA QUESTION ?

Michel DERUAZ
Professeur Formateur, HEP VAUD
UER MS
Michel.deruaz@hepl.ch

Valérie BATTEAU
Assistante diplômée, HEP Vaud
UER MS, 3LS
vbatteau@gmail.com

Résumé
Nous nous référons au modèle du triple code (Dehaene, 1992) dans lequel le nombre peut s'exprimer selon trois représentations: auditive-verbale, analogique (pour nous : quantité représentée par des jetons) et symbolique (avec des chiffres). Notre questionnement de formateurs est le suivant : nos étudiants connaissent les effets de la multiplication et de la division par *dix* (et de ses puissances) sur l'écriture d'un nombre dans le système décimal de numération (Clivaz & Deruaz, 2013; Deruaz & Clivaz, 2012). Mais, qu'en est-il lorsque l'on multiplie ou divise par *10* (et ses puissances) dans une base quelconque ? Ce type de questionnement permet de mettre en évidence les spécificités liées à chacune de ces représentations. En particulier, il met en évidence les difficultés à communiquer avec la représentation auditive-verbale lorsqu'on travaille dans une autre base que la base dix, ainsi que des propriétés naturalisées en base dix qui deviennent alors de vraies questions dans une autre base (Anselmo & Zucchetta, 2013).

I - INTRODUCTION

Cet atelier s'inscrit dans le cadre d'un cours de mathématiques et de didactique des mathématiques (Deruaz & Clivaz, 2012) donné en formation initiale d'enseignants primaire en Suisse (Haute École Pédagogique Vaud). À la différence de la formation française, nos étudiants commencent cette formation avec une maturité fédérale (baccalauréat) ou un titre jugé équivalent. L'un des objectifs de ce cours est de permettre aux étudiants de prendre du recul face aux mathématiques qu'ils enseigneront à l'école primaire, de leur faire prendre conscience que dans leurs futures classes, ils devront répondre aux questions des élèves ou se positionner face à leurs réponses. C'est pour les contraindre à faire un pas de côté face à la numération décimale que nous avions décidé de les confronter à la numération dans d'autres bases. Lors de séances de réponses aux questions, nous avons pu observer que les procédures mises en œuvre par les étudiants en difficultés pour résoudre les tâches demandées restaient principalement algorithmiques ce qui leur permettait, en quelque sorte, d'échapper à ce pas de côté et de continuer à percevoir les mathématiques comme une suite de recettes à appliquer à bon escient, ce qui ne correspond absolument pas à nos objectifs. Ce constat nous a conduit à remettre en question la partie du cours sur la numération et les outils de calculs écrits mais sans renoncer à leurs contenus et en particulier au travail avec d'autres bases que la base dix. Pour cela nous avons construit un nouveau dispositif de formation qui intègre un certain nombre de manipulations avec du matériel spécifiquement conçus pour cela au printemps 2017. Nous présentons dans cet atelier une partie de ce matériel et des tâches qui ont été construites avec celui-ci dans le cadre de six séances de cours (avec des effectifs de plus de 100 étudiants par cours) consacrées à la numération et aux outils de calculs écrits. Nous montrerons en particulier pourquoi du matériel complémentaire a dû être conçu pour permettre aux étudiants de prendre note des manipulations faites devant eux par le formateur et ainsi de participer depuis leur banc, aux manipulations proposées devant l'auditoire par le formateur.

II - ENJEUX DE FORMATION

L'enseignement de la numération est un enjeu prioritaire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Or, l'enseignement de la numération est essentiellement vu comme un préalable à l'enseignement des opérations et algorithmes tout en étant détaché de l'enseignement des opérations et algorithmes (Bednarz & Janvier, 1984).

> L'étude de l'évolution historique de la numération nous révèle combien représenter un nombre et calculer ne font qu'un, la survie d'un système et son évolution étant étroitement liées à son efficacité calculatoire. Or, ce lien est pauvrement perçu dans l'enseignement primaire. (p.26).

Ces auteurs mentionnent un manque de liens entre l'enseignement de la numération et celui des opérations et algorithmes. Par son importance dans les curriculums, par les difficultés tant du côté enseignement (Clivaz & Deruaz, 2013 ; Batteau & Clivaz, 2016) qu'apprentissage (Dias & Deruaz ; 2012), ce sujet demeure un sujet de recherche toujours d'« actualité » dont les travaux de Bednarz et Janvier (1984) restent une référence. Pour ne citer qu'un exemple, une brochure réalisée par la COPIRELEM en 2015 sur la « Numération à l'école primaire, un scénario de formation » recense des situations de formations (COPIRELEM, 2015).

Notre contribution se situe dans la ligne de ces travaux et nous allons décrire certains de nos choix dans l'introduction mathématiques et didactique qui suit.

1 Enjeux mathématiques et didactiques

1.1 Le nombre et ses représentations

Dans ce qui est proposé lors de ces six séances de cours, nous privilégions l'aspect cardinal du nombre, contrairement à d'autres travaux qui privilégient son aspect ordinal dans des bases autres que dix en formation initiale des maîtres primaires (par exemple, Vivier, 2015). Par conséquent, on peut associer n'importe quel nombre au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets. On associera, par exemple, le nombre seize à n'importe quel ensemble de seize objets. Nous pouvons ainsi le représenter de manière décontextualisée par une collection de seize points :

Dans ce cas, à la suite de Dehaene (1992) on parle de « représentation analogique » du nombre. Dans les lignes qui précèdent, nous avons déjà utilisé plusieurs fois une autre représentation de ce nombre en écrivant, en lisant ou en disant, « seize ». Dehaene appelle cette représentation « auditive-verbale ». C'est en effet celle qui est utilisée dans le langage parlé, celle que l'on dit ou que l'on entend, même si le nombre est écrit 16.

Lorsqu'on écrit 16 avec des chiffres, on utilise une troisième représentation du nombre qui utilise le fait que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :

Dans ce qui suit, nous appellerons cette représentation à l'aide de chiffres, « représentation symbolique décimale » ou « représentation symbolique en base dix ». Remarquons que cette représentation est uniquement visuelle. Lorsque nous lisons le nombre 16, écrit comme cela, nous sommes contraints de le dire « seize » en utilisant la représentation auditive-verbale.

L'adaptation que nous avons réalisée du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p31) dans le cadre du cours permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre :

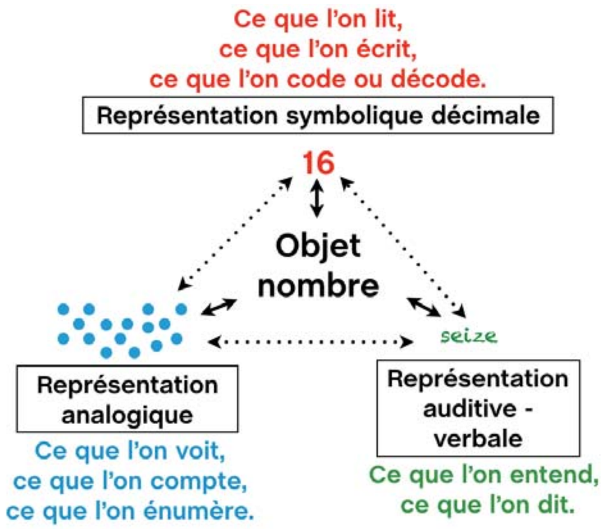
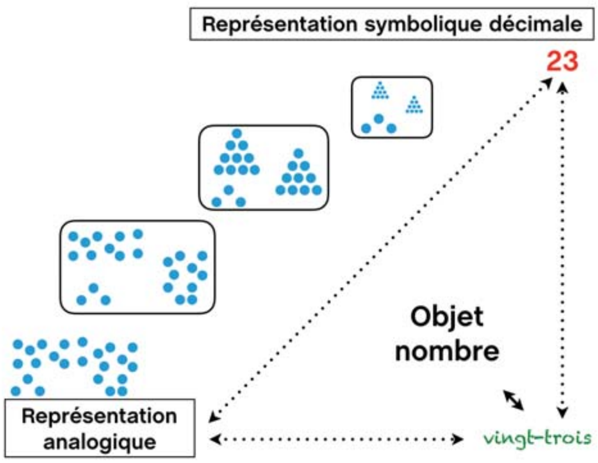


Figure 1. Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p31)

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement aux passages entre les représentations analogique et symbolique en mettant en évidence un certain nombre de représentations intermédiaires qui nous apparaissent comme importantes. En effet, notre objectif est que les futurs enseignants puissent faire des liens entre ces représentations analogique et symbolique et qu'ils puissent ensuite proposer ces liens à leurs élèves et peut-être encore plus particulièrement à ceux qui seraient en difficulté avec les nombres et leurs représentations.

Nous classerons ces représentations intermédiaires en deux catégories : la première contient les représentations que l'on qualifiera d'iconiques puisque les points sont encore présents, la seconde contient celle que l'on qualifiera de symboliques et qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.



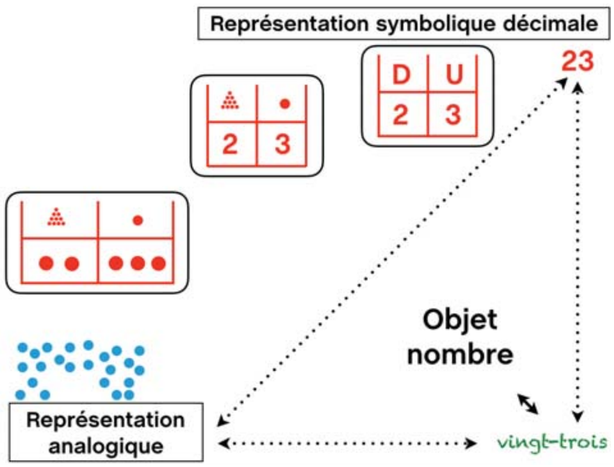


Figure 2. Représentations intermédiaires iconiques Représentations intermédiaires symboliques

1.2 Représentations symboliques dans d'autres bases que la base dix

Si l'on regarde plus attentivement la construction de la représentation symbolique décimale, on observe qu'elle est construite sur deux principes : le groupement par dix et le fait que la valeur associée à un symbole dépend de sa position dans l'écriture du nombre. On peut illustrer ces deux aspects à l'aide du nombre que l'on écrit 1232, et en s'aidant du tableau MCDU :

M	C	D	U
1	2	3	2

Lorsqu'on se place en base dix, on regroupe dix unités pour obtenir une dizaine, puis dix dizaines pour obtenir une centaine et ainsi de suite, autrement dit on effectue des groupements par dix pour passer d'une colonne à la colonne qui se situe à sa gauche. L'aspect positionnel est lié au fait que la signification du symbole 2 dépend de la colonne dans laquelle il se trouve ou de sa position dans l'écriture du nombre. Le symbole le plus à droite correspond à des unités donc à deux unités dans le cas présent, celui qui se situe à sa gauche à des dizaines donc à trois dizaines dans le cas présent. Le suivant vers la gauche à des centaines donc à deux centaines, et ainsi de suite. On peut d'ailleurs écrire ce tableau différemment :

1000	100	10	1
1	2	3	2

Cela correspond à la décomposition

$$1232=1\text{x}1000 + 2\text{x}100 + 3\text{x}10 + 2\text{x}1$$

Ou encore

$$1232=1\text{x}10^3 + 2\text{x}10^2 + 3\text{x}10^1 + 2\text{x}10^0$$

On appellera alors les dizaines « groupes d'ordre un », les centaines « groupe d'ordre deux » et les milliers « groupe d'ordre trois ». Le tableau devient alors :

G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
1	2	3	2

Dans le texte qui suit nous allons voir ce qui se passe si nous effectuons des groupements par un autre nombre que dix en conservant les aspects positionnels. Par exemple, si l'on reprend le nombre seize, mais que l'on effectue des groupements par cinq comme dans le schéma ci-dessous :

G^{un}	U
3	1

On obtient alors trois groupes de cinq et un élément isolé. La représentation symbolique en base cinq nous permettra de noter ce nombre 31. Pour éviter toute ambigüité on précisera la base utilisée en indice pour obtenir la notation 31_{cinq}.

Pour être complet, il faut préciser que, comme pour la base dix, avant d'écrire un nombre avec la représentation symbolique, on effectuera toujours le maximum de groupements possibles. En effet, en base cinq, n'effectuer avec seize objets que deux groupements de cinq en laissant six objets isolés pour écrire 26_{cinq} est proscrit.

G^{un}	U
2	6

En effet, si l'on acceptait cela on pourrait alors écrire le nombre seize de deux manières différentes avec la même représentation symbolique en base cinq : 31_{cinq} ou 26_{cinq}, ce qui poserait assez rapidement des problèmes, par exemple pour comparer des nombres entre eux. Ce principe a pour conséquence que pour écrire un nombre en base cinq, on utilisera que les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, soit cinq chiffres. Le nombre de chiffres nécessaires pour écrire un nombre correspond au nombre par lequel on regroupe, donc à la base utilisée. Le tableau 1 ci-après montre comment on peut écrire les nombres de zéro à treize en base cinq.

Représentation analogique	Représentation auditive - verbale	Représentation symbolique en base cinq
	zéro	0
●	un	1
●●	deux	2
●●●	trois	3
●●●●	quatre	4
○○○○○	cinq	10
○○○○○●	six	11
○○○○○●●	sept	12
○○○○○●●●	huit	13
○○○○○●●●●	neuf	14
○○○○○ ○○○○○	dix	20
○○○○○● ○○○○○	onze	21
○○○○○● ○○○○○●	douze	22
○○○○○●● ○○○○○●	treize	23

Tableau 1

La représentation auditive-verbale utilise aussi des groupements par dix. Dans le tableau 1 ci-dessus, nous avons décidé de garder intacte la correspondance entre les représentations analogiques et auditives verbales et de perdre la correspondance entre les représentations auditives verbales et symboliques. Un autre choix aurait été possible. En effet, quel que soit le nombre par lequel nous regroupons, il s'écrit 10 dans sa base puisqu'il est constitué dans sa représentation analogique d'un groupement et d'aucun objet isolé. On pourrait donc décider de dire ce nombre « dix » et de dire « vingt-trois » le nombre constitué de deux groupements et de trois objets isolés.

Un tel choix aurait l'avantage de faciliter la lecture mais il ne permettrait pas de signifier la base utilisée puisque celle-ci se dirait systématiquement « dix ». Le seul moyen serait alors d'exprimer la base en utilisant la représentation analogique sans pouvoir la dire autrement que « dix » ou l'écrire autrement que « 10_{dix} » ce qui poserait d'importants problèmes de communication.

Notons toutefois que notre choix de maintenir intact le lien entre les représentations analogiques et auditives verbales comme dans le tableau 1 rend difficile la lecture des nombres que nous écrivons. En effet, si on ajoute maintenant un objet à la collection de seize objets que nous avons utilisée plus haut, on se retrouve dans la situation ci-dessous :

G^{un}	U
3	2

On écrira alors ce nombre 32_{cinq} alors qu'il se dit « dix-sept ». On se trouve dans une situation inconfortable car contrairement à ce qui se passe en base dix, on a perdu, en utilisant une autre base, les liens naturels et historiques entre les représentations symboliques décimales et auditives-verbales (Mounier, 2010, pp. 100-113).

1.3 Passage d'une base quelconque à la base dix et réciproquement

Dans ce qui suit, nous allons devoir distinguer lorsque nous dirons un nombre ou lorsque nous lirons son écriture en représentation symbolique. Nous utiliserons donc la représentation auditive verbale pour dire le nombre, indépendamment de la base utilisée et une lecture de la gauche vers la droite des chiffres avec mention de la base lorsqu'il s'agira de la lecture d'un nombre écrit à l'aide d'une représentation symbolique. Par exemple, pour le nombre dix-sept, écrit 32_{cinq} en base cinq, nous lirons « trois groupes de cinq, deux unités » ou « trois, deux en base cinq » ou encore « trois, deux » s'il n'y a qu'une base en jeu.

Si nous prenons le nombre écrit 1232_{cinq} et que nous utilisons un tableau de nombres en base cinq, nous allons avoir :

G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
1	2	3	2

Ainsi dans un système de numération en base cinq, on regroupe cinq unités pour obtenir un groupement d'ordre un, puis cinq groupements d'ordre un pour obtenir un groupement d'ordre deux et ainsi de suite, autrement dit les regroupements pour passer d'une colonne à la colonne qui se situe à sa gauche se font chaque fois par cinq. On peut d'ailleurs écrire ce tableau différemment :

1000	100	10	1
1	2	3	2

Ce qui, de manière analogue à la base dix, signifie

$$1232_{cinq} = 1\text{x}1000_{cinq} + 2\text{x}100_{cinq} + 3\text{x}10_{cinq} + 2\text{x}1_{cinq}$$

Ou encore

$$1232_{cinq} = 1\text{x}10^{trois} + 2\text{x}10^{deux} + 3\text{x}10^{un} + 2\text{x}10^{zéro} \text{ en base cinq.}$$

Ce qui, écrit en base dix, donne

$$1232_{cinq} = 1\text{x}5^{trois} + 2\text{x}5^{deux} + 3\text{x}5^{un} + 2\text{x}5^{zéro} = 125_{dix} + 50_{dix} + 15_{dix} + 2_{dix} = 192_{dix}$$

On construit ainsi une procédure algorithmique qui permet de passer de l'écriture d'un nombre dans une base quelconque à son écriture en base dix. Une procédure pour passer de l'écriture en base dix à son écriture dans une base quelconque, par exemple en base cinq, découle assez directement du passage de la représentation analogique du nombre à son écriture en base cinq. En effet, si on prend un ensemble d'objets et qu'on les regroupe par cinq, le nombre d'objets ne faisant partie d'aucun groupe correspond au reste de la division du nombre d'objet par cinq (division-quotition).

Donc si l'on reprend l'exemple ci-dessus de la base dix à la base cinq, on aura :

192 : 5 = 38 reste 2, d'où dans le tableau de nombres :

G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
			2

En regroupant les groupes de cinq par cinq, on obtient :

38 : 5 = 7 reste 3, d'où :

G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
		3	2

Puis,

7 : 5 = 1 reste 2 d'où :

G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
1	2	3	2

Les deux procédures algorithmiques décrites ci-dessus pour passer d'une base quelconque à la base dix et réciproquement utilisent essentiellement l'aspect groupement de la numération et très peu l'aspect positionnel. Elles ne permettent pas de travailler les règles d'échanges qui permettent de passer d'une colonne à celle qui la suit ou à celle qui la précède dans le tableau de nombres et qui sont énormément utilisées lors des procédures de calculs écrits.

1.4 Passages d'une base à une autre sans passer par la base dix lorsque l'une des bases est une puissance de l'autre

Pour passer de l'écriture en base neuf d'un nombre à son écriture en base trois, il est évidemment possible de passer par l'écriture intermédiaire en basse dix de ce nombre en utilisant l'une après l'autre les deux procédures décrites ci-dessus mais il est aussi possible de procéder de manière plus directe. En effet, si l'on prend le nombre 184_{neuf} et qu'on l'écrit à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres, on obtient :

G^{deux}	G^{un}	U
•	••••••••	••••

G^{deux}	G^{un}	U
1	8	4

Ou, en changeant les étiquettes des colonnes :

100	10	1
•	••••••••	••••

100	10	1
1	8	4

Mais comme trois groupes de trois est équivalent à un groupe de neuf, ce qui s'écrit aussi $100_{trois}=10_{neuf}$, le tableau ci-dessus en base neuf, devient en base trois :

10000	100	1
•	••••••••	••••

10000	100	1
1	8	4

Ou, en faisant apparaître les colonnes intermédiaires :

10000	1000	100	10	1
•		••••••••		••••

Et, en effectuant des groupements par trois lorsque c'est possible

G^{quatre}	G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
•		(•••)(•••)••		(•••)•

Qui devient, en remplaçant chaque groupe de trois par des unités dans la colonne à gauche de celle dans laquelle se trouve le groupe remplacé :

G^{quatre}	G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
•	••	••	•	•

Ou, en passant au tableau de nombres :

G^{quatre}	G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	U
1	2	2	1	1

On a donc réussi à l'aide d'échanges successifs à établir l'égalité $184_{neuf}=12211_{trois}$.

On arrive évidemment à établir cette égalité en effectuant les mêmes échanges, qui apparaissent plutôt sous la forme de substitutions en passant par la chaîne d'égalités ci-dessous :

$$184_{neuf} = 1\text{x}9^{deux} + 8\text{x}9^{un} + 4\text{x}9^{zéro} = 1\text{x}3^{quatre} + 8\text{x}3^{deux} + 4\text{x}3^{zéro} = 1\text{x}3^{quatre} + (2\text{x}3+2)\text{x}3^{deux} + (3+1)\text{x}3^{zéro}$$

$$= 1\text{x}3^{quatre} + 2\text{x}3^{trois} + 2\text{x}3^{deux} + 1\text{x}3^{un} + 1\text{x}3^{zéro} = 12211_{trois}$$

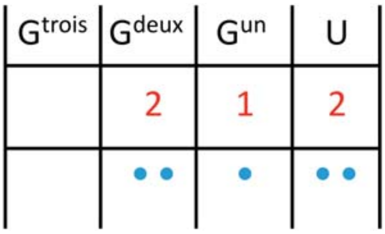
Mais si on regarde attentivement cette chaîne d'égalités, elle est écrite en base dix ! Le passage par les abaques et les tableaux de nombres permet donc d'échapper à la base dix pour communiquer entre la base neuf et la base trois.

Une procédure analogue, en remplaçant les groupements de la droite vers la gauche par des dégroupements de la gauche vers la droite permet de passer d'un nombre écrit en base trois à un nombre écrit en base neuf. Cette nouvelle procédure peut d'ailleurs aussi s'écrire avec la chaîne d'égalités ci-dessus mais en la lisant de la droite vers la gauche.

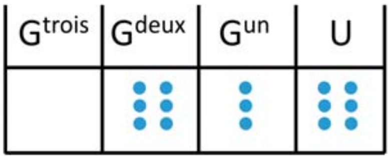
Ce type de tâches permet aux étudiants de se familiariser avec les groupements de la droite vers la gauche utilisés dans les additions et les multiplications écrites et avec les dégroupements de la gauche vers la droite utilisés dans les soustractions et les divisions écrites avant de travailler spécifiquement ces outils de calcul. On illustrera cela par les quelques exemples ci-dessous.

1.5 La multiplication par 10 dans une autre base que la base dix

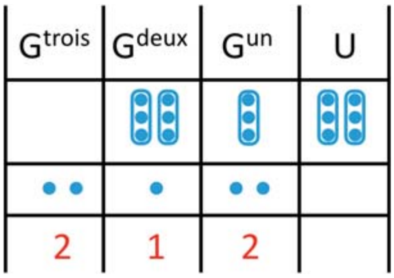
Prenons, par exemple, la multiplication 212_{trois} x 10_{trois}. Si on écrit le nombre 212_{trois} à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres, on obtient :



En base trois, 10 signifie un groupe de trois et zéro unité, donc trois. On peut donc représenter la multiplication 212_{trois} x 10_{trois} comme suit sur l'abaque :



Ce qui, en regroupant par trois lorsque c'est possible et en remplaçant chaque groupe de trois par une unité dans la colonne située à gauche de celle dans laquelle se trouve le groupe remplacé, donne :



On observe alors que multiplier le nombre 212_{trois} par le nombre 10_{trois} revient à décaler chaque chiffre qui compose le nombre d'une colonne vers la gauche dans le tableau de nombres. L'espace ainsi libérer dans la colonne des unités peut alors être comblé en utilisant le chiffre 0, ce qui donne l'égalité :

$$212_{\text{trois}} \text{ x } 10_{\text{trois}} = 2120_{\text{trois}}$$

Ce résultat peut être généralisé à toutes les multiplications d'un nombre entier par 10, quelle que soit la base utilisée.

1.6 L'écriture de nombres non nécessairement entiers

Comme on vient de le voir, multiplier un nombre par 10 revient, quelle que soit la base utilisée à décaler les chiffres utilisés pour écrire ce nombre d'une colonne vers la gauche dans le tableau de nombres en ajoutant si nécessaire une colonne à gauche :

G^{quatre}	G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	$G^{zéro}$	
		2	1	2	212
	2	1	2		212 x 10
2	1	2			212 x 100

Comme la division est l'opération inverse de la multiplication, diviser par 10 revient, quelle que soit la base utilisée à décaler les chiffres utilisés pour écrire le nombre d'une colonne vers la droite dans le tableau de nombres en ajoutant si nécessaire une colonne à droite :

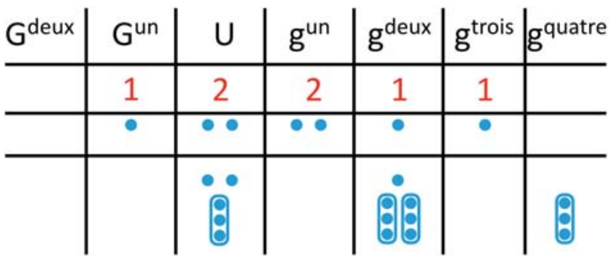
G^{trois}	G^{deux}	G^{un}	$G^{zéro}$		
	2	1	2		212
		2	1	2	212 : 10

Pour passer d'une colonne à la colonne située à sa gauche, il faut multiplier par la base. Selon ce principe la valeur des éléments représentés dans la nouvelle colonne du tableau de nombres créée à droite de la colonne des unités doit être multipliée par la base pour obtenir l'unité. Il s'agit donc du nombre qui multiplié par la base donne un, soit l'inverse de la base. On notera donc cette quantité $G^{moins\ un}$ ou g^{un}. Il est évidemment toujours possible de créer, selon le même principe de nouvelles colonnes vers la droite. On peut par exemple coder en base trois le nombre suivant à l'aide de l'abaque ou du tableau de nombres :

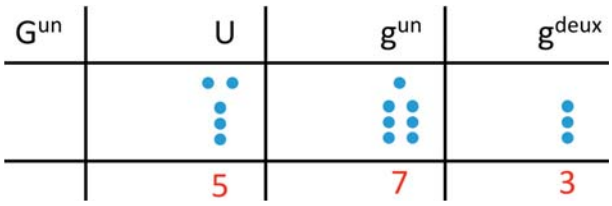
G^{un}	U	g^{un}	g^{deux}	g^{trois}
1	2	2	1	1
•	••	••	•	•

Pour s'affranchir du tableau, on doit introduire une virgule à la droite du chiffre des unités : $12{,}211_{trois}$.

Le lecteur intéressé pourra remarquer que s'il cherche à écrire ce nombre en base neuf, il obtiendra en dégroupant ce qui se trouve dans les colonnes à exposant impaire :



Mais comme trois groupes de trois est équivalent à un groupe de neuf, ce qui s'écrit aussi $100_{trois}=10_{neuf}$, le tableau ci-dessus en base trois, devient en base neuf :



Remarquons que si $12211_{trois}=184_{neuf}$, $12{,}211_{trois}=5{,}73_{neuf}$.

2 Enjeux liés à la manipulation

Dans le cadre du cours de mathématiques et de didactique des mathématiques présenté en introduction, nous avons toujours souhaité permettre aux étudiants d'effectuer des manipulations pour la partie sur la numération et les outils de calculs. Or, ce cours est constitué en parts égales d'un cours en grands effectifs (environ 360 étudiants répartis en trois groupes) et de séminaires (groupes de 25 à 30 étudiants). Étant donné qu'il était impossible d'avoir du matériel en suffisance, pour expliquer le système de numération dans différentes bases, le formateur présentait, dans son diaporama, des animations dans la représentation analogique, puis les aspects algorithmiques liés à ces animations dans la représentation symbolique. Les étudiants retenaient essentiellement des « recettes » de type algorithmique (voir 1.3) qu'ils appliquaient en vue de l'examen. Dans ces « recettes » de type algorithmique, ces étudiants restaient uniquement dans la représentation symbolique du système de numération, c'est d'ailleurs ce qu'ils ont retenu de leur formation secondaire. Pour casser cette représentation des mathématiques et de leur enseignement, nous avons modifié le cours afin de les amener à faire des liens entre les représentations symboliques et analogiques. Pour cela, nous avons créé du matériel mis à disposition de chaque étudiant afin de les faire manipuler et donner du sens à la numération. Nous n'avons pas utilisé le matériel de numération existant (voir figure 3) car d'une part il est en base dix, d'autre part, il est en partie iconique : la barre une dizaine est une barre de dix petits carrés que l'on ne peut pas détacher, de même pour la plaque une centaine, elle symbolise dix barres une dizaine que l'on ne peut pas détacher, de même pour le cube un millier qui lui est même creux.

Figure 3 : Matériel de numération en base dix utilisé en Suisse Romande dans les classes

Matériel en base trois fabriqué dans le cadre de ce cours

Le matériel que nous avons conçu est constitué de billes et de boîtes (fabriquées avec une imprimante 3D) et permet d'effectuer des groupements, ce que le matériel usuel ne permet pas. Il permet aussi de travailler les représentations analogiques (boîtes avec les billes) ou avec des symboles de type iconique (boîtes sans les billes). Ce matériel sans billes correspond au système de numération hiéroglyphique égyptien : le panier représenté par son anse pour grouper dix objets (dizaine), la corde pour attacher dix paniers (centaine).

Dans la version modifiée du cours que nous proposons aux étudiants depuis 2017, nous présentons toujours un diaporama avec des animations qui relient les représentations symboliques et analogiques, mais également une manipulation avec le matériel conçu (qui est filmée et projetée en direct pour que tous les étudiants puissent voir ces manipulations) dans la représentation analogique. De plus, les étudiants en suivant les manipulations du formateur vont avec des fiches A4 (voir Annexes) tout d'abord essayer par eux-mêmes de représenter ces manipulations. Puis, le formateur propose au rétroprojecteur une utilisation possible de ces fiches. Les objectifs de formation sont multiples : les étudiants ont une posture active pendant le cours, ils s'approprient ce qui est présenté, les fiches permettent de faire les liens entre les représentations analogiques et symboliques, ces fiches constituent une trace des manipulations auxquelles ils ont assisté. Ces fiches représentent un support intermédiaire qui permet de faire les liens entre les représentations analogiques des manipulations et les représentations symboliques utilisées plus couramment.

III - PRESENTATION DES QUATRE ATELIERS

Nous avons proposé quatre ateliers qui portent sur « écriture d'un nombre dans une base autre que dix », « changement de base », « addition-soustraction » et « multiplication-division ». Pour chaque atelier, nous avons demandé aux participants de répondre aux questions suivantes :

- Que travaille-t-on dans cet atelier d'un point de vue mathématique et par rapport aux différents aspects de la numération ? Travaille-t-on avec le nombre, le chiffre, la quantité associée au chiffre indépendamment de la base ?
- Dans quel registre du triple code de Dehaene se situe-t-on ?
- Que remarque-t-on quand on fait l'activité ? A quoi se réfère-t-on ?
- Que pensez-vous de cette activité ? Comment l'améliorer ?
- Avez-vous des remarques ?

1 Atelier « écriture d'un nombre dans une base autre que dix »

Cet atelier a pour objectif de prendre conscience que l'écriture d'un nombre dépend de la base dans laquelle on se place et de la signification de l'aspect groupement de la numération. Pour cela, nous avons construit différentes tâches qui utilisent toujours le même nombre cent cinquante-sept.

Nous avons tout d'abord proposé la fiche « Confettis » (Annexe 1) qui est inspirée d'une tâche proposée à des élèves de 4H (CE1 - 7/8 ans), que nous avons modifiée car elle se limite à la base dix. Nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de confettis en base trois, puis en base neuf. Nous avons choisi d'écrire un nombre dans ces deux bases, car neuf est une puissance de trois. Ainsi, en base trois, on groupe par trois et les puissances sont : un, trois, neuf, vingt-sept, huitante-et-un (quatre-vingt un). En base neuf, on groupe par neuf et les puissances sont : un, neuf, huitante-et-un.

L'objectif est d'effectuer des groupements par trois (et ses puissances), puis par neuf (et ses puissances) et de voir comment on peut passer de l'écriture d'un nombre en base trois à la base neuf, sans passer par la base dix.

Le nombre cent cinquante-sept en base dix s'écrit 184 en base neuf ou 12211 en base trois.

L'exercice 1 (Annexe 2 et figure 4) illustre le passage de la base neuf à la base trois : il faut effectuer des regroupements par trois. $184_{\text{neuf}} = 12211_{\text{trois}}$. Par exemple, le chiffre 4 des unités correspond aux quatre unités (en base neuf). Ces quatre unités peuvent se regrouper par trois pour donner un groupe de trois et une unité en base trois. C'est-à-dire $4_{\text{neuf}}=11_{\text{trois}}$.

L'exercice 2 (Annexe 2 et figure 4) illustre le passage de la base trois à la base neuf : il faut effectuer des dégroupements. Par exemple, on dégroupe un groupe de trois (en base trois) pour faire trois unités (en base neuf), à laquelle on ajoute une unité et on trouve bien les quatre unités (en base neuf). Autrement dit, $11_{\text{trois}}=1\text{x}3+1\text{x}1=4_{\text{neuf}}$. Ce qu'il faut remarquer c'est que cette égalité reste vraie lorsqu'on déplace les chiffres 11 d'un nombre pair de rangs vers la droite (ou la gauche) par exemple $1100_{\text{trois}}=40_{\text{neuf}}$ (on a déplacé 11 de deux rangs vers la gauche) ou encore $0{,}0011_{\text{trois}}=0{,}04_{\text{neuf}}$ (on a déplacé 11 de quatre rangs vers la droite). Cette remarque n'est plus vraie lorsqu'on déplace 11 d'un nombre impair de rangs vers la droite (ou la gauche) comme dans ces exemples : $110_{\text{trois}}=13_{\text{neuf}}$ ou encore $0{,}011_{\text{trois}}=0{,}13_{\text{neuf}}$ (voir 1.4).

Figure 4 : Participants de l'atelier 1

Pour le dernier exercice de cet atelier, nous avons disposé cent cinquante-sept billes sur la table (dans une grosse boîte) et nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de billes en base trois puis en base neuf. Pour cela, nous avons proposé du matériel : une planche en bois avec des trous pour les billes pour disposer les unités, des boîtes violettes qui contiennent trois billes, des boîtes vertes qui contiennent trois boîtes violettes de trois billes (soit des boîtes de neuf billes), des boîtes bleues qui contiennent trois boîtes vertes (soit des boîtes de vingt-sept billes) et une boîte rouge qui contient trois boîtes bleues (soit une boîte de huitante et une billes).

Figure 5 : Matériel en base trois (cent cinquante-sept billes). Représentations analogiques du nombre en base trois (photo du milieu) et en base neuf (photo de droite)

Cette tâche permet également d'effectuer des groupements par trois et des dégroupements.

Ces tâches travaillent le passage de la représentation analogique à la représentation symbolique en base trois ou en base neuf, ainsi que les groupements et dégroupements pour passer d'une base à l'autre et la notion d'échange.

2 Atelier « changement de base »

Cet atelier a pour objectif de travailler :

- l'aspect groupement de la numération
- les groupements et dégroupements dans les représentations analogiques pour les changements de bases lorsque l'on passe d'une base à une autre, dans le cas particulier où la base n'est pas une puissance de l'autre.

L'exercice 1 (Annexe 3) illustre le passage de la base quatre à la base huit. Comme huit n'est pas une puissance de quatre, nous voyons qu'il va falloir effectuer à la fois des groupements et des dégroupements pour passer de la base huit à la base quatre. Ainsi $2131_{quatre}=235_{huit}$.

Par exemple le chiffre 3 représente trois groupes de quatre en base quatre, on doit ainsi décomposer les trois groupes : on va grouper les deux groupes de quatre en un groupe de huit et on va dégrouper un groupe de quatre en quatre unités. Ainsi $30_{quatre}=3x4=1x8+4x1=14_{huit}$

L'exercice 2 (Annexe 3) illustre le passage de la base quatre à la huit en passant par la base deux. Pour passer de la base quatre à la base deux, on effectue des groupements par deux. Ainsi 2131 en base quatre s'écrit 10011101 en base deux (nous laissons les détails à la charge du lecteur, voir exercice 2 de l'Annexe 3). Par exemple, le chiffre 3 représente trois groupes de quatre, on groupe en un groupe de huit et il reste un groupe de quatre. Ainsi $3_{quatre}=11_{deux}$ autrement dit 3 en base quatre s'écrit 11 en base deux et ceci quelle que soit la position du chiffre 3 dans le nombre (voir 1.4).

Puis pour passer de la base deux à la base huit, on effectue des dégroupements.

Ainsi, $10011101_{deux}=235_{huit}$.

Après ces exercices nous avons proposé la tâche suivante : nous avons disposé un tas de billes (cent cinquante-sept) et nous avons demandé aux participants d'écrire le nombre de billes en base deux, puis en base quatre puis en base huit. Pour cela, nous avons mis du matériel à disposition : des boîtes contenant une bille, deux billes, quatre billes, huit billes, seize billes, trente-deux billes, soixante-quatre billes et cent vingt-huit billes.

Les participants ont ainsi choisi les boîtes et trouvé que le nombre s'écrit 10011101 en base deux, puis en sélectionnant le matériel disponible en base quatre, ils ont effectué des groupements et trouvé que le nombre s'écrit 2131 en base quatre. Puis en sélectionnant le matériel disponible en base huit, ils ont encore effectué des groupements ou dégroupements et trouvé que le nombre s'écrit 235 en base huit.

Figure 6. Participants de l'atelier 2

Pendant cet exercice, nous avons distribué deux tableaux de nombres (Annexe 4 et photo ci-dessus) pour les passages de la base huit à la base quatre en passant par la base deux. D'un côté, les entêtes des colonnes sont en représentation symbolique et écrites en base dix (puissance de huit : 64, 8, 1, puissances de deux : 64, 32, ..., 1, puissances de quatre : 64, 16, 4, 1) et de l'autre en représentation analogique voire iconique (voir les représentations intermédiaires en 1.1).

La dernière tâche proposée utilise des nombres non entiers. Nous avons demandé comment représenter le nombre qui s'écrit 23,5 en base huit avec le matériel à disposition. Nous avons d'abord dû déterminer qu'il fallait choisir pour la boîte unité une boîte pouvant contenir un multiple de huit (voir figure 7).

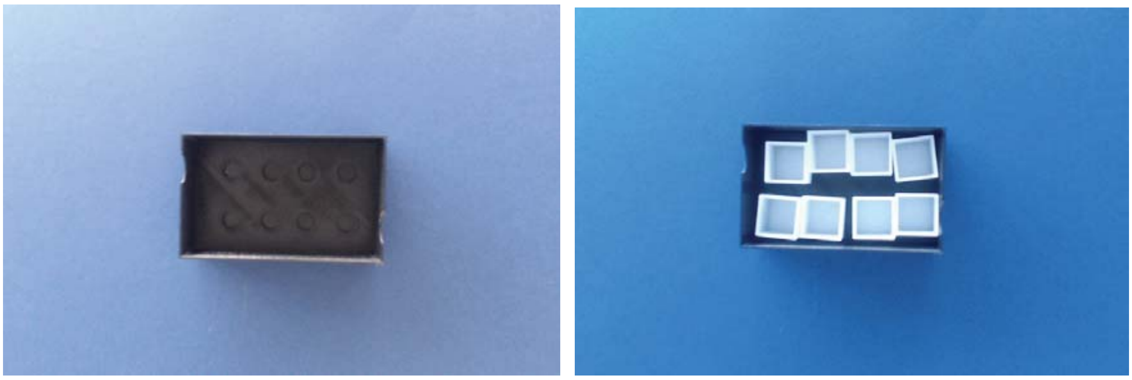


Figure 7. Boîtes unité en représentation symbolique de type iconique. Sur la photo de droite, la boîte unité contient des boîtes blanches (groupements d'ordre moins un ou huitième).

Nous avons représenté ainsi le nombre 23,5 en base huit (voir figure 8), en base deux puis en base quatre.

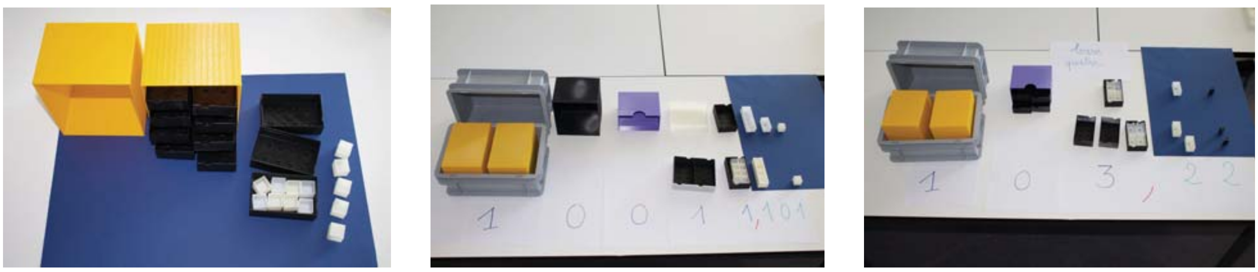


Figure 8. 23,5 en base huit (à gauche), en base deux (au milieu), en base quatre (à droite)

En base huit, le huitième de l'unité est la petite boîte blanche (pouvant contenir 1 bille). Sur la photo de gauche (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec :

- deux boîtes jaunes qui contiennent chacune huit boîtes noires (unités).
- trois boîtes noires qui sont les trois unités du nombre (une unité en base huit contient huit petites boîtes blanches).
- cinq boîtes blanches qui correspondent aux cinq huitièmes du nombre.

En base deux, la moitié de l'unité[1] est la boîte blanche pouvant contenir 4 billes. Le quart de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir deux billes. Le huitième de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir 1 bille. Sur la photo du milieu (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec le matériel en base deux :

- une boîte grise qui contient seize unités (deux boîtes jaunes de huit boîtes noires chacune)
- une boîte blanche qui contient deux boîtes noires (c'est-à-dire deux unités)
- une boîte noire unité (qui contient huit petites boîtes blanches d'un huitième)
- une boîte blanche (un demi de l'unité ou une demi boîte noire, qui contient quatre petites boîtes blanches d'un huitième)
- une petite boîte blanche d'un huitième.

En base quatre, le quart de l'unité est la boîte blanche pouvant contenir deux billes et le seizième de l'unité est la boîte noire pouvant contenir une demi-bille. Sur la photo de droite (figure 8), le nombre 23,5 en base huit est représenté avec le matériel en base quatre :

- une boîte grise qui contient seize unités (quatre boîtes violettes de quatre boîtes noires chacune)
- trois boîtes noires d'une unité (qui contiennent chacune quatre petites boîtes d'un quart ou de deux billes)
- deux boîtes blanches d'un quart d'unité chacune (ou de deux billes chacune)
- deux demi boîtes noires d'un seizième d'unité chacune (ou d'une demi-bille chacune)

La question soulevée est de savoir si le fait de manipuler des boîtes avec ou sans billes change la représentation du nombre ? Les boîtes avec billes correspondent à une représentation analogique du nombre et sans les billes à une représentation plus symbolique. Lorsqu'on manipule ce type de matériel de numération pour représenter des nombres non entiers dans des bases autres que dix, cela a posé des difficultés aux participants : le choix de l'unité, le choix du matériel correspondant à chacun des ordres g^{un}, g^{deux}, g^{trois} en bases deux, quatre et huit, le choix du matériel disponible pour chaque base, les règles d'échanges pour passer d'une base à l'autre avec le 0,5 en base huit.

Une des difficultés relevant d'un aspect mathématique sous-jacent pourrait être l'association du nombre avec le cardinal d'un ensemble pour la partie non entière du nombre.

Pour les ateliers 1 et 2, des participants ont insisté sur la difficulté de précision du vocabulaire employé. Par exemple, la phrase « en base quatre, on n'a pas un huitième » pour expliquer qu'on n'a pas de boîte correspond au huitième en base quatre devrait être remplacée par « un huitième n'est pas un groupement en base quatre » ou alors « un huitième ne fait pas partie des ordres de grandeur à

[1] Nous voyons ici en acte que $1_{deux} = 1_{quatre} = 1_{huit}$.

disposition en base quatre » (puissances de quatre). En effet, en base quatre, on passe directement de « un quart », un groupement d'ordre moins un à « un seizième », un groupement d'ordre moins deux. Notons que si l'on ne peut pas utiliser les notations 1/4 et 1/16 rattachées à la base dix dans les représentations symboliques, on peut très bien utiliser les mots « un quart » et « un seizième » puisque nous avons fait le choix de ne pas adapter notre représentation auditive-verbale à la base dans laquelle on travaille (voir 1.1).

3 Atelier « addition-soustraction »

Dans cet atelier, il est demandé aux participants d'effectuer des additions et des soustractions de nombres entiers avec du matériel en base dix puis en base trois. L'objectif de cet atelier est de montrer qu'avec le matériel proposé, pour effectuer ces calculs, on effectue des échanges et on n'est pas nécessairement dans l'aspect positionnel de la numération (représentation intermédiaire iconique, voir figure 2).

Figure 9. Participants de l'atelier 3

Nous avons demandé d'effectuer 285+147 en base dix avec le matériel (voir figure 9), puis 345 – 187 en base dix.

Figure 10. Calcul 285+147 en base dix avec le matériel

Pour la soustraction, nous avons demandé d'effectuer les calculs par dégroupement et par compensation avec le matériel. Il est ressorti que l'utilisation du matériel incite à soustraire par dégroupement (méthode « suisse ») plutôt que par compensation (méthode « française »).

Nous avons ensuite demandé d'effectuer le calcul 1222+2212 écrit en base trois, ceci avec le matériel de la photo ci-dessous et une fiche à compléter en même temps (voir figure 11).

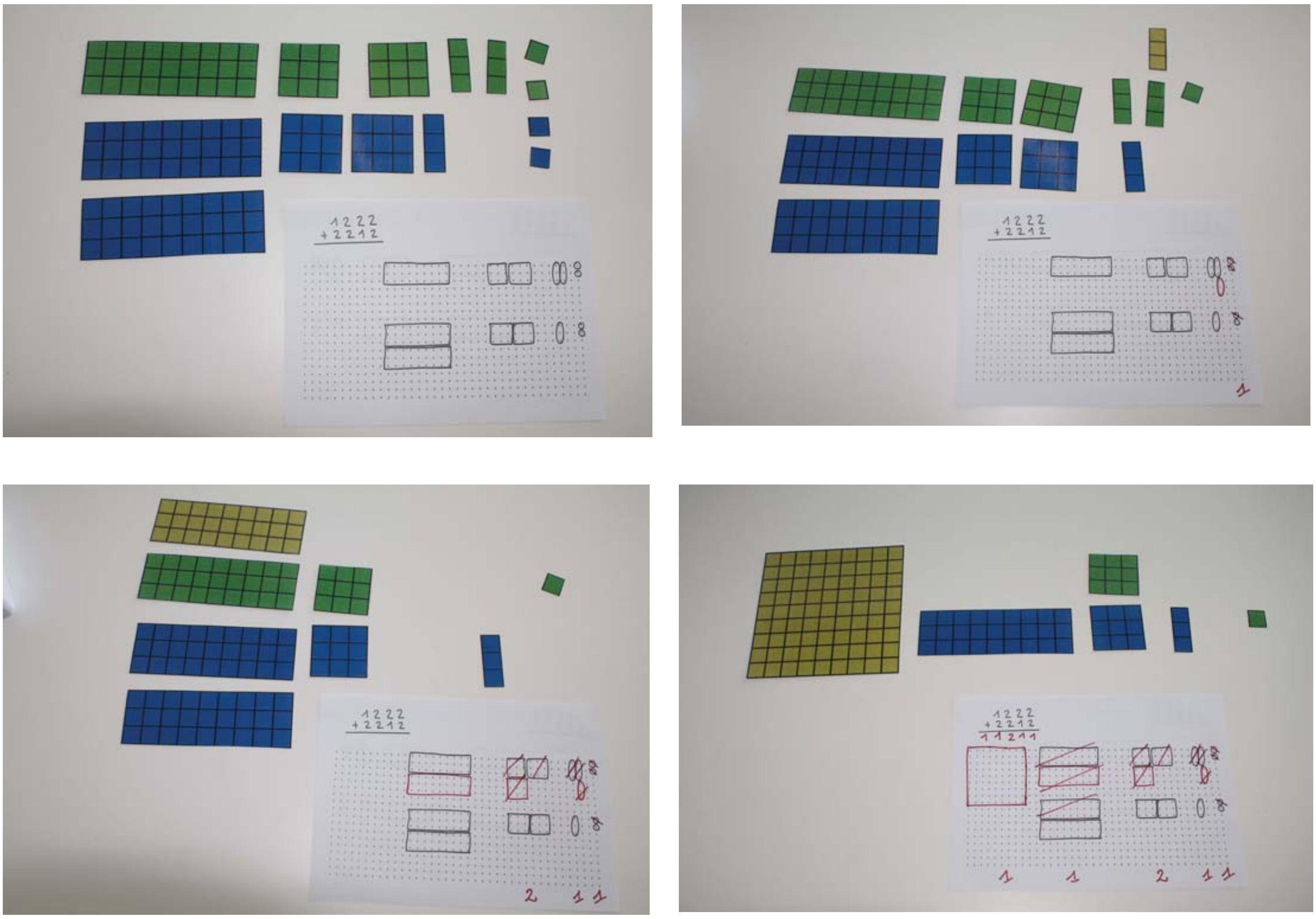


Figure 11. Calcul 1222+2212 écrit en base trois avec le matériel

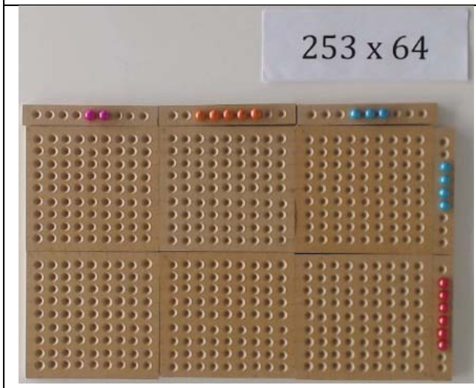
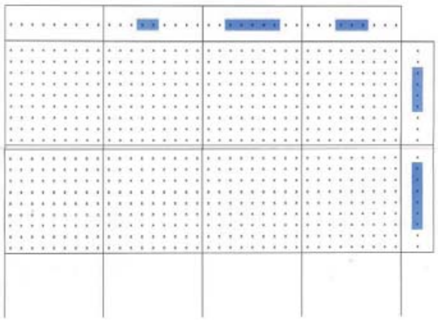
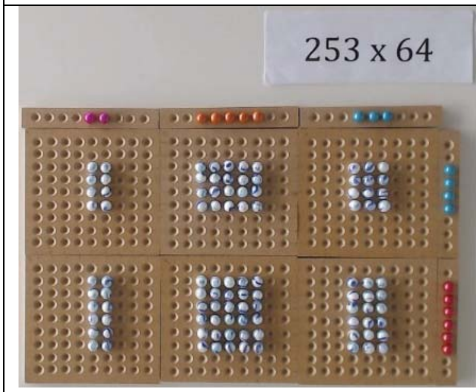
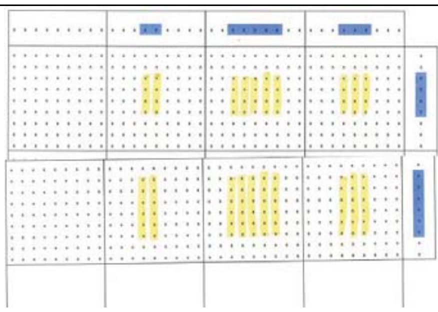
Comme pour la base dix, nous avons ensuite proposé d'effectuer des soustractions avec ce matériel et comme pour la base dix, les participants ont signalé que le matériel incite à soustraire par dégroupement. On peut aussi noter que ce matériel est iconique et qu'il n'est pas positionnel. Toutefois, la plupart des participants ont organisé les calculs comme ci-dessus, en respectant les positions habituelles des différents groupements.

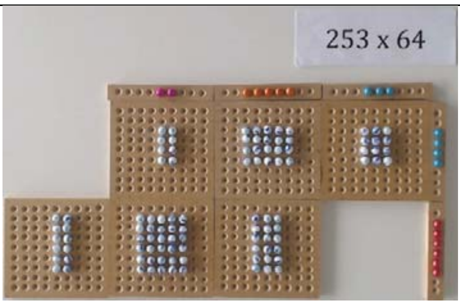
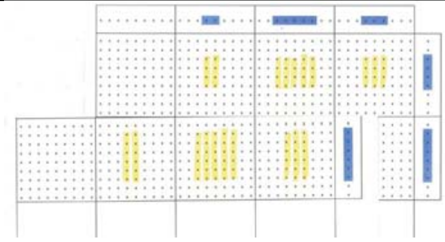
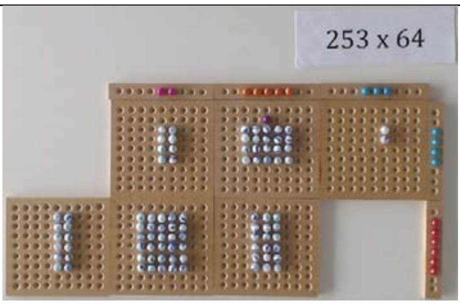
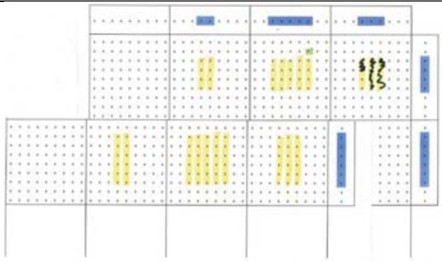
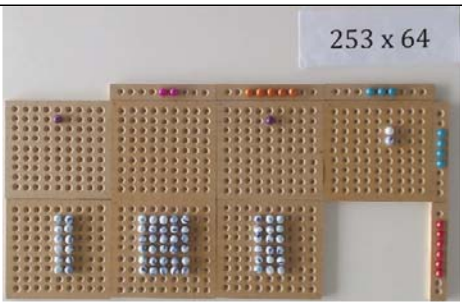
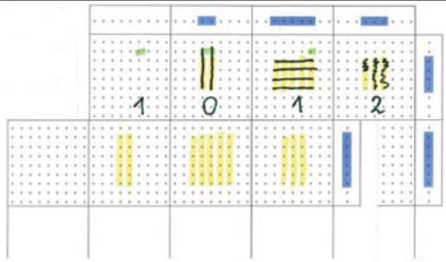
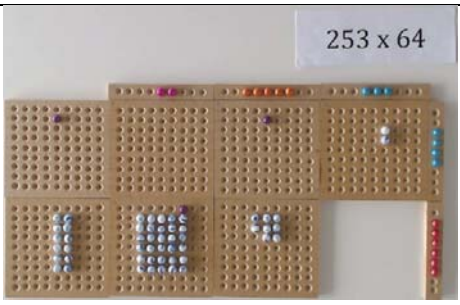
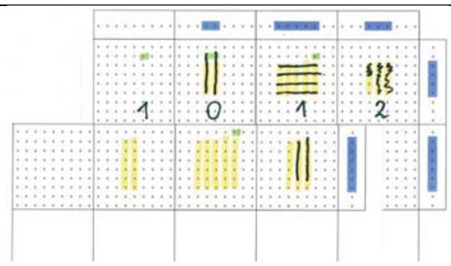
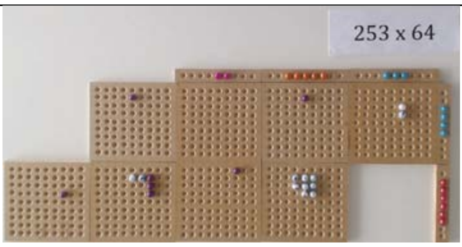
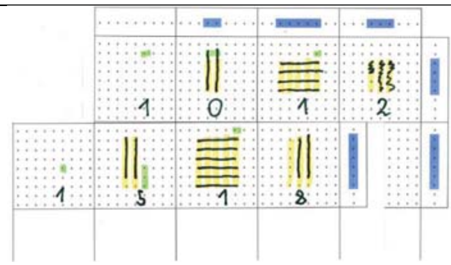
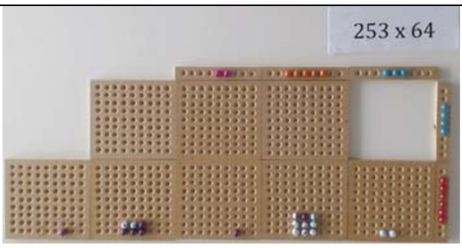
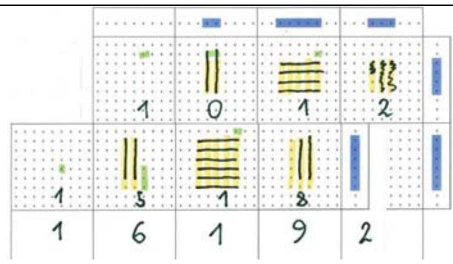
4 Atelier « multiplication – division »

Le matériel présenté dans cet atelier permet d'effectuer les quatre opérations. Toutefois nous n'avons proposé que des tâches pour multiplier et pour diviser. Contrairement à ce qui se passait dans l'atelier 3, nous avons travaillé beaucoup sur l'aspect positionnel de la numération puisque nous nous situons dans la représentation intermédiaire qui utilise l'abaque (représentation intermédiaire symbolique, voir figure 2). Comme le matériel est très différent de celui utilisé dans les autres ateliers, nous avons dans un premier temps montré comment l'utiliser pour effectuer une multiplication puis une division en base dix. Nous avons ensuite laissé du temps aux participants pour le tester dans d'autres bases et noter quelles sont les représentations utilisées et quels sont les moments où la base intervient.

Figure 12. Participants de l'atelier 4

Dans ce qui suit, nous allons présenter une série de photographies qui illustrent une multiplication en base dix puis une division en base quatre. Le tableau ci-dessous montre ce qui correspond à la multiplication en base dix avec l'exemple 253 multiplié par 64.

Ce qui est montré par l'animateur de l'atelier (le formateur dans le contexte du cours)	**Ce qui est noté par les participants en observant le formateur (les étudiants dans le contexte du cours)**	**Ce qui est donné comme explications orales**
		Pour effectuer la multiplication 253x64 on pose le 253 en entête de colonnes de notre abaque et le 64 en posant le 4 sur la première ligne et le 6 sur la seconde
		On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant dans chaque case le bon nombre de colonnes et de lignes. Cela permet d'éviter de se référer au répertoire mémorisé des tables de multiplication en auditif-verbal

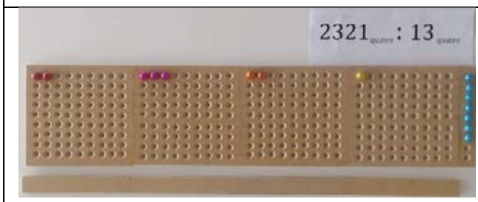
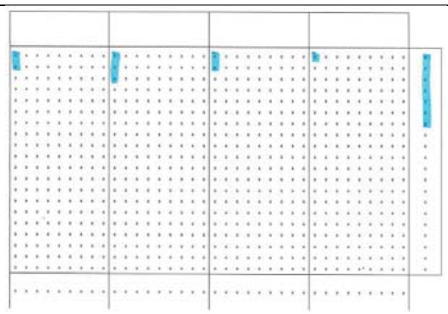
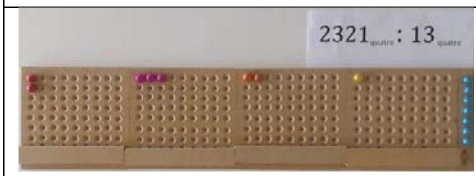
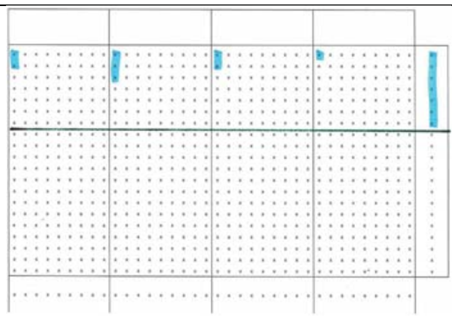
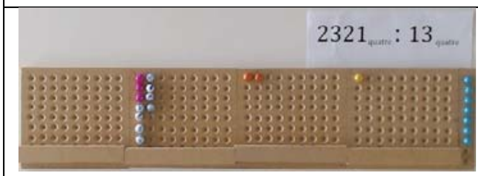
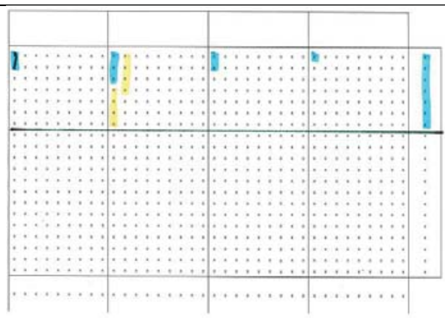
		Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6x10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche[2]
		Comme on travaille en base dix, on fait des groupements de dix à chaque fois que c'est possible en ajoutant un élément par groupement dans la colonne de gauche
		Le nombre 1012 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 4
		On effectue, pour la seconde ligne de l'abaque le même type de regroupements par dix à chaque fois que c'est possible
		Le nombre 1518 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 6. Le nombre 15180 correspond lui au résultat de la multiplication de 253 par 60
		On additionne en regroupant dans chaque colonne les résultats obtenus en multipliant. Le nombre 16192 correspond bien au résultat de la multiplication de 253 par 64. Dans certains calculs, il peut être nécessaire d'effectuer des

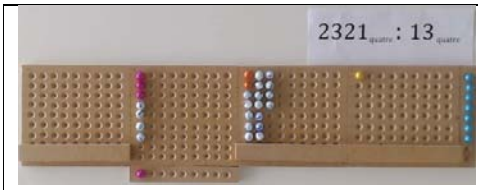
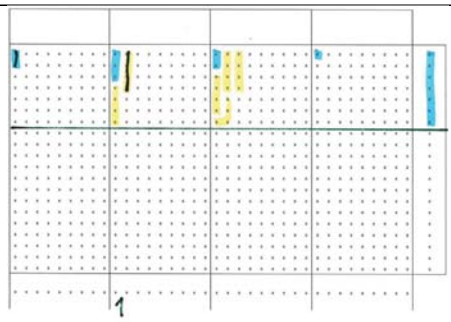
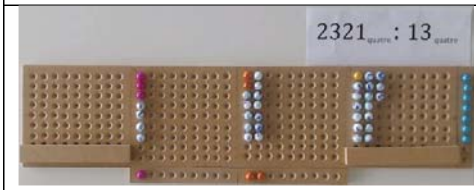
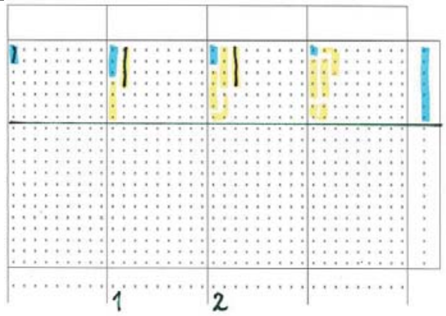
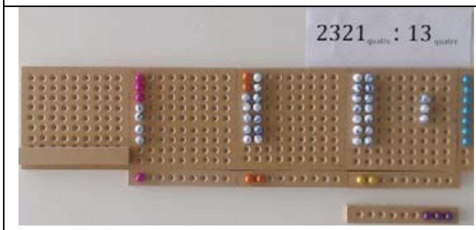
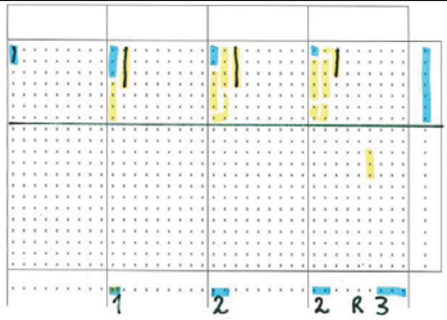
[2] Notons que le matériel « papier » utilisé donne l'impression qu'une bande bleue apparaît dans la colonne des unités, il s'agit en fait de la translation de la deuxième ligne. Des améliorations devront encore être apportées à cet outil de calcul encore en développement.

		regroupements par dix à ce stade.

Les participants ont très rapidement compris que si l'on travaille en base huit par exemple, la seule différence apparaît au moment des groupements qui se font par huit et plus par dix. Cette façon de procéder a permis d'éviter la transcription entre les tables de multiplication mémorisées en auditif-verbal et leur réécriture symbolique en base huit. On peut noter que les multiplications sur chacune des cases de l'abaque ne dépendent pas de la base choisie mais uniquement des nombres qui correspondent aux chiffres utilisés. En effet, les nombres que l'on écrit 253 et 60 en base dix sont différents de ceux que l'on écrit 253 et 60 en base huit. Par contre les nombres associés, par exemple, aux chiffres 5 et 6 utilisés pour signifier le nombre de groupements d'ordre un dans l'écriture de chacun de ces nombres sont eux égaux et ce sont ces nombres-là que l'on multiplie sur les cases de l'abaque.

Le tableau ci-dessous illustre une division en base quatre avec l'exemple : le nombre 2321 divisé par le nombre 13 écrits en base quatre.

Ce qui est montré par l'animateur de l'atelier (le formateur dans le contexte du cours)	**Ce qui est noté par les participants en observant le formateur (les étudiants dans le contexte du cours)**	**Ce qui est donné comme explications orales**
		Pour diviser le nombre 2321 par le nombre 13 écrits en base quatre, on pose le nombre 2321 sur les colonnes de l'abaque.
		En base quatre, le nombre 13 correspond au nombre qui se dit sept et qui se représente à l'aide de sept objets. Diviser par ce nombre revient donc à faire des groupes de sept objets indépendamment de la base
		Comme on ne peut pas faire de groupe de sept avec deux objets, on remplace chacun des deux objets par des groupements de quatre dans la colonne de droite
		On effectue alors des groupes de sept dans cette colonne en utilisant les colonnes de chaque case qui ont sept lignes.

		Comme lors des deux étapes précédentes, on remplace chaque objet restant par quatre objets dans la colonne de droite et on effectue des colonnes de sept
		Idem
		A ce stade, on peut soit déclarer que les trois objets qui restent constituent un reste ou ajouter des cases à droites pour obtenir un nombre non entier comme quotient

IV - BILAN ET CONCLUSION

Les participants ont été actifs pendant chacun des quatre ateliers, ils nous ont fait part d'un certain nombre de remarques exposées dans le descriptif des ateliers. Il est ressorti que le matériel présenté ainsi que les tâches ont été très appréciés par leur aspect innovant, par le fait qu'ils permettent de matérialiser les algorithmes des quatre opérations, de mettre en évidence que les répertoires mémorisés le sont en auditif-verbal, ce qui est caché lorsqu'on écrit en base dix. En effet, lorsqu'on manipule le matériel pour effectuer des multiplications (atelier 4), on n'utilise pas le répertoire mémorisé : on utilise le produit cartésien. Par exemple, si on multiplie six par sept, on obtient quarante-deux, ceci est vrai quelle que soit la base et c'est uniquement lorsqu'on va écrire le nombre quarante-deux que l'on va le décomposer en quatre dizaines et deux unités pour la base dix, ou cinq huitaines et deux unités pour la base huit ($42_{dix}=52_{huit}$).

Certains participants ont relevé que le matériel est volumineux, pas disponible dans le commerce et donc long à fabriquer soi-même avec une imprimante 3D. Certes, ce matériel peut être long voir coûteux à fabriquer, mais il est rentabilisé dans le cadre d'une formation dans le sens où il est utilisé par le formateur, puis mis à disposition des étudiants.

Les quatre ateliers avaient lieu simultanément, ainsi les quatre groupes de participants n'ont pas nécessairement suivi les ateliers dans l'ordre présenté dans ce texte. Par ailleurs, nous avons été pris par le temps et n'avons pas pu organiser de mise en commun des quatre ateliers, ce qui aurait permis à chacun de s'exprimer sur l'ensemble des quatre ateliers, notamment de faire des liens entre les ateliers 1-2 et 3-4, autrement dit entre la numération et les algorithmes. Nous n'avons pas non plus abordé la question de l'utilisation du matériel en base dix des ateliers 3 et 4 par un enseignant dans sa classe à l'école primaire.

Même s'il est trop tôt pour tirer des conclusions de ces innovations, nous pouvons toutefois déjà relever que le taux d'échec lors de la première session de l'examen a pratiquement été divisé par deux passant de près de 17,6% en 2014 à environ 9,6% en 2017 avec un examen quasi identique sous forme de questions à choix multiples. Suite à cet atelier, nous envisageons d'analyser plus en profondeur les résultats de nos étudiants par rapport au changement du cours de cette année pour voir les effets de ce dispositif de formation sur un plus long terme. Nous envisageons également de fabriquer du matériel similaire en base dix, mais aussi de réfléchir sur les liens entre les représentations proposées par Dehaene et par les sémiologues (Pierce), notamment essayer de définir ce que nous avons nommé la représentation symbolique en référence à Dehaene.

V - BIBLIOGRAPHIE

ANSELMO B., ZUCCHETTA H. (2013) Du comptage à la numération. Une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N*, **91**, 71-91.

BATTEAU V., CLIVAZ S. (2016) Le dispositif de *lesson study* : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, **98**, 27-48.

BEDNARZ N., JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, **33**, 5-31.

CLIVAZ S., DERUAZ M. (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, **92**, 15-23.

COPIRELEM (2015) *Numération à l'école primaire. Un scénario de formation* (ARPEME Ed.). Paris: COPIRELEM, Ressources et formation.

DEHAENE S. (1992) Varieties of numerical abilities. *Cognition,* **44**, 1-42.

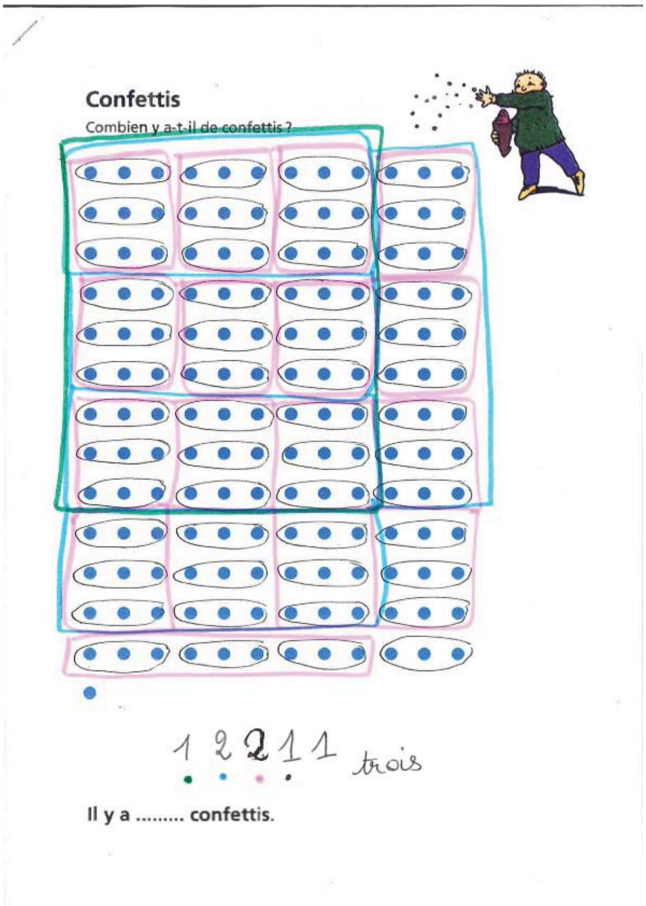
DERUAZ M., CLIVAZ S. (2012) *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maitres primaires.* Paper presented at the EMF 2012.

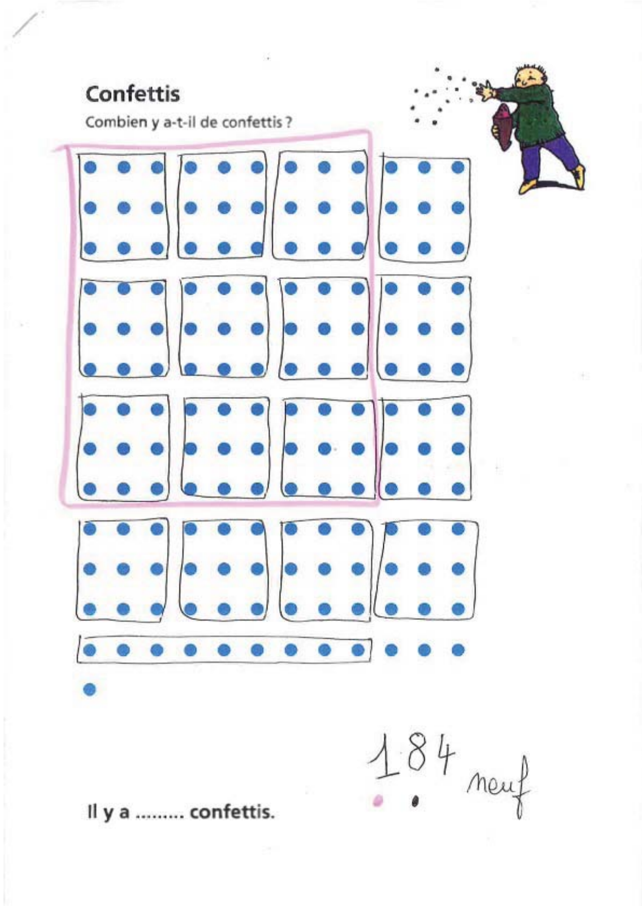
DIAS T., DERUAZ M. (2012) Dyscalculie : et si les enseignants reprenaient la main ? *A.N.A.E.,* **120-121**, 6.

MOUNIER E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Paris 7, Paris.

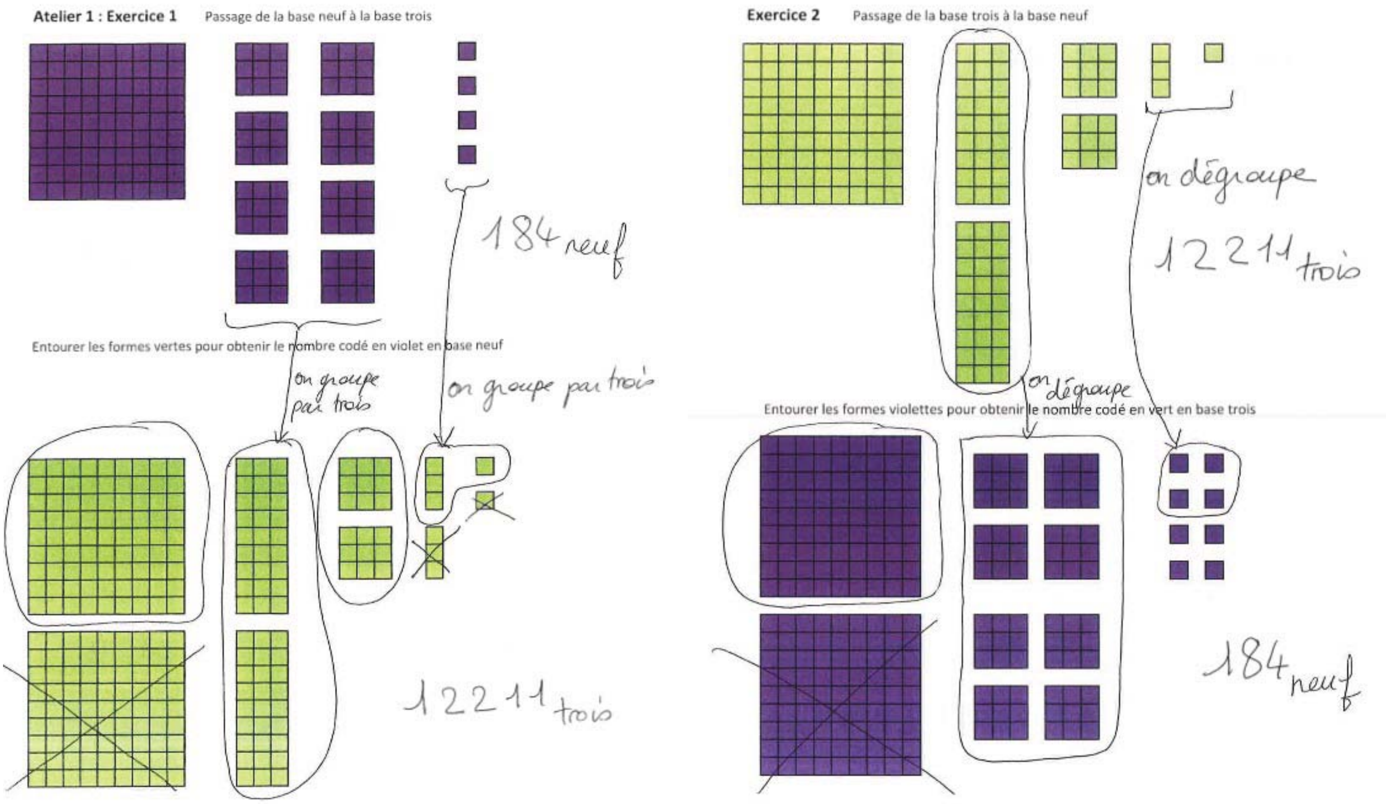
VIVIER L. (2015) Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - La base sept pour de futurs professeurs des écoles. *Cahier du LDAR*, 127-139.

ANNEXE 1 : ATELIER 1 « CONFETTIS »

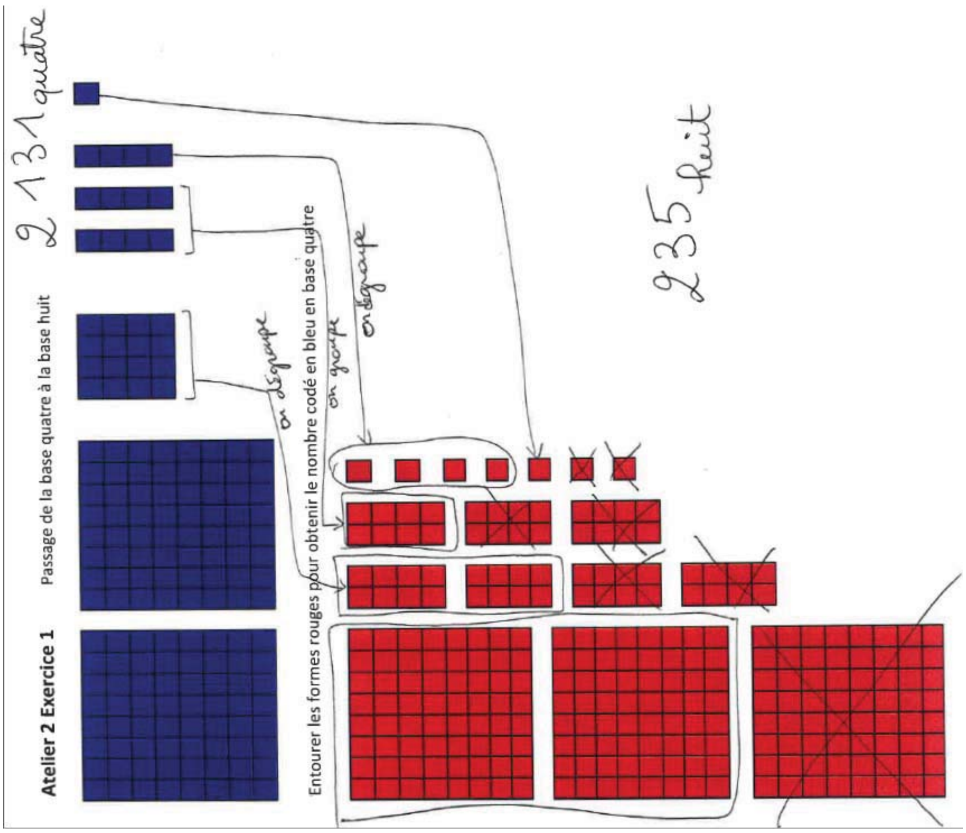


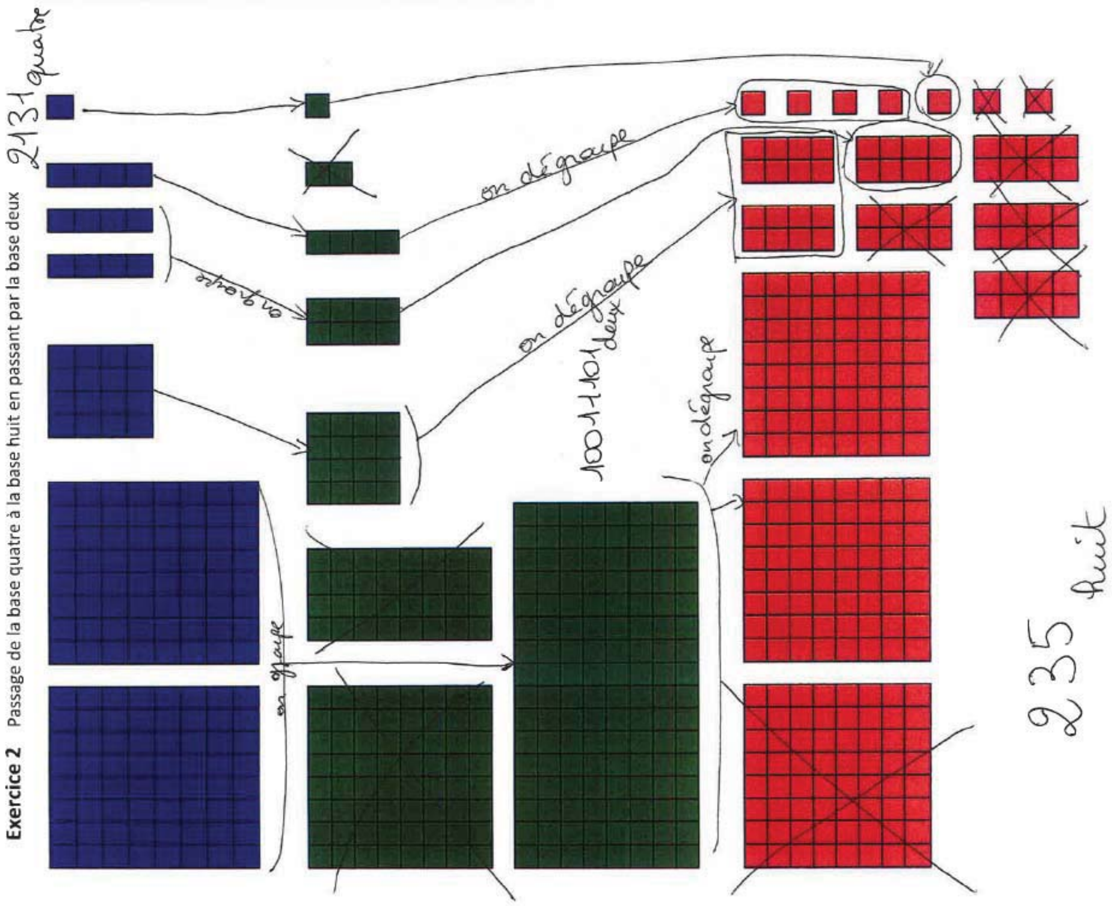


ANNEXE 2 : ATELIER 1 PASSAGE DE LA BASE TROIS A NEUF

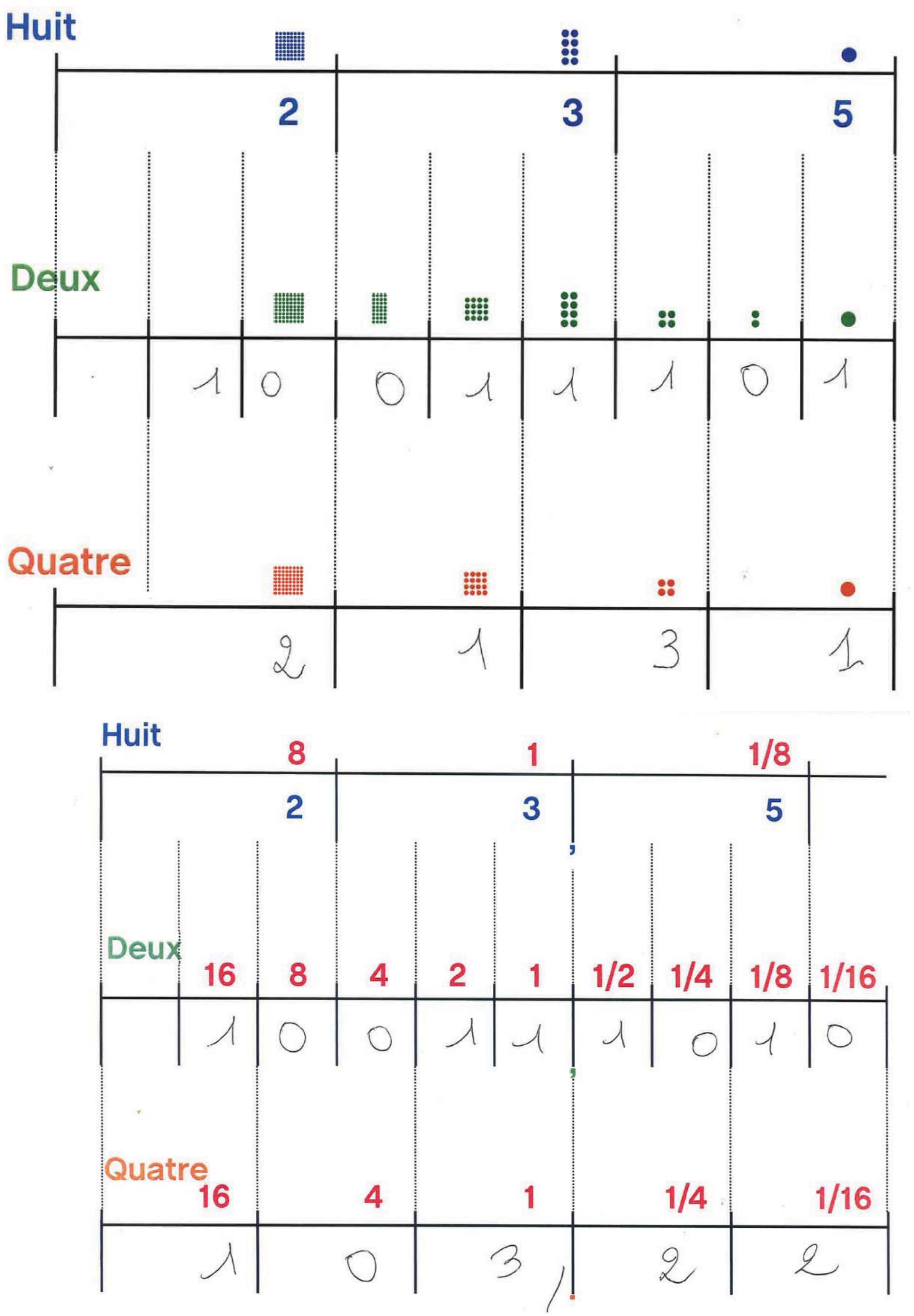


ANNEXE 3 : ATELIER 2 PASSAGE DE LA BASE QUATRE A HUIT




Exercice 2 Passage de la base quatre à la base huit en passant par la base deux
2131 quatre
on groupe
on dégroupe
on dégroupe
10011101 deux
on dégroupe
on groupe
235 huit

ANNEXE 4 : ATELIER 2 TABLEAUX DE NOMBRES



L'EXPRESSION DES PROPRIETES GEOMETRIQUES ENTRE GEOMETRIE STATIQUE ET GEOMETRIE DYNAMIQUE

Sylvia COUTAT
Chargée d'enseignement, UNIVERSITE DE GENEVE, DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Résumé
Cet atelier pourrait être une suite de l'atelier présenté par Coutat et Falcade à la COPIRELEM 2012 qui étudiait le rôle de l'enseignant dans une séquence d'enseignement utilisant un logiciel de géométrie dynamique (LGD). Alors que ce précédent atelier était centré sur l'enseignant, ce présent atelier se centre sur les élèves. Une situation de communication des propriétés géométriques est le cœur de l'atelier. Les analyses des productions écrites et discussions des élèves s'appuient sur l'articulation de différentes ressources sémiotiques (langage verbal, représentation écrites et environnement dynamique) ainsi que sur les genèses instrumentales opérées à partir de l'artefact Déplacement. Les interactions de ces différentes ressources seront analysées à l'aide des modes de fréquentations (Bulf, Mathé et Mithalal, 2014).

I - FONDEMENTS THEORIQUES

1 Déconstruction dimensionnelle

Les figures géométriques ainsi que leurs représentations (dessins, schémas, …) occupent une place centrale dans la pratique de la géométrie. La perception des figures commence à partir de leur reconnaissance avec les dessins. Cependant identifier les différentes propriétés d'une figure dans un dessin est le résultat d'un apprentissage. En effet, Perrin-Glorian et Godin (2014) dans la poursuite des travaux de Duval (2005) identifient trois visions des figures. La première vision des élèves concerne l'identification de la forme par sa surface, elle est appelée la vision « surface ». Les lignes sont perçues comme des bords de surfaces et les points comme des sommets de surfaces. La deuxième vision est la vision « lignes ». Dans cette vision les lignes sont identifiées à travers les instruments, la règle donnant accès aux droites et segments et le compas aux cercles et arcs de cercles. Enfin dans la vision « points » les points peuvent être créés à partir d'intersection de lignes. Ils deviennent les éléments de bases des lignes (2 points pour obtenir une droite ou un cercle).

Cependant pour une pratique de la géométrie qui s'intéresse aux propriétés des figures, la vision « surface » doit s'enrichir des autres visions. En effet cet enrichissement est fondamental en géométrie pour l'apprentissage des propriétés, pourtant elle représente une vraie difficulté chez les élèves. Perrin-Glorian et Godin (2014) se sont interrogés sur les effets possibles d'activités de constructions instrumentées pour l'évolution de ces visions. Ces activités concernent des restaurations de figures s'appuyant sur une perception visuelle progressivement instrumentée. Ainsi, les propriétés géométriques des figures concernées (portées par les droites et les points de la figure) sont progressivement introduites à l'aide des outils de géométrie.

2 Logiciel de géométrie dynamique

2.1 Genèse instrumentale (Rabardel)

Les outils de géométrie sont porteurs de propriétés et c'est leur prise en main qui permet un travail spécifique sur les propriétés. En effet, selon Rabardel (1995), l'artefact est un objet matériel ou symbolique en soi, parfois considéré seulement en une portion bien délimitée, qui a été construit selon une connaissance spécifique et qui assure l'accomplissement de certains buts. L'*instrument* est défini par Rabardel (1995) comme une entité mixte qui comprend d'une part l'artefact et d'autre part ses schèmes d'utilisation. Ces schèmes sont les actions relatives à l'artefact, que le sujet lui-même a élaborées et qui lui sont nécessaires pour l'utilisation de l'artefact. L'instrument est donc une construction faite par le sujet, qui contient l'artefact d'une part et les schèmes liés à la tâche d'autre part. Les processus qui accompagnent l'élaboration et l'évolution des instruments et des schèmes pour le sujet, forment la *genèse instrumentale*. Plus précisément, cette genèse se compose de deux processus : le *processus d'instrumentalisation*, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le *processus d'instrumentation*, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes relativement au sujet.

Si on prend l'exemple du compas, il existe plusieurs artefacts compas : compas à pointes - compas de mécanicien - compas d'épaisseur. Chacun de ces compas est le résultat d'un processus d'instrumentalisation. Ensuite, un même compas peut être utilisé pour reporter des longueurs ou pour tracer des cercles. Ces deux utilisations d'un même artefact vont mettre en œuvre des schèmes différents, au cours de processus d'instrumentation différents, ce qui aboutit à la construction par le sujet de d'instruments différents. Instrumentalisation et instrumentation constituent les deux faces indissociables des processus de genèses instrumentales.

2.2 Les instruments Déplacement

Un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD) contient un ensemble d'artefacts disponibles pour l'élève. On retrouve les artefacts classiques de la géométrie comme le compas.

Des artefacts plus élaborés comme les symétries sont aussi disponibles. Enfin un artefact spécifique le Déplacement est particulier à l'environnement dynamique. Tout comme les autres artefacts, le Déplacement utilisé dans une tâche spécifique par un élève va conduire à la construction d'un instrument particulier. Selon Restrepo (2008) plusieurs instruments *Déplacement* peuvent être construits. La première utilisation du déplacement est en générale une exploration non finalisée de la figure par le sujet. Les objets choisis ainsi que les déplacements sont aléatoires. Ce premier instrument développé est appelé *Déplacement non finalisé mathématiquement*. Ce premier déplacement peut évoluer et le sujet peut décider de se focaliser sur certains objets afin d'en déterminer les spécificités, c'est-à-dire leurs comportement face au déplacement. Ce deuxième instrument est le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Cet instrument est fondamental car c'est lui qui donne l'accès aux liaisons entre les objets construits, c'est-à-dire les propriétés de la construction. Nous ne reprenons pas ici toute la classification de Restrepo, nous conclurons cependant avec deux derniers déplacements centraux dans des activités de construction. Dans une tâche de construction ou reconstruction, le sujet peut contrôler chacune des étapes de sa construction. Pour cela, il va déplacer les objets concernés par la construction afin de s'assurer de leur comportement attendu lors du déplacement. C'est le *Déplacement pour valider une construction*. Enfin, le sujet pourra déplacer non pas pour tester la validité de la construction mais pour chercher dans quelle mesure un invariant est effectivement une propriété de la figure. Ce dernier instrument est le *Déplacement pour invalider une construction*. Nous retrouverons ces quatre instruments *Déplacements* dans les analyses des productions des élèves.

II - PROBLEMATIQUE

En ce qui concerne le développement des visions « lignes » et « points », Perrin-Glorian et Godin (2014) ont construits des activités instrumentées de restauration de figures. Pour cela ils ont utilisé des outils de constructions (règle ou compas) mais aussi des artefacts non conventionnels comme les gabarits.

Dans le cadre de ce travail, nous avons considéré un environnement de géométrie dynamique (LGD) avec ses outils. Lors de l'observation en classe nous avons utilisé le logiciel Cabri Elem qui permet des rétroactions spécifiques selon les actions des élèves. Pour plus de détails sur le logiciel et la séquence, nous vous invitons à lire Coutat et Falcade (2012).

Dans l'environnement dynamique, les propriétés des objets géométriques construits sont identifiables à travers la mobilisation des *Déplacements* (en particulier le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*). Alors que la déconstruction dimensionnelle permettant l'accès aux propriétés géométriques est rendue accessible par les outils de construction du papier-crayon, nous souhaitons identifier dans quelle mesure ce même objectif peut être atteint avec les outils spécifiques d'un LGD. Pour cela nous avons conçu une séquence de géométrie pour une classe de CM1-CM2 avec l'utilisation d'un LGD dans des tâches de construction, reproduction, description, reconnaissance de figures géométriques. Les instruments qui sont au centre des activités s'appuient sur les outils de construction (droite, cercle, …) mais aussi l'outil Déplacement. Le LGD est utilisé conjointement à des activités de géométrie dans l'environnement du papier-crayon. Chaque séance utilisant le logiciel est articulée avec une séance en papier-crayon où les manipulations et observations avec le LGD sont évoquées. La séquence proposée en classe a pour objectif la découverte des propriétés géométriques pour les CM1-CM2 (parallélisme, perpendicularité et équidistance). Elle se compose de cinq séances avec le logiciel et cinq séances associées avec le papier-crayon. Quelques séances en papier-crayon autour des figures et de leurs propriétés ainsi qu'une évaluation complètent et finalisent la séquence.

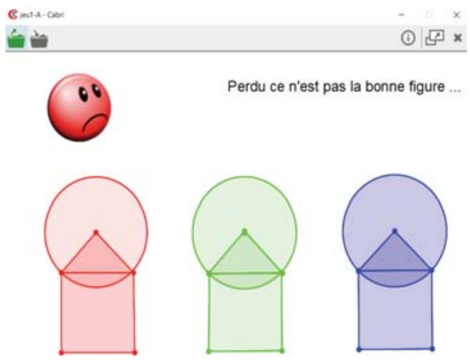
III - TACHE DES ELEVES ET ANALYSE DES PARTICIPANTS

1 Tâche des élèves

La tâche proposée lors de l'atelier est celle proposée aux élèves de CM1-CM2 durant la dernière séance de la séquence construite autour des propriétés de géométrie. Cette tâche s'organise autour d'un jeu d'équipe avec compétition qui utilise un LGD, de la collaboration par l'élaboration de messages. Ces messages permettent d'identifier dans quelle mesure les élèves parviennent à expliciter des propriétés géométriques identifiées dans un environnement dynamique.

Ce travail de formulation n'a pas été objet de l'évaluation. Lors des séances précédentes, les élèves ont travaillé sur la reconnaissance de propriétés nécessitant le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Le codage des propriétés de parallélisme, perpendicularité et équidistance a été introduit et travaillé précédemment lors de la séquence.

Pour le premier échange de messages, chaque équipe est composée d'émetteurs (groupe A) et de récepteurs (groupe B). Les émetteurs reçoivent une figure dans le LGD qu'ils doivent explorer. Suite à cette exploration, la consigne est qu'ils doivent produire un message sur une feuille blanche, ce message doit permettre aux récepteurs de retrouver la figure parmi trois figures données dans le LGD. Une fois le message prêt, il est donné aux récepteurs. Ces derniers ont à leur disposition 3 figures toutes placées dans la même configuration, chacune d'une couleur et avec des propriétés spécifiques. Leur tâche est alors de retrouver celle qui correspond au message des émetteurs. Nous attendons des élèves qu'ils mobilisent les Déplacements pour identifier des invariants ou invalider une construction. Une fois que les récepteurs considèrent avoir trouvé la figure qui correspond au message, ils notent sa couleur sur le message et le renvoie aux émetteurs. Les émetteurs valident le choix des récepteurs en indiquant la couleur choisie dans le logiciel. Le logiciel conclut la partie en affichant les 3 figures mises à disposition des récepteurs et une coupe lorsque le choix est correct ou un smiley malheureux dans le cas inverse. Les émetteurs peuvent alors explorer les 3 figures et s'ils le souhaitent analyser la pertinence de leur message selon les figures données aux récepteurs.



Lors des parties suivantes, les deux groupes de l'équipe (groupes A et B) sont émetteurs en parallèle, c'est-à-dire que les deux groupes reçoivent une figure (groupe A reçoit une figure GA et groupe B reçoit une figure GB, avec GA différente de GB) qu'ils doivent explorer et une feuille pour leur message. Puis les feuilles sont échangées entre les groupes. Le groupe A doit retrouver GB parmi trois figures en utilisant le message du groupe B et le groupe B doit retrouver GA parmi trois figures en utilisant le message du groupe A. Les élèves effectuent sept parties successives. Le *Tableau 1* présente quelques figures proposées aux groupes d'élèves. Les images correspondent à l'état initial de la figure lorsque l'élève ouvre le fichier. Pour faciliter l'analyse de la figure pour ce texte, nous avons complété l'image par le codage des propriétés (dans toutes les figures sauf figure A1) et une brève description. Ces informations complémentaires ne sont pas données aux élèves.

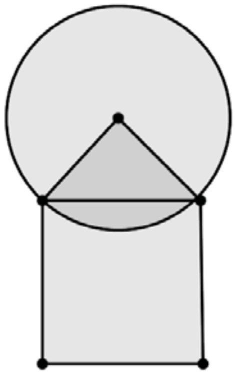
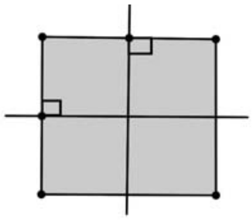
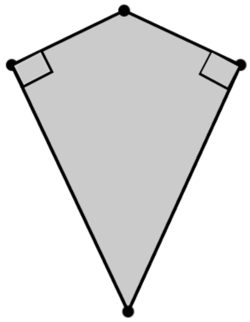
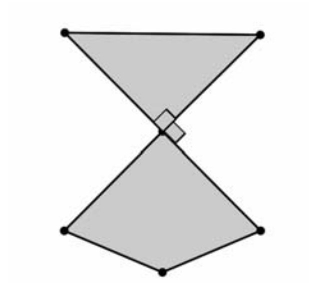
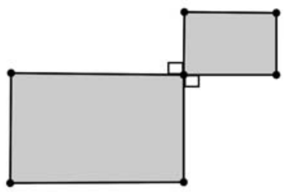
Groupe A	Groupe B
Figure GA1  La figure se compose d'un quadrilatère quelconque, d'un cercle et d'un triangle quelconque. Le triangle et le quadrilatère ont un côté en commun. Le cercle a pour centre un sommet du triangle et passe par un sommet qui commun au carré et au triangle.	Pour le premier échange, pas d'image pour les groupes B qui ne sont que récepteurs.
Figure GA4  La figure se compose d'un quadrilatère quelconque et deux droites coupant perpendiculairement deux côtés consécutifs.	Figure GB4  La figure se compose d'un quadrilatère qui a deux angles opposés droits.
Figure GA7  La figure se compose d'un triangle rectangle et d'un quadrilatère quelconque. Le sommet de l'angle droit du triangle aussi un sommet du quadrilatère. Un côté du quadrilatère est le prolongement d'un des côtés de l'angle droit.	Figure GB7  La figure se compose de deux quadrilatères quelconques avec un sommet en commun. A ce sommet, deux angles droits sont formés par un côté de chaque quadrilatère.

Tableau 1

Pour identifier les propriétés codées ou formulées dans le Tableau 1 les élèves doivent utiliser le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Ainsi, ils doivent choisir un point, le déplacer, identifier comment il se déplace. Le point est-il libre et peut-il se déplacer sur toute la page ? Le point à a-t-il un déplacement contraint sur un objet géométrique (droite, segment, quadrilatère, cercle ….) ? Le point est-il fixe ? Dans le cas d'un point déplaçable, les élèves doivent identifier si le déplacement de ce point implique d'autres déplacements liés. Dans ce cas, il s'agit de trouver la relation entre les déplacements, c'est-à-dire la propriété sous-jacente.

Une fois qu'ils ont identifié la ou les propriétés de leur figure ils doivent les communiquer aux autres membres de leur équipe. Pour cela ils ont une feuille blanche à leur disposition sur laquelle ils peuvent écrire ou dessiner. Une fois les messages rédigés, ils sont échangés entre les groupes des équipes.

Lorsqu'un groupe reçoit un message, il affiche sur son écran la page « récepteur » associée au message. Les récepteurs doivent alors identifier les propriétés du message dans les figures mise à leur disposition. Ainsi ils mobilisent le *déplacement pour valider une construction* afin de valider ou non la présence des propriétés explicitées dans le message. Une fois qu'ils ont identifié la figure correspondant au message, ils écrivent la couleur de cette dernière sur le message et le renvoie aux émetteurs.

2 Outils d'analyse

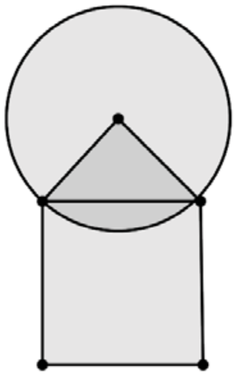
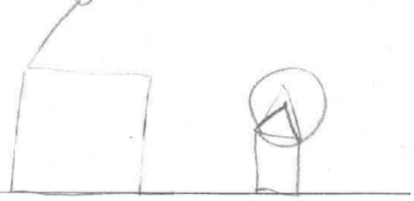
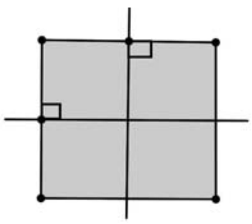
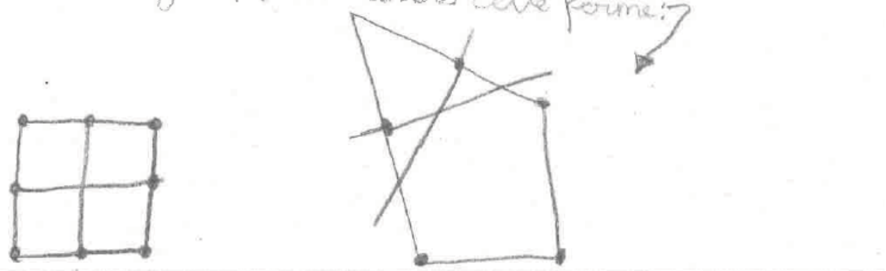
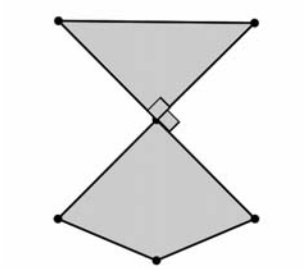
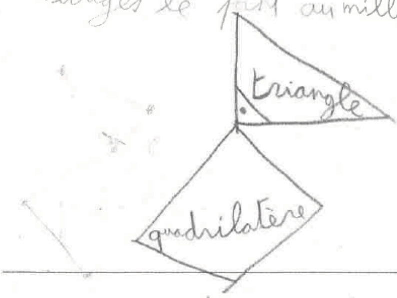
Lors de l'atelier, les participants ont eu accès aux films de quelques parties de deux équipes, ainsi ils ont pu analyser les déplacements effectués par les élèves avec le logiciel, provenant de deux groupes différents, pendant leur rôle d'émetteur ainsi que leurs échanges verbaux. Les messages des élèves ont complété les vidéos des parties.

Afin d'identifier dans quelle mesure l'environnement dynamique permet une vision « lignes » ou « points » ainsi que l'accès aux propriétés, nous utilisons les modes de fréquentation (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014). Ainsi, nous cherchons à identifier les actions et les formulations des élèves afin de reconstruire leurs représentations des propriétés. Les différentes manières d'agir concernent les déplacements mis en œuvre par les élèves et peuvent être identifiées à travers les vidéos. Il s'agit d'identifier quels sont les objets qui sont déplacés, comment ils sont déplacés et à quelle fréquence. L'étude des différentes formulations concernent les échanges entre les élèves ou les verbalisations des élèves au cours de l'exploration de leur figure. Cela nous renseigne sur leur manière d'expliciter les invariants ou non invariants qu'ils identifient. Ces analyses sont complétées par l'analyse des messages. Cette deuxième étape de l'analyse s'appuie sur les registres sémiotiques de Duval (1995). Comme aucune consigne ou contrainte n'est donnée pour l'élaboration du message, les élèves sont libres d'utiliser du texte, des dessins ou un mélange personnel pour expliciter les propriétés qu'ils ont identifiées. Etant donné que des signes de codages ont été introduits précédemment lors de la séquence, nous supposons que les élèves pourront les réinvestir dans leurs messages, en particulier le codage de l'angle droit. L'utilisation du codage dans le message implique des dessins et non du texte. On peut aussi supposer que les élèves utilisent à la fois un dessin et un texte pour décrire leurs figures. La présentation des figures dans le *Tableau 1* s'appuie à la fois sur des dessins, des codages et un texte. Dans les figures 4 et 7 les élèves peuvent réinvestir le codage de l'angle droit. Nous cherchons à identifier : comment les élèves mettent en œuvre le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* et quels invariants ils identifient, comment ils explicitent les propriétés des figures dans leur message.

Ces analyses des actions et verbalisations des élèves autour de l'exploration de la figure dynamique doit nous renseigner sur la perception des propriétés géométriques embarquées dans les constructions.

Dans la suite de ce texte nous présentons quelques éléments d'analyse des vidéos ainsi que les messages de deux groupes A, Cynthia-Karine et Sam-Solan. Les messages concernent les figures A présentées dans le *Tableau 1*.

3 Analyse de Cynthia et Karine

Figures Cabri Elem	Messages élèves
Figure GA1 	Fait un carré, ensuite fait un triangle sur le carré, le point le plus haut du triangle est le centre du cercle.  Réponse de Alexis et Simon Couleur de la figure choisie : bleu (Rouge)
Figure GA4 	c'est un quadrilatère. Quand tu bouges le point en haut à gauche tu resois cette forme :  Réponse de Alexis et Simon. Couleur de la figure choisie : vert (ok)
Figure GA7 	Si tu bouges les points tout en haut, Ils vont tout droits. Si tu bouges le point au millieu. Il dirige le triangle  Réponse de Alexis et Simon Couleur de la figure choisie : rouge (ok)

3.1 Figure GA1

Dans l'exploration de la figure GA1, les élèves balayent la figure avec la souris et les noms des sous-figures qui composent la figure s'affichent (quadrilatère, triangle, cercle). Elles ne déplacent qu'un seul point (sommet du quadrilatère qui est aussi sommet du triangle) brièvement qu'elles remettent en position initiale. Ce déplacement permet d'identifier que ce point est libre, détermine un sommet du triangle et un sommet du quadrilatère et le rayon du cercle, le triangle n'est pas isocèle et le quadrilatère n'est pas un carré. Les élèves ne discutent pas de leurs observations et rédigent directement le message.

Dans la formulation de leur message, elles utilisent le mot « carré » pour nommer le quadrilatère, ce qui nous interroge sur la perception du déplacement mobilisé. Il semblerait que ce déplacement soit non finalisé mathématiquement car il n'a pas abouti à la prise en compte des propriétés du quadrilatère. Nous pouvons aussi compléter qu'elles ont certainement mobilisé principalement une vision « surface » du quadrilatère pour reconnaitre un carré (quadrilatère très familier).

Finalement leur message se compose de deux dessins et d'un texte. Le texte s'apparente à un programme de construction. Le premier dessin pourrait être interprété comme inachevé alors que le second est la reproduction à main levée du dessin qu'elles viennent d'explorer. Les propriétés que l'on pourrait identifier dans leur message sont données dans le registre de la langue naturelle, utilisent un lexique spatial : « sur » pour expliciter le double statut du segment côté du triangle et côté du triangle, et « plus haut ». Le point désigné comme le centre du cercle a été identifié perceptivement, sans le *Déplacement pour invalider une construction*.

Selon nous, cette première figure n'a pas permis la mobilisation d'une vision « lignes » ou « points » dans le sens où les élèves sont restées dans une perception « surface » de la figure avec un lexique spatial et un *déplacement non finalisé mathématiquement*.

3.2 Figure GA4

Dans l'exploration de la figure GA4, les élèves ne déplacent qu'un seul sommet. Ce déplacement permet de déformer le quadrilatère et de déplacer indirectement les droites perpendiculaires aux côtés. Les propriétés mises en évidence lors de ce déplacement sont que le sommet est libre, que le quadrilatère n'est pas un carré et que les deux droites sont liées par une propriété aux côtés du quadrilatère. Alors que les premiers déplacements se terminent en position initiale, les suivants se terminent laissant la figure dans une position très différente de la position initiale.

Le message se compose là encore de dessins et de texte. Le texte prend une forme de description et s'articule avec les dessins. Les dessins représentent la figure dans deux configurations différentes. La configuration initiale et la configuration obtenue lors du déplacement du sommet. On retrouve les droites perpendiculaires aux deux côtés consécutifs cependant il semble que cela soit davantage dû à la précision de la reproduction qu'à une volonté de reproduire la relation de perpendicularité entre les côtés et les droites.

Le déplacement mis en œuvre par les élèves permet d'obtenir une configuration différente, cette configuration n'est pas analysée dans ces spécificités géométriques mais plutôt spatiales, ce serait donc un *Déplacement non finalisé mathématiquement* que les élèves utilisent. Ainsi, tout comme dans la partie précédente, la figure semble être perçue davantage dans sa globalité que par ses propriétés géométriques, ce qui laisse penser que les élèves mobilisent principalement une vision « surface ».

3.3 Figure GA7

L'exploration de la figure GA7 commence différemment des précédentes. En effet les élèves déplacent le du triangle appartenant à la droite perpendiculaire au côté du quadrilatère, son déplacement est ainsi contraint sur une droite. La surprise de ce déplacement est perceptible chez les élèves « oh regarde ! Ici on peut dire des choses ! », mais aussi dans les déplacements de la souris. Nous pouvons voir sur l'écran que les élèves essaient de déplacer le point en dehors de la trajectoire contrainte mais sans succès. Cette observation sur un point les incite à déplacer un autre point, elles choisissent l'autre extrémité de l'hypoténuse. En essayant d'agir sur le déplacement contraint des points, nous considérerons que les élèves mettent en œuvre, à ce moment-là, le *Déplacement pour invalider une construction*. Puis elles prolongent leur exploration en déplaçant un troisième point, sommet libre du quadrilatère.

Lors de la rédaction de leur message, elles utilisent à nouveau le déplacement non plus pour essayer de modifier la trajectoire contrainte des points mais pour en identifier la spécificité. Cette deuxième étape dans l'analyse de la figure utilise le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Finalement tous les points sont déplacés. Une attention particulière est mobilisée sur les points dont le déplacement impliquait le déplacement d'autres sous-objets de la figure comme le sommet commun au triangle et au quadrilatère. Le fait que les élèves aient une attente lors du déplacement qui sous-entend le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* apparait aussi dans leurs échanges : « en fait moi je bouge et je te donne des idées, regarde ». Finalement les élèves cherchent à identifier si les propriétés de parallélisme ou de perpendicularité sont présentent dans la figure, elles concluent la présence d'un angle droit en déplaçant un sommet du triangle.

Le message écrit cherche à expliciter les découvertes des élèves. Elles conservent un mélange de texte et dessins dans leur message cependant les deux ne sont plus autant liés, ils sont complémentaires. Le texte informe sur les propriétés de quelques points et le dessin informe sur une propriété du triangle.

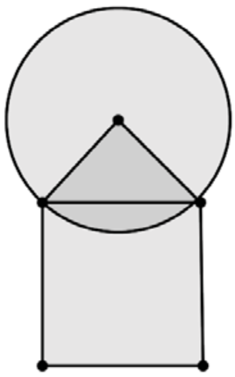
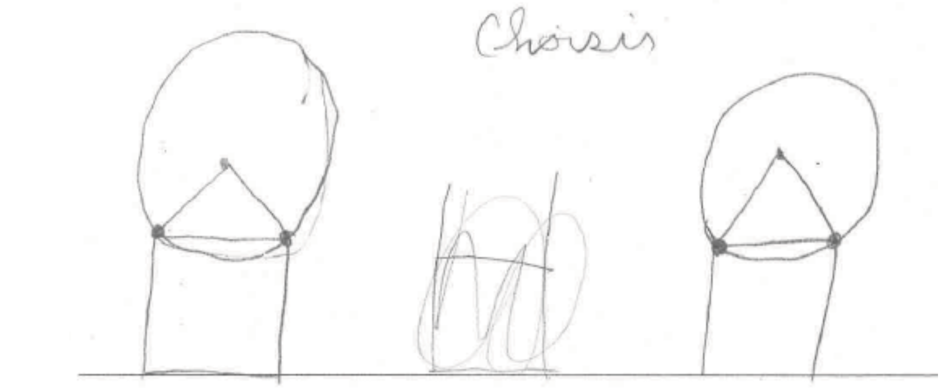
Dans cette dernière partie, les élèves ont su mobiliser le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* et s'interroger sur les propriétés des points et leurs relations. Le dessin ne représente plus une ou plusieurs configurations que peut avoir la figure mais uniquement une propriété de la figure en utilisant le codage de l'angle droit. Le texte explicite maladroitement l'invariance du déplacement des points avec « ils vont tout droits » qui semble signifier l'angle droit. Les élèves parviennent à considérer les droites de la figure, c'est-à-dire une vision « lignes » pour identifier des propriétés géométriques de la figure.

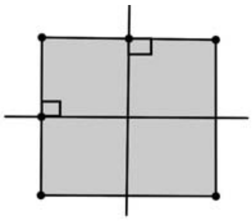
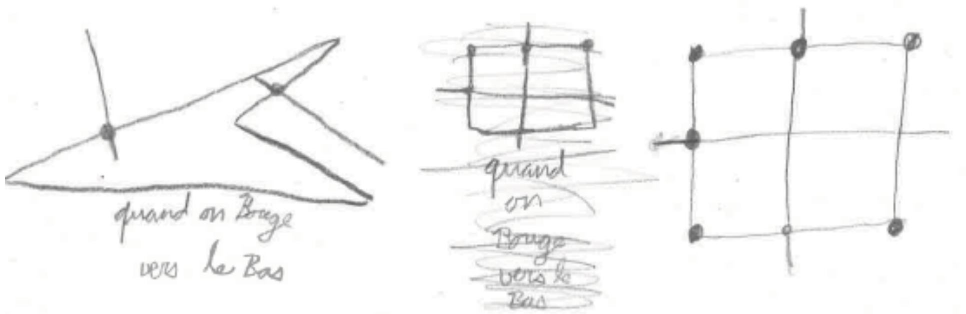
3.4 Bilan Cynthia - Karine

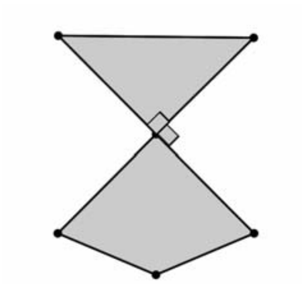
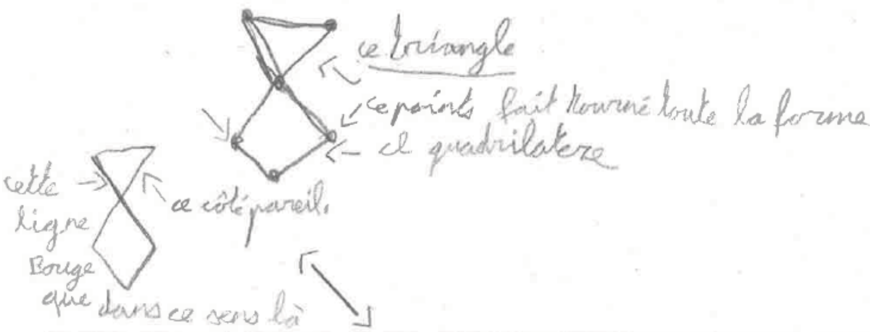
L'analyse des trois parties de Cynthia et Karine permet d'identifier une évolution des élèves aussi bien dans la mobilisation des instruments Déplacement que dans l'élaboration des messages. Dans les deux premières parties, elles utilisent le *Déplacement non finalisé mathématiquement* en dessinant des configurations plus ou moins spécifiques de la figure. La vision de la figure reste une vision « surface » et bien que les déplacements s'appuient sur des points, c'est bien la figure dans sa globalité qui semble être considérée. La vision « surface » reste prédominante et l'accès aux propriétés impossible.

Dans la dernière partie, le déplacement des points entraine une surprise chez les élèves. C'est peut-être cette surprise qui permet une évolution dans la perception de la figure et les incite à plus de prospection. Cela permet au *Déplacement pour invalider une construction* puis au *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* d'être mobilisés. Les déplacements sont généralisés à tous les points de la figure et quelques propriétés sont identifiées. Le dessin du message n'est plus utilisé pour présenter la figure dans différentes configurations mais pour présenter une propriété de la figure. Ainsi, les modes de fréquentations du concept de propriétés de figures géométriques des élèves sont différents selon les parties, passant d'une perception globale, où les propriétés ne peuvent être perçues mais transparaissent à travers des configurations différentes de la figure dans les premières parties à une vision « lignes » par la prise en compte et la représentation d'une propriété entre deux droites dans la dernière partie.

4 Analyse de Sam et Solan

<table>
<tr><th>Figures Cabri Elem</th><th>Messages des élèves</th></tr>
<tr><td>Figure GA1
</td><td>

Réponse de Ahmed - Mattéo
Couleur de la figure choisie : bleu (Rouge)</td></tr>
<tr><td>Figure GA4
</td><td>

Réponse de Ahmed, Mattéo
Couleur de la figure choisie : ~~rou~~ vert (ok)</td></tr>
<tr><td>Figure GA7
</td><td>

Réponse de Ahmed et ~~S~~ Mattéo
Couleur de la figure choisie : rouge (ok)</td></tr>
</table>

4.1 Figure GA1

Au début de leur exploration de la figure GA1, les élèves s'autorisent peu à déformer la figure « non tu ne tournes pas, tu la laisses comme ça pour qu'on arrive à la décrire ». Les quelques déformations sont éphémères, les élèves stoppent leur déplacement en remettant la figure dans la configuration initiale. Progressivement le *Déplacement non finalisé mathématiquement* devient de plus en plus tentant et les élèves déforment largement la figure. Cependant ce déplacement qui cherche à explorer les différentes configurations et limites dans le déplacement de la figure ne permet pas l'accès aux propriétés.

Au début de leurs échanges, les élèves décrivent la figure comme étant une « maison avec un toit avec un rond » ce qui sous-entend une vision globale. A la suite de leur exploration, ils identifient certaines relations entre les sous-objets et essaient d'organiser le triangle, le rond et le carré : « un triangle dans un rond (…) le triangle est accroché au carré ».

Lorsque les élèves découvrent qu'ils peuvent utiliser un dessin dans leur message, ils se réjouissent et n'utilisent que le dessin sans retranscrire les relations qu'ils ont identifiées. Le dessin représente la figure dans sa configuration initiale et les relations de dépendance identifiées lors des déplacements ne sont pas explicitées d'avantage que sur le dessin.

Bien que les élèves aient identifié les sous-figures triangle, cercle et carré ils sont restés dans une vision « surface » de la figure. En effet dans leurs déplacements le quadrilatère a été déformé et la configuration « carré » n'a pas résisté au déplacement. Ainsi les effets des déplacements n'ont pas été interprétés par les élèves qui ont déplacé aléatoirement sans intention mathématique.

4.2 Figure GB4

Au début de l'exploration de la figure GA4, les élèves essaient d'identifier des spécificités liées à chaque déformation : « j'essaie de le bouger et écris comment il bouge » cependant ils considèrent chaque déformation comme une configuration spécifique sans identifier les relations ou propriétés sous-jacentes. Ils utilisent ainsi le *Déplacement non finalisé mathématiquement*. Dans leur message, les élèves proposent deux dessins qui correspondent à deux configurations de la figure. Ces deux dessins sont porteurs des propriétés mais elles ne sont pas explicitées ni codées. La courte phrase qui complète le premier dessin ne précise pas quel est l'objet déplacé vers le bas, ce qui montre bien que les sous éléments de la figure ne sont pas considérés et que c'est la figure dans sa globalité qui est représentée, c'est un dire que les élèves mobilisent une vision « surface ».

4.3 Figure GB7

Dans la dernière partie, les élèves semblent découvrir les messages qui accompagnent le balayage de la souris (ces messages étaient aussi présents dans les précédentes parties). Afin de se donner toutes chances de gagner, les élèves décident « on met tous les points comment ils bougent ». Ils commencent alors l'exploration de la figure et déplacent un premier point qui est un sommet du triangle appartenant à une des droites perpendiculaires, son déplacement est contraint sur la droite. Les élèves semblent surpris par le comportement du point et utilisent le *Déplacement pour invalider une construction* afin de s'assurer que le déplacement du point est effectivement contraint sur une droite. Cependant dans les échanges des élèves, le point n'est pas explicité, ils considèrent la ligne (côté du triangle) qui ne se déplace que selon une seule direction. A la fin de leur exploration, l'enseignant leur propose de déplacer tous les points. Finalement ils déplacent le sommet du quadrilatère qui est sur la droite perpendiculaire au côté du triangle. En déplaçant ce point, la figure est déformée, le quadrilatère est déformé et le triangle tourne autour du sommet commun au triangle et au quadrilatère. Cette nouvelle surprise les incite à mobiliser le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* qu'ils considèrent à travers une relation de déformation entre le point et l'ensemble de la figure.

Dans leur message, les élèves proposent deux dessins complétés par du texte. Chaque dessin semble être associé à une propriété de la figure. Le premier dessin vise à expliciter la relation de chaque sommet du triangle avec les deux droites perpendiculaires, cependant ce ne sont pas les points qui sont cités mais les droites. Ainsi les élèves visent la déformation des côtés qui s'allongent selon une seule direction. Pour ce dessin, l'orientation de la figure et les directions indiquées nous laisse penser que les élèves sont davantage dans des observations spatiales que géométriques et considèrent la forme et ses déformations dans sa globalité. La vision « surface » semble très forte, bien que la vision « lignes » (la droite support du côté) semble proche. Le deuxième dessin réinvestit les informations textuelles du logiciel et précise que la figure se compose d'un triangle et d'un quadrilatère. Enfin il précise qu'un point (sommet du quadrilatère) fait tourner toute la forme. Là encore ils utilisent une vision globale de la figure et non une vision « lignes » ou « points » ni même une vision des sous-figure, car ce n'est pas toute la forme qui tourne mais uniquement le triangle, ce qu'ils ne semblent pas avoir perçus.

Dans cette dernière partie les élèves ont mobilisé le *Déplacement pour invalider une construction* et le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Cependant ce deuxième déplacement ne permet pas aux élèves de conclure sur la relation entre le triangle et le quadrilatère. Le premier déplacement a cependant permis aux élèves d'identifier un déplacement contraint, il leur reste à identifier la spécificité de cette droite relativement aux autres objets de la figure. La vision « surface » reste prédominante chez les élèves, bien que certaines droites soient prises en compte. Enfin, les propriétés ne sont pas encore totalement perçues, ils ont cependant un début d'identification d'éléments composants les propriétés.

4.4 Bilan Sam – Solan

On peut voir une évolution au cours des trois parties chez Sam et Solan bien que certaines difficultés persistent. La genèse des déplacements pour ces tâches semble bien enclenchée, les élèves mobilisent le *Déplacement pour invalider une construction* et commencent à investir le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Les relations entre les objets déplacés et leurs effets restent cependant difficiles à construire chez les élèves.

Les messages des élèves s'enrichissent progressivement. Le premier message est pauvre en explicitation de propriétés, n'explicitant aucun invariant dynamique observé. Le dernier message est quant à lui plus riche aussi bien dans sa forme que dans son contenu. En effet, bien que les élèves se soient réjouies de ne pouvoir utiliser qu'un dessin, des informations discursives apparaissent finalement dans les messages suivants pour compléter les informations de plusieurs dessins. Les différents dessins proposés pour transmettre les propriétés laissent supposer que les élèves sont encore dans une vision « surface » de la figure, une vision globale de la figure dans laquelle les propriétés ne sont pas perçues comme des invariants mais à travers des configurations particulières. Dans le dernier message, deux dessins sont proposés chacun étant à considérer indépendamment de l'autre. Pourtant c'est bien la même propriété qui est présente dans les deux dessins.

Les modes de fréquentations des élèves concernant les propriétés des figures géométriques restent ici à développer. Les élèves sont toujours attachés à vision « surface », les brèves mobilisations des visions « lignes » et « points » sont encore peu pertinentes. Le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* est encore maladroitement utilisé et sa genèse non encore aboutie.

IV - RETOURS DES PARTICIPANTS

Dans un premier temps, les participants se sont familiarisés avec le logiciel Cabri Elem à travers quelques activités proposées dans la séquence construites pour la classe. Par la suite ils ont vécu la situation de communication à travers l'exploration, la rédaction des messages, l'échange des messages, l'interprétation des messages. Enfin ils ont eu accès aux vidéos de Sam et Solan ainsi que celles de Cynthia et Karine et les messages.

Dans l'analyse des productions des élèves, les participants sont interrogés sur le rôle et la place du point dans les déplacements. Le point est au centre des déplacements car c'est bien par le point que l'on accède aux déplacements. Mais est-il vu comme un sous-objet point ou un moyen de déformer la figure ? Dans le premier cas (élément point) on serait dans une appréhension géométrique de l'objet point, dans le second on serait dans une approche instrumentale de l'objet point. Au vu des vidéos, des déplacements effectués par les élèves et les messages produits, le point serait plus identifié comme un outil disponible dans le logiciel, telle une poignée, qui permet d'agir sur la figure pour la déformer. Une nouvelle question s'est alors imposée : le point serait-il un artefact du logiciel que les élèves s'approprient ? Cette question pourrait ouvrir une nouvelle interprétation de la séance et des productions des élèves. La prise en compte des éléments « points » reste très difficile pour les élèves alors qu'ils parviennent tous à déplacer les points. Ainsi la prise en compte du point pour déplacer n'est pas à associer automatiquement à une vision « points ».

V - CONCLUSION

Lors de cet atelier nous avons présenté et travaillé sur quelques extraits d'une séquence d'enseignement qui visent la mobilisation de visions « lignes » ou « points » par la genèse instrumentale des déplacements pour l'identification et l'explicitation de propriétés géométriques. Cette évolution du regard s'appuie, tout comme dans les travaux des équipes de Lille (Duval, 2005 ; Perrin-Glorian, Godin, 2014), sur la genèse instrumentale des artefacts, la spécificité étant que ces artefacts sont liés à un logiciel de géométrie dynamique. Les élèves doivent explorer des figures dynamiques pour en identifier les propriétés et communiquer ces propriétés dans un message écrit. Les analyses présentées s'appuient sur les vidéos des explorations des élèves ainsi que sur les messages produits. Pour interpréter ces productions nous nous intéressons aux différents instruments Déplacements que les élèves construisent parmi le *Déplacement non finalisé mathématiquement*, le *Déplacement pour invalider une construction* et le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Ces analyses des Déplacements sont complétées par les analyses des interactions et messages des élèves. Cette deuxième analyse permet d'identifier les différentes manières de parler des propriétés chez les élèves, notre ambition étant de parvenir à reconstruire le mode de fréquentation (Bulf, Mathé, Mithalal, 2014) des élèves des propriétés géométriques. Ainsi les déplacements nous renseignent sur leurs manières d'agir et les échanges et message sur leur manière de parler.

Les modes de fréquentations des élèves évoluent au cours des différentes parties. Dans la première partie, le *Déplacement non finalisé mathématiquement* est le seul convoqué et les formulations des élèves (orales et écrites) n'explicitent pas les propriétés géométriques des figures. Finalement, dans la dernière partie, chez Cynthia et Karine le *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* est utilisé et les élèves parviennent à identifier des invariant entre les objets, c'est-à-dire des propriétés. Pour le deuxième binôme, l'accès au *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* semble en cours d'appropriation. Les élèves ne parviennent pas à identifier les propriétés et restent focalisés principalement sur une vision « surface » de la figure. Les élèves semblent avoir identifié que les relations entre les points sont la clé pour accéder à une description pertinente, cependant ils arrivent difficilement à l'investir.

A travers l'étude de ces deux binômes, on peut voir que la genèse du *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants* s'articule avec la déconstruction dimensionnelle et l'identification des propriétés de la figure. Lorsque les élèves sont capables à la fois de mobiliser une vision sur les éléments tels que les lignes et ou les points et les effets des déplacements sur ces objets, ils peuvent avoir accès aux propriétés. Ces deux compétences nous semblent indispensables pour accéder aux propriétés de la figure. Une fois ces deux conditions remplies, ce ne sont plus les différents dessins, les différentes configurations de la figure, qui la caractérisent mais bien ses propriétés qui portent sur des droites ou des points, identifiés par la mobilisation du *Déplacement exploratoire pour identifier des invariants*. Les deux binômes d'élèves analysés présentent des modes de fréquentations distincts, mais les processus de leur évolution semblent proches.

Ces conclusions rejoignent celles d'une recherche précédente (Coutat, 2014) où les élèves devaient reconstruire une figure dynamique. Dans cette étude, la communication était absente, cependant les articulations entre la vision de la figure et la genèse des déplacements apparaissaient centrales dans la perception des propriétés géométriques.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BULF C. MATHÉ A.-C. & MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation – Langage et activité géométrique. *Spirale* **54**(1), 151 – 174.

COUTAT S. (2016) Logiciel de géométrie dynamique au cycle 2. *Math-Ecole* **226**, 13-17.

COUTAT S. (2014) Enrichissement d'une vision non iconique avec un logiciel de géométrie dynamique et prémisses d'une géométrie axiomatique-naturelle (GII). *In*. *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives*. IREM de Nantes.

COUTAT S. (2014). Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? *Revista Latinoamerica des Investigacion en Mathematica Educativa 17*(4-1), 121-148.

COUTAT S. & FALCADE R. (2013) Le rôle de l'enseignant dans une séquence de géométrie utilisant deux environnements, dynamique et statique, au cycle 3. In *Actes du 39e Colloque international de la COPIRELEM. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. IREM de Brest.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordonnées de leurs fonctionnements. *Annales de Didactiques et des Sciences Cognitives* **10**, 5-53.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne : Peter Lang.

MASCHIETTO M. & BARTOLINI BUSSI M. G. (2013) Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques à l'école primaire. In *Actes du 39e Colloque international de la COPIRELEM. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. IREM de Brest.

PERRIN-GLORIAN M.-J. & GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole* **222**, 28-38.

RABARDEL P. (1995) *Les Hommes & Les Technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RESTREPO A. (2008) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez les élèves de 6ième*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques de l'université Joseph Fourier (Grenoble).

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* **10**, 2-3.

REPRÉSENTER UN POLYÈDRE : D'UN REGISTRE À UN AUTRE EN GÉOMETRIE DANS L'ESPACE

Jimmy SERMENT
Formateur à l'UER Mathématiques et Sciences de la nature
Enseignant spécialisé, Etablissement primaire de Pully, Paudex et Belmont
jimmy.serment@hepl.ch

Thierry DIAS
Professeur, Haute École Pédagogique Vaud
UER Mathématiques et Sciences de la nature
thierry.dias@hepl.ch

Résumé
Cet atelier propose de mener une investigation didactique et sémiotique concernant la notion de conversion de registres de représentation (Duval, 1993). Il s'agit d'étudier puis de comparer les potentialités de deux milieux matériels susceptibles de construire le concept de polyèdre. Le premier environnement est informatique grâce à l'utilisation du logiciel GeoGebra (3D). Le deuxième est celui du monde réel dans lequel seront élaborées des constructions de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Dias, 2015 ; Dias & Serment, 2017). Après un temps de prise en main des deux environnements dans une tâche d'application, les participants doivent explorer ces deux registres dans le cadre de la résolution d'un problème ouvert.

L'objectif de l'atelier est de faire vivre aux participants une situation qui demande de travailler sur deux registres sémiotiques distincts. Ce texte reprend le déroulement des activités, les travaux des participants ainsi que la base théorique sur laquelle se repose notre étude :

I – Registres de représentations sémiotiques
- 1 Signe, système sémiotique, registre et conceptualisation
- 2 Transformations d'une représentation par traitement interne
- 3 Transformations d'une représentation par conversion
- 4 La notion de représentation

II – Tâches proposées dans l'atelier
- 1 Introduction : collectivement
- 2 Tâches des participants
- 3 Mise en commun

III – Travaux des participants
- 1 Nos observations
- 2 Remarques des participants

IV – Conclusion

V - Bibliographie

I - REGISTRES DE REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES

Pour avoir une base théorique commune et analyser le travail proposé pendant l'atelier, nous avons choisi de nous référer aux travaux de Duval (2005, 2011) concernant les registres de représentation sémiotique, et sur la notion de conceptualisation (D'Amore, 2001). Nous avons également cherché à mettre notre atelier en relation directe avec les recommandations officielles de l'Education Nationale sur la notion de représentation en tant que telle (Eduscol, 2016).

Les travaux de Duval (2005, 2011) sur les registres de représentation permettent une analyse sémiotique d'une situation didactique en mathématiques, toutefois nous n'avons pas trouvé dans ces textes d'exemples concernant la géométrie dans l'espace correspondant à l'environnement matériel spécifique que nous utilisons, à savoir des connecteurs (pour les sommets des solides), des baguettes de 1 mètre de longueur (pour les arêtes des polyèdres) et de la laine (pour montrer des inscriptions ou des sections) (Dias & Serment, 2016). Nous souhaitons donc ici tenter de transposer cette méthode d'analyse mobilisant des registres de représentation à notre atelier dont l'enjeu notionnel principal est celui de la notion de polyèdre. La notion de polyèdre étant trop vaste à explorer dans son ensemble, notre étude sera donc limitée aux solides de Platon du fait de leur consistance didactique et épistémologique (Dias, 2014).

1 Signe, système sémiotique, registre et conceptualisation

Afin de parler de registre en suivant Duval (2005, 2011), nous devons définir un système sémiotique notamment en parlant d'abord des signes qui le constituent.

Un signe est un élément unitaire d'un système sémiotique donné, ce qui, dans notre cas peut être assigné aux baguettes, aux connecteurs et aux morceaux de laine que nous mettons à disposition des apprenants dans notre milieu matériel. Ce sont les signes unitaires du système de représentation que nous nommerons « concret » du fait de son rapport direct au monde sensible qui nous entoure. Ces signes ne peuvent cependant pas exister s'ils ne se rapportent pas à un système sémiotique. Selon Duval (2005, 2011), un système sémiotique est constitué :

1. de règles organisatrices pour combiner ou regrouper des éléments en unités significatives ;
2. de règles organisatrices permettant de désigner les objets.

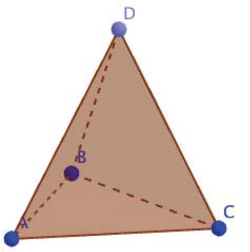
La combinaison des connecteurs et des baguettes permet de représenter des relations géométriques entre des sommets et des arêtes selon des règles organisatrices : on associe par exemple toujours 2 connecteurs à chaque baguette lorsque l'on veut construire un polyèdre. Il existe également d'autres règles qui permettent de désigner les objets construits : on assemble par exemple 8 connecteurs spécifiques, constitué de 3 entrées toutes perpendiculaires les unes des autres, et 12 baguettes pour former un polyèdre que l'on dénomme « cube ». L'objet « cube » étant représenté et désigné, l'environnement constitue donc un système sémiotique.

Toujours en se référant à Duval, on appelle *registre* un système de représentation sémiotique qui permet des opérations internes de représentation. Afin d'assimiler notre environnement matériel à un registre, nous devons donc nous assurer de son potentiel à assurer de telles opérations internes, nous le vérifierons dans la partie expérimentale de l'atelier.

Concernant le logiciel GeoGebra, dans la section géométrie 3D on trouve plusieurs fenêtres : une algébrique, une autre représentant des objets 3D en perspective dynamique, et une dernière permettant de saisir des lignes de codes. Nous avons fait essentiellement utiliser la fenêtre de représentation des objets 3D comme registre. Les signes unitaires sont les boutons pour agir sur l'écran de représentation :

Signes unitaires du système de représentation de GeoGebra 3D

Il existe des règles d'organisation à respecter pour utiliser ces signes unitaires. Par exemple, on ne peut pas créer de plan sans avoir défini *a priori* trois points. Ces règles organisatrices permettent de créer des objets mathématiques, que l'on peut orienter pour changer de point de vue, et que l'on peut également sectionner :

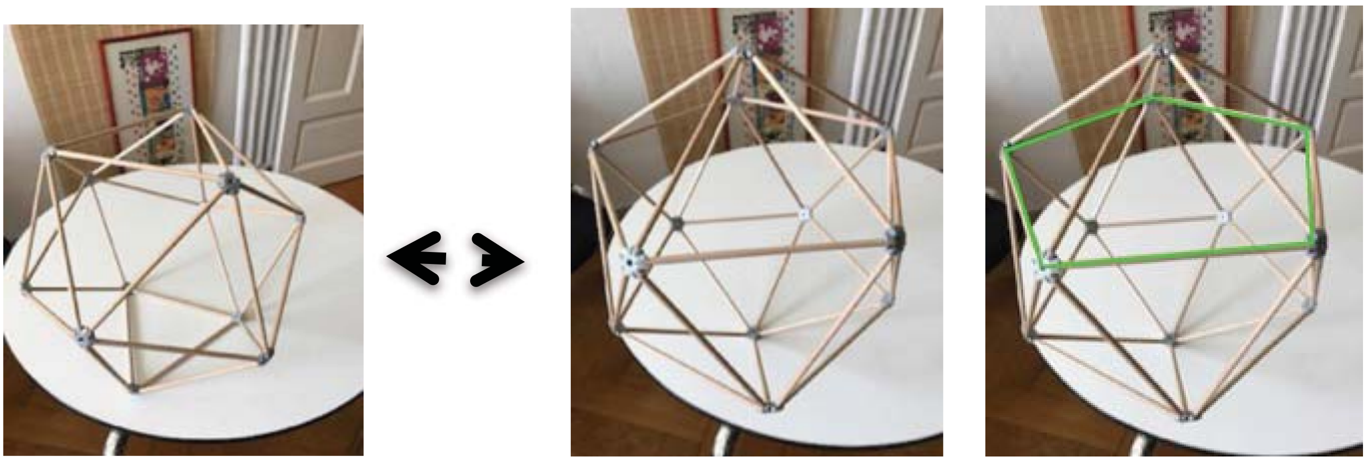


Une pyramide représentée grâce au registre informatisé, GeoGebra 3D

De même, en suivant D'Amore (2001), pour construire des concepts mathématiques, trois « actions » sont nécessaires. La première est de réussir à se représenter le concept dans un registre. La deuxième « action » consiste à traiter ces représentations à l'intérieur de ce même registre. La troisième et dernière « action » est la conversion des représentations d'un registre donné à un autre registre (au moins). La conceptualisation demande donc de traiter un objet dans plusieurs registres différents et si possible de faire des allers-retours entre ces registres (deux au moins).

2 Transformation d'une représentation par traitement interne

La première des transformations possibles est un traitement interne des informations. Il n'y a qu'un seul registre dans ce cas, et les mêmes signes sont utilisés avant et après la transformation. Ce traitement interne est un passage obligatoire pour réussir à conceptualiser mais il n'est cependant pas suffisant. Dans notre situation, si on utilise seulement les signes unitaires que sont les connecteurs, les baguettes et les morceaux de laine, il ne sera donc question que de traitement interne. On peut citer par exemple la notion de point de vue dans ce cas de traitement interne. Ainsi en présentant une construction de l'icosaèdre sur une face ou sur un sommet par rapport à la table, on engage un changement de représentation sémiotique :



Transformation interne d'un icosaèdre, posé sur une face ou sur un sommet.

Ce traitement interne permet d'observer la représentation différemment, il est par exemple plus facile d'observer des sections pentagonales en utilisant la représentation de l'icosaèdre posé sur un sommet, car les plans de section sont parallèles à un plan horizontal (celui de la table), mais, ce faisant, on reste bien dans le même registre.

Cependant, en restant dans ce registre uniquement, des difficultés risquent de survenir (Duval 1993, 2011 ; D'Amore, 2001) :

1. L'apprenant risque de confondre l'objet mathématique avec une représentation sémiotique qu'il pourrait croire unique. Le concept mathématique (vrai au sens théorique seulement) pourrait être confondu avec l'objet existant concrètement (réalisé avec les signes présents dans le milieu matériel).
2. Un autre risque est de maintenir chez les élèves un fossé cognitif infranchissable entre les connaissances géométriques et les situations réelles dans lesquelles ils seront appelés à les appliquer. La conséquence pourrait être de ne pas réussir à conceptualiser, de ne pas construire de connaissance.
3. En restant dans un seul registre, il y aura cloisonnement des connaissances dans un contexte précis et la mobilisation ou le réinvestissement de ces connaissances dans un autre contexte sera difficile. L'apprenant peut ne pas s'investir dans les apprentissages avec un seul registre, ce qui privilégiera un apprentissage par cœur plus automatisé. Il ne sera pas non plus suffisamment acteur dans ses apprentissages si on ne lui permet pas de faire des liens avec d'autres registres. Sans mise en liens entre les connaissances géométriques et spatiales il existe un risque réel de mise en échec scolaire (D'Amore, 2001).

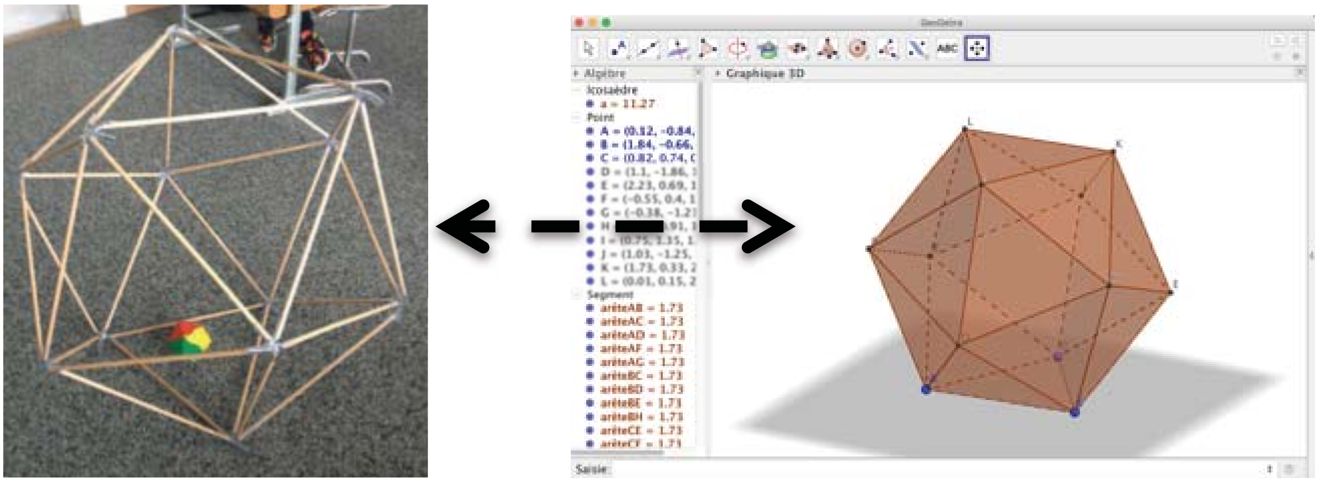
3 Transformation d'une représentation par conversion

Dans les activités que nous avons proposées, le passage d'un registre à un autre peut se faire dans les deux sens : du concret à la représentation sur GeoGebra 3D et vice versa. Pour ce faire, les participants ont dû trouver toutes les sections régulières sur les solides de Platon (voir partie II). Cependant, lors de l'atelier, nous avons observé que ces passages se sont produits à des fins différentes. Le passage du concret vers la représentation sur GeoGebra 3D permet une certaine vérification, alors que l'inverse est plutôt une aide à la construction. Nous avons remarqué le besoin des participants de produire d'abord les sections dans le registre du concret, même s'ils les trouvent *a priori* avec GeoGebra 3D. L'outil informatique permet de créer par exemple la section carrée du dodécaèdre régulier en reliant 4 points précis dans la fenêtre GeoGebra 3D. La vue proposée par le logiciel est une représentation en perspective, et même si on peut orienter et faire tourner l'objet, le carré trouvé ne « ressemble » pas à un signifiant du carré en géométrie plane (visuellement, il n'est pas carré du fait des effets de perspective). Il y a toujours l'envie de matérialiser l'abstrait, comme pour se convaincre de la réalité de l'existence de l'objet obtenu grâce à l'outil informatique : « On fait dans le méso, et on vérifie sur l'ordinateur… parfois ça peut être une aide à la construction, la vision sur GeoGebra peut aider ensuite à la construction réelle et des fois la construction réelle vient aider pour construire en numérique » (extrait d'un enregistrement audio).

Pour pallier aux trois risques d'un traitement de l'information uniquement dans un seul registre, il faut privilégier la conversion des informations dans au moins un autre registre. Dans notre cas, on permet aux apprenants de faire des allers et retours entre le registre du concret et un registre médiatisé par au moins un outil informatique. En effet, Certains participants ont utilisé la fenêtre de code ou la fenêtre algébrique, qui sont deux autres registres proposés par GeoGebra 3D, mais que nous ne détaillerons pas dans ce texte. Les participants ont travaillé en commun sur les activités proposées et ont utilisé le langage oral et la gestuelle pour communiquer entre eux. Ces deux moyens de communication relèvent chacun d'un registre différent supplémentaire. En suivant D'Amore, (2001), la langue naturelle est vue comme un registre complexe car il est multifonctionnel. La langue peut avoir quatre fonctions distinctes :

- Une fonction référentielle de désignation des objets,
- Une fonction apophantique d'expression d'énoncés complets,
- Une fonction d'expansion discursive d'un énoncé complet et
- Une fonction de réflexivité discursive.

Nous n'avons pris en compte que les registres du concret (maquette) et celui de l'informatique dans l'atelier :



Conversion d'un même objet entre deux registres différents

Selon Duval (2011), le passage d'un registre à un autre a plusieurs avantages :

1. Il permet à l'apprenant de prendre conscience des différentes unités de sens possible dans le contenu des représentations. L'élève perçoit les différentes possibilités de représenter un objet mathématique.
2. Ce passage permet la compréhension et la reconnaissance de l'objet mathématique. En effet, en percevant un objet selon deux registres différents, on sollicite la diversité des points de vue sur un même objet ce qui participe de sa compréhension en tant que représentant d'une classe mathématiquement définie. Le registre informatisé représente les objets mathématiques en perspective. On peut faire orienter et faire tourner l'objet pour optimiser la vision que l'on en a, (par exemple pour observer une section dans un polyèdre), mais la vue reste en perspective, en deux dimensions, et n'est jamais exactement une représentation de géométrie plane. Par conséquent, il n'est pas évident d'être convaincu visuellement de l'existence, par exemple, d'une section ennéagonale régulière dans l'icosaèdre régulier.

   Le registre du concret permet une vision tout autre, on peut non seulement tourner le matériel à notre guise pour changer de point de vue, mais on peut aussi entrer dans la forme ou tourner autour d'elle pour en avoir d'autres vues. La vue de l'objet n'est plus en perspective, mais en trois dimensions. Les deux registres sont donc complémentaires quant au point de vue sur l'objet.

   L'élève ose prendre des initiatives sur les savoirs, ose faire des liens en voyant qu'il n'y a pas qu'une seule façon de représenter un objet : il devient actif envers le savoir. Duval (2011) donne comme exemple : « C'est en sens que nous avons fait travailler sur le raisonnement déductif en géométrie fait dans la langue naturelle, la conversion se faisant ensuite des représentations auxiliaires vers la formulation en langue naturelle ». La reformulation dans la « langue naturelle » se fait plus aisément. Quand l'élève a pu travailler sur plusieurs registres, il osera prendre le registre de la langue pour expliquer son raisonnement.

4 La notion de représentation

Dans ses documents institutionnels, le MEN définit une série de six compétences fondamentales en mathématiques, dont l'une d'elles est « représenter »[1].

> « Il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un

[1] http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html#lien1

> mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc. » (Eduscol, 2016, p. 1)

Dans ce document, on recommande aux enseignants de travailler en géométrie en utilisant différents registres pour représenter les objets géométriques. Plusieurs exemples sont proposés dans des domaines différents des mathématiques, tous sont axés sur cette notion de changement de registre. Même si les pistes didactiques proposées concernent le cycle 4, elles sont, selon nous, entièrement transposables au cycle 3 moyennant quelques légères adaptations de contenu permettant de respecter les programmes.

L'objectif général de cette documentation institutionnelle est le développement de cette compétence fondamentale « représenter », qui doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans sa vision du réel mais aussi dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Pour cela, il faut permettre aux élèves de faire des allers-retours entre ces deux mondes afin de diversifier les représentations d'un même objet en vue d'une meilleure abstraction. Cette variété de points de vue sur un même objet permet *in fine* de mieux l'appréhender, et d'accéder ainsi à ses propriétés en tant qu'objet mathématique.

II - TÂCHES PROPOSÉES DANS L'ATELIER

L'atelier s'est déroulé en trois temps distincts et selon des dispositifs matériels et sociaux différents.

1 Introduction : collectivement

Nous avons proposé de commencer l'atelier en illustrant deux registres distincts portant sur un exemple particulier : la construction d'un cube adouci. Il s'agit d'un des solides archimédiens, un polyèdre semi-régulier, composé de 6 carrés et de 32 triangles équilatéraux. Le cube adouci est une sorte de cube déformé pour lequel un carré et 4 triangles équilatéraux sont présents à chacun de ses sommets. Nous avons effectué la construction réelle d'un cube adouci avec des baguettes et des connecteurs, et, simultanément, proposé la même construction par l'utilisation de GeoGebra 3D (en vidéo projection collective).

Les différents signes utilisés dans le registre « concret » (ou « maquette ») sont les baguettes et les connecteurs. En respectant les règles organisatrices qui permettent l'assemblage des baguettes et des connecteurs, nous avons construit un objet signifiant : un cube adouci. Nous pouvons donc parler d'un registre de représentation à part entière.

Avec l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique, nous parlerons globalement du registre « informatique ». GeoGebra 5 propose en fait une pluralité de registres en parallèle puisque chaque partie de l'écran propose des systèmes de signes particuliers donc les règles d'utilisation leurs sont propres : fenêtre graphique, fenêtre algèbre, champ de saisie formelle et menu déroulant. Dans la fenêtre graphique, l'objet est représenté en perspective (comme sur l'image de la pyramide plus haut), on peut agir directement sur ces représentations en ajoutant des points, des droites, des plans, etc. On procède donc à des modifications sur l'objet figuré qui peut être assimilé à un signifiant. L'environnement GeoGebra propose également une fenêtre algébrique. Dans cet espace, il est possible de modifier ou de sélectionner des objets en modifiant des valeurs algébriques de l'objet. Cette façon de modifier les représentations géométriques est indirecte, en changeant les valeurs algébriques, la représentation graphique de la fenêtre voisine changera simultanément. On peut considérer un troisième registre dans GeoGebra, celui de la fenêtre de saisie formelle qui permet de créer des objets à partir d'une ligne de scripts.

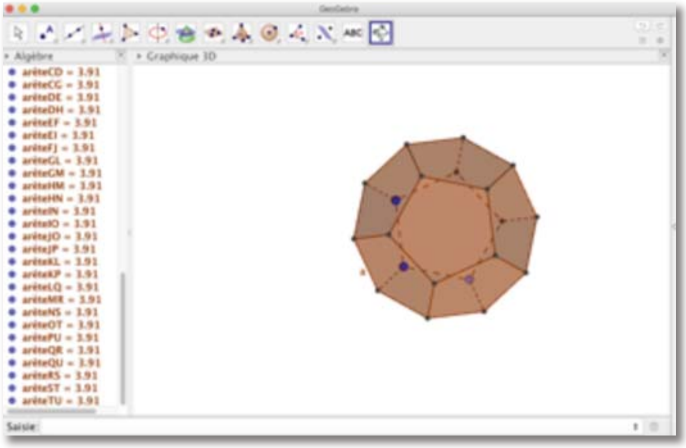


Image de GeoGebra 5, avec les trois registres

Dans l'exemple ci-dessus, on peut remarquer en plus de la fenêtre de représentation en perspective, la fenêtre algébrique et la fenêtre de saisie. Dans la fenêtre algébrique, les signes unitaires sont représentés par des coordonnées pour des points, ou des distances pour des segments, ce sont donc des nombres qui sont les signifiants. Les règles organisatrices sont liées aux formules et aux changements de valeurs des signes unitaires.

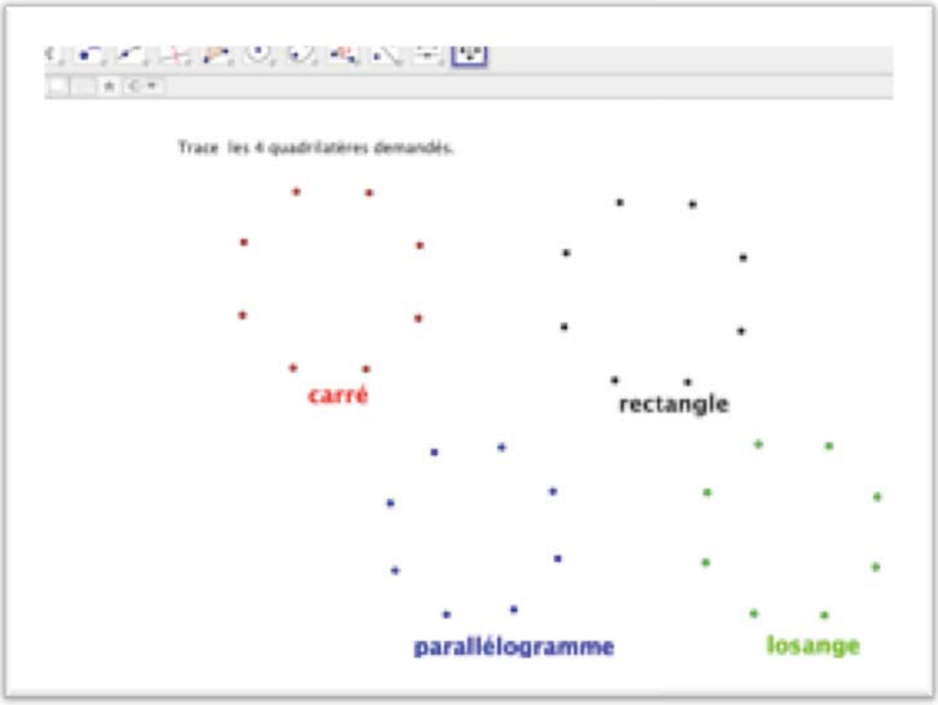
Pour la fenêtre de saisie dont on parlera dans une tâche ci-dessous, les signes unitaires sont les lettres. Les règles organisatrices sont dictées par des scripts précis, par exemple : « Dodécaèdre[A,B] » pour créer un dodécaèdre à partir de deux points.

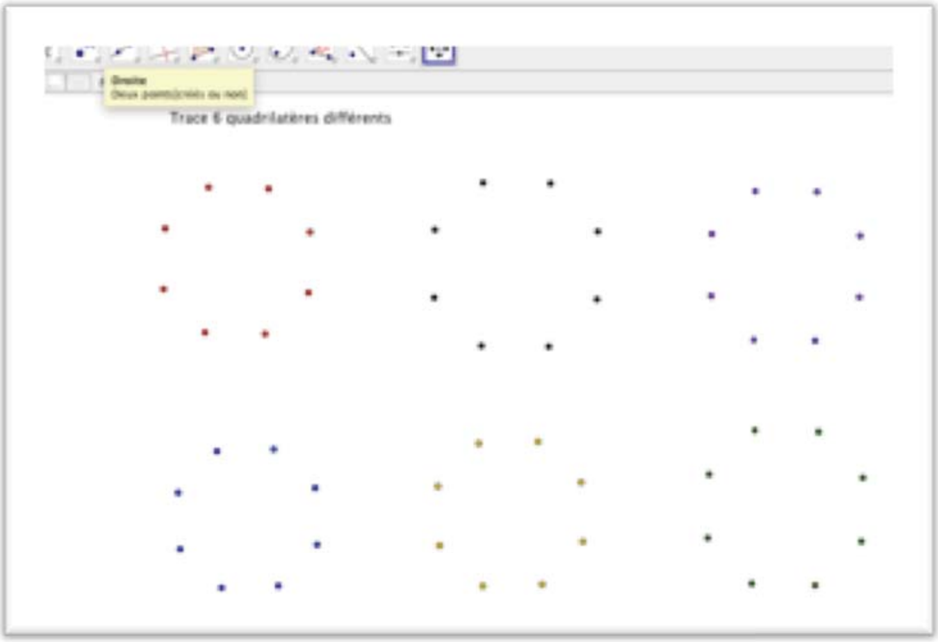
Nous avons donc ici la présence de 3 registres possibles avec l'utilisation de GeoGebra, une représentation en perspective, une représentation algébrique et une représentation par ligne de code. À noter qu'il y a en permanence en parallèle sur l'écran le registre en perspective et l'algébrique.

L'idée de se premier temps de l'atelier est de montrer ces différents registres et surtout les possibilités de pouvoir passer de l'un à l'autre et d'ainsi convertir des représentations d'un registre à un autre. Présenter un objet avec au moins deux registres différents est important pour la compréhension de l'objet lui-même. La conversion est donc le passage d'un registre à un registre autre pour décrire un objet mathématique.

2 Tâches des participants

Nous avons d'emblée proposé deux activités de découverte de GeoGebra 2D pour les personnes ne connaissant pas ce logiciel. Deux participants ont réalisé ces deux activités consistant à tracer des polygones en reliant les sommets d'un octogone régulier avec des segments :





Travail proposé sur GeoGebra 2D

Ces tâches ont été proposées pour prendre en main GeoGebra 2D, et pour se familiariser avec le logiciel. Ces tâches sont similaires, dans le premier cas on impose des quadrilatères à tracer, dans le deuxième cas on demande 6 quadrilatères différents. Ces deux exercices permettent de travailler les propriétés des quadrilatères (parallélisme, perpendicularité, isométrie des côtés), mais pour les participants de l'atelier, l'objectif de ces activités est la prise en main du logiciel. Ils découvrent ainsi ses possibilités et ses contraintes, en créant des polygones grâce aux outils [segment] et [point]. En se familiarisant avec la version 2D de GeoGebra, les participants sont par la suite plus à l'aise avec la version 3D de GeoGebra.

Ensuite, nous avons proposé deux autres activités pour la prise en main de GeoGebra 3D, la première consiste à représenter un cube puis à le sectionner selon un plan. La deuxième activité est axée sur l'écriture d'un script permettant de construire des polyèdres particuliers : les cinq solides de Platon :

1. Construire la section plane d'un solide par un plan variable

Soit ABCDEFGH un cube et I un point de l'arête [EH]. On note P le plan passant par I et parallèle au plan (EBG), et S la section du cube par le plan P. On veut conjecturer la position de I pour que la section soit un hexagone régulier.

Construction

1. **Construire un cube** ABCDEFGH.
2. Placer un point I sur le segment [EH].
3. Sélectionner l'outil (« Plan passant par trois points ») et créer le plan (EBG).
4. Créer le plan passant par I et parallèle à (EBG) avec l'outil (« Plan parallèle » dans le menu Plan) en utilisant la fenêtre « algèbre ». *[Note : on peut faire disparaître et apparaître les plans en cliquant sur les points bleus correspondants dans la fenêtre Algèbre]*.
5. Cacher le plan (EBG).
6. Pour une meilleure visualisation, faire apparaître la trace de l'intersection avec l'outil «intersection de deux surfaces ». Cliquer sur le plan variable passant par I et sur le cube dans la fenêtre « algèbre ».
7. Rendre le cube transparent en modifiant l'opacité de ses faces. Sélectionner le cube dans la fenêtre « algèbre », puis effectuer un clic droit et choisir le menu « propriétés ». Dans l'onglet « couleur », mettre le curseur « opacité » sur 0.
8. Il est également possible de changer la couleur et l'opacité du polygone section toujours dans le menu « propriétés ».

Observation

1. Déplacer le point I et observer la nature de la section du cube par ce plan.
2. Faire varier le point (le logiciel transforme I en M) et conjecturer la position de I pour obtenir une intersection qui soit un hexagone régulier.

Activité sur les sections d'un cube

Dodécaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un dodécaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Icosaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un icosaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Tétraèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un tétraèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Octaèdre[<Point A>, <Point B>]
Crée un octaèdre régulier convexe ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Cube[<Point A>, <Point B>]
Crée un cube ayant le segment [AB] comme arête, vous pouvez ensuite le faire pivoter autour de cette arête, en déplaçant à la souris le 1er point C supplémentaire créé.

Scripts pour les solides de Platon

L'activité des sections du cube est une marche à suivre, montrant toutes les étapes pour construire un cube puis d'en faire les sections. Le cube est utilisé car c'est le solide de Platon le plus familier, les participants ont donc plus de facilité à entrer dans le logiciel 3D en expérimentant sur ce polyèdre. Deux objectifs sont liés à cette tâche, le premier étant la découverte des possibilités de la version 3D de GeoGebra. Le deuxième est lié à la situation problème, cet exercice permet d'exemplifier la situation problème, à savoir trouver toutes les sections régulières dans les solides de Platon. Cet exercice permet d'amorcer la situation problème et les participants peuvent reprendre cette tâche plus tard.

L'activité sur les scripts a pour objectif d'aider les participants à représenter les 5 solides de Platon. En leur donnant les scripts à saisir, les participants ne perdront pas de temps à la construction laborieuse des solides lorsque l'on utilise GeoGebra. L'objectif de la situation problème étant de trouver les sections régulières à l'intérieur de ces solides réguliers, la construction des solides ne doit pas être une entrave à cette tâche.

Une fois ces tâches réalisées ou maîtrisées, nous avons proposé aux participants deux problèmes ouverts, sans indication ni contrainte de dispositif social (seul, binôme ou groupe). Nous avons également laissé libres les participants de naviguer entre le registre du concret et celui de l'informatique selon leurs choix. Le premier problème consiste à « trouver tous les polygones particuliers que l'on peut obtenir par section du cube ». Cette question permet aux participants d'investir plus aisément la situation du fait de la familiarité de ce solide de Platon qu'est le cube. La résolution de cette situation permet de trouver la plupart des polygones convexes à 3, 4, 5 et 6 côtés, sauf le triangle rectangle, le trapèze rectangle et le cerf-volant.

Le deuxième problème est de « trouver tous les polygones réguliers par section des cinq solides de Platon ». À l'aide de la construction des solides de Platon avec les baguettes, les connecteurs et la laine, ainsi que du logiciel GeoGebra 3D, les participants devaient trouver toutes les sections régulières de ces solides particuliers. Cette situation est moins conventionnelle et plus inédite par rapport aux sections du cube. Elle permet de mettre les participants dans une vraie situation de recherche, où personne ne connait les réponses *a priori*. La résolution de cette situation permet de trouver deux sections régulières pour le tétraèdre (triangle équilatéral et carré), deux sections régulières aussi pour l'octaèdre (carré et hexagone régulier), trois sections régulières dans le cube (triangle équilatéral, carré et hexagone régulier), quatre sections régulières pour l'icosaèdre (polygones réguliers à 5, 6, 9 et 10 côtés), cinq sections régulières pour le dodécaèdre (polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 et 10 côtés).

3 Mise en commun

La dernière partie consiste en une mise en commun des remarques des participants à propos des deux problèmes ouverts. Nous avons guidé le questionnement en utilisant chaque fois notre cadrage théorique. Les participants ont narré leurs démarches, leurs expérimentations dans les deux registres proposés et leurs impressions concernant les conversions entre ces registres. Ces remarques ont été enregistrées et quelques extraits choisis sont présentés dans le chapitre suivant.

Nous avons proposé pour terminer une correction des deux problèmes ouverts, en montrant sur GeoGebra toutes les sections dans le cube et en montrant toutes les sections régulières dans les 5 solides réguliers.

III - TRAVAUX DES PARTICIPANTS

Dans ce chapitre, nous rapportons nos observations des participants concernant leurs choix de registre, et leurs choix de dispositif de travail durant le déroulement de l'atelier. Pour terminer, nous transcrivons également quelques mots des participants échangés lors de la mise en commun.

1 Nos observations

Nous avons remarqué que les participants ont tous débuté les tâches de l'atelier dans le registre informatique, certainement parce qu'ils venaient de faire des exercices de découverte du logiciel. Cependant, ils ont investi très rapidement le registre concret pour étayer leur questionnement relatif à la construction des objets polyédriques (plus facilement réalisables dans ce registre). Ce changement de registre s'appuyant sur le maniement des baguettes, des connecteurs et de la laine, a poussé les participants à se regrouper en petites équipes de 3, 4 ou 5 personnes. À partir de ce moment, nous avons observé de nombreux allers et retours d'un registre à un autre. Certains groupes ont même apporté leur ordinateur portable à côté des représentations réelles afin de rechercher des équivalences entre les deux registres. Il était probablement question d'une recherche de correspondance entre les deux systèmes sémiotiques de référence : quels signes sont équivalents, quelles règles d'organisation des signes sont différentes, etc.

Passages d'un registre à un autre

En fin de séance, les groupes se sont finalement rassemblés en un seul grand groupe, sans aucune consigne de notre part. Ils ont alors partagé spontanément autour de leurs découvertes et ont conduit des expérimentations communes selon un questionnement partagé :

Regroupement des participants

On peut aussi constater que les participants ont choisi un seul registre de référence pour avoir une discussion commune : le registre concret. Il est en effet probablement plus facile d'organiser une situation de communication dans ce registre qui incite davantage à la réflexion commune (taille des signes et méso-espace (Berthelot & Salin, 1992) de travail). Ce choix est cependant la résultante d'un consensus implicite qui n'a pas fait l'objet d'un débat, ni préalable, ni en cours d'expérimentation. Ce registre utilisant le méso-espace, permet donc de se retrouver physiquement plus facilement autour du même objet ; le registre de représentation en perspective de GeoGebra3D n'étant contrôlé que par une personne : celle qui utilise l'ordinateur. Dans le registre informatique, les autres participants ne peuvent pas agir sur l'objet mathématique directement ce qui limite les possibilités d'interactions et donc de compréhension. De plus, le registre informatique étant plus nouveau pour certains participants, il semble qu'il était également plus adapté pour tous de se retrouver sur le registre concret.

Nous avons pu constater que le choix d'un registre est souvent lié à un type de dispositif social de travail, cela étant dû essentiellement à la taille de l'espace dans lequel se situe chacun des systèmes sémiotiques.

Les artefacts disponibles étant de nature très différentes, baguettes de un mètre versus souris d'ordinateur par exemple, il va de soi que leur manipulation induit des choix de dispositif assez incontournables.

La résolution de la situation problème s'est faîte d'abord par groupe de deux sur l'ordinateur, puis tous les groupes sont passés au registre concret. Ils ont alors pu collaborer et les binômes se sont regroupés, pour finir presque tous ensemble. Les participants n'ont pas eu le temps de trouver toutes les solutions dans la durée impartie de l'atelier. Pour y arriver, il fallait penser à sectionner les solides soit avec des plans orthogonaux à une droite reliant deux sommets opposés ; soit avec des plans parallèles aux faces ; soit avec des plans parallèles aux arêtes. Les participants n'ont pas eu le temps d'essayer toutes ces sections avec tous les solides, ce qui n'était pas le but non plus de notre atelier. L'objectif était en effet de faire prendre conscience de l'importance de la conversion de deux registres.

Pour les sections du cube, un des groupes a proposé un triangle rectangle dans le registre concret, mais n'arrivait pas à le retrouver avec GeoGebra (ce qui est normal, car la section est impossible). Dans le registre du concret, la section semblait avoir un angle droit, et les participants étaient certains qu'il existait. Ne retrouvant pas la section dans le deuxième registre, les participants ont été amenés à réfléchir en schématisant préalablement sur une feuille de papier (ils ont alors constaté que l'angle qu'ils croyaient droit valait en fait moins de 90°). La confrontation des deux registres a permis une réflexion sur un même objet mathématique. Si les participants n'avaient eu que le registre du concret, ils n'auraient sans doute pas douté de l'existence de la section du cube par un triangle rectangle, étant donné que le triangle trouvé était visuellement proche d'avoir un angle droit. A l'inverse, si les participants n'avaient eu que GeoGebra 3D, ils n'auraient pas eu l'occasion de se poser la question de l'existence ou non de la section triangulaire rectangle du cube, puisqu'elle ne serait pas apparue à l'écran.

2 Remarques des participants

Nous constatons que les participants sont entrés très facilement dans la tâche, même pour ceux qui ne sont pas des spécialistes des mathématiques :

> *« Moi je ne suis pas matheuse… au niveau de la motivation, je trouve ça très motivant. »*

Le passage d'un registre à un autre ne se fait pas aisément, par manque d'habitude peut-être, mais aussi parce qu'il est nécessaire pour dépasser des obstacles :

> *« Il faut un déclic pour passer de l'un à l'autre, tu ne vas pas le faire naturellement, tu vas avoir tendance à rester dans un… quand tu as un blocage, tu passes dans l'autre. »*

Comme nous l'avons signalé auparavant, le registre concret est plus vite investi et surtout plus spontanément. En revanche, il a semblé limité notamment pour y investir et y faire fonctionner des connaissances mathématiques qui nécessitent le changement de registre :

> *« Le fait d'être dans l'action avec les baguettes, ça te permet de faire des choses sans mobiliser des connaissances et donc, du coup, quand tu as les connaissances, tu ne les mobilises pas forcément… il faut sortir de la manipulation. »*

Selon les témoignages des participants, les connaissances mobilisées grâce à l'utilisation des registres semblent différentes. Pour eux, dans le registre concret il n'y a pas de connaissances préalables à leurs actions sur les artefacts alors que l'utilisation du logiciel nécessite des connaissances mathématiques et informatiques préalables :

> *« Il y a des choses qu'on arrivait à mieux voir avec l'ordi. Bizarrement, mais parce qu'on arrivait à avoir les connaissances requises qui permettent d'utiliser le logiciel… [parlant du registre concret] ça ne demande pas de connaissances particulières de faire avec la laine. »*

Nous pensons, quant à nous, que des connaissances sont nécessaires dans les deux registres, et même que mathématiquement parlant elles sont très proches. On pourrait penser que le registre du concret ne requiert que peu de connaissances alors que le registre GeoGebra demanderait quant à lui de bonnes connaissances préalables. Le registre concret pourrait être assimilé à des connaissances spatiales, alors que le registre informatisé pourrait être assimilé aux connaissances géométriques (Salin et Berthelot, 1992). Dans les faits, les participants ont utilisé des connaissances géométriques avec le registre du concret, en démontrant des égalités de longueur de segment, en prouvant l'existence d'angles égaux, en justifiant le parallélisme de plans ou de segment ; ils ont fait cette démarche en mobilisant des connaissances théoriques variées (théorèmes de Thales, de Pythagore, trigonométrie entre autres). Ce registre concret a permis de mobiliser des connaissances géométriques, même si au départ, lors des constructions des solides, des connaissances spatiales sont d'abord en jeu. Quant au registre GeoGebra qui paraît très théorique de par sa fenêtre algébrique, il ne l'est pas complétement. Les participants l'ont en effet beaucoup utilisé pour vérifier des équivalences de longueur, ou pour trouver des valeurs d'angles. Ces démarches ne relèvent pas de connaissances géométriques mais spatiales. Au final, ces deux registres ont fait émerger des connaissances mathématiques, qui sont les mêmes dans les deux registres. La différence principale se situe dans la place du langage lors des expériences. Dans le registre concret, les actions sont premières et la mise en mots des connaissances vient dans un second temps soit pour interroger les actes effectués, soit pour faire des choix ou encore pour débattre autour d'un questionnement relatif à la tâche en cours. Dans le registre informatique, il semble que les mots précèdent les actes qui sont moins spontanés du fait de la nouveauté de ce média mais aussi d'une certaine appréhension de la boucle cause-conséquence non maîtrisée face à un environnement logiciel.

À l'issue de cet atelier, nous sommes assez convaincus, à travers notre expérience et les remarques des participants que le registre que nous avons appelé informatique est plus complexe qu'il n'y paraît, et qu'il utilise en fait plusieurs systèmes sémiotiques du fait des différentes fenêtres de travail qu'il propose. En vue d'une transposition de ce type de tâche avec des élèves ou des étudiants, il sera nécessaire de prendre en considération cette complexité comme l'ont bien remarqué les participants :

> « *GeoGebra 3D convoque 3 registres : la fenêtre algèbre et la fenêtre graphique du logiciel, mais aussi le langage oral convoqué lors de l'utilisation.* »

IV - CONCLUSION

Les travaux de Duval (2005) sur les registres de représentations sont ancrés essentiellement dans les domaines du nombre et des opérations. Nous souhaitions, pour notre part, les utiliser dans des tâches concernant la géométrie dans l'espace lors de cet atelier. En proposant des tâches de résolution de problèmes permettant des passages entre deux registres (que nous avons appelés concret et informatique), nous avons confirmé la pertinence, à travers l'analyse des tâches proposées dans l'atelier, de la conversion d'un objet dans deux registres, afin d'en avoir une meilleure compréhension. Les signes et leurs systèmes d'organisation respectifs ont impliqué des dispositifs de travail différents et des finalités complémentaires dans les tâches proposées. *In fine,* nous avons réalisé que le registre se situant dans le cadre de l'utilisation de GeoGebra était plus complexe que prévu du fait de la diversité des environnements de travail qu'il propose dans l'organisation de son écran. Mais ce sont bien les passages des artefacts matériels du registre concret, à ceux du logiciel qui sont la plus grande source de construction des concepts liés aux objets de la géométrie dans l'espace (polyèdre, arête, sommet, plans, etc.).

Nous avons constaté un vif intérêt de tous les participants, dû certainement à la dimension esthétique des objets proposés (les solides de Platon), mais également à la robustesse de la situation didactique. Au-delà du contexte de la formation des enseignants, il nous semble possible d'adapter les tâches pour des élèves en fin de scolarité primaire (par exemple, en ne traitant que les sections du cube, du tétraèdre et de l'octaèdre). L'utilisation des solides peut permettre de travailler les connaissances en géométrie plane, comme les propriétés des triangles et quadrilatères, le parallélisme, la perpendicularité. Dans ce cas, les polyèdres sont considérés comme un médiateur pour permettre à l'élève de travailler des connaissances abstraites que sont les contenus de la géométrie plane. On pourrait aussi mettre en avant les enjeux qui concernent les connaissances sur les solides simples (cube, tétraèdre et octaèdre), en calculant des aires et des volumes. L'utilisation des solides serait alors directement liée aux connaissances à faire émerger. Ce type d'activité nous semblent tout à fait conforme aux indications institutionnelles des programmes dans l'objectif de construire la compétence *représenter* telle qu'elle est décrite dans le document d'Eduscol.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R., SALIN.M. H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I.

D'AMORE B. (2001) Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgique. XXXVIII, 2, 143-168.

DIAS T., SERMENT J. (2017) *Formation à la géométrie dans l'espace par la construction de polyèdres*. Actes du XXXXIII[e] colloque COPIRELEM, Le Puy en Velay.

DIAS T. (2015) Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (65), 151-161.

DUVAL R. (2011) Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Formación en Educación Matemática*, (11), 149-161.

DUVAL R. (2005) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, 67-89, in *Actes du XXXII[e] colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

EDUSCOL. (2016) Compétences travaillées en mathématiques au cycle 4. Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Repéré à : http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html#lien1

DISPOSITIF D'ACCOMPAGNEMENT EN MATHÉMATIQUES DES ENSEIGNANTS D'UN RÉSEAU REP PLUS : PRÉSENTATION ET PREMIÈRE ANALYSE

Cécile ALLARD
MCF, ESPE Créteil
LDAR (EA 4434) Université Paris-Est Créteil, UA UCP UPD URN

cecile.allard@upec.fr

Denis BUTLEN
PU, ESPE de Versailles
LDAR (EA 4434) Université Cergy-Pontoise, UA UCP UPD UPEC UR

denis.butlen@u-cergy.fr

Pascale MASSELOT
MCF, ESPE de Versailles
LDAR (EA 4434) Université Cergy-Pontoise, UA UPD UPEC UR
pascale.masselot@u-cergy.fr

Résumé :
Au cours de cet atelier sont exposés les choix ayant permis de concevoir un premier dispositif d'accompagnement de professeurs de cycle 3 sur le thème de la résolution de problèmes arithmétiques.
Après avoir précisé le contexte de la formation (recherche action ciblant les professeurs de REP[1] Plus), dans un premier temps, nous présentons les principes organisateurs de la formation dispensée (Pézard, Butlen, Masselot, 2012), le détail des contenus abordés (Houdement, 2015) et nous proposons aux participants d'analyser quelques supports élaborés par les enseignants concernés et certaines productions d'élèves qu'ils ont recueillies (Robert, 2014).
Dans un second temps, un débat autour des enjeux d'une telle formation et des alternatives possibles, permet de préciser les hypothèses et les choix retenus.

I - INTRODUCTION

Nous présentons un dispositif d'accompagnement de professeurs des écoles et de collèges de REP Plus enseignant les mathématiques dans des écoles scolarisant des élèves issus de milieux très défavorisés. Notre but est d'élaborer, d'expérimenter et d'évaluer ce dispositif en vue de proposer aux formateurs intervenant dans le domaine de l'éducation prioritaire un module de formation susceptible d'être reproduit à grande échelle par des formateurs de l'ÉSPÉ[2] mais aussi de terrain (CPC[3], PEMF[4], IEN[5]). Nous nous appuyons pour cela sur des recherches antérieures, notamment celles qui avaient pour but d'évaluer l'impact d'un tel dispositif sur les pratiques effectives des Professeurs des Écoles (PE) en ayant bénéficié (Charles-Pézard, Butlen, Masselot, 2012). Le contenu mathématique principalement ciblé par cette formation est la résolution de problèmes élémentaires ou de base (Houdement, 2015) ou que nous avions appelés problèmes standards dans nos travaux sur les effets d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes (Butlen, Pézard, 2007).

L'atelier s'est déroulé en deux temps. Dans un premier temps, les animateurs présentent le contexte de la recherche et de la mise en place du dispositif, puis exposent le cadre théorique mobilisé.

1 Réseau d'Éducation Prioritaire
2 École Supérieure du Professorat et de l'Éducation
3 Conseiller Pédagogique de Circonscription
4 Professeur des Écoles Maître Formateur
5 Inspecteur de l'Éducation Nationale

Dans un deuxième temps, à partir des énoncés de problèmes choisis et organisés selon différents indicateurs par les enseignants concernés par le dispositif, les participants étudient leurs productions et analysent quels sont, selon les enseignants, les problèmes élémentaires pour les élèves, à partir des contraintes retenues dans l'adaptation des ressources apportées.

Dans un troisième temps, nous proposons aux participants de l'atelier un échantillon de productions d'élèves, réponses à certains des problèmes retenus. La tâche est alors d'analyser ces productions (ainsi que les énoncés) et de produire un scénario d'utilisation de ces productions comme support à une action de formation (dont la durée n'est pas fixée *a priori*).

Dans un dernier temps, les animateurs de l'atelier exposent la stratégie de formation qu'ils ont mise en œuvre sur la base de ces productions d'élèves.

II - PRÉSENTATION DU CONTEXTE ET DES CHOIX : APPUI SUR DES TRAVAUX DE RECHERCHE, ADAPTATION DE L'ACCOMPAGNEMENT AUX CONTRAINTES ET SPÉCIFICITÉS DU PUBLIC

1 Rappel du contexte du projet et de la demande institutionnelle

Le but initial pour les chercheurs est d'élaborer, expérimenter et évaluer un dispositif d'accompagnement en REP pouvant être reproduit à grande échelle.

Il s'agit de viser une amélioration de l'apprentissage des élèves et un bénéfice relatif au confort des enseignants en termes d'élargissement des marges de manœuvre dont ils disposent et de recul sur la profession (à moyen et long termes).

Ce projet a été favorablement accueilli institutionnellement car il répondait à une attente académique. Nous avons rapidement reçu le soutien d'IEN, d'IPR[6] et des responsables académiques de l'éducation prioritaire. Au départ plus modeste, le projet est devenu académique suite à une demande du rectorat qui souhaitait qu'il cible un REP Plus au minimum par département de l'académie. De ce fait, nous avons été amenés à le décliner en fonction des demandes locales et du public sollicité institutionnellement.

2 Des demandes et un public variés

Le dispositif consiste donc à accompagner sur une durée de trois ans quatre REP Plus associés directement au projet (départements 78, 91, 92, 95). Les classes de cycles 3 et 4 étaient au départ prioritairement visées mais sont devenues en fait inégalement représentées selon les départements, dans la mesure où une demande particulière d'un département (78) visait spécialement le cycle 2.

L'équipe encadrant le projet est pluri catégorielle ; elle comporte des enseignants chercheurs et des formateurs. De plus, un étudiant en master 2 a rédigé un mémoire du master Recherche (REDEF) de l'université de Cergy-Pontoise sur un sujet connexe, le dispositif « plus de maîtres que de classes » (PDMQDC), mais ciblant un public associé à cet accompagnement.

Cette composition pluri catégorielle témoigne de notre volonté d'associer à moyen terme les divers personnels encadrant les REP. Il s'agit aussi de croiser les différentes préoccupations qui traduisent des enjeux ou des intérêts qui peuvent être différents mais qui enrichissent les échanges autour d'un objet commun.

3 Divers contextes

Comme nous l'avons déjà souligné, le public est constitué de professeurs des écoles du cycle 2 au cycle 4, regroupés localement, pour une part sur la base du volontariat ou dans le cadre des heures de formation spécifiquement accordées à l'éducation prioritaire.

[6] Inspecteur Pédagogique Régional

Selon les cas, il pouvait s'agir d'enseignants d'un ou de plusieurs REP Plus du cycle 3 (école élémentaire et collège) regroupés dans un collège ou seulement de cycle 4 ou de tous les enseignants du cycle 2 d'un REP Plus ou encore de tous les enseignants des écoles d'un REP Plus sur la base du volontariat. Ainsi dans un département, l'accompagnement a concerné un groupe de cycle 4 constitué de tous les enseignants des trois collèges d'un REP Plus ; deux groupes de cycle 3 regroupant tous les enseignants (PE, PLC, référents) de trois REP Plus. Dans un autre département, les quatre journées de stages de formation visaient un groupe d'enseignants de cycle 3 d'un REP Plus (PE, PLC, PDMQDC, référents) et dans un dernier, l'accompagnement a concerné un groupe d'enseignants de cycle 3 d'un REP Plus.

4 Des modes d'interventions adaptés aux demandes et aux contextes locaux

De ce fait, le dispositif, afin de s'adapter aux demandes et contraintes locales, s'est décliné selon les cas en : un regroupement sur trois journées complètes au cours du premier semestre, des regroupements de deux journées plus espacés dans le temps, des cycles comportant une conférence suivie de deux ou trois ateliers de 1 heure 30 à 2 heures parfois doublés par un dispositif complémentaire d'ateliers gérés par les encadrants locaux ou enfin plusieurs regroupements de 3 heures dans une même école.

4.1 Les hypothèses

Nos hypothèses sont basées sur les résultats de nos travaux de recherche précédents autour de l'accompagnement des professeurs débutants nommés en ZEP (Charles-Pézard, Butlen, Masselot 2012) et prennent en compte les besoins du public, quant à la forme et aux choix des contenus de travail privilégiés.

Nous retenons de nos travaux la nécessité de prendre en compte à la fois l'amélioration des apprentissages des élèves et le confort de l'enseignant. Le dispositif se construit autour de plusieurs dialectiques dont deux notamment nous semblent incontournables. La première consiste à installer une alternance entre apports d'informations, élaboration de supports pour les enseignements (tests et activités possibles), témoignages de mise en œuvre, analyse de productions d'élèves et élaboration de pistes pour dépasser certaines difficultés repérées. La seconde dialectique porte sur les besoins ressentis par les enseignants et les besoins identifiés par les chercheurs (exemple : autour des activités de résolution de problèmes : des rallyes au traitement de problèmes élémentaires).

Cela renvoie à une manière de penser les problèmes d'une profession :
- Il existe des problèmes et il existe des experts (enseignants) de la profession et des chercheurs. Dans certains cas, les experts de la profession ne peuvent seuls trouver des solutions aux problèmes .
- Résoudre ces problèmes de la profession nécessite une reformulation de ceux-ci par les chercheurs en problèmes pour la recherche.

Ce point de vue est le parti pris.
Il se contextualise par exemple ainsi : il est fréquemment suggéré de proposer des rallyes mathématiques en éducation prioritaire mais le constat établi à la suite de ces expériences est que les élèves sont souvent en échec. Ces rallyes ont comme objectif annoncé de changer le rapport aux mathématiques des élèves et des professeurs.
Au lieu d'avoir un effet positif sur l'investissement des élèves dans les mathématiques, cela peut conduire à un désinvestissement de ces derniers mais aussi des enseignants qui ne voient pas dans ce dispositif les effets prometteurs attendus. L'apport du chercheur consiste, notamment dans ce cas, à replacer les types de problèmes fréquentés à l'occasion des rallyes (problèmes souvent atypiques ou complexes) dans le cadre plus complet de l'apprentissage des différentes catégories de problèmes susceptibles d'être enseignés dans la scolarité obligatoire en mathématiques. Cela peut permettre de relativiser la place de ces rallyes dans la fréquentation des mathématiques.

Une autre hypothèse, issue du travail de Masselot, est la suivante : pour qu'une formation « produise un effet », proche de celui qui est attendu, il est nécessaire d'entrer en résonnance avec les représentations et logiques des enseignants (Masselot, 2000).

4.2 Les modes d'intervention des formateurs

Afin de pouvoir prendre la distance nécessaire pour pouvoir analyser et réguler à chaud les interventions du formateur, nous avons adopté le principe d'une intervention à plusieurs voix : un intervenant principal et un ou plusieurs réactants qui complètent, précisent, interrogent le propos en prenant en compte le niveau de réception du public. Ce mode de fonctionnement a déjà été testé lors de nos précédents scénarios d'accompagnement. Il assure un certain confort pour le formateur qui peut, sachant qu'un « réactant » pourra relativiser ou compléter ses propos, s'engager, prendre des risques, etc. De plus cette co-intervention permet des débriefings à chaud et en différé.

En effet, des adaptations sont toujours indispensables, il est parfois difficile de s'en tenir au scénario prévu et il est important de répondre aux sollicitations pour maintenir la relation, le contact avec le groupe.

4.3 Les choix des contenus

Pour un même dispositif, nous avons choisi un ou deux contenus parmi des contenus déjà privilégiés dans le premier dispositif expérimental : la résolution de problèmes, le calcul mental, les nombres relatifs (cycle 4) et la géométrie plane.

Dans cet atelier, nous nous limitons, faute de temps à un exemple de dispositif, relativement emblématique de notre démarche, sur le thème de la résolution de problèmes. Le mode de travail se déclinait (globalement à la durée près) en un apport d'informations (en nous référant aux travaux de Catherine Houdement et de Gérard Vergnaud pour ce thème (Houdement 2015)), l'élaboration et la passation de tests pour chaque niveau du cycle, l'analyse des productions sur le REP Plus globale et détaillée par problème ou par élève (étude de cas), et enfin des compléments sur les modes d'interventions possibles à partir de l'analyse des difficultés repérées.

Nous prenons en compte différentes contraintes liées aux contextes de mise en œuvre du dispositif : un diagnostic « raisonnable » des difficultés des élèves, c'est-à-dire suffisamment porteur d'informations mais pas trop chronophage et une élaboration participative.

Lors d'un exposé introductif, nous rappelons une classification des problèmes susceptibles d'être fréquentés au cycle 3 en quatre catégories :

- les problèmes intervenant dans les situations permettant d'introduire une notion (situation fondamentale ou de référence)

- les problèmes élémentaires qui respectent les critères suivants : l'énoncé ne doit pas poser de problème de lecture ; il existe une ou deux opérations pour le résoudre ; l'enseignement vise à la reconnaissance automatique de l'opération en jeu dans la résolution. Un des objectifs de notre formation porte sur ces problèmes élémentaires : aider les enseignants à les reconnaître.

- les problèmes complexes, agglomérat de problèmes élémentaires (avec présence ou non de questions intermédiaires).

- les problèmes pour chercher (atypiques) pour lesquels les élèves ne disposent pas de procédures expertes (cas fréquent des problèmes de rallyes mathématiques).

Citons rapidement un autre exemple pour le thème de la géométrie plane. Le dispositif est analogue mais s'appuie sur des élaborations de séances constituant une séquence à partir de ressources fournies par les formateurs.

III - LE TRAVAIL AU COURS DE L'ATELIER

1 Les documents proposés aux participants

Les documents proposés sont les suivants, certains sont en annexes :

- Un exemple d'énoncés des problèmes élaborés par les professeurs d'un REP Plus ;

- Les énoncés proposés comme tests et construits sur la base des énoncés précédents (annexe 1) ;
- Des exemples de procédures d'élèves portant sur une grande catégorie de problèmes donnés : structures additives, structures multiplicatives, problèmes de comparaison de mesures (exemple en annexe 2) ;
- Des exemples de productions par élève à l'ensemble des deux parties du test (exemple en annexe 3).

2 Exposé introduisant le travail de groupe

Les animateurs ont proposé dans un premier temps des exemples d'énoncés produits par les participants. Ils ont plus particulièrement souligné deux aspects :

- Les énoncés produits sont, dans certains cas, du même type et diffèrent seulement par la valeur de certaines variables : taille ou nature des nombres (rendant parfois le problème inutilement difficile) ou contexte mobilisé.
- Les professeurs rencontrent des difficultés pour cerner *a priori* le niveau de complexité d'un problème donné, notamment entre ce qui doit être attendu au CM1, CM2 ou 6e. Ils surestiment souvent les capacités de résolution de leurs élèves, proposant des énoncés relativement complexes alors que par ailleurs ils déclarent que leurs élèves ont un très faible niveau et ils en sont conscients.

Afin d'associer les professeurs à l'élaboration du test, des compromis ont été effectués, selon les REP, sur les choix des problèmes. Le test final comporte deux parties avec chacune trois problèmes additifs et trois problèmes multiplicatifs. De plus, deux problèmes sont communs à deux niveaux successifs. La durée accordée et les consignes ont fait l'objet de débat : les élèves doivent choisir parmi six problèmes, quatre d'entre eux et les résoudre. Le but était de se renseigner également sur ce que les élèves choisissaient prioritairement et donc reconnaissaient comme problèmes plutôt faciles pour eux. Cette consigne a vraiment surpris et déstabilisé certains enseignants qui ne l'ont pas toujours respectée lors de la passation. Certains élèves ont ainsi résolu les quatre premiers problèmes, d'autres six problèmes.

Les animateurs présentent ensuite et commentent un tableau présentant les performances des élèves de plusieurs REP d'un département qui portent sur un recueil et l'analyse de plusieurs centaines de copies. Le but de ce recueil de données est de répondre à plusieurs questions de diverses natures dont notamment : Quels sont les problèmes les plus choisis ? Est-ce qu'il y a des régressions ou des progressions selon l'âge ? Est-ce qu'il y a des régularités ? Est-ce qu'il y a des classes atypiques ? Est-ce qu'il y a des impasses dans l'enseignement des professeurs concernés ? Les animateurs soulignent à cette occasion les faibles performances des élèves sur certains types de problèmes notamment multiplicatifs, en particulier le très faible score obtenu de manière générale sur les problèmes de comparaison multiplicative de mesure ou de proportionnalité simple qui semble témoigner d'un déficit d'enseignement de ces notions. En revanche, sauf pour une classe, les pourcentages de réussites et d'échecs montrent de grandes régularités entre les différentes classes. Il n'apparait pas de régression d'une année sur l'autre mais en général une certaine progression. Enfin, les problèmes de composition de transformations sont mal réussis. Lors des formations, certains enseignants effectuent ce dépouillement avec une grande rigueur tandis que d'autres le font de façon nettement plus superficielle. Ce temps amène également les enseignants à revenir sur leurs anticipations et à prendre un peu de recul en relativisant les résultats de leurs propres élèves.

Ces rapides analyses ont aussi pour but de mieux cerner ce que l'on appelle un élève en difficulté. Les animateurs ont réinvesti un résultat de recherche (Butlen, 1991) : à un niveau donné, l'élève est en difficulté quand il échoue à un item réussi par 80 % d'une classe d'âge, item portant en général sur un contenu au programme de la classe deux ans au moins auparavant. Un problème élémentaire pourrait donc être considéré comme maîtrisé par une classe d'âge quand il est réussi par au moins 80% des élèves de la classe. Les élèves échouant sur ce problème sont alors considérés comme en difficulté sur ce contenu spécifique.

Suite à cette analyse, les professeurs de cycle 3 sont amenés à travailler sur certaines de ces productions d'élèves. Les animateurs proposent aux enseignants deux types de sélections de productions d'élèves. La première propose pour un problème donné 10 à 15 productions d'élèves variées (justes ou erronées) pas toujours représentatives d'un grand nombre d'élèves mais témoignant toutes d'un certain regard sur le problème choisi et sur les calculs à effectuer. La seconde sélection propose, pour un élève donné, d'un niveau donné, ses réponses à 8 à 12 des problèmes proposés. Les formateurs ont fourni aux enseignants des éléments (grilles) de correction.

Notons que ce type d'activité se révèle assez nouveau pour les professeurs des écoles mais qu'ils s'investissent beaucoup dans cette analyse et échangent autour des interprétations (« toi tu as « compté juste » quand l'élève répondait ça… moi pas… »), des attentes au niveau de la présentation des réponses et des hypothèses sur les erreurs. En revanche, certains professeurs de collège semblent moins motivés et investis. Certains professeurs des écoles ont proposé des analyses fines des données : problèmes choisis par les élèves, analyse des erreurs, émission d'hypothèses sur leur origine[7]. D'autres se sont limités au nombre de réponses correctes.

Les regards sur les productions des élèves différencient donc PE et PLC.

3 L'exposé des productions des différents groupes lors de la synthèse

Nous présentons les propositions des différents groupes en essayant de préciser l'enjeu principal retenu ainsi qu'une trame du déroulement en réponse à la question posée : comment utiliser ces productions en vue de la formation ?

Groupe 1

Ce groupe travaillait sur un ensemble de procédures mobilisées par les élèves de 6e pour résoudre le problème de comparaison additive de mesure suivant (cf. annexe 2)

Problème 4 : Cette année, Jean a 14 ans, son père a 43 ans. Quel âge aura son père quand Jean aura 30 ans ?

Les objectifs de la formation :

- Identifier les procédures ainsi que les types d'erreur dans le but de mettre en œuvre dans la classe les mises en commun à partir de ces productions
- Différencier correction/mise en commun
- Réfléchir sur la/les institutionnalisations possibles et les aides à apporter

Déroulement :

- Résoudre individuellement le problème 4 et le situer dans la classification.
- Prendre connaissance des procédures des élèves.
- Consigne : Comment organiseriez-vous une mise en commun dans la classe ? Quel ordre des productions ? Affiches affichées simultanément ou non ?
- Qu'institutionnaliseriez-vous à l'issue de la mise en commun ?

Attentes :

Classification des procédures en lien avec la classification de Vergnaud (en fonction du contexte et des connaissances du sujet, on peut classer un même problème dans plusieurs catégories)

Institutionnalisation du formateur :

- o Rôle de l'élève dans la mise en commun
- o Statut de l'erreur
- o Nature des aides

Groupe 2

Ce groupe a travaillé sur deux documents. Le premier présente 14 productions d'élèves de CM1 et CM2 résolvant le problème 3 du test.

---

[7] Les élèves devaient lire 6 problèmes, en choisir et en résoudre 4. Les enseignants font passer les tests puis ramènent les énoncés sur lesquels le travail a été effectué.

Problème 3 : Pierre a mis ses billes dans des sacs. Il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?
Le second document présente les 10 productions d'un même élève de CM1 au test (voir annexe 3).
Déroulement :
Classement des problèmes (document de l'annexe 1, énoncés des problèmes du test)

- Quels problèmes donneriez-vous à vos élèves ?
- Avec quels objectifs proposeriez-vous ces problèmes-là ?
- Pour le problème 3 du document : analyse *a priori* des procédures attendues (correctes, erronées).

Analyse de productions d'élèves, 14 productions d'élèves différents sur un même problème

- Relever les procédures (correctes ou non) et les confronter avec l'analyse *a priori*.
- Quels sont les élèves que vous identifiez en difficulté ?

Analyse des difficultés d'un élève de CM1 à partir de ses dix réponses au test (annexe 3)

- Quelles procédures produites ?
- Quels types d'erreur ?
- Quelle remédiation ?

Comment on automatise des procédures ?

Groupe 3

Ce groupe a travaillé sur les productions d'élèves de CM2 et 6e à un problème de comparaison multiplicative (structures multiplicatives) relative au problème suivant.
Problème : Jean a eu 64 euros pour son anniversaire ; Charlotte a eu 4 fois moins. Combien Charlotte a-t-elle reçu ?
Objectifs :

- Dégager les critères de comparaison des différentes productions
- Travailler sur la compréhension de la locution « 4 fois moins »
- Repérer les stratégies de résolution de problèmes numériques (en particulier discuter de la place de l'opération posée)
- Réfléchir à l'utilisation des productions par et pour les élèves
- Analyser l'énoncé en vue de prolongements
- Produire des énoncés de même structure
- Dégager les éléments de progressivité

Groupe 4

Ce groupe a les mêmes documents que le groupe 2.
Déroulement :

- Support théorique sur la classification de Vergnaud
- Identifier les problèmes du test CM1
- Identifier les besoins de l'élève de CM1. Relance en lien avec Vergnaud.
- Étude de documents sur les différentes productions d'élèves
    - Consigne 1 : Utilisation de ces productions dans votre classe ? Exploitation ?
    - Relance : classer les productions.
    - Attendus : classement erreurs, procédures
- Problématique : comment augmenter la réussite sur ce type de problème ? Apports théoriques : obstacles, démarches, outils. Comment automatiser des procédures ?
- Automatiser la reconnaissance du type de problème (référence travaux Butlen et al)

Groupe 5

Objectifs :

- Prendre conscience de l'origine de la complexité des problèmes (pas *a priori* pour l'opération)
- Distinguer procédures et calculs « évaluation formative »
- Outiller pour construire des progressions sur structures additives et multiplicatives
- Confrontation des pourcentages de réussites

Analyse des procédures

Apports et enrichissements : extraits de manuels ayant des progressions différentes (Cap maths vs J'apprends les maths)

Construction personnelle ou par groupe (progression pour leur classe) puis retours.

Groupe 6

Principes adressés aux formateurs :

Légitimer les tâches proposées en les mettant en lien avec les besoins, les questions professionnelles (prise en compte de la difficulté des élèves, organiser la différenciation, questionner la progression, faire évoluer les PE sur la prise en compte des erreurs).

Les accompagner (outils) dans l'analyse des énoncés et des productions et des résultats globaux afin de développer des compétences d'observation et d'analyse transférables en classe. Questionner les enseignants (analyse *a priori* des problèmes pour dégager la nécessité d'outils plus théoriques).

Identifier des leviers pour faire progresser les élèves : construction de progression, de séance, différenciation.

La trace écrite ne suffit pas pour comprendre les procédures des élèves.

Synthèse

Les différents groupes proposent des entrées relativement proches naturellement induites par les supports proposés. Un travail d'analyse *a priori* précède parfois les analyses plus ou moins « orientées » des productions débouchant souvent sur des propositions de hiérarchisation des procédures selon différents indicateurs. La question des aides et des progressions qui pourraient être proposées est également une préoccupation de formation. Des précisions relatives aux apports du formateur sont parfois mentionnées. Le temps imparti pour ce travail, incluant l'exploration des documents, n'a pas permis de produire des scénarios de formation plus détaillés.

IV - CONCLUSION

La présentation des propositions des différents groupes débouche ensuite sur un exposé de conclusion des animateurs de l'atelier qui présentent la stratégie qu'ils ont mise en œuvre pour exploiter les données recueillies lors de ces tests.

1 Premiers constats

Cette première année constituait une prise de contact avec les professeurs des REP Plus. De ce fait, elle se caractérise, par davantage d'apports d'informations et de témoignages que de mutualisation et d'observations effectives de pratiques. Notre but était, dans un premier temps, d'accéder indirectement aux pratiques des enseignants par le biais de la conception d'activités ou de tests et des constats effectués à cette occasion mais aussi d'établir une certaine proximité et une légitimité dans le but d'avoir accès progressivement aux pratiques effectives afin de mesurer l'impact à court terme du dispositif. De plus, il s'agissait de favoriser une collaboration effective entre les différentes catégories d'enseignants (PE, PLC, référents, PDMQDC) à partir d'un projet commun suffisamment limité pour obtenir une certaine adhésion au projet.

2 Une adhésion et un travail sur le moyen terme

Nous avons constaté qu'une condition nécessaire à l'enrichissement des pratiques consistait en une rencontre effective entre projets et attentes des participants et projet de formation qui passe nécessairement par une explicitation réciproque et progressive des attentes de chacun, un investissement partagé dans un projet de production finalisé par le traitement des difficultés des élèves et devant s'inscrire dans les activités de la classe et enfin une installation progressive de la légitimité du formateur lors de sa participation aux différents temps de travail (faire et faire faire).

Nous avons constaté un investissement immédiat ou progressif correspondant à nos attentes de formateurs mais diversifié selon les dispositifs (durée et fréquence des interventions, taille des groupes) et les publics (notamment selon la culture de la catégorie professionnelle et de sa pratique de la formation continue).

Toutefois les enseignants se sont révélés satisfaits de disposer de temps pour effectuer ce travail collectivement et de bénéficier des apports dispensés mais aussi très demandeurs d'apports théoriques leur permettant de mieux analyser les productions de leurs élèves, les difficultés diagnostiquées, les choix de stratégies d'enseignement à effectuer.

Même si certains témoignages de mise en œuvre ont été recueillis, il ne nous a pas été possible d'observer des pratiques effectives. Cependant pour une des formations, le mémoire de recherche rédigé comportait un recueil de données portant sur des observations effectives de pratiques autour de la résolution de problèmes.

3 Un dispositif qui va se poursuivre et s'élargir à d'autres cycles

Le projet est renouvelé cette année autour de nouveaux thèmes et étendu notamment dans les départements 92 et 91 puisqu'il concerne les cycles 1 à 3 dans le 92 et 1 à 4 dans le 91. Le projet est davantage orienté vers les cycles 1 et 2 dans le 78. Il concerne toujours les cycles 2 et 4 dans le 95.

V - BIBLIOGRAPHIE

BUTLEN D. (2012) Questions autour de l'enseignement des mathématiques en ASH : deux exemples de recherche. Réflexions et perspectives. 126- 148, In *Actes du Séminaire National de Didactique* 2012, ARDM

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2004) Contributions In PELTIER-BARBIER M.L., *Dur d'enseigner en ZEP*, La Pensée Sauvage, Grenoble

BUTLEN D., PEZARD M. (2007), Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté : le calcul mental entre sens et technique, Grand N n° 79, pp 7-32, IREM Grenoble

BUTLEN D. (2007), *Le calcul mental, entre sens et technique. Des difficultés des élèves aux élèves en difficulté,* Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon

CHARLES-PEZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012), *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation* ? La pensée Sauvage, Grenoble

CHARLES-PEZARD M. (2010), Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Recherches en didactique des mathématiques 30 (2), 197-261

HOUDEMENT C. (2015), Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes, Colloque Copirelem, Besançon

PEAULT et al. (sous la direction de VERGNAUD G.) (2001) *Le Moniteur de Mathématique, cycle 3, Résolution de problème*, Nathan

ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherches en didactique des mathématiques 34/2,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques 10/2-3,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

VI - ANNEXES

Annexe 1 : Enoncés de problèmes

Enoncés CM1 :

Test 1 :

Problème 1 : Alex a 86 billes, il en gagne 12 à la récréation. Combien en-a-t-il maintenant ?

Problème 2 : Alex a 15 billes au début de la récréation. À la fin, il en a 25. Que s'est-il passé ?

Problème 3 : Pierre a mis ses billes dans des sacs : il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?

Problème 4 : Patrick veut construire des petits bateaux avec une coque et une voile. Il a le choix entre 8 formes de coques et 6 couleurs de voile. Combien de bateaux différents Patrick peut-il construire ?

Problème 5 : Trois enfants se partagent 48 bonbons. Ils en prennent tous le même nombre. Combien chacun a-t-il de bonbons ?

Problème 6 : Dans un parking, il y a 25 places occupées et 15 places vides. Combien y-a-t-il de places sur ce parking ?

Test 2 :

Problème 1 : Alex a 10 billes de moins que Sonia qui en a 28. Combien de billes à Alex ?

Problème 2 : Une fermière range 60 œufs dans des boîtes de 6 œufs. Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?

Problème 3 : Cette année, le père de Lucie a 35 ans et Lucie a 7 ans. Le père de Lucie est combien de fois plus âgé que sa fille ?

Problème 4 : Pour aller dans leur classe, les élèves de la classe de CM2 montent un escalier de 25 marches 4 fois par jour. Combien de marches les élèves montent-ils en 5 jours ?

Problème 5 : Un homme a 32 ans à la naissance de son fils. Quand son fils aura 28 ans, quel sera l'âge du père ?

Problème 6 : Jacques a gagné 9 billes en deux parties. Il a gagné 6 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il gagnées lors de la deuxième partie ?

Énoncés CM2 :

Test 1 :

Problème 1 : Pierre a mis ses billes dans des sacs : il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?

Problème 2 : Pierre met douze minutes pour aller de chez lui à l'école. Zélie met trois fois moins de temps. Combien de temps met Zélie ?

Problème 3 : Alex a 15 billes au début de la récréation. À la fin, il en a 25. Que s'est-il passé ?

Problème 4 : Jean pèse 53 kilos. Il en perd 7. Combien pèse-t-il maintenant ?

Problème 5 : Le responsable d'un supermarché a commandé 3 060 œufs répartis dans des boîtes de 36 œufs. Combien de boîtes a-t-il reçues ?

Problème 6 : Dans un parking de 60 places, il y a 48 voitures stationnées. Combien y-a-t-il de places libres ?

Test 2 :

Problème 1 : Un père de 60 ans a un fils de 32 ans. Quel âge avait le père à la naissance de son fils ?

Problème 2 : Jean a eu 64 euros pour son anniversaire ; Charlotte a eu 4 fois moins. Combien Charlotte a-t-elle reçu ?

Problème 3 : Jacques a gagné 9 billes en deux parties. Il a perdu 6 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il gagnées lors de la deuxième partie ?

Problème 4 : Au supermarché, il est offert 7 euros en bons d'achat pour 10 tablettes de chocolat achetées. En achetant 60 tablettes de chocolat, combien reçoit-on en bons d'achat ?

Problème 5 : Pour partir en voyage, un groupe de 135 enfants se répartit équitablement dans 3 cars. Combien y a-t-il d'enfants dans chaque car ?

Problème 6 : Un livre a augmenté de 4 € puis il a baissé de 12 €. Son prix est maintenant de 25 €. Quel est son prix initial ?

Énoncés sixième :

Test 1 :

Problème 1 : Jean a eu 64 euros pour son anniversaire ; Charlotte en a eu 4 fois moins. Combien Charlotte a-t-elle reçu ?

Problème 2 : Un jeu vidéo coûte 80 €, il augmente de 12 € en juin puis baisse de 7 € en décembre. Quel est maintenant son prix ?

Problème 3 : Une fermière range 160 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Combien de boîtes d'œufs remplit-elle complètement ?

Problème 4 : Dans une salle de classe, il y a 35 tables et 8 chaises. Combien de chaises faut-il ajouter pour qu'il y ait une chaise par table ?

Problème 5 : Alex a perdu 7 billes le matin à la récréation. Le soir, il en a 17. Combien en avait-il avant d'arriver à l'école ?

Problème 6 : Un terrain de basket rectangulaire a une aire de 252 m². Sa largeur est 14 m. Quelle est la longueur du terrain ?

Test 2 :

Problème 1 : Avec 82 billes, combien doit-il prévoir de feuilles de bristol ?

Problème 3 : Un livre a augmenté de 4 € puis il a baissé de 12 €. Son prix est maintenant de 25 €. Quel est son prix initial ?

Problème 4 : Cette année, Jean a 14 ans, son père 43 ans. Quel âge aura son père quand Jean aura 30 ans ?

Problème 5 : En moyenne, un coureur automobile fait en une heure 25 tours d'un circuit de 3 km. Quelle distance a-t-il parcourue en 4 heures ?

Problème 6 : Jacques a perdu 9 billes en deux parties. Il a gagné 7 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il perdues lors de la deuxième ?

Annexe 2 : Un problème et des procédures

Productions d'élèves de CM2 à un problème de comparaison de mesure relevant des structures additives

<u>Problème 4 :</u> Cette année, Jean a 14 ans, son père 43 ans. Quel âge aura son père quand Jean aura 30 ans ?

P1

Problème n°..4.. :
QUAND AURA 30 ans SON PÈRE AURA 73 ans.

43 + 30 = 73

P2

Problème n°..4.. :
43 + 30 = 73 ans Son père aura 73 ans.

P3

Problème n°..4.. :
Son père aura 59 ans quand Jean en aura 30.
30 - 14 = 16   43 + 16 = 59.

P4

Problème n°..4.. :
~~Son père quand~~
Son pere aura 73 ans.

43 + 14 = 29   14 + 30 = 44   44 + 29 = 73

P5

Problème n°..4.. : 1   1
30 - 14 = 26   43 + 26 = 69
Son père aura 69 ans

P6

Problème n°..4.. :
Son père aura 59 ans quand Jean aura 30 ans
43 - 14 = 29   29 + 30 = 59

P7

Problème n°..4.. :

Cette annee, Jean 14 ans, son père 43 ans ~~quel~~ Quel âge aura son ~~pre~~ père ~~quaq~~ quand Jean aura 30 ans

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 43 \\ \hline 57 \end{array}$$

Il aura 57 ans.

P8

Problème n°..4.. :

43 + 29 = 72

Réponse : Le père de Jean aura 72 ans quand il aura 30 ans.

P9

Problème n°..4.. :

(43 - 14 = 29) 30 + 29 = 59

Il aura 59 ans

P10

Problème n°..4.. :

30 - 14 = 16 16 + 43 = 59 Quand Jean aura 30 ans, son père aura 59 ans.

P11

Problème n°..4... :

30 - 14 = 16 Il y a 16 ans d'équart pour que Jean ait 30 ans

43 + 16 = 59 Son père aura 59 ans.

P12

Problème n°…4.. :

30-14=26

43+26=69 Quand Jean aura 30 ans son père aura 69 ans

P13

Problème n°4… :

Quand Jean aura 30 ans son père aura ~~59~~ 72 ans
car ils ont 29 ans d'écart ~~29~~ 3 43-14=29 30+29=59
43- 14=29 29+43=~~7~~72

P14

Problème n°…4… :

30-14=26 Il aura 30 ans

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\ 26 \\ \hline 69 \end{array}$$

P15

Problème n°(4)… :

Calcule : 16+14= 30 ans = 16+43= 59 ans
Réponse : Quand Jean aura 30 ans son père aura 59 ans.
Ils ont 16 ans de différence.

P16

Problème n°…… :

le père de jeans aura 73 ans quand jeans aura 30 ans

16+14=30
43+30=73

Annexe 3 : Des productions d'un élève de CM1

RESOLUTION DE PROBLEMES CM1 TEST n° 1

Lis ces six énoncés de problèmes puis **propose une solution pour au moins quatre** de ces problèmes."

Problème 1 : Alex a 86 billes, il en gagne 12 à la récréation. Combien en-a-t-il maintenant ?

~~86+~~

86
+ 12
98

Alex a maintenant 98 billes

Problème 2 : Alex a 15 billes au début de la récréation. À la fin, il en a 25. Que s'est-il passé ?

15
+ 10
25

Alex a gagner 10 billes en plus

Problème 3 : Pierre a mis ses billes dans des sacs : il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?

5
× 32
20
+ 150
170

Dans les sacs de Pierre il y a 170

Problème 6 : Dans un parking, il y a 25 places occupées et 15 places vides. Combien y-a-t-il de places sur ce parking ?

25
− 15
10

Dans le partingg il reste 10 places

RESOLUTION DE PROBLEMES CM1 TEST n° 2

Lis ces six énoncés de problèmes puis **propose une solution pour au moins quatre** de ces problèmes."

Problème 1 : Alex a 10 billes de moins que Sonia qui en a 28. Combien de billes à Alex ?

$28 - 10 = 18$

$28 - 10 = 18$ Alexe aura 18 billes

Problème 2 : Une fermière range 60 œufs dans des boîtes de 6 œufs. Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?

$60 \times 6 = 360$

Problème 3 : Cette année, le père de Lucie a 35 ans et Lucie a 7 ans. Le père de Lucie est combien de fois plus âgé que sa fille ?

$7 \times 5 = 35$

Problème 4 : Pour aller dans leur classe, les élèves de la classe de CM2 montent un escalier de 25 marches 4 fois par jour. Combien de marches les élèves montent-ils en 5 jours ?

$$\begin{array}{r} \overset{2}{2}5 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array}$$

Les CM2 monteras 100 marches

Problème 5 : Un homme a 32 ans à la naissance de son fils. Quand son fils aura 28 ans, quel sera l'âge du père ?

~~28~~

$$\begin{array}{r} 32 \\ +28 \\ \hline 60 \end{array}$$

L'homme aura 60 ans quand son fils aura vingt-~~huit~~ ans

Problème 6 : Jacques a gagné 9 billes en deux parties. Il a gagné 6 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il gagnées lors de la deuxième partie ?

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 6 \\ \hline 12 \end{array}$$

En deux parties Jacque aura 12 billes

L'INFORMATIQUE, UN APPRENTISSAGE DE PLUS OU UNE PISTE AU SERVICE D'AUTRES APPRENTISSAGES ?

Marie DUFLOT
Maître de conférences, Université de Lorraine
LORIA & INRIA Nacy Grand Est
marie.duflot-kremer@loria.fr

Résumé
Avec les changements de programmes, une introduction à l'algorithmique et la programmation arrive jusqu'en primaire. En effet, le programme des cycles 2 et 3 contient une partie d'initiation à la programmation, au travers de déplacements relatifs ou absolus. Pour ce faire, diverses activités avec ou sans ordinateurs sont suggérées afin d'acquérir et de perfectionner des premières notions de programmation.
Au travers d'exemples concrets, et avec un lien vers la formation Class'Code qui mêle apprentissage du code et de concepts au travers d'activités sans ordinateur, nous avons vu en quoi des activités d'informatique « débranchée », popularisées entre autres par l'équipe à l'origine du site Computer Science Unplugged (Bell et al. 1992) et Roberto Di Cosmo (Di Cosmo, 2015), permettent de travailler de manière ludique des concepts fondamentaux, tout en manipulant des objets concrets, en développant la collaboration et en permettant de structurer et transmettre ses idées. Nous avons également vu comment ces activités s'articulent avec des compétences, transversales ou non, que les enfants acquièrent et exploitent dans le cursus scolaire.

Cet article présente et complète ce qui a été fait lors de l'atelier. La section I présente la « pensée informatique », illustrant en quoi elle est déjà présente dans l'enseignement, et montre comment l'informatique s'insère dans le programme de primaire, en tant que telle ou comme moyen de travailler d'autres compétences. Dans un deuxième temps nous présentons en Section II quelques activités sans ordinateur qui permettent de découvrir et comprendre des principes informatiques de manière ludique. Nous présentons enfin en Section III un résumé des retours des participants ainsi que quelques conclusions tirées de cet atelier.

I - LA PENSEE INFORMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

1 Qu'est-ce que la pensée informatique ?

La pensée informatique, ou pensée computationnelle (*computational thinking* en anglais) est une notion, dont l'invention est attribuée à Seymour Papert (Papert, 1980) et popularisée entre autres par Jeannette Wing (Wing, 2006). En quelques mots, elle représente la capacité de formuler un problème, puis de concevoir et décrire sa solution en des étapes assez simples et précises pour qu'elles puissent être effectuées par un ordinateur. Pour se faire une idée un peu plus précise, voici une liste non exhaustive d'ingrédients impliqués dans la pensée computationnelle :

- La spécification : décrire précisément le problème, les informations dont on part ainsi que ce qu'on veut obtenir.
- L'algorithme : trouver quelles étapes permettent de résoudre le problème, convenir de quelles actions élémentaires sont adaptées et trouver quoi faire et dans quel ordre.
- La correction des bugs : une fois l'algorithme mis en œuvre, être capable d'identifier et de corriger les problèmes, souvent au travers de tests.
- La décomposition : résoudre un problème difficile en le découpant en plusieurs grandes étapes résolues séparément, chaque partie étant plus facile à comprendre et à corriger, puis recomposer ces étapes en une solution complète.

- La réutilisation : tirer avantage de la modularité en réutilisant un ou plusieurs modules de la solution d'un problème pour en résoudre un autre, similaire. Comprendre ce qui est utilisable directement et ce qui doit être adapté.
- La créativité : chercher la solution à un problème dans différentes directions, ou chercher une solution plus élégante ou plus facile à comprendre pour un même problème.
- L'optimisation : chercher à rendre une solution la plus efficace possible (en temps d'exécution par exemple).

Un des points remarquables de cette notion est que, si elle a été introduite en lien avec la programmation, elle peut s'appliquer à des domaines très variés. On se doute bien que la résolution d'un problème de mathématiques par exemple va mobiliser une bonne partie de ces compétences, mais on utilise aussi des aspects de pensée computationnelle dans la cuisine ou le bâtiment. Si j'ai une recette pour 4 personnes et que finalement nous sommes 6, est-ce que je change la quantité d'ingrédients ? la température du four ? le temps de cuisson ? Je dois construire un pont contenant 6 piles, puis-je les construire en même temps ? Combien de personnes au minimum doivent être là pour pouvoir le réaliser ? Et si j'ai 10, 20 ou 30 personnes de plus, est-ce que ça va vraiment accélérer le travail ?

En clair la pensée informatique est déjà très présente dans les enseignements scolaires, quand on construit un raisonnement logique, quand on explique les choses de manière détaillée, ou qu'on utilise la solution d'un problème connu pour en résoudre un nouveau. Nous utilisons tous et toutes la pensée informatique sans forcément le savoir, et elle n'est pas réservée aux informaticien•ne•s, loin de là.

2 L'informatique dans les programme des cycles 2 et 3

Depuis 2016, l'initiation à la programmation a fait son entrée dans les programmes des cycles 2 et 3. Contrairement aux programmes du cycle 4, cette nouvelle partie est ici intégrée au programme de géométrie et se concentre sur les déplacements. « Il s'agit de savoir coder ou décoder pour prévoir ou représenter des déplacements, de programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran. Des activités géométriques, consistant en la construction de figures simples ou de figures composées de figures simples, sont également proposées.» (EDUSCOL, 2016).

Le document contenant les ressources d'accompagnement du programme de mathématiques propose pour l'initiation à la programmation trois pistes pour les stratégies d'enseignement.

- Tout d'abord la démarche. Les enseignantes et enseignants sont invité•e•s à mettre les élèves dans une démarche de projet, en se basant sur cette notion de déplacement, et les inviter à expliciter leurs programmes. Les objectifs visés sont l'implication, l'abstraction et l'autonomie.
- Ensuite le langage qui doit être précis, ne pas laisser d'ambiguïté mais permettre de faire toutes les actions nécessaires.
- Enfin les activités doivent travailler sur le **déplacement absolu** (pour lequel l'effet d'une commande ne dépend pas de l'orientation du personnage/robot) et le **déplacement relatif** (si on avance de 3 pas, selon son orientation on ne va pas dans la même direction).

Pour atteindre ces objectifs, le document propose plusieurs pistes à combiner librement. Tout d'abord des activités « débranchées » donc sans ordinateur, puis avec des robots (Bee-Bot, Blue-Bot, Thymio…), et enfin sur machine, sur des sites web (comme Blockly ou code.org) ou avec un logiciel téléchargeable et utilisable sans connexion internet (Scratch, ScratchJr).

L'activité du robot (voir section **Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**) s'intègre parfaitement dans ce cadre, car elle permet de travailler les déplacements relatifs et absolus, ainsi que de penser au passage entre ces deux langages. Elle est de fait très proche de l'activité de la fusée suggérée sur le site EDUSCOL (sur les déplacements absolus) et de la tournée du facteur (sur les déplacements relatifs).

Outre les documents disponibles sur le site EDUSCOL, différentes initiatives, individuelles ou institutionnelles permettent aux enseignants de se former sur cette nouvelle discipline. Parmi elles, Class'Code est un projet financé dans le cadre des PIA[1] qui réunit de nombreux partenaires, publics ou privés, afin de fournir une formation hybride gratuite à la pensée informatique (Class'Code, 2015). Ce projet mélange cours en ligne (MOOC) et temps de rencontres entre apprenants pour donner aux enseignants mais aussi aux éducateurs/animateurs un bagage pour initier les 8-14 ans à la pensée informatique. Et ce bagage proposé par Class'Code est à la fois théorique (éléments d'histoire de l'informatique, explications sur le binaire ou le fonctionnement d'Internet…) et pratique (expérimentation et ressources sur des activités informatiques, avec ou sans ordinateur).

3 Des activités informatiques au service des apprentissages

Lorsqu'on parle d'informatique, la première chose qui vient à l'esprit de nos interlocuteurs est l'ordinateur, l'outil informatique par excellence. Si son utilité dans la salle de classe (utilisation d'un TBI, de logiciels de traitement de texte, accès à des ressources en ligne…) est évidente, il ne faut pas oublier que l'informatique ne se limite pas à une utilisation (si experte soit-elle) de ces outils au travers de logiciels existants. En effet, l'informatique est avant tout un ensemble de concepts, ceux-là mêmes qui permettent à nos outils informatiques de fonctionner, et c'est autour de ces concepts que tournent les activités qui ont été présentées dans l'atelier.

Comme on s'intéresse aux concepts, on peut donc les présenter en se détachant de l'ordinateur, aux travers de jeux, d'énigmes, voire même de tours de magie. Pour cela, on utilise des objets hétéroclites comme des draps, des allumettes, des jetons, des objets en carton ou des cartes. Les participantes et participants sont invité•e•s à manipuler ces objets, à se déplacer, à échanger, à collaborer afin d'atteindre un objectif commun.

Les activités renforcent/mobilisent de ce fait des compétences variées. Pour les plus jeunes ou les enfants ayant des difficultés dans ce domaine, la manipulation développe la motricité fine. Les déplacements développent la motricité, la latéralisation et parfois la numération. Les échanges développent le langage et la nécessité de formaliser ses idées pour bien se faire comprendre, et les collaborations mettent en évidence les avantages et les difficultés à travailler ensemble, ainsi que la nécessité de mettre en œuvre une dynamique de groupe.

En plus de ces compétences transversales, et comme on le verra dans les activités présentées dans la suite, on peut travailler sur des compétences disciplinaires, notamment mathématiques, au travers de ces activités, et ce pour deux raisons :

- d'une part la mise en œuvre de l'activité peut nécessiter des connaissances mathématiques (calcul du « coût » d'une solution pour essayer d'optimiser ce coût, par exemple dans l'activité des marmottes de la section **Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**, calcul d'angle dans des extensions possibles du jeu du robot section **Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**)
- d'autre part certaines activités informatiques peuvent utiliser un jeu de données (comme dans le réseau de tri section **Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**) qui, une fois l'activité maîtrisée avec des jeux de données simples, peut être choisi dans le domaine souhaité (calculs, vocabulaire, histoire…). Comme l'activité est rapide à exécuter, elle peut être réutilisée ponctuellement pour permettre de travailler de manière originale et ludique le calcul mental, l'ordre lexicographique, les dates historiques ou autres.

II - QUELQUES ACTIVITES D'INFORMATIQUE SANS ORDINATEUR

Lors de l'atelier, un panel d'activités sans ordinateur a été présenté. Ces activités sont pour la plupart disponibles en ligne avec une description de l'activité ainsi que des documents d'appui voire une vidéo explicative sur le site de l'auteure[2]. Nous nous sommes ensuite concentrés principalement sur trois

[1] Projets d'Investissement d'Avenir

[2] Accessible à l'adresse : https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/

activités présentées ci-dessous. Tout d'abord, le jeu du robot, qui permet une première approche de la programmation au travers de déplacements relatifs et absolus. Ensuite le réseau de tri, qui permet d'apprendre à exécuter un algorithme tout en travaillant la coopération et d'aborder la notion de parallélisme. Enfin les marmottes au sommeil léger, une activité où l'on travaille sur l'optimisation, la recherche de la « meilleure » solution, tout en calculant et en abordant la notion de compression des données.

1 Le jeu des robots

Le jeu du robot est une activité parfaite pour découvrir la programmation. En effet elle permet, sur un langage limité et assez facile à appréhender, de commencer par s'approprier le langage, puis d'exécuter des programmes, d'en écrire soi-même voire de changer de langage de programmation. Il est tout à fait possible de ne réaliser qu'une partie de l'activité en s'adaptant aux objectifs que l'on poursuit, au temps disponible pour l'activité et à l'âge du public. On peut donc avancer plus ou moins vite dans l'activité en fonction des capacités du public, et en adaptant l'activité on peut même en aborder certains aspect à dès le cycle 1[3].

Ce jeu est de plus au cœur du programme d'initiation à la programmation aux cycles 2 et 3 car il aborde la programmation par le biais de déplacements et se prête facilement à la transposition à un véritable robot voire un logiciel de programmation comme ScratchJR ou Scratch.

1.1 Public

Cette activité a été testée avec des élèves de grande section de maternelle, de début de primaire (CP et CE1), ainsi qu'un groupe d'élèves d'ULIS TFC (Troubles du Fonctionnement Cognitif). Elle peut s'adapter à des élèves de cycle 1 à 3 en adaptant ses objectifs. Pour les plus grand•e•s, elle constitue une première étape, mais rencontre ses limites car ne se prête pas trop à l'écriture de boucles (pour dessiner un carré par exemple, voir extension Section **Erreur ! Nous n'avons pas trouvé la source du renvoi.**).

1.2 Matériel

Le matériel minimum pour réaliser l'activité est très limité. Il suffit de réaliser un paysage[4], par exemple à la craie dans la cour, ou avec des objets réels que l'on pose au sol. Pour préciser ce que représente un pas, on peut dessiner des points régulièrement espacés en formant un maillage. On peut également dessiner un quadrillage, ou même utiliser le carrelage au sol si la taille des dalles s'y prête. Pour plus de réutilisabilité, on peut tracer une fois pour toutes le paysage et le maillage sur un support (un grand drap par exemple) ce qui rend le paysage facile à installer. Il est également utile de préparer quelques programmes exemples pour que les enfants puissent tester des programmes existants avant de se lancer dans la réalisation de leurs propres programmes.

[3] Un projet pour décliner les activités du réseau de tri et du jeu du robot sur les trois classes du cycle 1 est en cours de mise en place dans une école maternelle de Nancy.

[4] Un document explicatif du déroulé de l'activité contenant également une version du plan est disponible au format pdf en suivant le lien : https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/doc/robot/robot.pdf

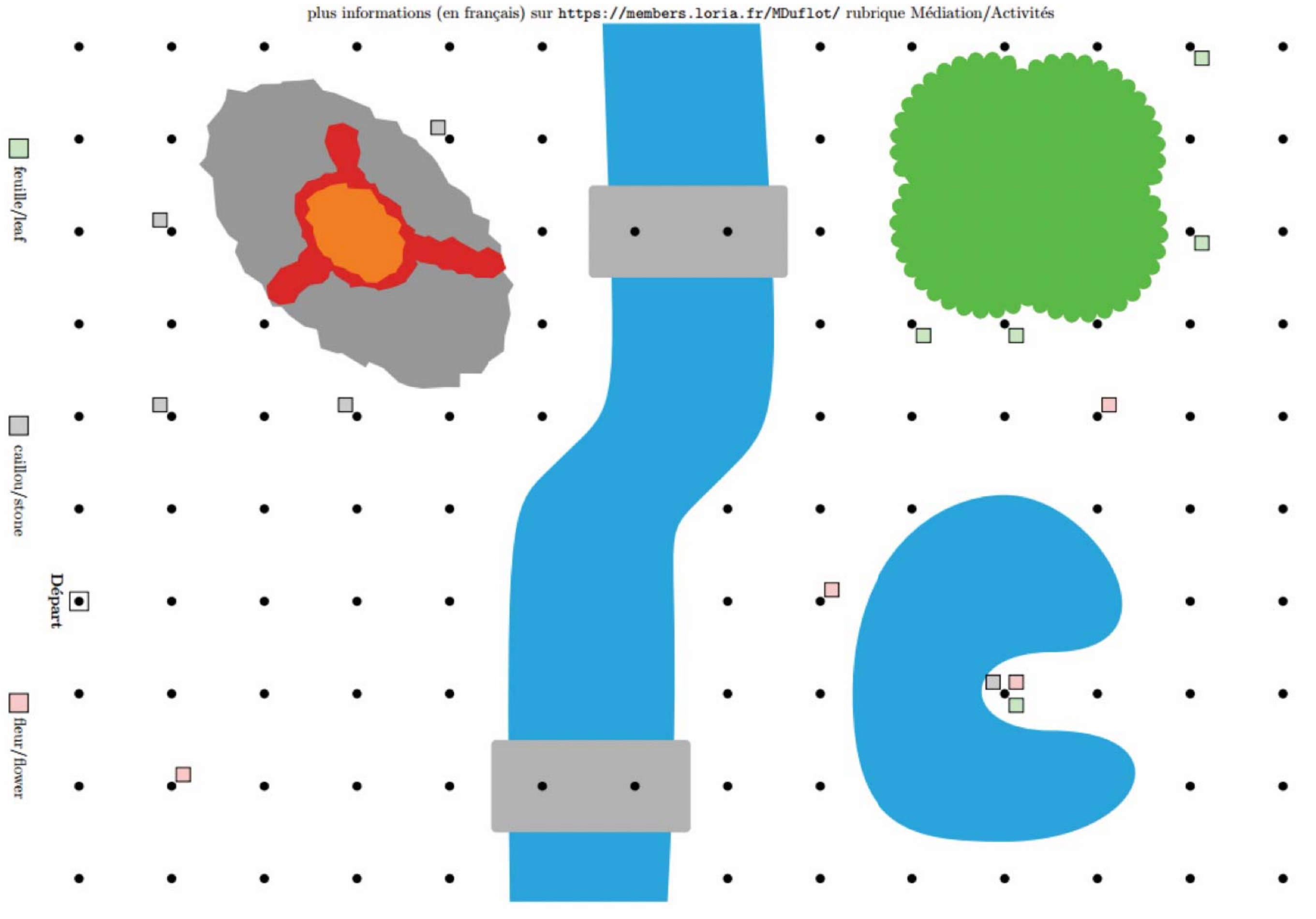


Figure 1. Plan utilisé pour le jeu du robot.

1.3 Langage

Comme décrit dans les ressources d'accompagnement du programme de cycles 2 et 3, la définition du langage de programmation est importante. Il doit être simple, non ambigu, et proche du langage utilisé par les enfants pour faciliter son appropriation.

Dans un premier temps, on ne va réaliser que des translations, en se déplaçant d'un pas en avant, en arrière, à gauche ou à droite sans jamais tourner sur soi-même. Le langage se compose donc uniquement de 4 flèches, avec la convention qu'une flèche pointant vers le haut correspond à avancer, et une vers le bas à reculer. Il est évidemment possible d'utiliser un langage textuel, mais les flèches permettent de réaliser l'activité avec les plus jeunes ou avec des enfants avec des difficultés de lecture.

Pour les plus jeunes, il est utile de commencer par s'approprier le langage, par exemple en les faisant tous et toutes faire les mêmes déplacements en même temps (à la manière d'un cours de fitness) en suivant une personne qui leur montre. On peut également, pour les enfants non latéralisés, surligner les flèches gauche et droite de deux couleurs différentes, et mettre des bracelets des couleurs correspondantes aux deux poignets de l'enfant. Elles et ils ne font donc plus un pas à gauche et un pas à droite mais un pas côté bleu et un pas côté rouge.

1.4 Tester des programmes

On explique d'abord que l'on ne peut se déplacer sur le paysage que dans la partie quadrillée. Tous les éléments dessinés/posés au sol ne doivent pas être touchés/piétinés. On ne peut ainsi traverser une rivière qu'en passant sur le pont, sur les points dessinés à cet effet. On propose différents programmes aux enfants, en spécifiant bien de quel point et dans quelle orientation on doit partir. On fait jouer à l'un ou l'une des enfants le rôle de la mémoire de l'ordinateur (qui lit les instructions) et l'autre le rôle du processeur/robot (qui exécute les instructions). Après quelques programmes corrects qu'elles et ils doivent exécuter avant de dire quel déplacement il a permis, il est intéressant de leur donner un programme contenant un « bug ». Cela leur permet en effet de se rendre compte que, si un programme contient une erreur, le robot/ordinateur va l'exécuter sans se poser de questions (et par exemple tomber dans la rivière). L'ordinateur est rapide, précis, mais pas intelligent. Il ne fait que ce qu'on lui dit.

C'est également l'occasion de dire ou rappeler qu'en informatique beaucoup de monde fait des erreurs dans ses programmes. Ils sont souvent tellement grands et compliqués que c'est normal de manquer quelque chose. Seulement c'est le travail de l'informaticien•ne de vérifier ses programmes, de les tester et de trouver/corriger ses erreurs. Un tel rappel n'est pas inutile pour des enfants qui associent souvent erreur et échec. Chaque erreur doit être vue comme un pas de plus vers la solution, et le test nous permet de voir à quel moment dans le programme on a fait une erreur.

Pour les élèves les plus jeunes, des enseignant•e•s ont identifié de possibles difficultés. Avancer tout droit d'un point à un autre sans partir sur la diagonale peut être difficile. On peut donc tracer même en ligne plus fine le quadrillage entre les points. Le fait de lire un programme sur plusieurs lignes peut également être une difficulté. Il peut donc être utile de commencer par des programmes courts, ou de trouver des feuilles plus grandes pour les faire tenir sur une seule ligne.

1.5 Écrire ses propres programmes

Une fois le langage de déplacements bien maîtrisé, les élèves peuvent commencer à réaliser leurs propres programmes. Il faut donc leur donner le point de départ, l'orientation, et donner un objectif. On peut choisir de fixer un point de départ et une orientation et de s'y tenir pour tous les programmes, ou bien spécifier le point de départ à chaque fois, voire donner des points de départs différents à des groupes d'élèves pour qu'elles et ils puissent écrire et tester leurs programmes sans trop se marcher sur les pieds. Pour les objectifs, on peut commencer par des choses simples comme « aller près du volcan » ou « traverser la rivière », fixer un point précis et leur demander de s'y rendre.

Si on veut varier les programmes, on peut fabriquer des images d'objets et les poser sur des points précis du drap[5]. On ajoute donc une instruction supplémentaire : « ramasser », que l'on peut abréger avec la lettre R, qui permet de ramasser tous les objets qui sont sur notre point.

Les objectifs deviennent donc : « ramasser une fleur », « ramasser deux cailloux », « ramasser un objet de chaque » ou encore « ramasser deux feuilles et une fleur sans jamais marcher sur un caillou ». On peut bien évidemment calibrer la difficulté en fonction des facilités du groupe sur ce genre d'exercice.

C'est l'occasion de repréciser si besoin que l'ordinateur ne fait que ce qu'on lui demande. S'il passe sur un objet et qu'on ne lui demande pas de le ramasser, il le laisse sur place.

En donnant le même objectif à deux groupes différents, on met également en évidence que, pour une même tâche à réaliser, il existe plusieurs programmes corrects. La comparaison de ces programmes peut alors se faire sur le nombre et le type d'instructions à réaliser. Pour l'objectif de ramasser un objet de chaque, un robot qui roule très vite mais se baisse très lentement aura tout intérêt à aller sur un point sur lequel se trouvent les trois objets pour ne se baisser qu'une fois. Au contraire, un robot plus lent à se déplacer mais sans problème pour se baisser cherchera à prendre le chemin le plus court, quitte à se baisser plusieurs fois.

1.6 Changement de langage et équivalence

Les variantes du langage peuvent être introduites avant ou après l'écriture des programmes, au choix de la personne qui présente l'activité. Les modifications possibles pour ce langage sont de deux types :

- Tout d'abord pour se faciliter la vie, on peut avoir envie, au lieu de dessiner 4 flèches consécutives vers la droite →→→→, de noter plutôt 4→ ou 4 × →. Cela évite les erreurs en écrivant/lisant le programme si on manque une flèche par exemple. C'est alors une première idée de la boucle : on donne une instruction et on dit combien de fois la répéter. Le langage prend ainsi moins de place et gagne en clarté.

[5] Comme visible sur le plan du document https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/doc/robot/robot.pdf

- On peut également supprimer les flèches latérales et en arrière, et les remplacer par des quarts de tour[6] (à droite ou à gauche). On peut donner aux enfants de nouveaux objectifs à réaliser avec ce langage, ou les inviter à réécrire leurs programmes précédents en utilisant cette nouvelle notation.

Pour les plus avancés, on peut essayer de trouver avec elles et eux un algorithme qui permettrait de traduire automatiquement un programme avec les translations en un programme avec des rotations. Il suffit, à chaque changement de direction dans les déplacements, de coder ce changement de direction à l'aide de quarts de tours, puis de transformer toutes les flèches en « avancer ».

Par exemple le programme ↑↑→← ↑ (avec des translations) se traduit en ↑↑ Droite ↑ Gauche Gauche ↑Droite ↑ (avec des rotations).

Il y a donc dans cette seule activité plusieurs parties de difficultés différentes, à aborder toutes ou à sélectionner, pour un public allant du cycle 1 au cycle 3.

1.7 Extensions possibles

L'activité du robot telle qu'envisagée ici n'est qu'une première étape. Elle a des limitations notamment sur les rotations (avec notre système de points on ne peut tourner que par quarts de tour) ou les boucles (on peut répéter plusieurs fois une flèche en écrivant 5↑ mais pas un ensemble d'instructions, pour dessiner un carré par exemple). On peut lever ces limitations en quittant le quadrillage et en traçant ses angles au sol, en mesurant ses pas etc. On peut même tracer au sol le parcours suivi (pour réaliser les figures géométriques mentionnées sur le site EDUSCOL). Mais c'est en général à ce moment-là qu'on commence à trouver pénible de faire les choses « à la main » et qu'il est bienvenu de passer sur un ordinateur qui calcule lui-même les angles, les distances quand on avance etc.

2 Le réseau de tri

Cette activité est tirée du site Computer Science Unplugged, créé entre autres par Tim Bell, un des acteurs majeurs dans la réalisation d'activités informatiques à destination des enfants, notamment sans ordinateur (Bell, 2012). La version présentée en atelier ne présente pas de différence notable avec la version originale. Cette activité propose, en permettant aux enfants de se déplacer et en les incitant à coopérer, d'aborder la notion de parallélisme (voir section 2.5) et d'exécution d'un algorithme.

2.1 Public

Le public visé par le réseau de tri est très large. En prenant le temps on peut amener des élèves de cycle 1 à réaliser l'activité (sans pour autant aborder l'aspect recul sur le parallélisme). Mais le fait de pouvoir varier les ensembles de cartes pour augmenter la difficulté et varier les domaines d'application (voir Section 2.4) permet à la fois d'intéresser et de faire réfléchir des élèves de primaire comme de secondaire, mais également de revenir ponctuellement sur cette activité pour travailler différentes compétences disciplinaires.

2.2 Matériel

Comme pour le jeu du robot, on peut dessiner son réseau de tri à la craie, ou le réaliser avec des objets (baguettes assez longues et cerceaux). Des modèles sont disponibles sur internet avec plus ou moins de valeurs à trier. Le réseau le plus classique pour ce genre d'activité ordonne 6 valeurs. C'est celui qui a été utilisé lors de l'atelier[7].

[6] Nous n'avons à ce jour pas trouvé de symbole satisfaisant pour les quarts de tour. Les lecteurs et lectrices ayant une idée à ce sujet sont invité•e•s à se manifester auprès de l'auteure de cet article.

[7] On peut le récupérer sur https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/reseautri.html

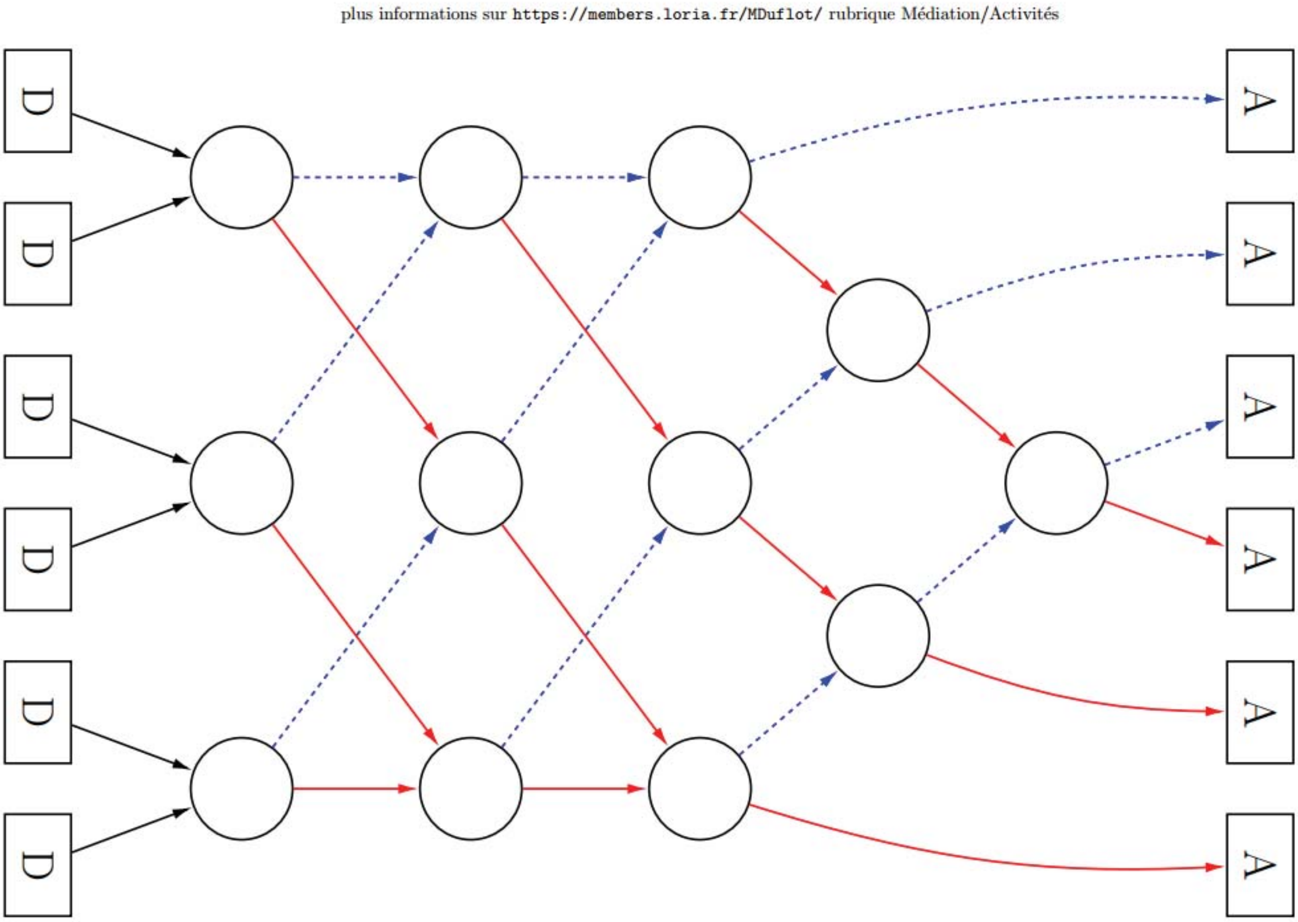


Figure 2. Plan du réseau de tri pour 6 valeurs

Il faut également réaliser quelques jeux de cartes à trier, à ajuster en fonction du niveau des élèves (voir dans les deux sections suivantes pour des idées de ce qu'on peut mettre sur ces cartes).

2.3 Réaliser son tri sur un réseau

Six élèves se positionnent sur les états de départ du réseau et on distribue au hasard à chacun et chacune une carte contenant une valeur. Pour les plus jeunes on peut réaliser des cartes contenant plus ou moins de points qu'elles et ils vont devoir compter. À partir du cycle 2, un jeu de cartes contenant les chiffres de 1 à 8 convient parfaitement.

Quand on lance l'activité, les élèves vont avancer sur le réseau en suivant les lignes dessinées et arriver dans un cercle, que l'on nomme centre de calcul. Comme deux lignes arrivent sur le même centre, deux élèves vont s'y rencontrer. Elles et ils vont alors comparer leurs cartes, la personne qui a la plus petite valeur va partir à gauche, et celle qui a la plus grande valeur part à droite[8], chacune des deux suivant une des deux lignes sortant du centre de calcul. Les élèves vont alors arriver dans un nouveau centre de calcul, y rencontrer un•e nouve•au•lle camarade, comparer et continuer ainsi jusqu'à atteindre un état d'arrivée. Quand tout le monde est arrivé, on regarde toutes les cartes et on vérifie si elles sont bien rangées dans l'ordre croissant. Les élèves vont réaliser que, sans coopération, on se trouve rapidement coincé avec trop de personnes dans un centre de calcul, et une personne laissée seule sur le réseau. C'est donc à celle ou celui qui va le plus vite d'attendre sa ou son camarade pour s'assurer avant de partir vers la prochaine étape que tou•te•s les deux ont compris où aller. Le but n'est pas d'aller le plus vite individuellement, mais d'aller le plus vite ensemble.

---

8 Dans le cas où les deux valeurs sont égales, peu importe qui va à droite et qui va à gauche. C'est une réflexion intéressante qui mérite de mettre des cartes de même valeur.

On peut ensuite faire tourner différents groupes sur le réseau pour un même jeu de cartes et, pour pimenter le jeu, les chronométrer pour voir quel groupe trie ses cartes le plus rapidement.

2.4 Extensions, ou comment faire des mathématiques (ou plus) avec le réseau de tri

Une fois que l'activité du réseau de tri est maîtrisée, on peut varier les ensembles de cartes à loisir, avec pour seules limites les connaissances des élèves et son imagination. On peut donc imaginer ranger des images pour reconstituer une histoire dans l'ordre, des objets par taille, des nombres avec plus ou moins de chiffres, ou encore des calculs suivant leur résultat (en adaptant la difficulté du calcul à son public) ce qui nécessite d'effectuer le calcul rapidement. On peut également trier des mots selon l'ordre lexicographique, des objets en suivant leur poids ou encore des périodes historiques de la plus ancienne à la plus récente.

En clair, une fois qu'on a investi dans l'activité, on peut ressortir son réseau de tri pour un oui ou pour un non, sans avoir à tout réexpliquer et donc en perdant très peu de temps, pour travailler mettons le calcul mental ou la comparaison de grands nombres et ce de manière différente/ludique.

2.5 Parallélisme

Cette activité a été initialement créée pour illustrer une notion importante en informatique, incontournable dans les super ordinateurs permettant de réaliser en un temps raisonnable des calculs gigantesques : le parallélisme.

L'idée est toute simple : si on doit transférer le contenu d'un gros tas de sable dans la remorque d'un camion et qu'une seule personne est disponible, cela va prendre un certain temps. Si plusieurs personnes équipées de pelles viennent transférer le tas, on va nettement diminuer le temps total. Si le temps pour une personne était de 5 minutes et que 5 personnes mettent une minute, on peut se dire qu'un gain de 4 minutes ne change pas grand-chose. Par contre si la personne seule avait dû y passer 5 jours et qu'à 5 une seule journée est nécessaire, le sable va pouvoir partir le jour-même et être utilisé dans un chantier où il est sûrement attendu.

En informatique c'est exactement la même chose. Un processeur peut a priori réaliser un calcul à la fois. S'il a 200 calculs à faire il va les faire à la suite et cela lui prendra 200 étapes de calcul. Si maintenant on a un ordinateur qui dispose de plusieurs unités de calcul (on parle d'ordinateur « multi-cœurs ») alors il peut réaliser plusieurs calculs en même temps, « en parallèle » et cela améliore d'autant son efficacité. Sur le réseau de tri, on a fait 12 comparaisons (il suffit de compter les cercles) mais on ne les fait pas une à la fois. Lors de la première étape de calcul, on a fait 3 comparaisons en parallèle (elles sont alignées), puis encore 3 à la deuxième étape etc. Pour savoir le nombre d'étapes de calcul nécessaires, il suffit de compter le nombre de « lignes » de centres de calculs. On en a 5. Le parallélisme dans ce cas-là nous a permis de passer de 12 étapes à seulement 5.

Ce qui paraît étrange c'est qu'on avait 12 étapes, qu'on peut faire 3 choses à la fois, et qu'on n'obtient pas au final 12/3=4 étapes. Ceci est dû au fait que, sur la fin, on n'a plus beaucoup de comparaisons à faire mais elles dépendent les unes des autres. Pour savoir qui comparer sur la dernière ligne il faut voir le résultat des comparaisons précédentes. La difficulté pour faire du calcul en parallèle, c'est justement de trouver les calculs qui sont indépendants les uns des autres, pour pouvoir les réaliser en même temps. Et s'il y a trop de dépendances, rajouter des unités de calculs supplémentaires ne servira à rien car on ne pourra pas toutes les faire travailler en même temps.

3 Les marmottes au sommet léger

Cette activité a été créée pour le Module 2 (Manipulez l'information) du projet Class'Code. Au travers d'un univers montagnard, elle présente un algorithme destiné à la compression de données, en abordant la notion d'optimisation d'une solution. Elle parvient à montrer de manière ludique et facile d'accès un concept a priori complexe. L'idée est qu'une troupe de marmottes décide de se créer un nouveau terrier en vue de la prochaine hibernation. Seulement, ces marmottes ont le sommeil léger et elles vont devoir choisir la forme de leur terrier ainsi que la répartition dans les chambres de telle sorte qu'elles se dérangent le moins possible lors de leurs réveils hivernaux.

3.1 Public

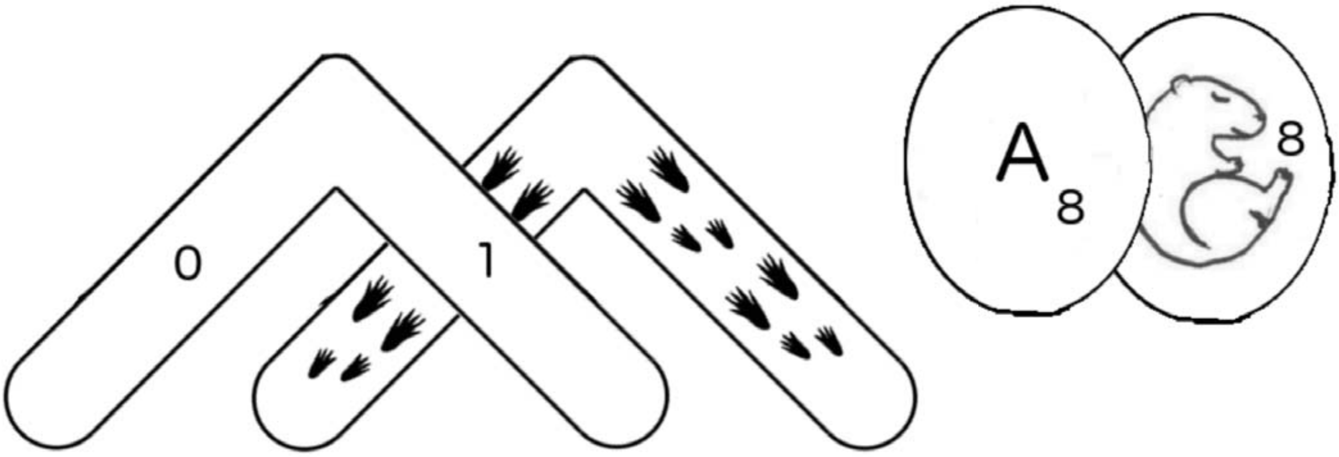
Contrairement aux deux activités précédentes, cette activité se prête plutôt à un public de fin de cycle 2 ou de cycle 3. Elle a été testée du CE2 à la 6e. Les raisons pour lesquelles elle semble moins adaptée pour les publics plus jeunes sont : le pouvoir d'abstraction nécessaire pour essayer d'optimiser la solution et le recours régulier à des additions et des multiplications pour évaluer chaque solution trouvée.

3.2 Matériel

Pour cette activité, il est nécessaire de reproduire ou d'imprimer le matériel disponible sur la page de l'auteure[9]. Il se compose d'un ensemble de 8 couloirs formant des angles droits, et de 9 marmottes. Pour la préparation il faut découper les éléments (en laissant un peu de place autour de chaque marmotte), puis :

- prendre chaque couloir côté verso et, en mettant le coude vers le haut, écrire un 0 sur la branche de gauche et un 1 sur la branche de droite,
- pour chaque marmotte, écrire dans la place laissée autour de la marmotte lors du découpage, un nombre seul ; ce nombre désignera le nombre de réveils de la marmotte pendant l'hiver ; il est souhaitable de mettre des nombres en majorité différents (sinon l'optimisation du terrier n'aura pas trop d'intérêt) ; pour pouvoir expliquer l'intérêt informatique de l'activité, nous vous conseillons de ne pas prendre ces nombres au hasard, mais plutôt de choisir une phrase ne contenant pas plus de 9 caractères, espace inclus (à moins de vouloir utiliser plus d'un kit), par exemple BARBARA A RASE BASILE LE BEAU BARBIER et compter le nombre d'occurrences de chaque caractère, ici B : 6, A : 8, R : 5, Espace : 6, S : 2, E : 5, I : 2, L : 2, et U : 1, puis pour chaque marmotte d'écrire au dos un des caractères de notre phrase et son nombre d'occurrences (par exemple A 8) et, dans la place laissée autour de la marmotte lors du découpage, le nombre seul (ici 8),
- si possible plastifier le tout et mettre du scratch adhésif grattant à l'avant des extrémités des couloirs, ainsi qu'au dos des coudes des couloirs et des marmottes.

On peut également ne mettre que les 0 et 1 au dos des couloirs, et laisser les marmottes vierges de toute notation pour pouvoir changer sa phrase d'une fois sur l'autre.



3.3 Creuser son terrier

Une fois le matériel distribué (un kit pour 2 élèves est l'idéal), expliquer les trois règles pour creuser le terrier.

1. À partir de l'entrée du terrier (qui est le coude d'un couloir, celui le plus haut) comme du bout d'un couloir, on ne peut faire partir que deux branches de couloir maximum.

---

[9] Vous pouvez télécharger le kit à imprimer https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/doc/complet.pdf ou encore un document complet décrivant l'activité https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/doc/fichemarmottes.pdf

2. Au bout d'un couloir, on met soit un coude de couloir (et donc deux nouvelles branches) soit une marmotte qui dort, mais par les deux.
3. Une fois toutes les marmottes placées, il faut compter les déplacements des marmottes. Le nombre près de la marmotte représente le nombre de fois qu'elle se lève dans l'hiver. Si une marmotte se lève 5 fois et est à distance 4 (= 4 morceaux de couloir) de l'entrée, elle va parcourir 5 × 4 = 20 morceaux de couloirs. On fait la somme pour toutes les marmottes et on essaie d'avoir un total le plus petit possible.

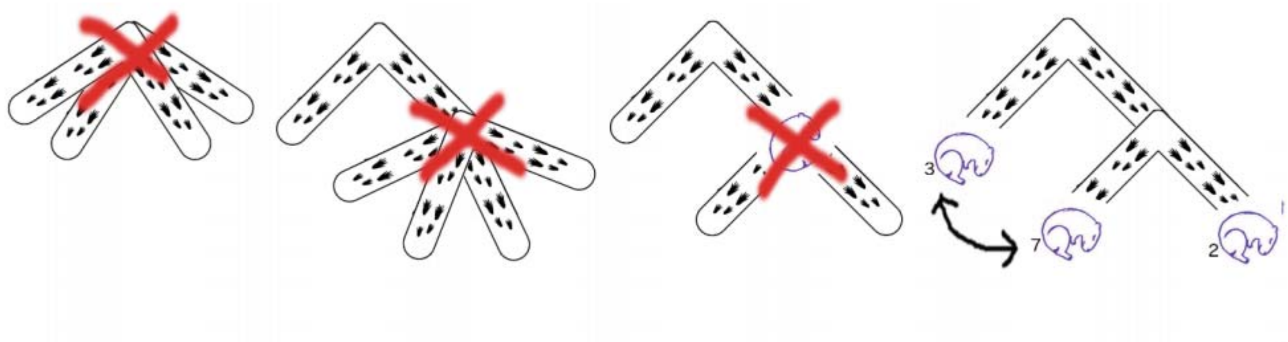


Figure 3 – Exemples ne satisfaisant pas une des règles de construction du terrier. De gauche à droite deux exemples violant la règle numéro 1, un exemple violant la règle numéro 2 et un terrier non optimal (donc ne respectant pas la règle numéro 3).

Les justifications de ces règles sont les suivantes :

1. Si on construit trop de chemins partant du même point, la structure risque de s'effondrer, et donc deux branches sera le maximum.
2. Les marmottes ont le sommeil léger. Si on en fait dormir une au milieu d'un chemin que d'autres vont emprunter en se levant, elles vont lui marcher dessus, la réveiller et lui ruiner son hibernation. Il faut donc mettre les marmottes au bout d'un couloir avec plus rien derrière.
3. Le sommeil de nos marmottes est tellement léger que même le simple bruit des pas de marmottes les dérange, ce qui risque d'altérer la qualité de leur sommeil. Elles doivent donc trouver le moyen de minimiser les déplacements (et donc les bruits de pas qui vont avec).

Construire un terrier respectant les deux premières règles est relativement simple, mais arriver à obtenir le terrier avec le moins de déplacements est plus complexe. Avec des jeunes élèves on peut commencer avec un plus petit ensemble de marmottes. Lors des expérimentations, les enfants arrivent en général à voir qu'il faut mettre les marmottes qui se réveillent le plus souvent plus près de l'entrée que celles qui se réveillent moins. Mais par contre décider de la forme du terrier (des couloirs très longs et d'autres très courts, ou plutôt des moyens) est une chose qui demande réflexion, et en pratique est réalisée par tâtonnements. C'est là qu'on peut lancer la partie suivante.

3.4 Un algorithme pour optimiser son terrier

Pour trouver un terrier optimal[10], il y a une méthode infaillible, qui ne demande pas trop de calculs :

- on choisit les deux (ou deux parmi les) marmottes qui se lèvent le moins souvent, et on les relie par un morceau de terrier. Sur le coude, on note le nombre de fois que ce morceau est emprunté (donc la somme des réveils des deux marmottes, par exemple 2 + 3 = 5),
- on recommence exactement la même chose, mais les deux marmottes reliées à l'étape précédente comptent maintenant pour une seule marmotte qui se réveillerait 5 fois,
- on continue, jusqu'à ce que toutes les marmottes soient reliées en un seul terrier,
- et comme on a noté des nombres sur les coudes de terriers au fur et à mesure on a juste à faire la somme de ces nombres pour compter le nombre de déplacements[11].

[10] qui dans la grande majorité des cas n'est pas unique

On peut retrouver cette méthode en vidéo sur Class'Code (Class 'Code , 2015) dans le module 2 (Manipulez l'information)[12].

3.5 Marmottes et compression

Il se trouve que l'algorithme donné ci-dessus n'a pas été choisi pour sa simplicité, dans un simple but pédagogique. Il date de 1952 et est dû à David Albert Huffman, professeur en informatique. Bien évidemment, s'il ne servait qu'à creuser des terriers, on n'en parlerait plus. Seulement, il a un impact crucial en informatique, dans la compression de données. Si on retourne notre terrier, on se rend compte que les couloirs contiennent des 0 et des 1, et que ce ne sont plus des marmottes mais des lettres qui se trouvent au bout des couloirs. D'ailleurs c'est le nombre d'occurrences de chaque lettre qui a déterminé le nombre de réveils de la marmotte de l'autre côté.

En informatique, toute donnée est stockée en binaire, avec des 0 et des 1. Le texte ne fait pas exception. Et il se trouve que, étant donné un texte, l'algorithme de Huffman permet d'associer à chaque lettre un code binaire (que l'on lit en suivant le chemin de l'entrée du terrier à la lettre), choisi en fonction des fréquences d'apparition des lettres, de sorte que le code binaire du texte complet soit le plus petit possible. On parle donc de compression. L'idée est que le codage standard des lettres (appelé code ASCII) associe à chaque caractère un code de 8 chiffres binaires (8 bits). Ce codage n'est pas optimal et le secret du codage de Huffman est d'associer de plus petits codes aux lettres les plus fréquentes, quitte à associer des codes plus longs aux lettres qui apparaissent peu. Un peu comme dans une cuisine on range à portée de main les couverts/assiettes dont on se sert tous les jours mais on peut stocker l'appareil à raclette en haut du placard ou dans le grenier. Comme on l'utilise peu, ce n'est pas si grave d'avoir à le chercher plus loin, surtout si ça permet d'accéder plus rapidement à d'autres choses plus souvent utilisées. À titre d'exemple, cet algorithme appliqué au texte intégral de Cyrano de Bergerac permet un taux de compression de 40%. On divise quasiment par deux la taille du document.

Ce codage de Huffman a aussi une autre propriété très importante : il est très facile de compresser un texte et de le décompresser. Pour la compression, pour chaque lettre à coder on lit les 0 et 1 sur le chemin de l'entrée à cette lettre, et on les note. Pour la décompression, on part de l'entrée du terrier et on lit les 0 et 1 du texte compressé en suivant le chemin correspondant dans le terrier. Si on arrive à une lettre on la note, on se replace à l'entrée du terrier, et on continue à lire nos 0 et nos 1. C'est d'ailleurs une application sympathique faire avec les élèves : on choisit un arbre de Huffman précis que l'on met à disposition de tou•te•s et on leur donne un texte compressé en binaire, à décompresser.

Et ce n'est pas encore tout. Car même si vous ne connaissez pas David Albert, vous utilisez son codage tous les jours sans le savoir. Il se trouve que les formats compressés habituels suivent un algorithme qui se compose de deux étapes. La première peut être complexe et est spécifique au type de donnée (image, son…) mais une fois ceci fait, on applique… l'algorithme de Huffman. En regardant des vidéos au format mpeg, des images jpeg, en écoutant des musiques en mp3 ou en ouvrant un fichier zip… on utilise l'algorithme de Huffman.

III - RETOURS ET CONCLUSIONS

Tout au long de l'atelier, les échanges ont été enthousiastes et riches. Les participantes et participants ont permis d'identifier des notions en lien avec les programmes ainsi que de clarifier et/ou d'enrichir certains aspects, présentés dans les parties précédentes.

Il est ressorti qu'au final ces activités pouvaient être réutilisées dans différents cadres. Elles peuvent tout d'abord être présentées comme des activités informatiques en tant que telles, en conformité avec le programme des cycles 2 et 3 (EDUSCOL, 2016) pour la partie initiation à la programmation. On peut

[11] Cette méthode permet de calculer les déplacements non pas par marmotte mais par pièce de terrier. Elle peut également s'appliquer à la section précédente quand les élèves galèrent trop avec leurs multiplications. Elle permet du coup de ne faire plus que des additions.

[12] C'est plus précisément dans la Partie 2 (optimisez le codage de l'information) Vidéo 4 (compression de l'information)

également proposer ces activités pour travailler la « pensée informatique », cette capacité à décomposer un problème en étapes simples et précises, à trouver le lien entre plusieurs problèmes pour éventuellement réutiliser (une part de) la solution déjà disponible. Comme cette pensée informatique est utile dans d'autres champs de l'enseignement comme la résolution de problèmes mathématiques, les activités présentées peuvent fournir une autre façon de travailler cette compétence transversale. Enfin les activités peuvent se justifier de par le fait qu'elles font également travailler des notions non informatiques. Le calcul du niveau de bruit associé à un terrier dans l'activité des marmottes fait travailler le calcul (additions, multiplications, comparaisons). Dans le réseau de tri, on travaille bien entendu les comparaisons, mais elles peuvent être lexicographiques, numériques ou se baser sur une première étape d'analyse (trier les résultats d'un calcul, des périodes historiques,…) qui peuvent ainsi toucher à différents domaines du programme.

Lors des discussions, nous avons également abordé le ciblage du public pour les différentes activités. Si certaines nécessitent de bonnes capacités d'abstraction et de calcul (par exemple les marmottes) et se prêtent plutôt à une mise en œuvre en fin de cycle 2 voire cycle 3, pour d'autres il est possible, en travaillant la progressivité et en revoyant les objectifs à atteindre, de les aborder en début de primaire voire même au cycle 1 (réseau de tri, robot). Un projet de mise en œuvre de ces deux dernières activités, à décliner tout au long du cycle 1, est d'ailleurs en cours avec une école maternelle de Nancy.

Ces activités sans ordinateur permettent donc dans un cadre ludique, souvent utile pour déjouer les appréhensions/blocages des élèves, de travailler à la fois des compétences transversales et disciplinaires. Ce sont des activités demandant peu de matériel, rapides à s'approprier, qui permettent une première approche de la pensée informatique. Elles ne remplacent évidemment pas les activités sur ordinateur, nécessaires pour la validation de ses programmes/algorithmes/idées par une machine. Cependant, elles permettent de séparer deux difficultés : l'introduction des notions informatiques d'une part, et le domptage du matériel (ordinateur, robot, logiciel,…) d'autre part.

IV - BIBLIOGRAPHIE, WEBOGRAPHIE

BELL T. & ROSAMOND F., Casey N. (2012) Computer Science Unplugged and Related Projects in Math and Computer Science, *The Multivariate Algorithmic Revolution and Beyond*. Lecture Notes in Computer Science, **vol 7370**. Site http://csunplugged.org/.

Class'Code (2015) Site http://www.classcode.fr/,

MORE M. & GALI S. (2017). Faire de l'informatique sans ordinateur à l'école. *43ème Colloque COPIRELEM*.

DI COSMO R. (2015) Enseigner et apprendre les sciences informatiques à l'école. *Site d'Interstices* https://interstices.info/jcms/c_47072/enseigner-et-apprendre-les-sciences-informatiques-a-lecole

EDUSCOL (2016) Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3) - Initiation à la programmation aux cycles 2 et 3, *disponible sur http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html*, 9 pages.

PAPERT S. (1980) *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc.

WING, J. (2006) Computational thinking. *Communications of the ACM* **49(3)**, 33-35. Disponible à l'adresse http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/wing/www/publications/Wing06.pdf

QUELLES SEMIOSIS POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION AU CYCLE 2 ?

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire de l'IUFM d'Alsace
Université de Strasbourg
petit.serge@sfr.fr

Annie CAMENISCH
Maitre de conférences en Sciences du langage, ESPE
Université de Strasbourg
annie.camenisch@espe.unistra.fr

Résumé
L'objectif de l'atelier était de réaliser une étude des progressions dans l'apprentissage des différents registres sémiotiques menant à la construction du système de numération de position au cycle 2 et d'analyser leur pertinence. Ce compte-rendu comporte trois parties : une première partie comportant des rappels théoriques permettant d'établir un langage en vue d'une analyse de la construction des différents registres de représentation sémiotiques en usage dans la construction de la numération de position en cycle 2, une deuxième partie organisée autour de travaux de groupes visant une analyse de certains manuels scolaires afin de mettre en relief le travail explicite portant sur les registres sémiotiques, une troisième, pratique, qui propose une progression permettant de construire le sens avant d'introduire les signes spécifiques.

I - RAPPELS THEORIQUES

Une première précision sur les mots s'impose. Le mot *noèsis* est composé de l'élément de mot *no(o)-* qui signifie pensée, acte de pensée, concept. Le mot *sémiosis* est composé de *sém(a)* qui renvoie à la notion de signe. Le suffixe commun à ces deux mots, vient de –èse et indique une action, un processus.

Ainsi, le terme *sémiosis* exprime la construction des signes, d'un système de signes, tandis que le terme *noèsis* exprime la construction d'un concept, d'une pensée.

Ces deux termes, *sémiosis* et *noèsis* sont intimement liés comme le précise Vergnaud (1991) quand il définit le sens du mot *concept*, définition dans laquelle il précise qu'« un concept est un triplet de trois ensembles », le dernier ensemble qu'il cite est « l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédés de traitement (signifiant) ». Il est donc difficile, voire impossible d'exprimer un concept, de le concevoir, sans avoir recours à au moins un système de représentation sémiotique.

1 Qu'est-ce qu'un registre de représentation sémiotique ?

D'après Duval (1995), un *registre de représentation sémiotique* est un système de signes permettant :

- de **représenter** quelque chose (représentations),

La première opération, celle qui permet de représenter une situation dans un registre donné, est ce que Duval appelle la formation des représentations, « soit pour « exprimer » une représentation mentale, soit pour « évoquer » un objet réel » (Duval, 1995, 36). A la base même du principe de représentation, ce point doit être travaillé de manière explicite. Il s'agit en effet, en mathématiques, non de dessiner les objets, travail laborieux, sans portée générale, n'objectivant pas la situation, mais de les représenter[1] dans un système.

- de **transformer** ces représentations à l'intérieur du système de représentation,

Duval désigne par **traitement** cette opération qui transforme les représentations dans un même registre : « *Un **traitement** est la transformation d'une représentation prise comme donnée initiale en une représentation considérée comme terminale par rapport à une question, à un problème ou à un besoin, […]. Un traitement est une **transformation de représentation interne à un registre** […].* » (Duval, 1995, 39).

- de **convertir** des représentations d'un registre vers un autre.

L'opération qui consiste à passer d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre « *s'avère être, pour beaucoup d'élèves aux différents niveaux d'enseignement, une opération difficile et parfois même impossible.* » (Duval, 1995, 19). Il y a donc lieu de prendre cette opération, que Duval appelle ***conversion** des représentations*, comme un objet d'enseignement à part entière, au fil des situations rencontrées (et pas de manière déconnectée). Et ce, d'autant plus que « *Chez les sujets, une représentation ne peut véritablement fonctionner comme représentation, c'est-à-dire leur donner accès à l'objet représenté que lorsque deux conditions sont remplies : qu'ils disposent d'au moins deux systèmes sémiotiques différents pour produire la représentation d'un objet, d'une situation, d'un processus… et qu'ils puissent convertir « spontanément » d'un système sémiotique à l'autre, sans même le remarquer, les représentations produites* ».

Ce processus de conversion est de loin le plus délicat et pose le redoutable problème de la congruence (Duval, 1995) entre les différentes représentations. Nous y reviendrons plus avant.

Cette définition du concept de registre impose donc l'existence d'au moins deux registres de représentation sémiotique. Cette condition permet de ne pas confondre l'objet représenté et sa représentation (par exemple, ne pas confondre le signe 10 et le nombre par ailleurs appelé *dix* en français).

En résumé succinct, un registre de représentation sémiotique est un ensemble de signes permettant les trois opérations suivantes : la formation des représentations, le traitement des représentations, la conversion des représentations d'un registre vers un autre registre

Ce qui peut se traduire dans le schéma 1 :

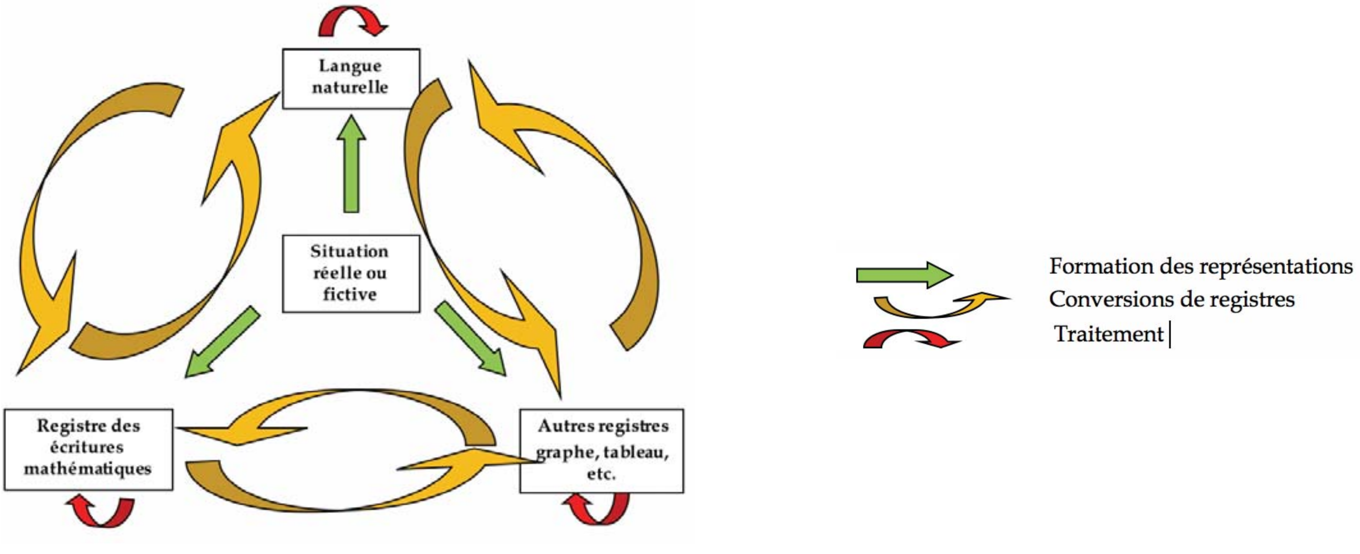


Schéma 1.

[1] Il existe trois verbes *représenter* (*Brio*, Ed. Le Robert, 2004). Dans ce contexte, Il faut comprendre ce verbe comme étant formé des éléments *re-* (qui donne une valeur intensive et qui signifie « complètement », *-pré-* qui signifie « devant », *-(es)s-* qui signifie être, *-ent-* qui indique le résultat d'une action et de la désinence verbale *–er*. Ce verbe indique donc le fait de placer complètement devant soi, en sous-entendant que cette *présence* est celle apportée par un système de signes (mots de la langue, chiffres, signes opératoires, dessins de figures, etc.).

On peut donc aisément imaginer que chacune des transformations mentionnées dans ce schéma, doit, à l'occasion de leur fréquentation, être explicitement travaillée avec les élèves. Le processus de conversion impose en outre de prendre en compte de manière explicite les problèmes relevant de la congruence ou de la non-congruence entre deux représentations de deux registres différents.

2 Exemples de registres de représentation sémiotique opérant dans l'enseignement de la numération au cycle 2

Le premier registre est sans conteste celui de la langue naturelle.

Le deuxième registre est celui des écritures symboliques mathématiques (+, =, -, <, >, désignation chiffrée des nombres, etc.).

La droite graduée (frise numérique) est un registre important dans le sens où il met en relief la relation d'ordre sur les entiers naturel.

La construction du nombre impose de représenter transitoirement les objets de manière analogique, par des points, des croix, des signes divers. Il s'agit de ce que l'on appelle le registre des représentations figurales.

Enfin, d'autres registres sont souvent utilisés comme les tableaux, les histogrammes, etc.

Représenter un concept dans un registre donné est ce que (Duval, 1995) appelle la formation des représentations.

Remarque : Tous les registres sémiotiques ne sont pas équivalents. Un système domine les autres, il est nécessaire à toute communication : celui de la langue naturelle, comme précisé dans la présentation d'une contribution de G. Vergnaud (2002) : « Si la conceptualisation est un processus qui, au départ, n'implique pas le langage, la fonction sémiotique est cependant essentielle à son accomplissement : un concept n'est pas totalement un concept tant qu'il n'est pas nommé et explicité dans un système. Le langage naturel remplit donc une fonction essentielle, puisqu'il n'est pas seulement un système symbolique parmi d'autres, mais le métalangage de tous les autres systèmes de symbolisation ». Ce registre nous permet de communiquer sur les autres registres et de communiquer à propos des concepts. Il est placé au cœur de l'enseignement des mathématiques dans les nouveaux programmes de 2015.

3 Représentations sémiotiques et représentations mentales

Il est fréquent d'entendre que les élèves (certains élèves) n'ont pas une bonne représentation mentale d'une situation donnée. Les représentations sémiotiques peuvent vraisemblablement contribuer à la formation de ces représentations mentales. On peut en effet « *voir dans les représentations sémiotiques un support pour les représentations mentales* » (Duval, 1995, 18). Duval précise qu'il n'est cependant pas facile de passer « *de la forme du représentant au contenu représenté* ». Ce que l'on peut facilement s'imaginer en voyant les écritures *3* ou *trois* qui représentent un nombre, un même nombre. Une prise en compte explicite des apprentissages sémiotiques dans les apprentissages en mathématiques est sans doute primordiale.

On peut globalement caractériser le travail d'un élève en situation de résolution de problème comme suit, l'énoncé étant donné sous forme verbale :

- l'élève devra souvent, dans un premier temps reformuler tout ou partie de l'énoncé,

- puis, afin de mieux se représenter la situation, mobiliser un registre tiers donc effectuer une conversion vers ce registre,

- souvent traiter l'information dans ce registre tiers,

- opérer le traitement mathématique après avoir effectué une conversion vers le registre des écritures mathématiques.

Afin de donner sa conclusion, il traduira alors son résultat mathématique en langue naturelle, effectuant alors une ultime conversion. Son travail peut alors se schématiser de la manière suivante (Schéma 2)

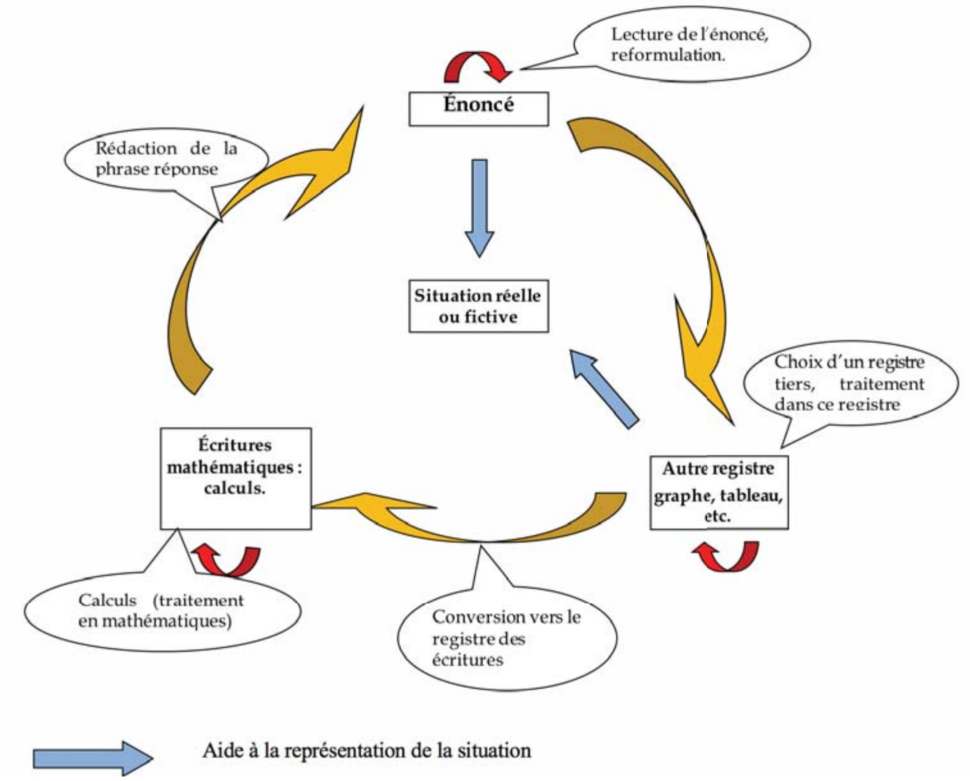


Schéma 2.

4 Exemple de formation, de conversion et de traitement

Considérons un ensemble d'objets en bois, de trois couleurs différentes. Ces objets ont un volume, une épaisseur et des formes qui sont, vues du dessus, globalement des triangles, des carrés et des ronds. À ce niveau, nous utilisons déjà des termes qui désignent des objets conceptuels, pour des objets matériels qui ne sont que des représentants de ces objets.

Nous désignerons donc ces objets par les trois termes qui les représentent : triangles, carrés, ronds[2]. Ces objets sont, chacun peints d'une couleur uniforme. On repère trois couleurs : bleu, rouge, jaune.

Les questions qui seront posées à propos de ces objets peuvent concerner leur couleur, leurs formes, leurs nombres, des comparaisons du nombre d'objets d'une classe avec le nombre d'objets d'une autre classe, etc. Les questions ne portent pas sur les dimensions des objets, sur des précisions sur leurs formes (triangles rectangles, isocèles, équilatéraux, dimensions des carrés, des ronds, etc.) Il est donc tout à fait possible de représenter ces objets par des signes : un carré pour les carrés, quelles que soient leurs dimensions, un rond pour les ronds (idem.), un triangle (pourquoi pas équilatéral pour les triangles). Chacun de ces signes est coloré de la couleur de l'objet qu'il représente.

Nous obtenons ainsi un ensemble de signes : {  }

L'ensemble des objets peut alors se représenter par un ensemble (figure 1)

[2] Nous n'ignorons pas le caractère non mathématique de ce mot, mais il est fréquemment utilisé en classe.

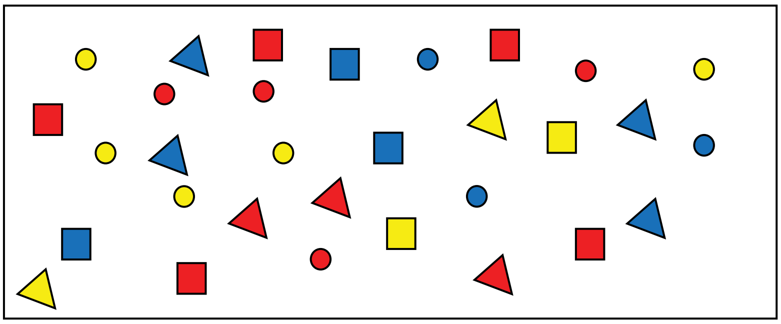


Figure 1.

L'ensemble des neuf signes ci-dessus constitue-t-il un registre sémiotique ?

Il convient d'analyser successivement les trois caractéristiques des registres sémiotiques pour répondre à cette question :

1. Cet ensemble de signes permet-il de représenter les objets matériels donnés ?

La réponse est évidemment positive.

2. Cet ensemble de signes permet-il d'effectuer des transformations sur les représentations des objets ?

La réponse à cette question est encore positive, on peut par exemple grouper tous les carrés, tous les triangles, tous les ronds, ou bien regrouper les signes par couleurs, ou encore par un critère croisé portant sur la forme et la couleur (on obtient alors neufs paquets).

Cet ensemble de signes permet des reconfigurations dans le registre figural.

3. Peut-on passer de cette représentation des objets matériels dans ce registre figural à une représentation des objets dans un autre registre ?

Afin de répondre à cette question, il convient de considérer un autre registre, par exemple un tableau.

La représentation de l'ensemble des objets dans un tableau peut se présenter sous la forme suivante :

	Rouge	Bleu	Jaune
Triangle	3	4	2
Carré	5	3	2
Rond	4	3	5

Un tel tableau est un registre sémiotique de représentation (il obéit aux trois critères). Ce tableau rempli est une représentation sémiotique de la situation précédente qui comporte exactement les mêmes informations (au regard des questions possibles ci-dessus énoncées) que celles figurant dans le registre figural précédemment construit.

La conversion de la représentation précédente vers une représentation dans un autre registre est donc possible.

Les neuf signes constituent un registre qui permet de représenter les objets donnés, tout comme le tableau.

Nous venons de réaliser deux opérations de formation de représentations et une conversion d'un registre vers un autre registre.

Cette conversion des représentations ne pose aucun problème.

Il existe cependant bien des cas où les conversions de représentations d'un registre vers un autre ne vont pas de soi car elles ne sont alors pas congruentes. Nous en donnons un aperçu plus loin dans le texte.

5 Opérationnalité de la reformulation en résolution de problèmes

Soit l'énoncé suivant donné à des élèves de cycle 2 :

Etienne a trois billes de moins que Lucie.

Etienne a six billes.

Combien de billes a Lucie ?

Représenter directement la situation évoquée dans l'énoncé est difficile dans le registres des écritures symboliques mathématiques.

L'élève peut être invité à écrire ce qu'il cherche.

Ce que je cherche :

« *Je cherche le nombre de billes de Lucie. Ma phrase réponse est alors : Lucie a ___ billes* ».

Dans l'énoncé, aucune phrase ne commence par « Lucie a… ». Par contre, la première phrase peut être reformulée de la manière suivante : « Lucie a trois billes de plus qu'Etienne ». Cette formulation est inspirée de la phrase réponse à trou écrite par l'élève. Désormais, les données s'enchainent bien pour écrire l'égalité résolvante :

« Etienne a six billes. Lucie a trois billes de plus qu'Etienne ».

Une égalité résolvante est alors : 6 + 3 = ___. La solution est alors immédiate.

Cet énoncé engendre de très nombreuses erreurs en fin de cycle 2, alors que l'énoncé reformulé n'en engendre que très peu. D'où l'intérêt de la conversion, de la reformulation dans le registre de la langue naturelle. Cette reformulation devient alors à la fois un outil de compréhension de l'énoncé et un outil de résolution de problème.

Quelles en sont les raisons ?

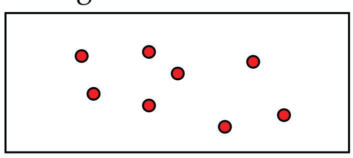
Dans l'énoncé on lit : « de moins que », qui ne permet pas d'écrire aisément une égalité résolvante (une représentation sous forme de diagramme - autre registre - permettrait de visualiser cette différence, mais nous restons dans le cas plus classique). Il convient en effet d'effectuer une addition pour répondre à la question. D'un côté la même information est portée par « de moins que », de l'autre par le signe « + ». Il n'y a pas de correspondance sémantique entre ces deux éléments. Ces deux éléments ne semblent pas bien fonctionner ensemble, aller ensemble, et contribuent à ce que Duval nomme *non-congruence* entre les représentations.

6 Concept de *congruence*

Considérons deux registres et une représentation du même objet dans l'un et l'autre des deux registres.

Par exemple, huit objets que nous représentons dans le registre des écritures mathématiques par le nombre noté 8, et dans le registre figural par huit ronds.

Les représentations et leurs correspondances entre les deux registres peuvent prendre diverses formes comme le montre le tableau suivant :

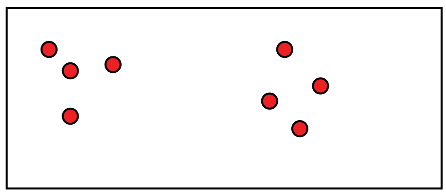
Registre des écritures symboliques mathématiques	Registre figural
8	

Opérons une reconfiguration dans le registre figural :

8 (invariant)

$4 + 4$

2×4



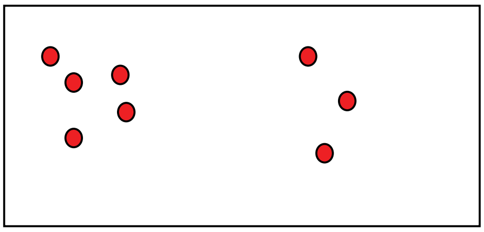
Les représentations dans le registre symbolique mathématique et le registre figural « marchent bien ensemble », sont *congruentes*[3]. Effectuons une reconfiguration dans le registre figural et conservons les représentations dans le registre des écritures symboliques mathématiques.

Nous obtenons alors la correspondance suivante :

8 (invariant)

$4 + 4$

2×4

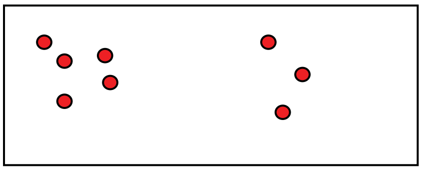


Cette fois, les représentations dans les deux registres ne « vont pas bien ensemble », ne sont pas congruentes.

Pour rétablir une bonne congruence, effectuons corrélativement un traitement des représentations dans le registre des écritures symboliques. Nous obtenons alors les correspondances suivantes :

8 (invariant)

$5 + 3$



La représentation 8 reste invariante, tandis que la représentation précédente 4 + 4 est traitée pour devenir 5 + 3, représentation totalement congruente avec la représentation du registre figural.

Une autre représentation dans le registre des écritures mathématiques permet une congruence intermédiaire : 3 + 5. Elle n'est pas congruente (avec les conventions de lecture de gauche à droite), mais l'est davantage que 4 + 4. Ainsi, la notion de congruence peut être « gradable » de très congruent à pas du tout congruente.

Duval définit comme suit ce concept de congruence selon trois critères (Duval, 1995, 49) :

<u>Premier critère</u>

« Correspondance sémantique des éléments signifiants »

<u>Deuxième critère</u>

« À chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée. »

<u>Troisième critère</u>

Même ordre des unités signifiantes dans les deux représentations.

On voit que sur le dernier exemple, la représentation 3 + 5 ne respecte pas le troisième critère, que dans les précédentes représentations, il n'y a pas correspondance sémantique entre les éléments signifiants (d'un côté 4 et 4, de l'autre, un ensemble de cinq ronds et un ensemble de trois ronds). Cette représentation ne respecte ni le deuxième, ni, *a fortiori* le troisième critère.

Nous invitons le lecteur à procéder à l'analyse de congruence entre la représentation dans le registre de la langue naturelle et le registre des écritures symboliques mathématiques (égalité résolvante) dans le cas du problème donné en exemple (billes, Lucie, Etienne).

---

[3] Le mot « congruent » est formé sur la base de *con-* (qui signifie *avec, ensemble*) et de *–gr-* qui signifie *marcher, aller*, on retrouve cet élément de mot dans *degré, grade, plantigrade, progrès, progression, régression*, etc. Cet élément de mot prend aussi les formes *gress-* et *gred-* (ingrédient).

Les problèmes liés à la congruence peuvent être redoutables pour les élèves. Un travail explicite visant à rétablir la congruence pour la résolution de problèmes notamment peut produire des effets positifs en résolution de problèmes (Camenisch & Petit, 2016).

Le travail sur le concept de *congruence* demanderait à être développé davantage, mais, ne l'ayant pas été lors de l'atelier, il ne l'est pas dans ce compte-rendu.

Dans le cadre concerné par cet exposé, celui de la numération, il est loisible de s'intéresser aux problèmes de congruence entre les représentations figurales et les représentations dans le registre des écritures symboliques mathématiques lors de la construction du système de numération de position. Pour ce faire, il faut que des représentations figurales aient été préalablement formées et associées aux écritures symboliques.

La deuxième partie de l'atelier a proposé aux participants de procéder à des analyses d'ouvrages portant à la fois sur la manière dont les concepts sont présentés aux élèves par le sens qu'ils revêtent (la *noèsis*) et les différentes formes dans lesquels sont représentés ces concepts (la *sémiosis*).

Il existe en effet deux types d'objets intellectuels à enseigner. D'un côté ceux qui relèvent d'une convention et donc de la *sémiosis* et de l'autre, ceux qui sont le fruit de la résolution de situations-problèmes, ceux qui relèvent de la *noèsis*. Pour exemple, nous pouvons citer :

Objets relevant d'une convention	**Objets ne relevant pas d'une convention**
• Les premiers noms de nombres (qui diffèrent d'une langue à l'autre), • Les chiffres (et leur forme), • Le signe + (et sa forme), • Le signe = (et sa forme), • Les groupements par dix et non douze ou vingt, • Le signe ×, • Le système de numération de position, etc.	• La nécessité d'avoir un nouveau nombre : le zéro, • Les décompositions additives, • La nécessité de pouvoir dire que deux écritures différentes ont le même référent, • La nécessité de former des paquets pour réduire les écritures, etc.

Ces différents objets ne peuvent s'enseigner sans une prise en compte par l'enseignant de

- l'existence de différents registres sémiotiques,
- d'un travail explicite sur la formation des représentations (le verbe *représenter* est un verbe essentiel qui caractérise l'activité mathématique et, à ce titre, figure explicitement en amont des programmes des cycles 2, 3 et 4),
- d'un travail explicite portant sur les articulations de registres, les conversions de représentations et les problèmes liés aux phénomènes de congruence et surtout de non-congruence,
- d'un travail explicite de traitement des informations dans les différents registres (reformulation dans le registre de la langue naturelle et calculs dans celui des écritures mathématiques, notamment).

II - TRAVAUX DES GROUPES

1 Questionnement

L'objectif de l'atelier était d'analyser quelques extraits de manuels de CP afin d'avoir un aperçu de la manière dont les différents registres sémiotiques étaient introduits dans la construction du système de numération de position, en relation avec les aspects noétiques. En effet, les programmes de l'école primaire stipulent la nécessité de construire le sens des concepts (et donc la *noèsis*) avant les signes qui les représentent (et donc la *sémiosis*), à l'exception bien sûr de la langue naturelle :

> La composante écrite de l'activité mathématique devient essentielle. Ces écrits sont d'abord des écritures et représentations produites en situation par les élèves eux-mêmes qui évoluent progressivement avec l'aide du professeur vers des formes conventionnelles. […] L'introduction et l'utilisation des symboles sont réalisées au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations d'action, en relation avec le vocabulaire utilisé (Programmes, 2016).

Six groupes ont été constitués ayant pour tâche d'analyser chacun la manière dont certains concepts liés à la numération sont construits dans quelques manuels estampillés par les éditeurs comme étant « conformes aux nouveaux programmes 2016 ». Chaque groupe disposait de fiches de suivi pour chaque axe d'observation, en particulier pour analyser la manière dont la nécessité du concept pris à la loupe répondait à un problème lors de sa première apparition dans le manuel. Il s'agissait aussi de pointer quelques travaux explicites sur la notion, de vérifier si le caractère conventionnel des symboles mathématiques était indiqué et si le lien, ou les différents liens (cas des reformulations) avec la langue naturelle était explicité.

Cinq axes d'observation, constitutifs de la construction du système de numération de position, ont été proposés :

- Le chiffre 0 et le mot *zéro* en relation avec la désignation d'un nombre.
- La décomposition additive des nombres avec les expressions *et, et encore, plus* et le symbole +, le lien entre le signe + et le signe –.
- Le signe = et les mots *égal, égaler, égalité, différent*, le travail sur les mots liés à la notion d'égalité.
- La nécessité de former des paquets pour désigner les nombres, l'apparition du mot *dizaine*, le caractère conventionnel du choix du cardinal du paquet.
- La mise en place explicite du système de numération de position, en réponse à un problème. Les participants devaient en outre préciser si le système de numération était enseigné d'un bloc pour tous les nombres supérieurs à neuf ou par tranches. Un autre point essentiel concernait d'une part les congruences entre les noms de nombre et leurs désignations chiffrées, d'autre part les congruences entre les représentations des nombres dans le registre figural et les désignations chiffrées.

2 Supports choisis

Six fichiers ou méthodes, portant la mention « conformes aux programmes 2016 », ont été sélectionnés pour être analysés[4] :

- *J'apprends les maths avec Picbille*, CP, sous la direction de Rémi Brissiaud, Retz, 2016.
- *Cap Maths*, CP, Roland Charnay et alii, Hatier, 2016.
- *Vivre les maths*, CP, Jacqueline Jardy et alii, Nathan, 2016.
- *Opération maths*, CP, Marie-Lise Peltier, Joël Briand et alii, Hatier, 2016.
- *Les nouveaux outils pour les maths*, CP, Patrick Gros et alii, Magnard, 2016.

[4] Le choix des ouvrages a surtout été déterminé du fait de leur présence dans le centre de documentation à disposition. La plupart correspondaient aux ouvrages les plus commercialisés et donc les plus fréquemment utilisés par les enseignants.

- *Construire les maths avec les NuméRas*, Cycle 2, niveau 1, Serge Petit, Annie Camenisch, Nathan, 2016 (guide pédagogique). *Je construis les maths avec les NuméRas*, cahier élève, Cycle 2, Niveau 1, Nathan, 2017.

Les groupes disposaient d'extraits photocopiés, du manuel original et du guide pédagogique.

3 Résultats

Une mise en commun portant sur chaque point analysé a été réalisée après un temps d'analyse pour chaque groupe. Les groupes ont rendu compte de leurs observations, parfois partielles ou incomplètes, étant donné que le temps imparti ne permettait pas toujours d'utiliser l'ensemble des documents mis à disposition.

Les tableaux ci-dessous reproduisent les travaux des groupes, à l'exclusion de toute indication des animateurs.

3.1 Le nombre appelé zéro

	Réponse à un problème	Autre travail sur	Caractère conventionnel	Lien avec la langue naturelle
J'apprends les maths (Picbille)	Le zéro ne répond pas à un problème. Roue numérotée avec les nombres 0, 1, 2 Écriture : 2 + 1 + 0	Calculs additifs contenant le terme 0	Du signe 0 ou du nom *zéro* pas indiqué de façon explicite	Pas de lien explicite, mais le mot apparait dans le titre
Cap Maths	Pas de situation problème	Aucun travail sur le zéro	Non indiqué	Non indiqué
Vivre les maths	Situation de dénombrement : relier un dessin de collection à une écriture chiffrée	Titre Écriture de « 10 » Écriture de « 0 » Calcul : 3 + 0 Suite de 2 en 2 à partir de 0 Calcul : 6 - 0	Non indiqué	Le zéro apparait surtout en tant que chiffre, sauf une fois en tant que chiffre et nombre.
Opération maths	Pas en tant que zéro	Dans les nombres fréquents 10, 20 Apprentissage du tracé en écriture	Non indiqué	Non indiqué
Nouveaux Outils	Ne répond à aucune justification			
Les NuméRas	Solution d'un problème : nombre qui précède « un »	Travail sur le sens avec le nom d'un nombre	Sens conventionnel du chiffre et du nom indiqué par la fiction	En lien avec « il n'y a plus de », « il n'y a pas de »

3.2 La décomposition additive

	Réponse à un problème	Autre travail sur la décomposition additive	Caractère conventionnel Sens du signe +	Lien avec la langue naturelle
Picbille	Pas de situation problème 5 signes différents pour un nombre Itération de 1	Décomposition en sous-base 5 et marquage du 3 Pas une décomposition mais une addition en	Du signe + indiqué Sens : Réunion de deux ensembles Sans lien avec le signe +	Oui

		stade intermédiaire		
Cap Maths	Pas de décomposition additive	La maison des … avec le + et = 6 est le double de 3 6 = 3 + 3 Cartes à points		
Vivre les maths	Comptage de collections / sous collections Faire des paquets de 5 Ajouter pour faire 5	Dénombrement de collection / sous-collections Juxtaposition de « et », « plus » et + Transformation	Synonyme de « plus » Sens de « et » Sens Regroupement de plusieurs collections	Mot « et » : « et » précède le « plus » Mot : « ajoute »
Opération maths	Codage d'une décomposition (mais pas de nécessité) : un rouge et trois bleus	Recherche de compléments	Activité écrite artificielle plaquée. Pas de construction du sens pour les élèves : « robotisation »	Non
Nouveaux Outils	Non analysé			
Les NuméRas	Exprimer le regroupement de plusieurs quantités en lien avec une décomposition d'une collection		Sens conventionnel souligné Remplace « et »	Mot « et »

3.3 L'égalité

	Réponse à un problème	Autre travail sur l'égalité	Caractère conventionnel Sens du signe =	Lien avec la langue naturelle
Picbille	Calculer une addition de 2 termes (manière artificielle) + et = introduits simultanément	Addition de deux termes Décomposition additive des nombres 6 et 7 avec appui sur 5 mais écriture 5 + 1 = 6 et non 6 = 5 + 1	Sens : exécuter « donne le résultat du calcul », pas de réversibilité	Mot « égalité »
Cap Maths	Pas de nécessité explicite	Calcul de somme = est le symbole pour donner le résultat	Traduction congruente de la phrase : 6 est le double de 3 = est la traduction de « est » Caractère conventionnel précisé dans le guide pédagogique	Uniquement dans le guide pédagogique
Vivre les maths	Indiquer le résultat d'une addition Vient remplacer « en tout » (existe avant et	Résultats de soustractions Écris = ou ≠ entre	Transformation d'écriture Indication d'un	« égal » est écrit une fois mais pas utilisé

	conservé après)	des écritures : 5 + 1 … 1 + 5	résultat	
Opération maths	Aucun problème		Équivalence entre deux écritures symboliques	Non
Nouveaux Outils		Résultat d'une addition, traitement Décomposition canonique équivalence entre écriture chiffrée	Équivalence entre représentations de quantités dans le registres des écritures chiffrées (écriture chiffrée / décomposition additive) Avec présence d'un signe +	
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

3.4 Les paquets de dix

	Réponse à un problème	Autre travail sur les « paquets de dix »	Caractère conventionnel du cardinal des paquets	Lien avec la langue naturelle Page où apparait le mot « dizaine »
Picbille	Travail non réalisé par les participants			
Cap Maths	Travail non réalisé par les participants			
Vivre les maths	Dénombrer les dizaines Exercice 1 : paquets déjà faits Exercice 2 : paquets à faire Reformulation travaillée, 12 c'est un paquet de 10 et 2	Consignes très guidées Groupements pour compléter des phrases avec *dizaine* et *unité*		Lien avec la langue implicite par correspondance de registres : - dessin et paquets - écriture chiffrée - phrases LN Mot *dizaine* p.55
Opération maths	Pas de nécessité Règle du jeu imposée	Passage de la représentation en unités (plaques de 10 carrés) au terme « dizaine »		Mot *dizaine* p.62
Nouveaux Outils	Travail non réalisé par les participants			
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

3.5 Le système de numération de position

	Réponse à un problème	Autre travail sur l'addition	Enseignement en un bloc ou par tranches	Congruence entre noms de nombres et désignations chiffrées
Picbille	Grouper pour écrire dans notre système	Grouper par dix pour écrire des	11 à 16	Non trouvé

	de numération	nombres inférieurs à dix	17 à 20	
Cap Maths		Passage des unités de numération en langue naturelle à l'écriture chiffrée		
Vivre les maths	Écriture « 10 » Les nombres sont écris le rôle des chiffres n'est pas mis en avant			
Opération maths	Travail non réalisé par les participants			
Nouveaux Outils	Travail non réalisé par les participants			
Les NuméRas	Travail non réalisé par les participants			

4 Discussion

Cette mise en commun partielle a néanmoins permis de mettre en évidence l'absence de travail explicite sur le lien entre *noèsis* et *sémiosis* à un moment clé de l'apprentissage de la numération. Sauf dans la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* où la découverte des différents concepts est scénarisée par l'intermédiaire d'une fiction et proposé aux élèves sous forme de situation-problème, la nécessité des concepts ne se conçoit généralement pas comme la solution d'un problème. Le sens des signes n'est que rarement objet d'un travail explicite avant leur utilisation. Leur caractère conventionnel n'est pas souligné. Là aussi la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* se démarque puisque la fiction permet de faire inventer ces signes de manière arbitraire par la communauté de personnages qui font vivre les mathématiques.

Enfin, la langue, que ce soit au niveau de la reformulation ou de l'explicitation du vocabulaire, n'est guère un objet de travail en contexte mathématique, dans son usage spécifique. Là encore la méthode *Construire les maths avec les NuméRas* fait exception puisqu'elle intègre tous les apprentissages langagiers en relation avec les mathématiques.

III - PROPOSITION POUR UNE AUTRE PROGRAMMATION DANS L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION AU CYCLE 2

Des constats émis ci-dessus découle la nécessité d'enseigner les mathématiques en réponse à des problèmes clairement identifiés comme tels par et pour les élèves et de construire de manière explicite, simultanément, ou en léger différé, les systèmes de représentation sémiotiques intimement liés à la construction de ces concepts, à leurs désignations.

Les animateurs suggèrent une approche schématiquement reproduite dans le tableau suivant. L'objectif visé est la construction du système de numération, c'est-à-dire du système lui-même en réponse à un problème. Il s'agit d'une organisation de signes parmi bien d'autres possibles permettant de désigner les nombres, tous les nombres entiers. Les découpages par tranches de 10 à 16, ou de 10 à 19, puis de 20 à 29, etc. ne sont nullement dictés par les nombres eux-mêmes. La construction de la désignation des nombres écrits 37 et 43 répond en effet aux mêmes principes, ceux qui gouvernent la construction de la désignation de tous les nombres, à partir du nombre écrit 10 dans notre système usuel. Il ne sera donc pas question dans la suite de ce type de découpage dénué de sens mathématique. Un découpage reposant sur les noms de nombre en langue française n'a pas davantage de sens. Par contre, l'analyse des noms de nombres en parallèle permet aux élèves de construire le sens des désignations verbales en lien avec les désignations chiffrées et les manipulations nécessaires sur les objets.

Monde « concret » manipulations	*Noèsis*	*Sémiosis*	
		Langue naturelle	**Ecritures symboliques mathématiques**
Objets, quantités, ordre, relations terme à terme, etc.	**Concept de nombre** Relation d'ordre pour résoudre des problèmes d'équipotence, d'ordre, de comparaison, etc.	Noms des premiers nombres (arbitraires) : un, deux, … neuf	1, 2, … 9 (arbitraires)
Impossibilité de proposer une solution à certains problèmes (absence ou retrait total),	La solution de certains problèmes ne peut s'exprimer en réponse à la question « combien de… » qui impose un déterminant numéral. Construction d'**un nouveau nombre**	Ce nouveau nombre est arbitrairement désigné par le nom ***zéro*** en langue naturelle.	Ce nouveau nombre est arbitrairement désigné par un nouveau chiffre : **0**.
Nécessité de désigner des grands nombres pour réaliser une collection équipotente par oral ou par écrit.	**Décomposition additive des nombres** (et pas composition qui relève de l'ajout).	Traduction en langue naturelle par les mots « et » ou « et encore » ou « et puis », etc. Nécessité de désigner le nouveau signe + par un mot : le mot « plus »	Nécessité d'un nouveau symbole arbitraire : le **signe +.** Corrélativement : le **signe -.**
Problème : des décompositions différentes désignent les mêmes quantités.	**Tout nombre a une infinité de désignations possibles**. Il faut pouvoir indiquer que deux écritures différentes (a fortiori identiques) désignent le même nombre.	**Egalite, égale, égale**, est égal à, n'est pas égal à, est différent de, etc.	Nécessité d'un symbole pour traduire ce mot « égal » dans le registre des écritures symboliques mathématiques : le **signe =** (forme conventionnelle).
Activités de résolution de problèmes « concrets » montrant les limites de la désignation additive des nombres (impossibilité mnésique, impossibilité d'écrire les désignations des nombres, etc.)	Nécessité de trouver une autre manière de désigner les nombres. Groupement des quantités par paquets, notions de paquets, de groupes d'objets qui facilitent les désignations de grandes quantités.		
Problèmes liés à la communication.	Nécessité de former des **paquets équipotents**.	Choix arbitraire d'un **cardinal des paquets équipotents : dix**. « paquets de dix », « unités », « dizaines », « **unités libres** »	Désignation des nombres en langue naturelle puis construction du **système de numération de position** en réponse à un problème

		Analyse des noms de nombre en français (voire dans d'autres langues) pour mettre recherche une certaine congruence entre les désignations des nombres en langue naturelle et les désignations chiffrées : « -ze » veut dire « dix », « dou, deux », « ante » et « ente » veulent dire « dizaine ». « Cinquante c'est cinq dizaines ».	(désignation des nombres avec deux chiffres puis davantage). Ecritures chiffrées de grand nombres : 68, 57 (5 **dizaines** et 7 **unités libres**) puis écriture du nombre dix en chiffres : 10 (**une dizaine** et **0 unité libre**).

IV - CONCLUSION

L'atelier, même inachevé, a mis en évidence que le concept de registres sémiotiques de représentations est peu pris en compte dans les ouvrages de CP analysés. Ces registres, pourtant nécessaires aux apprentissages mathématiques ne sont que rarement l'objet d'un apprentissage spécifique, identifié comme tel, par les auteurs d'ouvrages, donc vraisemblablement pas davantage par les enseignants. Leur prise en compte est pourtant nécessaire à plusieurs titres :

- elle permet d'éviter les confusions entre les désignations des objets (ne pas confondre l'écriture *34* et le nombre qu'elle désigne, par exemple),
- elle permet de contourner des problèmes de non-congruence forte, véritable obstacle à la résolution de problèmes, en découvrant des représentations équivalentes congruentes facilitant la résolution, notamment par les opérations de traitement comme la reformulation en langue naturelle,
- elle permet d'enseigner le sens du système de numération au lieu de n'enseigner que des écritures qui se traduisent par le saucissonnage de l'enseignement des désignations des nombres, au détriment de ce sens,
- elle permet de distinguer ce qui relève des concepts et de leurs désignations,
- elle permet d'enseigner le sens le plus général de l'égalité (à l'école primaire), permettant ultérieurement aux élèves de mieux effectuer des traitements mettant en œuvre écritures fractionnaires et écritures décimales, etc., et là encore de ne pas confondre nombre et désignation de nombre,
- elle permet de construire des systèmes de représentations figurales cohérente avec les désignations en langue naturelle, figurale ou chiffrée des nombres, etc.

Le concept de congruence entre représentions figurales, en langue naturelle, dans le registre des écritures symboliques mathématiques mériterait un développement plus approfondi.

V - BIBLIOGRAPHIE

CAMENISCH A. & PETIT S. (2016) Écrire en mathématiques : le rôle des écrits intermédiaires, dans *Recherches en écritures : regards pluriels*, Université de Lorraine, *Recherches Textuelles*, **13,** 235-259.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

VERGNAUD G. (2002) Qu'apportent les systèmes de signes à la conceptualisation *? La Nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* ***17***, 171-179. Résumé de l'article sur Refdoq.fr : http://www.refdoc.fr/Detailnotice?cpsidt=13611761

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Revue RDM* ***Vol 10****. /2.3.*
Programme pour le cycle 2, BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, cycle 2.

COMMUNICATIONS

LABYRINTHES D'UN POINT DE VUE MATHÉMATIQUE ET EXPÉRIMENTATION, POINT DE DÉPART D'UNE FUTURE ANALYSE DIDACTIQUE

André STEF
Maître de conférences, Université de Lorraine
CNRS, IECL, F-54000 Nancy, France
andre.stef@univ-lorraine.fr

Résumé
Les labyrinthes ont un intérêt culturel, cultuel, artistique, initiatique, ludique, touristique, … et aussi mathématique. La plupart des intérêts signalés sont autant de raisons de les aborder en classe. Dans ce texte, nous nous intéressons uniquement à des aspects mathématiques des labyrinthes et à leur utilisation en classe : forme, parcours, codage, algorithmes de sortie, construction. Les expérimentations présentées ont été réalisées dans des classes d'écoles élémentaires (essentiellement de cycle 3) et en licence pluridisciplinaire scientifique (études menant des étudiants au professorat des écoles).

Dans une première partie, nous présentons les différents contextes dans lesquels les expérimentations ont été proposées ainsi que la nature du public élèves ou étudiants. Les mathématiques intervenant à propos des activités autour des labyrinthes sont explicitées dans la deuxième partie. Dans les deux parties suivantes, différents supports sont présentés ainsi que les enjeux des séances selon le contexte considéré. Une séquence réalisée dans une classe de CM1 est ensuite détaillée dans la partie 5.

I - CADRE DES EXPÉRIMENTATIONS

1 Parcours pluridisciplinaire scientifique (2001 – 2013)

Le parcours pluridisciplinaire à Épinal (licence pluridisciplinaire 2001 – 2005, puis parcours L3 des licences de Mathématiques et de Sciences Physiques dans le cadre LMD 2005 – 2013) s'adressait à des étudiants de formation scientifique (en particulier Mathématiques, Sciences Physiques) se destinant au métier de Professeur des Écoles.

2 Cycle 3 (2009 - 2013 et 2015)

Le travail sur les labyrinthes a été expérimenté plusieurs années (2008 - 2013) dans la classe de CM1/CM2 de Sylvie Baud - Stef, Professeur des Écoles, à l'école Jean Moulin de Champigneulles (54). Les interventions de l'auteur dans la classe se sont faites dans le cadre d'un projet de classe intitulé « des mathématiques autrement » faisant intervenir un chercheur dans la classe.

Les labyrinthes ont également été le thème d'une activité lors de la semaine des mathématiques en 2015 dans la classe de CM2 de Laurent Bauer, Professeur des Écoles, à l'école Fleming de Jarville (54).

3 U.E. Libre (S4) mathématiques pour le Professeur des Écoles (2013 – 2017)

Tous les étudiants inscrits dans une licence de l'Université de Lorraine choisissent en semestre 4 (S4) une UE, dite libre, (30 h de cours) dans une liste d'UE spécifiques proposées à l'échelle de l'université par les différentes formations. Un étudiant ne peut pas choisir une UE proposée par sa licence. L'UE « Math pour P.E » est proposée par la licence de mathématiques et s'adresse à des étudiants se destinant à passer les épreuves du CERPE, avec l'objectif annoncé que ces étudiants puissent maintenir des compétences en mathématiques, voire les développer.

Les labyrinthes sont abordés lors d'une séance sur les algorithmes. Ici un labyrinthe est tracé à l'entrée de l'amphithéâtre avant le début du cours.

4 U.E. Exposés mathématiques (S4) en licence de mathématiques (2013 – 2016)

Seule expérimentation avec des étudiants de licence de mathématiques (deuxième année), une séance permet aux étudiants de construire de manière autonome un labyrinthe sur le sol, puis d'aborder les notions algorithmiques associées aux labyrinthes.

5 Fête de la Science (Épinal 2010 – 2013, Faculté des Sciences 2016)

Un labyrinthe est construit sur le sol avec des étudiants (L3). L'animation par les étudiants ou l'auteur était faite devant des groupes d'élèves ou devant un public visiteur, pour des séances ne pouvant excéder 20 minutes. Elle porte sur les déplacements dans un labyrinthe, les problèmes liés au guidage d'une personne (repère tournant) et des algorithmes de parcours (main droite/main gauche, algorithme de Trémeaux).

II - MATHÉMATIQUES DU LABYRINTHE

Il s'agit de mettre en évidence les connaissances mathématiques susceptibles d'être abordées lors des activités en classe.

1 Topologie du labyrinthe

1.1 Labyrinthe simple

Un labyrinthe simple peut être défini comme un labyrinthe pour lequel il n'y a qu'un seul vrai chemin menant de l'entrée à la sortie. La définition de vrai chemin est à prendre au sens topologique, c'est-à-dire que ce chemin est défini à déformation continue près : on peut imaginer deux chemins « réellement parcourus » pour lesquels on a déroulé une ficelle sur le sol de l'entrée à la sortie. Ces deux chemins sont déclarés identiques (« homotopes ») si on peut déplacer une ficelle (« déformation continue ») pour la superposer à l'autre sur tout le parcours sans toucher aux deux extrémités.

Sur l'exemple suivant (figure 1), il n'y a qu'un seul chemin. À gauche le labyrinthe seul, à droite deux parcours correspondant à un même chemin topologique.

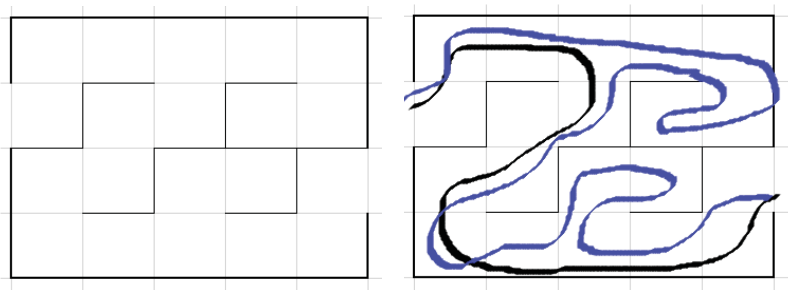


Figure 1 : labyrinthe simple

1.2 Labyrinthe à ilot

Ce sera la situation des labyrinthes qui ne sont pas simples. Des chemins différents sont possibles par l'existence d'ilots de murs non reliés aux bords du labyrinthe (des « trous »). Pour ces labyrinthes, il y a une infinité de chemins topologiques différents de l'entrée à la sortie.

Dans le labyrinthe suivant (figure 2) , il y a un ilot ; le nombre de tours et le sens de rotation déterminent des chemins.

À gauche, le labyrinthe seul, au centre deux chemins différents (au-dessus et au-dessous de l'ilot), à droite un troisième chemin différent (rotation d'un tour dans le sens des aiguilles autour de l'ilot).

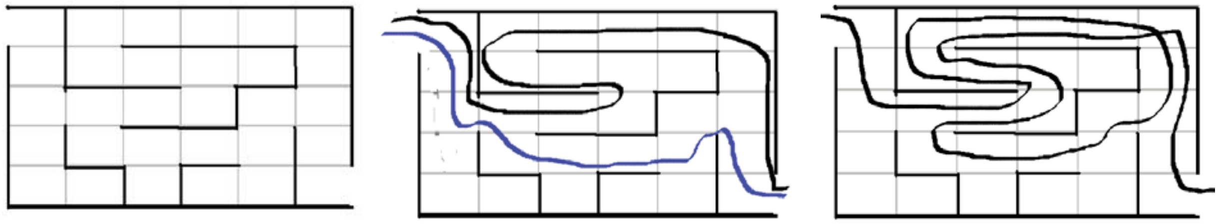


Figure 2 : labyrinthe à un ilot

Les labyrinthes introduits dans les expérimentations comporteront volontairement plusieurs ilots. L'exemple de la figure 3 comporte 13 ilots et nous donnons un exemple de chemin.

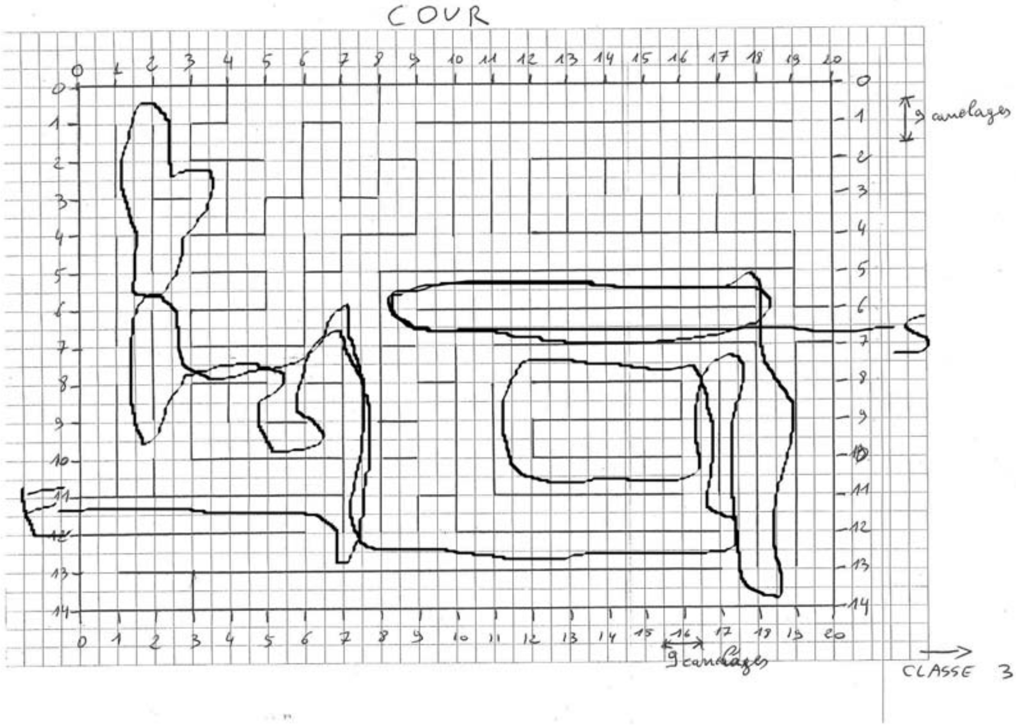


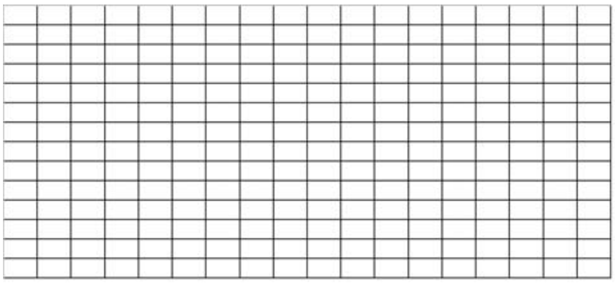
Figure 3 : labyrinthe à treize ilots

2 Longueur des murs

La construction sur le sol d'un labyrinthe de M x N cases carrées de côtés de mesure H, dont les murs seront des côtés des carrés nécessite une certaine longueur d'adhésif L. Une tâche consiste à estimer la longueur d'adhésif (ou le nombre de rouleaux) à prévoir. La valeur exacte peut ne pas dépendre uniquement de M, N et H, on peut en effet produire des labyrinthes de longueurs L différentes pour de même valeurs de M, N, H. Il s'agira donc de **majorer** la valeur L en fonction des trois données M, Net H.

Raisonnement possible (faisant intervenir des expressions « au plus », « au moins », « majorant ») :

- On part d'un réseau complet avec M x N zones isolées (il y a des murs partout).



- Calcul du nombre de murs. Un mur est une longueur H entre deux points du réseau.
  - Nombre de murs d'une ligne horizontale : M
  - Nombre de lignes horizontales : N + 1

- Nombre de murs horizontaux : M (N + 1) = MN + M
- Nombre de murs d'une ligne verticale : N
- Nombre de lignes verticales : M + 1
- Nombre de murs verticaux : N (M + 1) = NM + N
- **Nombre total de murs** (somme) **: 2 NM + M + N**

- On supprime alors des murs, afin de permettre le passage.
- Chaque fois qu'on enlève un « mur », on fusionne **éventuellement** deux zones pour n'en former plus qu'une.
- Donc si on veut n'avoir qu'une seule zone, car tout communique dans un labyrinthe, il faut casser **au moins** MN – 1 murs.
- Il **faut** de plus casser **un** mur pour l'entrée et **un** pour la sortie.
- Le nombre de murs est donc **au plus** 2 MN + M + N – (MN – 1 + 2) = MN + M + N – 1.
- La longueur L est donc **au plus** H (MN + M + N – 1).

Cas d'un labyrinthe dont le plan est présenté en section précédente (figure 3), réalisé sous le préau :

- Pour le labyrinthe 20 x 14 (M = 20 et N = 14), il faut au plus 313 murs (20 x 14 + 20 + 14 – 1), soit 156,5 m d'adhésif au plus (0,5 x 313) si la longueur d'un côté du carré est 50 cm.
- En pratique, il y avait quelques murs détruits supplémentaires, ne menant pas à des fusions de zones. Le nombre réel de murs est ici de 300 (c'est-à-dire la différence entre le majorant ci-dessous et le nombre d'ilots, 13 ici comme signalé plus haut, ce qui est un résultat général, puisque tout mur enlevé lors de la création du labyrinthe et ne fusionnant pas deux zones crée en fait un ilot).

3 Codage du parcours d'un labyrinthe plan

3.1 Cadre général

Décrire un labyrinthe revient à indiquer les choix d'orientation à chaque intersection. Dans un labyrinthe plan (qui peut être dessiné sur une feuille), par exemple, la première en partant de la droite est indiquée. Dans un labyrinthe quelconque, qui n'est autre qu'un graphe, le codage sera lié à la manière dont ce graphe est défini.

3.2 Codage d'un labyrinthe à cases carrées

Dans le cas d'un labyrinthe à cases carrées ou rectangulaires (comme dans les exemples précédents), avec des murs, côtés de ces carrés, un chemin parcouru ou à parcourir peut être décrit de plusieurs manières :

- à l'aide d'une suite (finie) de 3 lettres
  - T avancer d'une « case » tout droit ;
  - G pivoter d'un quart de tour sur la gauche et avancer d'une « case » ;
  - D pivoter d'un quart de tour sur la droite et avancer d'une « case ».

  La dernière case parcourue fournit l'orientation pour comprendre l'orientation indiquée pour le déplacement suivant. Il s'agit donc ici d'un repère mobile.
- à l'aide d'une suite de 4 lettres indiquant la direction à suivre, d'une case :
  - H vers le haut de la feuille ;
  - D vers la droite de la feuille ;
  - B vers le bas de la feuille ;
  - G vers la gauche de la feuille.

Ou par exemple les points cardinaux N, E, S, O repérés sur les bords de la feuille. Il s'agira donc d'un repère fixe.

4 Algorithmes

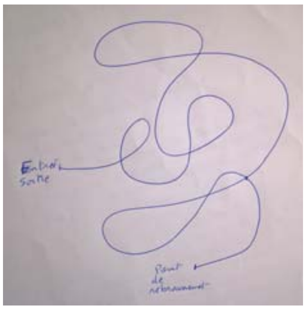
Il s'agit d'algorithmes permettant d'indiquer la manière de parcourir un labyrinthe pour effectuer une tâche donnée.

4.1 Revenir à son point de départ. Le fil d'Ariane.

Si une ficelle est attachée à un point de départ et qu'on parcourt le labyrinthe, il suffit, pour revenir à son point de départ à tout moment, de suivre le fil en sens inverse pour revenir à ce point de départ. C'est la méthode indiquée dans la mythologie grecque par Ariane à Thésée[1] pour sortir du (LE) labyrinthe.

Une variante est la méthode utilisée avec les cailloux par le Petit Poucet (dans le conte de Charles Perrault (1628 – 1703)) pour sortir de la forêt. Il s'agit bien d'une variante et non de la même méthode car si le fil d'Ariane peut se croiser, on sait quel bout du fil suivre. Pour les cailloux du Petit Poucet, on ne sait pas, lors d'un croisement, quels sont les cailloux posés le plus récemment, mais notons que le choix de la piste suivie n'a pas d'importance :

- S'il s'agit de la piste la plus récente, le Petit Poucet reviendra à cette intersection après une boucle suivie dans la forêt puis prendra la piste plus ancienne ;
- S'il s'agit de la deuxième piste la plus récente, il suivra une boucle pour revenir par la piste la plus récente, puis suivra une piste plus ancienne ;
- S'il s'agit d'une piste plus ancienne, alors il économisera le parcours d'une boucle.



Une remarque : cette méthode, suivie par Thésée, ne lui permettait pas de trouver à coup sûr le Minotaure, même si ce dernier ne bougeait pas.

4.2 Algorithme de la main droite / main gauche

Ces algorithmes s'appliquent pour traverser un labyrinthe plan de l'entrée à la sortie, qui se trouvent au bord du labyrinthe (et non dans le labyrinthe, par exemple par un escalier).

Le mur d'enceinte est défini comme l'ensemble des murs qui cernent le labyrinthe ainsi que les murs qui sont reliés à ces premiers murs. Lorsqu'il y a une entrée et une sortie distinctes (ce qui n'est pas le cas dans le labyrinthe de la mythologie), il y a alors deux murs d'enceinte (le mur à droite de l'entrée et celui à gauche) (figure 4).

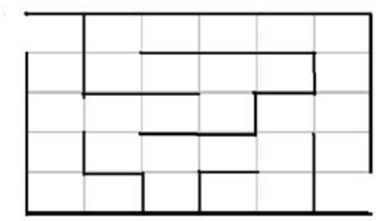


Figure 4 : labyrinthe avec une entrée et une sortie distinctes

[1] « Ayant fourni tous les renseignements à Thésée, elle lui donna aussi un fil qui lui permit de sortir du Labyrinthe, après avoir vaincu le Minotaure. »

Algorithme de la main droite :

En entrant dans le labyrinthe, suivre le mur de droite et parcourir alors le mur d'enceinte du labyrinthe. En suivant ce mur, qui a un côté intérieur (au labyrinthe) et un côté extérieur, on est certain de passer à un moment de l'intérieur à l'extérieur (ce mur a deux extrémités : l'entrée et la sortie), ce sera la sortie du labyrinthe (figure 5).

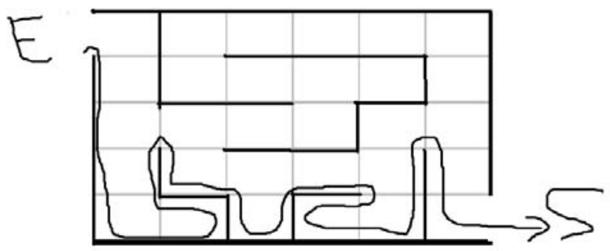


Figure 5 : algorithme de la main droite

Algorithme de la main gauche :

De même, le fait de suivre le mur de gauche dès l'entrée mènera également à la sortie (figure 6).

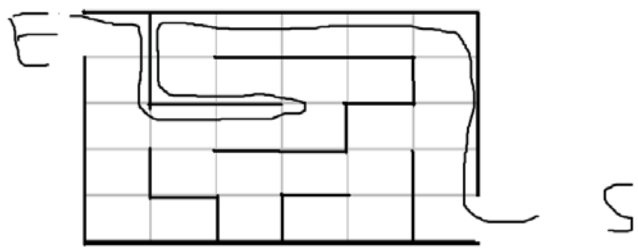


Figure 6 : Algorithme de la main gauche

Ces deux algorithmes ne peuvent être étendus aux cas suivants :

- S'il est appliqué et que l'on change de mur en cours de parcours, il n'est alors pas certain que le nouveau mur soit un mur d'enceinte (cela peut être un ilot), donc on peut alors « tourner en rond » sans trouver la sortie.
- S'il est appliqué alors que l'on est déjà dans le labyrinthe, il n'est pas certain que les murs voisins soient des murs d'enceinte, le fait de parcourir l'un de ces murs ne garantit donc pas que l'on trouve la sortie.
- Si un « trésor » est à trouver dans le labyrinthe, le parcours « main droite » (comme celui de « main gauche ») ne garantit pas que celui qui le suit passe à proximité de ce trésor. En effet, l'algorithme ne permet pas de s'éloigner du mur d'enceinte et le trésor peut en être éloigné.
- Si le labyrinthe n'est pas plan (plusieurs niveaux par exemple), ces algorithmes ne garantissent pas que l'on trouve la sortie. Sans indication supplémentaire, il n'y a pas de certitude que toute la surface (sur chaque niveau du labyrinthe) du mur d'enceinte sera suivie, et il n'est pas exclu qu'on tourne en boucle. Pour comprendre la complexité de cette situation, une première réflexion peut-être de se demander la voie à suivre lorsqu'on rencontre un escalier dans un tel labyrinthe (prendre ou non l'escalier ?).

Remarque : ces algorithmes de main droite / main gauche auraient permis à Thésée de revenir à l'entrée (qui est également la sortie) mais pas de trouver à coup sûr le Minotaure.

4.3 Algorithme de Gaston Tarry (1895)

Cet algorithme permet de parcourir tout le labyrinthe. Tout passage sera alors parcouru deux fois exactement avant de revenir au point de départ si on ne trouve pas de sortie. En voici une description :

- On parcourt chaque couloir exactement deux fois dans chaque sens, en mettant une marque à l'entrée et à la sortie dans le couloir ;

- À chaque carrefour, on s'impose de ne reprendre le couloir de découverte du carrefour qu'en dernier recours.

Cette description n'est toutefois pas suffisamment explicite sur le choix du parcours à effectuer. Il s'agit moins d'un algorithme que d'un principe général. Curieusement (ou pas) une description plus complète existe et elle est antérieure.

4.4 Algorithme de Charles Trémeaux (19e siècle)

Il est plus explicite que celui de Gaston Tarry.

- On marquera le couloir à l'entrée et à la sortie chaque fois qu'on l'emprunte.
- On emprunte une voie quelconque. Si on aboutit à une impasse on revient sur ses pas.
- Si on arrive par une voie nouvelle à un carrefour déjà exploré, on revient sur ses pas (ce qui revient à condamner cette voie).
- Si on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie déjà parcourue dans l'autre sens, on choisit en priorité une voie nouvelle, sinon une voie parcourue dans un seul sens.

Le principe de cette méthode est le suivant :

- Sa mise en œuvre amène à marquer à chaque fois qu'on parcourt un couloir son entrée et sa sortie. Lorsqu'une entrée de couloir est marquée deux fois, ce couloir est considéré comme condamné.
- Le fait d'arriver par une voie nouvelle (c'est-à-dire empruntée pour la première fois) à un carrefour déjà exploré permet de constater que :
  - on n'est pas arrivé dans un nouveau lieu,
  - on est dans un lieu qu'on pourra retrouver en revenant sur ses pas.

  On peut alors revenir sur ses pas et condamner cette voie.

Cette méthode peut être illustrée sur le sol d'un labyrinthe à l'aide de jetons (ou bouchons). Sur la figure 7 une illustration par un parcours suivant cette méthode.

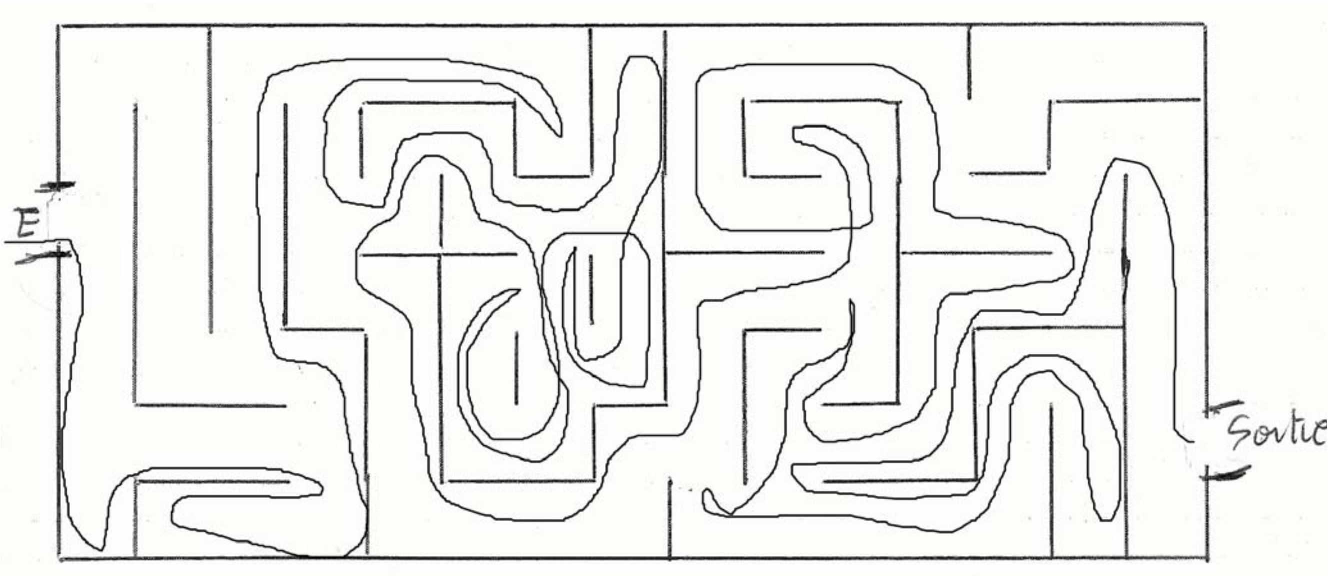


Figure 7 : Algorithme de Charles Trémeaux (entrée / sortie)

Si la sortie n'est pas recherchée mais l'exploration de tout le labyrinthe, le parcours pourra se poursuivre comme indiqué dans le labyrinthe de la figure 8 (en bleu)

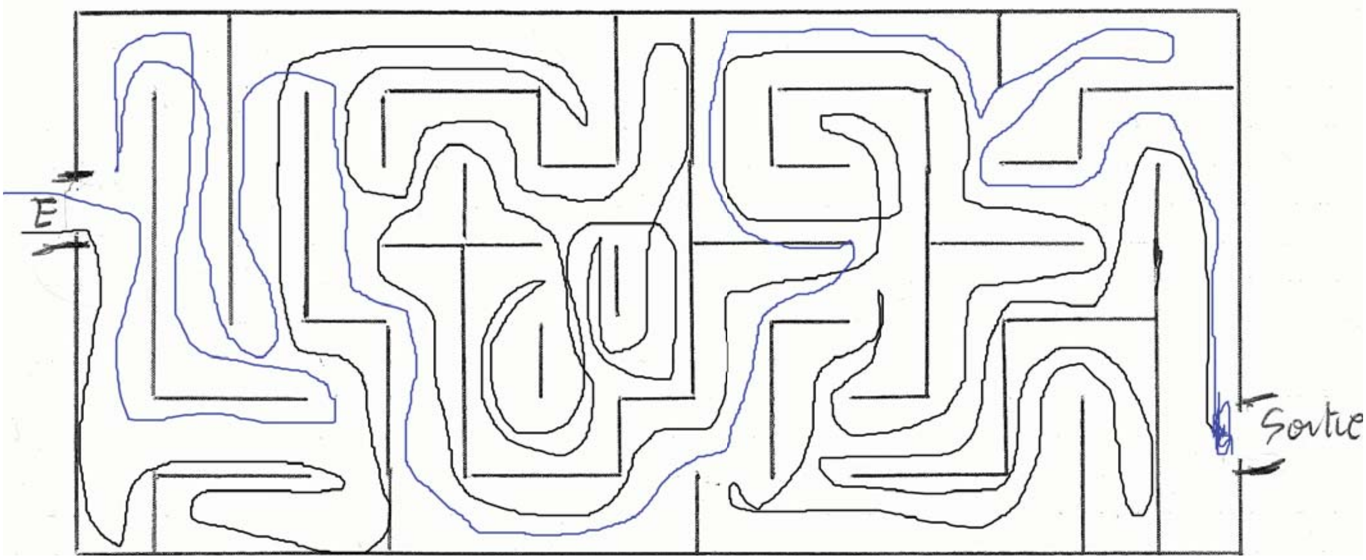


Figure 8 : Algorithme de Charles Trémeaux (exploration de tout le labyrinthe)

Par cet algorithme, tout labyrinthe est exploré, y compris les labyrinthes non plans, l'orientation (droite/gauche) n'ayant pas de rôle ici.

En suivant cet algorithme, Thésée aurait trouvé le Minotaure, si ce dernier ne se déplaçait pas.

4.5 Autres algorithmes

Il existe d'autres algorithmes permettant d'explorer un labyrinthe, mais l'objectif n'est pas ici de viser l'exhaustivité. Citons par exemple l'algorithme d'Oystein Ore (20e siècle) qui explore l'algorithme « en profondeur » : les cases sont codées par leur distance au point de départ au fur et à mesure de l'exploration du labyrinthe. Le principe est le suivant :

- coder 0 la case de départ ;
- se déplacer à une case voisine, codée 1, puis revenir à la case 0 et recommencer vers toutes les cases voisines de 0 ;
- partir de la case 0 pour rejoindre chaque case 1 pour coder 2 toutes les cases voisines de chaque case 1 qui ne sont pas encore numérotées ;
- recommencer, jusqu'à arriver à la sortie ou au trésor. Le code de la case de sortie indique la longueur du chemin minimal. Revenir au point de départ se fait en parcourant des cases dans l'ordre des codes décroissant.

Cette description n'est pas complète, il faudrait préciser comment sont explorées toutes les cases voisines d'une case 1, par exemple. Le temps d'exploration du labyrinthe est beaucoup plus important que celui de la méthode de Trémeaux, mais fournit d'autres informations.

III - SUPPORTS POUR LA REPRÉSENTATION DE LABYRINTHES

1 Forme des labyrinthes utilisés

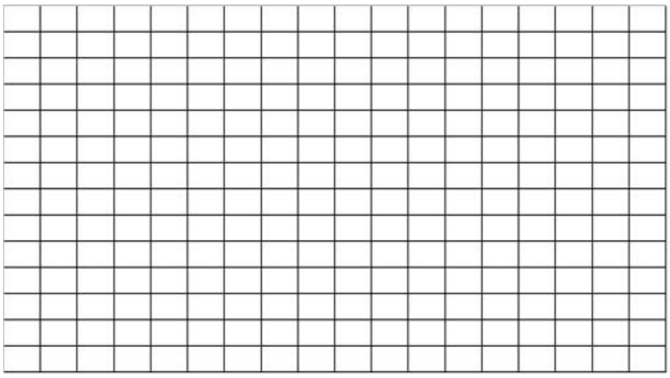
Les labyrinthes utilisés respectent tous le modèle suivant :

- un rectangle ;
- des murs à angle droit (deux directions de mur) et sans épaisseur, des cases (ou cellules) carrées (ou rectangulaires) ;
- tout le rectangle est utilisé (labyrinthe parfait), c'est-à-dire que toutes les cases du rectangle sont reliées (accessibles) ;
- une entrée ;

- une sortie.

2 Plans

Les plans s'appuient ainsi sur le réseau d'une feuille, les murs sont des segments du quadrillage.



Sur une feuille à petits carreaux, le choix est de considérer des cases de 1 cm de côté, soit des cases de « 2 x 2 carreaux ».

3 Tracés sur le sol

La matérialisation des murs d'un labyrinthe sur le sol peut être réalisée à l'aide de rouleaux de masquage. Il s'agit d'un adhésif, peu cher, facile à placer et à enlever, utilisé pour protéger des surfaces lors de la peinture de zones connexes. Cette idée a été fournie à l'auteur par Sophie André et Lauriane Berger, étudiantes en L3 pluridisciplinaire (2008 – 2009), lors de leur exposé sur les algorithmes dans les labyrinthes. Le pavage du sol par des dalles (de moquette) ou des carrelages (carrés ou rectangles) permet de repérer facilement les deux directions. La taille des cases est choisie en relation avec les dimensions des carrés unitaire du pavage du sol (ci-dessous à gauche, une case = 2 x 2 carreaux, et à droite, une case = 9 x 9 carreaux) (figure 9).

Figure 9 : Labyrinthes tracés sur le sol (moquette et carrelage)

En l'absence de pavage sur le sol, il convient de tracer le rectangle de contour, le réseau des intersections (figure 10).

Figure 10 : Labyrinthe tracé sur le sol au parc des expositions d'Epinal lors de la fête de la Science

4 « Planche à clous »[2]

Un réseau de clous est planté sur un plateau de bois. Les murs sont réalisés avec des élastiques, facilement déplaçables (figure 11).

Figure 11 : Labyrinthe sur une planche à clous

5 Autres idées

D'autres idées ont été proposées lors d'activités en écoles, par les élèves ou les enseignants (figure 12)

Figure 12 : Labyrinthes avec des briques de bois[3]

[2] L'idée est d'Edith Petitfour, alors en poste à l'IUFM de Lorraine.

Citons encore, des labyrinthes réalisés avec des cotons tige (avec adhésif) et des briques plastiques se fixant (clipsant) sur une grille support (figure 13).

Figure 13 : Labyrinthe avec des cotons tige[4]

IV - OBJECTIFS DE SÉANCES SUR LES LABYRINTHES

1 Parcours pluridisciplinaire scientifique (2001 – 2013)

Les labyrinthes sont abordés dans le cadre d'un travail sur les algorithmes. Il s'agit d'illustrer :

- la diversité d'algorithmes permettant d'arriver à un même résultat ;
- la comparaison d'algorithmes ;
- la réflexion sur les notions de majorant, de maximum (nombre de murs) ;
- et de présenter des notions mathématiques travaillées à l'école primaire (telles que plan, orientation, codage, échelles, débuts de la proportionnalité).

2 Cycle 3 (2009 – 2013)

L'activité sur les labyrinthes est l'occasion :

- d'amener les élèves à réinvestir des notions déjà rencontrées,
- de travailler simultanément sur le plan et le modèle grandeur nature,
- de construire un objet qui devient plan et de réaliser ce plan « grandeur nature »,
- de travailler ainsi sur la proportionnalité,
- de travailler sur le codage et son expérimentation,
- de travailler en groupe classe sur un projet,
- d'échanger (dans le cadre des « mathématiques autrement ») avec un chercheur,
- de montrer que les mathématiques permettent d'appréhender le monde.

3 U.E. libre (S4) mathématiques pour le professeur des écoles (2013 – 2017)

Les labyrinthes sont l'occasion d'illustrer un cours sur les algorithmes et de montrer ce que des élèves de cycle 3 peuvent réaliser dans un travail sur les labyrinthes. Il s'agit également de montrer ce que peut être le travail du professeur des écoles à de futurs étudiants de Master MEEF.

4 U.E. Exposés mathématiques (S4) en licence de mathématiques (2013 – 2016)

L'objectif est essentiellement d'étudier les algorithmes.

---

[3] à gauche : école Jean Moulin de Champigneulles (54), classe de CM1/CM2 de Sylvie Baud-Stef, à droite : école Fleming de Jarville (54), classe de CM2 de Laurent Bauer

[4] école Fleming de Jarville (54), classe de CM2 de Laurent Bauer

5 Fête de la Science (Épinal 2010 – 2013, Faculté des Sciences 2016)

L'objectif est de montrer que les mathématiques sont présentes ou peuvent être mobilisées pour résoudre des problèmes de la vie courante ou dans des activités de jeux. Les labyrinthes sont l'occasion de parler de codage, repérage, algorithmes…

V - ACTIVITÉ EN CLASSE DE CM1

La description de l'activité du point de vue de l'enseignante, Sylvie Baud-Stef a été publiée dans PLOT[5].

1 Séance 1 : parcours dans un labyrinthe

1.1 Travail préparatoire, en dehors du temps de classe, par l'enseignant

Un labyrinthe (voir figure 9 à droite), avec des ilots[6], est réalisé préalablement par l'enseignant sur le sol, en dehors de la classe (dans le préau, par exemple). Il n'est pas nécessaire qu'il soit caché aux élèves, il est même utile qu'il soit visible pour susciter la curiosité et l'intérêt.

1.2 Découverte en classe

Une question est posée en début de séance à la classe : qu'est-ce qu'un labyrinthe ? Un temps d'échanges avec les élèves doit permettre de faire ressortir les idées de mur (miroir, haies), de chemin (tunnel), d'intersection (bifurcation), d'entrée, de sortie (trésor). Peut apparaître (mais concerne davantage la suite) l'évocation du fil d'Ariane (rare) ou du Petit Poucet (très rare). Sont également mentionnés : Alice aux pays des Merveilles, des champs de maïs, les vacances, les monstres (très fréquent).

Un plan de labyrinthe est distribué à chaque élève. Il s'agit de trouver la sortie (figure 14).

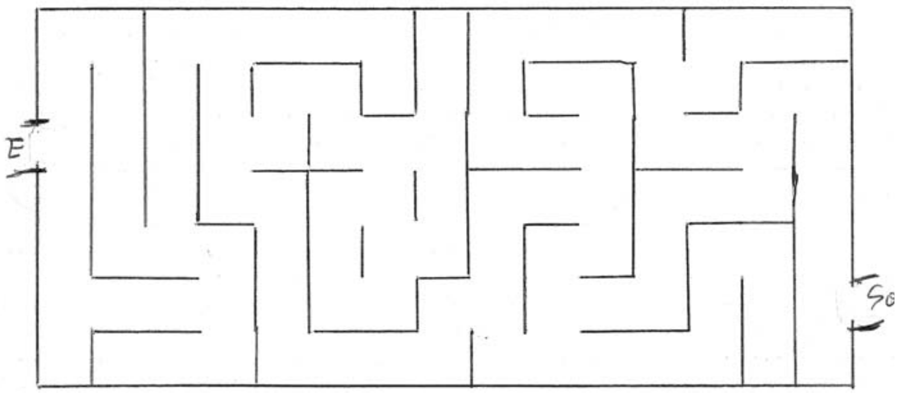


Figure 14 : Plan du labyrinthe

La consigne donnée ensuite est : décrire le chemin vers la sortie au moyen des trois lettres suivantes :

- T : avancer d'une « case » tout droit
- G : tourner d'un quart de tour sur la gauche et avancer d'une « case »
- D : tourner d'un quart de tour sur la droite et avancer d'une « case »

La description du parcours est une suite dont les éléments sont ces trois lettres, écrite sur une feuille (différente du plan pour éviter l'écriture du code dans les cases du plan, qui pourrait faciliter le repérage).

Ici, contrairement à l'utilisation de directions fixes (gauche/droite/haut/bas d'une feuille ou points cardinaux N/S/E/O), le codant doit se représenter la position et l'orientation de celui qui parcourt, virtuellement ou réellement, le labyrinthe. Le repère est dit « tournant ».

[5] « Des labyrinthes dans l'école » PLOT n° 52 APMEP

[6] important pour la suite

Une difficulté rencontrée lors de la première expérimentation par des élèves est l'identification de chacune des cases. Il y a été remédié lors des expérimentations suivantes en « pointant » les cases du plan du labyrinthe (figure 15)

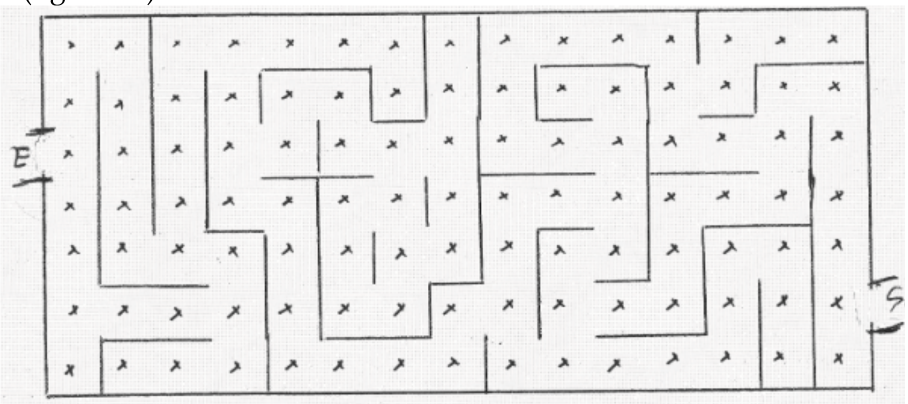


Figure 15 : Plan du labyrinthe avec identification de chacune des cases par une croix

La vérification du codage réalisé consiste à le tester sur le labyrinthe dessiné précédemment sur le sol (cases non encore pointées au moment de la prise de la photographie (figure 9)). Les élèves parcourent le labyrinthe avec leur propre feuille de code ou celle d'un autre.

Des activités optionnelles[7], selon intérêt, le nombre d'élèves et le cadre sont envisagées :

- guider oralement, avec le même code T,G,D un élève dans le labyrinthe ;
- guider un élève, en utilisant le plan et en tournant le dos au labyrinthe ;
- placer un carton (type boite de papier A4) sur la tête d'un élève et lui demander de parcourir le labyrinthe. Cela illustre le fait de ne voir qu'une partie locale du labyrinthe alors que la vue de l'ensemble permet de se projeter dans un chemin perçu vers la sortie.

L'analyse avec les élèves de l'activité permet de faire ressortir :

- la rigueur du codage nécessaire ;
- la difficulté du codage pour cause de repère «qui tourne ».

1.3 Algorithmes

Au cours de la réflexion commune sur la manière de sortir d'un labyrinthe, menée dans la salle du labyrinthe, tout avec le groupe, peut apparaître la « méthode de la main droite », connue de certains élèves. Il est également possible de la faire émerger en regardant ce qui se passe si on longe le mur. L'enjeu est de faire formuler la méthode et de discuter à propos de la raison pour laquelle elle permet bien de sortir. Ensuite il s'agit de faire émerger la méthode de la main gauche et de la faire vérifier expérimentalement pour faire ressortir les limites de la méthode. Pour cela, il convient d'avoir réalisé un labyrinthe à ilots, pour tourner ou faire tourner un élève autour de cet ilot. Il est juste signalé qu'il y a des méthodes qui permettent de sortir du labyrinthe si on est perdu mais que ce n'est pas le but d'en parler ici. Et pour rassurer, informer qu'à la fête foraine, dans les labyrinthes de miroirs, il n'y a pas d'ilot et que suivre un mur au hasard à tout moment mène à la sortie ou à l'entrée (faire alors demi-tour).

1.4 Tâche à proposer

Les élèves doivent ensuite réaliser un plan de labyrinthe plus grand que celui utilisé en classe. Un des plans sera choisi puis réalisé par les élèves sur le sol. La consigne est : indiquer la dimension[8], des murs

[7] Activités réalisées lors d'animations mathématiques car la phase de codage n'est pas adaptée à une présentation à un public pressé

[8] pour la suite, 20 x 14, n'avait pas été choisi au hasard.

suivant le quadrillage de la feuille, toutes les cases accessibles, une entrée, une sortie, des ilots, le « plus compliqué possible ».

2 Séance 2 : réalisation d'un labyrinthe

2.1 Analyse

Le plan de labyrinthe ci-dessous reprend le plan choisi (proposé par un élève de CM1). Tous les élèves ont un exemplaire (figure 16).

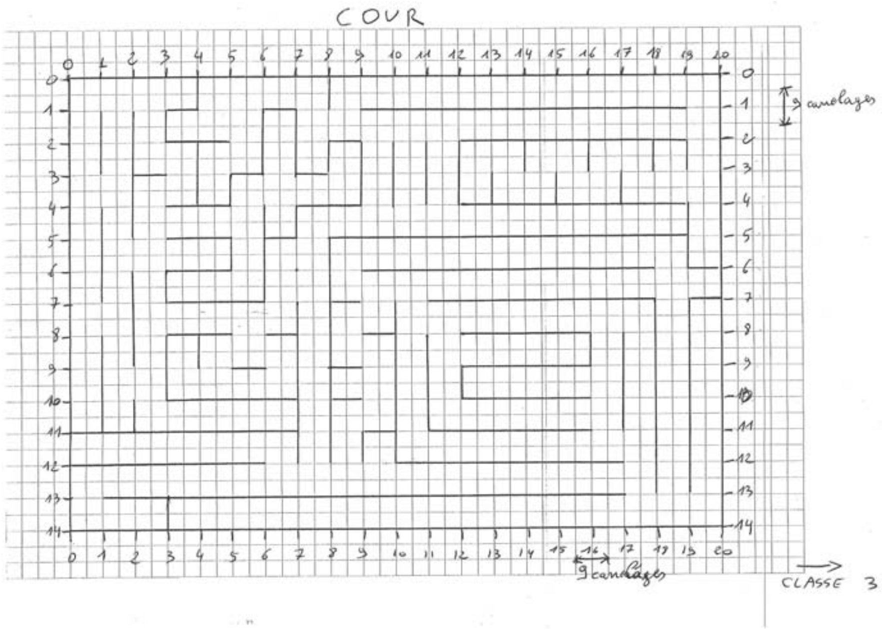


Figure 16 : labyrinthe à treize ilots proposé par un élève de CM1

Le premier travail est d'indiquer l'orientation sur le sol (voir mention de la cour et de la salle de classe). Le sol du préau étant carrelé (cas le plus favorable), il s'agit de déterminer l'échelle. Les données initiales sont les dimensions du préau (que les élèves devront mesurer) et les dimensions du labyrinthe. La proportionnalité (recherche de l'échelle du plan à la grandeur nature) peut être appliquée (via une division décimale ou euclidienne par 20 et une autre par 14), pour calculer la taille d'une case (le plus petit des deux quotients pour obtenir une case carrée). Toutefois une considération pratique sera de chercher à obtenir comme dimensions d'une case des côtés de mesure un nombre entier de fois la mesure d'un carreau de carrelage (ici 9 carrelages) (figure 17).

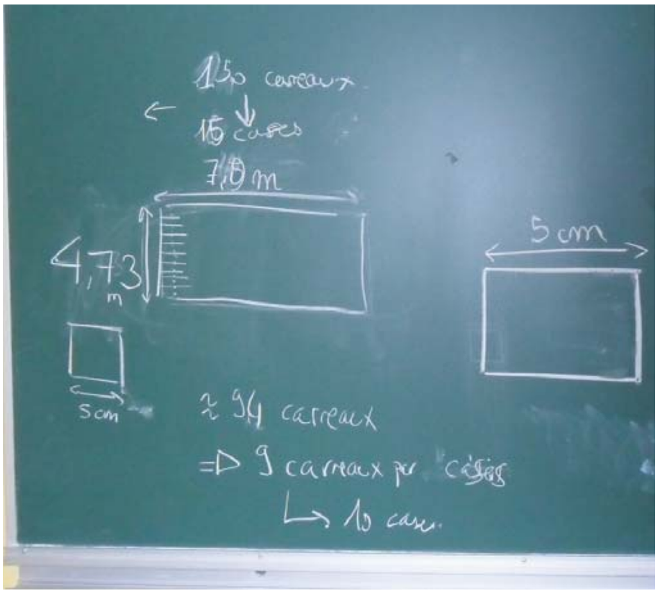


Figure 17 : travail préparatoire sur tableau noir d'étudiants de L3 pluridisciplinaire

2.2 Travail préparatoire sur le sol

Les élèves matérialisent avec l'adhésif le rectangle contenant le labyrinthe puis construisent le réseau des sommets des cases. Lorsque le sol n'est pas carrelé, la construction (plus ou moins approximative) du rectangle d'enceinte (avec indication de la graduation des cases sur l'adhésif) sert de support pour la construction du réseau à l'aide d'un mètre rouleau (de 8 mètres) (figure 18).

Figure 18 : réseau du labyrinthe de L3 (à gauche) et de la fête de la science, sans carrelage (à droite)

2.3 Réalisation des murs

Une fois construit le réseau et le mur d'enceinte du labyrinthe, les élèves peuvent construire les murs. Au cycle 3, les élèves proposent où placer un mur, l'enseignant valide et pose l'adhésif (figure 19)

Figure 19 : labyrinthe avec les murs

2.4 Un calcul de longueur

Le calcul de la longueur d'adhésif nécessaire est traité en fin de séance. Le dénombrement des murs du réseau complet (cf II.2) est mené en groupe classe avec l'enseignant. La présentation des fusions de cellules et surtout le travail de majoration est une tache compliquée pour une grande partie des élèves. Il reste un travail de réflexion à mener pour amener les élèves à comprendre cette étude de longueur.

VI - CONCLUSION

La différence essentielle de gestion des séances en cycle 3 et en parcours pluridisciplinaire est la plus grande autonomie laissée aux étudiants pour construire le labyrinthe. Une autre différence est la possibilité d'aborder des algorithmes plus complexes, par la compréhension de ce qui en fait des algorithmes d'exploration du labyrinthe.

Que ce soit en parcours pluridisciplinaire ou en cycle 3, on note à chaque fois un grand enthousiasme des élèves/étudiants à parcourir, coder, comprendre un algorithme, construire un labyrinthe et ainsi travailler des notions mathématiques. En UE libre, les étudiants hésitent à parcourir le labyrinthe (la « sortie » étant la porte d'entrée de l'amphithéâtre pour le cours à suivre), malgré les incitations de l'enseignant alors que des étudiants de licence de mathématiques, également en S4 étaient très enthousiastes pour construire et parcourir un labyrinthe. Une explication possible à ce refus : les étudiants d'UE libre sont réunis pour ce seul cours mais ne constituent pas un groupe-classe comme le sont les élèves de cycle 3 ou les étudiants du parcours pluridisciplinaire et le regard d'autrui peut les gêner.

Les étudiants de parcours pluridisciplinaire réinvestissent leur travail sur les labyrinthes pour des animations lors de la fête de la science auprès d'un public non scolaire.

Les élèves de cycle 3 s'approprient le labyrinthe pour expliquer les déplacements et algorithmes aux élèves d'autres classes. L'enthousiasme des élèves n'a pu cependant être transmis aux enseignants des autres classes. Les élèves éprouvent le besoin d'ajouter des contraintes, par des feuilles retournées dans le labyrinthe, imposant au promeneur dans le labyrinthe de revenir à l'entrée si la feuille rencontrée révèle un monstre. Non seulement l'objectif de montrer que les mathématiques sont en lien avec le monde est atteint, mais nous avons eu la bonne surprise de constater qu'elles ont touché l'imaginaire des élèves.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BAUD-STEF S. (2016) Des labyrinthes dans l'école. *Plot* **52**, 8-11

TANGENTE HS12 *Les graphes*

CHOIX DES AUTEURS D'UNE COLLECTION DE MANUELS SCOLAIRES POUR CONTRIBUER À L'ÉVOLUTION DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS EN GÉOMÉTRIE

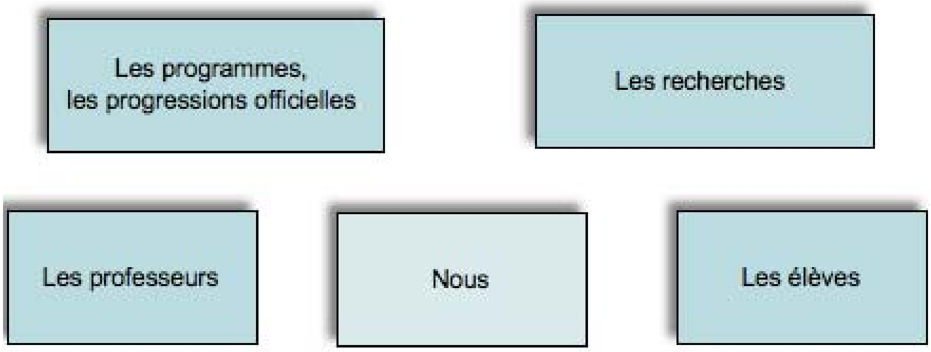
Marie-Lise PELTIER
Maître de conférences honoraire
en Didactique des Mathématiques
LDAR Paris Diderot
mlpeltier@yahoo.fr

Résumé
La communication présente :
- les points d'appui théoriques et personnels des choix effectués par les auteurs des manuels scolaires Opération Maths et EuroMaths pour l'école élémentaire pour tenter de vulgariser des éléments de recherche en didactique (Berthelot et Salin, 1992 ; Houdement et Kuzniak, 2006 ; Perrin Glorian et Godin, 2014) ;
- des exemples de pages consacrées à la construction de concepts géométriques et de pages consacrées à l'étude d'objets géométriques.

INTRODUCTION

Je suis auteure et directrice de la collection de manuels scolaires **Euromaths**, collection qui a changé de nom, suite aux nouveaux programmes de 2015, pour s'appeler **Opération Maths**, décision prise par la maison d'édition malgré notre désaccord.
Notre équipe, listée ci-dessous, est stable depuis de nombreuses années et tous les auteurs travaillent sur tous les niveaux de manière à assurer une cohérence interne à l'ensemble de la collection.
• Marie-Lise Peltier, LDAR, Université Paris Diderot
• Bernadette Ngono, ESPE, CIVIIC Université Rouen
• Joël Briand, DAEST, Université Bordeaux 2
• Danielle Vergnes, LDAR, Université Paris Diderot
• Yannis Ben Boujema, Professeur des écoles, maître formateur
• Marc Sampo, Professeur des écoles
• Avec la participation d'Eric Roditi, EDA, Université Paris Descartes.

Les auteurs de manuels scolaires sont un maillon dans la chaine de transposition de savoirs dits « savants » en savoir « à enseigner ». Pour effectuer cette transposition le mieux possible, ils doivent prendre en compte de nombreux éléments :

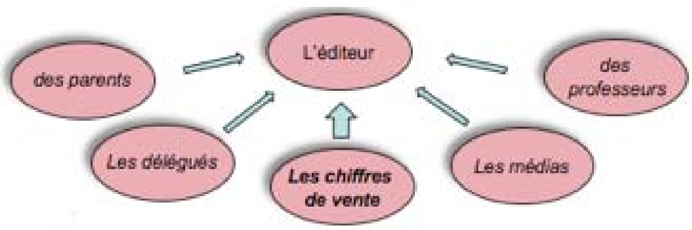


En ce qui concerne les programmes, il est à souligner un point qui nous semble très positif : pour tous les cycles de la maternelle à la fin du lycée, les concepteurs des programmes ont réussi à décliner six mêmes compétences à développer en et par les mathématiques, en explicitant pour chacun des cycles de quelle manière il faut entendre ces verbes, et ce qu'ils recouvrent.

• Chercher
• Modéliser
• Représenter
• Raisonner
• Calculer
• Communiquer

C'est à partir des programmes que nous envisageons les progressions dans chaque domaine et leur articulation.
En nous appuyant sur les recherches en didactique des mathématiques, il s'agit pour nous de mettre en évidence différentes facettes des mathématiques, de prendre en compte différentes manières dont les enfants apprennent, de maintenir la problématisation des savoirs… Les travaux sur la formation des enseignants nous sont d'une grande utilité pour concevoir les guides pédagogiques et les différents outils en tant que vecteur de réflexion didactique. Nous travaillons avec des professeurs en poste et leurs élèves pour être au plus près de la réalité du « terrain ».
Cependant les auteurs ne sont pas complètement libres de leurs choix, ils travaillent dans une maison d'édition qui a une certaine politique éditoriale, et dont un des buts est naturellement la diffusion la plus importante possible des ouvrages qu'elle édite.

L'équipe éditoriale prend ses décisions en s'appuyant sur diverses sources : parents, médias, « remontées du terrain » par le biais des délégués pédagogiques, tables rondes d'enseignants qu'elle organise.



Des discussions ont lieu entre l'équipe d'auteurs qui présente les grandes lignes de son projet et l'équipe éditoriale. Ces discussions conduisent naturellement à des compromis et aboutissent à un « cahier des charges » concernant à la fois le fond (les contenus) et la forme (nombres de pages, structure du manuel, maquettes, illustrations…) à laquelle les auteurs sont contraints de se plier.
Je vais présenter ici les éléments théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour effectuer nos choix, établir les progressions et élaborer les situations d'apprentissage et les exercices d'entraînement présentés dans les manuels (ou fichiers) dans le domaine Espace et Géométrie.

I - NOS POINTS D'APPUI

1. Les programmes, instructions, et textes officiels

Nous suivons naturellement les programmes de 2015, mais nous nous appuyons également sur ceux de 2002 dont les documents d'accompagnement et d'application, très riches, restent d'actualité.

2. Les recherches en didactique de l'espace et de la géométrie

Il s'agit essentiellement des travaux de Brousseau, Galvez, Salin, Berthelot, Houdement, Kuzniak, Parzysz, Perrin Glorian, Godin, cités dans la bibliographie, dont je vais citer rapidement les éléments que nous avons particulièrement retenus.
* La possibilité de classifier les situations d'apprentissage en fonction du facteur « taille de l'espace » déterminant les différents types d'interactions possibles entre le sujet et le milieu : le micro espace ; le méso espace ; le macro espace.
* Les trois problématiques dont peuvent relever les situations : la problématique pratique ; la problématique de modélisation ; la problématique de la géométrie. Chacune de ces trois problématiques se caractérise par des rapports avec des milieux (considérés comme systèmes antagonistes du sujet) de natures différentes, régulés par des modes différents.

Les situations d'action proposées dans le méso-espace et le micro-espace peuvent permettre des rapports spatiaux effectifs, mais sont insuffisantes à l'appropriation des notions. Il est nécessaire de faire évoluer ces situations pour permettre la construction de rapports spatiaux intériorisés permettant des actions effectuées par la pensée sur des objets réels évoqués ou directement sur des représentations symboliques de ces objets.
* Les travaux de Houdement, Kuzniak, Parzysz qui proposent un cadre pour penser l'enseignement de la géométrie :

	géométries non axiomatiques		géométries axiomatiques	
	géométrie concrète G0	géométrie spatio-graphique G1	géométrie proto axiomatique G2	géométrie axiomatique G3
nature des objets	physiques	physiques et graphiques (dessins)	théoriques (figures)	théoriques
mode de validation	perception globale	perception instrumentée	raisonnement déductif	raisonnement déductif
cycle de la scolarité	cycle 1	cycle 2 et 3	(cycle3) collège	(collège) lycée, université

• Quatre niveaux déterminés en fonction : des objets (physiques, graphiques, théoriques) ; des modes de validation qui appartiennent à différents registres (la perception globale, la perception instrumentée, le raisonnement (déductif)).
Au cours de l'école primaire, il s'agit d'assurer un passage progressif de G0 à G2.

3. Nos expériences personnelles en matière de recherche ou de recherche action et celles des autres équipes

3. 1. Nos propres travaux

La reproduction de figures

Dans mon travail de DEA (dirigé par R. Douady, en 1986), j'avais mis en évidence pour les tâches de reproduction de figure :
- la nécessité du changement d'échelle entre le modèle et la reproduction, pour bloquer les procédures de report : ce changement d'échelle étant fixé par une donnée géométrique : l'amorce de la reproduction ;
- la nécessité pour la figure modèle à reproduire d'éléments non visibles mais indispensables pour la construction, de manière à « imposer » l'analyse géométrique, c'est-à-dire la recherche de propriétés relatives à l'alignement, les distances, l'orthogonalité, le parallélisme, la symétrie.

Le terme de restauration a été introduit par Perrin. Une partie de ce travail de DEA a été publiée dans le bulletin vert de l'APMEP n° 371 sous le titre de « la fleur » coécrit avec Yves Ducel, le compte rendu des recherches effectuées dans les classes a fait l'objet d'un document de l'IREM de Rouen sous le même titre. Ce travail a ensuite été développé pour en faire une situation de formation initiale ou continue de professeurs des écoles que l'on peut lire dans « Concertum » les carnets de route de la COPIRELEM, documents pour la formation des professeurs d'école, édité par l'ARPEME.

La symétrie axiale

Un article de la revue Grand N : « Le napperon », relate le travail que j'ai mené sur la symétrie axiale. Le but premier était de mettre en évidence la nécessité de l'anticipation dans les situations de manipulation pour que les élèves aient à développer une réelle activité cognitive permettant la construction de certains « savoir-faire » et de certains « savoirs » géométriques. Cette situation, développée ensuite pour la formation initiale et continue des professeurs, se trouve également dans « Concertum ».

Les relations d'adjacence sur un polyèdre

Dans le même but de faire évoluer les pratiques des enseignants relatives à la manipulation de manière à mettre une nouvelle fois en évidence la nécessite de l'anticipation avant de passer à la manipulation

proprement dite, j'ai proposé une série d'activités concernant les relations d'adjacence sur un parallélépipède rectangle, sur un cube, puis sur d'autres polyèdres.
Dans ces différents travaux, nos réflexions se sont essentiellement concentrées sur : le rôle de la manipulation, l'importance de l'anticipation, la notion de théorèmes en actes, les modalités de validation et l'institutionnalisation. Par ailleurs, notre intérêt personnel pour les liens entre mathématiques et arts plastiques, intérêt que je partage notamment avec N. Sayac, m'ont conduit à m'interroger sur la manière d'introduire cette dimension artistique dans l'enseignement des mathématiques. Nous avons présenté un atelier[1] sur cette question en 2006 au colloque de la COPIRELEM de Dourdan.

3.2. Les travaux des collègues

J'ai déjà évoqué ces travaux pour décrire le cadre théorique dans lequel nous inscrivons notre travail d'auteurs. Je veux juste préciser ici que nous avons utilisé certaines des situations étudiées dans ces travaux en les adaptant pour qu'elles puissent entrer dans le cadre d'un manuel scolaire. Nous sommes parfaitement conscients qu'il s'agit d'une réduction, d'une simplification et donc d'un appauvrissement des situations d'origine, mais nous avons essayé au maximum de ne pas les « dénaturer ». En voici quelques exemples (ce n'est pas une liste exhaustive !) :
- de l'équipe de Bordeaux (Salin, Berthelot) :
  les distances, le milieu, l'orthogonalité avec des aller-retours dans les différentes phases entre meso espace et micro espace ;
  Les angles avec le géométriscrable
- de l'équipe de Lille (Perrin, Godin, …) :
  les restaurations de figures (mais nous n'avons pas repris leurs figures modèles).

4. Notre expérience en tant que formateurs puis en tant qu'auteurs

Nous constatons, lors des stages de formation continue, d'animations en circonscriptions, de conférences pédagogiques, un intérêt manifeste et déclaré des enseignants et des conseillers pédagogiques pour renouveler la manière d'étudier la géométrie avec leurs élèves et une forte adhésion aux propositions que nous faisons. Sont-elles suivies d'effets sur les pratiques effectives ? Notre expérience nous conduit à répondre plutôt « oui » quand l'environnement institutionnel soutient et encourage l'évolution des pratiques ; c'est notamment le cas lorsque le CPC, chargé de la mission maths est très impliqué, ce que j'ai eu le plaisir de constater par exemple dans l'académie du Mans sous l'impulsion de Gaëlle Cullerier.
Mais parallèlement les échanges avec les enseignants, lors de ces rencontres, ainsi que les « remontées » que nous transmettent les délégués pédagogiques de la maison d'édition, ont mis en évidence un décalage important entre les pratiques d'enseignement de la géométrie les plus courantes et celles que nous préconisons.
Les dérives les plus fréquentes lors de l'utilisation de nos propositions sont les suivantes :
- la suppression des phases de travail dans le méso espace ou des phases qui demandent un temps de recherche conséquent, jugées trop difficile à gérer ;
- la suppression des phases adidactiques, réduction du temps de recherche des élèves, apport presque immédiat d'éléments de réponses ;
- la perte du contenu réel de la situation pour n'en garder que l'habillage, la recherche se transformant en la présentation collective et ostensive de ce qu'il faut faire et de comment le faire ;
- la centration sur l'acquisition de savoir faire…
- et parfois même la méconnaissance de l'objet mathématique dont l'apprentissage est visé.

4.1. La prise en compte des difficultés des enseignants

Il nous a semblé indispensable dans la nouvelle édition d'EuroMaths, appelée Opération Maths, de prendre en compte ces difficultés et de revoir notre positionnement pour maintenir notre but de contribuer

[1] Marie-Lise Peltier et Nathalie Sayac : Mathématiques et Art contemporain : une intimité formatrice, Actes du XXXIIIe Colloque de la COPIRELEM. DOURDAN. 2007

à l'évolution des pratiques ordinaires sans abandonner les choix essentiels auxquels nous tenons, mais sans pour autant décourager les enseignants.
Nous avons ainsi modifié certaines situations pour accompagner davantage le professeur en simplifiant ou en guidant davantage certaines phases, en réduisant certaines marges de manœuvre, en introduisant des étapes intermédiaires de manière à permettre une meilleure compréhension de l'enjeu de la situation et un meilleur confort dans la conduite de la classe. J'en donnerai quelques exemples.

4.2. Ce que nous avons maintenu et auquel nous tenons

Précisons dans ce paragraphe les choix que nous faisions déjà dans la collection EuroMaths et que nous ne remettons pas en cause dans notre nouvelle collection Opération Maths :
* La distinction entre :
- les concepts fondamentaux d'alignement, de distance, de milieu, d'orthogonalité, de parallélisme ;
- les objets de la géométrie qui progressivement changent de statut : d'objets matériels, ils se muent en formes et dessins, puis en figures graphiques (avant de devenir au Cycle 4 des figures théoriques).
Donnons un exemple concernant le cercle : au Cycle 1, il s'agit d'un objet matériel, appelé disque ou souvent rond, en bois, en plastique, ou en carton. En GS, au CP et au CE1, cet objet matériel va entrer dans des assemblages par juxtaposition puis par superposition, et va servir de gabarit dont les élèves vont tracer le contour pour garder trace de ce qui a été réalisé. On a alors le dessin d'une ligne fermée de courbure constante que l'on désigne par cercle. L'introduction du compas pour tracer de telles lignes permet d'introduire le centre, point où est plantée la pointe sèche du compas, et plus difficilement le rayon puisqu'il n'est pas matérialisé sur le compas, et qu'il doit donc être appréhendé comme une distance. En CE2, le cercle est toujours objet graphique global caractérisé par son centre et son rayon. La distinction avec le disque dont il est le contour est souvent pointée pour mettre en évidence la différence entre une surface (de dimension 2) et une ligne (de dimension 1). En CM1, le cercle va devenir un ensemble de points situés à la même distance d'un point fixe, son centre. Avec ce nouveau point de vue, le cercle devient une figure graphique ayant des propriétés permettant non seulement de la construire, mais aussi de pouvoir être utilisée dans des problèmes, par exemple celui de la construction d'un triangle dont on connaît les dimensions des côtés. Cette question a d'ailleurs fait l'objet d'un article de Caroline Bufl et de Valentina Céli dans la revue N[2].
* L'introduction d'un maximum de notions comme réponses à des problèmes nécessitant de la part des élèves une démarche de recherche.
* Les aller-retours entre des problèmes posés dans le méso-espace et dans le micro-espace pour un certain nombre de concepts de manière à lier les connaissances spatiales spontanées des élèves et les connaissances géométriques qui leurs sont associées.
* Le souci de privilégier les situations nécessitant des phases d'anticipation de manière à mettre en évidence la nécessité d'un travail cognitif dans toute activité géométrique.
* La réflexion sur la place et le rôle de la manipulation dans l'activité : manipulation pour comprendre le problème et/ou le but à atteindre, manipulation pour soutenir la phase de recherche, et surtout manipulation pour valider ou invalider un résultat trouvé par la pensée.
* Une présence permanente de situations de restauration de figures tout au long de chaque année de la scolarité depuis le CP mettant en jeu les concepts fondamentaux d'alignement, de distance, d'orthogonalité, de parallélisme.
* La prise en charge de moyens de contrôle ou de validation en proposant par exemple dans le guide pédagogique les figures restaurées prêtes à être photocopiées sur un transparent.
* La mise en évidence de ce qui est à retenir de l'activité de deux manières, pour mettre en évidence que l'institutionnalisation est un processus : une officialisation « à chaud » avec une proposition de formulation dans le guide pédagogique dans la rubrique « Conclure avec les élèves », puis une institutionnalisation progressive et décontextualisée soutenue par des fiches mémo proposées dans le manuel ou le cahier de matériel suivant les niveaux.

[2] voir référence bibliographique

II - DES EXEMPLES DE CES DIFFÉRENTS CHOIX

1. Un exemple d'aller retours entre le méso espace et le micro espace

Titre de l'étape : Distance de 2 points, milieu d'un segment (étape 9, étape clé[3] en CM1, page 12 du manuel et page 59 du guide)

Activité hors manuel

Dans la cour, placer deux corbeilles comme paniers de basket et chercher la place du ballon pour l'engagement.

Explicitation dans le **guide pédagogique** des objectifs de l'étape et de la place dans la progression :

POURQUOI CETTE ÉTAPE ?

Dans cette étape la distance de deux points et le milieu d'un segment sont les solutions géométriques à des problèmes posés dans l'espace familier (méso espace). Ces deux notions sont l'aboutissement d'un questionnement mathématique à propos d'une activité initiée dans la cour ou le préau puis travaillée sur la feuille de papier.

Partant d'une conception globale spontanée de la distance et du milieu (dans le langage usuel, se placer « au milieu » est souvent synonyme de se placer « entre »), les élèves ont à se construire une image mentale précise de ces notions :

– la distance de deux points nécessite de concevoir la ligne droite comme plus court chemin entre les deux points ;

– le milieu d'un segment est un point du segment, c'est-à-dire qu'il est aligné avec les extrémités du segment ;

– les distances du milieu à chaque extrémité du segment sont les mêmes.

Nous aurons à débusquer des usages inexacts des mots. Par exemple : les élèves parlent souvent du milieu d'une droite, or une droite ou une demi-droite n'ont pas de milieu !

Puis description, dans le guide, de l'activité hors manuel :

ACTIVITÉ HORS MANUEL

Dans la cour ou sous le préau.

PHASE 1 : Présentation de l'activité

Répartir les élèves par groupes de 5 ou 6.

Laisser à disposition de chaque groupe une grande règle, de la ficelle, de la craie, une feuille, un crayon. Placer pour chaque groupe deux piquets (ou deux plots) éloignés d'au moins 4 mètres, symbolisant les poteaux de deux paniers de basket.

Demander aux élèves de chercher et de marquer sur le sol à l'aide d'un objet (pot de yaourt par exemple) l'emplacement du ballon pour l'engagement. Désigner un rapporteur qui notera la manière dont le groupe a procédé (pour la mise en commun ultérieure).

PHASE 2 : Travail par groupes

Plusieurs **stratégies possibles**

1. Pour tracer le segment :
   – mise bout à bout de plusieurs règles, ce qui nécessite de vérifier leur alignement ;
   – glissement de la règle sur sa trace, utilisation d'une ficelle tendue pour contrôler le déplacement de la règle ;
   – etc.
2. Pour rechercher le milieu :
   – mesurage ;
   – pliage en deux d'une ficelle ;
   – recherche visuelle à l'œil puis approximations successives ;
   – etc.

Vérifier rapidement les emplacements trouvés.

PHASE 3 : De retour en classe

Mise en commun des stratégies utilisées et discussion au sujet de leur efficacité.

Conclusion provisoire

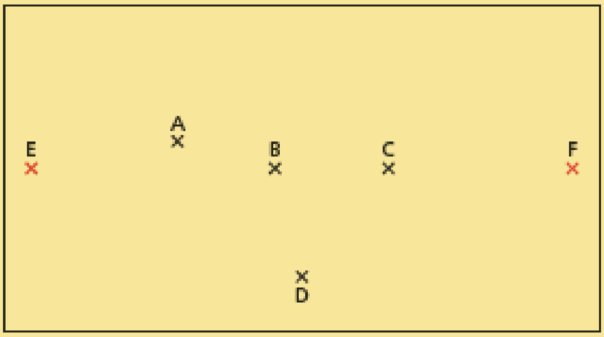
Pour trouver l'emplacement du ballon pour l'engagement, il a fallu trouver le milieu sur la ligne droite qui joint les deux poteaux.

[3] Les étapes clés sont les étapes au cours desquelles les élèves découvrent une nouvelle notion, un nouvel aspect d'une notion déjà connue ou un lien entre plusieurs notions étudiées préalablement séparément. Elles sont caractérisées par le fait qu'elles débutent par une activité hors fichier décrite en détail dans le guide pédagogique.

Reprise dans le manuel de l'activité précédente, sur une représentation plane du méso-espace :

1 Sur ce plan d'un terrain de basket, les points E et F marquent les emplacements des deux paniers. Lors de l'engagement du match, le ballon doit être placé entre les deux paniers, exactement au milieu.

a Décalque ce plan, puis place à vue d'œil et à main levée le point I où doit être le ballon lors de l'engagement.
Vérifie avec les instruments de ton choix. Quel(s) instrument(s) as-tu utilisé(s) ?



b Pour chacun des points A, B, C et D, explique pourquoi ils ne peuvent pas convenir pour l'engagement.

c Alice dit que le milieu du segment [EF] est à la même distance des points E et F et qu'il est aligné avec eux. A-t-elle raison ?

Mémo

Explicitation de la démarche dans le guide :

EXERCICE 1 > TRACE ÉCRITE

Reprise de l'activité collective en la transposant dans l'espace de la feuille de papier.
Travail sur le papier calque, ou sur la photocopie de la page 24.
La question a. permet aux élèves de revenir sur le positionnement du milieu en traçant le segment [EF] et en en cherchant le milieu.
La question b. a pour but de faire formuler avec précision les deux conditions pour que ce point soit le milieu du segment [EF].

Réponses

A n'est pas sur le segment et n'est pas à la même distance de E et de F.
B et C sont sur le segment mais ne sont pas à la même distance de E et de F.
D est bien à la même distance de E et de F mais il n'est pas sur le segment.

Conclure avec les élèves

La distance entre deux points est la longueur du segment qui les joint.
Le milieu d'un segment est le point qui est à la fois sur le segment et à la même distance des deux extrémités.
Les élèves peuvent accompagner cette conclusion du dessin d'un segment et de son milieu (on prendra soin de faire tracer un segment en position oblique).
Lire et commenter les paragraphes 5 et 6 du mémo page 43.

Nous proposons une démarche analogue pour étudier en CM1 :
- le cercle comme ensemble de points (étape 12, étape clé, page 30 du manuel
- l'orthogonalité (étape 28, étape clé, page 62 du manuel, page 92 du guide)
- le parallélisme (étape 32, étape clé page 70 du manuel, page 99 du guide)

2. Un exemple relatif à la restauration de figures faisant intervenir les alignements

Titre de l'étape : Alignement : reproduire des figures (CM1, étape 16 page 38 du manuel, page 64 du guide)
Ce n'est pas une étape clé car le concept d'alignement est étudié depuis le CP.
Dans le **guide pédagogique,** explicitation des objectifs de l'étape et de la place dans la progression :

POURQUOI CETTE ÉTAPE ?

• C'est une étape fondamentale pour amorcer le travail d'analyse géométrique des figures. La notion d'alignement a déjà été travaillée tout au long du cycle 2. Ici, les élèves vont mobiliser leurs connaissances pour reproduire une figure. Il s'agit de chercher comment une figure a été construite et de la reproduire en utilisant les propriétés identifiées.
• La contrainte consistant à reproduire la figure modèle en plus grand (ou en plus petit) permet de bloquer les procédures de mesurage et donc de centrer le travail sur les autres propriétés de la figure : la figure construite et la figure modèle sont semblables, ce sont « les mêmes » mais « en plus grand » ou « en plus petit ».
• L'« analyse géométrique » de la figure est guidée pas à pas, le vocabulaire est précis : des points alignés sont des points qui sont sur une même droite ; deux points sont toujours alignés ; deux segments portés par la même droite ont leurs extrémités qui sont alignées ; etc.

Dans le manuel : Exercice Dirigé

1 Pour reproduire la figure modèle, tu cherches des alignements.

a **Le point K est-il aligné avec les points C et F ?**
Vérifie avec ta règle.

b **Le point G est-il aligné avec les points J et D ?**
Vérifie avec ta règle.

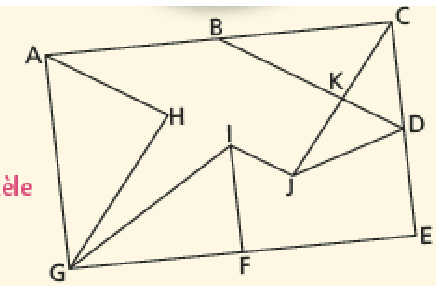
c **Le point H est-il aligné avec les points B et G ?**
Vérifie avec ta règle.

d À vue d'œil, **quels points te paraissent alignés avec les points A et I ?**
Note-les sur ton cahier puis vérifie avec ta règle.

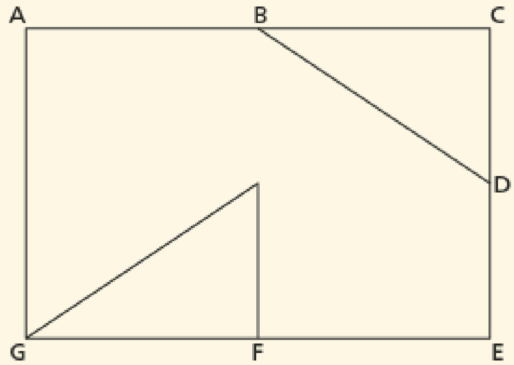
e **Vérifie** que le point B est le milieu du segment [AC].

f Quelle est la position du point D sur le segment [CE] ?
Quelle est celle du point F sur le segment [GE] ?

g Sur un calque, **reproduis** puis **complète** la figure ci-contre pour qu'elle soit semblable au modèle.



modèle



Dans le **guide pédagogique**, on trouve une proposition de gestion de cet exercice :

EXERCICE 1 > EXERCICE DIRIGÉ

Observation collective de la figure modèle et de la figure incomplète.
Présenter le but de l'activité : compléter (on dit aussi restaurer) la figure incomplète pour qu'elle soit semblable au modèle. Donner quelques exemples de figures semblables sur des écrans tactiles notamment. Faire lire la bulle du panda. Rappeler si nécessaire ce que signifie des points alignés : ce sont des points qui sont situés sur une même droite.
Il est important d'entrainer les élèves à commencer par observer la figure sans se précipiter sur leurs instruments, à faire des hypothèses sur les positions de certains points, sur les éventuelles égalités de longueur, à noter les résultats de cette observation fine non instrumentée – ce qui permet d'utiliser le vocabulaire adapté – puis à vérifier leurs hypothèses avec les instruments.
Traiter les questions a. et b. collectivement, puis les questions c. à f. individuellement.
Pour les vérifications, les élèves peuvent placer une feuille de papier calque sur le modèle ou utiliser la fiche photocopiée. Ils tracent ou prolongent des segments afin de faire apparaitre les composants de la figure qui permettent de la reproduire et qui ne sont pas tracés. Une fois l'analyse ainsi menée pas à pas, il est possible de « restaurer » la figure agrandie, c'est-à-dire la compléter avec les éléments manquants, puis « gommer » ensuite les éléments qu'ils ont dû tracer mais qui ne sont pas sur le modèle.
Donner le transparent pour une vérification individuelle.

Ainsi qu'une conclusion institutionnalisant une méthode d'analyse géométrique d'une figure :

Conclure avec les élèves

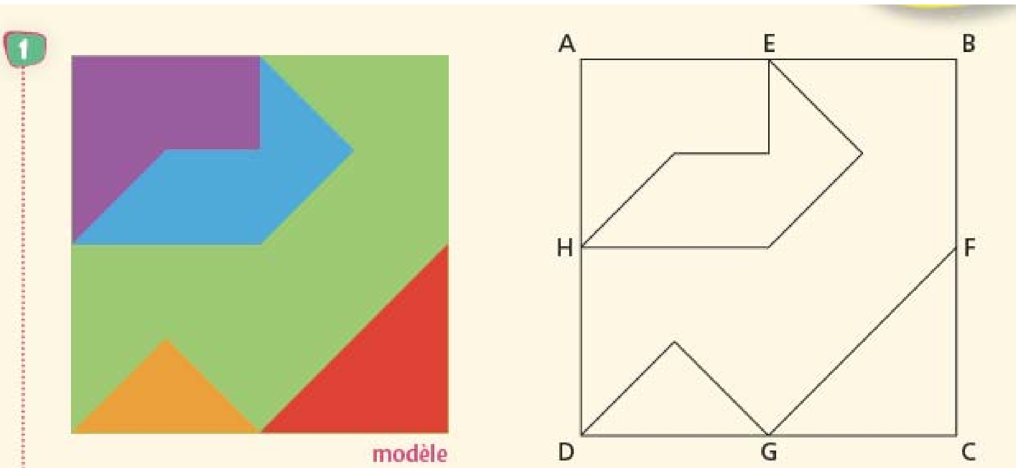
Pour reproduire une figure en plus grand, ou en plus petit, il faut l'analyser, c'est-à-dire repérer des alignements, des milieux, etc. Pour cela il faut souvent intervenir sur la figure : joindre des points, prolonger des segments.

Faire écrire cette conclusion et faire remarquer que, lorsque l'on reproduit, on trace souvent beaucoup plus de traits que ceux que l'on voit sur le modèle. Ces traits qui ont servi pour la construction peuvent être ensuite effacés.

Après cette situation très « guidée », il nous est possible de proposer des situations de restaurations de figures dans lesquelles l'analyse géométrique de la figure est davantage à la charge de l'élève.

Exemple :

Titre de l'étape : Les figures planes : les analyser, les reproduire (Étape 56 page 118 du manuel, page 146 du guide)



a **Observe** sur la figure de droite les tracés qui délimitent les couleurs du modèle.

b **Retrouve** les traits qui ont servi à construire cette figure mais qui ont été effacés. Pour cela, **repère** des milieux, des alignements.

c **Reproduis** ensuite le modèle dans un carré de côté 8 cm.

Des situations de restauration de figures sont proposées du CP au CM2 pour travailler en fonction de la figure choisie et du niveau de classe :

- l'alignement dès le CP ;
- l'angle droit dès le CE1 ;
- la notion de milieu dès le CE2 ;
- l'orthogonalité dès le CE2 ;
- le parallélisme dès le CM1.

3. L'importance de l'anticipation, le rôle de la manipulation, les modes de validation

3.1 Exemple 1 : les pavés droits

Titre de l'étape : les pavés droits, du plan à l'espace (Étape 88, étape clé en CM1, page 182 du manuel, page 204 du guide).

Il s'agit d'une étape clé car c'est un premier travail sur les patrons de solides.

POURQUOI CETTE ÉTAPE ?

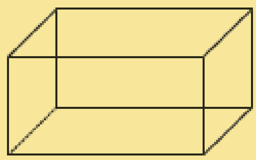
Dans l'étape 83, les élèves travaillaient tout d'abord avec les solides réels de l'espace, puis reprenaient les mêmes activités sur les représentations planes de ces solides.
Dans cette étape, il s'agit de la démarche inverse : à partir des représentations planes d'un pavé droit (perspective cavalière et patron) les élèves doivent reconstruire mentalement le pavé en dimension 3.
Dans la première activité hors manuel les élèves apprennent à construire des cubes et des parallélépipèdes rectangles (pavés droits) avec des faces prédécoupées pour mettre en évidence la forme des faces et leur nombre. Pour réaliser ces constructions, nous proposons de mettre les élèves en situation de prévoir ce qui leur faut comme matériel, et de le choisir dans des lots de polygones divers (carrés de diverses tailles, rectangles de diverses formes, losanges, parallélogrammes), de manière à solliciter les images mentales qu'ils se sont construites de ces solides et non de dénombrer seulement le matériel nécessaire en manipulant un solide réel.
La deuxième activité consiste à mettre à plat en un seul morceau un pavé ou un cube en carton en le découpant selon les arêtes. Elle nécessite de la part des élèves l'anticipation de l'effet du découpage. Cette activité conduit généralement à l'obtention de plusieurs patrons différents pour le même solide.
Dans l'exercice 1 du manuel, les élèves doivent anticiper les segments qui vont coïncider pour former une arête et les points qui formeront un même sommet lorsque l'on construira le solide après avoir découpé le patron. Nous proposons un patron de parallélépipède rectangle dans la mesure où les longueurs d'arêtes étant différentes, le travail de repérage est facilité. (Une application technique de ce travail sur les relations d'adjacence est le choix de la position des « languettes » pour la construction d'un solide en carton.)

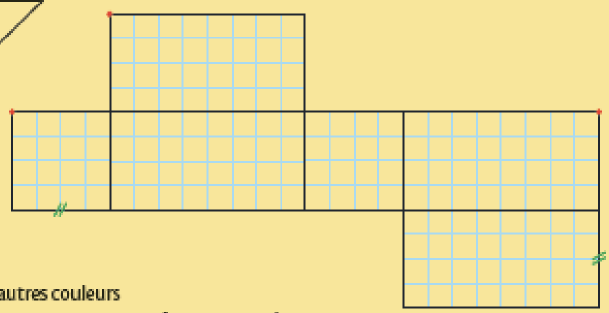
Activités hors manuel
Construire un pavé droit et un cube en agençant des polygones.
Découper les polyèdres construits pour obtenir des patrons (mise à plat en un seul morceau).

Activité dans le manuel
Recherche des relations d'adjacence

Cette activité se termine par une première conclusion.

1





a Sur ce patron de pavé droit, les traits verts indiquent les segments qui vont former une arête lorsque le pavé sera construit.
Reproduis le patron sur une feuille quadrillée et continue d'indiquer avec d'autres couleurs les segments qui vont coïncider au montage pour former une arête.

b Sur ce patron, les points rouges indiquent les sommets qui vont coïncider lorsque le pavé sera construit.
Sur ton patron, continue d'indiquer avec d'autres couleurs les sommets qui vont coïncider au montage.

c Vérifie tes prévisions en construisant le pavé droit.

Dans le guide : proposition de gestion de cet exercice :

EXERCICE 1 > TRACE ÉCRITE

Lecture et commentaire de l'ensemble de l'exercice. Bien expliquer aux élèves qu'il s'agit de prévoir, avant de découper le patron, ce qui va se passer lorsque l'on construira le solide, c'est-à-dire qu'il faut trouver les faces qui seront adjacentes (qui se toucheront par une arête commune) quand le solide sera construit.
Les élèves ont plusieurs tâches à effectuer qu'il faudra bien distinguer :
– ils reproduisent le patron du manuel sur une feuille quadrillée (ou ils reçoivent la photocopie du patron) ;
– sans découper, ils doivent repérer les segments qui coïncideront au montage pour former une arête et les colorier de la même couleur (une couleur par arête) ; un exemple est donné sur le patron (question a) ;
– toujours sans découper, ils doivent chercher les points qui coïncideront au montage pour former un sommet et les colorier de la même couleur (une couleur par sommet) ; un exemple est donné sur le patron (question b).
Travail individuel, confrontation à deux. Puis chaque élève découpe son patron et construit le solide pour vérifier.

Erreurs possibles :
– utiliser la même couleur pour un nombre incorrect d'arêtes (ou de sommets) ;
– colorier de la même couleur des arêtes (ou des sommets) qui ne coïncident pas ;
– oublier des arêtes ou des sommets.
Si des élèves ont beaucoup de difficulté, l'enseignant pourra les autoriser à découper le patron et à faire des vérifications locales de leur prévision.
L'enseignant pourra faire recenser le nombre d'arêtes et le nombre de faces qui partent d'un sommet. Il pourra aussi faire constater qu'une arête est toujours commune à deux faces.

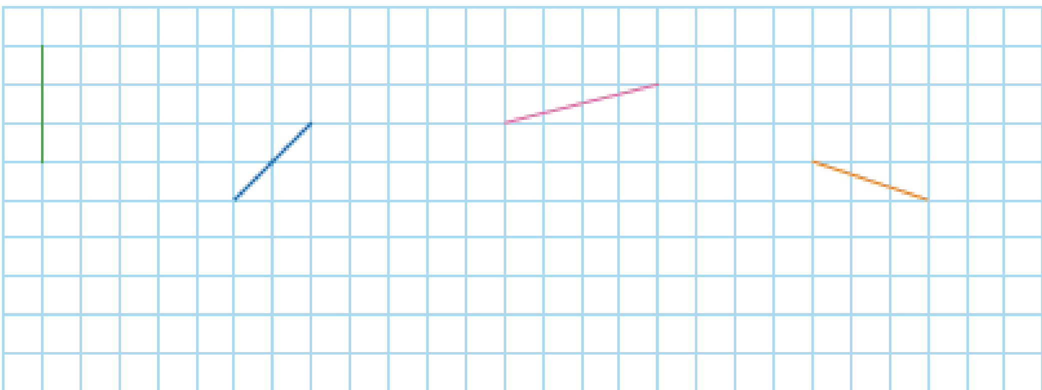
Conclure avec les élèves
Dans un parallélépipède rectangle, un sommet est commun à trois faces et, comme pour tous les polyèdres, une arête est commune à deux faces.

3.2 Exemple 2 : propriétés géométriques du quadrillage

« Prévoir » avant de « faire », en réfléchissant aux caractéristiques du papier quadrillé.

Titre de l'étape : les polygones usuels (page 93 du manuel, page 120 du guide)

Sans utiliser ton équerre mais à l'aide du quadrillage de ton cahier et de ta règle, construis un carré vert, un carré bleu, un carré rose, un carré orange.
Reproduis d'abord le côté déjà tracé.



3.3 Exemple 3 : changement de statut des objets géométriques

Accompagner le changement progressif du CP au CM2 du statut des objets géométriques.

Exemple en CM1 :
Titre de l'étape : Les figures planes (étape 47 page 10 du manuel, page 127 du guide)

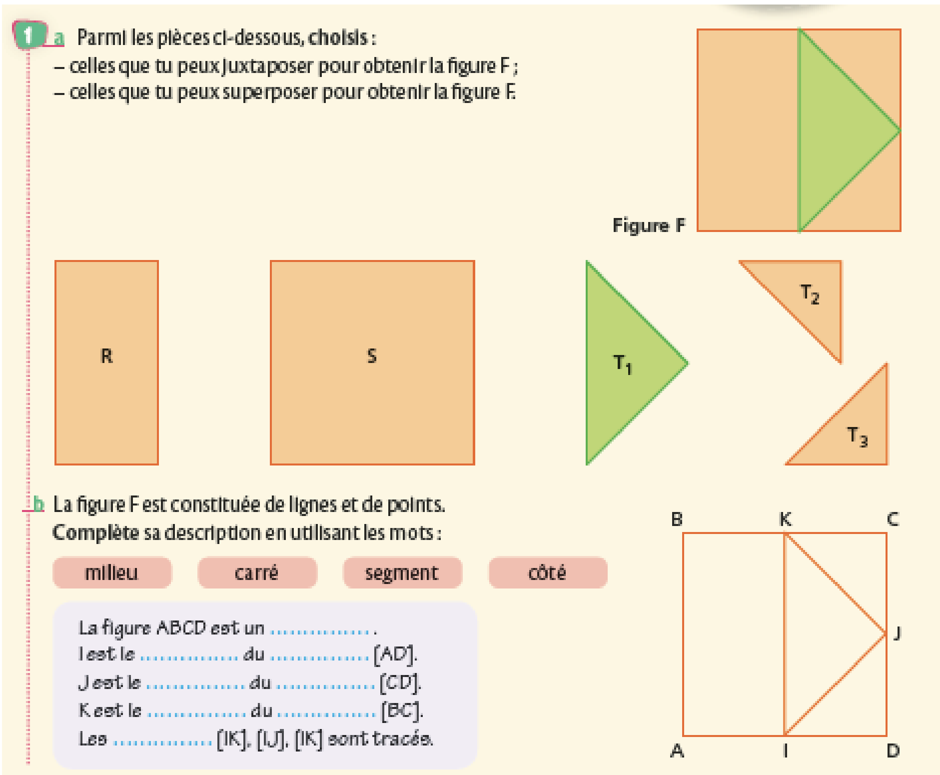
Dans le guide pédagogique : l'explicitation de ce changement de statut.

POURQUOI CETTE ÉTAPE ?

Depuis plusieurs années, les élèves ont développé des compétences géométriques et linguistiques pour décrire des assemblages de formes.
Dans cette étape, c'est le changement de regard sur les objets de la géométrie que nous prenons comme objet d'étude : un « dessin géométrique » peut être lu comme un assemblage de pièces obtenu soit par juxtaposition, soit par superposition. Cette double approche va permettre d'enrichir la perception des élèves et conduire à la notion de « figure » comme étant constituée non de pièces matérielles, mais seulement de lignes et de points.
Les figures que les élèves vont décrire sont composées de figures simples (sous-figures) bien connues des élèves, dont les positions relatives doivent être décrites avec précision pour que l'on puisse identifier sans ambiguïté la figure choisie. Le mesurage des côtés des carrés ou des rectangles n'est pas le but ici. C'est pour inciter les élèves à nommer les différents éléments par leur nom (sommet, centre, diamètre, rayon, etc.) que nous n'avons pas introduit systématiquement des lettres pour désigner les points des figures.

Rappelons que la différence essentielle entre une description et un message de construction est que, dans une description, il n'y a pas à hiérarchiser les informations que l'on donne. Par ailleurs, comme on dispose de la famille des figures, la description peut ne pas être exhaustive, il suffit qu'elle soit discriminante.

Dans le manuel : Exercice dirigé


1 a Parmi les pièces ci-dessous, choisis :
– celles que tu peux juxtaposer pour obtenir la figure F ;
– celles que tu peux superposer pour obtenir la figure F.

b La figure F est constituée de lignes et de points.
Complète sa description en utilisant les mots :

milieu | carré | segment | côté

La figure ABCD est un ....
I est le .... du .... [AD].
J est le .... du .... [CD].
K est le .... du .... [BC].
Les .... [IK], [IJ], [IK] sont tracés.

Puis nous proposons une étude plus systématique des propriétés des triangles et des quadrilatères dans des situations de : description ; jeu de portrait ; restauration de figures ; construction en suivant un programme ou un schéma codé.

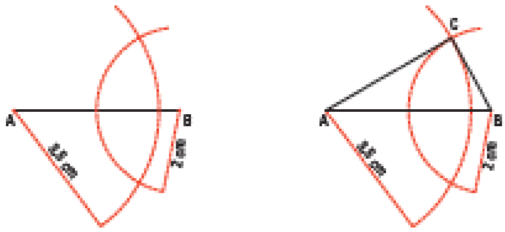
4. Le choix en CM2 d'une progression dans l'étude des figures planes qui s'appuie sur les propriétés permettant leur construction

4.1. Le cercle

Comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point fixe.
- dans le « méso-espace » : placer 18 palets à 3 m d'un piquet ;
- dans le « micro-espace » : placer 20 points à 3 cm d'un point A.

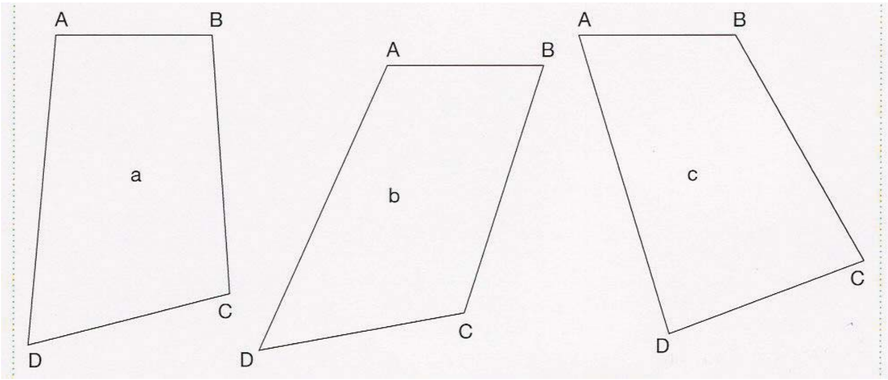
4.2. Le triangle

Comme seul polygone entièrement déterminé par les longueurs de ses côtés : C'est le seul polygone « rigide ».
Puis recherche de la condition d'existence d'un triangle

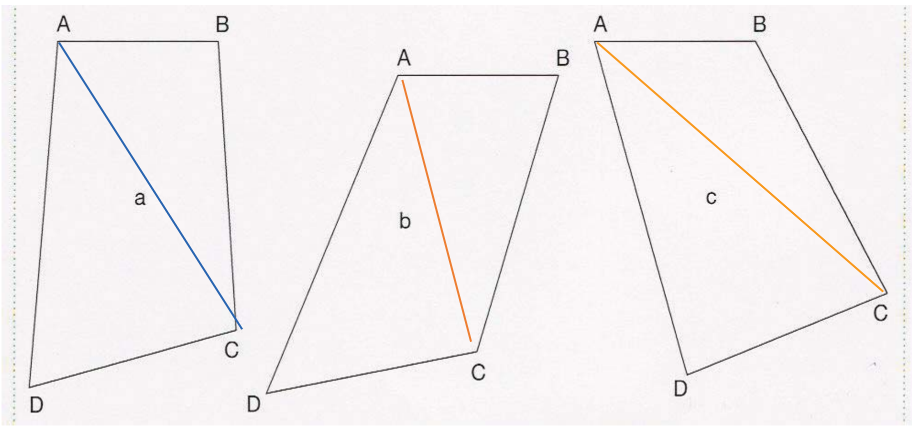


4.3. Les quadrilatères

Comme figures déformables et donc non caractérisées par la longueur de leurs côtés, d'où la nécessité de penser un autre élément pour les caractériser.
Identifier un quadrilatère parmi plusieurs lorsque tous ont des côtés de même longueur :

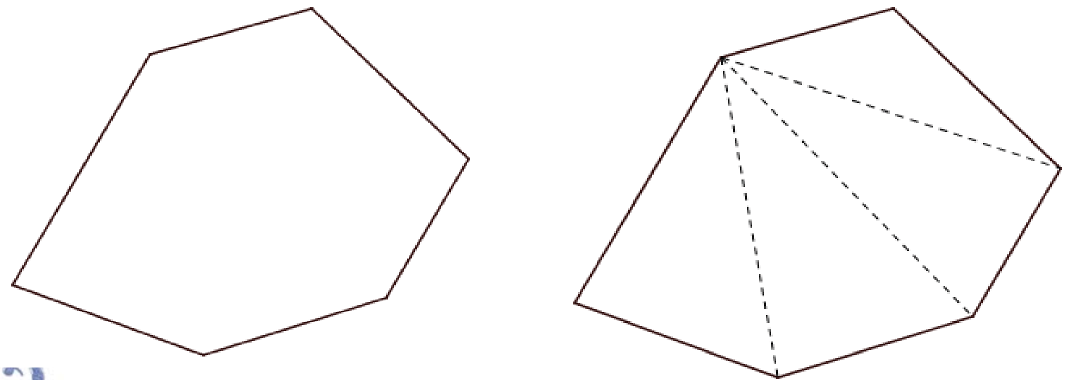


La donnée de la mesure d'une diagonale ou d'un angle est la solution du problème.



4.4. Les polygones

Comme pouvant être reproduits par triangulation.



5. Un exemple de situation sur lequel nous avons choisi en CM1 de simplifier la recherche : le napperon

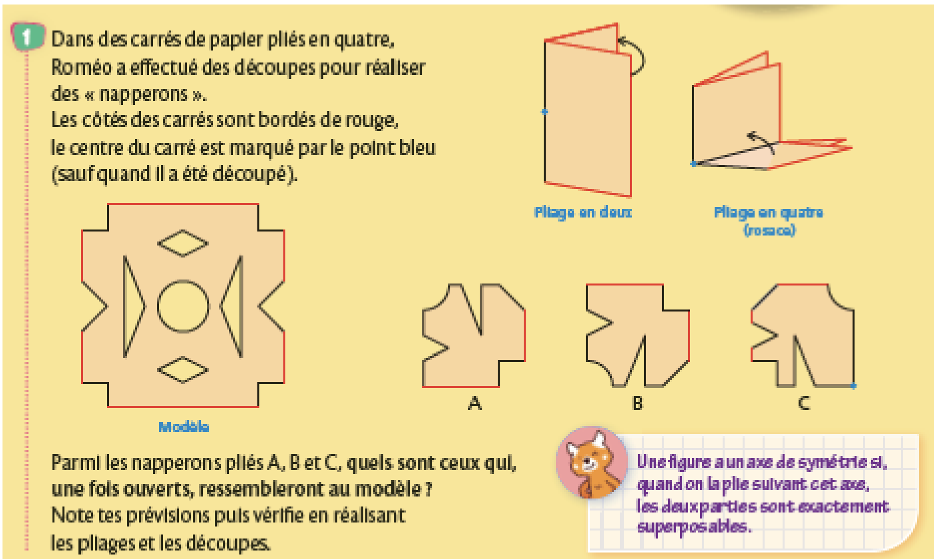
Titre de l'étape : Symétrie par rapport à un axe, étape clé en CM1 (étape 67 page 140 du manuel page 166 du guide)

POURQUOI CETTE ÉTAPE ?

• Pour réactiver les connaissances des élèves sur la notion de symétrie axiale, nous proposons une situation qui consiste à reproduire un « napperon » avec du papier, par pliage et découpage. Il s'agit de prendre en compte le nombre de découpes, leurs formes, leurs positions relatives et leur orientation.
Les formes des découpes sont choisies de manière à ce que les élèves fassent fonctionner des connaissances implicites issues de l'expérience (parfois appelées « théorèmes en acte » ou modèle implicite d'action) pour obtenir le résultat souhaité. Par exemple, pour obtenir une découpe en forme de triangle isocèle, les élèves coupent perpendiculairement au pli, ce qui revient en fait à appliquer implicitement la propriété : « l'axe de symétrie d'un triangle isocèle est perpendiculaire à la base ».
• Cette situation met en avant le rôle de l'anticipation : il est nécessaire de faire des hypothèses, d'anticiper l'action avant de l'exécuter. La manipulation est là pour valider ou invalider les décisions prises.

Activité hors manuel
Revoir différentes manières de faire des rosaces à l'aide de pliages en deux, en quatre, en huit.
Réaliser des découpages sans contraintes dans du papier plié. Commenter les réalisations. Se rappeler ce qu'est un axe de symétrie.

Activité dans le manuel :
Identifier le découpage permettant d'obtenir un napperon déjà réalisé. Ce choix a pour but de permettre aux enseignants de se sentir plus à l'aise avec l'activité et donc de la proposer à leurs élèves, et permettra, en CM2, de proposer la situation du napperon sans la simplifier.


1 Dans des carrés de papier pliés en quatre, Roméo a effectué des découpes pour réaliser des « napperons ».
Les côtés des carrés sont bordés de rouge, le centre du carré est marqué par le point bleu (sauf quand il a été découpé).

Parmi les napperons pliés A, B et C, quels sont ceux qui, une fois ouverts, ressembleront au modèle ?
Note tes prévisions puis vérifie en réalisant les pliages et les découpes.

Une figure a un axe de symétrie si, quand on la plie suivant cet axe, les deux parties sont exactement superposables.

EN GUISE DE CONCLUSION : DES LIENS AVEC LES ARTS PLASTIQUES

Pour notre plaisir, je vous propose quelques œuvres d'arts présentes dans notre collection illustrant certains concepts géométriques.

Segments

François Morellet
5 lignes au hasard
1971

Angles droits

François Morellet
Relache N°2
1992

Cercles

Kenneth Noland
Mysteries:
Excavate the past
2001

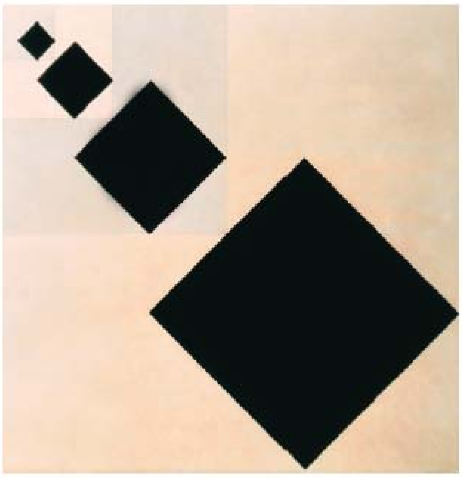
Carrés et rectangles

Carrés

Aurélie Nemours
Motion de points

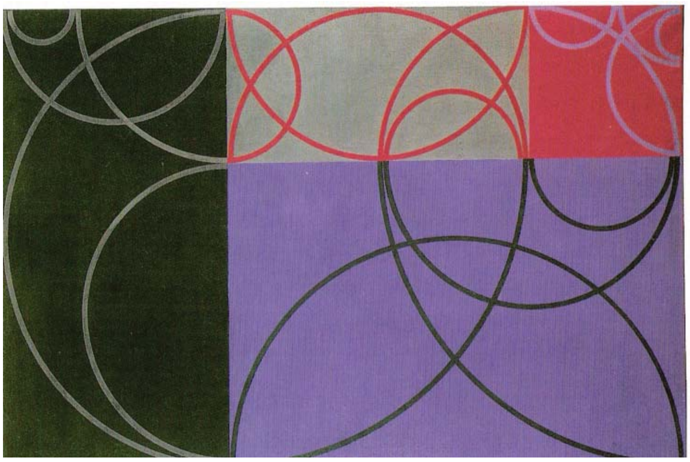
François Morellet
Négatif 11

Diagonales du carré



Théo Van Doesburg
Composition arithmétique
1930

Rectangles et arcs de cercles



Max Bill
Chronographie magique

BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire* Thèse de doctorat Université Bordeaux 1.

BULF C., CELI V. (2016) Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire une transition clé : du gabarit au compas, *Grand N,* **97**, 21-58.

BULF C., CELI V. (2015) Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3, *Grand N,* **96**, 5-33.

DUCEL Y., PELTIER M-L. (1989) « La fleur » Une approche par le dessin géométrique CM2 - 6ème, *Bulletin de l'APMEP*, **371**. 659-669.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de Sciences cognitives,* **11**, 175-193.

PERRIN GLORIAN M-J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math Ecole*, **222**, 28-38.

PELTIER M-L. (2001) "Le napperon" La symétrie axiale à l'école élémentaire, *Grand N*, **68**, 17-27.

PELTIER M-L. (2003) "Le napperon" un problème pour travailler la symétrie axiale, *Concertum, carnet de route de la COPIRELEM,* tome 2, 161-172, Arpeme.

PELTIER M-L. (2003) "la fleur", *Concertum, carnet de route de la COPIRELEM,* tome 2, 183-189, Arpeme.

MISE EN ŒUVRE LOCALE DU TUTORAT MIXTE DANS LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS : QUELS IMPACTS SUR L'ACTIVITE DU FORMATEUR ESPE ?

Pierre-Alain FILIPPI
Doctorant & Formateur ESPE, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE
Laboratoire ADEF. Équipe ERGAPE
pierre-alain.filippi@univ-amu.fr

Résumé
Dans un contexte de bouleversements dus aux réformes ininterrompues et à la multiplication des prescriptions nationales, puis à leur interprétation locale, se pose la question de l'organisation du travail. Dans cette communication, nous nous intéressons aux relations entre formation et analyse du travail, en nous appuyant sur une intervention à visée de formation, conduite à la demande et avec le concours de quelques formateurs de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation qui s'interrogent sur les contraintes et ressources leur permettant, à nouveau frais, d'exercer leur métier de formateur d'enseignants dans des espaces de travail renouvelés (Moussay, Étienne, & Méard, 2009; Serres & Moussay, 2014). Plus précisément, nous avons fait le choix de présenter la mise en œuvre locale du tutorat mixte accompagnant cette refondation sous la forme d'une étude de cas (Passeron & Revel, 2005) qui révèle les tensions et les impasses auxquelles sont soumis aujourd'hui les formateurs d'enseignants.
Ce travail de recherche s'inscrit dans la tradition de l'intervention ergonomique (Daniellou, 1996), au sein du cadre théorique de l'ergonomie de l'activité des professionnels de l'éducation (Amigues, Faïta, & Kherroubi, 2003; Faïta & Saujat, 2010; Félix, 2014; Felix & Saujat, 2014), selon une approche clinique de l'activité (Clot, 1999, 2008 ; Clot et Leplat, 2005).

I - INTRODUCTION

Par la loi du 8 juillet 2013-article 68, l'État décide d'utiliser le principe de l'alternance entre l'université et les établissements scolaires pour modifier la formation professionnelle initiale des enseignants. Les Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation (ESPE) ont alors la responsabilité d'un enjeu majeur, celui de professionnaliser la formation des enseignants afin que ces derniers soient en mesure de faire face aux grands défis éducatifs contemporains que doit relever l'école du XXIème siècle. Dans ce contexte, les textes fondateurs préconisent de réunir des équipes pédagogiques pluricatégorielles et pluridisciplinaires : universitaires, formateurs ESPE, tuteurs de terrain, personnels d'encadrement, partenaires de l'école, etc. en vue de contribuer, au-delà des spécificités et des expertises disciplinaires, à l'acquisition d'une culture commune à tous les professionnels de l'enseignement, de l'éducation et de la formation. Conformément à cette loi, cette culture commune ne peut se construire en dehors de l'analyse des situations concrètes de travail partagées et partageables entre futurs professionnels et formateurs.

Notre communication présentera quelques résultats issus d'une étude portant sur les conditions initiales de mise en œuvre d'un dispositif local à l'Ecole Supérieure du Professorat et de l'Éducation (ESPE)[1] de l'académie d'Aix-Marseille. Nommé « TD délocalisé », ce dispositif fondé sur le principe d'un tutorat mixte entre différents partenaires concerne l'ensemble des parcours de formation de la deuxième année du Master MEEF au moment de l'étude (Filippi, 2016; Filippi, Félix, & Saujat, à paraître).

Nous ferons une brève présentation de la méthodologie plurielle retenue, puis nous rendrons compte de la manière dont ce dispositif s'est déployé avant de nous intéresser à la prescription qui l'organise et à ses effets sur le travail réel des professionnels concernés en guise de premier résultat.

Par la suite, nous décrirons rapidement comment, dans la continuité de l'étude, s'est constitué un collectif interdisciplinaire et inter-métiers de formateurs exerçant à l'ESPE dans le but de collaborer à la

[1] http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid67079/tout-comprendre-des-espe-la-f.a.q.html, consulté en janvier 2018.

construction d'actions de formation et, ce faisant, de (re)construire des règles communes au métier de formateur d'enseignants.

Enfin, nous présenterons les éléments que nous convoquons depuis le cadre théorique de l'ergonomie de l'activité des professionnels de l'éducation (Amigues et al., 2003; Faïta & Saujat, 2010; Félix & Saujat, 2015) selon une approche clinique de l'activité (Clot, 1999; Clot & Leplat, 2005) pour observer et analyser, en situation de travail, l'activité de ces formateurs. Nous rappellerons le rôle que joue l'observation soumise à une co-analyse entre praticiens et chercheurs au sein du cadre méthodologique des autoconfrontations développé dans une approche ergonomique de l'activité des professionnels de l'éducation en l'illustrant par quelques résultats empiriques issus de brefs extraits d'une autoconfrontation croisée entre deux professionnels faisant partie du collectif de l'intervention.

II - PRENDRE LA MESURE DE CE NOUVEAU CONTEXTE

Le dispositif « TD délocalisé » a été présenté aux formateurs de l'ESPE à la rentrée 2014. Dans le cadre de cette nouvelle organisation de la formation initiale, les formateurs se verront contraints de renoncer à une modalité imparfaite mais bien connue dans le paysage de la formation : « la visite-conseil » (Chaliès, Cartaut, Escalié, & Durand, 2009; Moussay & Serres, 2015; Mouton, 2003). Le lien direct avec « le terrain » doit se repenser[2], ce rapport au terrain devant céder sa place à un nouveau dispositif aux visées plus « professionnalisantes ». Or, face à cette nouvelle prescription qui dit « quoi faire », accompagnée d'injonctions sur « ce qu'il ne faut plus faire » sans dire « comment faire » (Amigues, 2009), les formateurs ESPE s'interrogent.

Pour conduire cette étude sur ces nouvelles modalités de relation avec le terrain, il nous est alors apparu important de faire précéder l'approche clinique et ergonomique mobilisée par l'équipe Ergape[3] par une phase de diagnostic (Saujat, 2009). Nous avons utilisé une méthode mixte : des questionnaires ont été adressés aux référents ESPE de tous les parcours de formation, à l'ensemble des professeurs et personnels d'éducation stagiaires et à leurs tuteurs ; et quelques formateurs ont été filmés lors de leur TD délocalisé et ont été autoconfrontés à leurs images. L'ensemble des résultats de cette phase de diagnostic a été l'objet d'un mémoire de Master Recherche (Filippi, 2016).

III - LE TD DELOCALISE, COMME NOUVELLE MODALITE D'ACCES AU TERRAIN

1 Une prescription initiale rapidement transformée par l'institution

La mise en œuvre de ce dispositif est confiée aux formateurs ESPE par la création de la mission de référent[4].

Il leur revient l'obligation de l'organiser « *selon des situations de formation capables d'articuler les enseignements prodigués à l'ESPE et l'expérience acquise en établissement dans le cadre de l'alternance* ». Plus précisément, ce TD délocalisé[5] est supposé permettre « *des échanges concrets entre étudiants et/ou fonctionnaires stagiaires, tuteurs et formateurs sur des problématiques professionnalisantes référées au vécu commun de séquences pédagogiques ou éducatives* ».[6]

Pour en schématiser les contours, dans sa prescription de départ, ce TD délocalisé est une situation de travail de 2 x 2h pour chaque professeur stagiaire (PSTG) organisée autour de deux temps forts :

- Une situation initiale de travail observée par un groupe composé *a priori* d'un formateur ESPE (le référent), de tuteurs de terrain, éventuellement d'autres professionnels et d'un groupe de 2 à 15 PSTG.

---

[2] Cette suppression concerne uniquement les formateurs ESPE.

[3] ERGonomie de l'Activité des Professionnels de l'Education.

[4] Guide des stages en école et EPLE. (2014-2015).

[5] Car géographiquement délocalisé de l'ESPE et organisé dans les établissements.

[6] Guide des stages. Le TD délocalisé en M2. ESPE Aix-Marseille. (2014)

- Un échange entre les membres de ce même groupe suite à cette observation, théoriquement complété par le professionnel observé.

Figure 1. Modélisation d'un TD délocalisé "théorique"

Présentée en octobre 2014, cette prescription va rapidement évoluer durant le premier semestre de l'année universitaire 2014-2015, alors que se mettent en place les premières organisations concrètes du dispositif sur le terrain. Moins de trois mois après la rentrée universitaire, une fiche technique[7] viendra faire évoluer la prescription. Elle apportera plusieurs modifications. En voici deux aux conséquences significatives :

- Sur les aspects de conception, elle précisera la gestion administrative indiquant les voies de transmissions des documents administratifs et en fournissant le téléchargement des formulaires *ad hoc*.
- Elle précisera la taille des groupes, que le précédent texte laissait « à l'appréciation » du référent, l'usage de « traces de l'activité » et la composition de « l'équipe pédagogique plurielle »[8].

Cette re-prescription, alors que les référents commençaient à mettre en œuvre concrètement ce dispositif, va impacter notablement leur activité. En effet :

- Réduire les effectifs par établissement va accroitre le nombre de TD délocalisés à organiser pour un formateur ESPE car le nombre de PSTG qu'il encadre est inchangé. Deux conséquences : on multiplie d'autant le nombre d'établissements à solliciter, de créneaux à identifier dans les emplois du temps, de formateurs de terrain à solliciter… et de documents administratifs à constituer et transmettre. Ce qui va être très « couteux » en temps et en énergie pour les formateurs ESPE.
- Exiger une équipe pédagogique plurielle va transformer ce pour quoi ce dispositif a été conçu. Inclure des CPC[9], DEA[10] ou chefs d'établissement risque de compliquer l'exposition de « traces de l'activité » des PSTG que ces professionnels seront susceptibles de valider en fin d'année.

2 Le travail réel : les multiples visages du TD délocalisé.

Les résultats issus de la phase de diagnostic conduite en 2014-2015 permettent d'entrevoir plusieurs modalités d'organisation de ce dispositif. Voici, brièvement décrits, cinq exemples illustrant les situations les plus fréquemment recensées[11] :

---

[7] Fiche technique : Mise en œuvre des TD délocalisés en école ou EPLE. ESPE Aix-Marseille (12/2014).

[8] idem

[9] Conseiller Pédagogiques de Circonscription qui sont les collaborateurs directs des Inspecteurs qui iront titulariser les professeurs stagiaires en fin d'année de formation.

[10] Directeurs d'écoles d'application.

[11] Filippi, Felix, Saujat déjà cité.

1. Dans un collège, un professeur stagiaire en mathématiques travaille avec ses élèves en présence d'observateurs (2 autres PSTG, 3 tuteurs de terrain, et 1 référent ESPE). Une fois le cours terminé, tous vont se réunir dans la classe, hors de la présence des élèves et revenir collectivement sur la situation observée pendant 1h.
2. Dans le CDI d'un lycée, une référente ESPE, 3 tutrices et 3 PSTG du parcours documentation vont se réunir durant 2h30. Une des tutrices présentera « son » CDI puis, ils reviendront sur des questions spécifiques du métier de professeur documentaliste ou des difficultés qui se présentent dans la pratique des débutants.
3. Dans une école maternelle de REP+, en compagnie de la référente ESPE, 10 PSTG se répartissent, durant 1h30, dans deux classes afin d'observer 2 PEMF[12] à l'œuvre face à leurs élèves. Puis ce groupe va se réunir 2h en vue de se questionner à partir des pratiques de ces deux enseignantes expérimentées.
4. A la même période, à l'ESPE, un formateur réunira une quinzaine de PSTG afin de faire émerger verbalement les principales difficultés auxquelles ils font face depuis trois mois dans leur enseignement. Ce travail s'effectuera en l'absence de tuteurs de terrain et sans « traces de l'activité ».
5. Durant cette année 2014-2015, d'autres professeurs stagiaires n'auront qu'une vague idée de ce dispositif de formation non mis en œuvre dans leur parcours de formation.

Tous ces exemples concrets caractérisent la diversité des modalités d'organisation de la première mise en œuvre de ce dispositif. Ils illustrent une prescription floue (Daniellou, 2002), la pluralité des contextes mais également les « arbitrages » et les compromis (Faïta & Saujat, 2010) réalisés par les formateurs.

IV - L'ACTIVITE REELLE DE CONCEPTION DU REFERENT, UNE ACTIVITE EMPECHEE ?

La multiplication des modalités choisies par les référents ESPE peut, avec le point de vue du chercheur, être perçue comme une illustration positive de l'activité de conception continuée dans l'usage d'un professionnel. Cependant, comme l'a montré notre étude, dans pratiquement tous les parcours de formation, c'est une tâche complexe pour le référent de « composer » avec l'ensemble des contraintes et de se questionner sur la « pertinence » de ses choix face à l'absence de temps de formation de ces formateurs. Dans la conception de ce dispositif, « l'organisation » prendra le pas sur les critères pédagogiques, comme l'illustre la modélisation du travail réalisé par un référent ESPE devant mettre en œuvre le dispositif pour son groupe de stagiaires (fig 2).

1 Etre référent ESPE en 2014-2015 dans le 1er degré. Ce que cela demande au formateur…

1.1 L'organisation de l'alternance dans le 1er degré.

L'exemple qui va être illustré dans la figure suivante est issu de la phase de diagnostic du travail de recherche en cours.[13]

Dans l'académie d'Aix-Marseille, l'alternance a été organisée par un partage des jours de chaque semaine. Deux jours sont consacrés à la formation en ESPE et deux autres – ou parfois deux jours et demi en fonction des rythmes scolaires des communes - voient les PSTG rejoindre la classe où ils enseignent à mi-temps. Consécutivement à cette organisation, chaque PSTG « partage » son poste de stage avec un collègue professeur des écoles titulaire. Chaque école faisant elle-même partie d'une circonscription du 1er degré dont la responsabilité est confiée à un Inspecteur de l'Education Nationale (IEN).

[12] Professeur des écoles maître formateur.

[13] Filippi 2016. Déjà cité

1.2 Les facteurs associés à l'alternance et leur lien avec la mission du référent

Dans le parcours premier degré, les PSTG sont répartis sur quatre sites dans l'Académie. Comme l'exige la loi de 2013, ils ont tous un tuteur de terrain et un tuteur ESPE, nommé référent ESPE dans l'Académie. Les référents sont le plus souvent attachés à un site de formation même si certains peuvent avoir cette même mission sur deux sites voire sur des parcours différents du 1er et du 2nd degrés. La mission a été présentée collectivement aux formateurs ESPE lors d'une conférence de rentrée mais pour le 1er degré les référents n'ont pas élaboré de mise en œuvre commune.

Une fois les appariements tuteurs-PSTG et référents ESPE-PSTG effectués (respectivement par la DSDEN et par l'ESPE), chaque référent ESPE a dû organiser son travail et programmer ses TD délocalisés. Pour cela, il a dû prendre en compte un nombre important de paramètres plus ou moins « invisibles » *a priori* mais qui sont venus affecter sa réflexion.

Le schéma ci-dessous, issu du cas clinique étudié, illustre concrètement l'ensemble des paramètres organisationnels que M, notre référente ESPE, a pris en compte pour programmer et organiser sa mission en vue de concevoir ses TD délocalisés. Cette illustration, qui témoigne du nombre de paramètres dont elle doit tenir compte, n'a pu se faire qu'à l'examen de son activité réelle par l'intermédiaire de son analyse *a posteriori* de sa propre activité de conception. Ceci vient également illustrer, pour le dire à la manière de Clot, que le réel et le réalisé ne sont pas taillés sur le même moule (Clot, 2011).

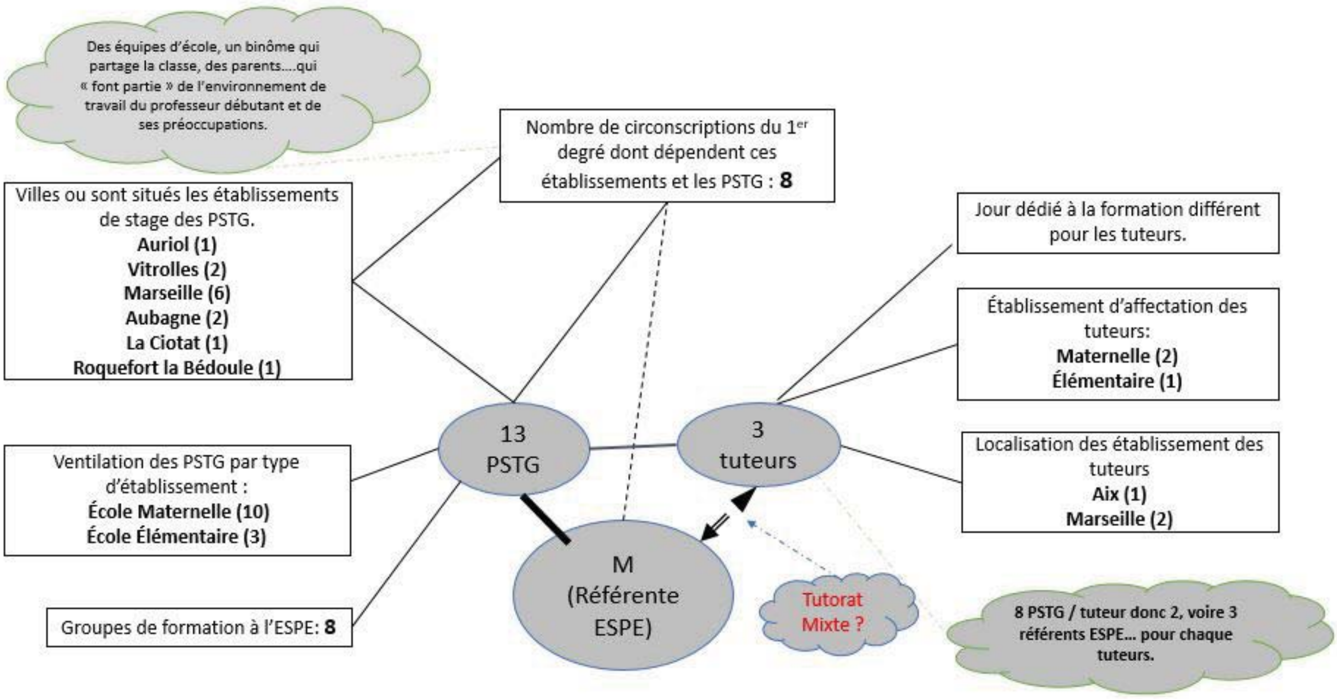


Figure 2. Un cas clinique. Facteurs impactant l'activité de mise en œuvre d'un référent ESPE du 1er degré.

Cette modélisation met en évidence plusieurs paramètres qui vont déterminer *a priori* l'organisation du travail :

- Les PSTG ont des classes dans des cycles différents, ce qui va conduire le référent à se questionner sur les types de regroupements.
- A l'ESPE, ces PSTG appartiennent à huit groupes d'enseignements différents ce qui va notablement réduire les disponibilités de tous lorsqu'il faudra trouver des dates de mise en œuvre des TD délocalisés (car aucune plage n'est inscrite dans les emplois du temps pour ce temps de formation).

- Les villes où travaillent les PSTG ne sont pas toutes proches géographiquement et n'ont pas toutes les mêmes rythmes scolaires. Ce qui vient encore compliquer les regroupements et les disponibilités de chacun.
- Le nombre important de circonscriptions peut impliquer des collaborations ou *a minima* des échanges multiples avec les équipes de circonscription. Il va également obliger le référent à adopter des modes de collaboration différents avec chaque inspecteur.
- La collaboration au sein du tutorat mixte, avec le tuteur de terrain, sera également complexe. En effet chaque tuteur, en fonction des appariements effectués, devra travailler avec plusieurs référents et le temps que les tuteurs peuvent consacrer à la formation est limité. Les tuteurs étant PEMF, ils n'ont qu'une journée par semaine consacrée à la formation[14]. Cette journée correspond forcément à une journée où les PSTG sont en classe pour qu'ils puissent effectuer les visites-conseils[15]. Ce temps consacré à la formation pour les PEMF n'est donc pas sur un temps ESPE des professeurs stagiaires. Cette contrainte organisationnelle restreint très largement leur capacité à partager ce temps de « TD délocalisé », limite considérablement les marges de manœuvre du référent et vient immédiatement contredire la prescription qui réclame la présence conjointe des professeurs stagiaires et de leurs tuteurs de terrain sur un temps ESPE.
- Les tuteurs n'étant pas dans les mêmes établissements que les PSTG, une dimension supplémentaire viendra affecter cette collaboration. Les tuteurs sont tous dans des établissements scolaires d'application d'Aix ou de Marseille alors que les PSTG sont répartis sur tout le département. Le choix du lieu où se fera le TD sera une nouvelle contrainte de déplacement soit pour les tuteurs, soit pour les PSTG. Cet aspect conduira à de nombreux refus de participation chez les tuteurs.

Nous pouvons noter ici le nombre considérable d'éléments qui vont, en amont de la situation de travail, venir contredire, percuter ou empêcher certaines modalités qu'auraient pu utiliser les référents ESPE du 1er degré. Ces éléments « conditionneront » les choix pédagogiques que notre référente aurait voulu faire lors de la conception de son TD et ceux de ces collègues. C'est à la lumière de ces exemples que nous pouvons parler d'activité empêchée (Clot, 2008), voire de fierté ravalée (Clot, 2016) chez de nombreux formateurs expérimentés qui sont mis en échec par cette nouvelle organisation du travail et les nombreux empêchements qu'elle contient.

2 …de faire ce qu'on lui demande. Une difficulté partagée.

Quelle situation de travail aurait été la plus pertinente, dans ce contexte d'alternance, face à ce groupe de PSTG à peine entrés dans le métier ? Cette question, finalement la plus importante, ne se manifestera qu'en toute fin de chaine dans la réflexion des référents. Et même si les facteurs qui viennent impacter le travail de conception ne sont pas les mêmes dans le second degré, le constat est identique. Ce n'est qu'avec la marge de manœuvre qu'il lui reste, que notre formateur ESPE pourra faire des choix où, une fois prises en compte les contraintes matérielles, spatiales et temporelles, il pourra avoir des préoccupations de formation.

Cette activité « invisible » débouchera sur ce qui sera, selon lui, la meilleure situation possible pour faire ce qu'on lui demande.

Malgré tout, la mission de ce formateur qui veut « bien faire son travail » et l'attente des PSTG sont des contraintes intérieures fortes qui vont aussi avoir leur importance, plus particulièrement sur la santé des formateurs-référents.

La figure suivante illustre, lors de ce travail invisible de conception pour le référent ESPE, ce système fortement prescrit et en particulier le rôle que jouent les prescriptions remontantes (Daniellou, 2002), celles qui viennent de l'objet même de son travail.

[14] Ils sont face à leur classe les autres jours de la semaine.

[15] Cette modalité, abandonnée à l'ESPE, est restée en vigueur pour les missions qui relèvent de l'employeur.

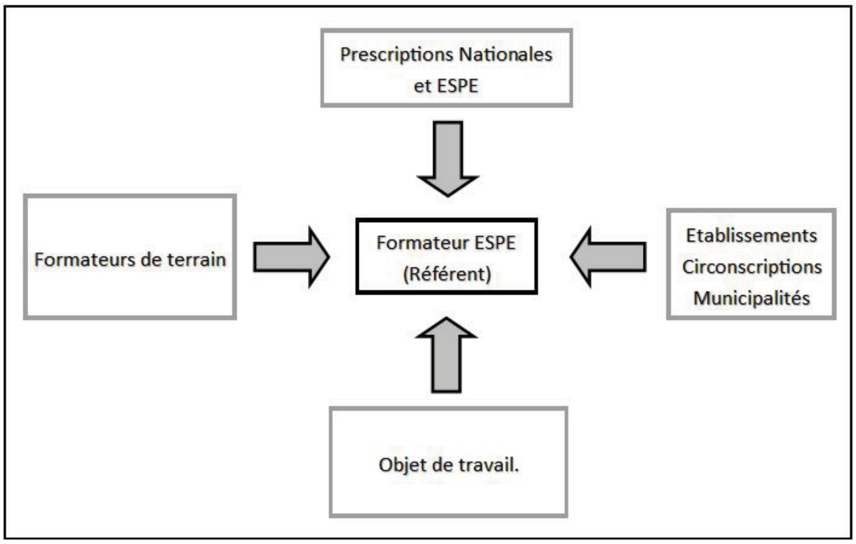


Figure 3. L'activité de conception du référent ESPE face aux prescriptions multiples. (Filippi, 2016)

Peut-être, comme le dit Clot (Clot, 2010), « les méthodes nouvelles n'expliquent [-elles] jamais le développement de l'activité réelle. C'est l'activité réelle qui s'explique- aux deux sens du terme- avec les méthodes nouvelles ».

V - RECONSTRUIRE DU POUVOIR D'AGIR : LA MISE EN PLACE D'UNE INTERVENTION-RECHERCHE.

1 Cadre théorique et méthodologique.

Notre équipe de recherche a été sollicitée par un groupe de formateurs de l'ESPE d'Aix-Marseille Université[16] pour étudier les situations de travail par l'observation de l'activité des formateurs (Félix, 2014; Félix & Saujat, 2015). Ensemble, nous avons analysé la manière dont ils conçoivent et reconçoivent, dans l'usage, les outils qu'ils créent. Ce rapport entre cadre ergonomique et pédagogique s'inscrit dans une proposition d'intervention participative et collaborative dans le sillage des travaux d'Oddone, Re et Briante (1981) et de réflexions plus récentes (Re, 2014) dans le champ de la formation (Teiger & Lacomblez, 2013). Il s'agit d'associer un milieu de travail (les situations de professionnalisation et de formation) à un milieu de recherche (analyse de l'activité, réélaboration conceptuelle…) en vue de comprendre pour transformer (Guerin, Laville, Daniellou, Duraffourg, & Kerguelen, 2006) et transformer pour comprendre (Saujat, 2010) les modalités du travail des professionnels de l'enseignement, notamment dans le cadre de ce tutorat mixte (Filippi, Crocco, & Félix, à paraître).

Ce rapprochement entre milieu de travail et milieu de recherche a été facilité par l'entremise d'un cadre méthodologique, celui de l'autoconfrontation (Faïta & Vieira, 2003). Concrètement, il s'agit de filmer des situations de travail collaboratif entre divers formateurs pour ensuite proposer aux membres de ce collectif un cadre dialogique propre à constituer leur travail collaboratif en objet de pensée et d'interlocution. Ceci est rendu possible par l'entremise d'un processus de co-analyse et de co-construction des faits discutables par le collectif (Félix & Saujat, 2015) permettant le développement personnel et collectif des professionnels en prise avec leur milieu (Canguilhem, 1965).

Plus précisément, chaque membre de ce collectif de formateurs ESPE, a été filmé une ou plusieurs fois dans la mise en œuvre et le déroulement du tutorat mixte en établissement scolaire et confronté à l'enregistrement vidéo de son activité en présence du chercheur (autoconfrontation simple) puis d'un pair et toujours en présence du chercheur (autoconfrontation croisée). Il s'agit donc de deux types de traces vidéo : celles de l'activité de formation réalisée par le formateur ESPE en collaboration avec des partenaires présents et celles de la confrontation entre formateurs ESPE lorsqu'ils analysent leur activité

[16] Sous l'appellation de GCIEF : Groupe Conception et Intervention dans les Environnements de Formation.

à propos de ce premier enregistrement. Les restitutions au collectif élargi à l'ensemble des formateurs ESPE engagés dans le processus d'intervention se font sur la base des extraits de situations sélectionnés par les formateurs et le chercheur, recueillis lors des phases précédentes.

Depuis septembre 2016, une partie de ce collectif initial, complété par de nouveaux volontaires, a décidé de formaliser une intervention-recherche, recentrée sur la mise en œuvre du tutorat mixte au sein d'Aix-Marseille Université en associant à la réflexion des tuteurs de terrain et des professeurs stagiaires. Ce travail, toujours en cours et qui ne sera que très peu développé ici, s'appuie sur les résultats précédemment évoqués et constitue le support d'un travail de doctorat.

2 Interroger le travail des pairs pour mieux s'interroger soi-même ?

Nous présenterons simplement un cas, à partir d'extraits issus d'une autoconfrontation croisée (ACC) entre deux référents ESPE, qui permet d'illustrer l'intérêt de l'intervention-recherche et du cadre méthodologique utilisé ici pour permettre aux professionnels engagés de re-penser collectivement cette nouvelle mission et ainsi contribuer à reconstruire du genre professionnel, mais également pour identifier des questions « de métier » qui se posent suite à cette transformation de la prescription.

Jean-Yves est formateur en EPS, il est également référent dans ce parcours de formation qui forme de futurs professeurs d'éducation physique et sportive. C'est un formateur qui n'exerce à l'ESPE que depuis peu et qui était précédemment enseignant dans un lycée. Pierre est un formateur en mathématiques. Il exerce la mission de référent dans le parcours Professeur des Ecoles. Il a une grande expérience en tant que formateur puisqu'il exerçait déjà dans ce parcours dans les ex-IUFM.

Ces deux formateurs ont préalablement été filmés lors de leurs TD délocalisés respectifs, puis autoconfrontés aux traces de leur activité de référent en autoconfrontation simple (ACS). Ils ont également participé à plusieurs réunions de ce collectif de travail depuis juillet 2016. Même s'ils ne sont pas référents dans le même parcours de formation, leur mission de référent est encadrée par la même prescription. L'autoconfrontation croisée qui les réunit va être l'occasion, pour chacun d'entre eux, de commenter l'activité filmée de l'autre.

Nous présentons ici deux extraits de dialogue produits durant la même ACC.

Le premier extrait se situe pratiquement au début du visionnage. C'est le film du TD délocalisé de Pierre qui est présenté et nous allons nous intéresser aux questions posées par Jean-Yves :

Tour de parole	Locuteur	Contenu
20	Vidéo	Lancement de l'extrait (quelques secondes au début du TD)
21	Chercheur	(Pause). Je te laisse nous contextualiser là ?
22	Pierre	Donc, 2 profils, au fond Sandra, heuu, et Jessica qui ont préparé, heuu, qui avaient préparé une séquence, une séance que je suis allé observer et filmer chez Sandra.
23	Jean-Yves	D'accord.
24	Chercheur	Sandra c'est elle (C place le curseur de la souris sur le visage)
25	Pierre	Elles ont préparé à toutes les deux dans le cadre d'un projet, enfin, de leur projet monographique entre autres et dans le cadre d'APP qui venaient suite à un besoin identifié dans le 1er TD délocalisé, besoin de travailler sur la construction de séquences.
26	Jean-Yves	D'accord.
27	Pierre	Donc du coup elles ont toutes les deux préparé la séquence ensemble,
28	Jean-Yves	Hum hum
29	Pierre	C'est Sandra qui la met en œuvre, qui a été filmée, c'est elle, et on va, et on va, et tout le TD se fait à partir du film de Sandra.
30	Jean-Yves	Donc, heu, Sandra (désigne du doigt la professeure stagiaire)

Ce bref extrait, destiné à contextualiser l'échange, et qui dure moins d'une minute présente une particularité. C'est pratiquement le seul moment lors duquel Pierre va parler de sa situation de travail sans répondre à une question précise de Jean-Yves. Une fois le visionnage commencé voici comment vont se dérouler les échanges :

	Vidéo	**Après 3'55 de visionnage. Jean-Yves interrompt le visionnage une première fois.**
54	Jean-Yves	Donc, heu, la séquence qui va être filmée, elle a été filmée par heu, Sandra ?
55	Pierre	Non c'est moi qui ai filmé
56	Jean-Yves	C'est toi qui, c'est toi qui, qui va, d'accord (en même temps)
57	Pierre	Moi je suis allé filmer Sandra
58	Jean-Yves	Et donc c'est la première fois où vous vous retrouvez ?
59	Pierre	Heu, ces 4 -là ?
60	Jean-Yves	Oui
61	Pierre	Oui
62	Jean-Yves	Oui, toi, toi et les heu, est-ce que vous avez déjà débriefé ?
63	Pierre	Non, non
64	Jean-Yves	C'est la première fois où vous vous retrouvez après le film ?
65	Pierre	Oui
66	Jean-Yves	D'accord
67	Pierre	Oui oui
68	Jean-Yves	(*en regardant le chercheur*) hum
69	Pierre	Je continue ?
	Vidéo	**Reprise du visionnage durant 1'32**
70	Jean-Yves	On peut parler des sélections là ? De l'objet des sélections ?
71	Chercheur	Ouais
72	Pierre	Hum hum
73	Jean-Yves	Donc Sandra elle a sélectionné par rapport à quoi ? Ses préoccupations ? Son...
74	Pierre	Oui, par rapport, elle, elle donc, moi je lui ai envoyé le, le film, elle a, elle a pu, elle a, le, le contrat c'est qu'elle le regardait
75	Jean-Yves	Ouais
76	Pierre	et elle sélectionnait 3 passages, heu, pas trop longs
77	Jean-Yves	hun hun

On notera, lors des tours de parole 54, 56, 58, 62, 64, 70 et 73, les questions précises que pose Jean-Yves. Ces questions destinées à obtenir des précisions sur les conditions de réalisation des images (54 & 56), sur le compte rendu d'observation potentiel que Pierre, en tant que référent, a fait à Sandra sur sa séance (58, 62, 64) et sur les extraits qui ont été sélectionnés pour le temps d'échange collectif (70 & 73) sont assez révélateurs des effets que peut produire cette situation si on la replace dans son contexte théorique et méthodologique.

Pour le dire comme Bonnemain et Clot, la méthode d'autoconfrontation croisée est conçue comme « un espace-temps différent » (Clot, Faïta, Fernandez, & Scheller, 2000) dans lequel le cadre dialogique favorise l'élaboration de la pensée à partir de l'expérience professionnelle. (Bonnemain & Clot, 2017)[17]

En effet, la formulation des questions posées par Jean-Yves n'est pas neutre. Elle montre que ce qui fait réagir Jean-Yves, car c'est lui qui interrompt le visionnage, ce n'est pas seulement le dispositif proposé par Pierre. Les questions qu'il pose témoignent des effets que cette observation déclenche chez lui en écho aux choix qu'il a fait dans son propre dispositif de TD délocalisé.

Nous devons ici apporter une précision qui justifiera ce propos. La prescription du TD délocalisé n'impose pas de filmer le travail des professeurs stagiaires. Cette modalité, administrativement contraignante et chronophage, n'est pas la plus fréquente parmi les référents ESPE. Et au sein du collectif participant à cette recherche, Jean-Yves et Pierre sont les seuls à procéder ainsi. Par conséquent, en demandant à Pierre qui filme, s'il a prévu un temps de conseil immédiatement après la prise des images et qui sélectionne les extraits, Jean-Yves questionne son propre dispositif et les difficultés qu'il rencontre lors de sa mise en place.

[17] Clinique de l'activité : les affects dans l'autoconfrontation. P136

3 Se confronter au regard des pairs pour développer son pouvoir d'agir.

Du côté de Pierre, c'est la seconde fois qu'il regarde le film de son TD délocalisé en présence du chercheur. La première fois correspondant à l'autoconfrontation simple. Nous n'aborderons pas ici directement ce que cette première autoconfrontation a provoqué mais, ce qui est connu dans ce cadre méthodologique, c'est que l'ACS offre la première possibilité de « redoubler l'expérience vécue afin que les sujets puissent transformer l'expérience vécue en un objet, en objet d'une nouvelle expérience vécue » (Bonnemain & Clot, 2017).

Lors de cette ACC, les interrogations de Jean-Yves vont offrir un redoublement de cette nouvelle expérience vécue et elles peuvent déboucher sur une augmentation des possibilités qui vont s'offrir à Pierre dans le futur. En effet, cette situation d'ACC permet à ces deux professionnels d'échanger simultanément sur cette activité qu'ils partagent, en tant que référent ESPE, mais qu'ils ne regardent pas de manière identique. Ainsi s'ouvre un éventail de possibilités, entretenu par un échange lors duquel le chercheur ne recherche aucun consensus. Bien au contraire, chaque possibilité de soulever des différences de points de vue, des controverses, tentera d'être exploitée afin de nourrir « des zones de développement potentiel de l'activité » (Duboscq & Clot, 2010).

Dans le cas présent, la question posée par Jean-Yves au sujet des sélections d'extraits et de la contractualisation proposée par Pierre à l'enseignante stagiaire (elle sélectionnait la plupart des extraits qui allait être regardé au sein d'un collectif de professeurs stagiaires, Pierre se réservait le droit d'en choisir un) était complètement différente de celle que Jean-Yves utilisait. Ce dernier demandait au professeur stagiaire de relever des extraits en fonction de ses préoccupations professionnelles du moment. Les échanges ont permis de mettre au jour cette différence et ont offert à Pierre une autre option.

L'exemple présenté témoigne que les énoncés produits dans le cadre des autoconfrontations croisées sont donc multi-adressés. Ils se destinent à la fois aux pairs, les autres formateurs, à l'intervenant-chercheur, au locuteur lui-même (destinataires immédiats) et à un ou plusieurs « sur-destinataires » ou participant(s) invisible(s).[18] Cela peut être le métier de formateur ou la formation professionnelle, comme « instance qui se situe au-dessus de tous les participants du dialogue » (Bakhtine, Todorov, & Aucouturier, 1984).

4 Des questions de métier à adresser au collectif.

Dans le cadre méthodologique que nous utilisons, l'autoconfrontation croisée, en plus de continuer à stimuler la réflexion individuelle des protagonistes est également une étape destinée à nourrir la réflexion collective du groupe de formateurs engagé dans cette intervention-recherche. Plusieurs ACC ont eu lieu et à l'issue de celles-ci nous avons sélectionné des questions qui ont semblé retenir l'attention pour les soumettre au collectif.

Dans l'exemple présenté ici, plusieurs questions « du métier » de formateur ESPE devant assumer la mission de référent ont été soulevées par Pierre et Jean-Yves :

- Qui filme le travail ? Le formateur ESPE, d'autres professeurs stagiaires ? Le tuteur de terrain ?
- Quel « œil » filme le travail ? Une caméra fixe ? Un film « orienté » par celui qui tient la caméra ? Avec quelles conséquences ?
- Qui sélectionne les extraits de séance pédagogique qui vont être partagés avec les autres professeurs stagiaires et tuteurs de terrain ? Avec quelle exposition pour le professeur stagiaire qui a été filmé ?
- Quels critères doivent être retenus pour sélectionner ces objets ? Les « préoccupations » d'un professeur stagiaire qui donne à voir ce qui lui pose problème ? L'intérêt pour la formation initiale des enseignants de certains passages qui ont interpellé le formateur ?

[18] Un peu plus loin dans l'ACC Jean-Yves évoquera sa collègue, autre référente EPS avec qui il a élaboré leur dispositif commun.

- Les critères de constitution du groupe qui va regarder ensemble ces vidéos : doit-on travailler dans un milieu de confiance ?

Ces deux professionnels avaient, avant cette ACC, probablement leur avis sur ces questions. Nous faisons le pari que l'observation croisée et les échanges qui ont surgi ont probablement déjà fait émerger dans l'esprit de l'un et de l'autre une réflexion intérieure et ont mis en route un nouveau questionnement. A l'issue des ACC, le chercheur effectuera un montage vidéo qui aura comme objectif de mettre en discussion les points que ces deux professionnels ont soulevé.

Par la suite, lors de réunions de travail de notre collectif, ces questions et bien d'autres, issues des autres ACC ou des échanges au sein du groupe viendront se poser à ces formateurs. Quels débats viendront nourrir ce collectif ? Quels points retiendront leur attention et seront rediscutés, abandonnés ou définitivement arbitrés au sein du collectif ?

VI - CONCLUSION

Cet article se situe dans les prémices d'une étude plus approfondie qui, et elle n'est pas la seule, soutient que former est un métier qui s'apprend. Les formateurs en poste en ESPE, groupe moins homogène que cette appellation ne le laisse supposer (Moussay & Serres, 2015), se posent aujourd'hui un nombre important de questions face aux profondes transformations qui accompagnent leur mission. Renoncer aux « anciennes pratiques », professionnaliser, évaluer par compétences, former un public aux compétences et expériences multiples dans le cadre de l'alternance, reconstruire un lien « différent » avec « le terrain », … Autant d'obstacles qui viennent réinterroger la professionnalité de ces professionnels. Nous conclurons cet article avec Patrick Mayen (2007) sur la question de la pertinence des situations professionnelles susceptibles de contribuer à la formation professionnelle en contexte d'alternance. Dans son article, il n'était pas question des formateurs d'enseignants mais nous pouvons transposer sa réflexion : « On pourrait distinguer les situations qui portent un potentiel d'apprentissage pour elles-mêmes, celles qui préparent à la maîtrise de situations ultérieures, à leur diversité et à leurs variations, celles qui portent un potentiel qui pourra se développer en formation,…, celles enfin qui portent un potentiel, non pas d'application mais de développement des acquis de la formation » (Mayen, 2007). Comment situer ce dispositif de TD délocalisé ? Difficile à dire actuellement face aux nombreuses contraintes qui se posaient en 2014, lors de l'année où nous avons établi notre diagnostic. En 2016-2017, comme le montre l'extrait de l'autoconfrontation, ce groupe de formateurs se posent des questions d'un tout autre type, ce qui laisse présager d'un nouveau développement chez ces professionnels… à condition que la prescription offre aux formateurs des marges de manœuvre qui leur permettront d'inverser l'ordre des préoccupations en privilégiant les situations du point de vue des savoirs, mais également à condition que s'ouvrent des espaces d'échanges et de débats entre pairs sur leur travail, dans cette nouvelle organisation par l'alternance.

VII - BIBLIOGRAPHIE

AMIGUES, R. (2009). Le travail enseignant : prescriptions et dimensions collectives de l'activité. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, *42*(2), 11- 26.

AMIGUES, R., FAÏTA, D., & KHERROUBI, M. (2003). Métier enseignant : organisation du travail et analyse de l'activité. *Skholê*, (hors-série 1), 1- 3.

BAKHTINE, M., TODOROV, T., & AUCOUTURIER, A. (1984). *Esthétique de la création verbale*. Paris : Gallimard.

BONNEMAIN, A., & CLOT, Y. (2017). Clinique de l'activité: Les affects dans l'autoconfrontation. In *Les méthodes qualitatives en psychologie et sciences humaines de la santé* (p. 131- 149). Dunod.

CANGUILHEM, G. (1965). *La connaissance de la vie*. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

CHALIES, S., CARTAUT, S., ESCALIE, G., & DURAND, M. (2009). L'utilité du tutorat pour de jeunes enseignants : la preuve par 20 ans d'expérience. *Recherche et formation*, (61), 85- 129.

CLOT, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail*. Paris : Presses universitaires de France.

CLOT, Y. (2008). *Travail et pouvoir d'agir* (Vol. 1–1). Presses Universitaires de France.

CLOT, Y. (2010). *Le travail à cœur : pour en finir avec les risques psychosociaux*. Paris : Découverte.

CLOT, Y. (2011). Théorie en clinique de l'activité. In *Interpréter L'agir: Un défi théorique* (p. 17- 39). Paris : Presses Universitaires de France.

CLOT, Y. (2016, février 3). Yves Clot : « L'institution compte sur les enseignants mais ne fait rien pour eux ». Consulté 5 juin 2017, à l'adresse http://www.humanite.fr/yves-clot-linstitution-compte-sur-les-enseignants-mais-ne-fait-rien-pour-eux-597998

CLOT, Y., FAÏTA, D., FERNANDEZ, G., & SCHELLER, L. (2000). Entretiens en autoconfrontation croisée : une méthode en clinique de l'activité. *Perspectives interdisciplinaires sur le travail et la santé*, (2- 1). https://doi.org/10.4000/pistes.3833

Clot, Y., & Leplat, J. (2005). La méthode clinique en ergonomie et en psychologie du travail. *Le travail humain*, *68*(4), 289- 316.

DANIELLOU, F. (1996). *L'Ergonomie en quête de ses principes: débats épistémologiques*. France : Octarès.

DANIELLOU, F. (2002). Le travail des prescriptions. In *Actes du congrès* (Vol. 37ème congrès, p. 9- 16). Aix en Provence.

DUBOSCQ, J., & CLOT, Y. (2010). L'autoconfrontation croisée comme instrument d'action au travers du dialogue : objets, adresses et gestes renouvelés. *Revue d'anthropologie des connaissances*, *4*, *n° 2*(2), 255- 286.

FAÏTA, D., & SAUJAT, F. (2010). Développer l'activité des enseignants pour comprendre et transformer leur travail : un cadre théorique et méthodologique. In F. Saussez & F. Yvon, *Analyser l'activité enseignante : des outils méthodologiques et théoriques pour l'intervention et la formation* (p. 41- 71). Québec : Presses de l'Université de Laval.

FAÏTA, D., & VIEIRA, M. (2003). Réflexions méthodologiques sur l'autoconfrontation croisée. *Skholê*, (hors-série 1), 57- 68.

FELIX, C. (2014). De l'intervention-recherche à la production de ressources : quelle didactisation de l'activité pour la formation des enseignants ? *Recherche & formation*, (75), 51- 64.

FELIX, C., & SAUJAT, F. (2014). Le métier d'enseignant : un impensé dans le rôle de l'établissement comme organisation apprenante ? In *Former les enseignants au XXIe siècle*. (De Boeck, Vol. 1. Établissement formateur et vidéoformation.). Bruxelles.

FELIX, C., & SAUJAT, F. (2015). L'intervention-recherche en milieu de travail enseignant comme moyen de formation. In V. Lussi-Borer, M. Durand, & F. Yvon, *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (Vol. 19, p. 201- 218). De Boeck Supérieur.

FILIPPI, P.-A. (2016). *L'activité du formateur ESPE dans la formation en alternance des professeurs stagiaires. Etude du dispositif de tutorat mixte d'Aix-Marseille : Le « TD délocalisé »* (Mémoire de Master Recherche MEEF). Aix en Provence : Aix-Marseille Univ.

FILIPPI, P.-A., CROCCO, M., & FELIX, C. (à paraître). Observer le travail des formateurs intervenant en ESPE dans la professionnalisation des enseignants : le cas du dispositif de « tutorat partagé ».

FILIPPI, P.-A., FELIX, C., & SAUJAT, F. (à paraître). Mettre un œuvre l'alternance intégrative : Ce qu'on demande aux formateurs, ce que ça leur demande et ce qu'ils en font.

GUERIN, F., LAVILLE, A., DANIELLOU, F., DURAFFOURG, J., & KERGUELEN, A. (2006). *Comprendre le travail pour le transformer : la pratique de l'ergonomie*. Lyon : ANACT.

MAYEN, P. (2007). Passer du principe d'alternance à l'usage de l'expérience en situation de travail comme moyen de formation et de professionnalisation. In F. Merhan, C. Ronveaux, & S. Vanhulle, *Alternances en formation* (p. 83- 100). Bruxelles : De Boeck Supérieur.

MOUSSAY, S., ÉTIENNE, R., & MEARD, J. (2009). Le tutorat en formation initiale des enseignants : orientations récentes et perspectives méthodologiques. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, (166), 59- 69. https://doi.org/10.4000/rfp.1127

MOUSSAY, S., & SERRES, G. (2015). Apprendre à devenir formateur d'enseignants : vers une nouvelle professionnalité. In *Apprendre à enseigner* (p. 209- 220). Presses Universitaires de France.

MOUTON, J.-C. (2003). D'un métier à l'autre : le conseil pédagogique. *Skholê*, *Métier enseignant*, *organisation du travail et analyse de l'activité*. (hors-série 1), 69- 81.

ODDONE, I., RE, A., & BRIANTE, G. (1981). *Redécouvrir l'expérience ouvrière : vers une autre psychologie du travail ?* Paris : Les éditions sociales.

PASSERON, J. C., & REVEL, J. (Éd.). (2005). *Penser par cas*. Paris : École des hautes études en sciences sociales.

RE, A. (2014). Préface à l'ouvrage Défis actuels, passés, futurs : le parcours d'Ivar Oddone. Sfide attuali, passate e future : il percorso di Ivar Oddone. *Ergologia*, (12), 169- 160.

SAUJAT, F. (2009). L'analyse du travail comme source et ressource de formation : le cas de l'orientation en collège. In *Travail et formation des adultes* (p. 245- 274). Paris : Presses Universitaires de France. https://doi.org/10.3917/puf.duran.2009.01.0245

SAUJAT, F. (2010). *Travail, formation et développement des professionnels de l'éducation : voies de recherche en sciences de l'éducation (Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches)*. Marseille : Université de Provence – Aix-Marseille I.

SERRES, G., & MOUSSAY, S. (2014). Activités des formateurs d'enseignants : quelles fonctions pour quels objectifs ? In *Chaire UNESCO "Former les enseignants au XXIe siècle"*. Lyon, France. Consulté à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01071383

TEIGER, C., & LACOMBLEZ, M. (2013). *(Se) former pour mieux transformer le travail : dynamiques de constructions d'une analyse critique du travail*. Laval : Presses de l'Université de Laval ; European Trade Union Institute (ETUI).

DONNER DU SENS AUX NOMBRES ET A LEURS UTILISATIONS : DE LA MANIPULATION A LA SYMBOLISATION. INTERETS D'UNE PEDAGOGIE MULTIMODALE

Nolwenn GUEDIN

Formatrice, ESPE Bourgogne, Faculté de Psychologie et École orthophonie Besançon

Doctorante, FPSE - UNIGE Genève

nolwenn.guedin@gmail.com

Résumé

Selon le modèle le plus répandu en cognition numérique, le triple code du nombre stipule que les quantités peuvent être traitées dans trois zones du cerveau selon trois représentations différentes. Les formes non-symboliques des quantités, encore appelées analogiques, rendent compte directement de leur numérosité grâce aux unités encore individualisées. Les formes symbolisées des quantités sont les nombres oraux ou écrits. Dans ce cadre, la mémorisation des résultats additifs peut être pensée comme une automatisation inconsciente de procédures opérées sur les quantités analogiques ou comme le maintien en mémoire auditivo-verbale des faits arithmétiques et leur restitution directe sous forme de nombres oraux. En faveur du premier processus, les résultats d'une étude de corrélations et d'une étude d'entraînement soulignent l'importance des habiletés visuo-spatiales et procédurales. Insérée dans une pédagogie multimodale, le recours à des quantités semi-symboliques peut grandement aider les enfants à donner du sens aux nombres et à agir sur elles en vue du maintien des résultats additifs.

I - INTRODUCTION

Selon les travaux récents de neurosciences, les quantités seraient traitées par trois zones cérébrales distinctes en fonction du format dans lequel elles nous sont présentées. Ces trois formats numériques sont rassemblés sous le nom du Triple Code dans le modèle actuellement utilisé par les chercheurs en cognition numérique (Dehaene et Cohen, 1995) : le « code analogique » quand les quantités sont matériellement présentes, le « code verbal » quand les quantités sont communiquées et manipulées oralement et le « code écrit » quand les quantités sont sous la forme de nombres écrits via leurs représentations chiffrées. Nos pratiques enseignantes montrent que, pour réussir, l'enfant doit maîtriser l'ensemble de ce système sémiotique et savoir faire des liens entre chacun des codes qui le composent. Enfin, l'enfant entrera dans le monde de l'arithmétique quand il comprendra et utilisera aisément les représentations symbolisées et leurs propriétés sans avoir systématiquement besoin de recourir aux quantités matériellement présentes.

Nous montrerons, à l'appui de travaux de recherche et de nos pratiques pédagogiques, récemment éprouvées lors de travaux de thèse en psychologie cognitive du développement, qu'il est possible d'aider l'enfant dans ce cheminement numérique grâce à des « représentations intermédiaires » qui se situent entre les quantités analogiques et leurs formats symboliques. Que ce soit le recours aux configurations digitales (Brissiaud, 2003) ou aux constellations de points organisées (Guedin, 2012), ces représentations, alors appelées ici « semi-symboliques », permettent de passer de la décomposition des quantités analogiques – donc forcément non symboliques – au traitement réussi des symboles. De plus, nous verrons que le recours à ces supports « semi-symboliques » au sein d'une pédagogie explicitement multimodale, c'est-à-dire grâce à des entrées visuelles, gestuelles et orales, facilite les apprentissages de l'enfant (Engelkamp et Zimmer, 1985).

II - CADRE THEORIQUE

Afin de comprendre comment est née l'idée de tester en classe l'efficacité de représentations aux dimensions à la fois analogique et symbolique, prenons le temps de rappeler les découvertes dans le domaine de la cognition numérique (pour une synthèse en français : Guedin, 2017). Des données actuelles mettent en avant le rôle crucial des doigts et s'interrogent aussi sur le statut des configurations de points canoniques, partageant en effet des propriétés communes avec les configurations digitales. Au sein de ce cadre théorique, nous verrons que des résultats encore plus récents nous permettent d'affiner la compréhension des mécanismes en jeu dans la résolution d'additions.

1 Données de la cognition numérique : entre analogique et symbolique

Construire le nombre consiste à accéder aisément à son sens quantitatif et l'utiliser efficacement au sein de manipulations numériques, tels des comparaisons ou des calculs. Historiquement, et même dans la vie de tout individu, les quantités sont d'abord naturellement rencontrées et manipulées sous des formes non-symboliques, où chaque entité est visible, ou même manipulable, séparément. Les recherches en cognition numérique nous ont permis de comprendre que ces formats non-symboliques, qualifiés également d'analogiques dans le triple code de Dehaene, sont accessibles à des traitements cognitifs dès la naissance. De façon perceptive immédiate, les bébés sont en effet capables de discriminer deux grandes quantités suffisamment distinctes (Xu et Spelke, 2000) grâce au Système Numérique Approximatif (SNA). Ils sont également doués de subitizing (Mandler et Shebo, 1982) grâce au Système Numérique Précis (SNP), permettant ainsi de discriminer finement les petites quantités analogiques jusqu'à 4 unités. Toujours historiquement, et également dans le développement de l'enfant, c'est bien après que des représentations symboliques font leur apparition et qu'elles deviennent compréhensibles et donc utilisables. Culturellement déterminés, c'est d'abord le code auditivo-verbal puis le code visuel écrit, qui vont permettre de représenter économiquement les quantités par des symboles : dénominations orales, puis nombres transcrits en chiffres arabes. Il a longtemps été pensé que le SNA jouait un rôle crucial dans le développement des compétences numériques ultérieures puisque son utilisation est innée (Xu et Spleke, 2000) et que sa sollicitation mentale reste associée à l'évaluation de la taille des nombres symboliques. En effet, la comparaison des quantités analogiques est caractérisée par les effets de taille (Dehaene, Izard, Spelke et Pica, 2008) et de distance (Moyer et Landauer, 1967), selon lesquels il est plus aisé de distinguer des quantités davantage petites et davantage distantes. Étonnamment, mais de façon toutefois atténuée, ces effets se retrouvent également dans les comparaisons de nombres symbolisés par leurs écritures indo-arabes. La plupart des auteurs interprètent la présence des effets dans les traitements symboliques comme la signature du recours inconscient aux quantités analogiques (Roggeman, Verguts et Fias, 2007). Par ailleurs, il a été montré que l'efficacité et la finesse des systèmes numériques non-symboliques sont corrélées à la réussite symbolique (Halberda, Mazzocco et Feigenson, 2008). Pourtant, greffer les noms des nombres sur les quantités analogiques reste laborieux pour les enfants (Wynn, 1992). De mauvais liens entre différentes représentations peuvent être source de difficultés, voire une origine de troubles du calcul. Dans ce cas, il est proposé par d'autres auteurs qu'un SNA peu efficient serait plutôt la conséquence d'une mauvaise construction des représentations exactes symboliques (Noël et Rousselle, 2011). Les résultats récents de la recherche commencent ainsi à expliquer le lien entre SNA et capacités symboliques dans le sens selon lequel ce serait l'acquisition d'une aisance avec les codes symboliques qui expliquerait l'amélioration progressive du SNA avec l'éducation formelle.

2 Représentations semi-symboliques : entre manipulations et représentations codées

Sur le plan didactique, l'accès réussi aux systèmes symboliques, tant pour la compréhension du sens des nombres que pour les manipulations additives, semble être facilité par le recours à des représentations intermédiaires, comme les configurations numériques réalisées avec les doigts, pouvant donc être qualifiées de représentations semi-symboliques. Ces formats numériques intermédiaires ont en effet la particularité de préserver la visualisation séparée des unités sous leur dimension analogique, tout en permettant la reconnaissance directe de la valeur exacte de la quantité – le cardinal de la collection –, comme tout code symbolique. Ainsi de nombreux résultats mettent en évidence l'importance du recours aux doigts dans les apprentissages numériques de base (Baroody, 1987 ; Butterworth, 1999 ; Previtali, Rinaldi et Girelli, 2011). Certains auteurs évoquent même les configurations digitales comme une sorte de quatrième code (Di Luca et Pesenti, 2011 ; Wiese, 2003) en faisant référence au triple code de Dehaene déjà évoqué précédemment (Voir Figure 1).

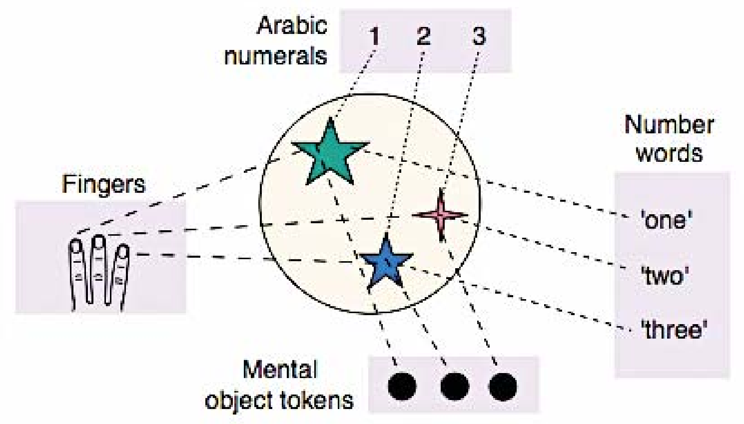


Figure 1 : Ajout des configurations digitales par Wiese (2003) aux trois formats habituels : analogique, verbal et écrit.

Dans une perspective de cognition incarnée, l'utilisation des doigts permettrait d'établir des liens entre les premières compétences numériques non-verbales et celles d'ordre symbolique qui se mettent en place avec le langage (Fayol et Seron, 2005). Au cours du développement, les doigts seraient même un outil idéal pour faciliter le passage d'un niveau de représentation de la quantité « par sommation » – où les unités ajoutées une à une mène au cardinal – à une représentation « par place » – où le cardinal est déduit directement de la configuration globale des unités grâce à leurs places occupées spatialement – (Di Luca, Lefèvre et Pesenti, 2010). Ainsi, les auteurs prédisent qu'ils retrouveraient ces deux formes d'accès aux quantités – « par sommation » et « par place » – également lors d'épreuves de comptage de points. Le comptage pour des dispositions aléatoires de points serait caractérisé par un codage « par sommation », tandis que la quantification de dispositions canoniques, comme sur un dé par exemple, serait caractérisée par un accès au cardinal « par place ».

Toutefois, compter efficacement sur ses doigts n'est pas accessible à tous les enfants, notamment en cas de déficience visuelle (Crollen, Mahe, Collignon et Seron, 2011), ou en cas de troubles moteurs et/ou praxiques (Thevenot et al., 2014). Par ailleurs, les doigts se limitant immanquablement à la manipulation d'une dizaine d'unités dans les usages occidentaux (Beller et Bender, 2011), il est pertinent de recourir aussi à d'autres formats semi-symboliques pour étendre le domaine numérique de manipulation. L'exemple des bûchettes réunies en dizaines en est un exemple pédagogique classique, mais demandant encore beaucoup d'habiletés gestuelles dans leurs manipulations. Comme le traitement des dispositions canoniques de points partagerait les mêmes caractéristiques que la reconnaissance de configurations digitales habituelles (Di Luca, Lefèvre et Pesenti, 2010), nous avons souhaité vérifier si le recours à un support de points organisés serait une aide efficiente en classe. Inscrite dans une pédagogie multimodale, nous faisions l'hypothèse que l'utilisation des constellations de points agencés en sous-base 5 pourrait permettre de construire le nombre efficacement. Non seulement de telles représentations pourraient donner du sens aux quantités, mais seraient également utiles pour faciliter les décompositions numériques et donc les calculs additifs ou soustractifs.

3 Les faits arithmétiques : entre mémorisation verbale et automatisation procédurale

Il a longtemps été pensé que les faits arithmétiques finissent par être retrouvés en mémoire à long terme autour de 8-10 ans (Ashcraft et Fierman, 1982 ; Carpenter et Moser, 1984). Des temps de réponse relativement courts furent en effet classiquement interprétés comme reflétant une stratégie rapide de récupération directe en mémoire (LeFevre, Sadesky et Bisanz, 1996 ; Siegler et Shrager, 1984). Cependant, d'autres auteurs suggéraient déjà que ces temps courts pouvaient tout aussi bien résulter de l'utilisation d'une procédure mentale très rapide (Baroody, 1987). En fait, grâce à des études finement chronométrées menées par l'équipe avec laquelle je mène ma thèse, nous comprenons aujourd'hui que nous faisons en effet encore appel inconsciemment à des procédures automatisées pour trouver les résultats additifs de petits opérandes (Thevenot, Barrouillet, Castel et Uittenhove, 2016). Ainsi, les temps de réponse nécessaires pour dire le résultat à haute voix à des additions de petits nombres, comme des ajouts de 2, 3 ou 4 unités, sont caractérisés par une augmentation progressive du temps de réponse, mise en évidence depuis longtemps (Groen et Parkman, 1972). Cet effet de taille des opérandes était interprété comme la recherche dans le réseau mémoriel plus longue dans le cas d'opérandes plus grands. Il est aussi interprétable à la faveur d'une procédure de comptage pas à pas. Cet effet de taille est classiquement observé pour des temps de réponse plutôt longs chez les enfants les plus lents. Cependant, l'analyse différentielle menée par notre équipe montre que cet effet de taille reste aussi clairement identifiable chez les enfants les plus rapides (Thevenot, Barrouillet, Castel et Uittenhove, 2016). Ces patterns identiques suggèrent que l'augmentation de la vitesse moyenne de résolution en fonction de l'âge, observée dans toutes les études, ne reflèterait pas un changement radical de stratégies mais plutôt une procédure unique de comptage qui s'automatise et s'accélère avec la pratique régulière de ce comptage (voir Figure 2). Cette procédure est également observée chez les adultes (Uittenhove, Thevenot et Barrouillet, 2016). Ces résultats novateurs ne remettent pas en cause la récupération en mémoire de certains faits arithmétiques. Toutefois, ils mettent en évidence la coexistence de différentes stratégies, notamment selon la taille des opérandes. Le recours à l'algorithme de comptage pour les petits opérandes trouverait son ancrage dans la manipulation d'objets ou de nos doigts pendant l'enfance (Carpenter et Moser, 1984). Ces manipulations seraient progressivement mentalisées pour aboutir à du comptage verbal. À partir de l'âge de 9-10 ans et chez les adultes, la manipulation de ces quantités analogiques mentalisées serait internalisée et deviendrait inconsciente, en permettant la production de résultats sous forme nombres symboliques (Thevenot, Barrouillet, Castel et Uittenhove, 2016 ; Uittenhove, Thevenot et Barrouillet, 2016).

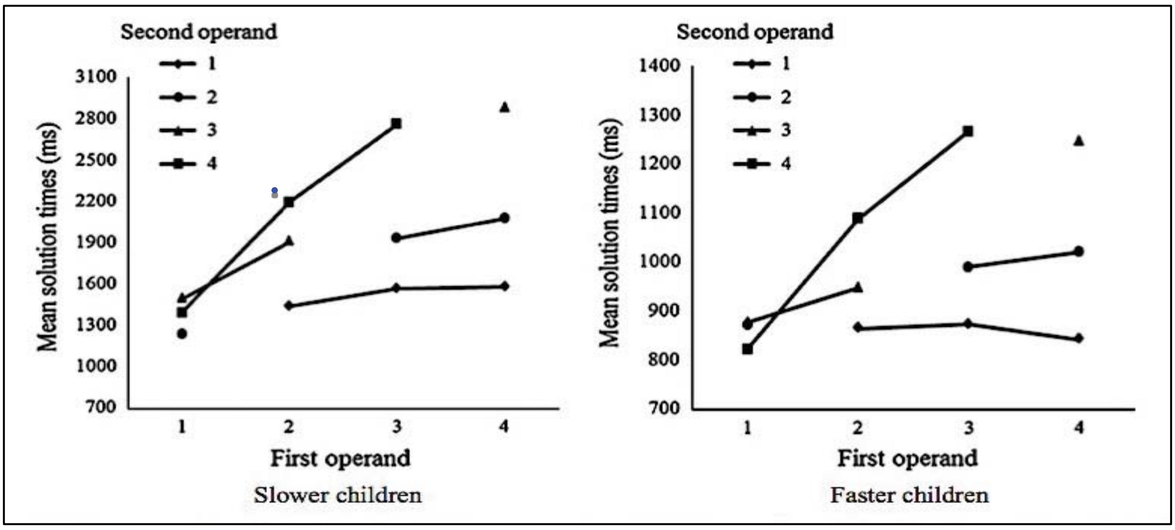


Figure 2. Répartition des temps de réponses à des additions avec petits opérandes (1 à 4, hormis les doubles) pour les enfants les plus lents (à gauche) et les enfants les plus rapides (à droite).
Exemple du temps de réponse obtenu pour l'addition 2 + 4 : environ 2200 ms pour les enfants les plus lents et environ 1100 ms pour les enfants les plus rapides. (Thevenot, Barrouillet, Castel et Uittenhove, 2016)

À la lumière de ces données très récentes, on peut alors émettre l'hypothèse que plus on recourrait à des quantités analogiques bien organisées numériquement, plus la procédure mentale arithmétique en serait efficace. On peut ainsi se demander si le type de références numériques fournies aux enfants lors de leurs premiers apprentissages pourrait alors avoir une incidence sur leur compréhension du nombre et sur son utilisation dans les calculs. Cette problématique fut ainsi l'objet de plusieurs expériences menées lors de ma thèse.

III - EXPÉRIMENTATIONS

Depuis longtemps, un lien entre doigts et nombres est connu. Plus précisément, les habiletés sensori-motrices digitales rendent compte de la réussite arithmétique des enfants. Pour comprendre le contexte des études menées ici, nous rendrons compte d'abord de quelques résultats expérimentaux de la littérature scientifique qui mettent en évidence ce lien doigts et nombres. Nous indiquerons ensuite les corrélations obtenues lors d'une étude longitudinale. Et enfin, nous présenterons les résultats d'une étude d'entraînement menée en classes de cours préparatoire (CP).

1 Contexte de recherche

Au début du 20e siècle, un syndrome clinique particulier a retenu toute l'attention d'un médecin chercheur. Quelques-uns de ses patients, à l'issue d'une atteinte cérébrale, souffraient de l'association systématique de quatre symptômes, comprenant notamment des troubles du calcul et une agnosie digitale (Gerstmann 1924 ; 1940). Depuis, ce défaut de reconnaissance tactile des doigts a été retrouvé chez des enfants dans des formes développementales, toujours en association avec des difficultés numériques et arithmétiques (Kinsbourne et Warrington, 1963). Pratiquée sur six adultes devant être opérés de tumeurs cérébrales, la simulation de telles lésions cérébrales par la technique de stimulation neuronale focale a permis de retrouver les symptômes cliniques décrits par Gerstmann chez trois des patients : perturbations significatives en calcul mental et difficultés de reconnaissance des doigts (Roux, Boetto, Sacko, Chollet et Trémoulet, 2003). Il a également été montré à plusieurs reprises l'existence d'une corrélation, voire d'un pouvoir prédicteur, entre une bonne gnosie digitale et une réussite en mathématiques (Fayol, Barrouillet et Marinthe, 1998 ; Reeve et Humberstone, 2011 ; Wasner, Nuerk, Martignon, Roesch et Moeller, 2016). Enfin, grâce à de nombreuses expériences menées sur un plan neuro-anatomique, nous savons aujourd'hui que les adultes continuent à recruter les circuits neuronaux responsables de la mobilité et de la sensibilité des doigts lors de la résolution mentale d'additions et soustractions (Rusconi, Walsh et Butterworth, 2005 ; Sato, Cattaneo, Rizzolatti et Gallese, 2007 ; Simon, Mangin, Cohen, Le Bihan et Dehaene, 2002). En complément de cet argument anatomique, le lien entre doigts et nombres peut aussi être expliqué par des raisons davantage fonctionnelles (Berteletti et Booth, 2015 ; Butterworth, 1999 ; Di Luca et Pesenti, 2011 ; Fayol et Seron, 2005). Comme les activations cérébrales se manifestent aussi dans les circuits moteurs, on suppose dans l'hypothèse fonctionnelle que les doigts ont pu constituer des aides procédurales pendant l'enfance lors des activités de dénombrement et de calcul (pour une revue de littérature : Guedin, Thevenot et Fayol, 2017). Selon le courant de la cognition incarnée, les associations doigt et nombres encore visibles à l'âge adulte seraient une réminiscence des premières stratégies de comptage sur les doigts (Berteletti et Booth, 2015 ; Butterworth, 1999).

2 Étude de corrélations

Pour mieux comprendre le lien entre arithmétique et habiletés sensori-motices ou cognitives, nous avons mesuré des corrélations entre différentes performances obtenues par 31 enfants de 7 à 15 ans. Il s'agissait des enfants qui constituaient le groupe contrôle d'une étude longitudinale menée auprès de 31 enfants avec déficience motrice de naissance, ce qui explique l'étendue des âges. La corrélation entre l'efficacité en résolution additive (temps de réponses à des additions de deux nombres à un chiffre) et la réussite en comptage sur les doigts ne fut pas significative. Cette absence de corrélation peut être expliquée par l'âge avancé des enfants de notre groupe. En effet, une large étude longitudinale sur des enfants de la grande section maternelle à la troisième année de l'école primaire a permis de montrer l'évolution de la corrélation entre l'usage des doigts et les performances. Elle est forte et positive en maternelle et au début de la première année primaire pour disparaître et même devenir significativement négative en deuxième année primaire (Jordan, Kaplan, Ramineni et Locuniak, 2008). Ces résultats montrent que les doigts aident et même prédisent la réussite ultérieure en début de la scolarité, puis ils cessent d'aider au profit d'autres stratégies mentales plus efficaces. Seuls les enfants plus faibles continuent à recourir à leurs doigts en troisième année primaire (Goldin-Meadow, Levine et Jacobs, 2014).

Le lien entre additions et capacités de mémoire s'est également révélé non significatif dans notre étude. Ce résultat est plutôt en faveur de l'hypothèse récente du recours aux procédures automatisées dans les calculs additifs (Thevenot, Barrouillet, Castel et Uittenhove, 2016 ; Uittenhove, Thevenot et Barrouillet, 2016), plutôt qu'en faveur de l'hypothèse classique d'une récupération directe en mémoire à long terme. Pour information, cette corrélation est cependant significative à .43 pour les enfants du groupe d'enfants avec déficience motrice, soulignant des mécanismes développementaux différents pour les deux populations, notamment avec la possibilité de phénomènes compensatoires (Thevenot, 2014) qui seront évoqués ici ultérieurement. Dans la population d'enfants au développement ordinaire, nous avons par ailleurs mis en évidence un très fort lien entre l'efficacité de résolution additive et la capacité à reconnaître les configurations canoniques de doigts levés (r= .74). Ce résultat entretient également l'hypothèse d'un recours à des procédures ancrées dans la manipulation de nos doigts pendant l'enfance. Nous avons trouvé une corrélation encore plus forte (r= .86) avec la capacité à reconnaître les configurations canoniques de points (voir Figure 3). Ce nouveau résultat dans la littérature scientifique nous a donné envie de tester l'impact de l'utilisation de ces constellations canoniques en classe.

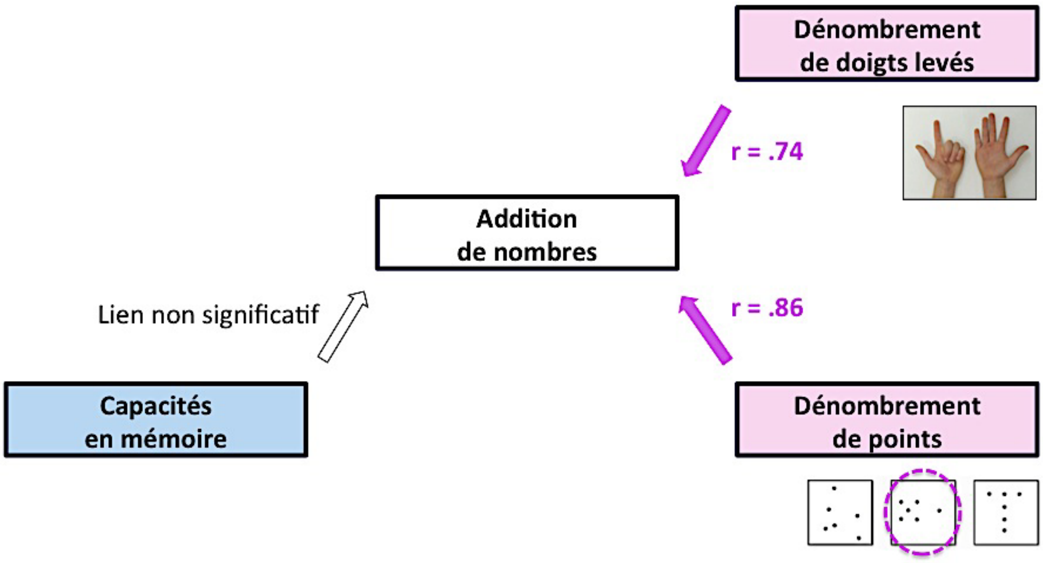


Figure 3. Corrélations obtenues auprès de 31 enfants au développement ordinaire.

3 Étude d'entraînement en classe

Afin de vérifier si les représentations numériques organisées sous forme de constellations de points pouvaient constituer un support didactique efficace pour construire les compétences attendues à l'école, nous avons mené un entraînement comparatif en classes de cours préparatoire. Avec l'utilisation régulière de points représentant les quantités jusqu'à 20 agencées en base 5 + n (Daffaure et Guedin, 2011), nous espérions ainsi aboutir à une automatisation progressive de la procédure arithmétique entraînée. Les quantités ont d'abord été proposées aux élèves sous la forme d'un carnet de deux nombres individualisés (Figure 4), afin de pouvoir les comparer ou les additionner. Puis le travail a été mené sur les constellations de points jusqu'à 20, cette fois réunies sur une seule page A4 (Figure 5).

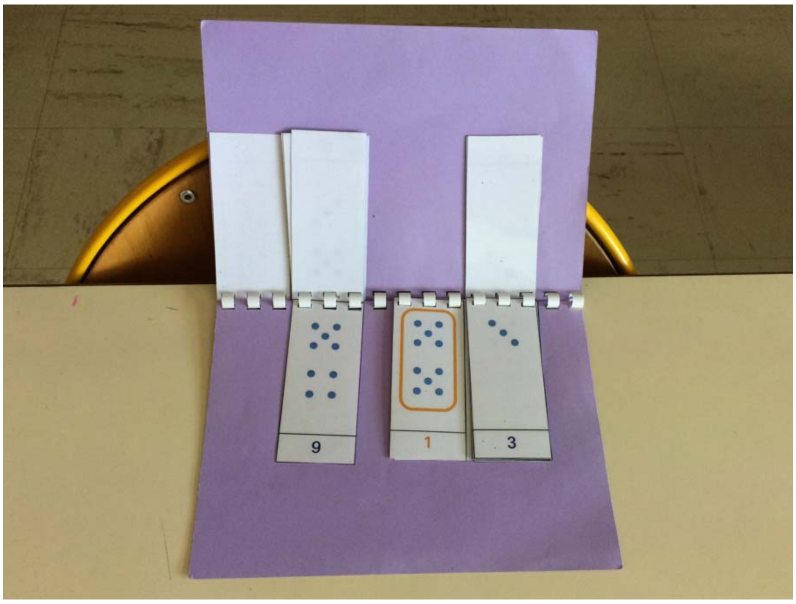


Figure 4. Carnet pour visualiser et manipuler deux nombres semi-symboliques. Ici, 9 et 13.

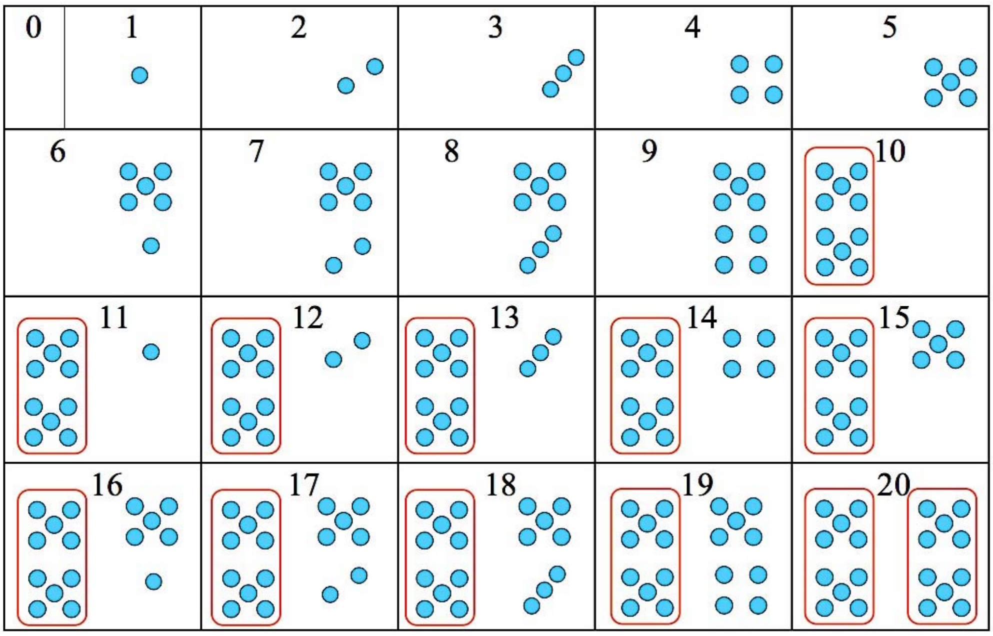


Figure 5. Feuille A4 pour additionner et soustraire deux nombres semi-symboliques.

L’étude comparative a été menée auprès de quatre classes de CP : d’une part, deux classes où les enfants ont utilisé très classiquement leurs doigts lors des séances de mathématiques ; d’autre part, un groupe constitué de deux autres classes où les enfants ont appris à se servir des constellations de points, sans pour autant leur interdire l’usage ponctuel de leurs doigts. Pour évaluer les progrès, des pré-tests et post-tests ont été effectués avec des épreuves issues de la batterie Tedi-Math (Van Nieuwenhoven, Grégoire et Noël, 2001). Nous avons choisi de centrer nos évaluations sur 5 domaines : la maîtrise fonctionnelle du nombre dans les activités de dénombrement, la connaissance des dénominations et des écritures symboliques des nombres, la compréhension du système décimal avec la notion de dizaines, les calculs additifs et soustractifs et enfin, la résolution de problèmes verbaux. Sans surprise, le type de support externe utilisé, doigts ou constellations, n’a pas d’incidence sur la connaissance des désignations orales et écrites des nombres. Les enfants des deux groupes atteignent en effet le même niveau à cette épreuve. En comparant les moyennes, les enfants qui ont utilisé le support multimodal de constellations de points ont été meilleurs dans les quatre autres domaines. La supériorité est significative dans deux domaines en particulier : pour l’usage fonctionnel du nombre, qui évalue principalement la connaissance des principes de dénombrement, ($p= .002$) et pour la compréhension de l’organisation en dizaines et unités ($p= .04$). On s’attendait aussi à une répercussion positive en arithmétique et donc à une progression significativement supérieure en calcul pour les enfants ayant bénéficié de la procédure multimodale.

La supériorité descriptive des moyennes ne fut pas confirmée par l’analyse statistique ($p=. 51$) en ce qui concerne le calcul (voir Figure 6). Pour en attester, il aurait fallu chronométrer les épreuves d’additions et de soustractions pour évaluer plus finement les progrès au cours de l’année de CP et repérer les enfants les plus efficients. Cependant, les observations des enseignants de CE1 sont très positives sur le plan arithmétique. Ils rapportent que les élèves ayant été entraînés avec les constellations disent « voir dans leur tête » les points agencés et ils sont aujourd'hui capables de calculer efficacement mentalement sans recourir aux doigts. Sans pour autant pouvoir conclure à une supériorité arithmétique d’un des deux supports utilisés dans cette étude expérimentale préliminaire, nous pouvons encourager les enseignants à utiliser les constellations canoniques de points pour donner du sens aux quantités et au système décimal et ainsi espérer développer des procédures de calcul efficaces.

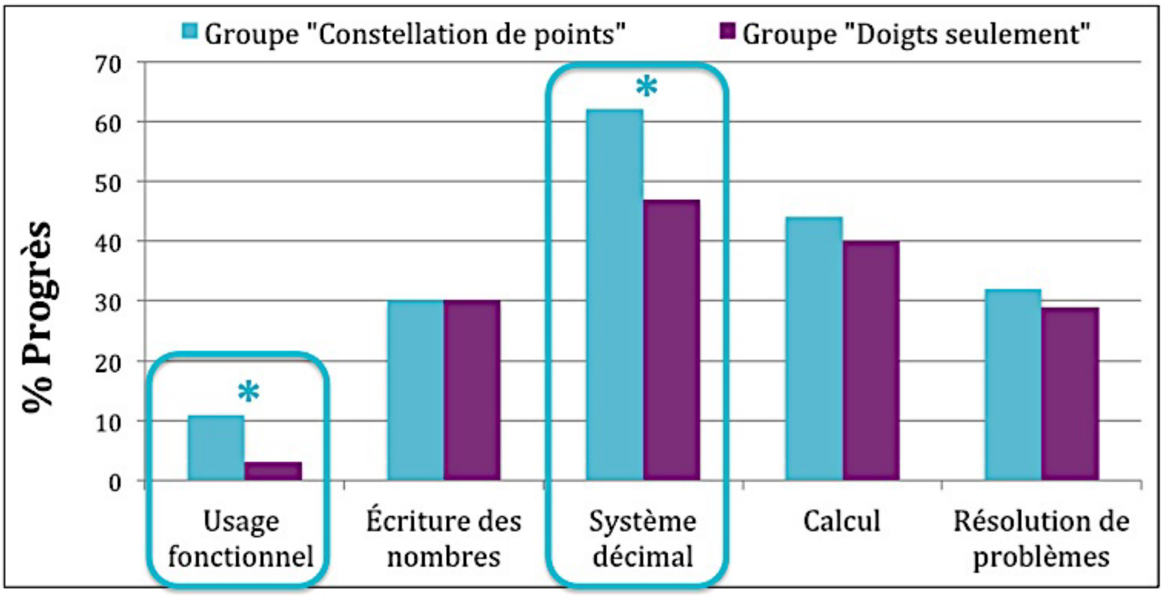


Figure 6. Comparaison des progrès obtenus entre les deux groupes de l'étude d'entraînement.
* Supériorité significative pour le groupe entraîné avec les constellations.

IV - INTERETS D'UNE PEDAGOGIE MULTIMODALE

Le travail sur constellations de points a l'avantage de fournir aux enfants des quantités facilement identifiables et donc a priori mobilisables efficacement dans leurs calculs. Nous montrerons ici que des activités menées avec une dimension multimodale permettent certainement de favoriser l'automatisation des procédures entraînées et/ou la mémorisation des faits additifs. Le recours à différents canaux cognitifs dans une telle pédagogie multimodale est aussi l'occasion de différenciation pédagogique. Enfin, elle se révèle bénéfique pour la mise en place de phénomènes de compensation en cas de troubles avérés chez certains enfants ou en cas de persistance à utiliser exclusivement les doigts.

1 Mémorisation renforcée

Il a été montré qu'un triple codage des informations traitées favorise la mémorisation (Engelkamp et Zimmer, 1985 ; Tellier, 2010). Dans la procédure entraînée sur la feuille de points de constellations, une triple dimension cognitive est intentionnellement sollicitée. Par exemple, pour calculer l'addition 6 + 7, l'enfant prend d'abord connaissance des deux quantités au sein de la feuille de façon visuelle. Puis, pour symboliser l'ajout des deux quantités ensemble, il peut les réunir en les entourant de manière gestuelle, au doigt ou avec un feutre. Et enfin, l'accès au résultat peut être facilité par le recours à une décomposition verbale, telle « 6 et 6, ça fait 12 et encore 1, ça fait 13 ! ». Dans cet entraînement procédural, ce sont donc des entrées visuelle, gestuelle et verbale qui sont systématiquement associées. Au niveau du fonctionnement cognitif, trois différentes mémoires sont ainsi sollicitées dans le cerveau, ce qui renforce les chances d'une mémorisation solide. En d'autres termes, et tout en mettant l'accent sur l'importance de la mémoire de travail au cours des apprentissages, différentes modalités entraînent une trace mémorielle plus riche (Baddeley, 1992). Sur un plan pratique, notons que la feuille A4 réunissant les 20 constellations numériques peut être glissée sous une pochette plastique afin que les quantités soient entourées au feutre effaçable et que le même support puisse servir tout au long de l'année.

C'est le même outil qui est exploité pour donner du sens aux procédures soustractives. Dans l'exemple de la soustraction 12 – 5, l'enfant se centre visuellement sur la quantité 12. Il barre ensuite gestuellement au feutre, ou sous son doigt, une constellation de 5 points identifiable de façon immédiate, comme par subitizing. L'enfant reconnaît également aisément la quantité restante, à savoir une seconde constellation de 5 points assortie de 2 autres points, avec, si nécessaire l'activation de la recomposition numérique « 5 et 2, ça fait 7 » pour retrouver verbalement le résultat de l'opération. Le fait que cela soit le même support qui aide à résoudre additions et soustractions est très favorable à la mise en place de liens conceptuels. Grâce à ses manipulations, l'enfant comprend et active plus facilement la notion de réversibilité selon laquelle, si 6 et 7 font 13, alors 13 dont on enlève 6 donne 7. Il peut en extraire peu à peu la règle de calcul réfléchi suivante : « Si a + b = n, alors n – a = b ou encore n – b = a ».

Fournir aux enfants des outils leur permettant d'aboutir systématiquement à des résultats corrects a également des effets très positifs sur la mémorisation. En effet, le cerveau est capable de retenir de façon incidente des résultats, seulement s'il est possible de les identifier comme des invariants (Geary, 2005). Déjà, en dehors de tout contexte scolaire, lorsque le jeune enfant manipule régulièrement ses jouets, des cubes, des cuillères, ... il finit par exemple par en conclure de lui-même que 2 entités et 1 entité font toujours 3 entités en tout. Tandis que dans le cas d'un enfant qui est confronté à des résultats aléatoires à cause de procédures inefficaces, la variabilité des réponses obtenues ne permet pas à son cerveau d'extraire l'invariant correct à retenir. Ces résultats aléatoires peuvent justement s'observer chez des enfants avec des difficultés motrices ou de la coordination. L'objectif d'une remédiation pédagogique est aussi de redonner de la stabilité aux apprentissages et donc aux connaissances déclaratives et procédurales qui en découlent.

2 Différenciation pédagogique incidente

Il est toutefois possible qu'un enfant soit en difficulté pour utiliser un tel support avec des quantités numériques directement sous leur forme symbolisée par des représentations dessinées. Afin de travailler dans la zone proximale de développement de l'enfant (Bruner, 1983), on peut alors également associer les constellations visuelles à des jetons manipulables. Cette association rendra les décompositions et recompositions de quantités plus concrètes avec des déplacements réels d'unités. Concernant l'addition 6 + 7, nous avons vu que l'enfant peut prendre appui sur un passage par les doubles avec le calcul suivant : « 6 et 6, ça fait 12 et encore 1, ça fait 13 ». Les doubles sont en effet les faits additifs les plus rapidement retenus par cœur dans le développement d'un enfant. Dans le cas d'un soutien ponctuel par les jetons, c'est l'éloignement d'un jeton de la quantité 7 qui mettra en évidence les deux quantités identiques 6 et 6 en tant que double facilement identifiable comme 12. D'autres enfants seront plus à l'aise avec la sous-base 5 et préféreront mettre en évidence 5 unités issues des 6 jetons et également 5 autres unités issues des 7 jetons, cela en éloignant respectivement 1 et 2 jetons. Auquel cas, c'est la recomposition suivante « 5 et 5, ça fait 10 et encore 3, ça fait 13 » qui permettra à l'enfant d'accéder au bon résultat. À noter que ce passage de 10 à 13 peut également être effectué par l'enfant au début de ses apprentissages par sur-comptage oral des 3 jetons (ou des 3 points) au-delà de la dizaine : « onze, douze, treize ». Enfin, toujours au sein du répertoire classique des stratégies possibles de décompositions-recompositions, d'autres enfants pourront peut-être préférer prendre appui sur les compléments à 10 lorsqu'ils sont bien mémorisés. C'est en complétant la quantité 6 à la dizaine – à l'aide de 4 jetons provenant de la quantité 7 – ou en complétant la quantité 7 à la dizaine – à l'aide de 3 jetons provenant de la quantité 6 – que les enfants effectueront la somme. L'usage des constellations permet ainsi une différenciation pédagogique en laissant l'enfant libre de choisir la décomposition avec laquelle il est le plus à l'aise au sein de son répertoire stratégique (Guedin, 2013). Selon les connaissances de l'enfant, la taille des nombres et l'habillage de la situation proposée, l'une d'elles sera privilégiée.

Si au contraire, des enfants sont déjà plus à l'aise avec leurs yeux et que les manipulations gestuelles deviennent une surcharge pour eux, la feuille de constellations se prête très bien aux stratégies de calcul réfléchies évoquées, simplement avec des traitements visuels. On retrouve cette même évolution dans les procédures de dénombrement (Camos, 2003), où les enfants ont d'abord besoin du pointage digital, puis où ils réussissent avec un simple suivi visuel. De cette procédure de dénombrement visuel ou gestuel en découle peu à peu l'habileté fondamentale de résolution additive orale puis mentale par comptage ou sur-comptage. De façon similaire, les procédures de calcul entraînées sur constellations au départ de façon gestuelle – puis visuelle – peut devenir aisément un acte mental de calcul réfléchi. C'est certainement à ce moment que les enfants disent « Je n'ai plus besoin de la feuille de points, je les vois dans ma tête. ». Cependant, comme dans tous les domaines de développement, le rythme de progrès est propre à chaque enfant et l'on ne peut présager du moment où cet ultime passage vers la mentalisation s'opérera. Peu importe, l'enfant qui a encore besoin de son support de constellations continue de faire des manipulations numériques, continue de le faire au rythme de la classe, et il continue de le faire avec réussite.

Nous avons décrit ici un des principes possibles de différenciation pédagogique. Il s'agit de fournir des niveaux d'étayage différents selon le niveau des enfants, tout en visant le même objectif scolaire. Ici, pour automatiser des procédures de calcul, l'enfant pourra donc d'abord bénéficier de quantités analogiques manipulables sous forme de jetons. Mais étayer les processus fragiles de l'enfant en lui fournissant les aides appropriées n'est que la première phase d'un acte de remédiation. Une seconde phase, dite de désétayage, doit permette à l'enfant de peu à peu fonctionner seul, notamment en se détachant des aides matérielles qui devraient lui être nécessaires de façon transitoire seulement. En vue de ce désétayage, il faudra donc accompagner l'enfant pour passer ensuite à des quantités semi-symboliques grâce aux points de constellations uniquement dessinés. Enfin, il est attendu que l'enfant puisse résoudre les situations additives avec les seules représentations symbolisées des quantités : les nombres et les signes opératoires. À ce stade de réussite, les symboles sont censés être greffés mentalement sur les quantités analogiques. Si l'hypothèse d'un « sens des nombres » greffé sur une ligne numérique mentale (Moyer et Landauer, 1967) est la plus fréquente dans la littérature scientifique, nous ne sommes pas encore capables de savoir précisément comment ces magnitudes sont organisées dans notre cerveau. Tout indique cependant que cette organisation cérébrale soit fortement spatialisée (Fischer et Shaki, 2014). Les points de constellations étant justement installés de façon très spatiale, nous pouvons faire l'hypothèse que cet agencement facilite leur mentalisation et organisation cérébrales.

3 Phénomènes compensatoires

Les résultats de l'étude d'entraînement menée en CP montre que l'utilisation de points organisés est complémentaire à l'usage des doigts lors d'une pédagogie ordinaire, notamment pour donner du sens aux quantités et à leur organisation décimale au-delà de 10. Ce support numérique externe se révèle aussi pertinent pour suppléer au recours aux doigts quand ceux-ci ne peuvent pas être bien utilisés par l'enfant, sans nécessiter une gestion compliquée de matériels. Nous le recommandons ainsi pour des enfants présentant des difficultés avec leurs doigts, qu'elles soient dues à un handicap moteur, une dyspraxie isolée ou encore à une déficience mentale. Dans ces cas, la composante gestuelle, consistant à entourer ou barrer les quantités, peut être exécutée par une tierce personne devant l'enfant. Ce sont les sollicitations visuelle et verbale qui permettront de construire la procédure et de l'ancrer dans le fonctionnement cognitif. Cette démarche s'inscrit dans le courant de cognition incarnée selon lequel ce sont justement nos expériences sensorielles et motrices qui permettent la mise en place de concepts et d'abstraction porteuse de sens. Dans le cas de difficultés motrices, les sollicitations visuelles et verbales permettront de compenser la déficience gestuelle. Et même, il a été montré que les zones cérébrales motrices restent sollicitées par l'observation du geste de la tierce personne puisque les neurones miroirs de ces zones continuent justement à s'activer en l'absence de mouvement réel lors de situations d'observation d'actions d'autrui (Buccino et al., 2012). Dans le cas d'enfants présentant un trouble du langage, ce sont les sollicitations gestuelles et visuelles qui seront suffisantes pour la construction des procédures additives sur points de constellations. Le gestuel et le visuel viendront justement en compensation au langage déficient et pourront même permettre un enrichissement verbal progressif. Chaque enfant prendra appui sur l'habileté qu'il maîtrise le mieux (voir Figure 7).

Étonnamment, certains enfants avancés dans leur scolarité ont systématiquement recours à des procédures digitales pour résoudre les calculs qui leur sont proposés. Malgré une exposition en classe à d'autres stratégies possibles, ces enfants peuvent appréhender le fait de s'aventurer dans une nouvelle procédure au risque de faire davantage d'erreurs. Ils considèrent certainement leur technique digitale efficace puisque c'est ainsi qu'ils ont jusqu'alors réussi. Ils ne prennent pas en compte la lenteur de leur procédure, en comparaison aux stratégies de calcul réfléchi mental, pourtant alors jugées bien plus matures dans le développement de l'enfant. En effet, un usage prolongé des doigts (Jordan, Kaplan, Ramineni et Locuniak, 2008) devient inadapté s'il reste persistant et exclusif au-delà du CE2, notamment lorsque d'autres procédures sont bien plus adéquates pour traiter des données numériques au-delà de 10. Ce déficit d'automatisation des procédures de comptage mentalisé peut même être envisagé comme la cause de dyscalculie développementale (Thevenot, 2017). Nous constatons que d'interdire à ces enfants de compter sur leurs doigts n'est pas efficace et que, sans accompagnement adapté, ils n'accèdent pas seuls aux procédures mentales à partir de leurs expériences sensori-motrices. Ces enfants auraient besoin d'un autre support qui puisse continuer à soulager leur mémoire de travail, en effet révélée très faible en cas de troubles des habiletés mathématiques (Geary, Hoard, Byrd-Craven et DeSoto, 2004). En proposant un travail sur les constellations de points, notre pratique pédagogique nous a montré que ces enfants sont capables d'opérer un glissement des procédures digitales immatures vers des procédures plus élaborées de type décompositions-recompositions. Ces progrès sont possibles dans la mesure où les quantités organisées visuellement permettent de compenser leurs faibles ressources en mémoire de travail. Tout en ayant la possibilité de conserver un matériel rassurant et opérationnel, le répertoire stratégique de ces enfants s'étend peu à peu. Et par imprégnation progressive, certains d'entre eux sont capables de mentaliser les représentations numériques visuelles et d'automatiser les procédures de calcul mental.

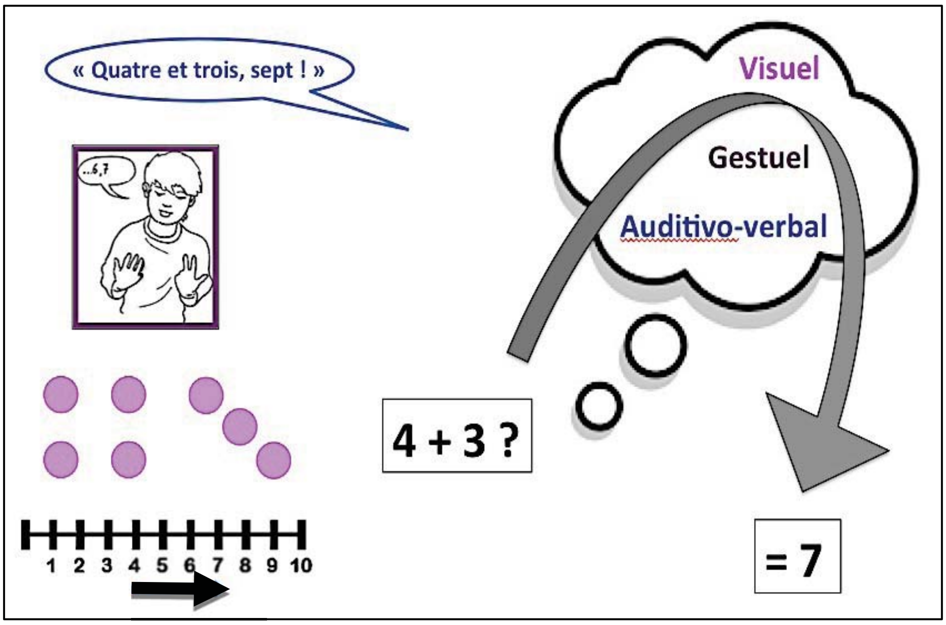


Figure 7. Intérêts de la pédagogie multimodale : de la manipulation à la symbolisation.

V - CONCLUSION

Sur un plan scientifique, le débat reste ouvert quant aux processus cognitifs en jeu dans les situations additives. Ils peuvent consister en une mémorisation des faits arithmétiques ou s'apparenter davantage à une automatisation des procédures grâce à l'internalisation de l'usage de supports externes. Nous ne savons pas si ces mécanismes additifs reposent sur des représentations à dominance visuelle, ou s'ils sont issus d'une automatisation gestuelle, ou encore, s'ils résultent davantage d'une mémorisation auditivo-verbale, ou même encore, s'ils sont basés sur une représentation spatialisée de gauche à droite, telle la ligne numérique mentale. Il est d'ailleurs possible que cette diversité d'hypothèses reflète la variabilité interindividuelle et même aussi des préférences intra-individuelles selon la nature des situations à traiter. Dans notre étude sur la recherche de corrélations avec l'efficience en additions, seules les habiletés visuo-spatiales de dénombrement de doigts levés ou de dénombrement de points se sont révélées significatives, tandis qu'aucun lien n'est ressorti avec les capacités mémorielles auditivo-verbales. Cette absence de significativité au niveau du groupe n'écarte pas l'éventuelle implication des ressources mémorielles pour certains des enfants testés. Ainsi, face à cette variété de fonctionnements et afin de permettre une mise en place des résultats additifs plus solide et plus fiable, nous invitons les pédagogues à recourir à plusieurs canaux cognitifs lors de leurs enseignements, tels ceux évoqués ici : visuels, gestuels et auditivo-verbaux. Et on pourrait encore ajouter des sollicitations davantage kinesthésiques (par des déplacements par exemple), voire haptiques (avec la « génération tablettes »), sans oublier la mémoire épisodique avec la richesse des anecdotes personnelles ou de tout souvenir collectif marquant qui pourraient servir de référence. La pédagogie multimodale soutient les processus d'apprentissage de chaque enfant tout-venant et facilite le franchissement de difficultés passagères. Elle est aussi destinée à aider les enfants qui auraient un trouble isolé ou une fonction déficitaire de naissance. Ainsi, cette sollicitation cognitive plurielle peut permettre des phénomènes compensatoires bénéfiques grâce à la mobilisation des canaux préservés. Grâce à sa réussite, l'enfant retrouve confiance en soi et plaisir d'apprendre.

Sur un plan didactique, pour que chaque enfant puisse réussir l'apprentissage des processus additifs, la mise en place de procédures fonctionnelles est préférable à une mémorisation verbale par cœur des tables. Même si un document d'accompagnement des programmes en 2002 mettait déjà en garde contre ce type d'approche, cette méthode reste utilisée dans certains CP. Les enseignants peuvent constater que l'apprentissage par cœur des tables d'addition ne porte pourtant pas ses fruits à long terme. En effet, d'une part, elle est dénuée de sens numérique pour l'enfant et d'autre part, elle n'est pas suffisamment ancrée dans les systèmes cognitifs en jeu dans les processus additifs mis en évidence lors des investigations scientifiques actuelles. Autant la multiplication est en lien avec les zones cérébrales du langage (Dehaene et Cohen, 2007) – et il est donc bien fondé d'apprendre les faits multiplicatifs par cœur –, autant l'addition trouve son substrat cérébral dans les aires responsables de la sensori-motricité des doigts et des traitements visuo-spatiaux. Les recommandations pédagogiques les plus récentes préconisent ainsi de mettre l'accent sur les manipulations et les jeux numériques (Cnesco, 2015). Un tel accent pédagogique sur l'action et le sens est particulièrement important aujourd'hui à l'école primaire puisque les écrans ont supplanté dés et cartes à jouer dans le quotidien des enfants... En accompagnant chaque élève sur le chemin de la manipulation vers la symbolisation, avec des stratégies multimodales, nous lui donnons plus de chances de réussir. Les résultats de l'étude d'entraînement en classes de CP montrent que le travail avec des points de constellations peut justement permettre cette réussite. Le statut semi-symbolique de ce support numérique est tout particulièrement important car il permet un pont cognitif entre le format analogique, où les quantités sont encore matériellement présentes, et les formats symboliques, où les quantités sont représentées par des codes directement reconnaissables.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ASHCRAFT, M. H., & FIERMAN, B. A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology,* **33**, 216-234.

BADDELEY, A. (1992). Working memory: The interface between memory and cognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, **4**, 281-288.

BAROODY, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**,141-157.

BELLER, S., & BENDER, A. (2011). Explicating numerical information- when and how fingers support (or hinder) number comprehension and handling. *Frontiers in Psychology*, **2**. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00214

BERTELETTI, I., & BOOTH, J. R. (2015). Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems. *Frontiers in Psychology*, **6**. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00226

BRISSIAUD, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer : Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres*. Paris : Retz.

BRUNER, J. (1983). *Le Développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : Puf.

BUCCINO, G., ARISI, D., GOUGH, P., APRILE, D., FERRI, C., SEROTTI, L., ... & FAZZI, E. (2012). Improving upper limb motor functions through action observation treatment: a pilot study in children with cerebral palsy. *Developmental Medicine & Child Neurology*, **54**, 822-828.

BUTTERWORTH, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

CAMOS, V. (2003). Counting strategies from 5 years to adulthood: adaptation to structural features. *European Journal of Psychology of Education*, **18**, 251–265.

CARPENTER, T. P., & MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, **15**, 179-202.

CNESCO, (2015). *Synthèse des recommandations – Conférence de consensus « nombres et opérations » : Premiers apprentissages à l'école primaire*. Institut Français de l'Éducation : Paris.

CROLLEN, V., MAHE, R., COLLIGNON, O., & SERON, X. (2011). The role of vision in the development of finger–number interactions- Finger-counting and finger-montring in blind children. *Journal of Experimental Child Psychology*, **109**, 525-539.

DAFFAURE, V., & GUEDIN, N. (2011). *Construction et utilisation du nombre : outils d'aide pour des élèves en difficulté d'apprentissage*. Marseille : Solal.

DEHAENE, S., & COHEN, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, **1**, 83-120.

DEHAENE, S., & COHEN, L. (2007). Cultural recycling of cortical maps. *Neuron*, **56**, 384-398.

DEHAENE, S., IZARD, V., SPELKE, E., & PICA, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, **320**, 1217-1220

DI LUCA, S., & PESENTI, M. (2011). Finger numeral representations: more than just another symbolic code. *Frontiers in Psychology*, **2**. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00272

DI LUCA, S., LEFEVRE, N., & PESENTI, M. (2010). Place and summation coding respectively for canonical and non-canonical finger numeral representations. *Cognition,* **117**, 95–100.

ENGELKAMP, J., & ZIMMER, H. D. (1985). Motor programs and their relation to semantic memory. *German Journal of Psychology*, **9**, 239-254.

FAYOL, M., & SERON, X. (2005). About numerical representations: Insights from neuropsychological, experimental and developmental studies. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (p. 3-22). New York: Psychology Press.

FAYOL, M., BARROUILLET, P., & MARINTHE, C. (1998). Predicting arithmetical achievement from neuro-psychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, **68**, B63-B70.

FISCHER, M. H., & SHAKI, S. (2014). Spatial associations in numerical cognition: from single digits to arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, **67**, 1461-1483.

GEARY, D. C. (2005). Les Troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. Dans M.-P. Noël (Dir.), *La Dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant* (p. 169-191). Marseille : Solal.

GEARY, D. C., HOARD, M. K., BYRD-CRAVEN, J., & DESOTO, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, **88**, 121-151.

GERSTMANN, J. (1924). Fingeragnosie-Eine umschriebene Storung der Orientierung am eigenen Korper. *Wiener Klinische Wochenschrift*, **37**, 1010-1012.

GERSTMANN, J. (1940). Syndrome of finger agnosia, disorientation for right and left, agraphia and acalculia: local diagnostic value. *Archives of Neurology & Psychiatry*, **44**, 398-408.

GOLDIN-MEADOW, S., LEVINE, S., & JACOBS, S. (2014). Gesture's role in learning arithmetic. In L. Edwards, F. Ferrara, & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics* (p. 51-72). Charlotte: Information Age Publishing.

GROEN, G. J., & PARKMAN, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, **79**, 329-343.

GUEDIN, N. (2012). Difficultés multiples en mathématiques – comment compter sur des aides à l'école ? *ANAE. Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, **120-121**, 579-586.

GUEDIN, N. (2013). *Adapter sa pédagogie : Remédiation en mathématiques au quotidien*. Dijon : Scérén.

GUEDIN, N. (2017). Au regard des dernières données de la cognition numérique, quelles remédiations proposer pour des progrès sur les bancs de l'école ? *Rééducation Orthophonique*, **270**, 255-292.

GUEDIN, N., THEVENOT C., & FAYOL, M. (2017, sous presse). Des doigts et des nombres. *Psychologie Française*.

HALBERDA, J., MAZZOCCO, M. M., & FEIGENSON, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, **455**, 665.

JORDAN, N. C., KAPLAN, D., RAMINENI, C., & LOCUNIAK, M. N. (2008). Development of number combination skill in the early school years: when do fingers help? *Developmental Science*, **11**, 662–668.

KINSBOURNE, M., & WARRINGTON, E. K. (1963). Developmental factors in reading and writing backwardness. *British Journal of Psychology*, **54**, 145-156.

LEFEVRE, J. A., SADESKY, G. S., & BISANZ, J. (1996). Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **22**, 216-230.

MANDLER, G., & SHEBO, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General,* **111**, 1-22.

MOYER, R. S., & LANDAUER, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, **215**, 1519-1520.

NOËL, M. P., & ROUSSELLE, L. (2011). Developmental changes in the profiles of dyscalculia: an explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*, **5**. doi: 10.3389/fnhum.2011.00165

PREVITALI, P., RINALDI, L., & GIRELLI, L. (2011). Nature or nurture in finger counting: a review on the determinants of the direction of number–finger mapping. *Frontiers in Psychology*, **2**. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00363

REEVE, R., & HUMBERSTONE, J. (2011). Five-to 7-year-olds' finger gnosia and calculation abilities. *Frontiers in Psychology*, **2**. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00359

ROGGEMAN, C., VERGUTS, T., & FIAS, W. (2007). Priming reveals differential coding of symbolic and non-symbolic quantities. *Cognition*, **105**, 380-394.

ROUX, F. E., BOETTO, S., SACKO, O., CHOLLET, F., & TRÉMOULET, M. (2003). Writing, calculating, and finger recognition in the region of the angular gyrus: a cortical stimulation study of Gerstmann syndrome. *Journal of Neurosurgery*, **99**, 716-727.

RUSCONI, E., WALSH, V., & BUTTERWORTH, B. (2005). Dexterity with numbers: rTMS over left angular gyrus disrupts finger gnosis and number processing. *Neuropsychologia,* **43**, 1609-1624.

SATO, M., CATTANEO, L., RIZZOLATTI, G., & GALLESE, V. (2007). Numbers within our hands: modulation of corticospinal excitability of hand muscles during numerical judgment. *Journal of Cognitive Neuroscience*, **19**, 684-693.

SIEGLER, R. S., & SHRAGER, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do. *Origins of Cognitive Skills*, **23**, 229-293.

SIMON, O., MANGIN, J. F., COHEN, L., LE BIHAN, D., & DEHAENE, S. (2002). Topographical layout of hand, eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, **33**, 475-487.

TELLIER, M. 2010. Faire un geste pour l'apprentissage :Le geste pédagogique dans l'enseignement précoce. In C. Corblin & J. Sauvage (Eds). *L'apprentissage et l'enseignement des langues vivantes à l'école. Impacts sur le développement de la langue maternelle* (p. 31-54). Paris : L'Harmattan.

THEVENOT, C. (2014). La relation entre doigts et nombres : que peuvent nous apprendre les enfants présentant une hémiplégie ? *ANAE. Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, **128**, 47-52.

THEVENOT, C. (2017). La dyscalculie développementale vue comme un déficit d'automatisation des procédures de comptage. *Rééducation Orthophonique*, **269**, 113-124.

THEVENOT, C., CASTEL, C., DANJON, J., RENAUD, O., BALLAZ, C., BAGGIONI, L., & FLUSS, (2014). Numerical abilities in children with congenital hemiplegia- an investigation of the role of finger use in number processing. *Developmental Neuropsychology*, **39**, 88-100.

THEVENOT, C., BARROUILLET, P., CASTEL, C., & UITTENHOVE, K. (2016). Ten-year-old children strategies in mental addition: A counting model account. *Cognition*, **146**, 48-57.

UITTENHOVE, K., THEVENOT, C., & BARROUILLET, P. (2016). Fast automated counting procedures in addition problem solving: When are they used and why are they mistaken for retrieval? *Cognition*, **146**, 289-303.

VAN NIEUWENHOVEN, C., GREGOIRE, J., & NOËL, M. P. (2001). *Test Diagnostique des Compétences de Base en Mathématiques (Tedi-Math*). Paris : ECPA.

WASNER, M., NUERK, H. C., MARTIGNON, L., ROESCH, S., & MOELLER, K. (2016). Finger gnosis predicts a unique but small part of variance in initial arithmetic performance. *Journal of Experimental Child Psychology*, **146**, 1-16.

WIESE, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: the role of language. *Trends in Cognitive Sciences*, **7**, 385-390.

WYNN, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, **24**, 220-251.

XU, F., & SPELKE, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, **74**, B1-B11.

RESSOURCES POUR LA CALCULATRICE EVOLUTION ET TRANSFERABILITE

Jean-Pierre RABATEL
Chargé d'études
Institut Français de l'Education, ENS de Lyon, Equipe EducTice
jean-pierre.rabatel@ens-lyon.fr

Jean-Luc MARTINEZ
Chargé d'études
Institut Français de l'Education, ENS de Lyon, Equipe EducTice
jean-luc.martinez@ens-lyon.fr

Résumé
La calculatrice TI-Primaire Plus™ constitue un environnement propre à susciter l'exploration et l'investigation autour des nombres, des opérations et des problèmes. Plusieurs expérimentations ont été menées en cycle 3 (Taveau & al. 2014, Aldon & Rabatel 2015, Julien 2015) par différentes équipes au niveau national associant des IREM, ESPE et DSDEN. Elles ont permis de mettre en évidence les effets des rétroactions de la machine sur la construction du concept de nombre. Un certain nombre de ressources ont été conçues par les équipes travaillant dans le projet CapriCo pour des apprentissages dans les domaines cités ci-dessus. Dans un premier temps, les enseignants se sont appuyés sur des ressources existantes avant de développer peu à peu leurs propres activités. L'IFé coordonnant ces différentes équipes a souhaité faire des tests croisés entre les équipes ; ainsi les activités produites ont été confrontées à des contextes différents, à des critiques permettant de les améliorer. Tout naturellement, les questions de la mutualisation et donc de la transférabilité des ressources se sont posées. Ces deux questions ont donné lieu à un travail d'homogénéisation des travaux dans un objectif de mutualisation et de publication. La communication retracera l'évolution de ces ressources, les obstacles rencontrés notamment par les enseignants dans la transmission de leurs activités, les réponses apportées et celles en cours de réflexion. Ce travail se situe dans une perspective de documentation du professeur et s'appuie sur le cadre théorique de la genèse documentaire. L'approche documentaire s'intéresse au travail documentaire des professeurs, en introduisant une distinction fondamentale entre un ensemble de ressources disponibles et un document que le professeur développe à partir de cet ensemble, dans un processus de genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2010).

I - HYPOTHESE DE DEPART

La calculatrice, cet outil introduit dans les programmes officiels depuis 2002, participe au calcul instrumenté et constitue un outil d'apprentissage potentiellement riche pour explorer différents domaines mathématiques. Elle permet la mise en œuvre d'un apprentissage mathématique bien au-delà du seul calcul, comme par exemple la construction du nombre. De plus, certaines calculatrices proposent des spécificités qui apportent une autre dimension à cet outil. La calculatrice est donc bien davantage qu'un outil d'aide au calcul. Encore faut-il pour cela qu'elle soit utilisée dans les classes et que l'enseignant s'en empare pour proposer des situations d'apprentissage la mettant en œuvre.

II - MOTIVATION DE NOTRE TRAVAIL

Quelles raisons nous ont encouragés à choisir de travailler sur l'utilisation de la calculatrice à l'école élémentaire ?

Un premier constat : malgré une préconisation des programmes scolaires, la calculatrice reste peu utilisée dans les classes élémentaires.

Pour beaucoup, parents mais enseignants également, la calculatrice est un outil qui semble s'opposer à l'une des missions de l'école : apprendre à calculer. Elle empêcherait les élèves d'atteindre cet objectif fondamental de l'enseignement des mathématiques à l'école.

Le document d'accompagnement des programmes de 2002 "Utiliser les calculatrices en classe" fournissait déjà quelques pistes pour l'utilisation des calculatrices aux cycles 2 et 3.

Le document préconisait d'utiliser les calculatrices dans quatre directions:

- comme outil de calcul ;
- comme instrument dont on cherche à comprendre certaines fonctionnalités ;
- comme support à l'exploration de phénomènes numériques ;
- comme source de problèmes et d'exercices.

D'autre part, des travaux de recherche sur la calculatrice existent mais sont peu nombreux en France ou à l'étranger. (Assude, 2007, Charnay, 2004, Koop, 2016, Zetela, 2016)

Les ressources pour les enseignants sont très peu nombreuses également. On trouve des activités autour de la calculatrice, mais peu de réflexion autour de l'usage de la calculatrice dans les classes.

Face à ce constat, le projet CaPriCo s'est donné comme objectif de faire concevoir des ressources par des enseignants pour développer l'usage de la calculatrice, quel qu'en soit la marque et le modèle, et de la TI-Primaire Plus notamment pour les spécificités qu'elle présente. Ces ressources tentent d'apporter des réponses répondant au besoin de ressources tout en faisant découvrir les apports pédagogiques de la calculatrice.

III - CADRAGE THEORIQUE

Deux cadres théoriques ont nourri notre réflexion : celui de la recherche orientée par la conception (Sanchez et Monod-Ansaldi, 2015) et celui de la genèse documentaire (Gueudet et Trouche, 2010).

Les ressources produites dans le cadre du projet le sont de manière collaborative et itérative, fruits des interactions entre chercheurs et enseignants. Le cadre de la recherche orientée par la conception a permis de s'appuyer sur les expertises respectives des enseignants et des chercheurs pour produire des ressources qui s'adresseront à un public d'enseignants et de formateurs. Le cadre de la « recherche orientée par la conception » (Design based research (Wang et Hanafin, 2005) dans la communauté anglo-saxonne) propose à la fois une méthodologie et un cadre théorique permettant d'analyser les productions issues de la recherche. C'est l'interaction entre les deux communautés, dans un processus itératif d'analyse, de mise en œuvre et de critiques, qui génère des bénéfices pour les deux communautés.

Dans la conception de Gueudet et Trouche (ibid.), une ressource pour un enseignant peut être une idée, une rencontre, un texte, un manuel, une fiche, … avec un contenu pas toujours organisé ou construit.

A partir de ces ressources initiales, les enseignants vont se créer leur propre ressource, riche de leur expérience, de leur réflexion, de la multiplicité de leurs rencontres avec des écrits et de leurs échanges avec des collègues, des chercheurs, … Le résultat de cette « genèse » conduira à un « document » personnel incorporant à la ressource initiale les schèmes d'utilisation, difficilement transférable à d'autres. Le processus de transformation désigné par la genèse documentaire de l'enseignant conduit à des documents difficilement transférables sinon comme une ressource pour d'autres enseignants qui à leur tour pourront la mettre à leur main (instrumentalisation) et modifier leur comportement en fonction des apports de la ressource (instrumentation). C'est ainsi que l'enseignant change la ressource, mais la ressource change aussi l'enseignant, et l'amène peu à peu, à modifier son point de vue. Et pour que le document devienne transférable à d'autres enseignants, il va devoir s'appuyer sur des variables didactiques explicites suffisamment décrites pour être prises en main facilement par le futur utilisateur de la ressource, sans en dénaturer la démarche ou l'objectif.

IV - PROBLEMATIQUE DE NOTRE TRAVAIL

1 Côté chercheur : dialectique entre genèse documentaire de l'enseignant et diffusion pour les autres enseignants

L'objectif du projet CaPriCo amène les enseignants à diffuser leurs ressources au-delà de leurs propres usages. Ils piochent ici et là des ressources et en reconstruisent une nouvelle pour eux-mêmes. Mais celle-ci n'est pas utilisable et diffusable en l'état.

Le passage d'une ressource personnelle à une ressource diffusable et transférable est difficile et se heurte *de facto* à la genèse documentaire propre de chaque enseignant ou collectif d'enseignants

2 Côté enseignant : difficulté de concevoir et rédiger des activités

Un dénominateur commun à ce projet comme à d'autres réside dans le fait que les enseignants éprouvent des difficultés à concevoir et surtout rédiger des activités qui puissent être utilisées par d'autres malgré des demandes explicites et accompagnées comme la proposition d'une fiche « modèle »

D'une manière générale, les enseignants ne voient pas forcément l'intérêt de rédiger leur travail de réflexion puisqu'il n'est pas à diffuser. Ils ont pu réfléchir et construire leur séance de façon détaillée mais n'en retranscrire seulement les étapes pour eux-mêmes. Ils n'écrivent que ce qui leur est utile pour la conduite de la séance avec leurs élèves, avec éventuellement des détails qui ne sont pas opérationnels.

Dans le cadre du projet CaPriCo, l'objectif de publication est bien de créer une ressource incitant à l'usage de la calculatrice dans les classes. Cela implique de porter explicitement à la connaissance des futurs lecteurs les éléments que nous considérons comme essentiels pour faciliter l'usage de l'outil, faire en sorte qu'il devienne un outil parmi d'autres, accessible quand les élèves estiment en avoir besoin, au même titre qu'un dictionnaire ou un compas, et le sortir de l'unique domaine pour lequel il serait utile : le calcul.

Expliciter, décrire les démarches, le déroulement possible d'une séance, les points importants nécessaires à la conduite de la séance, analyser quelques productions d'élèves, proposer des pistes de remédiation, … semblent donc des éléments constitutifs de cette ressource que le projet souhaite produire.

Malgré cet objectif, la rédaction par l'enseignant de son propre travail reste difficile.

Si l'on vient à demander à l'enseignant de préciser par écrit son travail, les éléments qui sont donnés ne correspondent pas forcément aux éléments permettant une appropriation par d'autres mais plus à ceux qui pourraient être utiles pour leur propre usage. Les implicites de l'enseignant, c'est à dire son expérience, ses intentions, ses habitudes vont lui permettre de les mettre en acte le moment venu, de manière plus ou moins consciente et d'agir à bon escient dans la situation présente en fonction de ses objectifs mais font cruellement défaut lorsqu'il s'agit de transférer cette ressource dans un autre contexte.

Seul un entretien d'explicitation pourrait faire exprimer le non-dit, l'implicite, "ce qui va de soi". En fait, hors du contexte du projet, l'enseignant n'a généralement pas besoin de décrire très précisément son activité ou sa séance car il n'a pas de destinataire avec qui partager son travail, à part ses élèves mais eux en sont les bénéficiaires directs. On voit ici toute la difficulté de rendre explicite le résultat d'une genèse construite sur ces deux mouvements d'instrumentation et d'instrumentalisation : comment la ressource a-t-elle été transformée, mise à sa main ? Quelles modifications de son comportement, de ses habitudes, de ses « invariants opératoires » pour reprendre le vocabulaire de Vergnaud, ont été provoquées par cette confrontation à une ressource ?

L'intérêt de faire se rencontrer des mondes ou des milieux différents comme le sont ceux des chercheurs et des enseignants réside dans l'expression, chacun depuis son point de vue, des « essentiels d'une ressource ». Et c'est de cette coexistence de points de vue, de leur confrontation que viennent les explicitations.

Le projet amène les enseignants à produire et à diffuser au-delà d'eux-mêmes, et c'est là une vraie difficulté pour constituer la ressource car ils ne se trouvent plus dans leur domaine de compétences privilégié. De la même façon, les chercheurs sont confrontés à la complexité des schèmes dont l'explicitation est parfois trop complexe pour être envisagée. Il est ainsi nécessaire d'extraire des éléments qui d'un point de vue et de l'autre apparaîtront comme importants ou essentiels pour l'objectif de diffusion que l'équipe s'est donné.

V - QUELLES SPECIFICITES POUR LA TI-PRIMAIRE PLUS

A ce jour, les calculatrices proposant l'ensemble des spécificités décrites ci-dessous sont peu nombreuses. La calculatrice TI-Primaire Plus destinée à des élèves de cycle 3 en fait partie et le projet l'a utilisé comme étant l'un des outils mis à disposition des enseignants et des classes.

Ces calculatrices autorisent une utilisation différente du seul calcul. Mais un certain nombre des activités construites dans le projet peuvent être également conduites avec des calculatrices ne présentant pas ces spécificités.

- La TI Primaire Plus présente l'intérêt de comporter des touches écrites en Français tout comme les messages de rétroaction qu'elle adresse à l'utilisateur.
- Elle affiche une écriture fractionnaire avec une barre de fraction horizontale telle que les enseignants l'exigent de leurs élèves sur leurs cahiers.
- L'opérateur constant permet par exemple l'approche de la division par soustractions itératives.
- Il est possible de remonter dans les calculs précédents grâce à l'historique des calculs.
- Et ce qui fait vraiment la différence, c'est son mode exercice. Il propose le choix explicite de l'ensemble des nombres dans lequel on veut travailler (N, D, Q+) et il permet de problématiser des calculs avec des expressions sans inconnue, ou avec des valeurs ou des opérations inconnues. Les rétroactions de la calculatrice sont de nature à relancer l'investigation des utilisateurs par la validation ou la non validation des solutions proposées, accompagnées d'une argumentation sous la forme d'une inégalité mathématique.
- Enfin, un émulateur permet à l'enseignant de projeter l'écran et le clavier de la calculatrice pour l'ensemble de la classe, ce support pouvant être utilisé par des élèves ou l'enseignant lui-même.

VI - QUELLES PLUS VALUES DE LA CALCULATRICE ?

Au cours du projet CaPriCo, un certain nombre d'éléments militant en faveur de l'usage de la calculatrice dans les classes ont été relevés.

Cette calculatrice permet à l'enseignant de proposer des situations variées dans lesquelles les élèves trouveront dans l'outil une aide pour l'apprentissage de notions clefs de l'enseignement du cycle 3. Les compétences fondamentales des programmes de mathématiques correspondent à des usages possibles de la calculatrice : chercher, raisonner lorsque la calculatrice est un support de problème de mathématiques portant sur l'écriture des nombres (base décimale de position) sur les calculs (transformation d'un nombre à un autre par une suite d'opérations) ou sur la compréhension et la différentiation des décimaux et des rationnels. Représenter, modéliser lorsque la calculatrice intervient dans des situations où le sens des opérations est en jeu et calculer, bien sûr lorsque la calculatrice jouera un rôle de contrôle et de répétiteur.
Dans un grand nombre de situations de travaux individuels ou par binômes, la calculatrice permet à l'élève de se tromper sans risque d'être sanctionné, sans jugement et sans limite de temps.

Les rétroactions du mode exercice relance l'utilisateur dans sa tâche de recherche et d'investigation en lui donnant des éléments en lien avec la solution qu'il a proposée et la réponse attendue.

Quand la calculatrice est mise à la disposition permanente des élèves et qu'elle est devenue un outil comme un autre, qu'elle est intégrée au quotidien des élèves, elle semble renforcer leur autonomie car ils peuvent choisir de l'utiliser ou pas, et choisir également de résoudre un problème par le calcul direct ou par le mode exercice.

Entre autres plus-value, elle permet à l'enseignant de proposer ce qu'une enseignante appelle une différenciation discrète, c'est-à-dire une différenciation dans la tâche de l'élève ou dans le mode d'utilisation de la calculatrice sans que cela soit très apparent ni très formalisé.

Et selon l'usage que l'on va développer, la calculatrice va ouvrir d'autres domaines mathématiques que le seul calcul, comme celui de la numération, jamais travaillés avec une calculatrice. Au premier abord, il est difficile d'imaginer pouvoir travailler la numération avec un outil habituellement réservé au calcul, cela nécessite de s'interroger sur la nature même des activités produites pour travailler la numération et en extraire celles pour lesquelles la calculatrice pourrait constituer un outil de construction du nombre.

Pour finir, on peut noter que la calculatrice suscite un fort intérêt de la part des élèves. C'est un facteur important mais il n'est pas suffisant... L'intérêt pour cet outil ne pourra perdurer que si les situations proposées sont suffisamment riches et intéressantes pour les élèves.

VII - UNE ILLUSTRATION DE L'EVOLUTION D'UNE RESSOURCE

Maintenant que le cadre est posé, nous allons revenir à notre problématique : dès le départ du projet, nous avions demandé aux enseignants de produire des activités qui soient exploitables par d'autres professeurs, comme prévu dans le projet. Et nous nous sommes alors heurtés à une vraie difficulté : celle éprouvée par les enseignants à rédiger des activités qui puissent être utilisées par d'autres enseignants. Nous illustrerons notre propos par l'observation de l'évolution d'une ressource pour la calculatrice, de sa conception, jusqu'à un état de ressource utilisable par d'autres. C'est ce que nous appellerons le processus de transférabilité.

La ressource choisie, “les chiffres qui changent”, a pour objectif un travail sur la numération décimale de position pour les nombres décimaux, en utilisant comme outil la calculatrice TI Primaire Plus. Elle a été conçue par un enseignant de CM2 en REP+, chevronné et formateur.

L'enseignant est parti d'une activité déjà conçue (Activités et exercices pour la calculatrice, CM1-CM2, Hatier, activité 35), mais qui n'a jamais été expérimentée en classe par les auteurs avant la publication.

L'enseignant a d'abord adapté la ressource (phase d'instrumentation) et l'a testée dans sa classe. il y a eu ensuite plusieurs allers-retours entre l'IFÉ et l'enseignant afin de faire évoluer la ressource pour la rendre utilisable par d'autres enseignants.

Voici la description de ce processus de transférabilité et le questionnement qu'il a fait surgir.

1 Processus de transférabilité

1.1 Ressource initiale

La ressource initiale est la fiche élève du fichier Hatier qui propose trois exercices de niveau croissant de difficulté (1 chiffre qui change, 2 chiffres qui changent, 3 chiffres qui changent).

MODULE Écriture décimale

ACTIVITÉ 35 DES CHIFFRES QUI CHANGENT

EXERCICE 1 Un chiffre qui change D

- En mode EXERCICE de la calculatrice, tape le calcul 65,5 + ? = 65,8
  Écris la ou les solution(s) que tu as essayée(s) et entoure celle qui est juste.

....

- Continue avec ces calculs.

78,41 + ? = 78,49

EXERCICE 2 Deux chiffres qui changent D

- Suis la même consigne que dans l'exercice 1.

87,12 + ? = 88,92

EXERCICE 3 Trois chiffres qui changent D

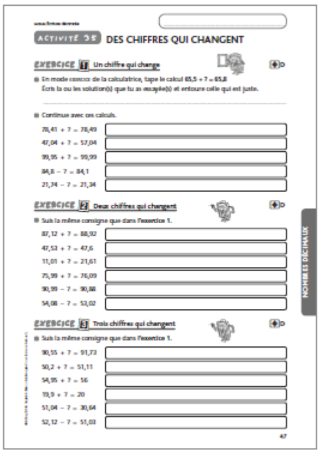
- Suis la même consigne que dans l'exercice 1.

90,55 + ? = 91,73

La pertinence de ces variables didactiques a été repensée par l'enseignant et a fait l'objet de réflexions avec l'équipe de l'IFé.

La ressource initiale Hatier propose également une fiche enseignant :

ACTIVITÉ 35 p.47 **DES CHIFFRES QUI CHANGENT** **CM1-CM2**



L'objectif d'apprentissage
– connaitre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres.

L'activité en bref
Exercice 1 : D Trouver le nombre à ajouter ou à soustraire à un premier nombre pour en obtenir un troisième dont l'écriture diffère de celle du premier par un seul chiffre.
Exercice 2 : D Trouver le nombre à ajouter ou à soustraire à un premier nombre pour en obtenir un troisième dont l'écriture diffère de celle du premier par deux chiffres.
Exercice 3 : D Trouver le nombre à ajouter ou à soustraire à un premier nombre pour en obtenir un troisième dont l'écriture diffère de celle du premier par trois chiffres.

Les touches utiles
pour sélectionner le mode EXERCICE.
? pour saisir un nombre à chercher.
Entrer pour obtenir le nombre de solutions de l'exercice ou valider une réponse.

EXERCICE 1 D
Réponses
0,3 (réponse consigne) | 0,08 | 10 | 0,04 | 0,7 | 0,4
Commentaire
Pour répondre, les élèves doivent d'abord identifier le rang du chiffre modifié, puis la valeur de la modification en fonction de ce rang.
Prolongement
Même exercice :
– avec d'autres nombres ;
– à partir d'un jeu à deux : un élève choisit le nombre de départ et celui d'arrivée ; l'autre trouve le nombre à ajouter ou à soustraire (avec des nombres d'au plus 3 chiffres à droite de la virgule).

Comme on peut le voir, les indications sont minimalistes : une reformulation des consignes, un commentaire succinct et les réponses. La fiche enseignant ne propose pas d'analyse didactique.

On peut s'interroger sur cet aspect minimaliste : est-il suffisant pour qu'un enseignant s'empare de l'activité sans la dénaturer ? Et dans le cas d'un enseignant débutant ?

2 Adaptation de la ressource par l'enseignant

A partir de la ressource initiale, l'enseignant produit une fiche de préparation détaillée qui propose une activité sur trois séances comportant deux ou trois niveaux de différenciation.

Déroulement de la séquence

Séance 1

Etape 1 : présentation

Travail collectif

Exemple : sur ma calculette, j'affiche 30,56. Comment puis-je obtenir 40,56 sans effacer l'écran ? Sur quelles touches vais-je taper ?

Recensement des réponses.

Autre exemple avec : 2,08 et le nombre ciblé 2,68.

Etape 2 : travail individuel

- Fiches différenciées (cf. annexe séance 1) : fiche 1 et fiche 2

Deux niveaux de difficulté pour les fiches avec ces variables :

- nombre de chiffres qui changent
- "changement d'unité" (1,77 -> 2,07 plus complexe que 1,77->1,97)
- addition ou soustraction

- Aides : - tableau de numération
  - colorier dans la fiche les chiffres qui changent / entourer ceux qui sont identiques

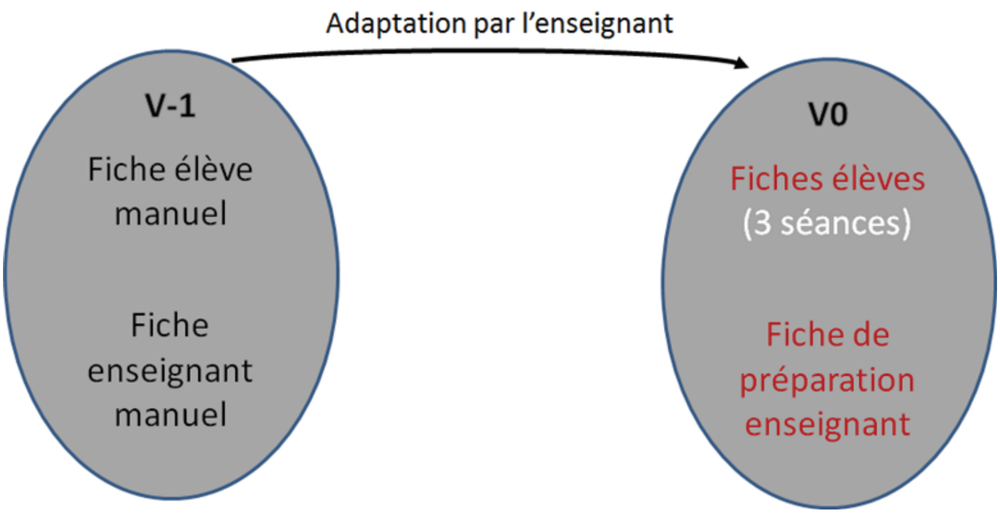
Etape 3 : synthèse

- Comment gérer les essais ? (touches directionnelles, historique, retour en arrière…)
- Quelle stratégie pour répondre ?

= identifier le rang du chiffre modifié puis la valeur de la modification et l'opération associée.

Il crée également une nouvelle fiche élève, qui présente deux niveaux de différenciation (* et ***) dès la première séance.

Cette instrumentalisation peut être résumée par le schéma ci-dessous :



Dans la perspective de la publication et de la nécessaire transférabilité, nous avons alors envoyé à l'enseignant une fiche "normée", avec des demandes de précision (version V1). L'idée n'était pas tant de normer la fiche que de déterminer ce qui était nécessaire à sa transférabilité.

Or, pour l'enseignant, l'activité qu'il avait fournie était complète et suffisante. Mais lorsque nous avons tenté de nous l'approprier, il nous a semblé qu'il manquait quelques précisions. Il y avait trop d'implicite.

Mél du 28 mars : IFé → enseignant
Bonjour,
l'équipe de l'IFé travaille actuellement sur la normalisation des activités [...] dans le but qu'elles soient normées et transférables à d'autres profs.
[...] et il me manque des informations quant aux tâches prof ou aux tâches élèves pour qu'elle soit tout à fait transférable.
J'ai surligné en jaune dans le fichier joint ce qui me paraissait manquer [...]

Un scénario possible de l'activité

Tâches prof / consignes	Tâches élèves	Dispositif / matériel / durée
Séance 1		
Etape 1 : présentation *Consigne : sur ma calculatrice, j'affiche 30,56. Comment puis-je obtenir 40,56 sans effacer l'écran ? Sur quelles touches vais-je taper ?* Recensement des réponses. Autre exemple avec : 2,08 et le nombre ciblé 2,68.	Les élèves font des essais sur leur calculatrice ?	Travail collectif ; une calculatrice par élève ? durée ?
Etape 2 : travail individuel Distribution des fiches aux élèves. Commentaires : Deux niveaux de difficulté pour les fiches avec ces variables : • nombre de chiffres qui changent	Les élèves travaillent en autonomie sur leur fiche ?	Travail individuel. Durée ? Fiches différenciées Fiches élève 1 et 2

L'enseignant a fait un premier retour, ce qui a donné lieu à une nouvelle fiche pour l'enseignant (version V2)

Mél du 1er avril : Enseignant → IFé
Bonjour,
voici la fiche d'activité complétée.
J'ai ajouté quelques phases d'institutionnalisation qui sont essentielles dans une séance et que nous n'avions pas précisées [...]

Un scénario possible de l'activité

Tâches prof / consignes	Tâches élèves	Dispositif / matériel / durée
Séance 1		
Etape 1 : présentation *Consigne : sur ma calculatrice, j'affiche 30,56. Comment puis-je obtenir 40,56 sans effacer l'écran ? Sur quelles touches vais-je taper ?* Recensement des réponses. Autre exemple avec : 2,08 et le nombre ciblé 2,68.	Les élèves font des essais sur leur calculatrice. Ils analysent et discutent les propositions faites.	Travail collectif une calculatrice par élève durée : 5 min
Etape 2 : travail individuel Distribution des fiches aux élèves. Commentaires : Deux niveaux de difficulté pour les fiches avec ces variables : • nombre de chiffres qui changent	Les élèves travaillent en autonomie sur leur fiche avec la calculatrice. Les aides sont mises à disposition.	Travail individuel. Durée 10 à 15 minutes <u>Fiches différenciées</u> Fiches élève 1 et 2

Cet échange présente un paradoxe intéressant : en effet, l'enseignant mentionne qu'il a rajouté des phases d'institutionnalisation qui lui semblaient essentielles. Pourtant, il ne les avait pas précisées dans sa première fiche.

il s'en est suivi encore quelques échanges de courriel qui ont eu pour objet l'organisation pédagogique de la séance. La première séance peut-elle servir de diagnostic ? La consigne de la séance 3 est-elle pertinente ?....

Mél du 29 avril enseignant → IFé

Bonjour,

[…] Par rapport à ta proposition de fiches sur "des chiffres qui changent", je trouve intéressant la proposition de donner à tous la même fiche pour la première séance même si ce n'est pas ce que j'ai fait. L'intérêt peut être de proposer aux élèves toutes les situations pour les amener à se situer en fin de séance 1. En revanche, il peut y avoir un sentiment de découragement chez certains élèves plus fragiles. Il faudrait alors préciser dans la consigne aussi que certains n'ont pas besoin de s'acharner sur le niveau *** et qu'ils peuvent faire uniquement les niveaux * ?

Je me demande aussi s'il est nécessaire d'avoir les 2 exercices si on leur donne la fiche complète. Moi j'utilise les 2 fiches pour différencier le rythme de chacun avec pour attente la réalisation d'au moins un des exercices.

D'autre part, est-il nécessaire d'avoir sur la fiche la consigne de la séance 3 (exploitant le TNI) ?

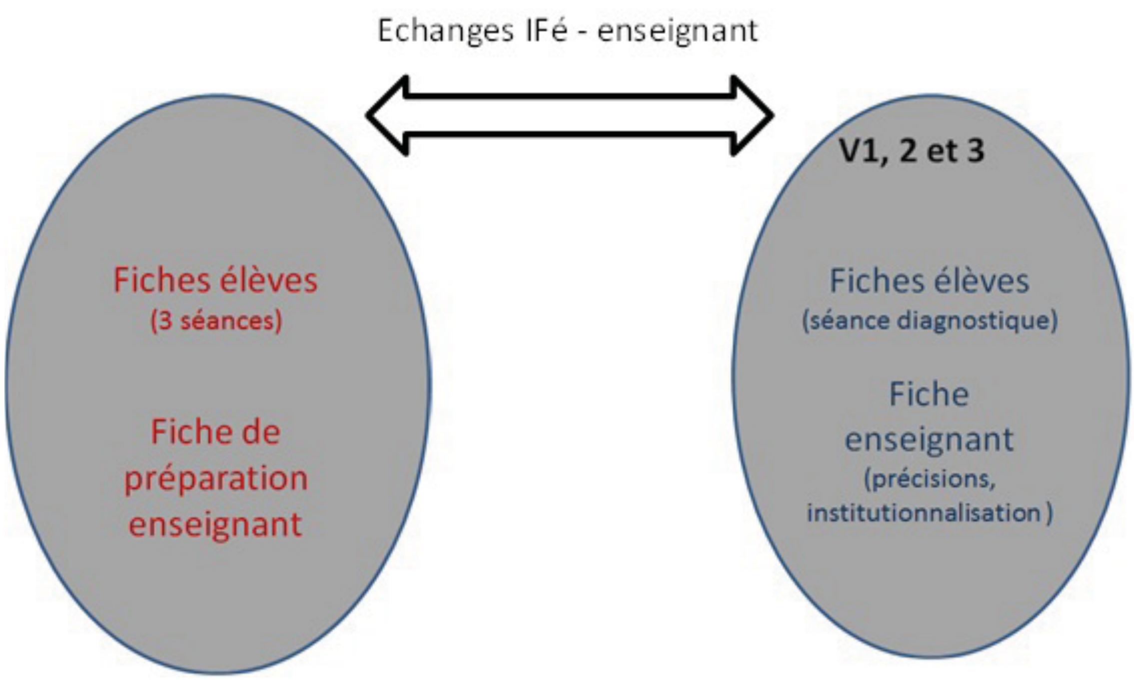
[…]

Mél du 2 mai IFé → enseignant

[…] Comme tu le suggères, j'ai précisé la consigne de la séance 1 afin d'éviter le découragement des élèves plus fragiles. En revanche, j'ai laissé les deux exercices, cela permettra peut-être d'avoir un panel plus grand, et aux élèves les plus rapides d'avoir quelque chose à se mettre sous la dent. […]

Pour la séance 3, c'est vrai que la consigne écrite peut paraître inutile. […]

Ces échanges ont débouché sur une nouvelle fiche pour l'enseignant (version V3). Ces échanges peuvent être résumés par le schéma ci-dessous.



On voit ainsi que, lors de la production d'une ressource par un enseignant, les implicites sont nombreux et n'aident pas à une réelle appropriation par un lecteur extérieur.

Voici donc le questionnement qui a surgi et qui a été discuté dans la phase d'échanges de la communication :

VIII - QUESTIONNEMENT ET ECHANGES

1 Quels implicites partageons-nous ?

L'enseignant conçoit une fiche d'abord pour lui-même.

Les implicites existent toujours, ils ne sont pas problématiques lorsque les personnes les partagent, par exemple du fait de philosophies d'enseignement comparables ou encore parce que le terme « mise en commun », fait écho de la même façon chez les enseignants concernés.

L'implicite est nécessaire, on ne peut pas tout expliciter.

Dans quelle situation peut-on faire la distinction entre implicite et manque ? Il faudrait ici pouvoir prendre en compte le niveau de compétences pédagogique, didactique et mathématique de l'enseignant. On ne peut omettre l'idée que l'absence de précisions et d'explicitations dans un document produit par un enseignant débutant soit le produit d'une proportion plus importante de manques que d'implicites, à l'inverse d'un document produit par un enseignant chevronné.

L'implicite peut générer des ressources « à moitié cuites » (Kynigos, 2007) qui laissent aux utilisateurs de la ressource une marge d'appropriation plus importante.

2 Comment rendre plus facile ce processus d'appropriation d'une ressource par un enseignant ?

2.1 Le choix minimaliste d'Hatier

Il nécessite un travail important pour « tout » construire, travail qui demande un temps dont l'enseignant ne dispose pas toujours. Certains enseignants, cependant, n'utilisent que la fiche élève, pour une prise en main immédiate de l'activité. En revanche, un choix minimaliste peut conduire à ce que la ressource soit dénaturée ou à ce que ses potentialités soient insuffisamment exploitées.

2.2 Notre choix

Il est de proposer déjà des démarches et une organisation détaillées. Cela évite à l'enseignant de tout devoir construire et donne des directions pédagogiques et didactiques pertinentes de manière à ce que les potentialités de la ressource soient suffisamment exploitées. En revanche, il faut prendre en compte que la densité d'une telle ressource pourrait rebuter certains enseignants. Une solution suggérée par les participants serait de proposer une ressource à plusieurs entrées...

2.3 Où poser le curseur entre ces deux démarches ?

Certains participants ont émis l'hypothèse que ce qui était important pour rendre une ressource transférable n'était pas l'organisation (groupes, durée, matériel…), mais bien "ce que la ressource avait dans le ventre".

D'autres interrogations sous-jacentes viennent alimenter cette question : La version d'origine de l'enseignant n'est-elle pas déjà transférable ? Et sous quelles conditions ? Qu'est-ce que les autres professeurs vont utiliser de la ressource, y compris quand ils la transforment ?

Les hypothèses, qui dirigent notre travail, sont qu'il faudrait *a minima* proposer dans la ressource une analyse *a priori*, une analyse didactique, une institutionnalisation.

2.4 Pourquoi est-ce si difficile d'écrire pour les autres ?

Il apparaît plusieurs tentatives d'explications :

- Expliciter l'implicite n'est jamais facile.

- Rédiger les intentions prend du temps, et écrire c'est choisir explicitement, c'est également se mettre en danger.

- Et produire une ressource transférable, c'est sortir du cadre du travail de l'enseignant.

IX - CONCLUSION

En conclusion de ces échanges fructueux, il a été proposé de diviser une ressource en trois strates :

Une première strate "utilisable immédiatement" avec seulement la (les) fiche(s) élève et éventuellement des indications minimalistes (façon Hatier).

Une deuxième strate "didactique" avec une analyse *a priori*, une analyse des variables didactique, un scénario possible en classe.

Une troisième strate "approfondie" avec des stratégies d'élèves, des analyses d'erreur, des liens vers des travaux connexes, …

X - BIBLIOGRAPHIE

ALDON G., RABATEL J.P. (2015). CaPriCo : calculatrices en primaire et en collège. In *Actes du XXXXII^e Colloque COPIRELEM.* Besançon.

ARZARELLO F., PAOLA D., ROBUTTI, O., & SABENA C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

ASSUDE T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. In *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations (ISDM),* 29.

BRUILLARD E. (1993). Quelques obstacles à l'usage des calculettes à l'école : une analyse. In *Grand N, 53*, 67-78.

CHARNAY R. (2004). Des calculatrices à l'école primaire. Oui ? Non ? Pourquoi ? Comment. In *Grand N, 74*, 67-75.

GUEUDET G., TROUCHE L. : Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques, *PUR et INRP,* pp.129-145, 2010, Paideia

HEMBREE R. & DESSART D. J. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis. In *Journal for research in mathematics education*, 83-99.

JULIEN A. (2015). La TI-Primaire Plus, un instrument de calcul adapté aux nouveaux programmes de primaire, *Ludomag*, 25 septembre 2015 : http://www.ludovia.com/2015/09/la-ti-primaire-plus-un-instrument-de-calcul-adapte-aux-nouveaux-programmes-de-primaire/

KOOP A. J. (2016). Calculators in schools: Some curriculum considerations. In *Australian Mathematics Teacher, The,* 72(3), 53.

KYNIGOS C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. In *Informatics in Education-International Journal,* 6, 335-358.

LEE K. P. (1991). Calculator use in primary school mathematics: a Singapore perspective. In *The Mathematics Educator, 9* (2),97-111 Published by Association of Mathematics Educators

SANCHEZ E., MONOD-ANSALDI R., Recherche collaborative orientée par la conception, in *Éducation et didactique*, vol. 9, n°2 | 2015, 73-94.

SOURY-LAVERGNE S. & MASCHIETTO M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 435–449.

SZETELA W. (2016). Calculators in schools in Canada. *Selected writings from the Journal of the British Columbia Association of Mathematics Teachers: Celebrating 50 years of Vector*, 171.

TAVEAU C., COLOMBAT H., SOURY-LAVERGNE S. (2014). Exploration des ressources de la nouvelle calculatrice TI-Primaire Plus in *Actes du XXXXI^e Colloque COPIRELEM.* Mont de Marsan.

WANG F., HANNAFIN M.J. (2005). Design based research and technology enhanced learning environments, In *ETR&D*, 53 (4), 5–23

ECRITURES ARITHMETIQUES EN LIEN AVEC L'APPRENTISSAGE DU CALCUL SOUSTRACTIF

Anne-Marie RINALDI
Formatrice ESPE de l'académie d'Amiens
Laboratoire de Didactique André Revuz Paris Diderot
anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

Résumé
La communication présente une partie des résultats de mon travail de thèse (Rinaldi, 2016). La recherche, conduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), m'a permis de construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif et d'élaborer une ingénierie pour le CE2 (8-10 ans), en cherchant à rester assez proche des pratiques de l'enseignement ordinaire (Robert, 2013). L'évolution des productions des élèves sur un ensemble de séquences permet de questionner l'usage des écritures arithmétiques et des schémas avec appui sur la droite numérique, dans le but de communiquer, s'approprier, valider et évaluer un ensemble de techniques de calcul mental (Threlfall, 2002).

I - INTRODUCTION

Dans Rinaldi (2016), je m'intéresse à l'enseignement et à l'apprentissage du calcul soustractif à l'école élémentaire, précisément en CE2. J'ai ainsi cherché à répondre aux questions que les professeurs des écoles se posent sur le choix de l'algorithme à enseigner et sur les conditions à mettre en œuvre pour permettre à l'ensemble des élèves de devenir performants en calcul mental. Une des priorités étant de relier l'enseignement du calcul mental et du calcul posé et d'envisager une programmation de l'étude afin de pallier les difficultés d'apprentissage des élèves.

En effet, si on se réfère aux travaux Maurel & Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : « *Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.* » C'est ainsi que pour effectuer 53− 27, ils vont effectuer 7− 3 et trouver 34 à la place de 26.

Par ailleurs, en calcul mental, pour Butlen & Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement *: « privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres.* » Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple 53− 21. 53-21=50-20+3-1 mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus 53− 27.

L'analyse des contextes institutionnel et professionnel m'a donc amené à m'interroger sur la nature des savoirs à enseigner. Quels répertoires ? Quelles propriétés des nombres et des opérations ? Quelles désignations des nombres enseigner surtout si l'objectif recherché est de développer la valence pragmatique du calcul (calculer vite et bien) et la valence épistémique du calcul (connaitre les propriétés mathématiques qui interviennent dans l'effectuation d'un calcul). Mais une fois ces savoirs identifiés se pose la question de leur enseignement. Est-il possible de programmer et d'organiser l'étude en tenant compte de la progressivité des apprentissages, des conditions et des contraintes de l'enseignement ordinaire ? Pour tenter de répondre à cette question, j'ai été amenée à concevoir, puis à évaluer, l'impact sur les apprentissages des élèves en calcul soustractif d'une ingénierie introduisant progressivement et régulièrement les écritures arithmétiques. Avant de présenter en partie mes résultats, je commence dans le paragraphe suivant à préciser le cadre théorique utilisé et la méthodologie suivie.

II - CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, j'ai exploité le concept d'*organisation mathématique* qui permet de caractériser l'activité mathématique et le concept d'*organisation didactique* qui renvoie aux différents moments de l'étude (Chevallard, 1999). J'ai également utilisé le concept d'*organisation mathématique de référence* (Chevallard, *ib.*). Selon Bosch et Gascon (2005), l'organisation mathématique de référence permet au chercheur – pour un sujet donné : ici le calcul soustractif sur les entiers naturels – d'identifier, à partir d'une étude épistémologique et didactique, l'ensemble des savoirs à enseigner. De ce fait, l'organisation mathématique de référence rend légitime la transposition didactique des savoirs savants aux savoirs à enseigner. Dans ma recherche, cette organisation mathématique de référence a servi pour construire une organisation mathématique conforme à la référence et comme outil d'analyse.

J'ai également utilisé les concepts de *contrat*, d'*habitude* et de *régularité* des pratiques empruntés à Robert (2013) pour connaitre les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de *zone proximale de développement des pratiques* pour concevoir l'organisation de l'étude sans trop m'éloigner des pratiques de l'enseignement ordinaire (Robert, *ib.*).

Un autre concept, celui d'*ingénierie didactique* (Artigue, 2011) m'a servi à définir une méthodologie générale de mise à l'épreuve et d'analyse.

Cette présentation générale étant faite, il me semble important de revenir précisément sur la composition de l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif car celle-ci est la clef de voute de ma recherche.

1 Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990).
- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul.
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005).

Le schéma ci-dessous met en avant les liens entre les différentes organisations mathématiques locales :

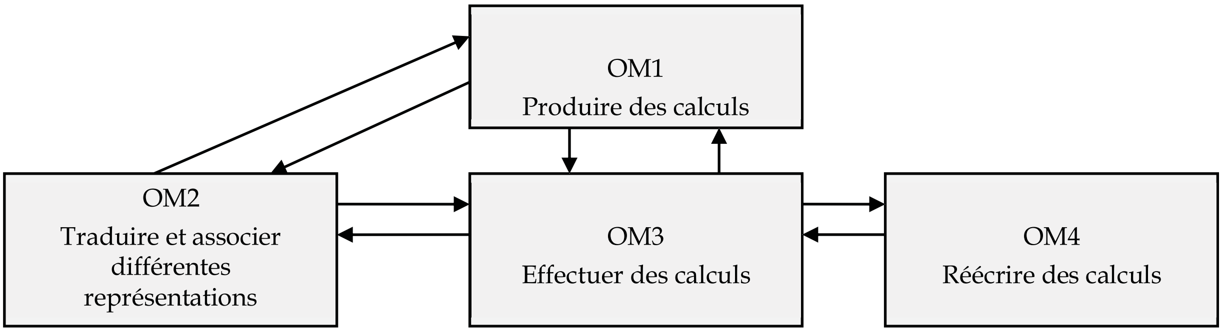


Figure 1. Schéma relatif aux organisations locales propres au calcul additif et soustractif sur N

En rapport avec la recherche, j'ai particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs. J'ai identifié différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□), soustraire un multiple de dix (Ta−□0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−□□□).

Pour chaque type de tâches, j'ai ensuite recensé les techniques potentielles en m'appuyant sur les travaux de Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). J'ai regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie θ_{DD} s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, le principe décimal et le principe de position de la numération décimale, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, $(\tau_{1010})'$.

Technologie θ_{DD}

- Technique de décomposition τ_{1010} — Exemple de calcul : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3) = (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$
- Technique de décomposition $(\tau_{1010})'$ — Exemple de calcul : $165 - 27 = (100 + 60 + 5) - (20 + 7) = (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$

τ_{1010} est une technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter. $(\tau_{1010})'$ est une technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de τ_{1010}.

La seconde technologie θ_{D} s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle ne nécessite pas de décomposer les deux nombres du calcul mais nécessite de décomposer un des deux nombres. Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}.

Technologie θ_{D}

- Technique séquentielle τ_{N10} — Exemple de calcul : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$.
- Technique séquentielle τ_{A10} — Exemple de calcul : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 27 = 123 - (20 + 7) = (123 - 20) - 7$
- Technique séquentielle τ_{N10C} — Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

τ_{N10} est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire. τ_{A10} et τ_{N10C} sont deux techniques séquentielles qui consistent à décomposer le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer.

La troisième technologie $\theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$.

Technologie $\theta_{SOU/ADD}$

- Technique $\tau_{SOUS/ADD}$ — Exemple de calcul : Pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125

$\tau_{SOU/ADD}$ est une technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou.

La dernière technologie θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN} et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix.

Technologie θ_{AN}

- Technique τ_{AN} — Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3)$.

τ_{AN} est une technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif.

Parallèlement, j'ai cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts (Bosch & Chevallard, 1999), pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver), en référence à l'article de Castela et Romo Vasquez (2011). En me basant sur les études de Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis & Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) j'ai émis plusieurs hypothèses :

- la droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles ;
- la droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure ;
- les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant de valider toutes les techniques.

Le cadre théorique fixé, j'ai opté pour une méthodologie dont j'énonce les grands axes dans le paragraphe suivant.

2 Méthodologie

Après avoir construit l'organisation mathématique de référence, j'ai utilisé et mis à l'épreuve cet outil théorique pour analyser les manuels et les pratiques spécifiques de trois enseignants. Ainsi, j'ai pu m'appuyer sur cette étude et sur une connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants « observés » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant fondée sur l'organisation mathématique de référence. Pour finir, deux des trois enseignants ont accepté d'expérimenter l'ingénierie dans leurs classes respectives.

III - PRESENTATION DE L'INGENIERIE

L'ingénierie vise l'explicitation des éléments théoriques en jeu dans l'effectuation de calculs et à agréger les organisations mathématiques locales (cf. figure 1) pour permettre aux élèves de développer la valence pragmatique et épistémique du calcul. Etant donné qu'elle s'appuie sur une meilleure connaissance des pratiques enseignantes, je vais donner quelques éléments prélevés à la suite de l'observation conduite dans trois classes de CE2, avant de présenter globalement les séquences de l'ingénierie et précisément celles qui introduisent les écritures arithmétiques.

1 Eléments prélevés suite aux observations de classe

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que j'ai observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire sept, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental vu qu'il était conduit essentiellement à l'oral, ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des scénarios que je leurs avais proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie que je présente ci-dessous.

2 Grandes lignes de l'ingénierie

Le tableau présenté ci-dessous (figure 2) montre les grandes lignes de l'ingénierie. Il peut se lire verticalement et horizontalement.

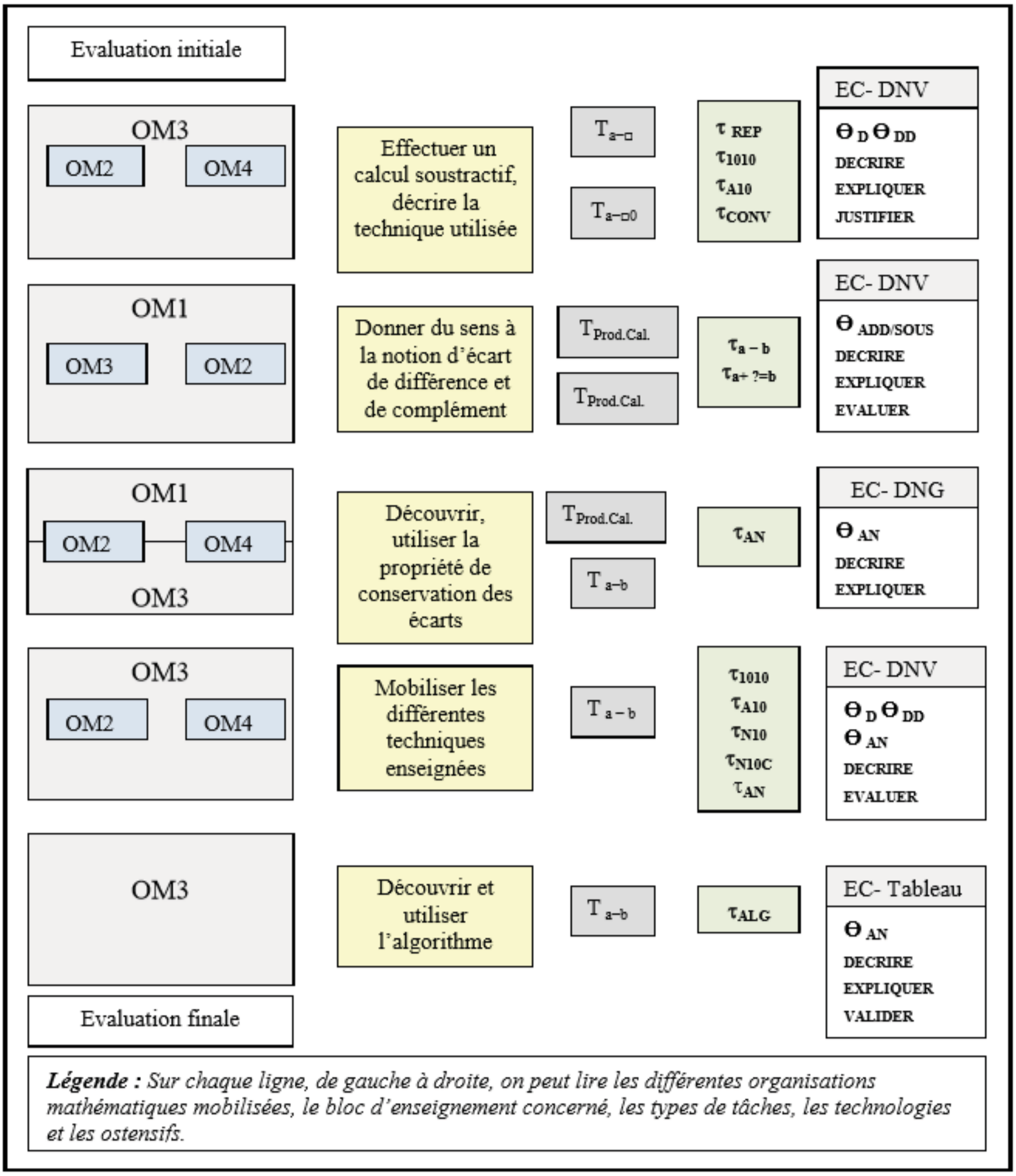


Figure 2. Présentation de l'ingénierie (Rinaldi, page 210)

Verticalement, ce tableau (figure 2) permet de voir que la mise en place de l'ingénierie a été précédée de la mise en place d'une évaluation initiale et suivie d'une évaluation finale pour mesurer les effets de l'ingénierie sur les apprentissages des élèves. Il montre comment l'étude a été découpée et programmée autour de cinq blocs d'enseignement (présentés dans la seconde colonne). Le dernier bloc visant l'introduction de l'algorithme de la soustraction posée basée sur la propriété de conservation des écarts. Le premier et l'avant dernier étant axé sur l'enseignement du calcul mental. Le deuxième et le troisième visant à donner du sens à la notion d'écart, de différence et de compléments et le troisième à découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts. Il montre comment les blocs sont imbriqués les uns aux autres donc qu'associer à l'effectuation de calculs (OM3) est associé un travail de mise en relation de représentations sémiotiques (OM2) et de réécriture de calculs.

Horizontalement, je vais détailler la lecture correspondant au premier bloc d'enseignement.

3 Introduction des écritures arithmétiques

Le premier bloc d'enseignement correspond à l'étude de deux types de tâches : soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) et soustraire un multiple de dix (Ta−□0). Les moments correspondants à cette étude sont des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de « ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le « nouveau à étudier » par rapport à « l'ancien ». La mise en scène choisie est directement inspirée d'une pratique d'un enseignant (pratique observée). Trois séries de quatre calculs sont donnés à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est effectué.

En revanche, la consigne donnée aux élèves est modifiée. L'élève ne doit pas se contenter d'écrire le résultat. L'élève doit écrire le résultat et décrire la technique mise en œuvre pour effectuer le calcul. La nature des quatre calculs de chaque série est un début d'assortiment (Genestoux, 2002). En effet sur les quatre calculs, j'ai fait en sortes d'assortir les trois premiers. C'est ainsi, que dans la première série composée des quatre calculs suivants 48− 5; 59− 2; 328− 6 et 70− 6, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. τ_{1010} est donc applicable. En revanche, pour le dernier, cette technique n'est pas applicable. La présence de ce calcul doit ainsi amener l'élève à évaluer la technique τ_{1010}.

Les productions et leurs évolutions sur plusieurs séquences vont permettre alors d'analyser la nature des techniques, des ostensifs et des éléments théoriques utilisés par les élèves et parallèlement les éléments institués par les enseignants.

Dans le paragraphe suivant, je donne des éléments d'analyse suite aux expérimentations conduites dans deux classes, nommées par la suite A et B.

IV - ANALYSE DE L'INGENIERIE

Les expérimentations ont commencé alors que les enseignants des classes A et B n'avaient pas encore abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences de l'ingénierie se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont je dispose sont toutes les productions écrites des élèves et les enregistrements vidéo d'une à deux séances par semaine dans chaque classe. Elles m'amènent à questionner l'usage des écritures arithmétiques à différents moments de l'étude.

1 Analyse relative à l'étude de Ta−□

Le type de tâches qui consiste à soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) a été abordé lors de la première séquence. Les tableaux qui suivent montrent les techniques utilisées par les élèves des classes A et B pour effectuer le calcul 48− 5 (premier calcul de la première séance).

	Classe A (17 productions)		
		Nombre de productions	Résultats arrondis en %
Techniques répertoriées	τ_{1010}	3/17	18%
	$\tau_{SOUS/ADD}$		
	$\boldsymbol{\tau_{ALG}}$	12/17	**71%**
Autres	Comptage		
	Imagée		
	Non identifiée	2/17	11%

	Classe B (29 productions)		
		Nombre de productions	Résultats arrondis en %
Techniques répertoriées	τ_{1010}	13/29	**45%**
	$\tau_{SOUS/ADD}$	2/29	7%
	$\boldsymbol{\tau_{ALG}}$		
Autres	Comptage		
	Imagée	2/29	7%
	Non identifiée	12/29	41%

Figure 3. Techniques pour effectuer 48 − 5

Dans la classe A comme l'enseignant n'avait pas précisé aux élèves qu'ils ne devaient pas poser d'opération en colonne, presque les trois quarts des élèves (71%) vont s'emparer de l'algorithme. A l'inverse, dans la classe B, vu que l'enseignant avait précisé qu'il ne voulait pas de calcul posé en colonne, seulement 2 élèves sur 29 posent leur calcul en colonne.
Par ailleurs, ce tableau montre que sur beaucoup de productions la technique n'est pas identifiée car les élèves se contentent d'indiquer qu'ils « enlèvent cinq à quarante-huit » pour obtenir quarante-trois.

On observe également que la technique attendue, basée sur la décomposition est présente dans les deux classes. En effet, je me suis basée sur les discours des élèves pour l'affirmer. Deux types de discours sont présents. Un type de discours où les nombres sont pris chiffre à chiffre. Un autre type où le nombre de départ 48 est décomposé additivement. Pour illustrer ce propos, j'ai sélectionné les productions suivantes :

Nombres considérés chiffres à chiffres	Nombres décomposés additivement
dans l'unittée de 8 j'ai enlever 5 et j'ai trouver 3 donc 43 8-5= 3, 48-5= 43 — 43 48-5 — 3 — 43	Y'est 43 car 8 c'est 3+~~8~~-5 alor on enlève le 5 et on garde le 40 on rajoute le trois au 40 et ca fait 43. Je ~~vais~~ ses que ~~8-3~~ ~~3-~~ 3-5=3 et aprés je rajoute 40.

Figure 4. Exemples de discours associés au calcul de 48 − 5

Associé à ces productions, il est intéressant d'analyser les échanges entre enseignant et élève pour montrer les éléments théoriques mis en avant.

Premier échange :

L'enseignant a écrit le calcul à effectuer en ligne 48−5 au tableau.

Elève : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. *L'enseignant écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.*

Enseignant : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.

Elève : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.

Enseignant : Là il n'y a pas de dizaine. *L'enseignant montre l'espace devant le 5*. Donc rien ne change au niveau des dizaines. *Il montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.*

Second échange :

Elève : Moi j'ai fait quarante plus huit après j'ai fait moins cinq et ça fait quarante-trois.

Enseignant : Vous avez compris ce qu'il a fait. Il sait que quarante-huit, c'est quarante plus huit, ensuite il a juste fait huit moins cinq. Tu as fait huit moins cinq. Tu as trouvé trois, tu as ajouté quarante. Tu trouves quarante-trois.

En considérant le premier échange, notons que le fait de relier les chiffres 8 et 5 permet de « montrer » comment la technique s'applique sans pour autant justifier celle-ci.

A contrario, dans le second échange, le fait d'indiquer que quarante-huit est égal à quarante plus huit est un début de justification. Cependant cette justification n'est pas menée jusqu'au bout car il n'y a pas de tâche propre à la réécriture de proposée. $48-5=40+8-5$ n'est pas une égalité numérique notée au tableau.

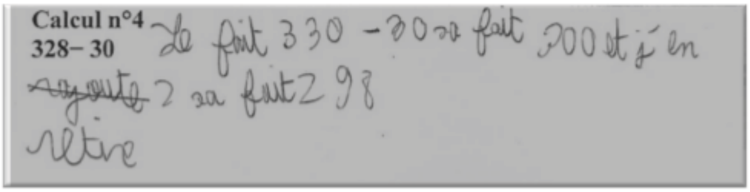
2. Analyse relative à l'étude de Ta−□0

Lors de la deuxième séquence, en prenant l'exemple de $328-30$, nous constatons que pour effectuer ce calcul :

- ✓ Environ la majorité des élèves de chaque classe utilise une décomposition du nombre à soustraire. Cela s'explique car ils ont travaillé au préalable sur des techniques séquentielles (à base de sauts) privilégiant le passage à la dizaine entière inférieure pour effectuer des calculs tels que 42– 7. La difficulté va alors résider à savoir comment décomposer 30 de façon économique. Quand 30 est décomposé en 20+10 ou 28+2 les élèves arrivent à effectuer correctement les calculs intermédiaires. En revanche, quand 30 est décomposé en 8+22 l'élève est bloqué pour soustraire 22 car il ne pense pas à ajouter une étape supplémentaire : soustraire 20 puis 2 pour simplifier le calcul.

- ✓ Très peu d'élèves (trois sur quarante-sept) pensent à convertir les nombres en dizaines et unités pour effectuer le calcul.

- ✓ Un seul élève utilise une technique par compensation



En faisant une synthèse de l'ensemble des analyses relatives à l'étude du type de tâches soustraire un multiple de dix, on peut affirmer que certains élèves rencontrent des difficultés liées au choix du nombre pivot. C'est ainsi que pour calculer 437– 50, ils vont commencer par soustraire 37 pour « arriver » à une centaine entière et être bloqués pour calculer le complément de 37 à 50 ou pour soustraire une fois effectué ce calcul, 13 au nombre 400. Par ailleurs, l'utilisation de la droite numérique n'est pas forcément d'une aide majeure. Elle permet à l'élève de s'engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu'au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

3. Analyse relative à l'étude de Ta−□□

En me basant sur les productions écrites des élèves et sur les moments de restitution filmés à l'occasion de la sixième séquence, je peux affirmer que le fait d'imposer à chaque élève de prendre un temps pour décrire « sa » technique en utilisant les écritures arithmétiques ou des schémas avec appui sur la droite numérique a permis d'enrichir les moments de synthèse. En effet, l'élève est mieux outillé pour expliquer aux autres les différents calculs qu'il a été amené à enchainer. L'enseignant, pour sa part, peut amener le groupe d'élèves à évaluer la technique et décider de l'instituer ou non. C'est ainsi que les enseignants des classes A et B qui jusqu'alors reprenaient uniquement à l'oral les propositions des élèves sans rien noter au tableau, s'engagent davantage dans un travail de réécriture.

De surcroit, on constate que les techniques exposées sont variées. Pour illustrer ce dernier point, voici des éléments de discours recueillis dans la classe B au sujet du calcul de 52– 16. Ces éléments sont retranscrits dans l'ordre chronologiques et révèlent :

- ✓ L'utilisation de τ_{AN}

Elève : « J'ai rajouté quatre aux deux nombres »

Enseignant : « Pourquoi as-tu ajouté quatre ? Quel nombre dois-tu regarder pour savoir combien ajouter ? »

Elève : « Seize »

Enseignant : « Oui, elle s'est dit seize c'est près de vingt. Soixante-deux plus quatre égal soixante-six moins vingt, quarante-six »

Le nouveau calcul est noté au tableau : 66– 20 = 46.

- ✓ L'utilisation de τ_{A10}

Elève : « J'ai fait un schéma ». *L'enseignant trace un trait horizontal.*

Enseignant : « Je ne sais pas combien d'étapes tu as fait. »

Elève : « J'en ai fait trois. J'ai fait soixante-deux moins deux. J'arrive à soixante. *L'enseignant marque un premier bond sur le schéma.*

Elève : « J'ai fait moins quatorze ».

Enseignant : « Tu arrives à le faire d'un coup ?

Elève : « J'ai fait moins dix. J'arrive à cinquante. Cinquante moins quatre, quarante-six. »

Un autre élève demande la parole pour mettre en avant l'utilisation de τ_{N10C}

- ✓ L'utilisation de τ_{N10C}

Elève : « Moi j'ai fait soixante-deux plus vingt moins quatre ». Ce à quoi l'enseignant réplique qu'il peut le noter.

Nous présentons ci-dessus la photographie du tableau suite à cette série d'échanges.

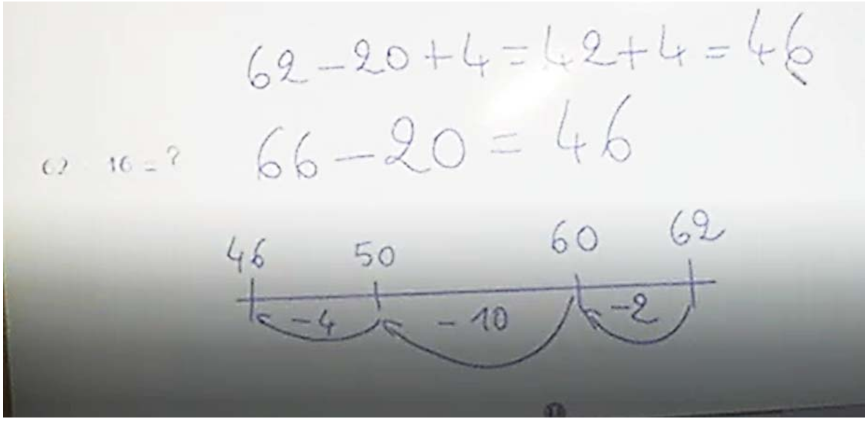


Figure 5. Utilisation des écritures chiffrées et de la droite numérique pour calculer 62 − 16

Cette trace écrite permet d'expliciter avec d'autres ostensifs que les mots de la langue française les différentes étapes qui ont conduit à trouver le résultat d'un calcul. Les ostensifs que sont les écritures arithmétiques ayant l'avantage d'être très économiques et par là même, voués à être de plus en plus utilisés dans la suite de la scolarité.

V - CONCLUSION

La confrontation entre les résultats obtenus à l'évaluation diagnostique et à l'évaluation finale permet de mesurer les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En effet, plus des trois quarts des élèves, les deux classes confondues arrivent à indiquer avec précision la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre. Ce n'était pas le cas avant d'avoir entamé l'étude. Ils se contentaient alors, de noter le résultat et utilisaient bien souvent le comptage pour le trouver. Ce n'était pas non plus le cas au tout début de l'étude car les enseignants des classes A et B pratiquaient beaucoup d'échanges oraux et n'engageaient pas un travail de réécriture. Le contrat didactique a évolué car la volonté d'expliciter les savoirs mathématiques qui se cachent derrière chaque calcul soustractif a été affirmée.

L'organisation mathématique de référence, construite en amont (cf. II.2), s'est avérée fondamentale pour recenser l'ensemble des techniques et des ostensifs envisageables. Elle s'est avérée complexe à transposer en classe. En effet, l'ingénierie (cf. III.2) proposée comporte un nombre conséquent de séquences et mériterait même d'être complétée par un dispositif d'aide. Pour certains élèves, motiver la nécessité de calculer, apprendre les répertoires, maîtriser les décompositions demandent plus d'accompagnement et de suivi. Par ailleurs, beaucoup de questions ont été soulevées, notamment sur la manière d'introduire la propriété de conservation des écarts, sur les aides à apporter pour amener les élèves à savoir soustraire des multiples de dix, sur l'importance à accorder à la droite numérique graduée. Autant de questions qui méritent de poursuivre la réflexion sur l'enseignement du calcul à l'école élémentaire, avant et après le cours élémentaire.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (2005). L'intelligence du calcul. In conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

BOBIS, J., BOBIS, E. (2005). The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: file:///C:/Users/camille/AppData/Local/Microsoft/Windows/INetCache/IE/CFI21X57/Bobis%20J%20and%20E%202005.pdf (consulté le 01/08/ 2015)

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

BOSCH, M., GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12ième Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOULE, F., (1994-1995). Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, 39-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, 7-32.

CARPENTER, T.-P., FRANKE, M.- L., JACOBS, V.-R., FENNEMA, E., EMPSON, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.

CASTELA, C., ROMO VAZQUEZ, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

ERNEST, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16.* 411- 424.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T.-P., FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques. TD2 du thème 2. *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 177-186). Grenoble: La Pensée Sauvage.

GRAVEMEIJER, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 25, 443-471.

KLEIN, A.-S., BEISHUIZEN, M., TREFFERS, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443 - 464.

LARGUIER, M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Université de Montpellier II. Sciences et Techniques du Languedoc.

MAUREL, M., SACKUR, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, *85*, 43-59.

RINALDI, A.-M .(2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01470473/ (consulté le 21/06/ 2016)

ROBERT, A., PENNINCKX, J., LATTUATI, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, 92, 49-56.

TEPPO, A., VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education,* 46(1), 45-58.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics,* 50(1), 29-47.

ACTIONS, LANGAGES, REPRESENTATIONS DANS LA RESOLUTION DE PROBLEME SPATIAUX ET GEOMETRIQUES DE LA GS AU CE1

Henri-Claude ARGAUD
Equipe ERMEL (Ifé)
hargaud@gmail.com

Jacques DOUAIRE
Equipe ERMEL (Ifé)
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Equipe ERMEL (Ifé)
CEREP- Université de Reims
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Depuis plusieurs années l'équipe ERMEL expérimente des ingénieries didactiques pour l'enseignement de la géométrie de la GS au CE1, fondées sur la résolution de problèmes. Deux questions émergent notamment de cette recherche. Quelles sont les connaissances acquises par les élèves lors de leurs actions sur les objets spatiaux, en particulier dans leurs composantes langagières, iconiques et conceptuelles ? Quelle est la contribution des expériences spatiales à des apprentissages graphiques et géométriques ? Nos recherches aboutissent à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs ; ces ressources explicitent les apprentissages possibles, proposent des situations didactiques et des progression possibles. Nous nous appuyons sur des exemples de situations expérimentées concernant l'appropriation de l'espace graphique pour apporter un éclairage sur ces points.

I - PRESENTATION DE LA RECHERCHE

La recherche actuelle de l'équipe ERMEL (IFé-ENS-Lyon)[1] analyse les connaissances spatiales et géométriques que les élèves de la Grande Section au CE1 peuvent construire, avec leurs différentes composantes (procédures pour résoudre les problèmes spatiaux, graphiques ou géométriques, représentations symboliques associées, propriétés…). Elle porte donc sur des domaines où, pour ces niveaux, les travaux en didactique sont plus rares que dans le numérique. Par ailleurs, une enquête, menée au cours de cette recherche, a confirmé le désarroi d'enseignants soucieux de proposer aux élèves des problèmes à résoudre qui prennent en compte les potentialités des élèves.

Nos expérimentations successives nous ont montré la nécessité d'identifier dans les gestes ou les formulations des élèves, les connaissances spatiales communes à plusieurs activités ; par exemple comment ils explorent dès la GS les différentes positions d'une pièce avant de la placer dans un puzzle 3D et identifient la différence entre « tourner » ou « retourner » ou comment ils peuvent formuler en termes de régularité leur perception des propriétés d'un cube ou d'un carré. Aussi nous nous interrogeons sur la contribution de ces expériences spatiales à des apprentissages spatiaux et géométriques.

L'enjeu de cette communication est de montrer comment, à partir des expérimentations, nous avons émis des hypothèses de recherche et aussi de préciser des objectifs d'apprentissage possibles.

[1] Laura Barbier (Ecole maternelle Ancône 26200) et Audrey Sartre (Ecole maternelle St Vallier 26240) présentes à cette communication, ont aussi participé à ces expérimentations en CP et en CE1.

Nous aborderons ces problématiques en présentant trois expérimentations portant sur les apprentissages liés à une pratique des tracés nouvelle pour les élèves à partir du CP. [2]

II - PREMIERE EXPERIMENTATION : DES TRACES POUR MODELISER

1 Questions initiales

Comme pour d'autres notions de géométrie abordées au primaire la notion de trait droit présente un double aspect. Elle permet, d'une part de représenter des objets du monde réel et, d'autre part, constitue une composante d'un savoir géométrique en constitution qui possède des propriétés que l'élève découvrira progressivement au cours de sa scolarité.

Nos recherches précédentes, sur les apprentissages géométriques et la résolution de problèmes nous ont confirmé qu'au CE2 les propriétés attribuées par les élèves à la droite, sont souvent limitées à celles liées à la perception des traits droits tracés. En fait pour les élèves de cet âge une « droite » est simplement le trait droit tracé sur une feuille ; par exemple, au début du CE2, certains élèves sont surpris de découvrir que deux points éloignés sur une feuille A3 puissent être reliés par un trait droit.

Un des premiers enjeux de notre recherche était de déterminer les connaissances initiales des élèves : quelles perceptions, quelles expériences ont-ils de traits droits ? Et parmi les significations que modélise la ligne droite (pli, fil tendu, visée, frontière entre deux domaines…) quelles sont celles qui doivent être privilégiées ? Peut-on s'appuyer sur une situation dans le méso-espace et la modéliser dans le micro-espace pour aborder l'usage et certaines propriétés de la ligne droite. En particulier les procédures développées dans le méso-espace sont-elles réinvestissables dans des tracés sur la feuille de papier ? Est-il préférable de commencer par des expériences vécues dans le méso-espace pour faire apparaître une ligne droite comme une solution d'un problème d'alignement ?

A ces niveaux, des significations spatiales associées à la ligne droite, des contraintes techniques du tracé, et des propriétés peuvent déjà être rencontrées :

- dans des problèmes de représentation graphiques d'objets physiques sollicitant des propriétés du trait droit (rectitude).
- dans des problèmes d'alignement de points, par exemple des problèmes de visée dans le méso-espace.

2 Expérimentations[3]

Dans la situation « Plots » expérimentée, qui se déroule dans la cour (Figure 1), les élèves ont à trouver des emplacements où un plot en cache un autre dans une première phase, puis à résoudre ce problème dans la micro-espace (Figure 2) où les disques de couleur représentent l'emplacement des plots sur feuille de papier. Il s'agissait donc de poser des problèmes d'alignement dans le méso-espace puis de passer à une « modélisation » sur papier qui avait pour but de recourir au tracé de droites passant par des points représentant les objets. La ligne droite devenant un moyen efficace de résoudre ces problèmes dans le micro-espace.

2 Nous ferons référence à certaines des interventions (communications ou ateliers) que nous avons proposées dans les quatre derniers colloques de la COPIRELEM, pour les lecteurs qui souhaiteraient avoir des comptes rendus plus détaillés de ces expérimentations.

3 Voir les Actes du XLéme colloque COPIRELEM de Nantes (Communication Douaire J., Emprin F.)

Figure 1

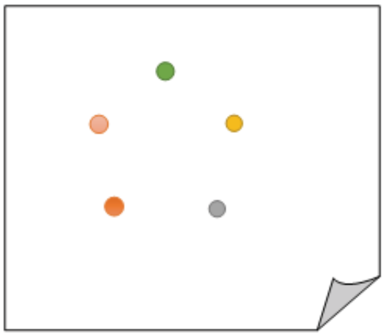


Figure 2

Dans cette situation alors que les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes dans le méso-espace, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution sur papier. Certaines procédures dans le méso-espace (visée, utilisation des pas pour aller droit…) n'avaient pas de traduction dans le micro-espace. De plus, des difficultés spécifiques se posaient sur la feuille de papier pour la compréhension de la symbolisation des objets de la cour, et surtout pour le tracé à la règle de traits droits ; en effet, beaucoup de productions comportaient des lignes brisées et non des lignes droites pour représenter la visée, sans que les élèves n'y perçoivent de contradiction.

3 De nouvelles perspectives

L'analyse de ces difficultés a mis en évidence la nécessité d'un travail spécifique portant sur l'apprentissage de ce que peut représenter un trait droit dans une représentation graphique (ses fonctions) pour lequel nous avons élaboré et expérimenté un ensemble de situations didactiques pour le CP et le CE1 pour appréhender :

- des significations de traits droits comme moyen de représenter graphiquement des situations du monde sensible, par exemple comment un trait sur une feuille peut indiquer la position relative de deux pièces superposées dans l'espace, ou comme critère de jugement d'un déplacement (cf. la deuxième expérimentation ci-dessous) ;
- des propriétés des traits droits, en particulier quand ils sont utilisés pour résoudre des problèmes où il est nécessaire que les élèves :
  - comprennent d'eux-mêmes que le trait qu'ils ont à tracer doit être droit ;
  - sachent prolonger un trait ;
  - maîtrisent la technique de tracé avec la règle.

III - DEUXIEME EXPERIMENTATION : DES INSTRUMENTS AUX TRACES POUR JUGER

1 Questions

Pour mieux connaitre les connaissances des élèves sur le spatial et le géométrique de la GS au CP, nous avons expérimenté des situations où les élèves s'investissent. Mais pour les intégrer dans une ressource il est nécessaire de déterminer si elles peuvent conduire à des savoirs, et si oui, auxquels.

Nous nous sommes donc interrogés sur les relations possibles entre des expériences spatiales faites par l'élève - où l'action immédiate, la perception, et la validation pratique jouent un rôle important- et des apprentissages où la connaissance mobilisable sollicite de sa part des actions et des discours explicatifs à sa portée.

Dans la situation précédente, l'alignement entre plots n'a pas de matérialité. Il est à construire par l'élève pour donner la réponse. La question a été de savoir si, en proposant une situation où cette matérialité est effective à travers la présence d'objets rectilignes (bord de pièce, ou trait droit matérialisant un bord), des connaissances et des savoirs pouvaient être mobilisés par les élèves, et sous quelles formes (instrumentales, gestuelles, langagières) ils pouvaient l'être.

C'est ce que nous examinons ici dans la situation expérimentée : « Les bandes cassées » présentée déjà au colloque du Puy-en-Velay (Argaud, Douaire, Emprin, 2017) ; mais alors le but de la communication était plutôt d'analyser les questions et les choix auxquels un enseignant était confronté dans la mise en œuvre de l'activité.

2 Présentation du problème

Une bande noire a été séparée en deux morceaux. Ces morceaux ont été posés sur une feuille soit en reconstituant la bande soit en décalage, et un cache est posé dessus pour masquer la séparation. Il est demandé aux élèves : « *Est-ce que les morceaux de bande sous le cache ont été déplacés ? Oui – Non -Je ne peux pas dire. Écris pourquoi.* » Les élèves disposent d'une boite à outils.

3 Variables didactiques

Celles-ci, qui conditionnent fortement les actions des élèves, portent en premier lieu sur la position relative des deux morceaux : sont-ils dans le prolongement strict l'un de l'autre (pas déplacés) ou ont-ils été déplacés ? Une seconde variable est la nature du déplacement : un glissement sans pivotement ou avec (cas ci-dessus). Enfin il y a le « degré » du déplacement : est-il perceptible avec la vision ou le jugement nécessite-t-il un procédé plus fin ? Ces variables conduisent donc à proposer plusieurs problèmes.

4 Résultats

Les élèves utilisent plusieurs procédures, certaines pouvant s'avérer adaptées : le jugement perceptif ou le contrôle instrumenté sans tracé (Photos 1 et 2) ou encore le contrôle avec tracé (Photo 3), alors que d'autres peuvent être inadaptées ou traduisant une indécision : le suivi du doigt (Photo 4), la reconstitution de la bande par tracé à main levée (Photo 5).

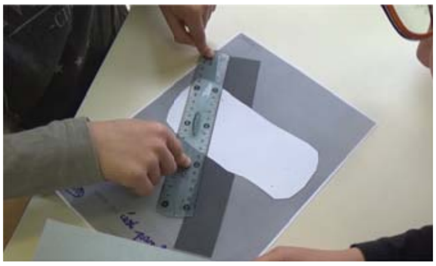


Photo 1

Photo 2

Photo 3

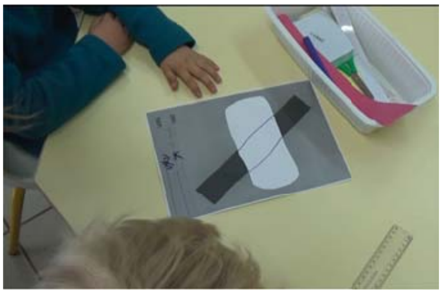


Photo 4

Photo 5

Notons aussi que les contrôles peuvent aussi être quelque peu approximatifs, et il devient nécessaire d'en discuter : précision de l'usage de l'instrument, précision du tracé….

Quelles connaissances ou compétences sont alors mobilisées ? Des déplacements dans le plan, les effets de ces déplacements sur les objets rectilignes, des propriétés des rectangles (la rectitude des côtés), des propriétés d'instruments (la rectitude de certains), le rôle d'instruments (comme la règle ou des bandes de bristol) ou des tracés comme moyen de contrôle de la rectitude, l'usage de la règle (comment s'en servir ?) … Ces connaissances et compétences spatiales peuvent se traduire par des gestes (avec ou sans instrument), par l'usage d'instruments, par des expressions verbales aussi (dans l'expression de la réponse ou dans les phases d'explicitation) ? Ces connaissances sont-elles alors utiles aux élèves et l'enseignant a-t-il à les faire travailler ?

IV - TROISIEME EXPERIMENTATION : DES TRACES POUR RAISONNER

1 Objectifs

L'appréhension progressive par les élèves des propriétés géométriques des figures qu'ils produisent par des tracés graphiques suppose qu'ils dépassent la perception globale du dessin et développent l'analyse de ses composantes des tracés. Dans cette partie nous expliciterons quels apprentissages peuvent être développés à partir d'une situation questionnant de la régularité des formes ? La situation « Figures courbes » a été présentée au colloque de Besançon.[4]

2 L'expérimentation

L'expérimentation concerne en particulier les procédures (graphiques, gestes, discours ...) que peuvent développer des élèves de 7 ans pour distinguer des cercles, des ellipses et d'autres formes arrondies. En ce sens nous situons ces expérimentations en amont de la question des représentations du cercle développées dans Artigue et Robinet (1982) et des situations qui ont été conçues dans ERMEL (2006) pour approcher le cercle par différents aspects du concept.

Dans cette situation les élèves ont à constituer différentes formes courbes à partir de quatre quartiers d'un petit cercle, d'un grand cercle ou d'une ellipse (figures 3 et 4) :

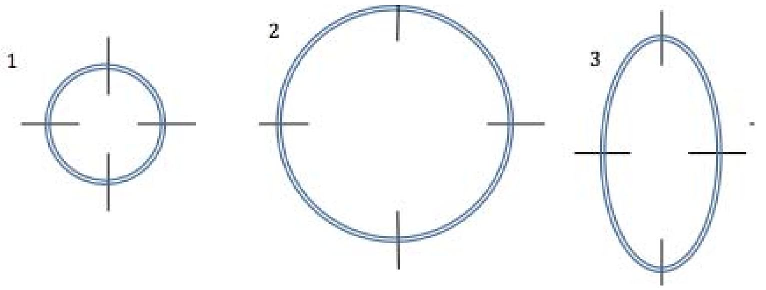


Figure 3. Les courbes utilisées pour les pièces de la situation

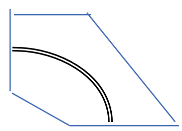


Figure 4. Exemple de pièce

La première consigne invite les élèves à construire un circuit à partir des morceaux de courbes. Elle permet de mettre en évidence un ensemble de contraintes comme le fait de ne pas faire se chevaucher les morceaux ou encore réaliser un tracé fermé.

Photo 6

Photo 7

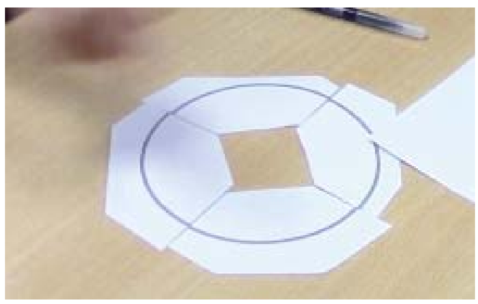


Photo 8

Photos 6 à 8 : exemple d'assemblage non fermé / mal fermé / circuit

---

[4] cf. les actes du XLII ème Colloque COPIRELEM de Besançon (2015) Argaud H.C., Barbier L., Douaire J., Emprin F., Geril-Margueron G. Vivier C.

Dans la phase suivante, l'élève doit réaliser tous les circuits différents constitués de 4 pièces. Le nombre de pièces étant limité, pour garder une mémoire du circuit réalisé l'enseignant demande aux élèves de reproduire par transparence sur une feuille blanche de faible grammage le circuit. Lors de la mise en commun les tracés ainsi réalisés sont affichés. L'enseignant mène une mise en commun qui vise à ce que les élèves regroupent les tracés identiques puis à ce qu'ils dégagent des conclusions sur ce qui fait que les tracés sont identiques ou non.

Photo 9 : production des tracés

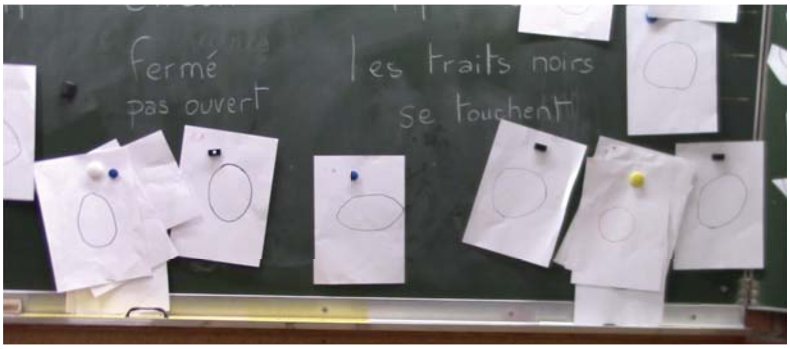


Photo 10 : affichages lors de la mise en commun

C'est cette phase et sa mise en commun que nous analysons ici. En effet le tracé y est utilisé pour raisonner sur un assemble de pièce. Les mises en commun menées amènent les élèves à discuter à la fois sur l'assemblage (ce qui fait qu'il est différent ou non, correct ou non) et sur les caractéristiques du tracé en lui-même.

3 Résolution et résultats

Les tracés, produits par décalque sont souvent imprécis, ce qui conduit les élèves à les critiquer ou même à douter de la validité de la construction qui en est à l'origine ; les échanges entre les élèves confrontent des avis pour savoir si chaque dessin représente ou non une nouvelle forme géométrique : chaque tracé proposé peut-il bien représenter un assemblage correct de 4 pièces ? Cet assemblage de 4 pièces est-il différent de ceux déjà présents ? Plusieurs critères émergent de la mise en commun :

- Le degré de précision : l'objet auquel on s'intéresse est ce que l'élève a voulu représenter dans la mesure où cela nécessite l'interprétation du tracé lorsque la réalisation graphique est imprécise et comporte, par exemple, des « bosses ». Une fois formulé, ce choix est accepté par la classe, même si des élèves ne peuvent s'empêcher ensuite, pour des raisons esthétiques ou personnelles, d'émettre quelquefois un avis critique. C'est ce qui est illustré dans la transcription des échanges lors d'une mise en commun. Les éléments relevant du traitement du statut de la précision de tracé ont été **mis en gras.**

  Professeur : Alors pourquoi je n'ai pas accroché tout ?

  E : parce qu'il n'y avait pas assez de place

  P : parce qu'il n'y avait pas assez de place

  E : parce que aussi c'est souvent les mêmes formes

  P : ha ce sont souvent les mêmes. Est-ce qu'au tableau il y a des formes qui sont les mêmes

  Es : oui

  P : alors Amélia tu peux nous montrer ça les formes qui sont les mêmes

  E : celui-là et celui-là

  P : ok tu les mets l'une sur l'autre / ce serait quoi celui là

  E : petit rond

  E : petit rond et l'autre c'est grand rond

P : Il y en a d'autres qui on fait petit rond ? On va l'appeler comme ça alors ? allez ceux qui ont fait petit rond vous allez le poser dessus comme ça vous êtes accrochés. Pendant ce temps-là /

P : qu'est-ce que vous avez à nous dire ?

*E : quand on a eu / **on n'a pas assez bien / il a pas bien tenu/ il a pas assez bien / ça a bougé***

P : alors qu'est-ce que tu leur dis Rose ?

E : moi je pense que oui mais en fait

P : est-ce que c'est un circuit ?

E : oui ça ressemble un peu

P : c'est fait avec 4 pièces

*E : **mais là il y a un peu de bosse***

*E : **oui mais sur un peu tous***

*P : **oui on a eu un problème pour dessiner**, donc ça y est-on ne va pas revenir dessus. Est-ce que du coup son circuit est possible à faire ?*

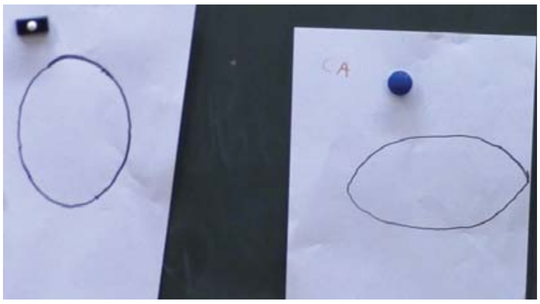


Photo 11

- L'explicitation du procédé d'assemblage des pièces : les tracés, pour les raisons évoquées précédemment peuvent ne pas être suffisants pour valider des constructions ou en comparer plusieurs et déterminer si elles sont identiques. Certains élèves qui présentent leur solution au tableau, reposent d'eux-mêmes les pièces sur leur dessin pour en expliquer le procédé de construction. Cette initiative, conduisant au jugement du tracé par le rappel des étapes de sa construction convainc les autres élèves. Le tracé apparaît comme représentation des actions et est donc lui-même l'objet de l'analyse. C'est l'objet de la transcription ci-dessous.

P : c'est bon, mais c'est pas le même que ça

Es : il est plus arrondi

P : c'est quoi plus arrondi ?

Es : en fait il a deux arrondis

P : là il n'y a pas deux arrondis ?

E : l'œuf ça commence en ovale et l'autre ça commence pas en ovale ça commence tout de suite en rond

P : là tu dis qu'il commence en rond tout de suite celui-là. Y sont où les ronds ?

E : là ça commence en rond

E : là ça commence en ovale

P : et là en bas c'est quoi ?

E : là c'est la moitie d'un rond

P : là c'est la moitié d'un rond et la moitié d'un rond

Photo 12

- L'indépendance de l'orientation de la forme, certaines productions supposant d'être orientées de la même façon pour être plus aisément comparées.

La résolution de ce problème contribue donc à plusieurs apprentissages, qui ne portent pas principalement sur des propriétés d'objets géométriques, mais sur ce que représente un tracé. En effet la reconnaissance que toutes les figures courbes ne sont pas des cercles, si elle conduit à des interrogations ou des constats de la part des élèves en termes de « régularité » (par exemple telle partie « tourne » de façon différente qu'un quart de cercle) et constituer une expérience pour appréhender ainsi certaines de ses propriétés ne constitue l'apprentissage essentiel. Nous avons mis en ***gras italique*** dans la suite de la transcription les éléments qui relèvent du repérage de l'invariance de l'orientation.

P : oui on a eu un problème pour dessiner, donc ça y est on ne va pas revenir dessus. Est-ce que du coup son circuit est possible à faire ?

Es : non

Es : oui

E : parce que ici là, là déjà ça part comme ça / ça fait un peu comme ça mais ça a été raté par là et ici c'est comme ça

P : place le par-dessus comme si on le voyait/ voilà tu t'écartes un tout petit peu en fait il est comme ça

E : ha oui, quand on l'a attaché il n'était pas

P : il était comme ça

E : oui et j'ai cru que moi c'est comme ça

P : alors cette forme là si je la mets comme c'est plus la même forme ?

E : si c'est pareil

E : Si parce si on tourne la feuille

Es : si c'est pareil

P : alors ça ça gène un peu ? elle est tournée mais c'est quand même la même ?

Es : oui

P : donc si on la tourne c'est la même // quelle sont celles qui ne sont pas des ronds et ovales comme on a dit tout à l'heure ?

E : les œufs

P : des œufs, ha oui, ça a été une grande découverte pour ceux qui ont réussi à faire les œufs, ça vous a surpris hein, toi aussi / ha il est dans l'autre sens c'est pas le même

E : si c'est juste qu'il est retourné

P : ha oui / bah vas-y tu peux aller l'accrocher aussi l'œuf

E : ça c'est un œuf, ça ressemble à un œuf mais il y a trop de bosses

P : celui-là / donc on le met quand même avec les œufs ?

Es : oui

Le tracé est utilisé ici comme mémoire d'un assemblage de pièces. Ce statut de représentant amène les élèves à questionner la relation entre l'assemblage et sa représentation. Ce questionnement se retrouve lors de la mise en commun par les affirmations du type : « pour savoir si on peut construire on peut le refaire » qui montre les allers-retours possibles entre assemblage et dessin ou « s'il a des bosses ce n'est pas grave ». Ce type de situation permet donc de questionner le statut du tracé.

V - PERSPECTIVES

Ces expérimentations nous ont conduit à repenser :

- L'entrée dans le domaine graphique. Comme nous l'avons vu il ne s'agit plus, pour nous, de privilégier une modélisation des actions effectuées dans le méso-espace. Les procédures utilisées dans chacun de ces domaines spatiaux ou graphiques étant trop différentes. De plus, les objets sous-jacents - ligne droite constituée à partir d'alignements de points dans le méso-espace, les traits rectilignes prolongés sans présence explicite de points sur la feuille- sont assez différents pour des élèves de cet âge : en fait au CP et au CE1 les élèves découvrent des fonctions des tracés avec des instruments, pour résoudre des problèmes sur la feuille de papier, et plus seulement pour représenter des objets. Ils font ainsi évoluer leurs techniques de tracé et appréhendent des critères de jugement de ces productions. Cette entrée dans le domaine graphique nous semble constituer un objet de recherche.
- L'analyse des connaissances des élèves, non seulement des propriétés en acte mais aussi des gestes et du langage auxquels ils recourent. Quelles sont, par exemple, les difficultés que rencontrent les élèves pour considérer comme équivalents des objets matériels et leurs représentations avec du carton, un tracé sur papier ou transparent…
- L'articulation entre les domaines (spatial, graphique, géométrique).
- La production de ressources : en particulier la possibilité, pour les enseignants par de telles situations de mieux connaître les capacités des élèves de recourir à des gestes, à des tracés, des descriptions de leurs actions, des explications, des jugements, ainsi que leurs contributions aux apprentissages spatiaux, graphiques ou géométriques, répond à une demande explicite de leur part, afin d'appréhender cet enseignement. En effet dans ces domaines spatiaux et graphiques, certains gestes, tracés ou formulations des élèves sont parfois difficiles à interpréter par les enseignants. Doivent-ils les faire expliciter ou critiquer pour toute la classe ? Faut-il favoriser leur diffusion ? Une réponse à ces questions est une condition de la « robustesse » des situations.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M., ROBINET, J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques,* **3.1**, p. 5-64.

ARGAUD, H.-C, BARBIER, L., DOUAIRE, J., EMPRIN, F., GERDIL-MARGUERON, G., VIVIER, C. (2016) Ressources pour la résolution de problèmes et les apprentissages géométriques au cycle 2 : une approche spatiale des figures courbes et du cercle. *In actes du XLIIème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM :* former et se former … quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ? Besançon les 16, 17 et 18 juin 2015. [CD-ROM]. ARPEME.

ARGAUD, H.-C, DOUAIRE, J., EMPRIN, F. (2017) Quelle prise en compte des gestes professionnels du maître dans la production de ressources issues de recherches. *In Actes du XLIIIème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM :* Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ? Le Puy-En-Velay 14, 15 et 16 juin 2016. [CD-ROM]. ARPEME.

DOUAIRE, J., EMPRIN, F. (2014) Expériences spatiales et apprentissages géométriques en GS et au CP : autour de l'appréhension de la rectitude. *In Actes du XLème colloque international des formateurs de professeurs des écoles* *en mathématiques COPIRELEM* : La géométrie à l'école primaire : enjeux et perspectives. Nantes les 18, 19 et 20 juin 2013. [CD-ROM]. ARPEME.

DOUAIRE, J., EMPRIN, F. (accepté) Teaching geometry to students (from five to eight years old): "All that is curved and smooth is not a circle". *In 10th congress of European Research in Mathematics Education - CERME*. 1-5 February 2017, Croke-Park, Ireland, http://cerme10.org.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3,* Hatier.

L'ENTREE DES ELEVES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES VERBAUX AU CP (6-7 ANS)

Philippe LE BORGNE
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

Arnaud SIMARD
Maitre de Conférences, ESPE de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UFR-EDUC
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Résumé
Les auteurs s'inscrivent dans la lignée de la recherche conduite par Houdement (2011), portant sur la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires à l'école primaire. Celle-ci met en évidence le rôle des processus de contrôle dans la mise en œuvre des connaissances associées à la résolution.
Le projet présenté consiste à examiner ce qui se passe pour des élèves de cours préparatoire (6-7 ans) lors de leur première rencontre avec des problèmes arithmétiques verbaux (problèmes à énoncé textuel du type « Sultana a cinq pommes et quatre poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ? » (Thévenot, Barrouillet et Fayol, 2004)). Les auteurs étudient ce qui émerge des traces d'activité du point de vue des connaissances sur les situations. Celles-ci s'inscrivent dans le modèle de la réalité davantage que dans le modèle du problème mathématique (Burgermeister et Coray, 2008). La méthodologie retenue s'inspire d'expérimentations conduites par Camensisch et Petit (2006) : une entrée dans les problèmes arithmétiques par le biais de petites bandes dessinées manipulables a été proposée à deux classes de CP. La phase didactique avait pour objectif final la création d'énoncés de problèmes mathématiques contextualisés par les élèves eux-mêmes. Cette expérimentation met notamment en lumière que ce n'est pas tant les mathématiques sous-jacentes que le contexte qui est complexe lors de la résolution de problèmes.

Ce travail prend sa source dans un article de Houdement (2011) portant sur les « connaissances cachées » en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. L'auteure y présente une recherche basée sur des entretiens d'explicitation individuels (Vermersch, 1994) réalisés auprès d'élèves de cycle 3 (grade 3°, 4° et 5°). Le but de la recherche est de mettre en lumière des connaissances cachées (Sackur *et al.*, 1997 ; Castela, 2008) qui outillent certains élèves et semblent faire défaut à d'autres lors de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux[1] de réinvestissement (Nesher *et al.*, 1982 ; Verschaffel et De Corte, 1993). Parmi les connaissances exhibées par Houdement, certaines seraient utilisées de façon non consciente et auraient été auto-construites ou apprises « par hasard » (à l'occasion d'une remarque anodine d'un professeur par exemple), sans faire l'objet d'un enseignement. Dans tous les cas, leur absence poserait un problème aux élèves qui en sont démunis.

Le travail que l'on se propose de relater ici s'intéresse aux jeunes élèves (5 à 6 ans) qui n'ont pas encore rencontré de problèmes arithmétiques verbaux. La question qui a aiguisé notre curiosité est la suivante : les connaissances (ou leur prémisses) exhibées par Houdement sont-elles déjà présentes dans l'esprit de ces jeunes élèves ?

[1] Problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles, dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit.

Très rapidement nous nous sommes confrontés à une réalité plus structurelle : la notion même de « problème » mathématique n'est pas naturelle chez les jeunes élèves, ce qui rend cruciale la question de l'entrée dans ce que la communauté enseignante appelle les problèmes mathématiques, avant de s'intéresser à leur résolution.

I - CADRE THEORIQUE

1 La *mathématisation* dans les problèmes verbaux

Le problème verbal décrit brièvement une situation mathématique sous la forme d'une « petite histoire » (Thévenot, Barouillet et Fayol, 2010) ; il peut être présenté sous la forme d'un texte ou oralisé. Nous nous intéressons à des problèmes arithmétiques dont la structure injonctive impose la réponse à une question mobilisant des mathématiques. Puisque « les problèmes arithmétiques verbaux usuels de l'école primaire ont cette particularité de problématiser une réalité, évoquée par l'énoncé, pour obtenir une réponse mettant en jeu des mathématiques » (Houdement, 2011, p. 68), deux versants du passage du réel (Houdement, 1999) au traitement mathématique sont à distinguer : la mathématisation (Freudenthal, 1971) et la modélisation. « La mathématisation (…) consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel par transformation de modèles implicites d'action » (Houdement, 2011, p.69) en référence à (Brousseau, 1998 ; Vergnaud, 1991). Le travail de Houdement est centré sur la modélisation en observant des élèves de grade 3°, 4° et 5° qui ont déjà acquis des connaissances mathématiques. Les procédures et algorithmes nécessaires à la résolution des problèmes sont alors maîtrisés dans le domaine numérique de l'énoncé : il s'agit dans ce cas de problèmes d'application.

Selon le cognitiviste Julo (1995, 2002) le sujet mobiliserait en résolution de problème des connaissances acquises lors de la résolution d'anciens problèmes (le sujet enrichit sa bibliothèque de schémas de problèmes en résolvant des problèmes). En d'autres termes, des schémas de problèmes (Julo, 1995 ; Levain *et al.*, 2006), outilleraient le sujet dans la résolution de problèmes nouveaux et l'échec en résolution de problème serait corrélé à la difficulté de pouvoir construire une représentation mentale de la situation (De Corte, Verschaffel et De Win, 1985).

Ces considérations théoriques font la part belle à l'activité de résolution de problème qui s'enrichit par elle-même, mais qu'en est-il de l'initiation du processus, de la rencontre avec le problème mathématique ? Notre travail va s'attacher au versant de la mathématisation et, plus particulièrement à la définition d'un problème mathématique avec des jeunes élèves (6-7 ans).

2 Les *contrôles*

Lors de l'activité de résolution de problème, le sujet convoque des connaissances en en contrôlant la pertinence dans le problème, ce que Coppé (1995) appelle la vérification : « argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude du résultat ».

Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat ; soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification. (Coppé, 1995).

Pour compléter, le processus de validation ne possède pas seulement une fonction rétroactive. Les processus de contrôles interviennent pendant la phase de résolution comme *anticipation de la validation* (Margolinas, 1993).

Houdement (2006) propose une typologie des contrôles mobilisables par les élèves en identifiant leur nature : pragmatique, sémantique, syntaxique et la qualification.

Le *contrôle pragmatique* mobilise le contexte évoqué par l'énoncé pour vérifier la plausibilité de son résultat. Si le contexte est familier pour le sujet, alors l'ordre de grandeur du résultat renforce ce contrôle.

Le *contrôle sémantique* s'exprime lorsque le sujet interprète la situation évoquée dans l'énoncé et se construit une représentation du problème (Julo, 1995). Cette représentation est liée au vocabulaire utilisé et intervient dans le choix des opérations en jeu dans la résolution (ajouter c'est additionner, partager c'est diviser …). Le sujet contrôle ainsi les opérations en jeu.

Le *contrôle syntaxique* intervient lorsque le processus de modélisation est enclenché. Il renvoie au traitement par le sujet des objets mathématiques en dehors du contexte. Les relations mathématiques entre ces objets deviennent source de contrôle (réversibilité de l'addition ou de la multiplication par exemple). Le contrôle syntaxique peut conduire à la production d'un résultat sans rapport avec le sens de la question posée lorsque les contrôles sémantiques et pragmatiques ne sont pas mis en œuvre de façon efficiente (Margolinas, 1993).

La *qualification* s'exprime lorsque l'articulation entre la réalité évoquée par l'énoncé et les mathématiques en jeu dans la résolution passe par la qualification des grandeurs en jeu. Houdement distingue deux niveaux de qualification. La *qualification faible* revient à savoir donner l'unité appropriée à chaque valeur numérique calculée ou en jeu. La *qualification complète* revient à pouvoir resituer dans le contexte de l'énoncé toute valeur numérique. Ce que Margolinas (1993) différencie entre « résultat » et « réponse » est précisé étape par étape par cette notion de qualification. Dans le travail que nous présentons ici la qualification s'étend à toutes les occurrences du discours de l'élève lui permettant de qualifier verbalement les objets en jeu dans la situation et dans la mise en œuvre de sa résolution.

Les différents contrôles présentés entrent en jeu lors de l'activité de résolution de problème de manière explicite (sur un brouillon de recherche) ou de manière implicite (il convient alors de les révéler lors d'un entretien d'explicitation). Pour mettre en place les contrôles pragmatique, sémantique et syntaxique, le sujet se réfère à des situations antérieures de résolution de problème ou à un vécu social. Ces contrôles sont liés à des connaissances difficiles à « attraper » comme le souligne Houdement. La qualification, quant à elle, s'inscrit plutôt dans une méthodologie ou une heuristique de résolution de problème. Ce contrôle semble plus simple à cibler et à ritualiser dans une démarche d'apprentissage en résolution de problème.

3 Les problèmes mathématiques : une culture spécifique

Selon Thévenot, Barouillet et Fayol (2010), la difficulté des problèmes varie en fonction de la complexité des situations décrites plutôt qu'en fonction de la nature des opérations à effectuer pour leur résolution. Des travaux plus anciens (Thévenot, 2008 ; Moreau et Coquin-Viennot, 2003) s'accordent pour faire travailler les élèves sur une variété de problèmes en insistant sur l'interprétation des situations plutôt que sur l'apprentissage des procédures de résolution. Ainsi, la construction de schémas de problèmes (au sens représentation mentale) semble être à la base de l'apprentissage en résolution de problèmes verbaux. Ces schémas se constitueraient de façon dynamique au sein même de l'activité de résolution de problèmes et seraient mis en œuvre de manière plus ou moins spontanée. Ces hypothèses rejoignent la notion de flexibilité cognitive définie par Clément (2009), c'est-à-dire la capacité pour un sujet de reproduire un modèle ou, au contraire, d'envisager un autre modèle pour la résolution de problèmes proches.

Le CP (élèves de 6 à 7 ans) semble être la classe charnière pour cette entrée dans les problèmes mathématiques. En effet, les jeunes élèves sont familiers avec un domaine numérique suffisamment large (nombres jusqu'à 30) tout en connaissant quelques décompositions additives de certains de ces nombres ainsi que les compléments à 5 et à 10. Ces élèves sont également habitués à écouter et à se représenter des histoires issues d'albums présents en classe où à la maison. Ceci permet d'envisager l'entrée dans la résolution de certaines catégories de problèmes additifs (arithmétiques et verbaux) : problèmes de transformation, problèmes de combinaison statique, problèmes de comparaison (Vergnaud, 1991). Passer d'une histoire que l'on écoute à un problème mathématique que l'on résout (passer d'une histoire à un énoncé de problème), nécessite un réel travail d'acculturation basé sur une représentation mathématisée de la situation (développement des schémas de problème), c'est ce que nous illustrons par la suite.

4 Mathématiques et langage

Plusieurs travaux se sont intéressés à la question de la langue des énoncés de problèmes. Camensisch et Petit ont travaillé ensemble sur des « projets d'écritures en mathématique » (Camensisch et Petit, 2004, 2005, 2006, 2007). Ils émettent l'hypothèse que, pour un niveau donné, « les mathématiques ne constituent pas un obstacle à la résolution des problèmes, mais que les principales difficultés proviennent de la langue française. C'est bien le langage qu'il convient de travailler afin de permettre aux élèves en difficulté de mieux réussir en mathématiques » (Camensisch et Petit, 2006, p.2). Leurs travaux visent à améliorer à la fois des compétences en mathématiques, dans le domaine de la résolution de problèmes et certaines compétences bien précises sur la langue. Leurs expérimentations consistent, entre autres, en des ateliers d'écriture d'énoncés de problèmes mathématiques basés sur des petites bandes dessinées en trois cases issues de manuel russe[2], idée que nous reprendrons dans la section II. Ces chercheurs mettent l'accent sur la différence significative entre une histoire et un énoncé :

Contrairement à l'histoire qui a une dominante narrative unique, l'énoncé de problème comprend au moins deux séquences textuelles. L'une est à dominante narrative ou informative et comprend les données du problème. L'autre, plutôt injonctive, conduit à l'action de résoudre un problème en mettant en œuvre un raisonnement et, dans le domaine numérique, des calculs. Ecrire un énoncé de problème équivaut donc dans un premier temps à imaginer et à écrire une histoire en suivant une trame narrative chronologique. Dans un second temps, il faut transformer cette histoire en modifiant éventuellement l'ordre d'énonciation et donc la chronologie et en adaptant le texte à sa dominante principale, informative ou injonctive. (*Camensisch et Petit*, 2006, p.9).

La recherche présentée ici poursuit le projet de mieux connaitre les connaissances mobilisées par les élèves de début du cycle 2 dans l'entrée dans la résolution de problèmes verbaux. Il nous semble que peu de recherches se sont intéressées aux questions de résolution de problème à ce niveau en les prenant en compte dans le cadre des situations rencontrées en classe. Le projet s'appuie sur des observations en classe et notre démarche est exploratoire. Nous nous appuyons également sur le constat des difficultés observées, notamment dans les premières séances de l'expérimentation pour construire des situations permettant d'enrichir nos observables. Même si le fil conducteur de nos expérimentations induit des modifications dans le comportement des élèves confrontés aux questions qui leur sont posées, notre intention n'est pas de présenter ici une ingénierie.

II - METHODOLOGIE

Nous faisons l'hypothèse que l'écrit ne donne pas facilement accès aux décisions, aux choix et à toute la dimension cognitive des pratiques des élèves. Ceci nous apparait d'autant plus vrai au CP, quand le recours à l'écrit n'est pas encore installé. Le langage oral constitue alors l'outil central sur lequel nous appuyer pour avoir accès à la composante privée (Houdement, 2011) du travail de l'élève. Cependant la formulation verbale n'est pas toujours possible et l'exiger peut transformer le rapport à la tâche. Aussi nous considérons que toute dimension sémiotique est à prendre en compte. Ainsi, les signes visibles ou cachés (gestes, attitudes, regards, manipulations), sont susceptibles de nous renseigner sur l'activité du sujet lorsque cette dernière est conscientisée.

Forts de ces hypothèses nous privilégions l'analyse de séances filmées de travail en petits groupes de quatre ou cinq élèves. Ces séances sont encadrées par les enseignantes responsables de la classe qui ont été associées au travail de recherche sur le long terme. Nous disposons ainsi d'une banque de 161 films de quelques minutes chacun mettant en scène une trentaine d'élèves de CP. Sans chercher à généraliser, la redondance de certains comportements d'élèves face aux mêmes questions nous permet de questionner notre sujet d'étude malgré le faible nombre d'élèves observés.

[2] Moro et Stepanova (1990). *Matematika 1*. Moscou.

III - UNE EXPERIMENTATION EN COURS PREPARATOIRE (CP, ELEVES DE 6-7 ANS)

1 Investigation

Le travail d'investigation qui a été réalisé en amont de l'expérimentation s'est déroulé en septembre 2015 (à l'entrée des élèves en CP). Il concernait la mise en lumière des connaissances cachées en résolution de problème avec des jeunes élèves. Ce premier travail a été peu concluant car les élèves, certainement trop jeunes ou trop peu aguerris à la culture mathématique, sont restés extérieurs aux problèmes mathématiques que nous leur avons soumis. A titre d'exemple (générique de ce que nous avons observé sur les 30 élèves), voici les réflexions d'un groupe de quatre élèves (Ewan, Titouan, Emma, Victor) concernant un problème arithmétique verbal dans un domaine numérique largement connu à leur niveau :

Enseignante : Sultana[3] a 5 pommes et 4 poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ? Ewan, est-ce que tu peux redire cette histoire ?

Ewan : Je me souviens plus c'était qui…je me souviens plus c'était laquelle qui est dans l'histoire...

Enseignante : Le nom ? Sultana ? Alors Sultana…

Ewan : Sultana a pris des pommes et des poires…

Enseignante : Alors…est-ce que tu te souviens ? Combien de pommes ?

Ewan : 4.

Enseignante : Non 5…5 pommes et combien de poires ?

Ewan : 4 pommes.

Enseignante : Non…quatre…

Ewan : Poires.

Enseignante : Et qu'est-ce qu'on demande Ewan ?

Ewan : Combien y'a de pommes…

Enseignante : Est-ce qu'il faut dire combien il y a de pommes ? Qu'est-ce qu'on demande Emma ? Et pis toi…tu sais toi…qu'est-ce qu'on demande ?

Titouan : On demande de compter les pommes.

Enseignante : Est-ce qu'on demande de compter les pommes ? Victor ?

Victor : Oui.

Enseignante : Alors, je redis…Sultana a 5 pommes et 4 poires dans son panier. Combien a-t-elle de fruits dans son panier ?

Victor : 5.

Enseignante : Est-ce qu'on demande combien a-t-elle de pommes ? Qu'est-ce qu'on dit ? Combien a-t-elle de … ?

Ewan : Pommes…

Enseignante : Non.

Emma : Fruits…

Enseignante : De fruits dans son panier. Alors Emma, tu nous redis l'histoire.

Emma : Je me rappelle plus…

Enseignante : Sultana…

Emma : Sultana a 4 pommes et 5 pommes dans son panier.

Enseignante : Et qu'est-ce qu'on demande ?

Emma : De compter…

[3] Sultana est le prénom d'une élève de la classe (le prénom est donc connu des élèves).

Enseignante : De compter combien il y a de fruits dans son panier. Vous le faites et vous me donnez la réponse…allez-y.

Victor : Moi je sais déjà.

Enseignante : Ben tu le fais et tu nous écris…ici… [attente] *Vous avez tous répondu ? Alors Titouan…qu'est-ce que tu as noté toi ?*

Titouan : 5.

Enseignante : Et toi Emma, qu'est-ce que tu as noté toi ?

Emma : 9.

Enseignante : Et toi Ewan ?

Ewan : 6.

Enseignante : Et pis toi Victor ?

Victor : 8.

Les élèves ne « rentrent » pas dans le problème malgré un contexte familier et un domaine numérique connu. Leur attention première est focalisée sur le contexte (nom du personnage, nom des fruits en jeu), l'aspect numérique passe au second plan et la question posée est totalement éludée. On note également que les contrôles sont absents. La qualification, même faible, semble faire défaut dès lors qu'un contexte est donné (mémorisation difficile de toutes les données : nom, données numérique, fruits).

Ces observations d'élèves confortent notre décision de travailler sur l'entrée dans la culture des « problèmes mathématiques » ou comment transformer une *histoire* en un *énoncé*. Pour cela nous décidons de travailler la résolution de problème avec ces élèves en mettant en avant : la compréhension orale de l'énoncé ; la représentation mentale des contextes des énoncés ; la chronologie des contextes proposés ; la reformulation des énoncés ; la construction d'énoncés de problèmes ; la manipulation d'objets ou l'usage de dessins pour poser des problèmes et les résoudre ; l'inclusion des structures mathématiques additives et/ou soustractives dans un contexte.

2 Le matériel

Nous décidons de travailler les points évoqués dans le paragraphe précédent de manière simultanée en privilégiant l'oral des élèves. Ainsi nous construisons des situations mettant au centre de l'activité la production orale par les élèves eux-mêmes.

2.1 Les strips

Pour ce faire, nous avons créé des strips (bandes dessinées de trois cases), qui se présentent tous sous la même forme (voir Figure 1).

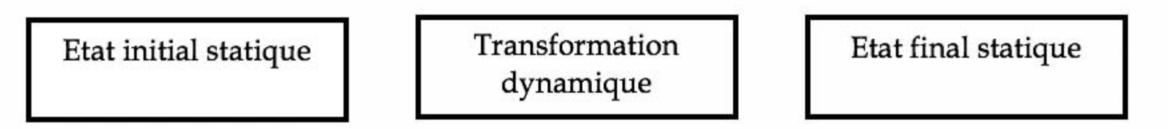


Figure 1. Forme des strips proposés

Le strip illustre une petite histoire et ne constitue pas un énoncé de problème. Le but des séances proposées aux élèves est de discuter de la chronologie de cette histoire puis de mathématiser cette histoire pour enfin faire émerger un énoncé de problème.

2.2 Les cartes

Les strips que nous avons créés reposent sur un jeu de cartes (présenté en annexes 1 et 2), et ils respectent les points suivants :

- le contexte est ludique (dessins gais mais sans fioritures excessives) ;
- la transformation d'état doit être clairement identifiée (le mouvement d'envol ou d'atterrissage) ;

- les personnages représentés sont tous identiques et non différenciables (pas de signe distinctif d'une « unité » à l'autre) ;
- la répartition des personnages est la plus « quelconque » possible (pas d'alignement strict ni de constellation) ;
- les valeurs numériques choisies sont 3, 4 et 7[4].

Le jeu de carte est imprimé en couleur en format A4 sur papier cartonné (ce qui permet une manipulation aisée). Le jeu comporte sept cartes présentant respectivement : 7 oisillons dans un nid ; 4 oisillons dans un nid ; 3 oisillons dans un nid ; 4 oisillons dans un nid et 3 oisillons qui s'envolent ; 4 oisillons dans le nid et 3 oisillons qui se posent ; 3 oisillons dans le nid et 4 oisillons qui s'envolent ; 3 oisillons dans le nid et 4 oisillons qui se posent. Les différents agencements de ces sept cartes permettent de raconter 4 histoires différentes[5].

Exemple : Trois oisillons sont dans un nid, quatre oisillons arrivent dans le nid, sept oisillons sont dans le nid (Figure 2).

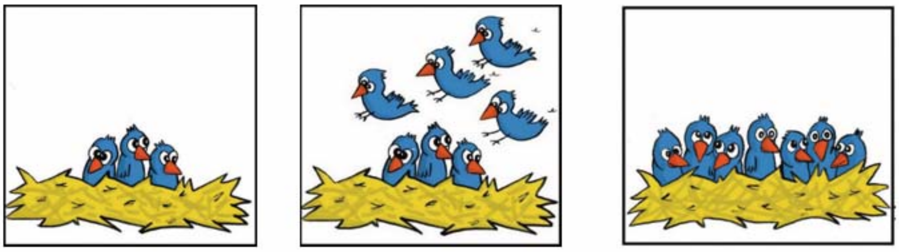


Figure 2. Exemple d'une histoire.

Lorsque l'une des cartes est retournée, l'histoire n'est pas complète… et l'on peut poser une question mathématique. On retourne la carte du milieu dans l'histoire précédente (Figure 3).

Exemple de problème avec le strip précédent : Au départ trois oisillons sont dans un nid, à la fin ils sont sept dans le nid. Combien d'oisillons sont arrivés dans le nid ?

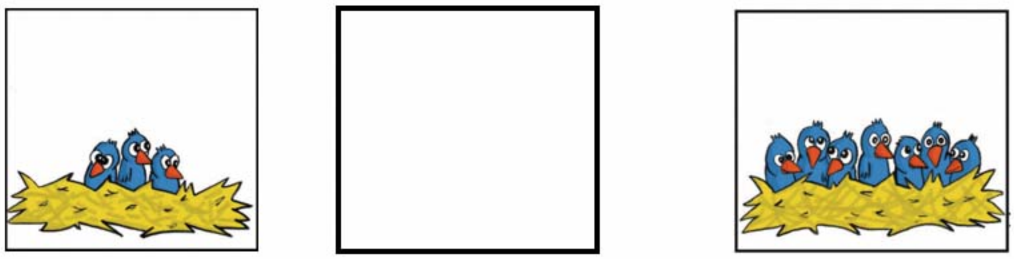


Figure 3. Exemple d'un problème mis en image.

Chaque strip permet donc de poser trois problèmes différents en fonction de la carte retournée.

3 Déroulement prévu

Le travail expérimenté s'effectue par groupe de 4 ou 5 élèves en quatre temps forts (qui peuvent, selon le cas, donner lieu à quelques variantes pour laisser les élèves s'exprimer).

Phase 1. Un strip entier (trois cartes visibles) est présenté aux élèves et l'enseignant leur demande de raconter l'histoire.

---

[4] Dans un premier temps les valeurs numériques sont 3, 4 et 7 (contexte « nid – oiseaux ») puis dans un second temps, 5, 7 et 12 (contexte « mer – poissons »).

[5] Les histoires des problèmes sont les suivantes :

3 oiseaux étaient dans un nid, 4 arrivent, maintenant il y en a 7 dans le nid : 3 + 4 = 7.

4 oiseaux sont dans un nid, 3 arrivent, maintenant il y en a 7 dans le nid : 4 + 3 = 7.

7 oiseaux sont dans un nid, 4 s'envolent, maintenant il y en a 3 dans le nid : 7 – 4 = 3.

7 oiseaux sont dans un nid, 3 s'envolent, maintenant il y en a 4 dans le nid : 7 – 3 = 4.

Phase 2. On montre un second strip dans lequel une des cartes n'est pas visible (elle est retournée). On demande alors aux élèves de raconter l'histoire et de poser une question. Il s'agit ensuite de répondre à cette question. La validation se fait en rendant visible la carte retournée. Cette phase peut être jouée à plusieurs reprises avec des strips différents.

Phase 3 (qu'il est prévu de faire ou non selon le niveau de compréhension de chaque groupe). L'objectif est un passage à l'écrit mathématisé du strip. Quel code adopter pour se souvenir d'un strip lorsque le contexte est connu ? Si le strip est complet, les élèves peuvent résumer la situation par une écriture mathématique du type « 3 + 4 = 7 » pour résumer, par exemple, l'histoire « 3 oisillons sont dans le nid, 4 arrivent, ils sont alors 7 dans le nid ». Si le strip présente un carte retournée, le passage à l'écrit permet une entrée dans les écritures pré-algébriques du type « 3 + ? = 7 » pour résumer, par exemple, l'énoncé « Au début il y a 3 oisillons dans le nid, à la fin il y en 7. Combien d'oisillons sont arrivés dans le nid ? ». On note ici la nécessaire recomposition de la chronologie de l'histoire mis en lumière par Camensisch et Petit (2004, 2005, 2006).

Phase 4. L'objectif de cette dernière phase est de créer un énoncé de problème sans avoir recours au matériel tout en gardant la structure ternaire rencontrée dans les phases précédentes. Le contexte est libre.

4 L'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée au mois de mai 2016 en classe de CP (fin de CP) avec 6 groupes de 4 à 6 élèves. Nous faisons le choix de ne pas relater in-extenso les propos des élèves mais plutôt de catégoriser leurs discours. En effet, dans chaque groupe le même processus s'est mis en place, les mots n'étant peut-être pas à tout à fait identiques, mais les idées largement communes. Par ailleurs, nous tenons à signaler que l'enseignante précisait d'entrée que le petit groupe était réuni pour faire un travail mathématique. Cette précision place directement l'élève dans un contexte référencé à l'intérieur de la pratique scolaire.

4.1 Phase 1

Lors de la première phase, les élèves sont invités à s'exprimer sur le strip donné Figure 2. La consigne est la suivante : « Racontez l'histoire ».

Le terme « histoire » n'est peut-être pas pertinent, car il est rattaché à un univers trop distinct des mathématiques (lecture et compréhension de texte) et peut orienter les élèves sur une piste non attendue (histoire imaginaire, conte). La question du terme approprié reste ouverte car le terme « énoncé » ne convient pas non plus.

Dans un premier temps les élèves identifient la chronologie sous-jacente et comprennent intuitivement que l'histoire se décrit de gauche à droite avec des oisillons et un nid. Dans un second temps les données numériques 3 et 4 sont identifiées puis le nombre 7. Dans un troisième temps, l'imaginaire entre en jeu pour donner un enjeu narratif à l'histoire. A partir du moment où un élève entre dans l'imaginaire qui peut entourer l'histoire, tous les élèves du groupe focalisent leur créativité pour inventer des contextes de plus en plus extravagants.

Exemples de réponses d'élèves : « *Je vois des oiseaux, ils sont dans leur nid, y'a des oiseaux qui sont dans le nid et d'autres qui volent…et maintenant ils sont tous dans leur nid…ah ceux-là ils vont dans le nid.* » ; « *Au début il y en a 3, puis 4 arrivent et après il y en a plusieurs.* » ; « *Il y a 3 oiseaux dans le nid, après il y en 4 qui viennent, après ils sont tous réunis* » ; « *Il y a des oiseaux, 3 oiseaux qui viennent et après il y a tous les oiseaux dans le nid.* » ; « *Il y a 3 oiseaux dans le nid, après il y en 4 qui vient, après il y en a plein dans le nid.* » ; « *Au début ils sont 3, après ils sont 7…y'a des oiseaux qui reviennent et là y'en a 7 aussi.* » ; « *Au début il y a…3 oiseaux après il y en a 7.* » ; « *Je vois 4 oiseaux dans un nid et ils attendent quelque chose, après je vois des oiseaux qui viennent dans le nid comme du coup ils sont 7 dans le nid.* » ; « *Les parents arrivent avec pépé et mémé.* » ; « *Ils font la fête dans le nid.* » ; « *Ils attendent ils s'ennuient…ils attendent pour jouer….les cousins et les cousines qui arrivent…ils jouent.* »

4.2 Phase 2

La deuxième phase se présente comme la situation de référence (Brousseau, 1998) pour la construction d'énoncés de problème. En effet après avoir compris la chronologie d'enchainement des strips, les élèves sont maintenant confrontés à l'absence d'une carte (voir exemple Figure 3). La consigne est la suivante : « Racontez une histoire et posez une question ».

Les groupes d'élèves n'ont pas été confrontés aux mêmes strips, mais leur approche est similaire.

Dans un premier temps les élèves décrivent ce qu'ils voient sur les cartes sans poser de question. Certains complètent l'histoire en y intégrant la carte manquante. L'enseignante relance alors la consigne en insistant sur la question à poser. Dans un second temps, les élèves posent des questions sur un contexte imaginaire sans se soucier des données numériques : ils ne rentrent pas dans une mathématisation de l'histoire.

Exemples de premières questions posées par les élèves : *« Pourquoi il y en trois autres qui viennent ? » ; « Est-ce qu'ils reviennent ? » ; « Où sont-ils ? » ; « Qu'est ce qui s'est passé ? » ; « Pourquoi ils ont pas dit pourquoi ils partaient ? » ; « Pourquoi y'en avait 7 au début et pourquoi y'en a quatre qui sont partis ? »*

Exemples d'histoires sans questions : *« C'est 4 oiseaux qui sont dans leur nid et maintenant ils sont tous…ils sont 7. » ; « Il y en a 4…oiseaux…dans l'autre carte il y a beaucoup plus d'oiseaux…c'est la carte du milieu qui dit qu'il y en a 7. » ; « Il y a 4 oiseaux, il y a 3 oiseaux qui viennent. », « Il y a 7 oiseaux, 3 qui partent….il y a 4 oiseaux sous cette carte. » ; « On voit que les oiseaux vont se poser dans le nid…et derrière cette image ils se sont posé dans le nid…et ils sont trop serrés. »*

Ce n'est qu'avec insistance que l'enseignante finit par avoir des questions qui commencent par « Combien… ». Cette phase est répétée plusieurs fois avec les élèves en leur proposant différents strips (contexte « oiseaux » avec les valeurs numériques 3, 4, 7 et contexte « poissons » avec les valeurs numériques 5, 7, 12, voir annexes 1 et 2).

Exemples d'orientation du discours par l'enseignante pour recadrer vers la construction d'énoncés : *« Je vous rappelle qu'on allait faire des problèmes. » ; « Quelle question je peux trouver dans mon problème ? » ; « Quelle question on peut poser en mathématiques ? » ; « Je veux une question en mathématiques. » ; « Qu'est-ce que la maitresse demanderait ? »*

Exemples de questions d'élèves après relance : *« Combien y'en a qui sont venus ? » ; « Combien sont venus ? » ; « Combien y'en a qui sont arrivés dans le nid ? » ; « Il y a 4 oiseaux et après y'en a 3 qui viennent…combien ça fait en tout ? » ; « Il y a 4 oiseaux et là on se demande combien il va y en avoir pour faire 7 dans le nid. ».*

Pour autant certains élèves semblent ne pas rentrer dans ce jeu de questions. En effet, pour eux, une question doit être ouverte, ils doivent forcément ne pas connaitre d'emblée la réponse. Pour ces élèves le contexte du strip est peut-être trop évident et ne leur permet pas de poser de questions (si on connait la réponse ce n'est pas la peine de poser de question), comme en témoigne la réflexion suivante : *« Pas besoin de demander combien partent car on les voit ! ».*

Lors de cette phase, il semble important de noter l'enjeu de la qualification. La qualification n'a de sens que lorsque différentes grandeurs sont en jeu. En effet, s'il n'y a pas d'ambiguïté il n'y a alors pas de sens à être rigoureux sur la qualification. Pour autant il semble important de prendre l'habitude de toujours parler dans le contexte de l'énoncé (nombres concrets : nombres et unité). Ainsi *« il y a 3 oiseaux…à la fin il y en a 7. »* devrait être reformulé en : *« il y a 3 oiseaux…à la fin il y a 7 oiseaux. »*

4.3 Phase 3

Lors de la troisième phase, les échanges entre élèves ont été très riches d'un point de vue sémantique, pragmatique et pré-algébrique. Les données numériques 3, 4, 7 et leur relation additive (ou soustractive) sont dominées. L'interprétation sémantique de l'arrivée ou du départ des oiseaux (plus ou moins) est en voie de construction pour certains élèves et assurée pour d'autres. Le contrôle pragmatique de la situation entre en jeu (si des oiseaux arrivent, ils seront plus nombreux, s'ils s'envolent ils seront moins nombreux). Les écritures sous forme d'addition (ou soustraction) à trou (avec ou sans « ? ») prend tout son sens et provoque un consensus d'utilisation dès son apparition.

Exemple d'écrits d'élèves et de justification (contrôle sémantique et pragmatique) :

Lili écrit « 7 – 4 = 3 ».

Enseignante : Pourquoi « – 4 » ?

Lili : Car il y en a 4 qui s'envolent.

Enseignante : Louis…pourquoi tu effaces ? Qu'avais-tu marqué ?

Louis : J'avais mis 7 + 3.

Enseignante : Et pourquoi ça n'allait pas ?

Louis : Parce que 4 partaient, il n'y en avait pas qui revenaient.

Exemple d'écriture pré-algèbrique (situation 4 + 3 = ?) :

Sacha écrit « 4 + 3 = 7 » : Parce qu'il y a 4 ici et 3 qui viennent…et là, on sait pas ce que c'est mais 4 + 3 ca fait 7.

Louanne écrit « 4 + 3 = ? » : Là…on se demande combien il y en a en tout.

Suite à cet échange, l'enseignante propose différents strips avec une carte retournée. Les élèves écrivent sans difficulté les codes correspondants : 4 + ? = 7 ou encore ? + 3 = 7.

Exemple de conflit entre contrôle syntaxique et contrôle sémantique (situation 3 + ? = 7) :

Sophia : Il y en a 3 dans le nid donc j'écris 3…il y en a 7 dans le nid donc j'écris 7…j'ai écrit 3 – … = 7.

Enseignante : Pourquoi tu as écris « moins » ?

Sophia : J'ai mis 3 + 4 = 7 car y'en 3 dans le nid et 4 qui vient pour faire 7.

Sophia : Au début il y a 3 oiseaux, à la fin il y en a 7…il y en a 4 qui viennent.

Sophia a bien identifié la situation, elle sait que la carte retournée cache 4 oiseaux qui arrivent dans le nid, c'est pourquoi elle justifie « j'ai mis 3 + 4 = 7 » (contrôle sémantique). Elle sait également qu'elle doit résumer cette situation avec une écriture où le « 4 » est remplacé par un « ? » ou un vide (opération à trou). Or ce « 4 » est obtenu par soustraction (7 – 3). Ainsi elle tente de résumer la situation en utilisant la soustraction (contrôle syntaxique), c'est pourquoi elle écrit « 3 – … = 7 ».

4.4 Phase 4

Au cours de la quatrième phase les élèves sont invités à créer leurs propres énoncés avec la consigne suivante : « Créez un problème : Racontez une histoire en imaginant des cartes dont une est retournée. Posez une question. » .

Les élèves qui ont abordé cette phase réagissent de manière similaire. Ils ne s'éloignent pas des contextes déjà vus (oiseaux ou poissons), et les énoncés proposés, comme on peut s'y attendre, sont de la forme : « a + b = ? » ou « a – b = ? ».

Exemples d'énoncés créés par les élèves : *« Il y a 9 poissons au début, 4 s'en vont, combien il reste de poissons ? » ; « Il y a 40 poissons, et il y en a 4 qui partent, combien il y a de poissons ? » ; « Au début il y en a 13 de poissons, ensuite il y en a 4 qui partent…combien y'en a ? » ; « Au début y'en a 12…ils sont réunis, après y'en a 4 qui partent, combien reste-t-il ? ».*

Puis l'enseignante propose : « Vous les avez fait partir, les poissons, on peut trouver un problème avec une autre situation ? ».

Exemples de nouveaux énoncés créés par les élèves : *« Au début il y a 4 poissons, après il y en a 5 qui viennent et combien y'en a la fin ? » ; « Il y en a 50 et il y en a 50 autres qui viennent …combien y'en a la fin ? ».*

5 Bilan des phases didactiques

Le matériel proposé (et son utilisation) pour entrer dans les problèmes a ses avantages et ses limites. Les élèves s'emparent facilement des contextes proposés mais la modélisation mathématique sous-jacente ne leur est pas naturelle.

Les attentes de l'enseignant ne sont pas transparentes c'est pourquoi les élèves s'engagent naturellement sur des aspects imaginaires liés au contexte de l'histoire plutôt qu'à des aspects mathématiques liés à la structure des situations. Pour autant, le travail de l'enseignant qui consiste à orienter les discussions vers la création d'énoncés mathématiques semble porter ses fruits dans la dernière phase.

Le dévoilement de la structure des problèmes s'effectue à l'aide d'une discussion conduite par l'enseignant qui donne à voir aux élèves l'espace occupé par la question dans l'énoncé. Le rôle du langage et de l'écriture symbolique semble avoir un poids très important dans l'accès à la modélisation.

La discussion en petits groupes étayée par l'enseignant et par les pairs semble favoriser une acculturation au modèle du problème mathématique. C'est par le langage que les élèves révèlent, petit à petit, la structure d'un problème et c'est par l'écrit symbolique qu'ils la matérialisent et qu'ils s'en emparent.

Les procédures mathématisées plus ou moins formalisées sont assez fréquentes dès lors que les attentes de l'enseignant sont clairement définies. Le travail d'emblée dans le modèle mathématique ne semble pas constituer une difficulté pour l'élève (Burgermeister et Coray, 2008), au détriment de la question du sens de la situation.

IV - RESULTATS PARTIELS ET DISCUSSION

Le travail présenté ici est inachevé. Nous soulignons quelques interprétations des expérimentations que nous avons conduites.

Le sens du problème (en tant que texte injonctif) n'est pas accessible d'entrée aux élèves de CP observés. Le passage de la compréhension « d'une histoire à un énoncé » fait partie d'une acculturation qu'il semble nécessaire de penser pour donner du sens au questionnement mathématique des problèmes arithmétiques verbaux.

La résolution d'emblée de problèmes mathématiques ne semble pas être le moyen de faire accéder à la compréhension de la structure, l'étape de construction de problème semble prioritaire. La situation des « strips » illustre cette potentialité où la résolution du problème n'apparaît pas comme le moyen central de l'accès au sens. Dans un travail collectif, la pensée est stimulée par la perception de la situation et générée par une pratique sociale d'élucidation des questions (il est à noter le rôle important de l'enseignante et de la phase de discussion). Cette forme de confrontation au modèle de problème peut permettre une acculturation à la résolution de problèmes mathématiques.

L'accès à résolution de problèmes, c'est-à-dire la mise en œuvre d'un modèle mathématique tel que notre travail l'envisage aujourd'hui, ne s'impose pas de l'extérieur. Elle se construit dans un processus d'élaboration de représentations mentales idoines, mobilisant les sens et le vécu du sujet. Cet accès à la résolution de problèmes mobilise ce que nous avons qualifié de « connaissances cachées ». Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit de l'acquisition par l'élève de formes culturelles, de réflexion sensible, ou d'actions sémiotiques. En ce sens la résolution de problèmes apparait comme un objet culturellement situé à travailler en collectif dans un dispositif permettant aux élèves d'objectiver ses caractéristiques (Radford, 2003).

L'élaboration de la représentation du problème semble facilitée par la répétition de situations proches sur une longue durée. Dans ces situations, l'enseignant contribue sur le long terme à une médiation sémiotique de la réalisation d'une pratique sociale, et l'énoncé est un artefact à travers lequel on pense l'activité mathématique.

V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G., (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

BURGERMEISTER, P., & CORAY, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(82), 63.

CAMENSISCH A., PETIT, S. (2006). Lire et Écrire des Énoncés de Problèmes Additifs : Le Travail sur la Langue. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*.

CAMENSISCH, A., PETIT, S. (2007). La formation savante de mots en mathématiques. *Bulletin de l'APMEP*, (470), 311-332.

CASTELA, C. (2008 dir.). *Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux ignorés d'apprentissage*. Les Cahiers de l'IUFM 7. Université de Rouen.

CLEMENT, É. (2009). *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*. Armand Colin.

COPPE, S. (1995). *Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, 129–144.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., & DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, ***77***(4), 460.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational studies in mathematics*, ***3***(3.4), 413-435.

HOUDEMENT, C. (2006). *Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire des différences dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires*. Cahier DIDIREM 54. IREM Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ***16***, 67-96.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, ***69***. 31-52

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

LEVAIN, JP., LEBORGNE, P., & SIMARD, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue française de pédagogie,* ***155***, 95-109.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* (p. 256). Paris : La Pensée Sauvage.

MOREAU, S., & COQUIN-VIENNOT, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, ***73***(1), 109-121.

NESHER, P. GREENO, J., & RILEY, M. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, ***13***(4), 373-394.

RADFORD, L. (2003). Narratives, expressions algébriques et calcul formel: de la constitution à la transformation du sens. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ***8***, 191-208.

SACKUR, C., DROUHARD, J. P., MAUREL, M., & PECAL, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères IREM*, ***28***. 37-68.

THEVENOT, C. (2008). Représentations mentales et stratégies de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants de CM2. *L'Année psychologique*, ***108***(4), 617-630.

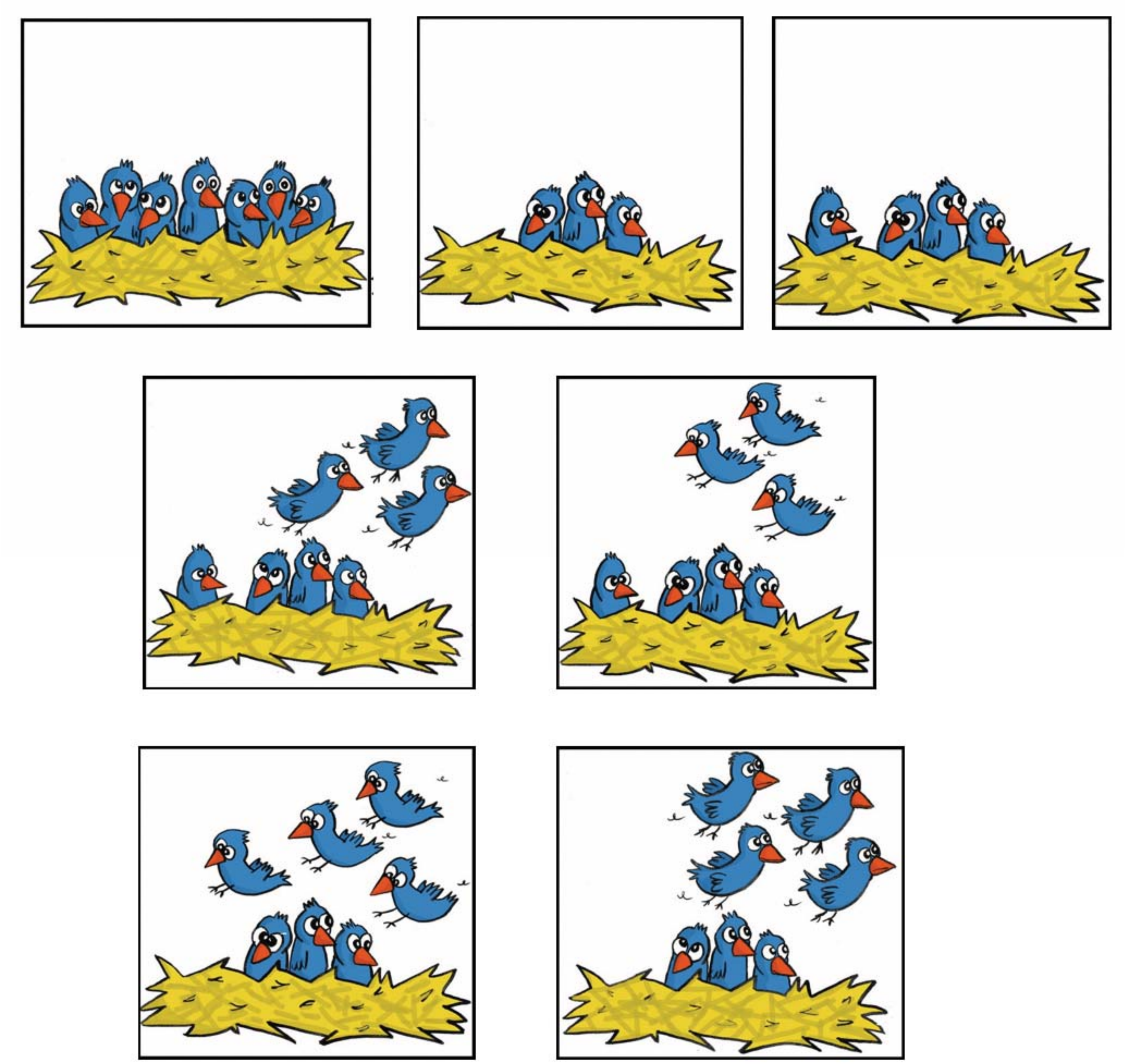
THEVENOT, C., BARROUILLET, P., FAYOL, M. (2010). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In Crahay, M. & Dutrévis, M. (Ed.) (137-166). *Psychologie des apprentissages scolaires*. Bruxelles : De Boeck.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***10***(2.3), 133-170.

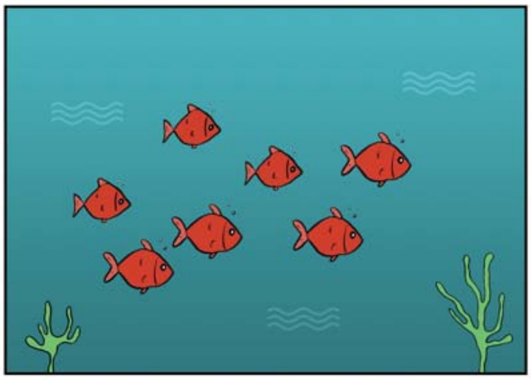
VERMERSCH, P. (1994). *L'entretien d'explicitation* (Vol. 2003). Paris: ESF.

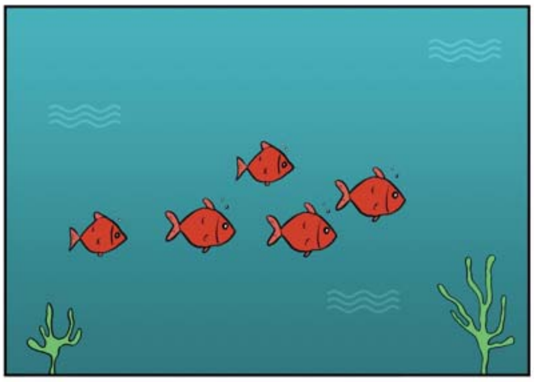
VERSCHAFFEL, L., & DE CORTE, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, ***5***(3), 239-256.

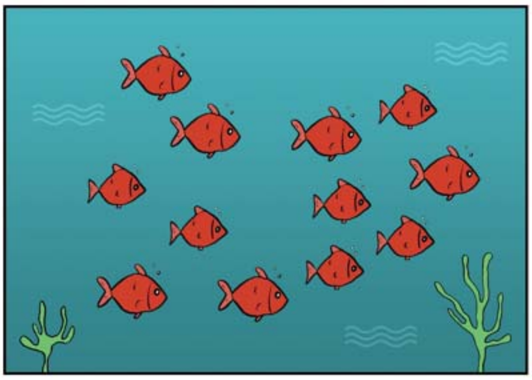
VI - ANNEXE 1 : CARTES OISILLONS

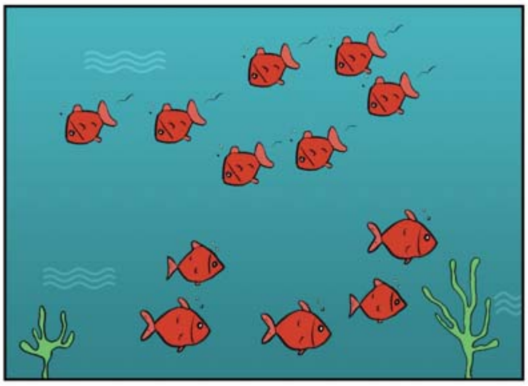


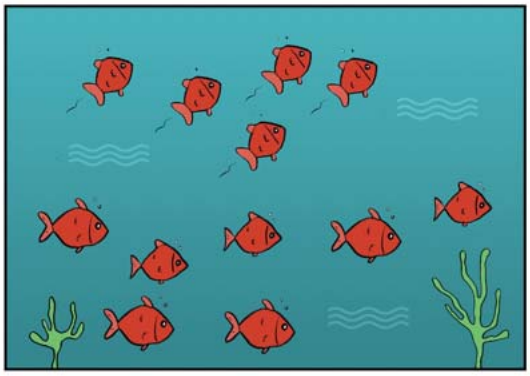
VII - ANNEXE 2 : CARTES POISSONS

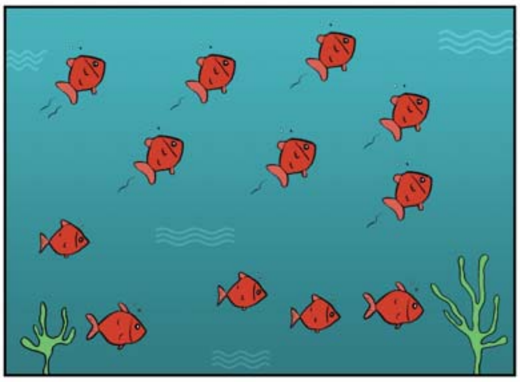


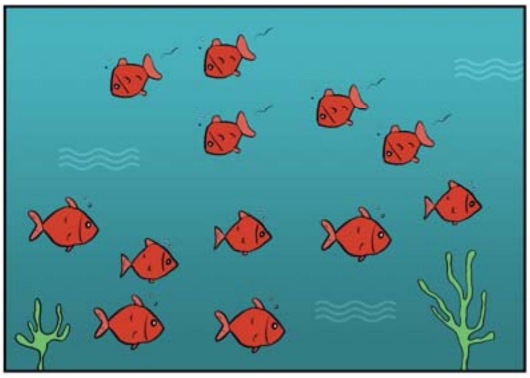












ROLE DES OSTENSIFS DANS LES TECHNIQUES DE TYPE DE TACHES RELEVANT DU CHAMP ADDITIF

Danielly KASPARY
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, France
UFMS – Univ. Fédérale du *Mato Grosso do Sul*, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil
kaspary.d@gmail.com

Marilena BITTAR
UFMS – Université Fédérale du Mato Grosso do Sul, PPGEdumat, Campo Grande, MS, Brésil
marilenabittar@gmail.com

Résumé
Une tâche qui relève du champ additif peut être traitée par différentes techniques. Nous employons ici tâche et technique au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Notre objectif est de comprendre comment ces techniques sont introduites et mises en place dans des institutions qui visent l'étude de l'opération d'addition. Pour cela, on considère comme élément fondamental de cette analyse les notions d'ostensif et de non-ostensif (Bosch, M. et Chevallard, Y. 1999). Les ostensifs constituent la partie visible de l'activité mathématique tandis que les non-ostensifs vivent dans le domaine des idées. Ainsi, la mise en œuvre d'une technique se traduit par la manipulation d'ostensifs contrôlés par des non ostensifs. Dans notre communication nous présenterons des résultats d'une recherche que nous avons menée sur le champ additif dans des manuels du système éducatif brésilien. Nous avons analysé et décrit l'évolution des techniques depuis les premières rencontres avec des types de tâches qui mobilisent la notion d'addition jusqu'à l'institutionnalisation de l'algorithme usuel. Pour l'analyse nous avons cherché à identifier des liens entre les techniques et les ostensifs. Nous mettrons ainsi en évidence l'importance des ostensifs et leurs différents rôles dans l'étude de cette évolution. En particulier, on étudiera l'usage de quelques ostensifs, comme signes, discours oral, doigts, droite numérique et matériel de numération.

I - LE CONTEXTE

Au Brésil, les manuels sont soumis périodiquement à une évaluation promue par l'État - Programme National de Manuels Scolaires – PNLD. Seules les collections approuvées peuvent être achetées par les écoles publiques du pays. On trouve donc des groupes de recherche qui s'intéressent à l'étude de ce que les manuels approuvés présentent comme une proposition pour l'enseignement considérée comme légitime par le gouvernement. La recherche du master de Kaspary (2014), sur laquelle ce texte est basé, fait partie de ce contexte et a visé à caractériser l'objet *champ additif* dans une collection de manuels approuvés par le PNLD. Les aspects mathématiques et didactiques y sont étudiés. La collection analysée concerne les cinq premières années d'école et a été la collection la plus acquise par les enseignants au cours du période 2010-2016.

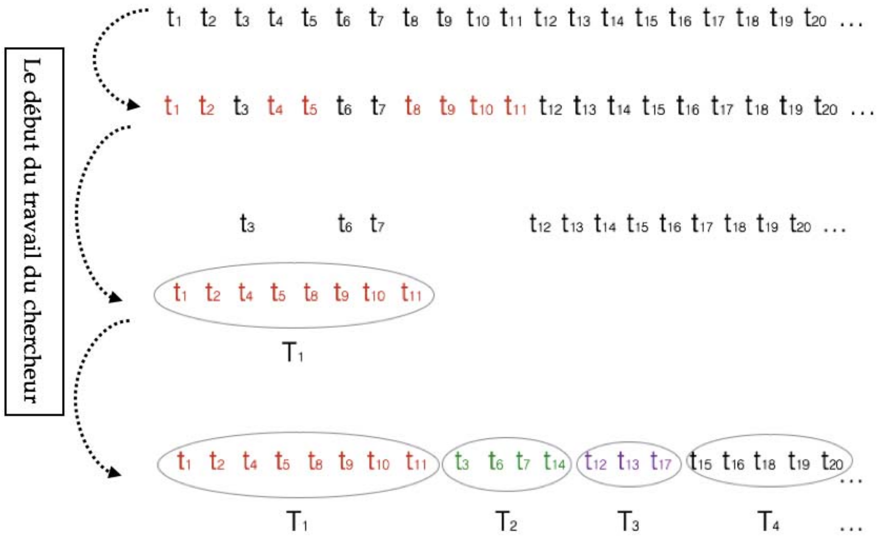
L'analyse a été réalisée à partir du point de vue de l'organisation praxéologique, soutenue par la Théorie Anthropologique du Didactique - TAD (Chevallard, 1999). Les techniques proposées pour réaliser les tâches du champ additif ont été modélisées selon les *ostensifs* qu'ils mettent en action – un concept aussi développé dans cette approche. De plus, la *valence instrumentale* nous a permis de mieux comprendre le progrès et la réduction des ostensifs dans l'étude des opérations d'addition et de soustraction. Ces notions seront présentées par la suite.

II - QUELQUES NOTIONS THEORIQUES

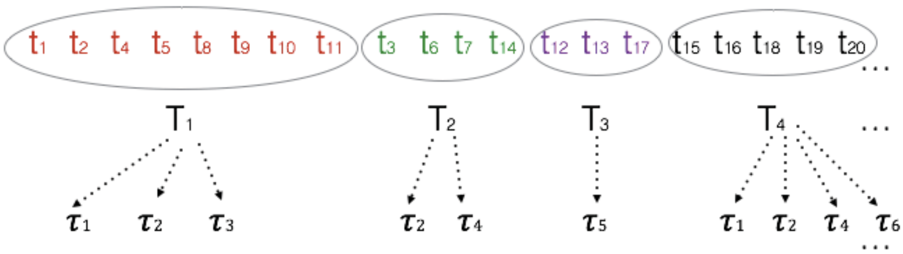
La connaissance, dans la perspective anthropologique proposée par la TAD, est le fruit d'une activité humaine. Dans notre travail, ce sont les activités mathématiques proposées par les manuels dans le domaine du champ additif qui nous intéressent. Pour décrire et analyser l'activité humaine, et dans notre cas l'activité mathématique liée à l'objet « champ additif », cette approche nous fournit " des instruments clairement opératoires" (Bosch et Chevallard, 1999, p. 4), qui sont le résultat de la construction d'un modèle appelé *organisation praxéologique*.

Pour comprendre ce modèle on se tourne vers ses composantes : le type de tâche, la technique, la technologie et la théorie [T, τ, θ, Θ] - qui constituent l'anatomie de l'activité mathématique (Casabò, 2001). Dans ce texte on va se concentrer spécialement sur l'analyse des techniques.

Brièvement, les tâches sont des situations qui doivent/peuvent être accomplies dans une certaine institution[1]. Les tâches *t* qui sont significativement proches sont regroupées, par *les mains* du chercheur, en *types de tâches* T.



Les types de tâches sont accomplis par des *techniques* τ. Connaître et identifier ces techniques fait partie aussi de la modélisation praxéologique.



Cependant, c'est important remarquer qu' « […] en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution. » (Chevallard, 1999, p. 03)

Chaque technique a une technologie θ qui à son tour a une théorie Θ – les éléments qui permettent de justifier et de produire les techniques mises en place dans une certaine institution.

En se concentrant surtout sur les techniques, on peut les regarder à travers les notions d'ostensifs et non-ostensifs, aussi discutés au sein de la théorie anthropologique du didactique :

[1] Chevallard (1992) considère les institutions comme, par exemple, « une salle de classe » ou « une famille », c'est-à-dire un lieu - pas seulement dans le sens physique - où une praxéologie peut vivre. Dans notre cas, nous considérons comme institution les "manuels didactiques".

« […] la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associés. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 11)

Dans ce sens, on prend les ostensifs comme *l'ingrédient primaire d'une technique*. Autrement dit, les ostensifs mobilisés pour réaliser les types de tâches caractérisent (et différencient) les techniques. Ce choix nous a permis de mieux comprendre l'évolution praxéologique analysée[2]. Ci-dessous, on présentera certains passages dans les manuels qui mettent en évidence le rôle des ostensifs dans cette évolution. Pour cela, on fera un survol sur les cinq années (les cinq manuels) afin de montrer succinctement ce qui se passe dans chaque année et les changements d'une année à l'autre.

Avant de passer à l'analyse, il faut encore remarquer qu'un certain objet ostensif peut être considéré comme un bon *instrument*, ou pas, en fonction des activités dans lesquelles il est appliqué – ce qui peut permettre d'indiquer *la portée* de la technique – c'est ce qu'on appelle la *valence instrumentale* d'un ostensif (Bosch et Chevallard, 1999). Ce concept nous permettra de discuter de la potentialité / le rendement d'un ostensif particulier en tant qu'instrument dans une activité mathématique donnée et, par conséquence, nous permettra aussi de comprendre le changement de différents ostensifs au cours de l'évolution praxéologique.

III - L'ÉVOLUTION PRAXEOLOGIQUE ET LES OSTENSIFS : L'EXEMPLE DU CHAMP ADDITIF A L'ECOLE PRIMAIRE

1° année

D'abord, pour analyser cette évolution, on considère important de situer les premiers moments où l'objet d'étude apparait dans le manuel. L'étude du champ additif commence à l'intérieur de l'étude du système de numération décimale, et pour cela on voit un héritage des idées et des techniques. Par exemple, un type de tâche commun dans l'étude du système de numération décimale est « indiquer la quantité d'éléments d'un ensemble ». On a quelques techniques pour répondre à ce type de tâche, comme « compter d'un en un avec les doigts » et cette idée est perpétuée et adaptée pour le type de tâche du champ additif « indiquer la quantité d'éléments de l'union d'un ou plusieurs ensembles ».

Ainsi, l'étude du champ additif émerge à travers des tâches de comptage. Les premiers ostensifs mobilisés pour les réaliser sont les dessins indiqués dans les énoncés des tâches :

Figure 1. Dante, vol.1, p. 70

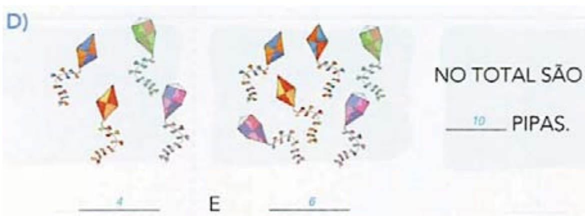


Figure 2. Dante, vol.1, p. 125

Dans certaines tâches, comme dans la figure 2, les ostensifs sont présentés en forme de dessin dans l'énoncé de la tâche et à travers eux l'élève doit découvrir la quantité totale en comptant d'un en un. Il y a

[2] Proposée dans une collection brésilienne de manuels scolaires destinés aux cinq premières années de l'école primaire par rapport au champ additif des nombres entiers.

des situations aussi où l'élève est invité[3] à dessiner les objets de la situation pour la représenter et alors découvrir la quantité totale de l'union de deux ensembles, comme dans la figure 1[4].

Mais, ces ostensifs sont rapidement remplacés et, alors, d'autres techniques sont développées. Des *signes* qui représentent chaque unité d'un certain objet commencent à être utilisés, ce qui donne une économie importante dans le travail employé pour réaliser les tâches.

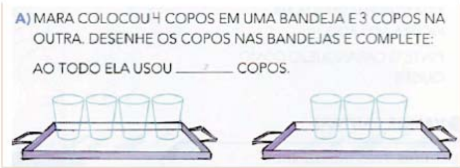


Figure 3 : Dante, vol.1, p. 70

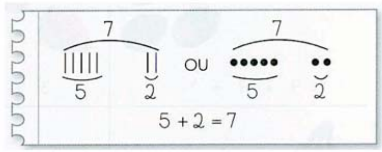


Figure 4 : Dante, vol.1, p. 132

Pendant toute la première année on voit la mobilisation d'une pluralité d'ostensifs, qui évoquent différentes idées du champ additif : la droite numérique, le matériel Cuisenaire, les doigts, le discours oral… Le travail est très axé sur la manipulation de ces ostensifs. Cependant, ils n'apparaissent qu'à certains moments ponctuels. Dans une première page la technique est présentée, ensuite il y a quelques pages pour pratiquer cette technique (et mettre en œuvre les ostensifs) et tout de suite ces techniques et ces ostensifs sont oubliés et n'apparaissent plus. Les signes sont l'unique exception de ce phénomène, ce qui indique une préférence, dans cet institution, pour l'utilisation de ces ostensifs.

2º année

La praxéologie développée dans le premier volume est présentée à nouveau dans la deuxième année. Certaines techniques (par conséquence quelques ostensifs) sont retrouvées, mais avec quelques modifications. Par exemple, la droite numérique est remobilisée, mais à ce moment-là, on remarque l'absence de son début (figure 6). Ce changement vient d'une évolution par rapport à l'usage de cet ostensif, ce qui a été possible grâce à une *intériorisation* de la façon de comment cet ostensif « se comporte ».

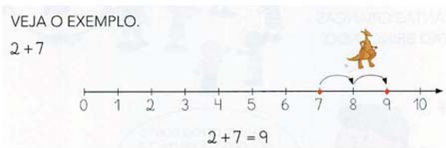


Figure 5 : Dante, vol.1, p. 134

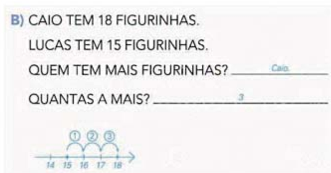


Figure 6 : Dante, vol.2, p. 34

Certaines tâches deviennent *routinières*, comme le calcul avec des nombres inférieurs à 10, ce qui permet un travail plus arithmétique et l'abandon des certains ostensifs. Dans l'exemple suivant on peut regarder ce phénomène :

[3] Il s'agit d'un contrat didactique implicite, qu'on a su à travers de la réponse indiquée dans le manuel du professeur.

[4] Une possible traduction : « Mara a mis quatre verres sur un plateau et trois verres sur un autre plateau. Quel le nombre total de verres qu'elle a utilisé ? ».

Figure 7 : Dante, vol.2, p. 50

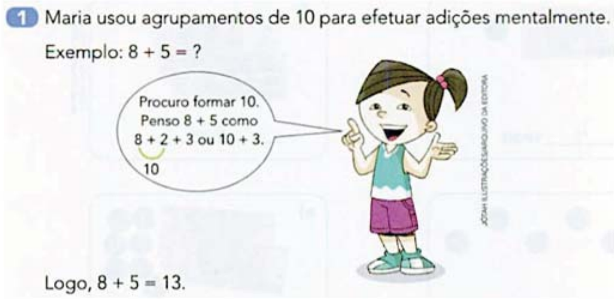


Figure 8. Dante, vol.2, p. 126

D'abord, dans la figure 7, il faut remarquer que l'usage des signes change en comparaison avec le volume 1 : auparavant, une fois les deux ensembles représentés avec les signes, l'élève devait compter la quantité totale, mais à ce moment-là la technique est adaptée et l'élève doit former des groupes de dix unités pour savoir le résultat. Déjà dans la figure 7 on remarque l'abstraction de ce qui est fait avec les ostensifs, et alors, le travail devient plus purement arithmétique – l'enfant parle « *Dans ma tête, je cherche à former dix ; je pense 8 plus 5 comme 8 plus 2 plus 3, ou simplement dix plus 3 ; ça donne alors 13* ». Cet exemple montre deux aspects importants : la réduction des ostensifs et le traitement indispensable donné aux ostensifs pour l'évolution des techniques.

Toujours dans la deuxième année, avec des nombres entiers plus grands, plusieurs ostensifs commencent à être abandonnés du fait de leur faible valence instrumentale. Par conséquent, il y a la nécessité de préparer de nouvelles techniques plus efficaces. Par exemple, les signes ne sont plus si efficaces, étant donné que représenter une grande quantité d'unités avec eux est, au moins, coûteux. Alors, d'autres ostensifs arrivent pour les remplacer, comme ce matériel de numération présenté ci-dessous. On voit que ce qui était fait avec les signes est maintenant fait avec ce matériel.

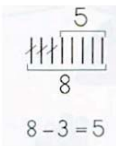


Figure 9 : Dante, vol.1, p. 147

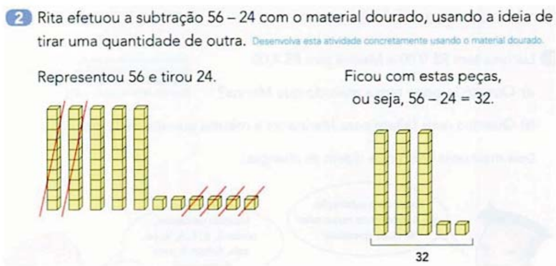


Figure 10 : Dante, vol.2, p. 221

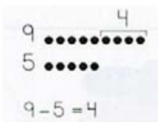


Figure 11 : Dante, vol.1, p. 147

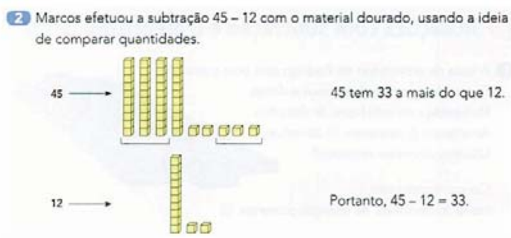


Figure 12 : Dante, vol.2, p. 223

Dans ce même manuel, l'algorithme usuel est déjà présenté, mais encore comme une façon de représenter le calcul réalisé et non effectivement comme une technique. D'ailleurs, il est généralement accompagné par d'autres ostensifs qui permettent en effet de réaliser les tâches proposées.

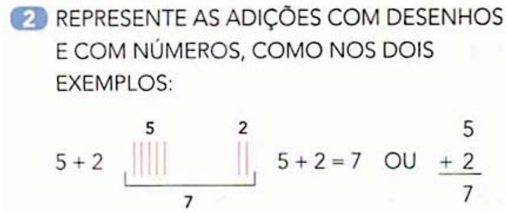


Figure 13. Dante, vol.2, p. 60

3° année

L'analyse du volume 3 met en évidence une proposition d'étude un peu *plus abstraite* ; on peut la repérer à partir des techniques qui évoquent diverses technologies découlant de la construction du système de numération décimale. La notion de groupement donne légitimité à l'usage de l'algorithme usuel comme une technique. Dans cette étude quelques ostensifs vivent en second plan en raison des techniques qui mobilisent une arithmétique plus *sophistiquée*.

Pour mette en évidence le rôle des ostensifs dans ce contexte, on analyse le passage suivant, où on peut voir trois façons de réaliser une tâche du champ additif. La première technique consiste à représenter et faire des groupements avec le matériel de numération ; la deuxième est l'algorithme de la décomposition qui à son tour reprend l'idée de groupement par dix ; enfin, la troisième technique est l'algorithme usuel avec la représentation des dizaines et unités, accompagné d'un discours qui vise à expliquer le fonctionnement de cette façon de réaliser la tâche. À la fin, l'algorithme dans sa présentation usuelle est présenté.

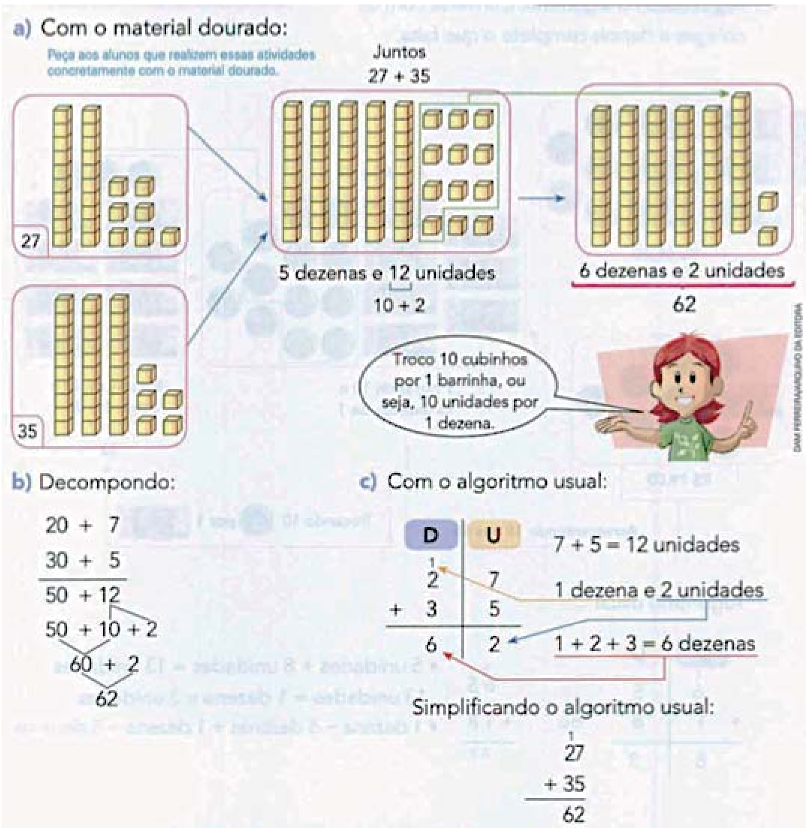


Figure 14. Dante, vol.3, p. 75

On note alors, que les éléments technologiques sont incorporés dans la praxéologie grâce à l'exploration de ces techniques et des ostensifs.

L'usage du matériel de numération et les changements entre dizaines et unités ont d'abord été des tâches pour l'étude du système de numération décimale. Lorsqu'on sait bien utiliser ce matériel et effectuer les échanges, il devient une technique pour des tâches du champ additif. Enfin il devient une technologie pour d'autres techniques, comme on vient de le voir dans la figure 14. Cela montre l'évolution d'usage de cet ostensif dans l'institution en fonction de leurs différents rôles.

Type de tâche	Technique	Technologie
Dans l'étude du système de numération décimale	*Dans l'étude du champ additif*	

4° année

L'analyse du volume 4 révèle une proposition d'étude différente de celle trouvée dans les premiers volumes de la collection. Nous avons noté une forte évolution de l'environnement technologique-théorique, ce qui influence directement sur le choix des techniques proposées. L'algorithme usuel devient l'outil principal pour effectuer des opérations d'addition et de soustraction. L'étude est également enrichie avec des techniques qui fournissent les calculs mentaux, des approximations et des estimations, construits à partir de la mobilisation des ostensifs.

Dans ce contexte de valorisation de l'algorithme usuel, à certains moments, quelques autres techniques sont convoquées avec l'intention de le légitimer, ce qui arrive souvent avec des ostensifs de nature plus manipulatoire[5] - comme on peut remarquer dans la figure 15 avec le matériel numérique. Dans cette même figure, on voit aussi la présentation d'un discours écrit qui fait partie aussi de cette justification. L'ordre de la présentation de ces techniques n'est pas arbitraire : c'est la première technique présentée qui permet de justifier le fonctionnement de la deuxième.

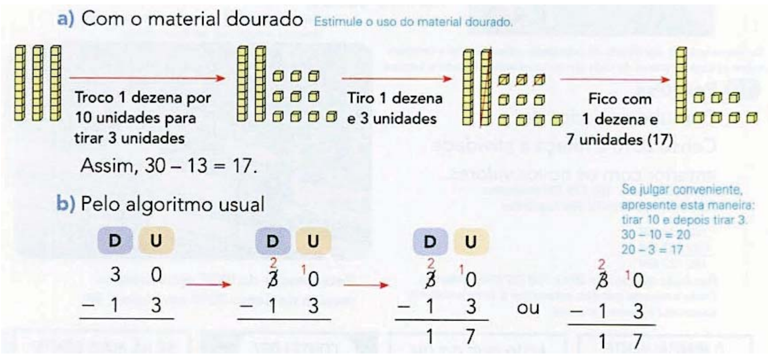


Figure 15 : Dante, vol.4, p. 126

5° année

Le volume de la cinquième année est le dernier de la collection. Il nous présente un moment d'évaluation des techniques considérées les plus efficaces. L'abandon de certaines techniques et la réduction apparente des ostensifs est une conséquence de l'environnement technologique et théorique plus consolidé. Bref, seules les techniques avec une large valence instrumentale survivent.

On voit encore des justifications par le discours (figure 16), mais après ce moment de justification, ce qui reste est l'algorithme usuel, qui est indiqué comme une façon de réaliser les tâches dans la plupart des activités présentes dans le manuel.

[5] Chaque objet ostensif peut être manipulé, il faut donc dire que dans cet extrait nous cherchons à souligner ceux qui utilisent les mains pour l'instrumentaliser.

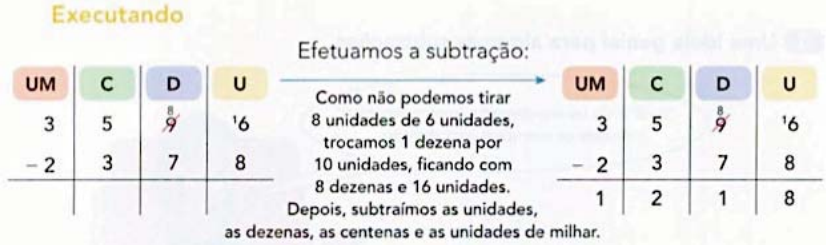


Figure 16. Dante, vol.5, p. 63

IV - REPRENANT QUELQUES IDEES

Pour conclure on reprend quelques points qui résultent d'une réflexion par rapport à ce qui a été présenté. Certains d'entre eux peuvent sembler évidents ; les présenter est alors une façon de renforcer les idées qui guident notre analyse sur l'activité mathématique.

- Les exemples illustrent des moments précis qui permettent de montrer certains aspects importants de l'évolution de la praxéologie. Mais, effectivement, c'est dans *le chaos de plusieurs praxéologies ponctuelles* que l'institution est constituée en tant que telle ;

L'analyse d'un phénomène didactique demande *une pause* pour bien regarder ce qui se passe à un certain moment – une caractéristique qui n'est évidemment pas spécifique de notre champ de recherche. Ainsi, ce qu'on analyse, ce sont des *photos* d'une histoire qui nous reconstruisons : la praxéologie destinée à l'étude du champ additif dans cette institution ne se réduit pas aux exemples présentés et n'a pas cet aspect linéaire. Il est important d'avoir connaissance des limites et des apports liés à cette méthodologie : quels sont les passages qu'on va choisir pour montrer ce qu'on veut analyser ? qu'est-ce qu'arrive entre deux passages ? qu'est-ce qui n'est pas dit ?

- Les techniques sont adaptées/modifiées aux conditions exigées par les tâches ;

La taille des nombres indiqués par les tâches, par exemple, nous a montré l'influence que cette caractéristique provoque dans le choix des techniques. L'adaptation ou la quête des nouvelles techniques révèle la dynamique qui conduit à l'évolution praxéologique. Cet aspect met en évidence le point suivant :

- La portée de la technique dépend des ostensifs mobilisés ;

Comme les ostensifs sont un moyen de caractériser les techniques, la portée de celles-ci dépendra aussi des ostensifs mis en place. Autrement dit, l'efficacité des techniques est liée à valence instrumentale de *leurs* ostensifs. Pour réaliser une tâche qui demande un travail avec des nombres supérieurs à 20, par exemple, utiliser des dessins est plus couteux qu'utiliser des signes, qui à son tour est plus couteux qu'utiliser le matériel numérique…

- La non neutralité dans la production de signifiés à travers des ostensifs ;

Les différents signifiés qui peuvent être évoqués par les ostensifs sont discutés, dans la TAD, à partir de la notion de valence sémiotique. Ils ne sont pas abordés pas dans ce texte, mais, c'est justement la non neutralité des ostensifs comme producteurs des signifiés qui nous a amené à considérer les ostensifs comme un élément qui caractérise les techniques. Pour cela, *compter d'un en un* avec la droite numérique est diffèrent de *compter d'un en un* avec des signes. La façon d'opérationnaliser ces deux ostensifs change, mais ce qui change aussi, ce sont les notions que la droite numérique porte comme non-ostensifs pour l'activité mathématique en comparaison aux signes.

- Certaines techniques et certains ostensifs sont employés (aussi) pour construire de bonnes conditions pour l'élaboration des nouvelles techniques ;

Certaines techniques sont élaborées pour réaliser quelques tâches, mais, aussi pour construire des conditions qui peuvent être, dans un autre moment, des éléments technologiques pour d'autres techniques. Ce mouvement montre encore plus l'évolution praxéologique. Dans notre cas les ostensifs avaient un rôle important comme objets qui font partie des techniques et des idées élaborées du point de vue technologique.

- L'objectif de l'étude du champ additif dans cette institution est de trouver la *bonne technique : une coordination optimisée entre ostensifs et non-ostensifs.*

L'algorithme usuel, la bonne technique, est le résultat d'une réduction des ostensifs dans un système plus pratique qui incorpore plusieurs idées auparavant pratiquées avec d'autres ostensifs – et c'est là où l'élève est conduit.

- Dans cette institution (manuel scolaire) quelques ostensifs peuvent être ignorés avec l'intention d'avoir une mathématique plus "propre".

Bien entendu, on n'a pas orienté notre discussion sur une possible transposition didactique de ce qui est proposé dans les manuels à ce qu'on peut voir dans une classe. Cependant, on remarque que dans les manuels la description de certaines techniques omet l'usage, parfois naturel, de quelques ostensifs qui peuvent être présents dans un *contexte réel*. Par exemple, pour réaliser la tâche « 128 + 56 » (1) avec l'algorithme usuel, comment un enfant de l'école primaire fait les tâches « 8 + 6 » (2) correspondant aux unités, et «1 + 2 + 5 » (3) correspondant aux dizaines ? Dans le moment où la tâche (1) est proposée, les tâches (2) et (3) sont devenues routinières et alors les techniques et les ostensifs utilisés pour les réaliser ne sont plus indiqués. Autrement dit, dans cette institution cet usage « souterrain » n'est pas présent de façon explicite, mais peut exister quand cette praxéologie passe à vivre dans une autre institution.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,8 \\ +\quad 5\,6 \\ \hline 1\,8\,4 \end{array}$$

V - BIBLIOGRAPHIE

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(1)**, 77-124.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **12/1**, 83-121.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)** 221–266.

CASABO, M. (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. *Cuarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huelva: Universidade de Huelva, p. 15 – 28.

DANTE, L. A. (2011). *Ápis: Alfabetização matemática*. São Paulo: Ática.

DANTE, L. A. (2011). *Ápis: Matemática*. São Paulo: Ática.

KASPARY, D. (2014). Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. (Mémoire). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Brésil.

UNE SEANCE DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE PRENANT APPUI SUR UNE SEANCE D'EPS A-T-ELLE UN POTENTIEL D'APPRENTISSAGE EN GEOMETRIE ?

UN EXEMPLE AU CYCLE 3

Mériem Arab
Enseignante, Université Cergy Pontoise ESPE
meriem.hadj-moussa@u-cergy.fr

Résumé
Cette recherche questionne les influences mutuelles du méso-espace et du micro-espace dans le cadre de l'enseignement de la géométrie élémentaire.
Nous avons élaboré et expérimenté une séquence « bi-disciplinaire » avec une première séance phare d'EPS à visée mathématique, (jeu du béret adapté) dans le but d'introduire la notion de distance d'un point à une droite.
Nous questionnons dans notre étude les apports en mathématiques de la convocation de cette notion de géométrie en EPS. Nous relevons ainsi les points d'appuis et les obstacles.
À partir de nos observations de la séquence d'enseignement mise en œuvre dans une classe de CM1, nous avons analysé les connaissances spatiales et géométriques ainsi que *l'organisation des problématiques* (Berthelot et Salin, 1992) en nous intéressant aux différentes actions des élèves engendrées par un travail sur un type d'espace donné (méso-espace, micro-espace). En particulier, nous avons relevé le rapport pratique qu'ont eu les élèves par rapport à certains objets de la géométrie engendré par un travail sur le méso-espace. Nous nous sommes également intéressées au langage et à son rôle dans les apprentissages de la géométrie (Mathé, 2006), à la mémoire et son influence pour un transfert de connaissances dans le micro-espace (Matheron et Salin, 2002), ainsi qu'à l'influence des gestes de l'enseignant portant sur la formulation et la régulation (Gobert, 2005).

I - INTRODUCTION

Ce travail réalisé dans le cadre d'un master recherche en didactique des maths, porte sur l'articulation des mathématiques avec l'EPS. Plus précisément, nous questionnons la potentialité d'une séquence de géométrie au cycle 3 qui prend appui sur une séance d'EPS.
Après avoir présenté l'origine de la question, nous exposons les étapes de réflexion qui ont mené à l'élaboration de la séquence, puis nous présentons la séquence avec quelques éléments d'analyse a priori. Par la suite, nous développons les déroulements effectifs accompagnés d'une analyse a priori. Ce travail permet de mettre en évidence les différents rapports adoptés par les élèves lors de leur travail dans le méso-espace et de pointer certaines influences du langage ou de la mémoire sur l'apprentissage de la notion visée.

1 Origine de la question. Pourquoi une séquence bi-disciplinaire ?

Les Instructions Officielles évoquent le fait que la géométrie à l'école se compose de deux champs de connaissances, le premier concerne le champ des connaissances spatiales et le second celui de la première approche de connaissances géométriques dont le but est de développer une géométrie perceptive permettant de concevoir certaines propriétés des objets géométriques. Ici les objets géométriques et leurs propriétés sont conçus par la perception et le sens. Les textes ministériels relatifs aux mathématiques précisent que les activités géométriques pratiquées au cycle 3 s'inscrivent dans la continuité de celles fréquentées au cycle 2. Elles s'en distinguent par une part plus grande accordée au raisonnement et à l'argumentation qui complètent la perception et l'usage des instruments. Elles sont aussi une occasion de fréquenter de nouvelles représentations de l'espace. Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire

émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et de les enrichir. Un jeu sur les contraintes de la situation, sur les supports et les instruments mis à disposition des élèves, permet une évolution des procédures de traitement des problèmes et un enrichissement des connaissances. (Cycle 3 BO spécial du 26 novembre 2015)
Dans ma pratique de classe en tant que professeure des écoles, j'ai pu expérimenter des séquences pluri-disciplinaires impliquant les mathématiques et une autre discipline :

- EPS en CE2 dans le cadre d'un travail sur l'alignement.
- Arts Plastiques en CP dans le cadre d'un travail sur le repérage de cases dans un quadrillage à partir d'œuvres d'art. Tantôt les connaissances mathématiques se sont révélées indispensables pour le travail en art plastiques, tantôt la culture artistique a constitué le matériau sur lequel s'est ancrée la découverte mathématique.

Ces expériences m'ont permis de constater que ces démarches particulières d'enseignement de la géométrie nourrie par une autre discipline, ont une influence non négligeable sur les apprentissages. Par conséquent, j'ai voulu approfondir cette forme de travail en articulant à nouveau les mathématiques et l'EPS.

2 Articulation des deux disciplines : Géométrie/EPS. Nos questions.

L'articulation des deux disciplines tient compte d'un travail dans les deux espaces méso-espace et micro-espace. Certains points propres à l'EPS semblent favorables à cette articulation. Tout d'abord, la possibilité de faire travailler les élèves dans le méso-espace pour faire des mathématiques, en leur donnant la possibilité de développer des compétences en lien avec leurs actions qui ne sont pas clairement exprimées en classe. Puis, par mesure d'économie, la prise en compte du facteur temps, élément propre aux pratiques de l'école élémentaire. De cette réflexion découle naturellement la question :
Comment les deux espaces (micro-espace et méso-espace) se nourrissent-ils mutuellement pour un apprentissage en géométrie ?

Notre réflexion a porté tout d'abord sur la nature de la séance d'EPS qui va permettre de récupérer le méso-espace, plus particulièrement, sur le jeu sportif qui permettrait de poser un problème mathématique pour établir une stratégie gagnante qui conduit au savoir géométrique préconisé. Deux questions générales émergent.
La première concerne le rapport à l'espace avec l'étude des connaissances développables et transférables d'un type d'espace à un autre. Nous l'avons formulée comme suit :

- **Quelles connaissances de la géométrie élémentaire sont développables et transférables d'un type d'espace (méso-espace, micro-espace) à un autre ?**

Afin de tenter de répondre à cette question, nous nous intéressons tout d'abord à l'impact de la nature de chacun des espaces (méso-espace, micro-espace) sur les actions des élèves et leurs apprentissages. Nous nous appuyons sur les travaux de Berthelot et Salin (1995). Selon eux, l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire nécessite l'organisation de problématiques associées à des rapports à l'espace très différents, ces problématiques sont identifiées comme suit.
La problématique pratique : les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques. La démarche de résolution est pratique. La validation se fait en restant sur l'espace sensible.
La problématique spatio-géométrique ou de modélisation **:** les objets sont physiques et/ou géométriques. Les validations sont liées au modèle ou à l'espace sensible qu'il modélise.
La problématique géométrique **:** les objets ne sont plus physiques mais théoriques. La démarche de résolution et la validation se font par un raisonnement qui s'appuie uniquement sur des connaissances géométriques reconnues.
Nous interrogeons ainsi l'influence de la problématique pratique et sa nature selon l'espace réel ou l'environnement graphique. Nous tentons de mettre en évidence également les phases qui caractérisent le passage d'une problématique pratique à une problématique de modélisation.
La deuxième question découle d'un travail sur deux environnements différents. Il s'agit de la question de la mémoire :

- **Quelle sera l'influence de la mémoire sur certains apprentissages de la géométrie ?**

Concernant **la mémoire didactique**, nous nous intéressons au passé de l'élève et à la manière dont ce passé peut être convoqué et mobilisé. Pour cela, nous nous sommes attachées au cadre et aux concepts développés par Matheron et Salin (2002). Ils montrent le jeu existant entre *ostension et mémoire.* Leur méthodologie se fonde sur l'identification, dans les interactions discursives enregistrées, des appels au passé ou des moyens mémoriels propres à l'enseignant. Ils précisent que l'ostension de la mémoire s'effectue en mobilisant plusieurs registres : langagier, gestuel, graphique. Ce jeu caractérise ce que les auteurs appellent *mémoire collective.* Les auteurs définissent également *la mémoire pratique* comme étant celle qui s'applique sur des pratiques anciennes afin d'en accomplir des nouvelles. C'est le principe même de l'enseignement par résolution de problèmes. Cette mémoire est définie comme celle qui va permettre, au moment approprié une pratique précédemment apprise.

Suite à la prise en compte des éléments théoriques cités ci-dessus, nous avons pu affiner nos questions initiales. En plus de la question portant sur le rapport des élèves à l'espace avec lequel ils interagissent, ainsi que celle des actions de la mémoire pour un transfert des connaissances du méso-espace au micro-espace, il nous a semblé important de s'intéresser au volet du vocabulaire géométrique en questionnant l'influence de la nature de l'espace sensible de travail sur sa construction. Enfin, nous nous intéressons à **la formulation de l'enseignant** par rapport à la régulation de ses gestes en fonction du type de l'espace de travail.

Finalement notre question de départ plus générale portant sur les influences mutuelles des deux espaces sensibles pour un apprentissage de la géométrie, se décline en quatre questions :

- **Quelles sont les influences de la problématique pratique engendrée par un travail sur un espace sensible donné ?**
- **Comment va agir la mémoire pour un transfert de connaissances du méso-espace vers le micro-espace ?**
- **Quelles sont les influences de l'espace sensible sur la construction d'un vocabulaire géométrique liée à une notion donnée ?**
- **Enfin une question sur l'enseignant portant sur ses gestes et sa formulation dans le cadre d'un travail spécifique dans deux types d'espaces différents.**

II - LA SEQUENCE

Il s'agit d'une séquence de trois séances avec un travail sur les deux espaces sensibles méso-espace et micro-espace. Cette expérience s'est déroulée avec des élèves d'une classe de CM1. La notion est celle de « *la distance d'un point à une droite* ».

Afin de pouvoir étudier l'influence du méso-espace sur le micro-espace, nous avons introduit la séquence par une séance d'Education Physique et Sportive mettant ainsi une forme de travail originale à visée mathématique. Les deux autres séances se déroulent en classe. Leurs études portent essentiellement sur l'influence de la première séance.

Par ce choix, nous avons volontairement pris en compte une contrainte liée aux pratiques d'un enseignant de l'école élémentaire. Cette contrainte concerne la gestion du temps didactique. Nous nous soumettons ainsi au contrat classique correspondant à un enseignant ordinaire du premier degré.

Cette première séance est par conséquent marquée par une certaine rupture avec les méthodes classiques. Elle est convoquée plus tard en classe implicitement par la voie de la mémoire dans les séances 2 et 3. L'étude de ces deux dernières séances sert entre autres à mesurer l'impact de la première.

La séquence construite est confiée à une enseignante de CM1 et des fiches de préparation détaillées des séances lui ont été remises. Un travail de collaboration fin et conséquent a pu être réalisé afin qu'elle puisse au mieux s'approprier les éléments fondamentaux des déroulements.

1 La séance 1

Le choix porté sur une première séance d'EPS à visée mathématique nous permet de proposer aux élèves, grâce à des variantes d'un jeu classique et traditionnel, diverses recherches leur permettant de

visualiser d'une manière pragmatique le fait que le plus court chemin pour aller d'un point à une droite est représenté par la droite passant par ce point perpendiculairement à cette droite.
Cependant, dans l'élaboration des stratégies de gain des élèves, nous prenons aussi en compte, du fait de la discipline, des compétences sportives dont peuvent faire appel les élèves dans ce type d'activités.

1.1 Descriptif de la séance 1 et éléments d'analyse a priori

La séance 1 porte sur une variante du jeu sportif « le béret »[1] que les élèves ont déjà pratiqué lors de séances précédentes. Celui-ci va permettre de retrouver la configuration spatiale cherchée par rapport à nos intentions en géométrie. Le but est de proposer aux élèves une situation de recherche pour déterminer la stratégie gagnante de ce jeu permettant essentiellement de prendre conscience de manière pragmatique de la notion de distance d'un point à une droite dans le méso-espace. Cette séance permettra également de percevoir dans ce type d'espace, que tous les points situés à une distance donnée d'une droite sont alignés.

Sur la piste de jeu

Contrairement au jeu classique, nous avons mis en place les ostensifs suivants pour enrichir le milieu :

- deux lignes parallèles tracées au sol délimitant la zone intérieure de la piste de jeu.
- les différentes positions du béret sont toutes marquées au sol par une croix.
- des cartons-lettres (de A à F) matérialisent la position de chaque élève.

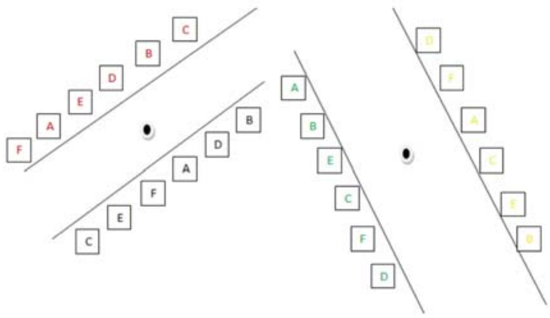


Image 1. Dispositif de l'étape 1 de la séance 1

Du point de vue mathématique la situation de la séance 1 se formalise ainsi :

- Les variables-points : où placer le béret et où se placer pour jouer et gagner ?
- La relation : former la distance du point-béret à la droite-ligne de position.
- Tous les points de positions possibles du béret sont alignés et se trouve sur une droite parallèle à la droite-ligne de position des élèves.
- La tâche : comment se placer par rapport au béret pour gagner ?

Le méso-espace avec la prise en compte de ces variables, va permettre aux élèves la mise en place de procédures de résolution qui conduisent à des critères de validité comme la perception visuelle et le mesurage.

Les étapes de la séance

La séance va comporter trois étapes qui correspondent à des variantes particulières du jeu. Ces variantes se cumulent afin de permettre l'évolution vers l'objectif mathématique. Chacune d'entre elles se déroule en trois ou quatre phases :

Phase 1. Les règles et les consignes définies et rappelées par l'enseignante.
Phase 2. La concertation et la recherche par groupe de la stratégie gagnante.
Phase 3. Le jeu effectif.

[1] Descriptif du jeu du béret en annexe

Phase 4. La mise en commun et l'institutionnalisation. Cette dernière peut ne figurer que partiellement ou pas du tout dans certaines variantes.

Étape 1. Le jeu du béret : une variante portant sur les numéros des élèves. Dans cette première étape, il est annoncé un nouvel élément de la règle du jeu classique déjà rencontré par les élèves : chaque équipe réfléchit au choix d'un camarade à qui il sera attribué deux numéros et non un seul.
La stratégie gagnante attendue comporte **deux volets**.
Le premier consiste à attribuer les deux numéros supplémentaires à l'élève qui se situe au niveau de la lettre qui correspond à la plus courte distance du béret. Mais le facteur vitesse doit être pris en compte, alors le deuxième volet de cette stratégie serait de positionner les bons coureurs de son équipe assez loin du béret. Lorsque toutes les équipes sont prêtes, une partie de jeu est lancée avec les différentes phases citées ci-dessus.

Étape 2. Une variante sur la piste du jeu.
Dans cette étape nous gardons la règle annoncée à l'étape 1 et nous faisons varier les positions du béret. Ainsi, l'enseignante pose arbitrairement le béret ailleurs qu'à un point situé à égale distance des deux droites, ces positions seront marquées au sol à la craie de couleur.

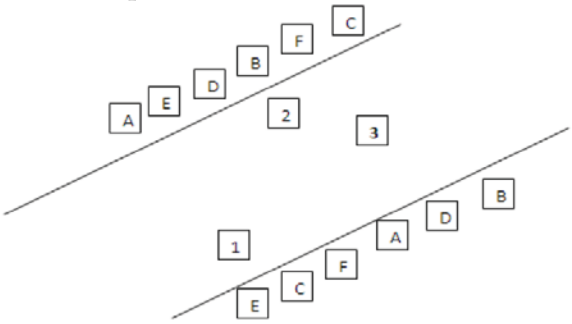


Image 2. Dispositif de l'étape 2 de la séance 2

Cette configuration va permettre de percevoir les positions possibles du béret qui rend le jeu équitable. Mais surtout réaliser que tous les points de position du béret sont alignés et se trouvent sur une droite parallèle à la droite, ligne de position.
Ainsi, avant même de lancer la phase de réflexion et de concertation, il est attendu que les élèves réagissent en affirmant qu'ainsi le jeu devient non équitable. Ils devraient également pouvoir anticiper sur le gain de l'équipe qui se situe sur la ligne la plus proche du béret.
Pour permettre au jeu de garder son équité, l'enseignante va finalement positionner le béret sur la ligne médiane, mais non au centre de la piste (celui-ci est représenté par un pont noir sur l'image 1). Elle veillera à repérer à la craie blanche, le nouvel emplacement du béret pour cette partie.

Étape 3. Une variante sur la position des élèves.
Avant d'annoncer le dernier point sur les variantes du jeu, l'enseignante propose un nouvel emplacement du béret situé sur la ligne médiane mais à un autre endroit que ceux déjà pris pour les phases 1 et 2 (les croix marquées au sol aident à cet emplacement), une nouvelle croix blanche marque cette nouvelle position. Puis, elle annonce aux élèves de chaque équipe la nouvelle règle :
« Vous avez *la possibilité de déplacer au choix une, deux, trois ou toutes les lettres pour les positionner là où vous voulez mais en respectant la limite de la zone intérieure délimitée par les deux lignes des deux équipes, et dans laquelle est posé le béret* ».

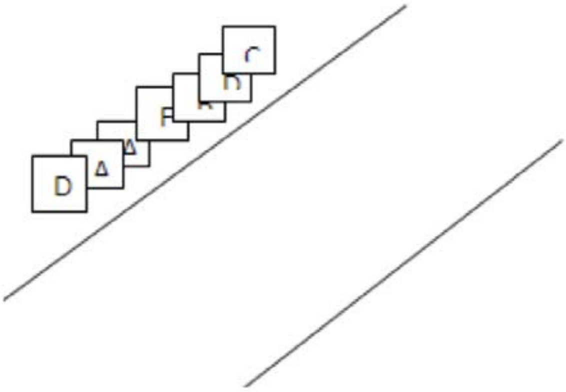


Image 3. Dispositif de l'étape 3 de la séance 1

1.2 Éléments d'analyse a postériori de la séance 1

Notre premier constat porte sur la résistance du contrat didactique lié à la discipline EPS. Lors de la phase de concertation de l'étape 1 du jeu, nous avons relevé un échange entre les élèves pour le choix du camarade à qui il faut attribuer deux numéros :

> E[2]1 : non mais c'est Victor qui court le plus vite
> E2 : ouais, mais les plus forts avec le plus de numéros.

Ainsi, les élèves n'ont pas du tout tenu compte de leur position par rapport à la position du béret, les cartons posés au sol n'ont pas été questionnés. Cette difficulté était prévisible dans cette étape et à ce niveau de la séance. L'enjeu pour les élèves est de gagner un jeu, qui, même s'il semble apporter une variante, a déjà été rencontré en séances d'E.P.S. Le facteur vitesse est alors privilégié même pour le choix du camarade portant les deux numéros supplémentaires.
Lors de l'étape 2, l'enseignante provoque une phase d'interaction entre les élèves et un élément du milieu. Elle leur propose de nouvelles positions du béret.

> P[3] : Bon alors, mon béret, vous avez joué il était là d'accord, bon ben le prochain jeu, je le change…… je le mets là.

Les différentes positions du béret choisies et proposées par l'enseignante ont pour objectif dans notre projet, de faire réagir les équipes sur l'équité du jeu. Elle a ainsi amené les élèves à percevoir que le béret a une ligne de positions possibles.

> E : toujours au milieu mais le changez de place.

Pour cet élève, le mot « milieu » semble recourir à la « ligne médiane ».

> P : alors le mettre toujours au milieu mais le… changer de place
> E : de côté de côté
> E : ou bien tu le mets là-bas mais *(l'élève montre du doigt la ligne médiane)* toujours au milieu (*en montrant un emplacement sur la ligne médiane mais non au centre).*

Nous constatons qu'à ce niveau tous les éléments du milieu sont présents pour que l'enseignante rebondisse sur les positions qui rendent le jeu équitable, en procédant à la validation. Ceci aura permis la construction par image mentale de la représentation de la « ligne médiane », qui va se poursuivre plus tard sur la construction de cette ligne aux instruments. Nous relevons ainsi une faible appropriation du projet par l'enseignante.
Par la suite, un débat s'engage avec le reste de la classe autour des positions du béret qui gardent le jeu équitable. Certains élèves ne semblent pas convaincus et insistent sur la position initiale du béret qui représente à vue d'œil le point central de la piste de jeu. D'autres manifestent le fait que le béret

[2] E désigne un élève
[3] P désigne l'enseignante

placé à l'extrémité de la piste tout en demeurant sur la ligne médiane, gardait l'équité du jeu. Mais le débat est clos par un élève qui arrive à convaincre ses camarades :

E : en fait il faudra le mettre toujours sur la croix
P : en fait, il faut le mettre toujours sur la croix ?
Es (*plusieurs élèves)* : oui il faut laisser sur la croix

Ainsi la tentative de mobilisation des connaissances mathématiques en utilisant des ostensifs comme les croix (points géométriques) pour désigner les positions du béret n'a pas suffi à une rupture du contrat didactique d'EPS.
Le milieu enrichi n'exclut pas l'utilisation du facteur vitesse qui continue de s'imposer. Nous pointons ainsi une forte prégnance de la problématique pratique.
Lors de l'étape 3, l'enseignante poursuit ses tentatives de rupture avec le contrat didactique de l'EPS, elle oriente les élèves vers une recherche de stratégies favorisant des éléments du milieu plutôt que le facteur vitesse. Ceux-ci finissent par évoquer la « distance » entre le béret et l'élève qui joue. Il s'agit de trouver un moyen pour justifier que deux élèves face au béret sont à égale distance. Les élèves convoquent l'unité du pas pour mesurer, ils utilisent ainsi des moyens pragmatiques en relation avec certaines connaissances pratiques. L'espace sensible ne favorise pas d'emblée l'utilisation d'instruments géométriques pour le mesurage.
Cependant, un élève remarque que les mesures réalisées au pas ne sont pas fiables car effectuées par deux élèves différents. S'appuyant sur ce propos, l'enseignante amène les élèves à proposer le mètre : instrument attendu dans cette phase, mais dont l'intérêt portait sur un autre objet de savoir, celui de mesurer le plus court chemin.

P : « alors eux ils ont un souci, ils ont mesuré avec les pieds mais ils n'ont pas la même longueur de pied, ah c'est pas très fiable, est-ce qu'il y a un autre moyen, si la longueur des pieds c'est pas très fiable, est ce qu'il y a un autre moyen ?
E : avec un ….mètre »

L'enseignante finit par proposer alors le décamètre, ostensif de la géométrie afin d'engager les élèves vers une problématique spatio-géométrique.
Cette phase est caractérisée par une articulation de connaissances spatiales spontanément développées dans une problématique pratique, et des connaissances géométriques en lien avec les mesures de grandeur qui permettraient une entrée dans une problématique de modélisation.
Nous constatons également que les élèves continuent de marquer leur souci d'équité du jeu et ne réfléchissent qu'à la position du béret par rapport à leur position sur la ligne du jeu. Leur action sur le terrain porte alors sur des déplacements du béret. Il n'était pas prévisible lors de la construction de la séance, de voir surgir dans la méso-espace une procédure **d'utilisation en acte de la symétrie centrale qui caractérise bien l'équité du jeu.**
Tout au long des échanges, dans la recherche d'une position idéale du béret, les échanges portent sur l'ambigüité et la difficulté à trouver cette position à cause des lignes du jeu non perpendiculaires aux longueurs du terrain. Les élèves montrent une difficulté à utiliser un vocabulaire géométrique et sont amenés à accompagner avec le geste certains propos pour mieux se faire comprendre.

E1 : oui mais les lignes elles ne sont pas droites, elles sont comme ça *(E1 accompagne avec le geste)* alors c'est normal
E2: j'avoue
E3 : ah ah voilà

Nous relevons ainsi des ambigüités référentielles relatives au vocabulaire de la géométrie (Mathé 2006). Afin de relever les ambigüités sur le terme « droit », l'enseignante, sans chercher à définir clairement la signification de ce mot, recentre les élèves dans le contexte de la situation, puis les encourage à utiliser d'autres moyens pour exprimer la perpendicularité.

P : (…) Et là c'est comment ? *(L'enseignante remet le mètre dans sa position initiale).* C'est une histoire de position, je vous aide un petit peu, c'est une histoire de position au sol.
E : celle-là, (*E montre la direction de la ligne de position des élèves),* elle part un petit peu comme ça puis celle-là, elle est heu….

Ce passage est caractérisé par une fracture conduisant les élèves à rompre avec la problématique pratique engagée pour tenter une problématique de modélisation.
Cependant, le système symbolique propre à la démarche de résolution par modélisation se trouve ici réduit aux gestes et à l'expression corporelle pour caractériser deux droites perpendiculaires.
Le vocabulaire géométrique enfin apparu dans la phase de discussion, aurait pu conduire à une validation possible instrumentée (instruments relevant de la pratique scolaire de la taille du tableau et ceux relevant d'une pratique professionnelle : le mètre).
En effet, un élève propose une vérification à l'aide de l'équerre, mais l'enseignante diffère cette action. Nous remarquons alors, qu'à ce niveau, le milieu objectif[4] (Margolinas 1995) était suffisamment enrichi pour l'engagement d'une situation de référence[5] qui ne s'est pas réalisé.

> P : ça ressemble quand même heu…un petit peu à un angle droit hein ? peut-être qu'il va falloir regarder ça de près mais ça ressemble un petit peu à un angle droit. On va garder ça en tête, si c'est vraiment un angle droit, ya peut-être un moyen de le prouver
> E : avec une équerre !
> P : avec une équerre, donc on va …. éventuellement,
> E : chercher une équerre
> P : après. Là, on va continuer, éventuellement, si vraiment, vraiment, vous pensez que c'est un angle droit, on le justifiera avec heu…le matériel qu'il faut. Vous reprenez vos pistes (…)

L'étape 3 est particulièrement caractérisée par l'exploitation des cartons-lettres matérialisant la position des élèves. Mais dans un premier temps, la prégnance des élèves dans la problématique pratique, leur permet de se déplacer sans avoir besoin de regarder ces cartons posés au sol.
Rappelons que l'enjeu de cet élément est que les élèves puissent repérer et matérialiser leur place. Il y a également un lien avec le deuxième volet de la stratégie gagnante portant sur l'élève à qui seront attribués deux numéros. Cette variante de jeu semble compliquée à prendre en compte par les élèves, et ne marque pas a priori d'obstacles dans la recherche des stratégies gagnantes.
L'enseignante rappelle les consignes et les règles en insistant sur l'importance des cartons lettres en lien avec leurs positions sur la piste de jeu. Elle insiste fortement sur cet élément fondamental jusqu'alors non pris en compte par les élèves.

> P : le terrain, pensez à ça, ça vous l'avez oublié à chaque fois. (…) Donc on refait, concertation collective, vous me trouvez la stratégie, le moyen d'accéder le plus rapidement possible au béret, (…) sachant que vous avez le droit de déplacer les lettres, une lettre, deux lettres, trois lettres, voire toutes les lettres, (…) pour les placer heu. Idéalement pour gagner ok ? pensez à ça ! vous vous attribuez toujours des numéros en secret de 1 à 8 pour vous, de 1 à 7 pour vous et à ce moment-là, je vais me tenir là, si vous avez une petite question à me poser mais…pour que je vous aide une petite indication supplémentaire, vous venez me la poser, j'y réponds, ça marche ? ça marche ? On y va !

Le rôle de ces lettres étant perçu comme seulement une nomination de chaque élève, l'action se résume donc à un simple échange de lettres et de positions. **La robustesse du contrat en lien avec les règles du jeu classique et la compétence sportive de la vitesse,** a empêché les élèves de penser des déplacements possibles des cartons qui rendraient l'accès au béret encore plus rapide.
Nous avons l'impression d'avoir ainsi complexifié la tâche des élèves en leur proposant cette variante portée sur les cartons, au sein d'une première variante, celle portée sur les numéros supplémentaires. L'enjeu pour les élèves étant toujours de gagner, et comme la compétence sportive est disponible, le besoin de répondre à une action sur l'élément « lettres » ne se fait ressentir à ce niveau, que par **un effet Topaze du contrat didactique**. Aucun déplacement des lettres pertinent n'est engagé.
Se rendant compte de la situation, l'enseignante intervient progressivement en orientant un peu plus les élèves vers le mode de traitement de l'élément « lettres », elle aménage et enrichit encore le milieu en procédant à un exemple de déplacement sur une piste de jeu. Elle agit comme maître du jeu en imposant la piste de réflexion attendue dans le milieu en pleine construction. Elle bouscule les

[4] Le milieu objectif contient essentiellement les connaissances dont les élèves doivent disposer pour pouvoir interagir de façon satisfaisante avec le milieu.
[5] La situation de référence contient les stratégies développées par les élèves dans le milieu objectif.

intentions des élèves qui semblent alors étonnés de voir leur jeu du béret classique aussi métamorphosé. En même temps qu'elle agit, elle rappelle les règles propres de la variante du jeu ainsi que celles des lettres au sol.

> P : (l'enseignante prend les trois cartons B, C, A qu'elles chevauchent jusqu'à presque les empilées) tiens, moi je vais former le mot BAC, (…)
> E : oui mais on va être serré comme des patates (rires)
> P : ah mais j'en sais rien, si ça marchait le fait d'être serré, comme tu le dis si bien

En répétant le propos de l'élève, l'enseignante, dans une sorte de confirmation, veut diffuser l'information à la classe afin que les élèves prennent compte de ce propos dans leurs actions.

> E : ben oui mais après… comme ça
> P : mais ça détermine ta position sur le terrain, les lettres déterminent vos positions sur le terrain par rapport au béret, pensez-y. Les lettres déterminent vos positions sur le terrain, tout ça par rapport au béret, le but du jeu accéder au béret premier, accéder au béret avant l'adversaire…

L'évolution du milieu devient alors importante pour la suite des actions des élèves. Les groupes hésitants, finissent par adopter les procédures de déplacement des lettres.
Après la phase de jeu, l'enseignante engage une discussion autour de la justification des gains.

> E : on a la même distance
> P : Vous êtes à la même distance, comment t'en es sûr que t'es à la même distance ?
> E : à peu près la même distance parce qu'on a mesuré tout à l'heure
> P : on a mesuré tout à l'heure
> E : puis on est presque au milieu pour attraper le béret (*en faisant le geste avec les bras en direction du béret)*
> P : on est presque au milieu pour attraper le … ouais

Nous retenons là, un argument fondamental dû au milieu référentiel[6] enrichi. *« On est presque au milieu »* est l'expression de l'élève E qui signifie alors que leur position est celle qui représente le plus court chemin au béret. Ces propos auraient pu être le déclenchement d'une phase de débat centrant les attentions sur ce point fondamental de la situation et peut-être conduisant à l'institutionnalisation. Mais suite à cette proposition, l'enseignante ne rebondit pas, probablement soucieuse de faire émerger la même remarque chez davantage d'élèves.
Un autre élève, K, prend la parole pour s'exprimer sur son rapport avec la distance au béret. Il manifeste le fait que selon l'endroit où il se place, il est plus ou moins proche du béret.

> K : je vois en regardant de plus près, il est un tout petit peu plus proche…

K montre ainsi qu'il a saisi la notion géométrique de distance d'un point à une droite en acte.
Puis l'enseignante, en déplaçant le béret en dehors de la ligne médiane, rappelle le premier point déjà discuté et qui concerne la position du béret.
Ceci confirme l'idée engagée portant sur l'équité du jeu et le fait que les élèves doivent être placés à égale distance du béret. La notion de symétrie centrale est à nouveau convoquée en acte par l'enseignante et les élèves. Nous nous trouvons ainsi dans une phase de mise en commun où cette notion prend le dessus sur la notion de distance d'un point à une droite. L'engagement de la validation se trouve brusquement rompu et les éléments du milieu référentiel ne sont pas explicitement exploités dans ce sens. Les discours ont essentiellement porté sur la position du béret et celui des élèves afin d'avoir les mêmes chances de gain.
Lors des jeux suivants, nous constatons à nouveau une phase d'échanges permettant de mettre en évidence la nécessité de placer le béret sur la ligne médiane de la piste de jeu.
Puis, afin de repartir à nouveau sur une validation portant sur le chemin le plus court pour se rendre au béret, l'enseignante place celui-ci sur la ligne médiane mais à l'extrémité de la piste. Elle demande aux élèves de lui prouver que cette position ne perturbe pas le jeu et doit les amener à réfléchir en conséquence à leur stratégie qui portera alors sur leur propre position en lien avec cette nouvelle position du béret.

---

[6] Le milieu référentiel est celui où les connaissances de l'élève se transforment en savoir (connaissances utiles), où il sait ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation. (I. Bloch 2000)

P : Donc pour gagner, qu'est-ce qu'il faut faire à chaque fois ?
E : mettre au milieu
P : Et, et…
E : en face

Les propos ci-dessus montrent que certains élèves ont réussi à saisir les deux points fondamentaux de la stratégie gagnante du jeu. Celui du point de position du béret et celui de leur propre position par rapport à celui-ci, ceci faisant appel à la connaissance spatiale de la notion de distance d'un point à une droite.
Cependant des difficultés d'expressions liées au langage géométrique sont ressenties chez les élèves, ce qui ne les aide pas à montrer clairement leurs perceptions des notions mises en jeu. Ces difficultés sont aussi ressenties par les élèves eux-mêmes comme un obstacle pour avancer. En effet, ils prennent conscience de ces faiblesses et renoncent parfois à s'exprimer davantage. Ce sont surtout les expressions de langage usuel et courant qui ont tendance à apparaître dans les échanges et les débats.
Se rajoute à ce type de vocabulaire, la problématique pratique qui continue à résister chez certains élèves et empêche des avancées vers une forme de problématique de modalisation faisant appel à des connaissances de géométrie disponibles.
Pour amener les élèves à utiliser les mots « angle droit » et « droites perpendiculaires », l'enseignante attire à nouveau leur attention sur la manière dont sont placés les cartons.

P : vous oubliez votre position à vous
E : être face au béret au… devant le béret
P : ouais, donc si je reprends (…) il faut que je me place comment alors ? regardez les cartons. Il faut que je me place en ? (*l'enseignante se place face au béret*)
P et Es : en angle droit

L'enseignante réalise une première institutionnalisation partielle portant sur le lien entre la perpendiculaire que viennent de percevoir les élèves et le chemin le plus court au béret.

P : c'est la plus courte distance (…)

Puis elle propose aux élèves de procéder tout d'abord à la vérification de l'angle droit. Les élèves ayant déjà évoqué l'utilisation de l'équerre à l'étape 2, n'ont pas eu de mal à demander à nouveau cet instrument. Ils mesurent la distance d'une ligne à une autre en passant par la croix du béret et en gardant cette ligne bien perpendiculaire aux deux lignes de leurs positions.
Pour valider que c'est la plus petite longueur entre deux points de chaque ligne de positions des élèves passant par l'emplacement du béret, l'enseignante propose de mesurer « autre chose » :

P : (…) maintenant il faut prouver, on affirme que en angle droit c'est la plus courte distance, maintenant, il va falloir mesurer autre chose pour heu… pour prouver qu'en angle droit c'était la plus courte distance. Si on n'est pas en angle droit, on peut faire comment ?

Les élèves procèdent à d'autres mesures, mais celles-ci portent toujours sur les distances d'un point à son symétrique par rapport au point matérialisant l'emplacement du béret. Ils constatent alors que la plus petite mesure est celle du segment perpendiculaire à la droite des positions.
Nous constatons ici, de nouveau une faiblesse au niveau de l'étape de validation. Cette phase entremêle alors les deux points fondamentaux de la situation : la position du béret et celle des élèves. Ces deux points n'ont pas été clairement identifiés et distingués. Les élèves ainsi que l'enseignante, pris par le contexte du jeu et de la problématique pratique qui se renforce et prend le dessus, continuent à prendre en compte l'élément équité du jeu. Ils perçoivent la piste globalement sans pouvoir en détacher les éléments essentiels et propres à chaque validation.
Dans le méso-espace, chaque équipe aurait dû se focaliser sur la position de chaque joueur et sa relation avec l'emplacement du béret. Les élèves n'ont pas été assez orientés vers cette direction, le passage intermédiaire à une entrée dans la problématique de modélisation, même par des représentations d'images mentales, n'a pas eu lieu. En géométrie, et dans une problématique de modélisation, il conviendrait de décomposer la figure illustrant la piste de jeu, en ne percevant qu'une droite (ligne de positions des élèves) et un point (croix matérialisant le lieu du béret). Il nous semble que cette étape heuristique n'est pas atteinte, et nous rejoignons ainsi les travaux de Bloch et

Salin (2003) qui préconisent un apport simultané d'une représentation dans le micro-espace phase qui permettrait le passage à une problématique spatio-géométrique.
Pour la conclusion, l'enseignante souhaite que les élèves récapitulent et apportent eux-mêmes les éléments de la phase d'institutionnalisation. Afin de s'assurer que les réponses ne porteront pas que sur la discipline d'EPS, elle anticipe sur le domaine du contenu de l'institutionnalisation.

> P : Alors, qu'est-ce qu'on a appris aujourd'hui, parce que c'était du sport, mais c'était aussi un petit peu une autre matière.

Quelques élèves continuent d'évoquer malgré tout le facteur rapidité, ce qui marque une résistance au contrat didactique chez ces élèves. Puis, ceux-ci sont explicitement contraints à évoquer les objets de la géométrie rencontrés dans les différentes phases de la séance. L'enseignante entame la phase finale d'institutionnalisation. Elle veut ramener toute l'attention des élèves sur une image géométrique de l'espace. Elle commence par leur demander d'utiliser leurs connaissances pour énoncer des propriétés géométriques de l'espace constituant les pistes de jeu.

> P : Qu'est-ce qu'on avait tracé au départ ? Les lignes jaunes c'était quoi ?
> E : c'était des traits, enfin…
> E : des lignes droites
> P : qui étaient comment ? ça porte un nom quand même (*l'enseignante fait le geste de deux droites parallèles)*
> Es : parallèles, parallèles
> P : ensuite, ensuite ? Le béret ? placé où ?
> Es : au milieu
> P : au milieu…
> E : la ligne au milieu

Implicitement, il est mis en évidence que cette « ligne médiane » caractérise le lieu des différentes positions possibles du béret. Bien qu'ayant remarqué le parallélisme de leurs lignes de position, les élèves n'ont pas été amenés à établir le lien de ces lignes avec la « ligne médiane » de position du béret. Par la suite les élèves ont été sollicités pour reformuler ce qui a été dit sur les différentes actions et procédures qui permettent le gain d'une équipe.
Nous relevons le facteur persistant « rapidité », soulevé en premier et mis en avant par certains élèves.

> P : quelle ligne ? Il y avait un alignement de petites croix. Ensuite, pour gagner, il fallait,..
> E : de la rapidité

Puis, un élève annonce l'importance de sa position par rapport à celle du béret.

> E : Il fallait être face au béret pour avoir ses chances.

Les échanges qui suivent portent de nouveau sur l'équité du jeu, alors qu'il aurait été envisageable d'expliciter les objets et propriétés géométriques sous-jacents.

> P : face au béret pour avoir la même chance que le copain parce qu'après effectivement, il y avait une notion de rapidité qui entrait en jeu.
> E : et pour avoir à égale distance.

A la suite des dernières phases de jeu, les élèves ont à expliciter leur position idéale par rapport à celle du béret. Nous relevons ici les expressions : « *en face, devant* », et enfin « *en angle droit* ».
Finalement, en l'absence d'éléments rigoureux en lien avec le vocabulaire géométrique et propres à la problématique spatio-géométrique, nous pouvons conclure que cette phase peut être considérée comme une **première rencontre avec l'institutionnalisation réelle de la notion de distance d'un point à une droite.** Elle a permis l'introduction du vocabulaire géométrique nécessaire à cette notion ainsi que la mise en évidence en acte des propriétés qui en découlent.

1.3 Conclusion

Cette situation à spécificité mathématique mais inscrite en séance d'EPS, a permis d'étudier dans le méso-espace, la notion de distance d'un point à une droite. Le caractère adidactique perturbé par un facteur propre à la discipline d'EPS, a engendré une difficulté au niveau de l'équilibre contrat-milieu.

Des élèves très attachés aux règles initiales et bien connues du jeu classique du béret, ont montré des difficultés à entrer dans les variantes proposées du jeu. A ces difficultés se rajoute la prégnance de la problématique pratique très présente chez les élèves. Ce type de problématique a également engendré des difficultés au niveau du vocabulaire géométrique.
Telle qu'elle a été construite, la situation suppose la possibilité par les élèves de se représenter l'espace de jeu par des images mentales basées sur des connaissances disponibles de géométrie élémentaire. Le type d'interaction avec le méso-espace permettrait alors plus qu'un contrôle partiel. Ces représentations concernent aussi bien des éléments du méso-espace que les diverses actions des élèves eux-mêmes avec cet espace.
Cependant, peut-on considérer de telles représentations comme outils de modélisation suffisants et pertinents pour traduire des propriétés géométriques ?
La prégnance de la problématique pratique et la taille de l'espace (méso-espace) n'ont pas permis aux élèves de fragmenter cet espace afin de ne percevoir que les éléments qui permettent de définir la notion en jeu, distance d'un point à une droite. De plus, les élèves faisant aussi partie de l'espace ont eu besoin lors de leurs déplacements, d'appréhender différemment certaines notions comme la direction, les angles, les parallèles, les lignes droites…
Les observations ont montré que les élèves ont eu un rapport pratique aux objets du milieu. Le contrôle des actions s'est fait de manière empirique et l'intervention d'éléments relevant de la géométrie a été occasionnelle et sous une forte pression de l'enseignante.
Suite à ces observations, nous pouvons avancer le fait que les représentations par images mentales de l'espace, ne se sont pas correctement effectuées. Le rapport aux objets de la géométrie évolue de façon incertaine et il ne nous est pas possible à ce niveau du projet, de mesurer les acquis des élèves.
L'analyse de la séance en termes de savoirs et liens avec l'espace sensible de travail, a permis de soulever les difficultés des élèves dues à des contraintes portant sur la nature du milieu d'action. Les expérimentations et travaux de Berthelot et Salin nous ont conduit, par conséquent, à réaliser la nécessité d'un travail sur plan (micro-espace) pour une meilleure appréhension des objets géométriques.
Dans l'élaboration de notre séance, nous n'avons volontairement pas souhaité introduire un travail simultané dans le micro-espace. Il n'a pas été prévu de confronter la réalité spatiale avec le plan (le modèle). Par ailleurs, en vertu de la place importante du vocabulaire dans de telles situations, nous avons relevé différents termes et expressions pratiqués par les élèves lors des interactions langagières. Ceux-ci ont convoqué des mots d'usage courant adapté au contexte et favorisé par la problématique pratique induite. Cela a rendu difficile la mise en place d'un vocabulaire propre à la géométrie. Les débats engagés par l'enseignante ont tenté l'élaboration de certaines propriétés géométriques utilisant du vocabulaire géométrique. Malgré la perception par certains élèves de ces propriétés, le recours au vocabulaire attendu fut difficile et incertain.
L'analyse de la séance 2 qui s'est déroulée en classe va nous permettre de mesurer l'impact de cette séance en étudiant l'évolution des différents objets rencontrés.

2 La séance 2

La séance 2 de notre séquence a lieu un mois après la première séance, elle se détache de la première et propose une entrée différente de la notion géométrique de distance d'un point à une droite.
Ses objectifs sont les suivants :
- Prendre conscience que la perpendiculaire à une droite permet d'obtenir la plus courte distance d'un point à une droite.
- Repérer et tracer des droites perpendiculaires.
- « Découvrir » que tous les points situés à une distance donnée d'une droite donnée sont alignés, et que la droite qu'ils forment est parallèle à la première.

2.1 Descriptif de la séance 2 et éléments d'analyse a priori

Nous avons fait le choix d'exploiter l'activité de découverte de la leçon sur la notion proposée dans le manuel Euro Maths (2009) ci-dessous.

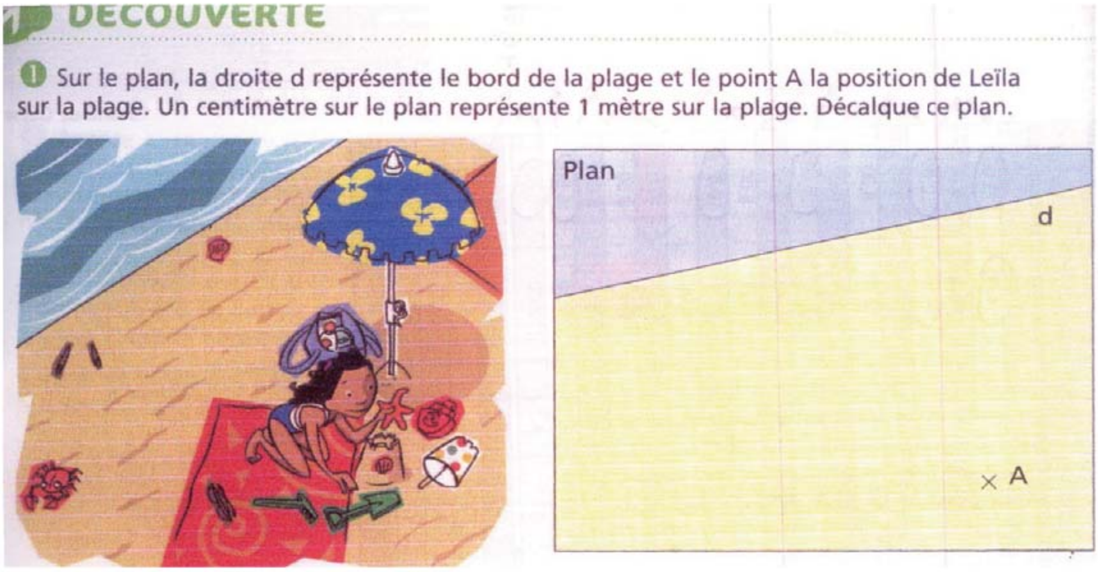


Image 4. Activité de découverte Manuel Euro Maths (2009)

Pour évoquer de manière plus explicite la situation dans le méso-espace, quelques modifications ont été apportées au déroulement réel de la séance telle qu'elle se présente dans le manuel.
Nous nous sommes basées sur le contexte et les données de la situation proposée mais avons fait le choix de relater une petite histoire autour de l'image qui accompagne le dessin géométrique du manuel. La séance comporte trois étapes.

Étape 1. C'est une phase de description d'image.
L'enseignante présente la fiche représentant l'image de la situation de découverte du manuel (sans le plan). Les élèves sont amenés à la décrire.

Étape 2.
L'enseignante annonce : « *à cause de la chaleur, le sable est très chaud. Alors, Leïla veut aller toucher l'eau en prenant le plus court chemin. Nous allons essayer de l'aider. D'après vous comment allons-nous procéder* » ?
Il est attendu que les élèves proposent de dessiner sur une feuille. L'enseignante interviendra pour préciser que cette feuille représentera un plan qui nous aidera à trouver le chemin le plus court que doit prendre Leïla pour toucher l'eau. C'est donc un problème de production dont les variables sont représentées par un point, une droite et une relation entre ce point et cette droite. Le plan attendu est celui qui comportera une ligne matérialisant le bord de la mer et un point pour situer l'emplacement de Leïla. Cependant, l'étape précédente et le contexte de l'histoire, pourraient favoriser des procédures qui utiliseraient ce qui a été cité, notamment les objets figurant sur l'image. L'effet du contrat didactique pourrait être suffisamment puissant pour éloigner les élèves de la procédure attendue. Ceux-ci pourraient proposer des réponses plus pragmatiques étoffant ainsi la petite histoire qui leur a été contée. Les diverses interventions de l'enseignante devraient conduire à la production du plan attendu. Un modèle de celui-ci sera affiché au tableau.

Étape 3. L'enseignante distribue aux élèves le plan de l'image 1.
Le point A représente Leïla et la droite matérialise le bord de mer. Le plan est accompagné de la question suivante :
Il s'agit de trouver, le plus court chemin qui permet à Leïla de toucher l'eau. Comment est ce chemin, et comment est-il par rapport à la droite d ?
Cette étape se réalise en trois phases : un temps de recherche individuel, un travail en groupe, puis une phase de mise en commun qui aboutirait à une première institutionnalisation de la notion :
« Le chemin le plus court pour aller du point A à la droite est un chemin qui est en ligne droite et qui est perpendiculaire à la droite d ».

2.2 Éléments d'analyse a postériori de la séance 2

Pour l'analyse de cette séance, nous présentons les interactions des élèves avec un nouveau milieu dans le micro-espace. Le but est de dégager des éléments de réponse relatifs à nos questions portant sur le transfert des connaissances du méso-espace vers le micro-espace et d'étudier le rôle de la mémoire. Nous nous penchons pour cela sur les composantes du milieu objectif avec lesquelles l'élève interagit. Les principales questions auxquelles nous tenterons de répondre sont alors les suivantes :

- Le milieu de la situation proposée permet-il aux élèves d'entrer dans une problématique de modélisation ?
- Les connaissances convoquées et mises en acte lors d'une résolution de problème dans le méso-espace sont-elles exploitables en tant qu'outils de modélisation dans le micro espace ?
- Le vocabulaire géométrique est-il plus accessible dans ce contexte en lien avec le micro-espace que dans la cour ?
- L'appel à la mémoire des élèves est-elle bénéfique pour l'acquisition d'un vocabulaire géométrique pertinent ? Quels sont, dans notre cas, les effets positifs de la mémoire ?

L'étape 1 est caractérisée par un temps fort propre aux habitudes de la classe, la description d'image. Cette phase a pris plus de temps que prévu, elle a permis de pointer un élément résistant du contrat didactique lié aux pratiques de classe habituelles propres à l'école.
À l'étape 2, nous constatons une problématique pratique affinée par une tendance à la modélisation de la situation en fonction de l'histoire et des objets de l'image. Ci-dessous, un propos d'élève :

> E : Il faudrait qu'elle parte du coin de sa serviette, du coin gauche de sa serviette pour avoir pour aller à la mer, parce que si elle va « tout droit » comme ça, elle aura beaucoup de chemin à faire.

Nous constatons pour cet élève, que la problématique pratique va dans le sens recherché, puisque le chemin proposé par E lui semble être le plus court. L'élève s'approprie la petite histoire et joue le jeu du sable chaud en minimisant la distance à parcourir. Son choix est ainsi judicieux.
Les élèves se sont ainsi appropriés l'histoire et ont souhaité utiliser les objets présents pour élaborer leurs procédures (*glisser avec sa serviette, sauter les deux pieds dans le seau…). *Tout ceci n'a fait que renforcer la problématique pratique déjà rencontrée lors de la séance 1**.**
Ce constat nous permet de réaliser les difficultés qu'ont les élèves à produire le plan de l'étape 3, et de pointer une faiblesse sur le modèle choisi porté sur le point A qui semble ne pas être évident pour les élèves. Ainsi, nous pouvons questionner la pertinence de ce plan :
le plan de l'image proposé représente-t-il un élément pertinent à l'élaboration d'une réponse attendue dans le micro-espace ?
Afin de centrer les élèves sur les éléments essentiels à la connaissance géométrique de la distance d'un point à une droite, l'enseignante finit par introduire elle-même la manière de réaliser un plan de l'image pertinent à cet effet. Elle apporte un modèle de la situation : une feuille, une droite (*d*) matérialisant le bord de mer, un point (A) représentant Leïla.
C'est ainsi qu'elle fait passer, de façon brutale, les élèves dans une problématique spatio-géométrique.
Spontanément, une élève, J, fait le lien avec la séance de sport en évoquant l'étude : *« pour aller d'un point A à un point B »*

> J : c'est comme on a étudié la géographie, pour aller d'un point A à un point B
> P : vous avez fait ça avec Monsieur…
> E : non, tu sais en sport
> E : oui en sport, en géométrie
> E : pour aller du point A à un point B
> P : et en sport, c'est quoi le rapport avec le sport ?
> E : tu sais le sport… *inaudible* on avait mesuré …

À ce niveau, nous pouvons faire le constat d'un premier impact de la séance 1 que nous pouvons qualifier comme portant sur la mémoire didactique. En effet, les propos ci-dessus, se rapprochant de la notion rencontrée, montrent que des élèves, par leur mise en acte d'un savoir mathématique, ont contribué à la construction d'une mémoire de pratique collective (Matheron 2001), ceci s'est traduit par l'emploi d'ostensifs langagiers « *pour aller d'un point A à un point B* » et sans doute par le transfert des représentations d'images mentales du terrain de jeu au micro espace, notamment ici le plan de l'image. Les activités de la séance 1 contribueraient alors au développement d'une mémoire officielle issue de la mémoire pratique des élèves.

Cependant, à ce niveau, l'enseignante ne rebondit pas assez sur les propos de l'élève J afin de construire collectivement et publiquement cette mémoire. Elle engage plutôt une phase de réflexion en groupe pour répondre à la question qui accompagne le plan.

Selon les groupes, les échanges et les productions diffèrent. Par exemple, dans un premier groupe, nous constatons comment progressivement et à travers leurs interactions et actions avec leur milieu, les élèves aboutissent au résultat attendu. La mémoire n'est pas intervenue, les élèves ont procédé tout d'abord au mesurage et ce n'est qu'en réalisant que les plus petites mesures semblent correspondre à une ligne perpendiculaire à (*d*), que l'idée de l'utilisation de l'équerre est apparue. Nous retenons particulièrement le passage :

> E1 : ça fait presque 20 même, ça fait moins tu vois ! Il faut prendre que ce chemin-là.
> E1 : il faut prendre le chemin tout droit et en angle droit.
> E2 : attends, il faut mesurer si c'est un angle droit.
> E2 : à mon avis oui hein.
> E1 : il faut voir si c'est un angle droit
> E 2: C'est un angle droit… C'est bon. Il faut prendre un chemin en angle droit coûte que coûte.
> E1 : qui a sa petite équerre ?

Pour ce groupe, nous avons l'impression qu'il y a apprentissage de la notion. Les élèves déduisent finalement que la droite perpendiculaire est celle qui représente le plus court chemin, mais ne montrent pas le fait d'avoir rencontré de situation similaire dans le méso-espace comme cela était attendu :

Un autre groupe tâtonne en mesurant et déduit de manière précoce une valeur sans trop de rigueur. Puis un autre entame sa recherche comme le groupe précédent, mais ses idées évoluent au fur et à mesure des échanges avec l'enseignante :

> E : on mesure avec la règle, on mesure avec la règle le plus court chemin
> P : pourquoi ?
> E : pour heu pour savoir c'est quoi le chemin le plus court pour aller
> P : Hé bien expliquez-moi comment vous l'avez trouvé
> E : on l'a trouvé avec une règle
> E : j'ai pris le court avec un … nous on a trouvé avec heu, on essaye de trouver avec un, en angle droit.
> P : vous essayez de trouver un angle droit ? on essaye de trouver avec un angle droit. Pourquoi ?
> E : pour que, parce que le chemin… L'angle droit c'est le plus court enfin… normalement
> P : t'es convaincu de ton, de ton… de ton affirmation ou pas ?
> E : ben oui *inaudible*

Notons dans les échanges d'un autre groupe, le fonctionnement de la mémoire didactique, les élèves évoquent d'emblée la notion de perpendiculaire pour justifier le plus court chemin, les raisons découlent du rappel de la séance 1 portant sur le jeu du béret.

> P : à vous, quoi, alors quoi qu'est-ce que vous avez sorti vous comme instrument ?
> E : nous on essaye de faire en angle droit heu.. comme la dernière fois au béret, ben on a vu que l'angle droit c'était le chemin le plus court, ben on essaye de faire un angle droit.

L'enseignante rebondit sur les propos de l'élève E en proposant de suite un petit bilan avec le groupe classe. Elle utilise le fait de l'utilisation de l'équerre dans ce groupe (élève Q) pour entamer une phase de validation commune :

> Q : alors, nous on a essayé de faire un angle droit pour le chemin, parce que la dernière fois qu'on a le jeu du béret, ben quand on l'a fait, ben on a dit que le chemin en angle droit hé ben c'était le chemin le plus court.

Dans ce groupe, la mémoire a fonctionné de façon spontanée. Les élèves semblent avoir retenu essentiellement la phase finale de la séance 1, donc une mémoire portant sur des ostensifs purement langagiers puisque l'élève relate la phrase élaborée en conclusion de la séance 1. Nous pouvons donc avancer le fait que ces élèves ont réellement fait le rapprochement de la situation de Leïla à celle du béret de la séance 1.

L'enseignante approuve et attire l'attention des élèves n'ayant utilisé que la règle sur le fait que leur plus petite mesure correspond de façon rapprochée à la droite perpendiculaire à (d) et passant par le point A. Ces élèves sont ainsi amenés à observer la position de leur règle afin d'essayer de percevoir l'angle droit.

Par ces gestes l'enseignante éloigne les élèves de la situation du jeu du béret de la séance 1 et les focalise plus sur un travail dans le micro-espace avec des objets purement mathématiques.

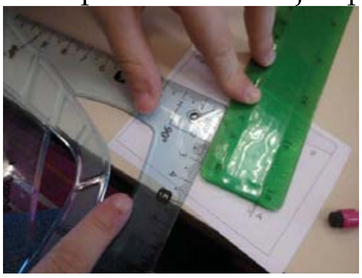


Image 5. Perception de l'angle droit

Enfin, elle procède à une phase d'institutionnalisation partielle de la notion, elle élabore avec les élèves une phrase définissant le plus court chemin pour aller d'un point donné à une droite.

« Le plus court chemin pour aller du point A jusqu'à la droite d, c'est de le faire en angle droit ».

2.3 Conclusion

À la suite de cette étude, nous pouvons apporter un premier constat sur la problématique pratique qui s'est renforcée par la mise en place d'une situation relatant la petite histoire de Leïla au bord de la mer. Les pratiques de classe habituelles ont permis aux élèves de s'engager encore plus dans cette problématique et les ont éloignés de la problématique géométrique attendue. C'est en progressant dans le déroulement de la séance que les élèves évoluent dans leur manière de faire grâce notamment au milieu enrichi par des objets purement mathématiques. Ainsi, le micro-espace, caractérisé notamment par le plan de la situation, ainsi que tous les ostensifs propres aux objets de la géométrie ont joué un rôle important dans l'évolution vers une problématique de modélisation. Grâce aux diverses interactions et interventions de l'enseignante, les réflexions des élèves ont pu, à plusieurs reprises, être recentrer vers les objectifs de la séance.

Il est important de noter la place et le rôle de la mémoire dans cette séance. Son intervention a pris plusieurs formes. Tout d'abord, les souvenirs de certains élèves ont porté sur des ostensifs langagiers, puis grâce à l'apport supplémentaire du plan, et sans doute à certaines images mentales présentes chez les élèves, la mémoire a pu contribuer à l'enrichissement du milieu et par conséquent à une évolution de la compréhension de la notion visée. Tout cela, accompagné par des interventions pertinentes de l'enseignante qui n'hésitait pas, par exemple, à provoquer le rappel des diverses actions réalisées lors de la séance 1. Des élèves ont pu ainsi faire un rapprochement pertinent de la situation vécue lors du jeu du béret avec celle de Leïla. Tous ces effets ont permis aux élèves de réaliser, grâce à la mémoire des pratiques et à l'aide des ostensifs disponibles, la possibilité de projeter sur le micro-espace des éléments du jeu leur permettant de comprendre la situation similaire proposée à la séance 2.

Notons, même si cela n'a pas été présenté ici, que la mémoire est également intervenue dans le vocabulaire, mais les élèves ont donné l'impression de jouer le jeu évoquant certains termes déjà rencontrés et attendus pour la phase d'institutionnalisation. L'appropriation d'un vocabulaire spécifique de la géométrie, mais possédant un sens quotidien et usuel, semble incertaine. Cette ambigüité est d'autant plus difficile à lever pour les élèves, du fait de leur travail simultané dans les deux espaces (micro-espace et méso-espace).

III - QUELQUES ELEMENTS DE REPONSE A NOS QUESTIONS ET OUVERTURES

Tout d'abord, sur les représentations que se confectionnent les élèves lors d'un travail dans le méso-espace, nous avons constaté que la séance 1 a mis en évidence le fait que **le milieu objectif et celui de référence contribuent fortement à la construction de représentations mentales anticipant ainsi un travail sur le micro-espace. Les diverses interactions avec ces milieux se retrouvent sous forme de manipulations, d'actions et d'argumentations dans le micro-espace.**

Nous pouvons souligner que le méso-espace a permis aux élèves de vivre la « distance » avec motivation. Une fois le facteur « vitesse » écarté, les élèves continuent de chercher à rendre la « distance » au béret minimale.

La prégnance de la problématique pratique fait obstacle à la rigueur géométrique. En effet, la taille de l'espace propre à la séance 1 a favorisé une problématique pratique que l'on peut qualifier de niveau 1 car très proche de la réalité. Les élèves faisant aussi partie de l'espace, ont eu un rapport pratique aux objets, ils ont appréhendé différemment les notions de *direction, de lignes droites, d'angles*,…. Le contrôle des actions s'est réalisé de façon empirique et il a été difficile de faire intervenir des éléments propres à la géométrie. Une deuxième rencontre avec ce type de problématique s'est effectuée lors de la séance 2 : le problème pratique de la recherche du plus court chemin entre Leila et le bord de mer a conduit les élèves à le résoudre pratiquement (*en traînant la serviette,…*).

Par la suite, la demande d'introduction d'un plan n'a pas abouti d'emblée, l'étape de modélisation de la situation a montré que les élèves ont persisté dans une problématique pratique affinée, que l'on peut donc qualifier de niveau 2. Ils introduisent des modèles d'objets pratiques de l'image et ne trouvent pas la nécessité d'une modélisation s'approchant des mathématiques.

L'entrée dans une problématique spatio-géométrique marque un saut important. Ceci s'est notamment caractérisé lors de la séance 2, par une introduction assez brutale du plan par l'enseignante. Nous pouvons remarquer que la problématique pratique résiste même à la taille de l'espace, puisque les élèves ne se sont pas engagés dans une décomposition de celui-ci afin de ne retenir que la droite matérialisant le bord de mer et le point représentant Leila.

Finalement, les remarques portées sur la prégnance de la problématique pratique est un élément de conclusion important qui confirme bien les résultats de Berthelot et Salin qui préconisent un travail simultané dans le micro-espace pour confronter l'élève au plan.

Concernant la question du rôle et des gestes de l'enseignant, nos analyses nous ont permis de réaliser que les interventions de l'enseignante n'ont pas toujours été pertinentes. Elles témoignent d'un manque de marge de manœuvre dans son action. En effet, celle-ci n'a pas toujours su rebondir sur des situations qui lui auraient permis de récupérer l'objectif de la séance, sans doute à cause d'une appropriation faible du projet, de la non maîtrise de la notion visée et des enjeux de la séquence. Ceci s'est traduit par son rattachement intense aux fiches de préparation lors du déroulement, ce qui l'a empêché parfois d'être attentive aux propositions des élèves et de rebondir pertinemment sur des faits imprévus. Professeure des écoles depuis plusieurs années, cette enseignante fait preuve d'une bonne expérience professionnelle et possède de très bons rapports avec ses élèves. Cependant, lors de notre rencontre pour la prise de connaissance de la séquence, l'enseignante a déclaré ses difficultés face à la complexité du projet et la notion mathématique mise en jeu.

Soulignons de plus, la bifurcation du savoir mis en jeu vers la « notion de la droite des milieux » représentée par les points matérialisant toutes les positions possibles du béret et qui permettent un jeu équitable. Cette notion mise en acte par les élèves et poursuivie par l'enseignante, a complexifié la fonctionnalité de ces savoirs. Cet élément a pris le dessus sur la notion de la distance d'un point à une droite lors des phases de recherche, de mise en commun et de validation. Réalisant un peu plus tard cette déviation, l'enseignante réussit à recentrer les élèves sur les objets à prendre en compte pour la notion en jeu, mais avec beaucoup de difficultés.

Sur la mémoire didactique : la séance 1 réalisée dans le méso-espace a permis de mettre en évidence le fait que cet espace représente un élément pertinent du milieu en rapport avec la mémoire didactique. Celle-ci a permis, lors de la séance 2 et grâce aux souvenirs, d'élargir les possibilités d'action des élèves, bien au-delà de leurs connaissances mobilisables. Mais il s'agit là, d'une mémoire collective puisque malgré leurs souvenirs du jeu, tous les élèves n'ont pas réussi à faire des liens pertinents entre la séance 1 et la situation de « la plage et Leila ». Les souvenirs des élèves qui ont contribué à la mise en place d'une mémoire collective ont porté essentiellement sur des ostensifs gestuels et langagiers. Ces éléments ont provoqué des modifications dans les contrôles qu'ont les élèves sur leurs actions et leurs connaissances. Cette mémoire a continué de fonctionner même lorsque les élèves étaient confrontés au plan de la situation de la séance 2. Elle leur a permis de faire le lien entre les éléments de la piste du jeu du béret et les nouveaux objets du micro-espace. Ceci s'est traduit par des allers retours qui ont permis de mieux concevoir l'intérêt du passage à la modélisation des situations proposées dans le méso-espace. Ainsi, les élèves ont pu adopter le schéma proposé pour le transfert des connaissances et pour un engagement dans une problématique spatio-géométrique.

Il est important de souligner l'accompagnement de l'enseignante par ses interventions pertinentes pour la construction de cette mémoire collective. Ceci s'est manifesté par des rappels conduisant les élèves à évoquer puis pointer les éléments pertinents nécessaires à la situation du présent.

Sur le vocabulaire géométrique, notons que c'est lors de l'intervention de la mémoire, qui s'est effectuée essentiellement par des échanges verbaux entre les élèves et l'enseignante, que nous avons pu pointer des données pertinentes pour l'analyse de ce vocabulaire. Ceci nous permet de confirmer que les gestes de l'enseignant et en particulier la régulation portée sur ses formulations joue un rôle dans l'acquisition d'un certain vocabulaire de la géométrie élémentaire ainsi que sur la construction d'une mémoire collective. Lors des échanges verbaux, Les élèves ont utilisé des mots d'usage courant adaptés au contexte et favorisés par la prégnance de la problématique pratique induite. Ils ont pratiqué différents termes et expressions langagières, mais le sens quotidien de certains mots (*distance, droit, centre, milieu)* l'a emporté sur le sens géométrique attendu. Lors de leur travail dans le méso-espace, les élèves ont même utilisé des gestes pour exprimer des relations géométriques qu'ils ont bien perçues. Tout cela a rendu difficile la mise en place d'un vocabulaire propre à la géométrie.

Nous avons pu également constaté l'importance des ostensifs graphiques (*la croix, les lignes tracées au sol,…)* pour l'acquisition de certains mots de vocabulaire géométrique. Les débats engagés par l'enseignante à la séance 2 ont tenté l'élaboration de certaines de ces propriétés en faisant appel à ces ostensifs grâce à la mémoire, cependant le recours au vocabulaire attendu fut difficile et incertain. Ainsi, nous avons mesuré à ce niveau le rôle du langage et des formulations spécifiques non familières aux élèves qui peuvent être source d'ambigüité et empêcher la compréhension de la notion de géométrie visée (Mathé A.C 2006).

Ces constats nous amènent à questionner de façon plus générale **la mémoire et le vocabulaire** :

- Quelles influences du vocabulaire sur le rôle de la mémoire ?
- Le langage géométrique spécifique peut-il faire obstacle à une construction d'une mémoire basée sur des pratiques ostensives ?

Enfin, suite à cette étude et à nos analyses, nous avons soulevé d'autres questions d'ordre plus général. Nous les énonçons comme suit :

- Les images mentales basées sur des connaissances disponibles de géométrie sont-elles des outils pertinents, suffisants et efficaces de modélisation ?
- Une pratique plus régulière de cette forme de travail pour introduire certaines notions de géométrie faciliterait-elle les apprentissages de ces notions par l'installation de nouveaux contrats ?
- Quelles difficultés, quelles contraintes à mener une séquence bi-disciplinaire pour un savoir mathématique donné ?

IV - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de la géométrie à l'école dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université de Bordeaux.

BLOCH I & SALIN M.H. (2003) Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège, *Actes XXXème colloque inter-IREM (Copirelem)*, IREM d'Avignon

BROUSSEAU G & CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 11*, **23,** 167-210

CENTENO J. (1995), *La mémoire didactique de l'enseignant,* Thèse posthume inachevée, Université de Bordeaux 1 : LADIST

GOBERT S. (2005) Quelles formulations pour les savoirs de géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **76**, 29-44.

HOUDEMENT C & KUZNIAK A.(1999), Réflexion sur l'enseignement de la géométrie, *Grand N,* **64**, 65-78.

MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a postériori des situations, *Les débats de didactique des mathématiques* 89-102.

MATHE A.C. (2006) *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3*. Thèse Université Claude Bernard-Lyon 1

MATHERON Y. & SALIN M.H (2002) Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans la classe enseignante. *Revue Française de Pédagogie,* **141**, 57-66.

SENSEVY G. & MERCIER A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Presses Universitaires de Rennes.

V - ANNEXE 1 : LE JEU TRADITIONNEL DU BERET

Deux équipes de nombre égal. Chaque joueur porte un numéro. Le béret au milieu de la piste de jeu.

But du jeu :

Ramener le foulard dans son camp

Consignes : A l'appel de son numéro par le maître, les 2 joueurs concernés, s'efforcent de prendre le foulard et le ramener dans son camp sans être touché.

PRESENTER LA PEDAGOGIE FREINET EN FORMATION A PARTIR DU DISPOSITIF DE RECHERCHES MATHEMATIQUES

Zoé MESNIL
MCF, UNIVERSITE PARIS EST CRETEIL
Laboratoire de Didactique André Revuz
zoe.mesnil@u-pec.fr

Résumé
Dans la communication que j'ai proposée au 44e colloque de la COPIRELEM, j'ai présenté une séance de formation autour du dispositif de recherches mathématiques pratiqué au sein de la pédagogie Freinet. J'ai d'abord présenté le dispositif, puis les ressources utilisées dans la séance de formation. Des recherches menées dans l'école Freinet Hélène Boucher m'ont ensuite permis d'élargir les observations, et de discuter les principes du dispositif.

La communication que j'ai proposée au 44e colloque de la COPIRELEM rend compte d'une séance de formation proposée à des étudiants professeurs des écoles stagiaires de l'académie de Créteil. Ces étudiants sont à mi-temps dans des classes, et à mi-temps en formation à l'ÉSPÉ[1]. La séance d'une durée de quatre heures a été proposée à trois groupes différents, au second semestre. Elle a été menée en co-animation avec un maître-formateur membre du Groupe Départemental 77 (Seine-et-Marne) de l'Institut Coopératif de l'École Moderne (ICEM)[2].

En proposant cette séance, nous avions tout d'abord comme objectif de faire connaître Célestin Freinet et l'ICEM et les principes de leur pédagogie. Freinet me paraît être une figure suffisamment importante dans l'histoire de la pédagogie pour qu'il ne soit pas besoin de justifier d'en parler en formation initiale des enseignants, mais il faut reconnaître que n'étant pas vraiment chargée en tant que formatrice en mathématiques de cette dimension historique et pédagogique, ce sont des convictions personnelles vis-à-vis de cette pédagogie qui m'ont amenée à ce choix. Les principes de la pédagogie Freinet qui ont été abordés et illustrés n'ont bien sûr pas vocation à être présentés comme des modèles à suivre, mais bien comme des choix vis-à-vis de certaines grandes questions de la profession, à l'aune desquels les étudiants peuvent situer les leurs.

Lors d'un premier temps commun, nous avons utilisé pour introduire la pédagogie Freinet un reportage sur l'école Hélène Boucher de Mons-en-Barœul[3], qui a été prise en charge en 2001 par une nouvelle équipe d'enseignants membres de la « Régionale Nord-Pas-de-Calais » de l'ICEM. Les étudiants ont été invités à relever ce qu'ils identifiaient comme des principes pédagogiques dans le discours des enseignants interviewés ou dans les moments de classe qui sont montrés, de manière à amorcer la discussion. Ce premier temps s'est conclu par une présentation de Célestin Freinet, et de l'ICEM.

Nous avons ensuite proposé deux temps en demi-groupe : un temps sur le travail en autonomie avec le maître-formateur, et un temps sur le dispositif de recherches mathématiques avec moi. Ce choix de présenter le dispositif de recherches mathématiques est bien sûr lié à la discipline que j'enseigne, mais il me paraît particulièrement intéressant de montrer la possibilité que l'enfant soit auteur dans un domaine où on l'imagine peut-être moins facilement (il n'est pas difficile d'imaginer ce qu'est produire un « texte libre », mais sans doute déjà plus ce qu'est produire un « texte libre mathématique »).

---

1 École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

2 Institut Coopératif de l'École Moderne. L'ICEM regroupe des enseignants, des formateurs et des éducateurs autour des principes de la pédagogie Freinet
https://www.icem-pedagogie-freinet.org/presentation-association-icem, consulté le 4 octobre 2017

3 Une école Freinet. Série *L'École autrement*. Charlotte Lassana et Magali Roucaut
http://www.dailymotion.com/video/xcw69v_l-ecole-freinet-de-mons-en-baroeul_news, consulté le 4 octobre 2017

Dans le compte-rendu de cette communication, je présenterai d'abord le dispositif de recherches mathématiques, puis deux analyses de séances de formation, l'une centrée sur la dévolution du problème lors d'une recherche dans une classe de CP, à partir d'un article, l'autre centrée sur les interactions lors d'une présentation d'une recherche dans une classe de CM2, à partir d'une vidéo. Je terminerai en évoquant les résultats de la recherche de D. Lahanier-Reuter, didacticienne des mathématiques qui a conduit une étude sur ce dispositif à l'école Hélène Boucher.

I - PRESENTATION DU DISPOSITIF DE RECHERCHES MATHEMATIQUES

Lors de la communication, j'ai présenté le dispositif de « recherches libres mathématiques » tel qu'il est pratiqué notamment par les enseignants de l'école Hélène Boucher. Il s'inspire du dispositif de « créations mathématiques » mis au point par Paul Le Bohec (2008). Cet instituteur breton propose dès le début de sa carrière en 1940 la pratique du texte libre[4] dans sa classe. Convaincu par le principe de la *méthode naturelle d'apprentissage*, qui est « une démarche complexe d'apprentissage par « Tâtonnement expérimental », qui permet à chaque enfant de déployer de façon créative sa puissance de vie, et qui favorise, par le travail et les inventions, la rencontre des puissances dans un milieu social coopératif » (Go, 2009, p.31), il étend l'idée du texte libre au domaine des mathématiques : les élèves sont invités à faire « une création mathématique avec des chiffres, des lettres, des signes » (Brault, Jacquet et Quertier, 2002, p.6), et la classe travaille ensuite à partir de l'étude de ces créations. Dans le dispositif de « recherches libres mathématiques », les élèves disposent d'un temps plus long de travail sur leurs propres propositions mathématiques originales avant la présentation au groupe. Il y a une alternance de temps de travail individuel, pendant lesquels chaque élève avance sur sa recherche, sa démarche étant alors régulée par des échanges avec l'enseignant (une description fine de cette régulation est proposée dans Go et al. 2010), et de temps de travail collectif, pendant lesquels les élèves présentent leurs recherches, la régulation de la recherche présentée venant alors également des pairs. Les savoirs nouveaux élaborés pendant une recherche sont finalement clairement présentés à l'ensemble de la classe (institutionnalisation), par exemple sous forme d'une affiche rédigée par l'auteur de la recherche, qui sera ensuite « versée au patrimoine mathématique de la classe » (LRC, 2015, p. 23). Les recherches peuvent également donner lieu à des fiches d'exercices d'entraînement rédigées par l'enseignant et proposées à toute la classe.

Au sein d'un tel dispositif, les élèves vivent donc des situations didactiques (Brousseau, 2011), fréquentent des praxéologies (Chevallard, 1998) et qui regarderait le travail particulier d'un élève lors d'une de ses recherches, ou même le travail collectif de la classe lors de la présentation d'une recherche, ne verrait pas forcément de différence avec des propositions plus traditionnelles d'organisation du travail mathématique dans la classe. Pour appréhender la spécificité de l'enseignement des mathématiques au travers de ce dispositif, il faut prendre en compte la ritualisation de la démarche proposée aux élèves, qui créé un « cadre d'expériences communes » (Chartier, 1999). À travers cette ritualisation, et plus globalement à travers la *méthode naturelle d'apprentissage*, l'objectif des enseignants n'est pas seulement la construction de connaissances, mais également la construction d'un rapport émancipateur aux savoirs.

Lors de stages de formation proposés par des membres de l'ICEM, les participants désirant se former à la *méthode naturelle* en mathématiques sont tout d'abord invités à produire une « création mathématique » J'ai pu le faire comme premier temps de la séance de formation avec le premier groupe seulement, mais ayant alors manqué de temps pour le reste, je n'ai pas recommencé avec les deux suivants, pour lesquels j'ai choisi de démarrer sur un tour de table autour de la question « quand vos élèves sont-ils auteurs dans leur travail ? ». Le temps passé à la discussion autour de cette question a

[4] https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/5393, consulté le 30 janvier 2018

alors été effectivement plus court, mais moins intéressant, d'une part parce que nous nous sommes ainsi privés d'une activité mathématique autour des créations, d'autre part parce que le fait d'avoir vécu le dispositif, même en « vitesse accélérée », a semblé plus convaincre les étudiants du premier groupe de la possibilité effective d'en faire un vecteur d'apprentissages mathématiques.

II - UN PREMIER EXEMPLE DE RECHERCHE MATHEMATIQUE : FOCUS SUR LA DEVOLUTION

Le deuxième temps de la séance de formation a été consacré à la lecture et à l'analyse de l'article *Recherches Mathématiques au cycle 2* de D. Thorel (Thorel, 2007), paru dans le n°184 de la revue Le Nouvel Educateur, intitulé *Les mathématiques ? C'est naturel !* L'objectif de ce temps de formation était de montrer et de faire analyser une mise en œuvre d'une recherche dans une classe, et plus particulièrement de faire émerger la spécificité du processus de dévolution (au sens de la Théorie des Situations Didactiques d'une mise en activité des élèves par un transfert de la responsabilité de la résolution de la situation, Brousseau, 1998) dans le dispositif et le principe de l'enfant-auteur, élément clé de la pédagogie Freinet (Go, 2011).

1 Point de départ de la recherche

Le point de départ de la recherche décrite dans l'article est le suivant : dans une classe de CP, lors d'un temps de présentation (de tels temps sont quotidiennement présents dans les classes Freinet), Océane montre le dessin d'une coccinelle :

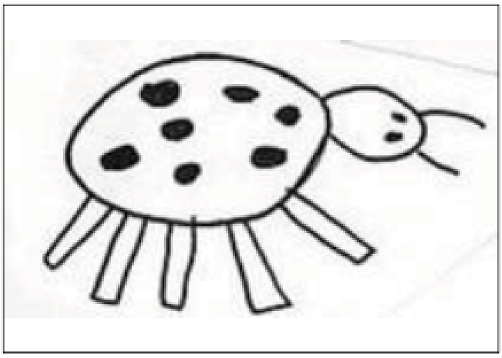


Figure 1. La coccinelle dessinée par Océane

Ophélie réagit : « c'est drôle, ta coccinelle n'a que 5 pattes. Ça ne va pas parce que les pattes ne sont pas pareil de chaque côté. »

Sous-jacente à la réaction d'Ophélie, nous pouvons identifier une connaissance mathématique, à savoir que 5 n'est pas divisible par 2. Bien sûr, ce n'est pas dans ces termes qu'elle justifierait sa réaction ! Le raisonnement d'Ophélie semble plutôt être le suivant : une coccinelle a autant de pattes de chaque côté, et 5 ça ne peut pas être partagé en autant de chaque côté, donc une coccinelle à 5 pattes, c'est drôle. Ou alors, Ophélie pourrait savoir qu'une coccinelle a 6 pattes, avoir constaté que ça n'est pas le cas de celle d'Océane, et chercher ensuite une explication pour convaincre ses camarades qu'en tout cas, 5 pattes ça n'est pas possible.

Cette connaissance est reliée à une connaissance attendue des programmes : connaître les doubles et moitiés des nombres d'usage courant (que ce soit dans le programme de 2002 pour le cycle des apprentissages fondamentaux, MEN 2002, en vigueur au moment des séances décrites dans l'article, ou dans le programme actuel pour le cycle 2, MENESR 2015). Les situations classiquement proposées dans les manuels pour aborder cette connaissance consistent à demander aux élèves si une collection de cardinal donné peut être ou non partagée en deux part égales.

L'enseignante de la classe se saisit de la réaction d'Ophélie, lui demande de venir au tableau expliquer pourquoi ça n'est pas possible d'avoir une coccinelle à 5 pattes, et pourquoi c'est possible d'avoir une coccinelle à 6 pattes, et interroge la classe : et une coccinelle à 3 pattes, ça marche ou ça marche pas ? L'enseignante reconnaît ici la possibilité de poser une question mathématiquement intéressante et en lien avec des connaissances attendues pour des élèves de CP, contextualisée à partir de la proposition d'Océane, c'est-à-dire qu'elle transforme la question « peut-on partager une collection de n objets en deux collections équipotentes ? » en « existe-t-il une coccinelle à n pattes ? ». L'enseignante a donc agit (faire venir Ophélie au tableau, poser des questions) de façon à sensibiliser les élèves à un certain phénomène (Thorel, 2007, p.12)), parce qu'elle a reconnu dans la situation la possibilité de travailler sur la parité. Elle propose aux élèves qui le souhaitent de poursuivre une recherche mathématique intitulée « la coccinelle d'Océane ». Le choix de cette situation comme point de départ pour un travail sur la parité est discutable : connaître le nombre de pattes d'une coccinelle (ou plus généralement de différentes catégories d'animaux) est une connaissance qui relève des sciences de la vie, et une coccinelle à 8 pattes, qui sera acceptée comme solution au problème dans la suite de la recherche, n'est évidemment pas une réponse cohérente avec la réalité. La coccinelle, point de départ de la recherche, ancré dans l'environnement concret des enfants, devient très vite un objet « mathématisé » et abstrait dont la seule caractéristique retenue est qu'il y a autant de pattes de chaque côté. Dans l'article, ce passage de la coccinelle réelle à la coccinelle mathématique n'est pas du tout commenté, et, sans prendre parti sur sa pertinence pour une situation d'enseignement, nous pouvons en tout cas supposer qu'il est une source potentielle de difficulté qui mérite donc une explicitation.

Nous pouvons identifier dans le moment de classe décrit ici un processus de dévolution, par lequel l'enseignante fait accepter aux élèves la responsabilité de l'étude d'une situation. Mais cette situation n'est pas conçue à l'avance par l'enseignante, elle émerge (ici essentiellement sous son action) du vécu d'une élève de la classe. J'invite donc les étudiants à essayer de décrire des éléments spécifiques de cette dévolution.

2 Une dévolution à deux niveaux

La dévolution ne se passe pas qu'au seul niveau du problème, mais aussi au niveau plus global de l'activité de recherches mathématiques : la ritualisation du dispositif permet que « la dévolution d'un rapport adéquat des élèves aux objets du milieu s'amplifie, en vertu d'un contrat spécifique, en une sorte de dévolution générale. Cette notion désigne le fait que la dévolution ne porte pas seulement sur un certain rapport aux objets du milieu, dans une situation (mathématique) donnée, mais caractérise la pratique sociale dans son ensemble » (Go et al., 2010, p. 182). M.-J. Perrin-Glorian avait également distingué, au-delà de la dévolution de chaque situation, un deuxième niveau de la dévolution : « la dévolution d'un enjeu d'apprentissage à plus long terme, d'une réutilisation des connaissances produites, de leur intégration dans les connaissances anciennes » (Perrin-Glorian, 1997, p. 52), qui échapperait aux élèves en difficulté. Dans le dispositif de recherches mathématiques (et dans la pédagogie Freinet en général), tout se passe comme si ce deuxième niveau de dévolution se situait plus au niveau du rapport au savoir qu'au niveau du savoir lui-même : il ne s'agit pas seulement que les élèves acquièrent des connaissances, prennent conscience de la possibilité de réinvestissement de ces connaissances, mais bien aussi qu'ils s'approprient la possibilité de construire ces connaissances par une démarche à la fois individuelle et collective, à partir d'une question qu'ils se posent. N. Go parle plus généralement d'une « dévolution radicale » dans la pédagogie Freinet, qui l'est doublement :

> *d'abord, parce que les élèves participent à tous les aspects du travail (y compris l'organisation de la vie sociale elle-même), et ensuite parce qu'ils y portent une responsabilité entière. Ce n'est pas le professeur qui conçoit d'avance une situation (dite adidactique) par laquelle les élèves assument la responsabilité d'un apprentissage dont l'objectif est par ailleurs défini ; ce sont les élèves qui inventent leur propre activité sous l'influence complexe du milieu. Dans le premier cas, ils sont acteurs, c'est-à-dire qu'ils agissent, certes, et plus aujourd'hui qu'autrefois, mais au sein d'une activité qui a été conçue pour eux, et sans eux ; ils interprètent en quelque sorte un rôle qui a été écrit pour eux. Dans le second cas, ils sont auteurs, ils explorent par eux-mêmes des horizons de promesses, comme ils l'avaient fait pour conquérir le langage, la marche, ce qui leur avait si bien réussi. (Go, 2011, 0h6'16)*

Au-delà des recherches mathématiques, cet exemple permet d'aborder avec les étudiants la question suivante : comment les élèves savent-ils ce qu'ils sont en train de faire ? et de les amener à réfléchir sur leurs pratiques en échangeant autour des discours et dispositifs mis en place dans leurs classes. Nous travaillons ainsi sur leur capacité à « rendre explicites pour les élèves les objectifs visés et construire avec eux le sens des apprentissages » (MEN, 2013, p.85)

3 Poursuite de la recherche : identification de moments plus classiques

Revenons au travail sur la classe de D. Thorel : la recherche se poursuit sur plusieurs séances ultérieures. Je les décris rapidement aux étudiants, c'est une occasion supplémentaire de rappeler différents moments de la recherche (élaboration de la question, recherche sur des cas particuliers, recherche de stratégies permettant de répondre dans n'importe quel cas, institutionnalisation[5] des connaissances élaborées pendant la recherche…), différentes modalités de travail, en soulignant à chaque fois le rôle de l'enseignant. La deuxième séance démarre par un rappel du point de départ de la recherche, et par la recherche d'une représentation de coccinelle qui permette de faire de nombreux essais et qui soit donc efficace pour la recherche mathématique sans perdre du temps avec des aspects esthétiques. Ensuite, chaque élève cherche individuellement quelles coccinelles sont possibles, sur des supports qui permettent ensuite de présenter le travail au groupe (feuilles A3). Lors de la première mise en commun, l'enseignante s'appuie sur la proposition d'une élève qui a cherché pour une coccinelle à 8 pattes, qui a trouvé 5 d'un côté et 3 de l'autre et a donc conclu « ça ne marche pas ». En cherchant ensemble, les élèves trouvent finalement la solution 4 pattes de chaque côté, et trouvent que pour une coccinelle à 9 pattes, il n'y a pas de solution. Un défi est alors posé : « Comment trouver rapidement si « ça marche » ou si « ça ne marche pas » ? ». Les enfants repartent pour une recherche individuelle, et s'ensuit une nouvelle mise en commun d'échange des procédures trouvées, parmi lesquelles celle d'Ophélie, dessiner une patte d'un côté, une patte de l'autre, et recommencer jusqu'à épuisement du nombre total de pattes, retient l'attention. L'enseignante prépare alors pour la séance suivante une feuille avec des corps de coccinelle, les nombres de 0 à 20, pour que les élèves puissent s'entrainer à mettre en œuvre la technique d'Ophélie. Ils marquent d'une croix les nombres pour lesquels « ça ne marche pas », d'un rond ceux pour lesquels « ça marche », et découvrent l'alternance croix/rond (voir figure 2 page suivante).

Les couples doubles/moitiés pour les nombres jusqu'à 20 sont finalement écrits dans le cahier de chaque élève (institutionnalisation de la connaissance du programme), mais au-delà, D. Thorel souligne que « la coccinelle devient un outil de la classe pour partager un nombre en deux avec la technique d'Ophélie. Cet outil entre dans notre patrimoine culturel de classe. Il fait l'objet d'une affiche qui restera dans la classe et que nous pourrons consulter. » (Thorel, 2007, p. 14) Nous retrouvons dans les différentes séances lors desquelles la recherche se poursuit des moments d'un enseignement des mathématiques plus classique, tant du côté du travail des élèves que du côté du rôle de l'enseignant : alternance de temps de recherche individuels, avec aide de l'enseignante pour les plus hésitants, mise en commun et discussion sur les procédures, avec régulation de l'enseignante pour les valider ou non, les classer en fonction de leur efficacité, institutionnalisation des savoirs. Nous pouvons cependant faire l'hypothèse que le fait que la recherche parte d'une production d'une élève constitue une motivation qui mobilise les élèves jusqu'au bout de la recherche, ce phénomène de personnalisation se poursuivant d'ailleurs puisque lors de la recherche « la coccinelle d'Océane », la classe reconnaît l'efficacité de « la technique d'Ophélie ».

[5] Là aussi au sens de la Théorie des situations, l'institutionnalisation permet le « passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives », Brousseau, 1998

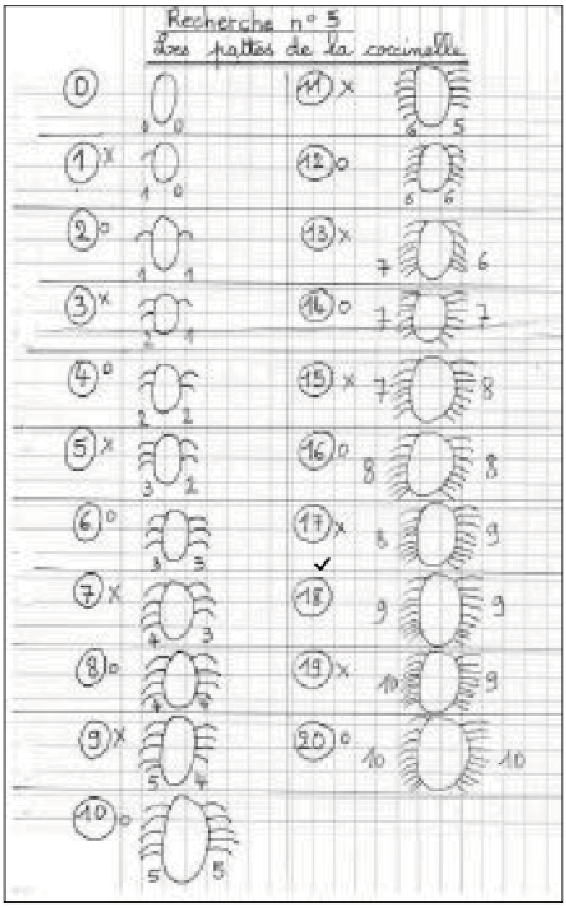


Figure 2. Recherche des nombres de pattes pour lesquels « ça marche »

III - UN DEUXIEME EXEMPLE DE RECHERCHE MATHEMATIQUE : LE ROLE DU COLLECTIF

Dans son article, D. Thorel décrit une recherche qui a lieu dans une classe de CP, donc avec des élèves qui découvrent le dispositif. Une fois celui-ci installé, chaque élève travaille sur sa propre idée et le temps de recherche individuel s'allonge, avant la présentation d'une recherche suffisamment aboutie au groupe (parfois, des élèves présentent rapidement leur recherche justement parce qu'ils sollicitent l'aide du groupe pour la poursuivre). Lors du troisième et dernier temps de présentation de ce dispositif aux étudiants, je m'appuie sur une vidéo d'une présentation d'une recherche dans une classe de cycle 3[6] afin d'étudier la régulation du travail par l'enseignant mais aussi par les pairs.

1 Les interventions de l'enseignant

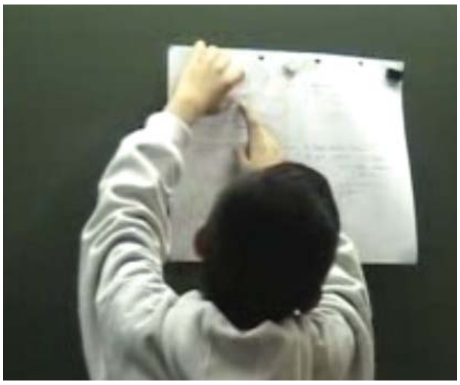
Dans cette vidéo, M.[7] présente une recherche autour du périmètre d'un cercle. Elle se situe dans la continuité d'autres recherches de M. sur les périmètres des figures usuelles. Il affiche sa recherche au tableau : il y a un cercle, et des calculs à côté. Je demande aux étudiants d'être attentifs aux interventions de l'enseignant.

---

[6] *Les recherches mathématiques à l'école Hélène Boucher de Mons en Barœul.* Site de l'ICEM https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/2404, consulté le 4 octobre 2017

[7] Des photos de cet élève étant présentées dans l'article, dans un souci d'anonymat, nous ne conserverons que l'initiale de son prénom. Pour les autres élèves, nous conserverons les prénoms.

M. : Alors moi après j'ai fait avec des formes. Alors je voulais faire un défi avec des ronds, j'ai essayé. Alors il y avait un petit truc, c'était le rond, là le … euh comment ça s'appelle, le rayon, ici là, la moitié du rayon (en désignant un rayon sur sa figure) ben il faisait 3 cm, alors j'ai calculé le paramètre du rond.



Enseignant : Périmètre

M. : Le périmètre, et ça faisait euh non c'est pas ça, la moitié là comment ça s'appelle monsieur ? [en montrant le quart de périmètre]

Enseignant : Ça c'est un quart, le quart du cercle

M. : Le quart du cercle il faisait 4,9 alors j'ai trouvé ça bizarre parce que 3 et on ajoute 1 ça fait 4.

[L'enseignant s'approche du tableau.]

Enseignant : On va quand même faire un peu agrandi.

[L'enseignant dessine au tableau un cercle avec les mesures 3 cm et 4,9 cm.]

*M. : C'est bizarre parce que 3+1 ça fait 4 et 3*3 ça fait 9 [en écrivant] alors après ça m'a donné 4,9. Alors j'ai essayé avec un autre, j'ai essayé avec 5 cm.*

Enseignant : Stop stop, est-ce qu'il y a des questions d'abord, sur le début déjà. Guillaume.

Guillaume : Comment tu as fait pour trouver le 4,9 ?

Enseignant : Ah ça c'est important, explique bien, on ne peut pas le deviner.

M. : Avant j'avais fait ça avec une ficelle, mais j'ai trouvé ça bizarre

Enseignant : Attends, tu as posé une ficelle sur le quart de périmètre

M. : Oui

Enseignant : Et tu as trouvé ?

M. : 4,9

Enseignant : Que la longueur de la ficelle

M. : 4,9

Enseignant : Voilà

M. explique, l'enseignant précise ou apporte le vocabulaire nécessaire à une présentation rigoureuse. Ce rôle semble connu des élèves puisque M. le sollicite pour trouver le mot « quart ». L'enseignant intervient également pour s'assurer que les autres élèves peuvent suivre la présentation : il dessine un cercle plus grand au tableau pour que tous les élèves puissent voir la figure sur laquelle travaille M., il stoppe la présentation après un premier moment pour être sûr que tout le monde a compris la démarche de M. Tout se passe comme si le contrat stipulant le rôle de chacun, élève qui présente, autres élèves, enseignant, était clair pour tout le monde, et les interventions de l'enseignant n'entravent pas le déroulement de la présentation.

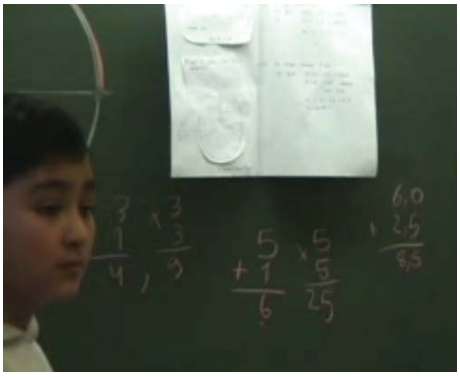
2 Compétences et connaissances mises en œuvre

M. poursuit la présentation de sa recherche :

*M. : alors j'ai trouvé ça bizarre alors quand même j'ai continué, alors j'ai fait 5+1 [écrit en même temps] ça fait 6, 5*5 ça fait 25 alors j'ai mis que ça ferait 6,0+2,5 est égal à 8,5 alors ça ferait 8,5*

Enseignant : Écris à la craie blanche s'il te plait.

M. : Alors j'ai pris un autre bout de ficelle et j'ai re-essayé le quart du gâteau, alors ça faisait 8,5 alors…



Nous prenons alors un temps de vérification : pour un cercle de rayon 3 cm, le quart de périmètre est de 4,7 cm, donc effectivement très proche de 4,9 cm (la mesure avec la ficelle est diffcilement aussi précise qu'une mesure d'un segment à la règle). Pour un cercle de rayon 5 cm, le quart de périmètre est de 7,9 cm. M. explique qu'avec son calcul il trouvait 8,5 cm, et qu'après en vérifiant avec la ficelle, il trouvait également 8,5 cm. Ici, l'erreur de mesure est plus grande. Nous pouvons faire l'hypothèse que M. a « envie » de retrouver 8,5 cm avec la mesure, pour confirmer son calcul, ce qui a pu l'amener à prendre une approximation sa mesure. Je demande alors aux étudiants d'expliquer pourquoi l'enseignant n'a pas corrigé cette erreur, et quelles compétences et connaissances sont mises en œuvre par M. dans ce début de recherche. Nous relevons des compétences transversales de l'activité mathématique (MENESR, 2015) : *chercher* (« S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées »), *représenter* (« Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points) »), *calculer* (« Calculer avec des nombres décimaux »), *communiquer* (« Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange ») et bien sûr des compétences et connaissances du domaine *nombres et calculs* relevant effectivement du cycle 3 (convertir 16 dixièmes en 1,6, additionner 5 et 1,6) et du domaine *grandeurs et mesures* (estimer un périmètre par une mesure, la recherche mène à la formule de la longueur d'un cercle). L'erreur de M. permet donc qu'il poursuive sa recherche et mette ainsi en œuvre ces compétences et connaissances, nous pouvons faire l'hypothèse que l'enseignant privilégie cela au détriment de la vérification de la mesure.

3 Les interventions des pairs

L'enseignant stoppe ensuite de nouveau l'exposé de M. et sollicite la classe (« Alors, qu'est-ce qu'il a trouvé en fait ? »). Un élève répond en hésitant beaucoup sur les termes : « il a trouvé une façon de calculer le [hésitations] périmètre du cercle ». L'enseignant reprécise alors le vocabulaire, et prend une minute pour reformuler la démarche de M., qui accompagne le discours de l'enseignant de gestes (il montre le quart de périmètre, les calculs effectués…). Il semble que M. se sent toujours concerné et est acteur dans cette présentation, même quand c'est l'enseignant qui parle. La présentation se poursuit, nous regardons encore un extrait, cette fois-ci je demande aux étudiants d'être attentifs à ce que font les autres élèves :

Enseignant : Et on retrouvait le même résultat [par le calcul et par la mesure]. Donc c'est peut-être un hasard, c'est peut-être un mode de calcul, c'est peut-être une règle qu'il a découverte. Il aurait découvert le moyen de calculer le périmètre d'un cercle avec le rayon. Ça serait bien parce que ça irait plus vite.

Élève [prénom non compréhensible] : C'était pour savoir, 3 cm c'était quoi ?

Enseignant : 3 cm c'est le rayon. Le rayon du cercle. Montre-nous le rayon du cercle [M. repasse le rayon déjà tracé]. Alors là c'est agrandi bien sûr au tableau, on est bien d'accord. Lucie ?

Lucie : Ben en fait tu pouvais essayer avec, ben avec 5, est-ce que tu as trouvé 6 virgule, euh enfin

M. : Oui

Enseignant : Donc avec ton bout de ficelle

Lucie : Parce que en fait faut

Enseignant : Attends, attends, c'est important

Lucie : Peut-être qu'avec le 3 ça marche, mais avec le 7 ça marchera pas. Si avec le 7 ça marche pas ça veut dire que c'est pas une règle, que si avec tous les nombres, ou chiffres ça marche, ben là

Enseignant : Très bien, donc là Lucie reprend la routine de travail que l'on a, on a l'habitude de dire si ça marche pour deux, trois exemples, il faut voir si ça marche pour deux ou trois exemples de plus avant de dire c'est une règle, donc

Lucie : Ou si c'est un hasard

Enseignant : Ou si c'est un hasard, tout-à-fait. Guillaume ?

Guillaume : Ben ouais c'est vrai parce que là tu as fait que avec des chiffres impairs, peut-être que si t'essayais avec des chiffres pairs ça marcherait pas.

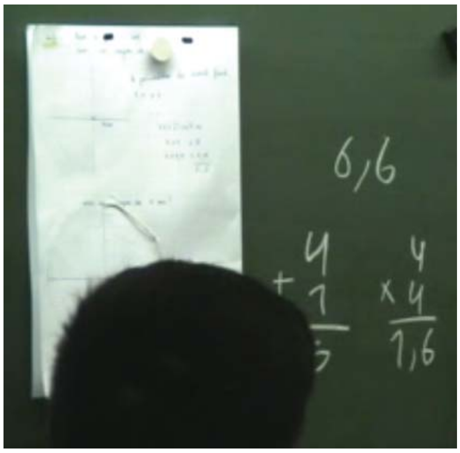
Enseignant : Alors répond à cette question là M..

M. : En fait moi j'ai fait de plusieurs façons mais à la fin là [il tourne les pages de sa recherche] là on n'a pas trouvé pareil.

Enseignant : Attends, au-dessus tu as essayé avec ?

M. : Avec 4 cm, c'est pareil.

Enseignant : Alors montre 4 cm, ça répond à la question de Guillaume qui a dit ça marche peut-être avec les nombres impairs mais pas pairs. Alors avec 4 cm qu'est-ce que tu as trouvé, écris-nous à la craie blanche.



M. : J'ai trouvé 6,6.

Enseignant : Donc avec la ficelle tu as trouvé 6,6, et par le calcul ?

M. : [en écrivant les opérations] j'ai fait 4 plus 1, 5 et 4 fois 4, 1 virgule 6

Enseignant : Alors en fait attends, c'est 4 fois 4 dixièmes hein, sinon 4 fois 4 ça fait 16 [Manil efface la virgule du résultat de son calcul] En fait c'est 16 dixièmes, c'est important ça.

M. : [en posant l'addition] Alors 5 plus 1 virgule 5

Enseignant : Non, 6

Les interventions de Lucie et Guillaume montrent qu'ils suivent la présentation de manière active, c'est-à-dire en mettant eux aussi en œuvre des compétences de recherche. Ils adoptent une position critique par rapport au travail de M. L'enseignant reprend la remarque de Lucie et la relie à une routine de travail de la classe, développée lors des recherches mathématiques. Cette routine consiste à essayer au moins quatre à six exemples avant de pouvoir parler de règle (il n'est pas très clair dans le discours de l'enseignant si six exemples suffisent à dire que c'est une règle ou à faire l'hypothèse qu'il pourrait y avoir une règle). La remarque de Guillaume va plus loin que cette routine, puisque celui-ci propose que les exemples ne soient pas choisis n'importe comment, mais que différentes caractéristiques des nombres soient représentées.

La séance se poursuit : M. dit finalement que pour un rayon de 6cm, « ça ne marche pas ». L'enseignant récapitule alors ce qu'on sait et propose aux élèves de travailler individuellement pour vérifier la proposition de formule de M. pour un cercle de rayon 6 cm. Toute la classe est donc occupée à la réalisation d'une tâche relevant bien du cycle 3 dans les domaines *géométrie* et *grandeurs et mesures*. La classe s'aperçoit que la formule de M. ne marche pas, trouve le quart de périmètre pour un rayon de 7 cm. L'enseignant récapitule en parlant d'une « machine » (derrière laquelle nous reconnaissons la notion de fonction), qu'il nomme « la machine de M. », qui au rayon associe le quart de périmètre. La question est alors de prévoir ce que va donner la machine pour un rayon de 9 cm. Plusieurs élèves font des propositions, deux sont retenues et M. a la charge pour la poursuite de sa recherche d'explorer ces deux pistes. L'enseignant conclut en disant qu'il pourra donner des indications si M. n'arrive pas à trouver la formule, parce que lui la connaît.

IV - MISE EN RELATION AVEC LA RECHERCHE DE D. LAHANIER-REUTER

L'inspecteur de circonscription qui a défendu le projet d'installation d'une équipe d'enseignants Freinet à l'école Hélène Boucher a posé deux principes : maintenir sa place d'école de quartier, et soumettre l'expérience à une recherche évaluative afin de mieux en comprendre les intérêts et les limites. La recherche en question a été confiée à l'équipe pluridisciplinaire THEODILE de l'Université Lille III, qui y a travaillé de 2002 à 2006 (Reuter, 2007). Parmi eux, Dominique Lahanier-Reuter, didacticienne des mathématiques, a notamment étudié ce dispositif de recherches mathématiques (voir notamment Lahanier-Reuter, 2005). Elle a d'abord cherché, comme d'autres membres de l'équipe, à identifier des particularités éventuelles des élèves de l'école H. B., à travers une comparaison avec des élèves d'autres établissements, sur la réalisation de tâches mathématiques, certaines accompagnées d'entretiens individuels (recueil de cent seize entretiens menés sur trois ans auprès des élèves des différents niveaux de l'école primaire du CP au CM2, dans l'école H. B. et dans une autre école, et recueil une même année de deux cent cinq productions d'élèves de CM1 et CM2, dans l'école H. B. et dans deux autres écoles). Ensuite, elle a cherché à travers des observations de classes ce qui pouvait correspondre à des différences constatées lors des tests comparatifs, et a retenu les résultats suivants (passages entre guillemets extraits de Lahanier-Reuter, 2005, pp. 63-64) :

- « [Dans les classes de l'école H.B., les erreurs] sont signalées, à un moment ou à un autre, par n'importe lequel des acteurs des situations observées (que son statut soit celui d'enseignant ou d'élève). Elles ne sont jamais dramatisées. » Lors de la présentation de M., une élève propose de mesurer le quart de périmètre en mesurant l'écartement de son compas d'un point du cercle à un autre point se trouvant à un quart de cercle de distance du premier. L'enseignant prend le temps d'écouter sa proposition, qu'elle vient exposer au tableau, et lui montre (et également aux autres élèves) la corde qu'elle mesure en fait ainsi. Et c'est finalement cette même élève qui, quelques minutes après, signale à une camarde qu'elle fait la même erreur qu'elle, montrant ainsi une conception de l'erreur comme un obstacle ponctuel à dépasser pour avancer, et non comme un « raté » de l'apprentissage (Astolfi, 1997).

- « [Une] multiplicité de rôles et des positions des élèves par rapport aux savoirs et aux savoir-faire auxquels [chaque élève] accède plus ou moins, puisque certains sont imposés et d'autres non, rend possible selon nous les postures réflexives observées ». Lors de la recherche étudiée, M. avait le rôle de celui qui expose, et nous avons pu remarquer qu'il était à l'écoute des remarques des autres élèves, cherchant à y répondre en argumentant sur son travail. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette écoute et cette réactivité sont notamment dues au fait que M. est lui aussi parfois dans le rôle de celui qui écoute et critique, rôle qu'il comprend alors d'autant mieux.

- « [Il existe] des sollicitations continuelles de la part du maître, ou des autres élèves, de conduites argumentatives ou explicatives ». Nous avons pu en analyser certaines lors de la recherche étudiée.

Les deux résultats suivants ne sont pas directement observables lors de la séance étudiée, ils constituent des limites du dispositif que je signale aux étudiants :

- « Les questions que décident d'explorer les élèves ne semblent pas toujours se constituer – malgré les interventions du maître ou de la classe – en questions disciplinaires […] Certains traitements des problèmes abordés lors de ces recherches semblent donc conférer davantage le statut de problèmes quotidiens […] aux questions traitées plutôt que celui de questions mathématiques. La construction du sens disciplinaire du dispositif demeure exposée, fragile et soumise à ces résistances. »

- « L'universalité de [certaines] conventions [par exemple le codage de propriétés géométriques] n'est peut-être pas suffisamment instituée en raison du fait que leur apparition dans l'espace de la classe est irrémédiablement attachée aux recherches ponctuelles et individuelles. »

V - CONCLUSION

Lors de la présentation de ma communication, comme lors de ma séance avec les étudiants, plusieurs personnes jugeaient le dispositif séduisant, notamment par l'investissement des élèves dans un travail mettant en œuvre des compétences de recherche, mais restaient sceptiques quant à la possibilité de voir toutes les notions du programme seulement à partir des recherches mathématiques. En fait, souvent, dans les classes Freinet, ce type de travail à partir de productions libres des élèves, s'accompagne de temps de travail individualisés sur des fichiers autocorrectifs qui couvrent l'ensemble du programme, notamment pour les mathématiques et le français. Par contre, le travail sur ces fiches se fait selon le rythme d'apprentissage de chacun, et certains élèves n'auront pas fait l'ensemble des fiches sur une année. Mais de qui parle-t-on quand on parle de « faire le programme » ? Est-on sûr que dans une classe où l'enseignant a proposé des séances couvrant l'ensemble des notions du programme tous les élèves les ont comprises ?

Selon N. Go, cette rupture avec une organisation des contenus d'apprentissage commune à tous les élèves est un véritable renversement :

> *En pédagogie Freinet, il n'y a pas de leçons programmées ni de progressions contrôlées : il y a une prolifération d'événements dans l'incertitude, organisés par le travail en coopération, où s'effectuent et se rencontrent des puissances à l'œuvre. (Go, 2009, p. 31)*

Ce renversement permet que les élèves soient « institués en position d'*auteurs* : auteurs de leurs propres tâches, et co-auteurs de la vie sociale dans la coopération » (ibid., p. 32). Il est normal qu'une telle rupture soit difficile à envisager, particulièrement pour des étudiants en formation. Les enseignants qui participent à la production de ressources pour l'ICEM sont souvent des enseignants expérimentés dans la pédagogie Freinet, et les dispositifs qu'ils présentent sont le fruit d'un long tâtonnement individuel et collectif, mais nous pouvons faire l'hypothèse que pour un enseignant même désireux de se lancer dans la pédagogie Freinet, cette rupture reste difficile à envisager et à mettre en œuvre concrètement.

D'autres remarques, également lors de ma communication comme lors des séances avec les étudiants, ont porté sur le rôle de l'enseignant dans le dispositif. Le fait que celui-ci ne prépare pas à l'avance les sujets des recherches est vu comme quelque chose pouvant le mettre en difficulté : il se retrouve fréquemment face à une situation qu'il n'a pas anticipée, ce qui nécessite effectivement une réactivité décrite par Go et al (2010) :

> *Il lui faudra à la fois identifier la nature de ces possibles à mesure qu'ils se font jour, disposer d'un arrière-plan épistémique pour cela, et contribuer à les faire apparaître, en mettant en œuvre une attention fine aux multiples moyens par lesquels les élèves cheminent (p. 184)*

Pour Go et al. (2010), un dispositif tel que celui des recherches mathématiques est un « dispositif d'autorisation », qui se distingue d'un « dispositif d'ingénierie » essentiellement par l'origine de la situation :

> *Dans un cas, c'est l'imagination créatrice des élèves qui la détermine (dans un contexte coopératif qui ne doit pas être sous-estimé), dans l'autre c'est l'imagination créatrice de l'ingénieur (chercheur ou enseignant) ou l'ingéniosité de l'enseignant. (p. 185)*

Selon ces auteurs, à chaque dispositif ses difficultés : pour le premier de « s'assurer que l'élève produit réellement des savoirs dans une situation qui lui appartient peut-être trop » (ibid., p. 186), pour le deuxième de « s'assurer que l'élève prend effectivement la responsabilité de l'étude dans une situation qui ne lui appartient pas » (ibid., p. 185). Ainsi, il ne s'agit pas de hiérarchiser ces dispositifs, mais bien d'utiliser les outils didactiques pour étudier leurs contraintes respectives

La didactique des mathématiques s'est pour l'instant peu intéressée à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques dans des classes pratiquant des pédagogies « alternatives », et *a fortiori* dans les classes Freinet. Elles me semblent pourtant être un terrain d'étude pertinent, non pas pour utiliser la recherche pour appuyer un militantisme qui n'a pas forcément besoin d'elle, mais pour mieux comprendre l'effet de ces choix pédagogiques sur l'apprentissage des élèves. D. Lahanier-Reuter conclut son article déjà cité par une appréciation plutôt positive du dispositif de recherches mathématiques, mais reste prudente :

> *Le choix de ne pas organiser l'enseignement mathématique en séquences didactiques unifiées par des objets d'enseignement, de reconstruire des temps didactiques particuliers à chacun des élèves, de leur conférer la responsabilité de leur objet d'étude semble avoir des conséquences intéressantes pour la construction des connaissances disciplinaires. (2005, p. 64)*

D'autres études restent donc à mener pour décrire cette construction des connaissances mathématiques dans les classes Freinet, tant du point de vue de l'activité des élèves que des pratiques des enseignants.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI J.P. (1997) *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris : ESF

BRAULT R., JACQUET R. & QUERTIER M. (2002) *Pour une méthode naturelle de mathématiques*. Nantes : Éditions ICEM.

BROUSSEAU G. (1998) *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*.

consulté le 30 janvier 2018 à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

BROUSSEAU G. (2011) La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, **5/1**, 101-104

CHARTIER A.M. (1999) Un dispositif sans auteur : cahiers et classeurs à l'école primaire. *Hermès : cognition, communication, politique*, **25**, 207-218.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'Été de La Rochelle « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques »,* 91-120. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand

GO N. (2009) La méthode naturelle de Freinet. *Le Nouvel Educateur*, **193**, 28-35

GO N. (2011) L'enfant auteur : pratiques d'émancipation. *Conférence d'ouverture au 50ème congrès ICEM*, Villeneuve d'Ascq, août 2011

Consulté le 11/09/2017 à https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/20198

GO N., HANNEBIQUE S., THOREL D. & THOREL M. (2010) Le dispositif dit de « recherches mathématiques » : analyse didactique d'une séance observée dans une classe de CM1 (9-10 ans) dans une école « Freinet ». *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **30/2**, 135-196

LABORATOIRE DE RECHERCHE COOPERATIVE (2015) *Des références pour une Méthode naturelle de mathématiques*. Nantes : Éditions ICEM.

LAHANIER-REUTER D. (2005) Enseignement et apprentissages mathématiques dans une école Freinet. *Revue Française de Pédagogie*, **153**, 55-65

LE BOHEC P. (2008) *Le texte libre mathématiques*. Nantes : Éditions ICEM.

MEN (2002) *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. BO hors-série n°1 du 14 février 2002

MEN (2013) *Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation*. BO n°30 du 25 juillet 2013, 81-89

MENESR (2015) *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*. BO spécial n°10 du 19 novembre 2015

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1997) Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères IREM*, **29**, 43-66

REUTER Y. (dir.) (2007) *Une école Freinet. Fonctionnements et effets d'une pédagogie alternative en milieu populaire*. Paris : l'Harmattan

THOREL D. (2007) Recherches mathématiques au cycle 2. *Le Nouvel Educateur*, **184**, 12-15

PRAXÉOLOGIES PROFESSIONNELLES ENSEIGNANTES, INCLUSION ET TRAVAIL EN PETIT GROUPE

Géraldine SUAU
Docteure, UNIVERSITÉ de LORRAINE
EA 4360 EPSAM/APEMAC
Geraldine.suau@univ-lorraine.fr

Résumé
La scolarisation des Élèves Reconnus Institutionnellement Handicapés (ERIH) est un nouvel enjeu de la culture professorale. Notre article propose, dans la continuité des recherches entreprises dans le projet Pratiques Inclusives en Milieu Scolaire (Assude, Perez, Suau, Tambone, 2014, 2015 ; Suau et Assude, 2016 ; Suau, 2016), d'interroger la forme d'étude « travail en petit groupe » qui peut apparaitre pour ces élèves comme condition d'accessibilité didactique - entendue comme une condition qui permet aux élèves d'avoir accès aux savoirs. À partir de cette forme d'étude « travail en petit groupe » et relativement à un type de tâche « donner une place à l'élève reconnu institutionnellement handicapé », nous rendons compte, à partir d'études de cas, des praxéologies professionnelles enseignantes (Chevallard, 1999, 2009). Pour cela, prenant appui sur deux séances ordinaires d'enseignement en mathématiques et sur les récits tenus par les enseignants, nous observons les phénomènes liés à la forme d'étude précitée.

I - INTRODUCTION

La mise en place d'une politique visant la scolarisation des élèves en situation de handicap n'est pas nouvelle en France, mais la loi n° 2005-102 du 11 février 2005 *pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* atteste d'un profond changement dans la prise en charge de ces enfants. Réaffirmée par la loi n° 2013-595 du 8 juillet 2013, loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République, qui déclare dans son article 2 : « Le service public d'éducation est conçu et organisé en fonction des élèves et des étudiants. Il veille à l'inclusion scolaire de tous les enfants, sans aucune distinction. ». Le rapport annexé à cette loi-cadre de 2013 précise : « Il convient aussi de promouvoir une école inclusive pour scolariser les enfants en situation de handicap et à besoins éducatifs particuliers. Le fait d'être dans la classe n'exclut pas de bénéficier d'enseignements adaptés et est, pédagogiquement, particulièrement bénéfique. Cette scolarisation au sein de l'école ou de l'établissement permet aussi aux autres élèves d'acquérir un regard positif sur la différence. ». En promouvant ainsi ce rapport de l'école à ces élèves, la politique française témoigne de son inscription dans un processus plus large. Mais dès lors, il se pose un certain nombre de questions sur la nature même d'une école inclusive et sur les pratiques associées (Armstrong, 2009). Cette scolarisation pourrait *a priori* apparaître comme « l'acmé de l'intégration scolaire et le sésame de l'inclusion » (Zaffran, 2015), mais la question se pose de savoir comment l'organiser. Elle constitue en effet un réel enjeu de la culture enseignante comme en témoignent les travaux de toute une communauté de recherche (Toullec & Assude, 2012 ; Perez & Assude, 2013 ; Zaffran, 2013). Enseigner auprès d'un ERIH ne va pas de soi pour les praticiens. D'abord, parce que les enseignants n'ont pas une culture de l'inclusion de par la construction même de leur métier qui s'est développé en dehors des questions liées au handicap. Ensuite, parce que les résistances mises en place sont nombreuses : l'absence de formation, la peur, le manque d'aménagements… (Mazereau, 2008, 2011), autant d'éléments ne favorisant pas l'accueil de ce nouveau public. Enfin, parce que les difficultés rencontrées s'inscrivent dans les différentes dimensions du métier, qu'il s'agisse d'une dimension sociale (les coopérations), d'une dimension pédagogique ou d'une dimension didactique. Dès lors, il nous semble important de contribuer à l'étude de ce champ de pratiques.

C'est pourquoi, nous choisissons de positionner notre recherche sur les pratiques et les discours d'enseignants de classe ordinaire qui accueille un ERIH et de questionner leurs praxéologies relativement à un type de tâche qui est décrit dans la littérature comme « l'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour "donner une place aux élèves", c'est-à-dire pour créer, à leur intention et à propos de chacun des thèmes étudiés, un *topos* approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer » (Chevallard, 1999). Ce type de tâche « donner une place à l'élève » apparaît d'autant plus important qu'il est requis pour permettre à chaque élève d'accéder au savoir et que son absence peut être source d'exclusion à l'interne de la classe pour l'ERIH. Notre question de recherche est alors la suivante : **quelles sont les praxéologies enseignantes qui permettent un accès au savoir pour les ERIH dans le travail en petit groupe ?**

II - CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du projet de recherche PIMS Lorraine-Provence (2012 – 2016) et dans le cadre de notre thèse (Suau, 2016) dont l'un des buts était d'étudier les pratiques et les discours des enseignants en milieu ordinaire dans des classes accueillant des ERIH. Ce dispositif a concerné six enseignantes. Pour étudier les pratiques et les discours des enseignants, il alterne des observations de classes, des entretiens et des analyses simples et croisées. Notre recueil de données est donc constitué de captations vidéo qui s'organisent en deux phases. Une première phase comprend des observations en classe, des entretiens *ante*, avant les séances qui permettent de repérer le projet de l'enseignante avec les objectifs de la séance, le déroulement prévu et l'organisation du travail ; des entretiens *post* séance qui permettent de recueillir des éléments sur l'écart repéré par l'enseignante entre ce qui a été prévu et ce qui a été effectivement réalisé (Schubauer – Leoni & Leutenegger (2002)). Une deuxième phase est consacrée aux analyses simples où l'enseignante, après visionnage de sa séance, choisit un épisode qu'elle trouve « remarquable » et qu'elle explicite au chercheur, et aux analyses croisées où une enseignante pair choisit un épisode de la séance qui fait l'objet d'un échange entre les deux professionnels. Pour cet article, nous avons sélectionné les données recueillies dans les classes de deux enseignantes N. et H..

Les éléments théoriques que nous convoquons sont issus du cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous utilisons la notion d'analyse praxéologique (Chevallard, 2010, 2014), dont nous rappelons les principes : « On nomme type de tâches *T* tout type d'activité pensé comme élémentaire en ce sens que l'on pourrait l'énoncer à l'aide d'un verbe d'action et d'un complémentent d'objet » (Ibid, 2014, p. 41) : « donner une place à l'élève » est un type de tâche. Tel est pour Chevallard, le point de départ de l'analyse praxéologique. Cette analyse s'appuie sur quatre principes : « toute activité humaine s'analyse en une succession de tâches, de divers types » ; ensuite « la réalisation d'un type de tâche suppose une technique τ, c'est-à-dire une *manière de faire* déterminée permettant d'effectuer des tâches de type *T* » ; troisième principe : « une technique est justifiée et rendue intelligible par un discours technologique, soit une technologie θ » ; enfin, quatrième principe, « la technologie est elle-même éclairée, justifiée par une théorie Θ » (Ibid, 2014, p. 42).

Les travaux de Assude, Perez, Suau et Tambone (2015) et de Suau et Assude (2016) sont aussi intéressants pour interroger les praxéologies relatives au type de tâche précité. Ils nous permettent de distinguer les notions de *topos*, de position et de rôle. Ainsi, les *topos* dans une institution donnée sont constitués par l'ensemble des places prévues et légitimées institutionnellement. La notion de *position* indique quant à elle la manière dont un acteur investit une certaine place institutionnelle. Il ne suffit pas de remplir les conditions pour occuper une certaine place mais il est nécessaire que l'acteur puisse « prendre position » dans cette place. Ainsi, les acteurs peuvent occuper un *topos* en ayant des positionnements différents : position haute, médiane ou basse selon leur investissement dans les actions. Enfin, la troisième notion, celle de *rôle,* indique les moyens par lesquels l'acteur peut prendre position ou un certain positionnement. Par exemple, tel professeur assume une position basse en ayant un rôle d'observateur du travail de l'élève.

Ainsi pour traiter les différentes traces récoltées et réaliser nos analyses, nous caractérisons les savoir-faire et les savoirs professionnels des deux enseignantes N. et H., en articulant l'analyse des techniques mises en œuvre par les enseignantes relatives au type de tâche T « donner une place à l'élève » avec l'analyse des discours sur les pratiques. Pour ce faire, nous avons fait le choix de nous situer dans une étude par cas individuels, caractéristique d'une approche clinique en sciences sociales, qui donne une primauté « de l'information et de l'observation portant sur la totalité des manifestations d'un être humain (…) placé en situation et en évolution » (Grawitz, 2015, p. 359). Ainsi, à partir des transcripts de séances de classes, des entretiens *ante* et *post*, des productions des élèves et des fiches de préparation, nous proposons pour chaque étude de cas, une présentation du contexte général, de la classe et des élèves observés, ainsi que le synopsis de la séance. Par synopsis, nous entendons dégager les phases de la séance (définition du jeu, travail en autonomie, mise en commun…), la temporalité de la séance et les modes de regroupement (collectif, individuel, petit groupe). Nous prenons dans notre recherche le synopsis comme une première structuration de la pratique qui « permet de commencer à saisir les grandes lignes du jeu didactique » (Sensevy, 2011, p. 258). Nous centrons pour l'essentiel notre analyse sur le travail en petit groupe. Nous réduisons ensuite les observations par rapport à chaque étude de cas en un récit à partir d'épisodes que nous avons choisis et décrits en fonction de nos outils théoriques, ce qui nous permet d'identifier les techniques relatives au type de tâche « donner une place à l'élève ». Nous passons ensuite à l'analyse des discours sur les pratiques. Pour cela, nous nous appuyons sur les transcripts des analyses simple et croisée des enseignantes N. et H. relativement à chaque situation. Et nous précisons les discours des techniques et les discours sur les techniques relatives au type de tâche « donner une place à l'élève » qui justifient, produisent, rendent intelligibles les techniques mises en œuvre, au sens de technologie de Chevallard.

III – DEUX ÉTUDES DE CAS

Dans cette partie, nous allons procéder à deux études de cas selon les deux temps explicités. Nous présentons d'abord la situation « Le robot » commune aux deux études de cas. Cette situation mathématique est relative à l'usage des nombres pour constituer une collection équipotente à une collection donnée. Ces séances ont été préparées en commun par les deux enseignantes H. et N. à partir de la description de la situation faite dans le manuel ERMEL CP (2005, pp. 60 – 64). Selon l'équipe ERMEL, l'objet de la situation « le robot » est d'amener les élèves à « prendre conscience que les nombres sont des outils efficaces pour mémoriser une quantité ; apprendre à les employer pour résoudre des problèmes de constitution de collections équipotentes à une collection donnée ; et développer la maîtrise des procédures de dénombrement » (ibid. p. 60). Cette situation est décrite comme une situation de recherche qui met les élèves face à une tâche complexe. Les deux enseignantes dans le cadre de l'entretien *ante* précisent également qu'elles visent l'usage d'une représentation écrite (écriture chiffrée du nombre) par l'éloignement temporel.

Il s'agit de recourir à un robot dessiné sur un quadrillage, avec des parties (bras, jambes, tête, tronc) qui sont bien différenciées. Chaque partie est constituée par un nombre différent de carrés. Les élèves doivent compléter le robot en dénombrant les carrés non colorés de chaque partie, puis en allant chercher ce nombre de carrés dans un lieu « le magasin » et en venant y coller ces petits carrés de couleur pour vérifier. Mais dans le cadre des deux séances organisées et des objectifs fixés, les enseignantes N. et H. attendent la production d'une trace écrite (séance 1) et une réutilisation de cette trace quand les élèves se rendront au magasin pour demander les carrés de différentes couleurs et compléter leur robot (séance 2). Les élèves disposent de deux voyages possibles pour ajuster leur collection (fiche de préparation).

En termes de matériel pour la séance 1, il y a un robot modèle au tableau et pour chaque groupe un robot incomplet, des feuilles blanches et une file numérique à disposition ; pour la séance 2, il y a des gommettes de couleur au magasin. L'une des variables de la situation porte sur le nombre de carrés non colorés à compléter qui est choisi en fonction du niveau des groupes d'élèves.

1. Étude de cas 1

Dans le cadre de cette étude de cas 1, nous avons filmé deux séances. La séance 1 Robot (S1R) a été filmée le 12 novembre 2013 et a duré 32 minutes. La séance 2 Robot (S2R) a été filmée le 14 novembre 2013 et a duré 51 minutes. Nous avons mené un entretien *ante* commun aux deux enseignantes, de 16 minutes, le 12 novembre 2013. L'entretien *post* a duré 7 minutes après la séance 1 Robot (S1R) et 7 minutes après la séance 2 Robot (S2R). L'analyse simple s'est tenue le 25 avril 2014 et elle a duré 12 minutes. L'analyse croisée s'est faite le même jour avec les deux enseignantes N. et H. sur un temps de 6 minutes.

1.1 Présentation du contexte

Dans cette classe de CP de 21 élèves, nos observations portent sur Orlane, une élève ayant un retard mental moyen, reconnue par la Maison Départementale des Personnes Handicapées (MDPH). Orlane est décrite comme ayant des difficultés d'apprentissage, ce qui amène l'enseignante à un choix des élèves du groupe d'Orlane qu'elle décrit de la façon suivante : « *on va l'intégrer à un groupe qui l'accepte bien, qui la respecte et qui l'aide à travailler* » (Extrait 4A, *ante*, Tdp. 15).

Le groupe d'Orlane est constitué de trois autres élèves : Ziad, Nina et Florien. Il y a 6 groupes dans la classe. Nous présentons ci-dessous le synopsis des deux séances (S1R et S2R) :

Temps	Les phases de la séance	Mode de regroupement
0 – 04 min	**Phase 1**/ Rappel de la séance précédente et Consigne pour la séance	Collectif
04 – 32 min	**Phase 2/** Travail en autonomie de chaque groupe	Petits groupes

Tableau 1. Synopsis de la séance de l'enseignante N. situation Robot 1 (S1R)

Temps	Les phases de la séance	Mode de regroupement
00 – 11 min	**Phase 1** / Rappel des procédures de la situation et installation des conditions matérielles	Collectif
11 – 44 min	**Phase 2** / Travail en autonomie de chaque groupe	Petit groupe
44 – 51 min	**Phase 3 /** Mise en commun et institutionnalisation	Petit groupe (mais l'enseignante s'adresse au collectif)

Tableau 2. Synopsis de la séance de l'enseignante N. situation Robot 2 (S2R)

1.2 Analyse des techniques de N. relatives au type de tâche « donner une place à l'ERIH »

Dans le groupe d'Orlane, au cours de la séance 1, les tâches sont résolues. Les élèves du groupe ont bien dénombré le nombre de carrés dont ils avaient besoin pour le robot et produit une trace écrite. En effet, chacune des parties du corps est associée à une couleur et à un nombre. La couleur bleue (un point bleu) sur la feuille blanche est associée au nombre 12 et représente la tête. La couleur verte (un trait vert) est associée au nombre 17 et représente les jambes ; la couleur rouge est associée au nombre 13 et représente les bras. La couleur jaune est associée au nombre 13 (il est attendu 14) et représente le corps.

Ce qui est attendu :
Pour les jambes – vert : 17
Pour les bras – rouge : 13
Pour le corps – jaune : 14
Pour la tête – bleu : 12

Illustration 1. Robot du groupe d'Orlane, Ziad, Florien et Nina (SR1)

Dans la séance 2, le robot est complété, mais il y a eu des erreurs pour lire les nombres écrits en chiffres et les associer aux parties du corps ; les élèves ayant choisi d'associer les parties du corps à des couleurs et n'ayant plus leur robot (l'objet de la séance 2 est notamment une réutilisation de la trace écrite réalisée en séance 1), ils ne savent plus à quoi correspondent les nombres écrits sur leur feuille. Ziad ne demande pas 12 carrés pour la tête, mais 11 carrés, ce qui explique le décalage avec la production finale ; il en est de même pour les carrés des jambes. Nina, quant à elle, lit ce qui est écrit sur la feuille blanche et demande bien 13 carrés jaunes, mais il en manque un, puisque le corps du robot était constitué de 14 carrés. Les élèves ajustent la collection en laissant une nouvelle trace écrite notamment au niveau du nombre de gommettes du corps, de la tête et des jambes.

Ce qui retient notre attention, dans ces deux séances, porte sur la question du partage des responsabilités entre les élèves du groupe et sur les différents empêchements produits ne permettant pas à l'ERIH de prendre position dans son *topos*.

Dans le groupe, Ziad est un élève qui prend beaucoup de place dès le départ en récupérant d'abord la « feuille robot », ensuite la feuille blanche sur laquelle le groupe doit prendre des notes et enfin en légitimant son action, soit par le jeu du plouf plouf, en se distribuant les rôles : « je vais faire un plouf, plouf d'accord ? », soit en sollicitant l'enseignante pour avoir son accord : « je peux avoir une feuille blanche ? ». Une fois en possession des objets du milieu, c'est Ziad qui prend le rôle de celui qui dénombre l'ensemble des parties du robot et qui légitime le rôle de Florien en tant que scripteur sur la feuille blanche, en explicitant même à l'enseignante que Nina refuse ce rôle de scripteur à Florien : « c'est Florien qui note et Nina, elle veut (aussi), c'est Florien qui note ». Ainsi en s'attribuant tous les objets du milieu et en ne partageant pas la responsabilité du jeu, Ziad occupe tout le *topos* d'élève, il occupe un *topos* plein, ce qui ne laisse que peu de place aux autres élèves du groupe. Florien, autre élève du groupe prend la place qui lui est attribuée par Ziad, avec un rôle de scripteur sur la feuille blanche. Nina, choisit de se confronter à Ziad pour avoir une place. Quant à Orlane, elle se retire très tôt de la situation, n'étant ni acceptée, ni capable de se confronter à Ziad. Cela se traduit notamment par ses nombreuses absences du groupe. L'enseignante dans l'entretien *post* signale le fait que chaque fois qu'elle « *vient dans le groupe, l'élève n'est pas là* ». C'est ce qui l'amène à dire que le « *groupe n'a pas fait son travail de portage* » qu'elle avait envisagé avant la séance, dans le cadre de l'entretien *ante*. Ainsi le *topos* plein d'un élève (Ziad) dans le travail en petit groupe peut empêcher que les autres élèves prennent position et donc empêcher une accessibilité au savoir en jeu.

Mais nous pouvons cependant faire l'hypothèse, que les différentes positions de l'enseignante et ses régulations dans le groupe auraient été susceptibles de permettre un partage des responsabilités dans le jeu en contexte. Or dans cette étude de cas, les différentes positions prises par l'enseignante ne suffisent pas à réduire le *topos* plein de Ziad et à permettre une adhésion d'Orlane à la situation. En début de situation, l'enseignante dans ce groupe, choisit d'occuper toute la place, ce qui va réduire considérablement le *topos* de l'élève Ziad. Elle choisit de le faire en régulant le milieu et en associant « discours » et « non verbal » comme par exemple :

- « *bon pour l'instant on va les mettre de côté* » et elle enlève les feuilles blanches ;
- « *le premier problème c'est de compter les carreaux qui manquent* » et elle remet la feuille robot au centre du groupe et se penche sur cette feuille pour montrer qu'il faut dénombrer. L'enseignante accompagne les élèves en montrant elle-même avec ses doigts qu'il faut compter. Par ce moyen, elle rappelle une technique aux élèves qui est celle du pointage pour dénombrer ;
- ensuite en disant « *je ne vous redonne pas le robot tout de suite, vous irez d'abord au magasin* » puis elle cache la feuille robot sous son bras, ce geste n'était pas prévu, mais c'est pour elle un moyen d'indiquer qu'ils n'auront pas la feuille robot à la séance 2 et qu'ils ne pourront donc pas dénombrer à nouveau.

Ainsi le discours de l'enseignante, associé au non verbal (les gestes), oblige tous les élèves à être là dans une position d'observation. Mais dès qu'elle redonne la responsabilité du jeu et qu'elle se met dans une position de retrait, l'élève Ziad reprend toute la place. Nous repérons à chaque fois qu'elle revient dans le groupe, son insistance à leur demander de « *se débrouiller* » pensant que les élèves pourront réguler leurs *topos* respectifs, ce qui ne se passe pas. Alertée également par les absences répétées d'Orlane de son groupe et son implication dans la situation, l'enseignante interpelle directement le groupe en insistant à quatre reprises sur ce que Orlane a fait : « *et alors, elle a fait quoi Orlane ?* ». Sans réponse des élèves du groupe, elle décide de lui attribuer un rôle : « *Orlane, elle pourrait peut-être écrire 17 ?* », ce qui contraint le groupe et amène l'acceptation de Ziad qui dit « *bon d'accord* ». Mais l'enseignante se rend compte que le rôle est déjà attribué à Florien et demande à Orlane « *tu veux faire quoi Orlane ?* ». En faisant cela, sans attribuer un rôle explicitement à cet élève, elle empêche Orlane de prendre position dans son *topos* d'élève, car Orlane est trop éloignée de la situation et ne peut que répondre : « *moi, j'ai une idée* » sans pouvoir la préciser. L'enseignante se remet en retrait sans avoir donné un rôle à Orlane et en renvoyant à nouveau la responsabilité au groupe : « *ben vous en parlez ensemble* », ce qui finalement ne permet pas à Orlane de prendre position dans son *topos* d'élève. La régulation entre les élèves, souhaitée par l'enseignante, ne fonctionne pas.

Dans la séance 2, les élèves du groupe Ziad, Nina et Florien, choisissent de prendre l'ensemble des rôles, celui qui va au magasin, celui de colleur et celui qui ajuste la collection. Aucun de ces trois élèves ne partage la responsabilité du jeu et n'aide Orlane à s'y inscrire. Orlane est même empêchée de prendre position à plusieurs reprises par les élèves du groupe. Elle ne peut ni se rendre au magasin ni coller les gommettes ; un des élèves lui précisant qu'elle n'a pas de place : « *toi tu fais rien* », ou encore lui enlevant le matériel - la colle - nécessaire à la réalisation de la tâche.

Dans cette séance, l'enseignante a plusieurs rôles. D'abord au magasin, elle distribue les pochettes de gommettes sans intervenir ; ensuite, elle choisit un rôle d'observation et d'analyse des productions avant une mise en commun et une institutionnalisation. En faisant cela, elle se conforme à ce qui a été décidé dans le cadre de la préparation des séances mais elle ne permet pas à Orlane de prendre position dans son *topos* d'élève, alors que celle-ci a fini par réussir à coller les gommettes jaunes. En effet, elle aurait pu réguler dans le groupe pour que Orlane puisse prendre position dans le rôle de colleur ou encore renforcer le rôle que Orlane essaie de prendre quand elle vient lui signaler qu'il manque une gommette jaune sur le robot, en lui demandant de vérifier et d'ajuster. À la place, elle lui demande de retourner dans son groupe avant la mise en commun : « *Orlane, va dans ton groupe* »... En choisissant de renvoyer au collectif pour institutionnaliser les erreurs (erreur de comptage, erreur de lecture du nombre écrit, non utilisation de la trace écrite) et sans re-solliciter l'élève dans le cadre de la phase 3, Orlane est empêchée de prendre position.

1.3 Analyse des discours de N. sur les techniques mises en œuvre

Dans cette section, nous continuons à nous intéresser à l'identification des praxéologies professionnelles, en nous appuyant sur les analyses simple et croisée. Les éléments repérés par l'enseignante N. dans le cadre de cette analyse simple portent pour l'essentiel sur les places respectives des élèves dans le groupe. Elle choisit d'abord d'interroger la place de Orlane dans le groupe en choisissant un épisode qui pour elle peut être trompeur s'il est décontextualisé :

> *Enseignante N. : J'ai choisi ce moment-là car on voit Orlane qui est l'enfant différente, qui manifeste sa joie de faire quelque chose avec le groupe et l'objectif, mon objectif hormis l'apprentissage,* ***c'était qu'elle s'implique dans le groupe, qu'elle prenne sa place*** *et* ***qu'elle apprenne quand même quelque chose des autres****. Donc quand on voit ce passage-là, on se dit chouette, c'est réussi. Voilà* (*Extrait 4J, AS, Tdp. 5*)

En effet, elle repère que cette séance montre la difficile prise de position de Orlane par rapport aux enjeux de savoir, avec une élève peu présente physiquement dans le travail de groupe. Ceci l'amène à interroger ce qu'elle avait prévu pour ce groupe, soit la technique de régulation entre pairs : « *ce que j'attendais de ces enfants-là* » et a affirmé que cela n'a pas fonctionné : « *le groupe ne l'a pas intégrée du tout* ».

Elle justifie cela, à plusieurs reprises par la place d'un autre élève Ziad : « *C'est lui qui a mené le groupe* » et elle ajoute : « *Il a vraiment pris la main sur tout le groupe* ». En disant cela elle montre qu'elle repère que le *topos* plein de Ziad empêche certains élèves du groupe de prendre position dans les différents rôles possibles de la situation.

Elle exemplifie encore cela par rapport à une autre élève du groupe, Nina : « *même la petite Nina* ». C'est parce qu'elle repère que Nina, elle non plus, ne peut prendre position : « *la petite Nina qui a eu de bonnes idées* » qu'elle explique qu'elle a dû réguler en contexte entre les élèves du groupe en disant : « *il a fallu que j'intervienne* ». C'est ce qui là d'ailleurs permet au groupe d'associer des couleurs et des nombres sur la feuille blanche, suite à la prise de position de Nina dans le groupe.

Elle pointe également la régulation faite pour donner une place à Orlane, notamment sur la séance 1, où l'élève, suite à son intervention, met un trait vert sous le nombre 17.

> *Enseignante N. :* ***Je suis intervenue une première fois, à un moment pour demander ce qu'a fait Orlane****. Voilà, elle n'avait pas trop participé et* ***si elle est autorisée au dernier moment à colorier en vert****, colorier ou coller les petits tickets verts,* ***c'est parce que j'ai demandé à ce qu'elle fasse quelque***

chose… (Extrait 4J, AS, Tdp. 7).

Dans le cadre de l’analyse croisée, l’enseignante H. choisit un extrait dans la séance 2, qui porte également sur la question du partage de responsabilité à l’intérieur du groupe et sur la difficulté pour Orlane à prendre position dans son *topos* d’élève. C’est sur cette question des places dans le groupe que l’échange entre les deux enseignantes s’engage, reconnaissant la difficile prise de position pour Orlane, l’absence de régulation entre pairs dans le groupe et le justifiant par un *topos* trop important de Ziad.

2. Étude de cas 2[1]

La séance 1 Robot (S1R) a été filmée le 12 novembre 2013 et a duré 28 minutes. La séance 2 Robot (S2R) a été filmée le 4 décembre 2013 et a duré 1 heure 11 minutes. L’entretien *post* a duré 10 minutes après la séance 1 Robot (SR1) et 7 minutes après la séance 2 Robot (SR2). L’analyse simple s’est tenue le 25 avril 2014 et elle a duré 4 minutes. L’analyse croisée s’est faite le 15 décembre 2014 avec les deux enseignantes N. et H. sur un temps de 4 minutes.

2.1 Présentation du contexte

Dans cette classe de CP de 19 élèves, nos observations portent sur Mathias. Ce dernier est décrit par l’enseignante comme ayant un besoin d’aide pour fixer son attention. La classe est partagée en cinq groupes de quatre élèves, sauf pour un groupe où ils sont trois. Les groupes sont constitués par niveau. Le groupe de Mathias est composé de trois autres élèves : Tom, Antoine et Lisa. Selon l’enseignante, Mathias ne présente pas de difficultés d’apprentissage, mais il semble avoir des difficultés à travailler en groupe, un robot supplémentaire est par ailleurs prévu par l’enseignante.

Concernant l’organisation des deux séances, il est important de noter que la séance 2 de l’enseignante H. s’est faite trois semaines après la première séance, ce qui n’était pas le cas pour la séance 2 de l’enseignante N. qui a été réalisée deux jours après la première séance. En effet, l’un des objectifs des deux enseignantes pour cette séance visait l’éloignement temporel de façon à « *amener les élèves à créer une trace écrite du dénombrement réalisé et pas seulement à retenir un nombre dans leur tête* » (entretien *ante, Tdp.* 2). Nous présentons ci-dessous le synopsis des deux séances :

Temps	Les phases de la séance	Mode de regroupement
0 – 09 min	**Phase 1** / Introduction des règles progressivement, consignes, présentation du matériel et mise en groupe	Collectif Petits groupes
09 – 27 min	**Phase 2 /** Travail en autonomie de chaque groupe	
27 – 28 min	**Phase 3 /** Récupération des robots par l’enseignante et rappel de dernières consignes	Petits groupes

Tableau 2. Synopsis de la séance de l'enseignante H. situation Robot 1 (SR1*)*

Temps	Les phases de la séance	Mode de regroupement
00 – 14 min	**Phase 1 /** Consignes et organisation du milieu	Collectif
14 – 48 min	**Phase 2 /** Travail en autonomie de chaque groupe	Petits groupes
48 – 1 h 11 min	**Phase 3** / Mise en commun et Institutionnalisation	Collectif

Tableau 3. Synopsis de la séance de l'enseignante H. situation Robot 2 (SR2)

Les épisodes choisis se passent dans la phase d’introduction des consignes en mode collectif (phase 1) et dans la phase de travail du groupe de Mathias (phase 2) de la séance 1 ; mais aussi dans la phase 2 (travail du groupe de Mathias) de la séance 2. Le travail en groupe est l’une des formes de travail normalement utilisée par cette enseignante.

[1] Une partie de cette étude de cas a fait l’objet d’une contribution (Suau & Assude, 2016), nous en reprenons certains éléments en lien avec notre objet d’étude, notamment sur l’analyse des techniques.

2.2 Analyse des techniques de H. relatives au type de tâche « donner une place à l'ERIH »

Dans la séance 1, une importance est donnée à l'organisation du travail en groupe. Cette importance se distingue à travers différents moments. D'abord, par la consigne, que l'enseignante H. donne en collectif. L'enseignante va insister à trois reprises sur cette notion : « *il va surtout falloir vous organiser* », « *vous organiser dans votre groupe* ». Ensuite, lorsque les élèves sont en petits groupes, l'enseignante reviendra sur cette notion d'organisation dans chacun des groupes notamment dans celui de Mathias, où elle rappelle aux quatre élèves la nécessité de s'organiser entre eux : « *je vous donne un papier mais, par contre, il faut vous organiser pour compter* ». Cette organisation concerne plusieurs tâches du travail du groupe. Les différentes tâches ne sont pas précisées par l'enseignante qui laisse ainsi au groupe la responsabilité de l'organisation du travail. Par ailleurs, dans le cadre de l'entretien *ante*, dans le discours de l'enseignante H., nous relevons également la présence de cette question d'organisation et le fait qu'elle a repéré que, pour elle, Mathias n'a pas de difficulté d'apprentissage, mais une difficulté à travailler en groupe. On pourrait penser, par cette anticipation, que l'enseignante a le souci de vérifier si cette organisation est bien mise en place. Mais nous observons que la régulation faite par l'enseignante H. dans le groupe est tardive, car la tâche est déjà réalisée. L'enseignante est dans l'action et elle pense qu'ils se sont organisés en groupe, qu'il y a quatre choses à compter et que chacun a pris une partie du corps du robot (les bras, les jambes…). Mais quand elle demande au groupe de Mathias ce qu'il a fait, elle se rend compte que Mathias n'a rien fait. Elle fait le constat et elle accepte que Mathias ait pris cette position d'observateur et pas celle d'acteur de la tâche proposée. Pour Mathias, comme pour les autres, il n'y a pas d'organisation explicite car l'enseignante laisse cette responsabilité au groupe. Les trois autres élèves prennent une position d'élève en assumant plusieurs rôles, soit le rôle de celui qui dénombre, soit celui qui note et code (ici en représentant les parties du corps) sur la feuille blanche, soit celui qui vérifie en cochant. Or ce n'est pas le cas pour Mathias qui n'arrive pas à prendre un rôle dans les tâches à accomplir ; soit il n'ose pas prendre la place, soit il laisse faire les autres mais il n'est pas empêché comme dans l'étude de cas 1. Il apparaît là une difficulté dans la régulation du milieu (régulation mésogénétique) par l'enseignante. Ainsi, nous pouvons dire qu'anticiper la difficulté et proposer au groupe de s'organiser à plusieurs reprises dans le collectif et le petit groupe n'est pas suffisant pour que cela puisse fonctionner pour tous les élèves.

Le groupe de Mathias fonctionne dans le sens de la tâche, celle-ci étant résolue. Le groupe a représenté les différentes parties du corps et les a associées à un nombre.

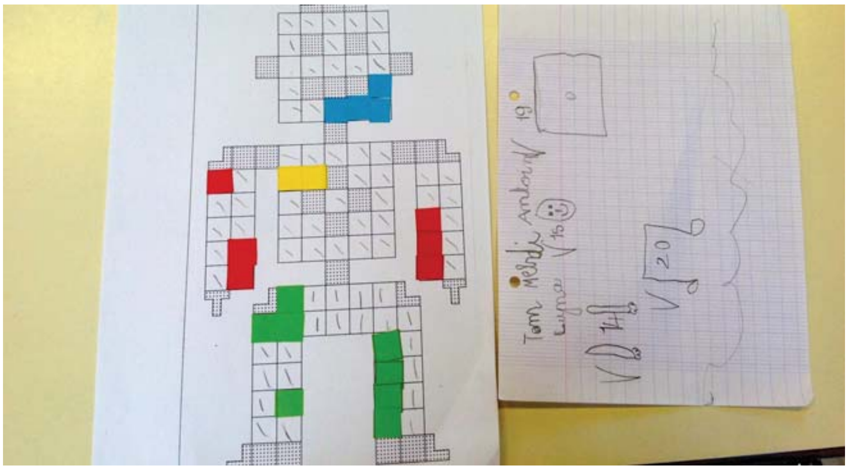
	Ce qui est attendu : Pour la tête : <u>16</u> carrés bleus Pour les bras : 14 carrés rouges (7 + 7) Pour le corps : 19 carrés jaunes Pour les jambes : 20 carrés verts

Illustration n° 2. Robot du groupe de Mathias, Tom, Antoine et Lisa séance 1 (SR1)

En effet, ce qui semble le plus important pour les élèves, c'est d'avoir résolu la tâche ce qui ne pose pas de problème dans ce groupe (même si les élèves se sont trompés pour le nombre de carrés de la tête du robot - ils ont mis 15 au lieu de 16). Les élèves du groupe, Tom, Antoine, Lisa ont dénombré les carrés dont ils avaient besoin pour le robot.

Dans la séance 2, dans le travail en petit groupe, Mathias est aussi en retrait de la situation ; il ne rentre pas dans la tâche. Alors même que l'enseignante intervient à deux reprises dans le groupe et sur le milieu pour permettre à tous les élèves du groupe de participer au jeu. Il ne prend pas une position d'élève relativement à ce savoir.

2.3 Analyse des discours de H. sur les techniques mises en œuvre

L'enseignante H. dans l'analyse simple choisit un extrait dans la séance 2 où Mathias est dans l'activité, car suite à cette séance elle explique qu'elle s'est demandée si Mathias avait pu prendre position, compte tenu du fait qu'elle était à l'écart en tant que marchande (rôle). C'est ce qui l'amène, explique-t-elle, à observer spécifiquement cette séance. Elle le repère une première fois au moins visuellement dit-elle dans le groupe :

> *Enseignante H. : … Qu'est ce qu'il fait exactement. Je ne sais pas. Mais il se penche dessus et il a l'air de pointer, de compter, il fait des choses sur ses doigts.* ***On ne sait pas exactement ce qu'il fait, mais on a l'impression du moins visuellement qu'il est accroché à l'activité. Voilà*** *(Extrait 4L, AS, Tdp. 1).*

Mais surtout dans la phase en collectif où il fournit une réponse qu'elle qualifie de pertinente. C'est ce qui l'amène à s'interroger sur les formes d'étude qu'elle peut utiliser :

> *Enseignante H. :* ***Mais je pense qu'il était dans l'activité, car dans la mise en commun****, … Je leur ai alors demandé comment ils auraient pu faire pour éviter cette erreur. Ils ont proposé des choses comme « il n'avait qu'à gommer » etc. et Mathias a proposé : il n'avait qu'à entourer le nombre. Bon, alors c'était pertinent quoi. Et là, il était dans l'activité, puisqu'il m'a répondu et bien répondu. Voilà. Mais ça me questionne toujours* ***sur le travail de groupe, l'intérêt du groupe****. Et je me rends compte pour Mathias que ça n'a pas d'intérêt au-delà de deux… Maintenant, avec de l'expérience (Extrait 4L, AS, Tdp. 5).*

Elle repère également les différentes régulations qu'elle a faite dans le groupe sur le milieu, en remettant la feuille robot, la colle, au centre et « *je sépare, je les change de place* », c'est ce qui permet selon elle qu'Antoine se mette dans l'activité et que Mathias s'y intéresse : « *il n'y a qu'à ce moment-là, où j'ai vu Mathias se rapprocher du groupe et de s'intéresser à ce qui se passait* ». Elle pointe également que Tom et Lina sont dans le jeu, dans une position plutôt haute « *c'est Tom qui gère. Lina, elle gère aussi la petite fille parce que elle a envie de participer donc quoi qu'il arrive, même si Tom a pris un peu le dessus* » et que cela l'amène également à intervenir (le partage des responsabilités n'étant pas présent pour l'enseignante H.).

IV – DISCUSSION – CONCLUSION

Dans cette analyse de deux cas didactiques, nous nous sommes employée à expliquer et à comprendre à partir de la forme d'étude « travail en petit groupe » et relativement à un type de tâche « donner une place à l'élève reconnu institutionnellement handicapé » les praxéologies professionnelles de deux enseignantes. Dans l'étude de cas 1, l'analyse des deux séances montre que l'absence de partage des responsabilités entre les élèves du groupe et les différents empêchements produits ne permettent pas à l'ERIH de prendre position dans son topos ou que très faiblement. Ainsi, contrairement à l'énonciation de l'enseignante dans l'entretien *ante « on va l'intégrer à un groupe qui l'accepte bien, qui le respecte et qui l'aide à travailler »*, le travail en groupe ne permet pas de favoriser la participation de tous les élèves. Ainsi, cette forme d'étude n'apparaît pas, dans ce contexte, comme une condition permettant à l'ERIH de prendre position dans son *topos* d'élève, malgré un certain nombre de régulations mises en œuvre par l'enseignante. Dans l'étude de cas 2, l'analyse de ces deux séances montre que le contrat didactique différentiel relatif à Mathias – une attente de socialisation - dans cette situation a empêché l'enseignante d'observer finement le travail du groupe et celui de Mathias et que celui-ci n'a pas réussi à prendre position dans son *topos* d'élève.

L'analyse des discours dans ces deux études de cas nous a également permis de mettre en évidence que les deux enseignantes repèrent toutes les deux l'absence de partage de responsabilité dans le groupe entre les élèves (étude de cas 1 et 2) mais aussi que la question du *topos* vide de l'ERIH et celle du *topos* plein d'un autre élève dans le groupe est centrale (étude de cas 1). Concernant l'enseignante N., celle-ci repère précisément que les élèves acceptent un rôle suite aux régulations inter-topogénétiques mises en œuvre ; ces dernières permettant de donner une place à deux élèves qui n'arrivent pas à prendre position. Elle repère également que les régulations entre pairs n'ont pas fonctionné alors que, pour elle, le milieu était organisé en ce sens. Son discours s'inscrit davantage sur les rôles que les élèves acceptent de prendre ou de ne pas prendre suite à ses régulations. Ainsi, dans son discours l'enseignante N. explicite la praxis mise en œuvre en l'associant à la fois aux techniques de régulation, mais aussi aux places que les élèves choisissent de prendre, qu'ils sont empêchés de prendre ou de ne pas prendre dans le travail en petit groupe. Les éléments repérés sont pour elles explicatifs de la difficile prise de position de l'ERIH et de son exclusion des apprentissages. Concernant l'étude de cas 2, l'enseignante met au centre de son discours le retrait de l'ERIH dans le travail de groupe et son adhésion lors de la mise en commun. Concernant le travail en groupe, la question des places entre les élèves est fortement présente dans le discours de cette enseignante. Elle justifie la mise en œuvre de régulations mésogénétiques (intervention sur le milieu) pour donner une place à Antoine et à Mathias notamment en raison des positions surplombantes des deux autres élèves du groupe. L'enseignante H. repère également la mise en activité d'Antoine suite à ses régulations, ce qui pour elle n'est pas le cas de Mathias.

Ainsi, par ces travaux, nous interrogeons le travail en petit groupe qui peut apparaître dans la culture professorale – notamment dans l'accueil des ERIH - comme une forme d'étude qui constitue en soi une condition d'accessibilité pour les élèves reconnus institutionnellement handicapés. Or l'analyse des deux études de cas permet de montrer que cette forme d'étude peut empêcher l'accessibilité d'un élève au savoir s'il n'arrive pas à prendre la position d'élève et à assumer au moins un rôle dans l'accomplissement des tâches, soit parce qu'il peut être empêché (étude de cas 1), soit qu'il n'arrive pas à prendre position dans le groupe (étude de cas 2). D'une conception première – le travail de groupe facilitateur de l'inclusion – il devient une forme d'étude comme une autre, à questionner sur les conditions de sa mise en œuvre dans la classe.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARMSTRONG F. (2009) « Handicap et scolarisation en Angleterre : Une politique éducative qui s'appuie sur les « besoins spécifiques » des élèves », *Journées d'étude « Le handicap à l'école : travailler ensemble »*, INRP (les 11 et 12 mai 2009), téléchargeable : http://www.inrp.fr/manifestations/formation/handicap-ecole

ASSUDE T., PEREZ J.-M., SUAU G., TAMBONE J. & VERILLON A. (2014), Accessibilité didactique et dynamique topogénétique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34.1, pp. 33-57

ASSUDE T., PEREZ J.-M., SUAU G. & TAMBONE J. (2015) Conditions d'accessibilité aux savoirs (pp. 209-222). In Zaffran, J., (Éd.). *Accessibilité et handicap*, Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(3), pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (2009) La TAD face au professeur de mathématiques. Communication au séminaire DiDiST de Toulouse. téléchargeable : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

CHEVALLARD Y. (2010) La didactique, dites-vous ? *Education & didactique*, vol. 4, n° 1, pp. 139-147.

CHEVALLARD Y. (2014) Des didactiques des disciplines scolaires à la didactique comme science anthropologique, Sur un obstacle épistémologique, psychologique et institutionnel, *Education & didactique*, vol. 8, n° 1, pp. 35-43.

GRAWITZ M. (2001) *Méthodes des sciences sociales*. Onzième édition (2015). Paris : Editions Dalloz

MAZEREAU P. (2008) *De l'intégration à la scolarisation des élèves handicapés : état des lieux et nouveaux besoins de formation des enseignants, Éclairages sur la situation européenne*. Recherche réalisée pour l'UNSA éducation avec le concours de l'IRES.

MAZEREAU P. (2011) Les déterminants des adaptations pédagogiques en direction des élèves handicapés chez des enseignants généralistes et spécialisés, in Gombert, A. & Guedj, D., (Dir.). L'inclusion en classe ordinaire des élèves en situation de handicap. *Travail et formation en éducation* n° 8, téléchargeable : http://tfe.revues.org/1562

PEREZ J.-M. & ASSUDE T. (2013) *Pratiques inclusives et savoirs scolaires : paradoxes, contradictions et perspectives*. Nancy : Presses Universitaires de Nancy.

SCHUBAUER-LEONI M.-L. & LEUTENEGGER F. (2002) Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. In Leutenegger F. et Saada-Robert M., (Eds). *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation*. Louvain la Neuve : De Boeck. Raisons éducatives, pp. 227-251.

SENSEVY G. (2011), *Le sens du savoir*. Bruxelles : De Boeck

SUAU G. & ASSUDE T. (2016) Pratiques inclusives en milieu ordinaire : accessibilité didactique et régulations. *Carrefours de l'éducation*, 42, pp. 155-169.

SUAU G. (2016) *Pratiques inclusives en mathématiques d'enseignants de classe ordinaire dans le premier degré*, thèse de doctorat de psychologie, Université de Lorraine, Metz.

TOULLEC-THÉRY M. &: ASSUDE T. (2012) (Ed.) Faire travailler ensemble tous les acteurs de l'inclusion ? *La Nouvelle Revue de l'Adaptation et de la Scolarisation*, n° 57.

ZAFFRAN J. (2015), *Accessibilité et handicap*, Grenoble : PUG.

ZAFFRAN J. (2013) La règle et la norme ou comment dépasser l'hiatus de l'inclusion scolaire in Perez J.-M. & Assude T. (Dir.), *Pratiques inclusives et savoirs scolaires, paradoxes, contradictions et perspectives*. Nancy : PUN, pp. 15-27.

SITUATIONS, INTERPRÉTATION, STRATÉGIES ET CONCEPTUALISATION. LE CAS DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

Rémi BRISSIAUD
MC honoraire de psychologie cognitive
Équipe CRAC, laboratoire Paragraphe, EA 349, Université Paris 8
remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Résumé
Les recherches récentes concernant la résolution de problèmes arithmétiques n'ont que peu influé le contenu des nouveaux programmes pour l'école. Pourtant, des progrès décisifs ont été effectués concernant le type de représentations mentales qui sont construites et, surtout, les travaux menés à l'université Paris 8 depuis le début des années 1990 permettent aujourd'hui de mieux comprendre comment le progrès en résolution de problèmes arithmétiques et le progrès dans la conceptualisation des opérations arithmétiques s'articulent. Ils permettent même de penser de manière raisonnée des progressions pédagogiques.

Aussi loin que l'on remonte dans le temps, les recherches en psychologie et en didactique, portant sur la résolution de problèmes à l'école, soulignent une discordance : alors que les élèves développent des compétences en calcul dans le contexte où ceux-ci se présentent d'emblée sous une forme symbolique spécialisée (écritures chiffrées, signes opératoires), ils échouent très souvent à utiliser ces connaissances en situation de résolution de problèmes énoncés verbalement (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000). Dans ce texte[1], nous allons avancer un cadre théorique qui permet de mieux comprendre cette difficulté et de mieux l'aborder d'un point de vue didactique

I - LES DEUX FACES DE LA CONCEPTUALISATION DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

1 Une première face, la face « catégorisation » des situations : une même opération permet de traiter des situations très différentes

La compréhension d'une opération arithmétique se traduit par son usage dans des situations variées. La soustraction, par exemple, peut être utilisée dans la situation d'un autocar ayant 83 voyageurs et qui se vide de 27 d'entre eux (recherche d'un reste), que dans celle d'un autocar ayant 27 voyageurs qui se remplit jusqu'à en avoir 83 (recherche d'un complément). Le premier énoncé parle d'un retrait, le second d'un ajout, et, pourtant, la même opération arithmétique permet de répondre à la question posée.

Les deux situations ne doivent évidemment pas être mises sur le même plan : utiliser la soustraction pour chercher un reste, c'est en faire un usage banal. Dans le langage quotidien, en effet, les verbes « soustraire » et « retirer » sont synonymes et la propriété prioritairement attachée à une action est le résultat qu'elle produit : ici, un reste. En revanche, penser à utiliser la soustraction dans une situation de recherche d'un complément qui, elle, est décrite en parlant d'un ajout, ne relève plus d'un usage banal du retrait. Comprendre le fonctionnement de l'opération arithmétique soustraction, c'est aller au-delà de l'usage qui va de soi et, donc, c'est notamment comprendre qu'on peut l'utiliser pour résoudre un problème de complément. Remarquons enfin que, lorsque les enseignants évoquent les deux situations précédentes, qu'on nommera Reste et Complément dans la suite de ce texte, ils parlent souvent de deux « sens » différents de la soustraction, le mot « sens » pouvant aussi bien renvoyer à des significations

[1] Ce texte est proche de celui rédigé en hommage à Jean-François Richard, dans le Bulletin de Psychologie 2016/6, **546**, 423-431.

différentes de cette opération qu'à des directions différentes (retrait, ajout) de l'action décrite dans l'énoncé.

La même analyse vaut pour la division, les deux grandes classes de situations qu'elle permet de traiter sont celles dites respectivement de quotition : l'énoncé peut se reformuler sous la forme « En *a*, combien de fois *b* ? » et de partition : l'énoncé peut se reformuler sous la forme « *a*, c'est *b* fois combien ? ». Là encore, le mot « diviser » fonctionnant dans le langage quotidien comme synonyme de « partager », le sens banal est celui de la partition, notamment lorsque l'énoncé parle explicitement d'un partage dont on cherche le résultat : la valeur d'une part.

Et pour ce qui touche à la multiplication ? Cette opération, le plus fréquemment, permet de résoudre des problèmes dont l'énoncé demande de chercher le résultat d'un ajout itéré, et nous verrons dans la suite de ce texte que le « sens » banal de cette opération est, évidemment, celui du déroulement temporel de cet ajout.

Envisagée selon cette première face, la conceptualisation d'une opération arithmétique permet à un élève de réduire la diversité de ses comportements face à des situations décrites en langage naturel : il effectue une soustraction dans une situation qui est décrite en parlant d'un ajout, il effectue une multiplication quel que soit le déroulement temporel de l'ajout itéré, il effectue une division dans une situation qui est décrite très différemment d'un partage, par exemple.

2 Une seconde face, la face « stratégique » : une même opération se calcule selon des stratégies différentes

La principale façon d'organiser les différentes stratégies de calcul d'une soustraction quand cette opération se présente d'emblée sous forme symbolique : « $a - b = ?$ » consiste à distinguer deux grandes classes de stratégies (de manière récente, voir par exemple : Torbeyns, Ghesquière, Verschaffel, 2009) : celles par retraits successifs, afin de déterminer le reste, et celles par ajouts successifs, afin d'obtenir le complément au plus petit des deux nombres (il est fréquent de parler d'« addition indirecte » ou d'« addition à trou »). S'il s'agit de calculer 71 - 29, par exemple, il est possible d'effectuer successivement les retraits : 71 - 20 = 51, puis : 51 - 9 = 42. Mais il est également possible de calculer par ajouts successifs afin d'obtenir le complément : 29 + 1 = 30, puis : 30 + 41 = 71, la réponse, 42, étant la somme des nombres ajoutés. Peters et coll. (2013) ont montré que des élèves de CM1, CM2 et 6e choisissent de façon stratégique l'une ou l'autre de ces procédures en s'adaptant à la taille des nombres : ils calculent plus fréquemment 71 - 8 (retirer « peu ») par retraits successifs, et 71 - 68 (retirer « beaucoup ») par ajouts successifs, par exemple. Chez de jeunes adultes, cet usage stratégique a été mis en évidence avec des nombres à 3 chiffres (Torbeyns et coll., 2009).

La même analyse peut être menée sur la multiplication, opération dont la commutativité implique de manière évidente des stratégies différentes selon le calcul proposé : 14 × 2, par exemple, sera calculé comme 2 fois 14 (on considère que le multiplicateur est le nombre de droite) alors que 3 × 25 sera calculé comme 3 fois 25 (on considère que le multiplicateur est le nombre de gauche). Concernant la division, il n'y a pas de recherches équivalentes à celles portant sur la soustraction, mais on peut considérer que diviser par un petit nombre : 732 ÷ 3 par exemple, conduit plutôt à chercher : « 3 fois combien font 732 ? », ou à partager successivement les centaines, dizaines et unités, ce qui dans les deux cas correspond à une stratégie de partition, alors que diviser par un grand nombre : 732 ÷ 285 par exemple, conduit à chercher : « combien de fois 285 est-il contenu dans 732 ? », ce qui correspond à une stratégie de quotition. Les observations de Ambrose, Baek et Carpenter (2003), par exemple, sont cohérentes avec cela.

Envisagée selon cette seconde face, la conceptualisation d'une opération arithmétique permet à un élève de s'adapter aux caractéristiques numériques du calcul symbolique qui lui est proposé, et d'avoir un comportement flexible, stratégique (Baroody, Dowker, 2003).

3 Comment étudier le processus de conceptualisation des opérations arithmétiques

Étudier le processus de conceptualisation d'une opération donnée nécessite :

1° d'étudier comment les enfants apprennent à résoudre les problèmes correspondant aux différents sens de cette opération, lorsque ces problèmes sont énoncés en langage naturel, c'est-à-dire l'étude de la face catégorisation de l'opération ;

2° d'étudier la façon dont le signe opératoire et, plus généralement, le symbolisme arithmétique (les signes +, –, ×, ÷, =) est présenté aux élèves et la façon dont ceux-ci s'approprient la face stratégique de cette opération ; et

3° d'étudier la façon dont le progrès sur chacune des deux faces interagit avec celui sur l'autre face.

Cependant, en amont, un enfant ne peut pas comprendre une opération arithmétique s'il ne comprend pas les situations qui la fondent, c'est-à-dire, notamment, les situations de recherche du résultat d'un retrait et d'un complément pour la soustraction, la situation d'ajout réitéré pour la multiplication et les situations de partition et de quotition pour la division. Le point de départ de l'étude de la conceptualisation des opérations arithmétiques doit donc être l'étude de la compréhension de ces situations.

II - DIFFÉRENCIER LA COMPRÉHENSION DES SITUATIONS ET CELLE DE L'OPÉRATION : LE PARADIGME SI-PROBLÈMES *VS*. CC-PROBLÈMES

1 Le paradigme Si-problèmes versus CC-problèmes : présentation

Considérons le problème suivant : « *Luc a 27 euros dans sa tirelire. Il met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant il a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il mis d'euros dans sa tirelire ?* » Du fait que 27 et 31 sont proches, pour trouver la solution il suffit de simuler mentalement l'ajout soit à l'aide d'un double-comptage : 27, 28 (1), 29 (2), 30 (3), 31 (4), soit en complétant l'addition dont le second terme est inconnu : 27 + ? = 31. Dans les deux cas, la solution s'obtient sans recourir à la soustraction. C'est un tel problème que nous appellerons un Si-problème (le préfixe Si renvoie à Situation ou à Simulation) : il suffit de simuler mentalement l'action décrite dans l'énoncé pour obtenir sa solution, ou encore : une stratégie basée sur la situation, ici une stratégie de complément, donne la solution numérique de façon économique. Ainsi, un Si-problème de recherche d'un complément est un pseudo-problème de soustraction parce qu'il n'y a nul besoin de faire usage de cette opération pour en obtenir la solution numérique. En revanche, la réussite à un tel Si-problème atteste de la compréhension de la situation telle qu'elle a été énoncée (cette compréhension peut évidemment être améliorée en variant la façon d'énoncer le problème : oral ou écrit, avec ou sans représentation imagée, etc.)

Considérons, en revanche, ce problème, dont l'énoncé utilise les mêmes mots : « *Marie a 4 euros dans sa tirelire. Elle met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant elle a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-elle mis d'euros dans sa tirelire ?* » Pour trouver la solution, la simulation mentale de l'ajout décrit dans l'énoncé est cognitivement coûteuse. L'enfant qui chercherait à résoudre ce problème par un double-comptage : 4, 5(1), 6(2), 7(3), 8(4)… jusqu'à 31(27) a peu de chance de mener à bien une telle procédure. Dans un tel cas, seul le calcul de la soustraction 31 - 4 permet d'obtenir la solution. C'est un tel problème que nous appellerons un CC-problème (le préfixe CC renvoie à Connaissances Conceptuelles) : la simulation mentale de l'action décrite dans l'énoncé ne permettant pas d'en obtenir la solution, la résolution de ce problème nécessite la mobilisation de Connaissances Conceptuelles : celles qui autorisent l'usage de la soustraction dans une situation qui parle d'un ajout[2].

Ainsi, alors que la réussite à un Si-problème atteste seulement de la compréhension de la situation, celle à un CC-problème atteste, à la fois, de la compréhension de la situation et de celle de l'opération.

[2] Dans Brissiaud (1994) et Brissiaud (2002), on parlait de « Concordance vs. Discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul », dans Brissiaud et Sander (2010) les CC-problèmes sont appelés MA-problèmes où MA signifie Mental Arithmetical.

2 Le paradigme Si-problèmes *versus* CC-problèmes : ses fondements empiriques

L'étude la plus complète utilisant ce paradigme est une étude longitudinale des taux de réussite en début et en fin de CE1 des versions Si et CC de cinq catégories de problèmes : recherche d'un reste, d'un complément, recherche du résultat d'un ajout réitéré, résolution d'un problème de partition et d'un problème de quotition. Par ailleurs, les mêmes problèmes ont été proposés à des élèves entrant au CE2 en leur demandant d'expliciter la procédure qu'ils ont utilisée (Brissiaud, Sander, 2010). Voici des exemples de problèmes proposés :

— Si-Reste : *Nicolas va en récréation avec ses 41 billes. Pendant la récréation, il perd 3 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?*

— CC-Reste : *Nicolas va en récréation avec ses 41 billes. Pendant la récréation, il perd 38 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?*

— Si-Addition Itérée : *Combien y a-t-il de bonbons en tout dans 4 paquets de 10 bonbons ?*

— CC-Addition Itérée : *Combien y a-t-il de bonbons en tout dans 10 paquets de 4 bonbons ?*

— Si-Partition : *Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?*

— CC-Partition : *Monsieur Dupont a 30 images. Il partage ces images entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?*

— Si-Quotition : *Madame Lebris a 40 gâteaux. Elle fait des paquets de 10 gâteaux. Combien de paquets peut-elle faire ?*

— CC-Quotition : *Monsieur Dulac a 40 gâteaux. Il fait des paquets de 4 gâteaux. Combien de paquets peut-il faire ?*

Dans chacune des trois études (début CE1, fin CE1, début CE2), les Si-problèmes sont mieux réussis que les CC-problèmes, et ceci alors que, parfois, les nombres utilisés par les CC-problèmes sont plus grands. Ainsi, à l'entrée au CE1, le taux de réussite au problème de type Si-Complément qui utilise les nombres 27 et 31 (solution 4) est de 0,49 alors qu'il n'est que de 0,22 au problème CC-Complément qui utilise les nombres 4 et 31 (solution 27). De plus, les CC-problèmes, contrairement aux Si-problèmes, nécessitent l'usage de l'opération arithmétique. Ainsi, au début du CE2, 95 % des élèves qui explicitent la stratégie qu'ils ont utilisée pour résoudre le problème du type Si-Complément énoncé avec 27 et 31, disent qu'ils ont calculé 27 + 4 = 31 alors qu'avec le problème CC-Complément énoncé avec 4 et 31, ils ne sont que 30 % à dire qu'ils ont calculé 4 + 27 = 31. Très majoritairement, 60 % des élèves disent avoir calculé la soustraction 31 – 27 = 4. Pour le problème du type Si-Addition itérée (3 groupes de 10), 60 % des élèves disent avoir calculé 10 + 10 + 10 = 30 alors qu'avec le problème CC-Addition itérée (10 groupes de 3), ils ne sont que 22 % à dire qu'ils ont calculé : 3 + 3 +… + 3 = 30. Très majoritairement, 67 % des élèves disent avoir fait usage de la multiplication.

L'ensemble des résultats de cette étude sont donc cohérents avec l'hypothèse faite : les Si-problèmes nécessitent seulement de comprendre la situation, ils ne nécessitent pas de faire usage de l'opération, alors que les CC-problèmes nécessitent les deux. D'autres recherches dont les résultats sont également cohérents avec cette hypothèse, avaient précédé celle-ci. L'étude y concernait une seule des opérations précédentes : la soustraction, dans Brissiaud (1994) et la multiplication, dans Schliemann et coll. (1998). Signalons également une analyse et des résultats qui montrent que la compréhension des fractions peut être étudiée à l'aide d'un tel paradigme (Brissiaud, 2002).

Par ailleurs, lorsqu'un problème de soustraction est d'emblée donné sous forme symbolique : $a - b = ?$, cette égalité est interprétée comme une forme sténographique de l'énoncé d'un problème de recherche du résultat d'un retrait, c'est-à-dire selon le sens banal de la soustraction (Sander, 2008). Ainsi, une égalité où l'on retire peu est interprétée comme un problème de type Si-Reste et une égalité où l'on retire beaucoup comme un problème de type CC-Reste. Par conséquent, tous les résultats étayant l'existence d'une face stratégique au calcul d'une soustraction (ceux de l'équipe de Lieven Verschaffel, notamment) peuvent être confrontés à ceux étayant le paradigme Si-problèmes vs. CC-Problèmes ; or, les stratégies observées par le premier courant de recherche sont très exactement celles qui sont prévues par le second.

Enfin, à un niveau plus général, Brissiaud et Sander (2010) ont utilisé ce paradigme afin d'étayer un modèle théorique de la résolution de problèmes à énoncé verbal : le modèle « Situation Strategy First ». La thèse avancée est la suivante : de nombreux travaux ont montré qu'avant toute scolarisation les enfants peuvent résoudre les problèmes arithmétiques envisagés ici en simulant l'action décrite avec du matériel ; selon le modèle « Situation Strategy First », un enfant qui a appris les opérations arithmétiques à l'école continue à avoir une représentation initiale du problème qui active une procédure basée sur la situation. Or, ce point de vue rejoint de nombreux travaux, dont ceux de Thevenot (2010), selon lesquels la représentation initiale d'un problème serait plutôt de type « modèle mental » que de type « schéma » (pour une revue de question, voir Thevenot, Barrouillet, 2015).

3 Des progressions didactiques fondées sur le paradigme Si-problèmes versus CC-problèmes

Un enfant ne peut pas comprendre une opération arithmétique s'il ne comprend pas les situations qui la fondent, avons-nous dit. Or, au début du CE1, le taux de réussite à un problème du type Si-Addition Itérée dont l'énoncé parle de 3 groupes de 10 est de 0,47 seulement. Ce type de problème ne nécessite aucune connaissance sur la multiplication et pourtant il est assez mal réussi en début de CE1. Il s'ensuit qu'à l'école, dans un premier temps, avant même d'amorcer l'étude d'une opération arithmétique, il est judicieux de proposer des Si-problèmes aux élèves afin d'améliorer leur compréhension de la situation qui fonde cette opération. Concernant la multiplication, donc, il est judicieux de proposer de nombreux problèmes du type Si-Addition Itérée, avec des contextes variés :

— *Combien y a-t-il d'enfants en tout dans 4 équipes de 10 enfants ?*

— *Combien y a-t-il de fleurs en tout dans 2 bouquets de 7 fleurs ?*

— *Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 3 paquets de 25 gâteaux ?*

— *On met bout à bout 3 règles de 50 cm. Quelle est la longueur totale ?*

Dans un deuxième temps, il convient d'enseigner l'opération, d'introduire son signe, ses propriétés conceptuelles et les diverses stratégies de calcul (c'est-à-dire travailler la face stratégique). Concernant la multiplication, par exemple, il s'agit pour l'essentiel d'enseigner la commutativité de cette opération dans le contexte des écritures symboliques : pour calculer $a \times b$, on peut calculer indifféremment calculer « a fois b » ou « b fois a ».

Dans un troisième temps, il est judicieux de s'assurer que les élèves savent utiliser les propriétés conceptuelles de l'opération pour résoudre des CC-problèmes. Concernant la multiplication, lors de la phase précédente la commutativité a été travaillée, pour l'essentiel, dans le contexte des écritures symboliques, et le fait de proposer des problèmes du type CC-Addition Itérée permet de s'assurer que les élèves savent utiliser cette propriété conceptuelle dans des situations de résolution de problèmes énoncés en langage naturel :

— *Combien y a-t-il d'enfants en tout dans 10 équipes de 4 enfants ?*

— *Combien y a-t-il de fleurs en tout dans 7 bouquets de 2 fleurs ?*

— *Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 25 paquets de 3 gâteaux ?*

— *On met bout à bout 50 réglettes de 3 cm. Quelle est la longueur totale ?*

L'élève qui réussissait les Si-problèmes correspondants a les connaissances numériques nécessaires pour résoudre ces CC-problèmes puisque les deux sortes de problèmes mobilisent les mêmes connaissances numériques. Un éventuel échec ne peut donc provenir que d'un manque d'utilisation des connaissances conceptuelles qui ont été travaillées dans la phase précédente, auquel cas il conviendrait de retravailler la compréhension de ces connaissances conceptuelles.

Enfin, dans un quatrième temps, il convient d'enseigner des techniques opératoires (opération en ligne, opération posée) afin que les élèves puissent résoudre des problèmes donnés avec des valeurs numériques quelconques : les Si et les CC-problèmes ont en effet la caractéristique commune de pouvoir être résolus par un calcul mental simple, ce qui ne correspond pas au cas général.

L'intérêt d'une telle progression est la succession d'un temps, le premier, où les enfants apprennent à comprendre les situations, et d'un autre temps, le troisième, où ils apprennent à utiliser les connaissances conceptuelles des opérations dans des situations qui n'exigent pas plus de compétences numériques que celles que le premier temps exigeait. Afin de mieux mettre cet aspect en valeur, le deuxième temps, celui qui correspond à l'enseignement de la face stratégique, n'a pas encore été présenté de manière précise. C'est ce qui va être fait maintenant.

III - LES CC-PROBLÈMES : DES SITUATIONS PRIVILÉGIÉES POUR ENSEIGNER LA FACE STRATÉGIQUE DE LA CONCEPTUALISATION

Sur la quatrième page de couverture de la seconde édition (2005) du livre *Les activités mentales*, de Jean-François Richard, on lit : « *Le raisonnement et la résolution de problèmes reposent fondamentalement sur une interprétation de la situation et exigent souvent une réinterprétation pour arriver à une conclusion ou une solution* ». Nous allons voir que le contexte d'un CC-problème favorise un tel phénomène de réinterprétation et que cela permet d'enseigner l'opération, son signe, ses propriétés conceptuelles et les diverses stratégies de calcul de cette opération (c'est-à-dire sa face stratégique).

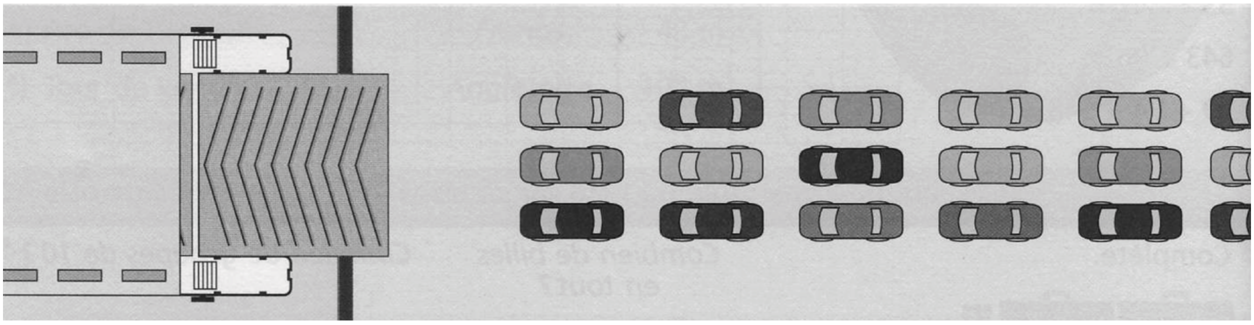
1 Un CC-problème « aménagé » pour favoriser une réinterprétation

Considérons ce problème de type CC-Addition Itérée, dont l'énoncé s'accompagne d'un schéma réaliste comme celui de la figure 1.

Des voitures vont monter 3 par 3 sur un bateau.

50 rangées de 3 voitures vont monter sur le bateau.

Combien y aura-t-il de voitures sur le bateau ?



Le calcul de 3 + 3 + ..., celui qui est induit par l'énoncé, ne menant pas à la solution numérique, les élèves sont invités à imaginer comment l'image se prolongerait vers la droite. Ce qui met à leur disposition une représentation spatiale de la collection organisée en colonnes (c'est celle de l'énoncé) mais aussi en lignes. Cette réinterprétation leur permet d'accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y a 50 voitures en haut, 50 au milieu et 50 en bas. Grâce à l'organisation spatiale des données du problème, les élèves mobilisent donc une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection et c'est cette équivalence qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution.

C'est le moment d'introduire le signe "×" et les égalités 3 × 50 = 150 et 50 × 3 = 150. La plupart des pédagogues, lorsqu'ils introduisent le signe "×", associent l'écriture $a \times b$ au nombre de cases d'un quadrillage ayant a lignes et b colonnes parce que c'est un moyen simple d'enseigner la commutativité de cette opération : si $a \times b$ est le nombre de cases d'un tel quadrillage, comme on peut dénombrer les unités ligne par ligne ou colonne par colonne, l'égalité en nombres s'en déduit. Cependant, il est important que les enfants relient cette propriété au calcul d'une addition réitérée et non à la configuration elle-même. Le CC-problème précédent, aménagé sous cette forme, est un moyen de le faire.

De manière générale, les CC-problèmes ont cette propriété essentielle : chacun d'eux est associé à un Si-problème et, dès que les enfants réussissent celui-ci, on est sûr : 1° qu'ils comprennent la situation du CC-problème parce que c'est la même, et 2° qu'ils disposent des compétences numériques nécessaires à la résolution du CC-problème parce que ce sont les mêmes. Ainsi, ni la compréhension de la situation, ni les compétences numériques ne sont des obstacles et il suffit donc d'aménager l'énoncé du CC-problème afin de le transformer en une sorte d'« *insight problème* » pour que celui-ci soit à l'origine de la conceptualisation : d'une part il en fournit le mobile, d'autre part, en s'appuyant sur une équivalence entre différents schèmes de parcours des unités, la propriété conceptuelle visée peut émerger. La même analyse vaut pour la soustraction : là encore, via la résolution d'un CC-problème de recherche du résultat d'un retrait, on peut amener les enfants à mobiliser une équivalence entre schèmes de parcours qui les conduit à calculer une soustraction « en avançant » plutôt qu'« en reculant » (voir Brissiaud, 1994, 2002). Ils mettent ainsi en relation les deux « sens » de calcul d'une soustraction qui sont possibles.

2 Enseigner la face stratégique favorise-t-il le progrès sur la face catégorisation ?

La réponse est assurément positive concernant la multiplication. Ainsi, dans Brissiaud et Sander (2010), le taux de réussite aux problèmes de type CC-Addition Itérée était de 0,17 en début de CE1, avant tout enseignement de la multiplication et, donc, de sa commutativité. En fin de CE1, il était de 0,54 chez les mêmes élèves, et nous avons vu que l'étude à l'entrée du CE2 montre que ce score correspond à un usage de la multiplication. En revanche, on dispose de peu de recherches empiriques qui prouvent qu'enseigner la face stratégique d'une soustraction favorise le progrès sur la face catégorisation, du fait qu'il est beaucoup plus rare d'enseigner les deux grands types de stratégies de calcul d'une soustraction que d'enseigner la commutativité de la multiplication, ce que tous les enseignants font. On notera cependant que Fuson et Willis (1988) et Brissiaud (1994) obtiennent des résultats qui étayent l'hypothèse du rôle positif de l'enseignement des diverses stratégies de calcul d'une soustraction.

La rareté de ce type d'études s'explique également ainsi : pour mener des recherches sur cette question, il faut se situer dans un cadre théorique qui, comme celui qui a été développé dans ce texte, distingue de manière claire les deux faces de la conceptualisation des opérations arithmétiques. Quand ce n'est pas le cas, les chercheurs surestiment souvent les performances des élèves. Ainsi, Peltenburg et coll. (2012) montrent que même des élèves scolarisés dans l'enseignement spécialisé, utilisent souvent une stratégie de complément pour résoudre un problème qui, dans le cadre théorique présenté ici, est de type Si-Complément (avec les nombres 27 et 31, par exemple). Contrairement à Brissiaud (1994) et Brissiaud et Sander (2010), ils considèrent la résolution d'un tel problème comme le calcul d'une soustraction et, donc, comme un comportement de haut niveau. Or, c'est l'un des résultats les mieux établis en faveur du modèle *Situation Strategy First* : dans les problèmes de type Si-Complément, les élèves trouvent la solution numérique sans penser à la soustraction, il ne s'agit pas d'un comportement de haut niveau. La confusion entre les deux faces de la conceptualisation des opérations est ainsi un frein au progrès dans l'étude de cette question.

IV - UNE EXTENSION DU CADRE THÉORIQUE : LES CC-PROBLÈMES ASSOCIÉS À DEUX PROPRIÉTÉS CONCEPTUELLES

Nous sommes très loin d'avoir abordé ici l'ensemble des problèmes relevant d'une opération arithmétique donnée (Vergnaud & Durand, 1976). Considérons la catégorie des problèmes d'addition, par exemple. Ce problème : « *Paul a 39 billes, il en gagne 4, combien en a-t-il maintenant ?* » est de toute évidence un Si-problème alors que celui-ci : « *Paul a 4 billes, il en gagne 39, combien en a-t-il maintenant ?* » est un CC-problème dont la connaissance conceptuelle associée est la commutativité de l'addition : l'énoncé invite à calculer 4 + 39 alors que le calcul économique est 39 + 4. Mais il existe bien d'autres types de problèmes d'addition, celui-ci par exemple : « *Avant la récréation, Paul avait des billes. Pendant la récréation, il perd 39 billes. Maintenant il a 4 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* ».

Ce dernier problème, qui reste longtemps difficile à l'école primaire, est un CC-problème dont la résolution dépend de l'usage de deux propriétés conceptuelles : en utilisant la réversibilité de la soustraction et de l'addition, on est conduit au calcul de 4 + 39 (la quantité finale + la quantité perdue = la quantité initiale) mais il faut de plus utiliser la commutativité de l'addition pour être conduit au calcul de 39 + 4 qui, lui, donne immédiatement la solution numérique. Il existe donc des CC-problèmes « au carré », au sens où leur solution est quasi immédiate d'un point de vue numérique à la condition d'utiliser deux propriétés conceptuelles de l'opération.

De manière récente, Sander et Fort (2014) ont aménagé ce dernier énoncé de la manière suivante : « *Avant la récréation, Paul avait des billes vertes et des billes rouges. Pendant la récréation, il a perdu ses 39 billes vertes. Maintenant il lui reste ses 4 billes rouges. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* ». Cet énoncé présente d'emblée la collection de billes comme scindée en deux parties, les vertes et les rouges, et ces parties correspondent respectivement aux billes perdues et conservées. La réussite se trouve favorisée chez des élèves de CE1 et de CE2. De plus, les auteurs montrent que la résolution de la version aménagée fait progresser les élèves dans la résolution de la première version. Une question se pose cependant : la résolution préliminaire de cette autre version obtenue en permutant 39 et 4 dans l'énoncé initial : « *Avant la récréation, Paul avait des billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Maintenant il a 39 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?* », version dont la résolution nécessite l'usage d'une seule propriété conceptuelle, la réversibilité de la soustraction et de l'addition (39 + 4), n'aurait-elle pas conduit au même résultat, voire à un meilleur résultat ? Ce qui peut se formuler ainsi de manière plus générale : la présentation préalable du CC-problème associé à une seule propriété conceptuelle, ne favoriserait-elle pas encore mieux le progrès dans la résolution de celui qui est associé à deux propriétés conceptuelles ?

L'exemple de ce problème montre que l'étude des facteurs qui ont une influence sur la réussite (articulation de la représentation initiale de l'énoncé et de l'économie du calcul numérique, sémantique de l'énoncé, etc.) et celle de la façon dont les enseignants peuvent manipuler ces facteurs pour favoriser le progrès sont loin d'être achevées et que bien des études empiriques restent à mener.

V - CONCLUSION

Dans ce texte, en utilisant le paradigme Si-problèmes *vs.* CC-problèmes, nous avons proposé une approche didactique raisonnée de la conceptualisation des opérations arithmétiques, dont l'objectif est de mieux comprendre comment les compétences stratégiques que les enfants développent avec le langage spécialisé de l'arithmétique peuvent s'articuler avec un progrès dans l'interprétation et le traitement de situations décrites en langage naturel. Cette articulation s'effectue dans les deux directions. D'une part, le formalisme arithmétique trouve évidemment son origine dans l'interprétation et le traitement des situations qui fondent les opérations, et ces points doivent être travaillés avant tout enseignement des opérations arithmétiques, grâce à des Si-problèmes notamment. D'autre part, en travaillant la face stratégique de la conceptualisation, les propriétés conceptuelles émergent mieux grâce à l'usage du langage spécialisé de l'arithmétique, et l'on favorise ainsi une restructuration de la façon dont les enfants interprètent et traitent les différentes situations décrites en langage naturel (face « catégorisation des situations » du progrès).

VI - BIBLIOGRAPHIE

AMBROS R., BAEK J & CARPENTER T. (2003) Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms, in A. Baroody & A. Dowker, *The development of arithmetic concepts and skills*, p. 307-336. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

BAROODY A., DOWKER A. (2003) The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, 2003.

BRISSIAUD R. (1994) Teaching and development: Solving 'missing addend' problems using subtraction, *European Journal of Psychology of Education*, **9**, 343-365.

BRISSIAUD R. (2002) Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques, in J. Bideaud & H. Lehalle, *Traité des sciences cognitives – Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291, Paris : Hermes.

BRISSIAUD R. & SANDER E. (2010) Arithmetic word problem solving: A Situation Strategy First Framework, *Developmental Science*, **13**, 1, 92-107.

FUSON K. § WILLIS G. (1988) Substracting by counting up : More evidence, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 5, 402-420.

PETERS G., DE SMEDT B., TORBEYNS J., GHESQUIÈRE P. & VERSCHAFFEL L (2013) Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems, *British Journal of Psychology*, **104**, 4, 495-511.

PELTENBURG M., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN M. & ROBITZSCH A. (2012) Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100. A Proof of the didactical potential of an ignored procedure, *Educational Studies in Mathematics*, **79**, 3, 351-370.

RICHARD J. F. (2005) *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*, Paris : Armand Colin, 2e éd.

SANDER E. (2008) Les connaissances naïves en mathématiques, in J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien, *Les connaissances naïves*, 57-102, Paris : Armand Colin.

SANDER E. & FORT C. (2014) Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. *Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology*, 8-13 July, Paris.

SCHLIEMANN A., ARAUJO C., CASSUNDÉ M. A., MACEDO S. & NICÉAS L. (1998) Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers, *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**, 4, 422-435.

THEVENOT C. (2010) Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model, *Acta Psychologica*, **133**, 90-95.

THEVENOT C. & BARROUILLET P. (2015) Arithmetic word problem solving and mental representations, in R. Kadosh & A. Dowker, *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, Oxford : Oxford University Press, 158-179.

TORBEYNS J., GHESQUIÈRE P. & VERSCHAFFE L. (2009) Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit substraction, *Learning and Instruction*, **19**, 1, 1-12.

VERGNAUD G. & DURAND C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, **36**, pp. 28-43.

VERSCHAFFEL L., GREER G. & DE CORTE E. (2000) *Making Sense of Word Problems*, Lisse : Sweets & Zeitlinger.

ETUDE COMPARATIVE DE DEUX DISPOSITIFS DE MANIPULATION TANGIBLE ET VIRTUELLE POUR L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION

Hamid Chaachoua
Professeur des Universités, UGA LIG
Hamid.Chaachoua@imag.fr

Marina De Simone
ATER, UGA LIG
marina.de-simone@imag.fr

Résumé
Le système de numération décimale est le résultat de l'articulation entre deux principes : décimal et de position. Le principe décimal qui est nécessaire pour la compréhension du système de numération peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles de groupements et d'échanges. De plus, les activités mobilisant ces deux règles sont souvent travaillées à l'aide de matériel de numération.
Notre communication sera centrée sur la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation des collections de grands cardinaux.
Nous proposons de comparer deux dispositifs : celui de la manipulation d'objets tangibles « bûchettes » et celui de la manipulation virtuelles « Simbûchettes ». Cette comparaison sera axée d'une part sur le rôle des ostensifs et d'autre part sur les résultats d'une expérimentation avec ces deux dispositifs. Cette expérimentation a été conduite auprès d'élèves de CE2 autour du type de tâches « dénombrer une collection ».

Le fonctionnement du système de numération décimale a un rôle important pour comprendre différents domaines des mathématiques : les calculs, les conversions entre unités de mesure, les décimaux… Le système de numération décimale est le fruit d'une articulation entre deux principes différents : décimal et de position (Serfati, 2005).

Le principe de position permet d'associer chaque unité de numération (unités, dizaines, centaines…) à un rang dans l'écriture du nombre. Cet aspect renseigne sur la valeur de chaque chiffre dans le nombre en fonction de sa position. Le principe décimal explique les rapports entre les différents ordres dans un nombre. Il s'agit d'un rapport de dix, dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

I - PROBLEMATIQUE

Selon Tempier (2010) l'aspect décimal est considéré comme source de difficultés. Or, cet aspect est nécessaire pour la compréhension du système de numération. Celui-ci peut être travaillé par des activités mettant en jeu les règles des groupements et d'échanges. Ces règles stipulent que 10 éléments d'une unité peuvent être groupés et échangés contre un élément de l'unité supérieure et réciproquement, 1 élément d'une unité peut être défait et échangé contre 10 éléments de l'unité inférieure. Ces deux règles mobilisent des savoirs de base qui permettent de comprendre le fonctionnement de ce système et en particulier de son aspect décimal.

Nous nous intéressons dans cette communication à la prise en charge de l'aspect décimal par des situations didactiques nécessitant la manipulation des collections, d'objets tangibles, de grands cardinaux. Cette prise en charge présente parfois des limites qui peuvent être surmontées par un dispositif de simulation.

1 Difficultés liées à l'enseignement de la numération à l'école primaire

Les travaux de Bednarz et Janvier (1984) ont mis en évidence des difficultés des élèves centrées essentiellement sur l'aspect décimal de la numération :

- « difficulté à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture conventionnelle malgré la place prépondérante que le travail sur cette écriture occupe dans l'enseignement ;

- difficulté à voir la pertinence de ces groupements, même si les exercices dans l'enseignement ont amené les enfants à faire des regroupements ;

- difficulté à opérer avec ces groupements, les faire et les défaire ;

- difficulté à travailler simultanément avec deux groupements différents ;

- difficulté à interpréter les procédures de calcul relatives aux opérations (addition, soustraction, multiplication, division) en termes de groupements, qui conduit à des erreurs classiques sur les opérations.» (Bednarz et Janvier, 1984, p.30)

L'analyse des erreurs des élèves faite par Parouty (2005) confirme cette dernière difficulté concernant le lien entre la maîtrise de la numération et le calcul.

L'observation des activités proposées en classe explique pourquoi les élèves ont ces types de difficultés. En effet, les activités proposées prennent en compte majoritairement l'aspect position de la numération et donc les élèves ont une compréhension de la numération basée principalement sur cet aspect. La même constatation a été faite par Bednarz et Janvier (1984) sur le choix des activités. Par exemple, dans les activités « la représentation du nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre ». Elles concluent alors qu'« imposer prématurément une présentation ordonnée conduit nécessairement l'enfant à une interprétation de l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position, et écarte toute signification véritable accordée à cette position en termes de groupements » (ibid). Tempier (2010) constate aussi les mêmes difficultés chez les élèves 26 ans après.

Pour ces raisons, plusieurs recherches se concentrent sur la façon de prendre en compte le principe décimal du système de numération dans l'enseignement actuel. En particulier, différentes études ont mis en évidence plusieurs hypothèses de travail pour construire des situations didactiques mettant en avant le principe décimal (Tempier 2010, Chaachoua 2016).

2 Hypothèses didactiques

Nous nous appuyons sur 3 hypothèses de travail développées par Chaachoua (2016).

2.1 Relations entre les unités de numération

Pour Chambris (2008) il est important de travailler les relations entre les unités de numération pour mobiliser l'aspect décimal, en privilégiant les types de tâches de conversion par exemple convertir 23 centaines en dizaines. D'où notre première hypothèse de travail :

(HT1) « Relations entre les unités » : Pour travailler la numération, il faut privilégier les types de tâches dont la technique mobilise les relations entre les unités de différents ordres[1].

2.2 Les grands nombres

Les grands nombres permettent un travail explicite sur le système de numération et plus précisément sur le principe décimal. En effet, l'introduction d'un nouvel ordre génère d'autres relations entre les unités de numération. Ainsi, l'itération des groupements et la multiplicité des échanges qui en découlent permettent de mieux comprendre l'aspect décimal de la numération. « En effet, pour ces nombres, l'itération des groupements par 10 est plus riche que pour les nombres à trois chiffres (où on a seulement 10u = 1d et 10d = 1c). Cela a aussi pour conséquence de faire intervenir toutes les relations qui découlent de ces groupements itérés par 10 : les relations entre milliers et dizaines, milliers et unités et entre centaines et unités (1m = 100d, 1m = 1000u et 1c = 100u). ».

[1] Dans l'écriture du nombre en base 10 intervient plusieurs « types » d'unités qu'on désigne par ordre. Ainsi, unité d'ordre 1 désigne les unités simples, unité d'ordre 2 désigne les dizaines, etc.

D'où notre deuxième hypothèse de travail :

(HT2) « Grand Nombre » : L'introduction des grands nombres enrichit et renforce la compréhension du système de numération et particulièrement son aspect décimal.

2.3 La manipulation des objets

Pour l'enseignement du nombre et de la numération, la manipulation d'objets est une étape importante pour la construction du sens. Comme le souligne le Conseil Supérieur des Programmes pour la mise en œuvre des programmes de l'école élémentaire ([Refondons l'École] - Brève - 28/05/2014) :

Nombres et calcul

La connaissance des nombres et le calcul sont les objectifs prioritaires du CP et du CE1. Cette connaissance du nombre, surtout centrée sur des activités de manipulation permettant de dénombrer des collections en maternelle, doit aboutir en fin de Cycle 2 à une connaissance et une utilisation des principes de la numération de position notamment travaillée au moyen de techniques de composition/décomposition des nombres. Cet apprentissage se réalise au travers d'activités permettant aux élèves de s'appuyer sur des représentations (le boulier, les abaques...).

Selon Raoul-Bellanger et Bellanger (2010), la manipulation en mathématiques permet aux élèves de construire une image mentale et permet ainsi d'accéder plus facilement à l'abstraction (système iconique ou symbolique). Cela est encore plus vrai pour les élèves en difficulté où le recours à la manipulation peut être utilisé dans des phases de remédiation.

D'où notre troisième hypothèse de travail :

HT3 « Manipulation d'objets » : La manipulation d'objets est importante pour travailler les règles de groupement et d'échanges afin de donner du sens à l'aspect décimal de la numération.

3 Verrous scientifiques

Dans les activités de manipulation d'objets tangibles le temps que nécessite certaines actions, comme celle des groupements devient plus important avec des collections de grande cardinalité. A cela, il faut ajouter que pour disqualifier certaines techniques non adaptées pour les grands nombres, la répétition des tâches est souvent nécessaire et la manipulation devient alors plus coûteuse en temps. Il est difficile pour un enseignant de consacrer le temps nécessaire à chaque élève afin de contrôler toutes ses actions de manipulation de façon individuelle.

Ainsi, la mise en œuvre de situations d'enseignement fondées sur la manipulation se heurte à trois verrous : (1) la manipulation des collections d'objets de grande cardinalité nécessite énormément de temps, (2) le matériel tangible ne produit pas de rétroactions pertinentes pour l'apprentissage, (3) un enseignant ne peut pas observer plusieurs élèves à la fois.

Le verrou (3) est au centre de travail de Brasset (2017) qui a étudié un outil d'orchestration permettant à l'enseignant de suivre en temps réel plusieurs élèves et modifier les caractéristiques des situations depuis sa tablette.

Par rapport aux verrous (1) et (2) nous pensons que la simulation basée sur la manipulation d'objets virtuels peut être une réponse possible. En effet, l'environnement informatique permet d'interdire certaines actions, produire des rétroactions par rapport au non-respect des règles, etc. selon le paramétrage de l'interface. Ainsi dans notre équipe nous avons conçu une simulation de manipulation des représentations des bûchettes « Simbûchettes ».

II - CADRE THEORIQUE T4TEL

Le cadre de référence T4TEL a été développé suite aux travaux de Chaachoua (2010) pour répondre à la double problématique didactique et informatique pour la conception des environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Il s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992, 1998, 1999), désignée par TAD, et plus spécifiquement sur l'approche praxéologique (Chevallard 1999, Bosch et Chevallard, 1999). La théorie anthropologique du didactique (TAD) considère que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. La TAD part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard (1998) note [T/τ/θ/Θ] et qu'il nomme praxéologie, ou organisation praxéologique.

Le cadre T4TEL propose une formalisation du modèle praxéologique pour répondre à l'exigence de calculabilité d'une part et la production de différents services EIAH d'autre part. En particulier, nous formalisons les éléments d'une praxéologie comme suit. L'utilisation de ce cadre de référence dans notre recherche se fait à différents niveaux : de la conception des environnements informatiques, de la conception et de l'analyse des situations.

Type de tâches

Un type de tâches est défini par un verbe d'action et un complément. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches comme « Calculer » ou « Dénombrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité. Par exemple, « Calculer la somme de deux nombres » est plus général que le type de tâches « Calculer la somme de deux entiers ». D'où l'introduction dans le modèle de la notion de générateur de type de tâches.

Générateur de Type de tâches

A un type de tâches T on peut associer un générateur GT en introduisant un système de variables qui prennent des valeurs dans un domaine de connaissances donné. L'instanciation des variables permet de spécifier le complément du type de tâches et donc de générer des types de tâches et des sous-types de tâches.

Exemple. Considérons le générateur de type de tâches GTs = [Calculer, la somme de deux nombres entiers ; V1, V2] où V1 : taille du premier nombre (nombre de chiffres) et V2 : taille du second nombre (nombre de chiffres).

Les variables introduites dans la définition de générateur du type de tâches ont plusieurs fonctions : générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable, caractériser les portées des techniques (Chaachoua et Bessot, 2016). Ainsi, si l'enjeu d'apprentissage nécessite la mobilisation d'une certaine technique, le jeu sur les variables (et les valeurs) permet de construire une suite de situations favorisant l'émergence de cette technique et permettant ainsi l'apprentissage visé.

Technique

Pour un type de tâches T, une technique τ permet d'accomplir des tâches de T. Elle est décrite par un ensemble de types de tâches $\{(Ti)_i\}$. Chaque type de tâches Ti possède à son tour une ou plusieurs techniques.

Technologie

La technologie permet de justifier, de comprendre voire produire une technique. Elle est modélisée par un ensemble d'énoncés qui portent sur les éléments du domaine de connaissances mises en jeu.

Théorie

La théorie justifie la technologie. Elle peut être modélisée par un ensemble de technologies qui portent sur les éléments du domaine de connaissances.

Ostensifs / Non ostensifs

Nous avons vu que la technique est décrite par un ensemble de type de tâches. Mais la mise en œuvre d'une technique se traduit par la manipulation d'objets que Bosch et Chevallard (1999) désignent par *ostensifs*. En fait, ils distinguent deux types d'objets utilisés dans l'activité mathématique : « les objets ostensifs » et « les objets non ostensifs ».

- « les objets ostensifs » – du latin ostendere, montrer, présenter avec insistance. – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible.

- et « les objets non ostensifs » sont alors tous ces « objets », qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits,

entendus, per.us ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être convoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés. (p.90).

Les ostensifs sont les objets qui ont une forme matérielle comme un stylo ou une règle (dans ce cas-là, on parle d'ostensifs de la « matérialité quelconque »). Mais aussi :

– des gestes : on parle d'ostensifs gestuels

– des mots : on parle d'ostensifs discursifs (ou langagiers) ;

– des schémas, dessins, graphismes : on parle d'ostensifs graphiques ;

– des écritures et formalismes : on parle d'ostensifs scripturaux.

« *Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas ou du stylo, par exemple), mais aussi par la voix, le regard, etc.* » (Chevallard, 1994, p. 69)

Ostensifs et non-ostensifs sont toujours des objets *institutionnels* dont l'existence ne dépend que très rarement de l'activité d'une seule personne. Ils sont « *unis par une dialectique qui considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation.* » (Chevallard, 1994, p. 69)

III - LA SIMULATION DU MATERIEL DE NUMERATION « SIMBUCHETTES »

Un projet de recherche est conduit au sein de l'équipe MeTAH autour de la conception d'un dispositif de simulation « Simbûchettes » et d'un dispositif d'orchestration pour assurer le suivi des élèves (Wang et al., 2017). L'interface « Simbûchettes » est une simulation du dispositif matériel « bûchettes » largement utilisé dans l'enseignement (Brasset, 2016).

1 Le prototype

Comme on peut le voir dans la figure 1, l'interface est organisée en plusieurs zones :

- Texte : pour la consigne
- La réserve : constituée de distributeurs de bûchettes, de paquets (dizaines, centaines …).
- Zone de duplication : permet de dupliquer des groupements
- Zone de construction / déconstruction de groupements : permet de faire ou défaire des groupements.
- Boîtes : composée d'au maximum 4 boîtes (milliers, centaine, dizaine, unité)
- Table : permet de déposer librement les bûchettes et les paquets.
- Poubelle : permet de supprimer des éléments

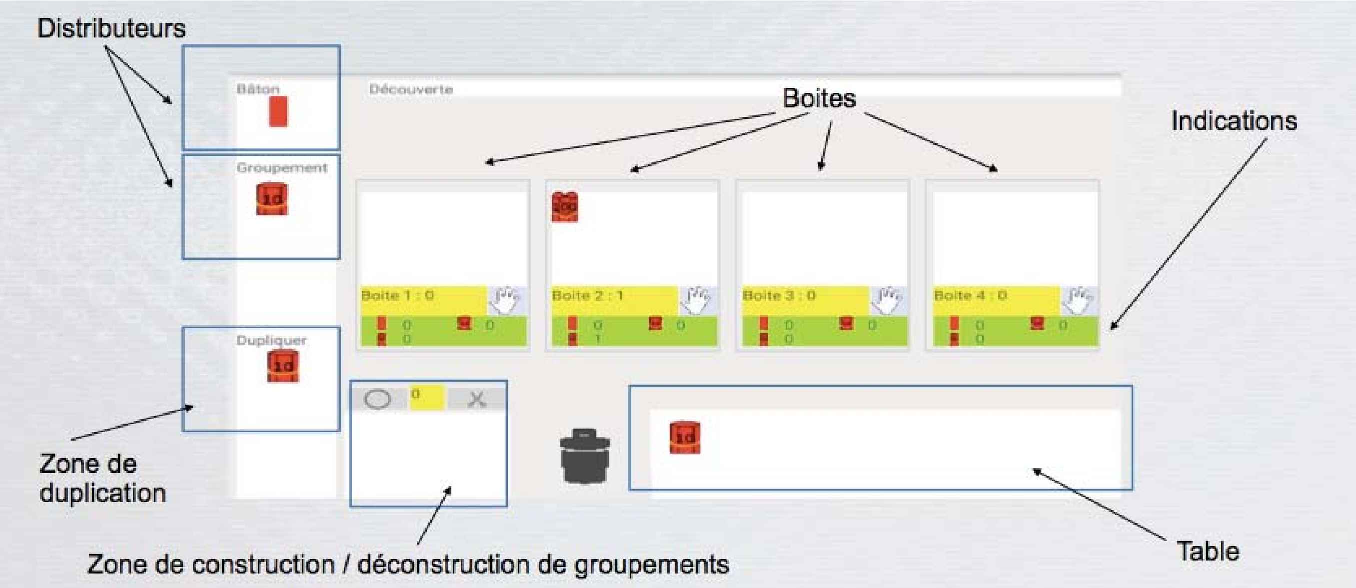


Figure 1. Interface de « Simbûchettes »

Ce dispositif nous donne la possibilité de choisir et de définir des paramètres permettant ainsi de générer plusieurs situations didactiques. Ces paramètres peuvent concerner l'affichage des constituants de l'interface (boîtes, zone de duplication, …) et donc les éléments disponibles à l'élève et les actions autorisées ou pas.

Par exemple, on peut paramétrer de sorte qu'un élève devant ranger des bûchettes dans les récipients, ne puisse pas mettre plus de 9 bûchettes ou 9 paquets de bûchettes dans un récipient.

Le dispositif « Simbûchettes » offre la possibilité de faire et de défaire rapidement des groupements permettant ainsi le travail sur les unités de numération. Il offre aussi la possibilité de réaliser des échanges entre les unités de numération favorisant ainsi le travail sur leurs relations. De plus, ce dispositif de bûchettes virtuelles peut apporter une réponse à la prise en charge des grands nombres avec la manipulation. En effet, il permet au niveau de la gestion du temps et du matériel de faire des répétitions : condition importante pour déstabiliser les techniques qui sont coûteuses. Il décharge l'enseignant par rapport au suivi des élèves lors de la manipulation tout en l'informant des actions des élèves.

2 Exemple de type de tâches

Considérons le type de tâches[2] « Traduire un nombre d'une représentation en matériel de numération non canonique (EMN) vers représentation en matériel de numération canonique (EMNC). Nous empruntons à Tempier (2013) la définition d'une écriture canonique : l'écriture canonique avec les unités de numération est l'écriture pour laquelle on a un nombre d'unités de chaque ordre inférieur ou égal à dix. En cas d'absence d'unités d'un certain ordre, on n'écrit rien à cet ordre (on n'écrit pas de 0 dans l'écriture canonique). » (p. 28).

Ce type de tâches permet de travailler le principe de position et/ou le principe décimal.

Nous présentons un exemple de tâches de ce type de tâches (cf. Figure 2).

La consigne est : Victor a déposé des bâtons et des paquets dans les boîtes sans faire attention. Aide-le à corriger son travail.

[2] Pour plus de détail cf. Brasset (2016)

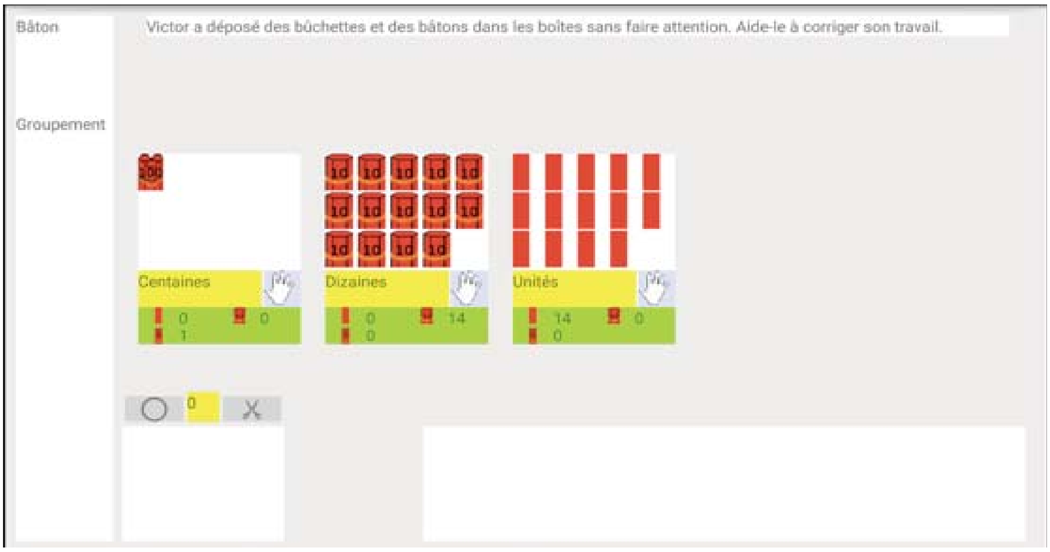


Figure 2. Exemple d'une activité dans « Simbûchettes »

Les paramètres de l'interface

- la réserve est vide
- la poubelle n'est pas disponible.
- La réserve : vide.
- Zone de duplication : n'est pas disponible.
- Zone de construction / déconstruction de groupements : disponible.
- Boîtes :

Boîte « Centaine »	Boîte « Dizaine »	Boîte « Unité »
1 paquet de 100	14 paquets de 10	14 bûchettes

- Table : disponible.
- Poubelle : n'est pas disponible.

Ce choix oblige l'élève à faire un groupement de 10 paquets de 10 et le déposer dans la boîte « Centaine ».

D'autres paramètres sont aussi à prendre en compte au niveau des actions de « déposer ». Par exemple, la possibilité ou non de déposer un paquet de 100 dans la boîte « Unité ».

IV - QUESTIONS DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

La conception de cet environnement a été motivée par le fait de reprendre un dispositif tangible qui a ses fondements didactiques et de l'enrichir par la dimension informatique afin de lever les verrous présentés dans le paragraphe I - 3.

Cependant deux questions préalables se posent :

(Q1) Est ce que cet environnement permet la viabilité des types de tâches permettant de travailler les aspects décimal et position ? Autrement dit, est ce qu'il possible de construire des tâches dans la simulation qui mobilisent les deux aspects de la numération ?

(Q2) Est ce qu'on retrouve les techniques de l'environnement tangible dans la simulation pour un même type de tâches ?

Par rapport à la première question nous avons répondu par l'affirmative en construisant des tâches comme celle de l'exemple donné dans le paragraphe précédent.

Notre communication est centrée donc sur la deuxième question. Pour répondre à cette question de recherche nous avons mis en place une méthodologie de recherche. Elle a impliqué un groupe de 30 élèves de deux classes de CE2 d'une école primaire de Grenoble. 7 élèves ont travaillé avec du matériel tangible constitué par des pailles et les autres 23 ont utilisé le dispositif de simulation « Simbûchettes ».

Tous les élèves ont travaillé sur les mêmes tâches liées au type de taches T « Dénombrer une collection d'objets », en accord avec les éléments théoriques discutés dans la première partie de cet article.

Nous avons construit les différentes tâches en nous appuyant sur le modèle praxéologique de référence développé par Chaachoua (2016) pour le type de tâches « Dénombrer une collection d'objets ». Les tâches relèvent de 3 sous types de tâches T1, T2 et T3 présentés dans le tableau 1. Toutes les tâches réalisées avaient la consigne suivante : « Combien de bûchettes y a-t-il en tout ? ». Dans le tableau ci-dessous, nous avons résumé les types de tâches avec des exemples de tâches proposées aux élèves.

Type de tâches	Exemple de tâches
T1 : Dénombrer une collection « en vrac »[3] qui représente un nombre multiple de 10 inférieur à 100	80 bûchettes « en vrac »
T2 : Dénombrer une collection totalement groupée[4] homogène[5]	9 dizaines de bûchettes
T3 : Dénombrer une collection totalement groupée hétérogène[6]	2 centaines de bûchettes, 23 dizaines de bûchettes, 15 unités simples

Tableau 1. Description générale des tâches proposées aux élèves avec des exemples

Pendant l'expérimentation nous avons enregistré l'activité mathématique des élèves à l'aide d'une caméra qui filmait les gestes des mains des élèves et à la fois les pailles qu'ils étaient en train de manipuler et la tablette dans le cas d'utilisation de « SimBûchettes ». Les vidéos ont été transcrites dans un deuxième temps pendant la phase de traitement de données.

Dans la section suivante, nous allons présenter quelques éléments d'analyse sur les techniques mises en œuvre par les élèves, dans les cas de la manipulation tangible et virtuelle.

V - ANALYSE DES DONNEES

Dans la première partie de l'analyse, nous allons présenter les techniques repérées dans l'expérimentation avec les pailles et dans celle avec « SimBûchettes » dans chaque tâche proposée. Pour faciliter le lecteur, nous avons résumé les techniques dans le tableau ci-dessous.

	Type de tâches 1	**Type de tâches 2**	**Type de tâches 3**
Techniques	τ_{11} : Faire des groupements de 10, compter de 10 en 10 (ou de X en X, en général)	τ_{21} : Compter en unités de numération, convertir de l'écriture en unité de numération à l'écriture en unité de numération simple	τ_{31} : Compter séparément en unités de numération chaque ordre, convertir de l'écriture à l'écriture en unités de numération simples. Additionner les nombres

[3] Le matériel est constitué seulement par des unités simples sans aucun groupement.

4 Le matériel est constitué par des groupements successifs par dix totalement réalisés.

5 Le matériel est constitué par un seul type de groupement à la même unité de numération.

[6] Le matériel est constitué par différents types de groupement avec différentes unités de numération.

	τ_{12} : Faire des groupements de 10, compter en unités de numération, convertir de l'écriture en unité de numération à l'écriture en unité de numération simple	τ_{22} : Compter de X en X, où X est une puissance de 10	τ_{32} : Compter séparément en unités de numération chaque ordre, convertir toutes les unités au plus petit ordre
	τ_{13} : Compter de n en n, où n est 1, 2, 3…	τ_{23} : Compter de n en n, où n est 1, 2, 3…	

Tableau 2. Description des techniques dans les cas de manipulation tangible et virtuelle liées au type de tâches « Dénombrer une collection »

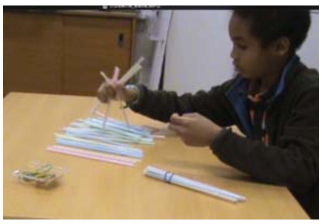
D'après cette analyse d'identification des techniques, nous pouvons conclure qu'on retrouve les mêmes techniques dans les deux types de manipulation. Autrement dit, le dispositif de simulation « Simbûchettes » permet de « conserver » toutes les qualités offertes par la manipulation tangible. Bien entendu les deux environnements ne favorisent pas de la même façon les techniques. Par exemple, dans « Simbûchettes » nous avons identifié pour le type de tâches T1 une mobilisation plus importante de la technique τ_{11}, faire de groupement de 10 et compter de 10 en 10, plus que dans le monde tangible où on avait une mobilisation plus importante de la technique τ_{13}, compter de 1 en 1 (De Simone & Chaachoua, 2017).

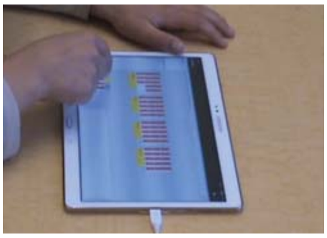
Dans la deuxième partie de l'analyse, nous allons rentrer dans la description de la mise en œuvre de ces techniques, en menant une analyse en termes d'ostensifs qui sont considérés comme les « briques » constitutives de ces techniques (Bosch et Chevallard 1999).

Si au niveau macro, on repère une conservation des techniques dans les deux types de manipulation, au niveau local nous relevons que la mise en œuvre de ces techniques est très différente dans les deux environnements.

Nous allons expliquer ce résultat sur une tâche du type de tâches T1 proposée aux élèves t1« Dénombrer une collection « en vrac » qui représente un nombre 80 ». La technique τ de T1 est décrite par les types de tâches suivants : T11 : « Faire des groupements de 10 » et T12 : « Compter de 10 en 10 (ou de X en X, en général ». En fait, on peut affirmer qu'à un premier niveau de description de la technique, on identifie les même composantes T11 et T12 dans les deux environnements : tangible et simulation. C'est à dire τ = {T11, T12}. Cependant, si on décrit les techniques de ces deux types de tâches en termes d'actions observables on constate des différences entre les deux environnements. Pour illustrer ces différences nous allons nous centrer sur la description des mises en œuvre du type de tâches T11 en termes des ostensifs qui peuvent être mobilisés dans les cas de manipulation avec les pailles et avec le dispositif «SimBûchettes».

Nous commençons par la description du déroulement de la technique de T11 dans le cas de deux élèves (E1 et E2), l'un qui travaille avec les pailles et l'autre avec « Simbûchettes » :

TANGIBLE	E1 prend 1 paille à la fois jusqu'à 10 et avec l'autre main il tient un élastique 	E1 vérifie d'avoir bien pris 10 pailles en les gardant dans les deux mains (il pose l'élastique sur la table) 	E1 met l'élastique autour de 10 pailles 

VIRTUEL	E2 déplace chaque bûchette dans la zone de groupement jusqu'à 10 	E2 appuie sur le bouton pour grouper 	E2 déplace le paquet sur la table 

Maintenant nous allons analyser la mise en œuvre de T11 en identifiant les différents ostensifs dans les deux types de manipulation. Pour faciliter l'analyse nous distinguons les ostensifs selon les différents types d'ostensifs décrits dans la partie théorique de cet article. Nous allons nous focaliser en particulier sur les ostensifs gestuels et sur ceux de la matérialité quelconque.

TANGIBLE		*E1 prend 1 paille à la fois jusqu'à 10 et avec l'autre main il tient un élastique* 	*E1 vérifie d'avoir bien pris 10 pailles en les gardant dans les deux mains (il pose l'élastique sur la table)* 	*E1 met l'élastique autour de 10 pailles* 
	Ostensifs gestuels et ostensifs de la matérialité quelconque	Ost. 1 : Geste pour prendre les pailles Ost. 2 : Geste pour garder l'élastique dans une main	Ost. 3 : Geste de poser l'élastique sur la table Ost. 4 : Geste pour vérifier d'avoir 10 pailles	Ost. 5 : Geste d'entourer les 10 pailles avec l'élastique
VIRTUEL		*E2 déplace chaque bûchette dans la zone de groupement jusqu'à 10* 	*E2 appuie sur le bouton pour grouper* 	*E2 déplace le paquet sur la table* 
	Ostensifs gestuels et ostensifs de la matérialité quelconque	Ost. 1 : Geste de déplacer les bûchettes dans la zone de groupement	Ost. 2 : Geste d'appuyer sur le bouton pour les grouper	Ost. 3 : Geste pour déplacer le paquet sur la table

Nous constatons que les ostensifs constituants la technique ne sont pas les mêmes. Cependant, les non-ostensifs auxquels ces ostensifs renvoient sont les mêmes. Par exemple, les ostensifs gestuels et de la matérialité comme « geste pour entourer 10 pailles » renvoient au non-ostensif « dizaine » comme celui de « déplacer 10 buchettes dans la zone de groupement et puis appuyer sur le bouton « grouper » pour faire un paquet de 10 ». Comme ce qui est enjeu didactique est bien le non ostensif, on peut dire que les deux environnements permettent de travailler le même non-ostensif à travers la manipulation des ostensifs différents.

VI - CONCLUSION

Nous pouvons répondre affirmativement à la question de recherche Q2 « Est ce qu'on retrouve les techniques de l'environnement tangible dans la simulation pour un même type de tâches », en disant qu'avec la manipulation virtuelle à l'aide du dispositif « Simbûchettes » nous avons retrouvé les mêmes techniques identifiées lors de la manipulation tangible avec les pailles. Donc, nous pouvons affirmer que l'utilisation du dispositif de simulation permet de « conserver » les techniques mobilisées dans la manipulation tangible. Néanmoins, nous avons observé que la mise en œuvre de ces techniques dans les cas tangible et virtuelle est différente par la manipulation des ostensifs mobilisés dans les deux cas. Cependant ils renvoient aux mêmes non ostensifs qui sont enjeux d'apprentissage. Ce qui nous permet de consolider notre démarche sur la conception du dispositif « Simbûchettes » comme réponse aux verrous (1) et (2).

VII - BIBLIOGRAPHIE

BEDNARZ N., JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, **33**, 5-31

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(1)**, 77-124.

BRASSET N. (2016) Simulation du matériel de numération « Bûchettes », in *Actes du 43ième Colloque Copirelem*.

BRASSET N. (2017) *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH. Etude de facteurs de type histoire didactique*. Thèse de de l'Université Grenoble Alpes. Grenoble.

CHAACHOUA H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves* (Note de synthèse HDR). Grenoble : Université Joseph Fourier.

CHAACHOUA H., BESSOT A (2017) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

CHAACHOUA Y. (2016) *Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modèle T4TEL*. Mémoire Master Didactique des sciences. Université Grenoble Alpes.

CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle*, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle, 91-120, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221–266.

DE SIMONE M., CHAACHOUA H. (2017) The transposition of counting situations in a virtual environment. *In The 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Lyon.

PAROUTY V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3, in *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres,* IREM de Toulouse

RAOUL-BELLANGER A., BELLANGER F. (2010) *Construire les notions mathématiques*, 50 activités de manipulation, Retz

SERFATI M. (2005) *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Paris : Pétra.

TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, **86**, 59- 90.

WANG P., TCHOUNIKINE P., QUIGNARD M. (2017) Chao: a framework for the development of orchestration technologies for Technology-Enhanced Learning activities using tablets in classroom. In *International Journal of Technlogy Enhanced Learning*

ANALYSE DIDACTIQUE DES DIFFÉRENTES TEMPORALITES AU SEIN DES DISPOSITIFS ULIS

Frédéric DUPRÉ
Doctorant
Aix Marseille Université - ADEF
frederic.dupre@ac-nancy-metz.fr

Résumé
Notre recherche s'inscrit dans le projet PIMS (Assude, Perez, Suau, & Tambone, 2015) qui vise à étudier des pratiques professionnelles en situations inclusives essentiellement dans le cadre de la Théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Notre objet d'étude concerne les dispositifs ULIS (unités localisées pour l'inclusion scolaire) au collège qui permettent à des élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité dans une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien. L'organisation de ces dispositifs place les ERIH au cœur de deux systèmes didactiques : celui de la classe ordinaire et celui dit du regroupement ULIS. L'articulation fonctionnelle entre différents systèmes est un problème qualifié d'ardu en didactique des mathématiques (Leutenegger, 2000). Notre recherche vise à questionner les actions permettant de synchroniser les différentes temporalités en jeu afin de coordonner ces deux systèmes didactiques (Assude et al., 2016). Nous présentons ici les résultats d'une première enquête menée dans les dispositifs ULIS implantés dans les collèges des Vosges (10 principaux[1], 15 professeurs de mathématiques et 11 coordonnateurs[2]). Celle-ci a permis de montrer que du point de vue des acteurs, peu de liens temporels semblent exister entre la classe ordinaire et les moments au sein du regroupement Ulis. Les liens évoqués sont ensuite observés à l'échelle temporelle d'un chapitre traitant des écritures fractionnaires en classe de 5e.

I - ÉLEMENTS THEORIQUES ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Notre recherche menée dans le cadre d'un Doctorat[3] s'inscrit dans le projet PIMS[4] (Assude, Perez, Suau, & Tambone, 2015) qui vise à étudier des pratiques professionnelles en situations inclusives essentiellement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). L'objet de notre étude concerne les dispositifs ULIS[5] au collège qui permettent à des élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité au sein d'une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien coordonné par un enseignant spécialisé. Les élèves qui bénéficient de ces dispositifs ont un emploi du temps partagé entre des temps en classe ordinaire (au sein d'une classe de référence) et des temps en regroupement spécialisé (ce regroupement est constitué exclusivement d'ERIH bénéficiant du dispositif ULIS et d'un enseignant spécialisé majoritairement issu du premier degré). Ces élèves se retrouvent de fait au cœur de deux systèmes didactiques : celui de la classe ordinaire et celui dit du regroupement ULIS.

Nous allons dans un premier temps présenter les résultats d'une enquête exploratoire menée dans les collèges du département des Vosges, ensuite nous nous attacherons à définir les éléments théoriques qui nous seront nécessaires pour pouvoir formuler nos questions de recherche.

---

[1] En France, le principal est le directeur d'un collège.

[2] Le coordonnateur Ulis est un enseignant spécialisé qui a une mission principale d'enseignement au sein du regroupement spécialisé mais également une mission de coordination avec les enseignants des classes ordinaires ainsi qu'une mission de personne ressource au sein de l'établissement.

[3] Doctorat débuté en décembre 2015 à l'Université d'Aix-Marseille, sous la direction de Teresa ASSUDE (EA 4671 ADEF) et de Jean-Michel PEREZ (EA 2310 LISEC)

[4] Pratiques inclusives en milieu scolaire ; projet porté par les ESPE de Lorraine et de Provence

[5] Unités localisées pour l'inclusion scolaire.

1 Résultats d'une première enquête exploratoire

Nous avons réalisé au printemps 2016 une enquête exploratoire[6] dans les collèges du département des Vosges. Celle-ci avait pour objectif de connaître le fonctionnement des dispositifs ULIS à l'échelle du département afin de pouvoir dégager des points communs et des différences à l'échelle macro et méso. En ce qui concerne le niveau macro, nous avons cherché à observer l'organisation des dispositifs au sein de l'établissement. Au niveau méso, nous avons souhaité appréhender les liens entre les différents acteurs. Le retour massif[7] des enquêtes nous a tout d'abord permis de confirmer la présence en classe de mathématiques de 32 ERIH (parmi les 144 ERIH bénéficiant du dispositif dans les 13 collèges répondant). Dans ces collèges, cela correspond à 20 enseignants de mathématiques qui sont amenés à travailler avec des ERIH bénéficiant du dispositif au sein de la classe ordinaire.

Trois catégories d'acteurs ont été sollicitées dans le cadre de cette enquête : principaux, professeurs de mathématiques et coordonnateurs. Les questionnaires étaient organisés autour de quatre thèmes principaux, l'organisation du dispositif au sein du collège, les collaborations inter professionnelles, les représentations liées au handicap et les liens entre la classe de mathématiques et le regroupement spécialisé. Nous allons nous attacher à présenter brièvement les principaux enseignements de cette enquête.

1.1 Fonctionnement des dispositifs au niveau Macro

D'un point de vue macro, les 13 collèges semblent avoir une organisation globale proche, que ce soit au niveau des matières supports aux inclusions mais également sur la manière de concevoir l'organisation du travail. Le public des ULIS du département est en majorité composé d'élèves ayant des troubles des fonctions cognitives. La notion de handicap n'est pas perçue de la même façon en fonction des acteurs. Pour les enseignants de mathématiques, le handicap ne nécessite pas forcément d'adaptations, ou lorsque des adaptations sont proposées, celles-ci restent peu spécifiques. Pour les enseignants spécialisés par contre, le handicap nécessite forcément de penser à des adaptations. Les coordonnateurs considèrent la mise en place effective d'adaptations comme une des difficultés majeures pour les enseignants de mathématiques qui accueillent des élèves de l'ULIS. Cette différence d'appréciation entre les deux catégories semble montrer que les enseignants de mathématiques qui scolarisent des élèves du dispositif les considèrent comme des élèves ordinaires et n'envisagent pas une évolution de leurs pratiques pour répondre aux spécificités des publics accueillis et en particulier à la situation de handicap. Les réponses obtenues semblent montrer que si le dispositif fonctionne avec quatre catégories d'acteurs (direction, enseignants du collège, AESHco[8] et coordonnateur), il apparaît que les collaborations et les échanges entre ces différentes catégories se font sur des registres différents. Seul le lien entre l'AESHco et le coordonnateur semble formalisé dans la plupart des dispositifs à travers un temps dévolu à la coordination entre ces deux catégories. Les liens entre la direction et le coordonnateur semblent principalement informels de même que ceux avec les enseignants de mathématiques.

1.2 Fonctionnement des dispositifs au niveau Méso

À l'échelle méso, cette absence de liens formalisés entre enseignants de mathématiques et coordonnateur se reflète dans les relations énoncées par les acteurs entre la classe et le dispositif. Les temps de regroupements ne semblent pas consacrés à un travail spécifique en amont des séances de mathématiques, ils semblent plutôt être investis pour reprendre ou finir les travaux débutés en classe. Ces temps semblent bien identifiés par les enseignants de mathématiques comme un dispositif de soutien a postériori, principalement avec une vision provisionnelle du temps disponible.

Organiser l'aide aux élèves en difficulté dans le cadre d'un système didactique auxiliaire (SDA) n'est pas nouveau dans le système éducatif français (Tambone, 2008, 2014). Cette conception de l'aide dans le cadre d'un dispositif auxiliaire a également été étudiée au Canada avec pour particularité de placer le

---

[6] Enquête réalisée dans l'ensemble des 15 collèges Vosgiens qui ont un dispositif Ulis. L'enquête était composée de trois volets (à destination du principal, des enseignants de mathématiques et du coordonnateur Ulis)

[7] Les retours traités concernent 13 collèges (10 principaux, 15 professeurs de mathématiques et 11 coordonnateurs Ulis)

[8] Accompagnant d'élèves en situation de handicap collectif

SDA en amont du système didactique principal (Assude et al., 2016). Les textes fonctionnels[9] ayant un statut hiérarchique (Perez, 2015) qui organisent le fonctionnement des dispositifs ULIS[10] précisent que le coordonnateur du dispositif peut intervenir dans tous les lieux de scolarisation de l'élève et que les objectifs d'apprentissage requièrent des modalités adaptés (MEN, 2015). Le coordonnateur a la possibilité d'intervenir à la fois en regroupement dans le SDA mais également en classe ordinaire dans le SDP. Cette dernière possibilité semble peu investie au regard des retours de l'enquête. Ces premières observations nous amènent à nous interroger sur les liens potentiels entre la classe et les temps de regroupement.

1.3 Liens potentiels entre la classe et les temps de regroupement

Afin de pouvoir avoir une vision pratique des articulations existantes entre les différents systèmes didactiques au sein des dispositifs ULIS, nous avons cherché à travers cette première enquête exploratoire à dresser un état des lieux des liens déclarés par les acteurs (enseignants de mathématiques et coordonnateurs) au sein de ces collèges. A priori, trois types de liens peuvent exister : SDA est en amont de SDP ; SDA est présent dans le SDP (coprésence du coordonnateur Ulis en classe de mathématiques) ; SDA est postérieur au SDP, dans ce cas le système auxiliaire peut proposer du temps supplémentaire pour finir un travail débuté dans le SDP ou alors revenir sur un objet de savoir rencontré dans le système principal.

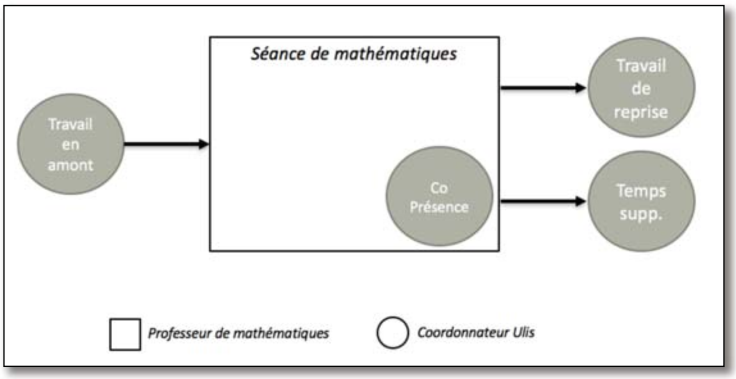


Figure 1. Représentation des liens potentiels entre la classe et le dispositif

L'enquête a permis de montrer que les liens déclarés par les différents acteurs semblent se situer majoritairement après le SDP dans une vision provisionnelle du temps offert à l'élève. Les liens en amont et la coprésence semblent minoritaires dans le département des Vosges. La question des rencontres entre les acteurs semble être une question vive car si pour la catégorie « professeurs de mathématiques » la question des liens interprofessionnels ne semble pas se poser, pour la catégorie « coordonnateurs » ces liens avec les enseignants sont déclarés dans notre enquête comme principale source de difficulté dans l'exercice du métier.

Cette question vive du lien entre les acteurs mise en lumière par notre enquête exploratoire nous amène à nous questionner sur l'articulation fonctionnelle entre différents systèmes didactiques. Dans ses travaux, Leutenegger qualifie cette articulation de problème ardu en didactique des mathématiques (2000). Notre travail vise à observer les liens existants entre les différents systèmes didactiques en jeu au sein des dispositifs ULIS, pour cela nous faisons le choix de nous intéresser aux différentes temporalités qui coexistent dans ces systèmes didactiques et nous présentons ici une analyse à une échelle temporelle bornée par l'étude d'un chapitre qui traite des nombres en écriture fractionnaire en classe de 5e. Nous allons maintenant présenter les éléments théoriques qui nous seront nécessaires pour réaliser cette analyse.

9 Perez (2015) propose d'organiser les textes fonctionnels en cinq catégories : principe/valeur (déclarations, conventions) ; législatif (loi) ; réglementaire (décret, arrêté) ; hiérarchique (circulaire) ; expertise (rapport)

10 Le fonctionnement de ces dispositifs relève des circulaires n°2010-088 du 18/06/2010 et n°2015-129 du 21/08/2015

2 Éléments théoriques

L'institution scolaire ainsi que les différentes activités qui s'y déroulent sont régies par le temps physique qui se mesure en temps d'horloge (Mercier, 2001). De nombreux travaux ont porté sur la notion provisionnelle du temps que l'on peut économiser ou dépenser. Dans son ouvrage, Chopin (2011) propose un état des lieux historique de ces travaux, que ce soit sur le continent américain ou en Europe. Une vision récurrente qui traverse le système scolaire français est d'offrir plus de temps aux élèves en difficultés (MEN, 2016), que ce soit à travers des réponses de droit commun comme les activités pédagogiques complémentaires (du temps en plus après la classe) ou avec les réseaux d'aide ou encore à travers des réponses spécifiques liées à la MDPH et donc à la reconnaissance institutionnelle de la situation de handicap. Cette vision provisionnelle (qui vise à offrir plus de temps aux élèves en difficulté) retenue par le cadre institutionnel est paradoxale car différents travaux de recherche ont montré que le temps est une dimension peu explicative de la réussite des élèves les plus faibles. Dans son travail, Chopin a en particulier montré que le temps supplémentaire bénéficie avant tout aux élèves les plus forts (2011).

La notion de temps dans l'enseignement peut donc être considérée comme une question vive. L'enquête exploratoire présentée auparavant a mis en évidence qu'une utilisation du regroupement peut être dédiée à offrir « du temps en plus », il semblerait que cette utilisation soit la plus fréquente. Pour notre recherche, nous nous situons essentiellement dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous allons maintenant définir les différentes composantes de la temporalité que nous mobiliserons ensuite pour énoncer nos questions de recherche. Les trois composantes de la temporalité que nous allons définir sont le temps didactique, le temps d'apprentissage et le temps praxéologique. Après avoir défini ces notions, nous chercherons à voir en quoi ce cadre théorique nous permet de dégager des indicateurs pour observer l'articulation entre le SDA et le SDP.

2.1 Le temps didactique

Le temps didactique est propre au système dans lequel il apparaît. Dans le cadre des systèmes didactiques, le temps didactique correspond au découpage du savoir dans une durée. Il se mesure par le progrès dans l'exposition aux savoirs. C'est à dire qu'il évolue à mesure que des objets nouveaux sont introduits par l'enseignant. À mesure que ces objets nouveaux sont introduits, ceux-ci deviennent obsolètes. Pour continuer de faire progresser le temps didactique, l'enseignant doit alors introduire de nouveaux objets (Mercier, 2001). Seul l'enseignant est capable de ce type d'anticipation, il est responsable de la chronogénèse du savoir (Chevallard, 1991). Il doit à la fois assurer une progression visible du temps didactique mais également organiser cette progression afin de faciliter l'étude du savoir par les élèves. Il réalise donc une progression normalisée, quelque soient les diversités de ses élèves (Mercier, 2012). Pour Mercier et Chevallard, le temps didactique est le temps officiel qui règle l'enseignement. Ce temps didactique n'est pas synchrone avec le temps d'apprentissage, c'est ce que nous allons voir maintenant.

2.2 Le temps d'apprentissage

Nous venons de voir que le temps didactique était directement lié au savoir. Du point de vue de l'élève il s'agit de considérer le temps de l'apprentissage. Ce temps avance au rythme de la construction de nouveaux objets de savoir (René de Cotret & Giroux, 2003). Lorsque des objets nouveaux sont introduits, l'élève doit se les approprier. Cela passe par une nouvelle organisation intellectuelle qui change le rapport que l'élève a avec certains objets devenus obsolètes. Cette réorganisation implique des temps de reprise que l'enseignant ne peut assumer au risque d'arrêter le temps didactique (Mercier, 2001). Le temps didactique et le temps d'apprentissage sont liés mais ne sont pas équivalents, le temps d'apprentissage n'est pas un temps linéaire comme le temps didactique. Le temps d'apprentissage est propre à chaque élève et n'est pas isomorphe au temps de l'enseignement (Assude et al., 2016). Afin de préciser les liens entre temps didactique et temps d'apprentissage, une troisième notion liée aux praxéologies est introduite.

2.3 Le temps praxéologique

Des études portant sur des dispositifs d'aide en dehors de la classe ont montré que le temps didactique n'avançait pas dans ce type de dispositif. La notion de temps praxéologique est introduite afin de « préciser l'analyse du temps d'enseignement et de la dialectique ancien/nouveau » et correspond au temps d'évolution des praxéologies (Assude et al., 2016, p. 214). La notion de praxéologie est composée de deux blocs : le bloc *praxis* qui est relatif aux types de tâches et aux techniques qui s'y rapportent et le bloc *logos* qui est lui relatif au discours sur les techniques (Chevallard, 1999). Toute évolution dans l'une des composantes praxéologiques se traduit par une évolution du temps praxéologique. Ainsi, lorsque le temps didactique avance, le temps praxéologique avance également. Cependant, la réciproque n'est pas de mise (Assude et al., 2016).

Ces différentes composantes du concept de temporalité vont nous permettre de formuler nos questions de recherche.

3 Questions de recherche

Notre recherche vise à questionner les actions permettant de synchroniser les différentes temporalités en jeu afin de coordonner deux systèmes didactiques (Assude et al., 2016). Notre question de recherche peut se formuler de la façon suivante : *quelles sont les relations entre les différentes temporalités existantes dans les systèmes didactiques en jeu au sein d'un dispositif Ulis au collège ?* Nous proposons de décliner cette question principale à travers trois autres interrogations : *quels sont les objets mathématiques communs aux deux systèmes didactiques*, *quel est le sens des flux de ces objets ?* et *le SDA permet-il de faire avancer le temps praxéologique ?*

Pour étudier ces questions, nous allons considérer trois indicateurs. Le premier concerne le texte du savoir que l'on trouve dans les programmes du cycle 3 et du cycle 4. Le second concerne les objets introduits dans la classe d'un point de vue chronologique. Le dernier indicateur concerne les rencontres entre les différents acteurs (enseignant de mathématiques, coordonnateur, AESHco).

II - PRESENTATION DU DISPOSITIF DE RECHERCHE

Nous allons maintenant nous attacher à présenter le dispositif de recueil de données retenu pour répondre à nos questions de recherche. Nous présenterons ensuite les matériaux recueillis ainsi que la méthodologie retenue pour l'analyse de ceux-ci.

1 Dispositif de recueil de recherche

Notre dispositif de recueil de données est articulé en deux phases qui prennent appui sur une méthodologie éprouvée dans des recherches antérieures (Assude, Perez, Suau, & Tambone, 2015; Leutenegger, 2000). La première phase consiste en la constitution d'un dossier de traces à l'échelle temporelle d'un chapitre de mathématiques en classe de cinquième, ce dossier est accompagné d'entretiens. La seconde phase correspond à la captation de deux séances successives au sein de la classe de mathématiques et du regroupement ULIS. À la suite de ces enregistrements et de façon à permettre aux enseignants de revenir sur les captations dans une visée compréhensive, pour chaque séance une analyse simple et une analyse croisée sont réalisées (Clot, Faïta, Fernandez, & Scheller, 2000; Assude et al., 2015).

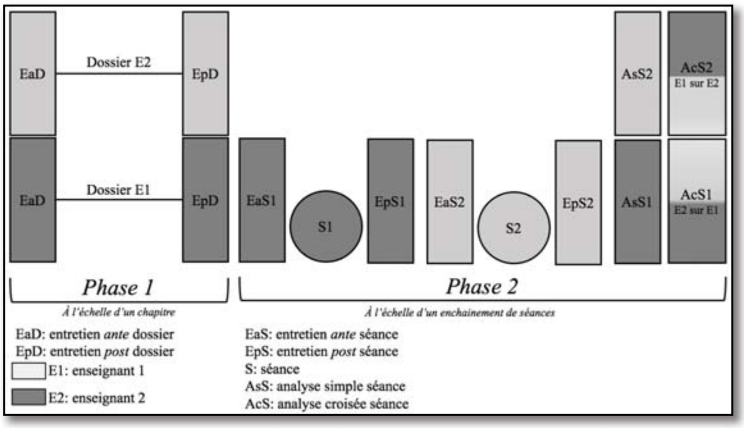


Figure 2. Schématisation du dispositif de recueil de données

Dans cette analyse, nous nous limiterons à la phase 1 concernant l'étude du dossier. Celle-ci poursuit un double objectif : du point de vue des enseignants, elle permet en quelque sorte d'initialiser l'entrée dans le projet de recherche et du point de vue du chercheur, elle permet à la fois d'appréhender des tractations entre les acteurs sur un temps long mais aussi, suite à cette première analyse, de préparer les captations en classe qui correspondront à un grain plus fin. La constitution du dossier étudié est bornée du point de vue temporel par le chapitre *les nombres en écritures fractionnaire* en classe de 5e.

Le recueil de données s'est déroulé dans un collège qui compte 395 élèves à la rentrée 2016. Il comprend une structure classique pour le département des Vosges de quatre divisions par niveaux. Dans les outils de synthèse académique[11] ainsi que dans le contrat d'objectifs du collège, le dispositif ULIS n'y apparaît pas explicitement. Les trois objectifs de ce contrat sont : *amener un maximum d'élève au niveau S3C*[12] – *développer l'ambition des élèves pour élever leur niveau de qualification – développer l'autonomie, le comportement citoyen et l'ouverture culturelle*. L'enseignant de mathématiques de ce collège a répondu spontanément à notre demande lorsque nous avons sollicité des binômes enseignants/coordonnateurs afin de participer à notre projet de recherche. Le recueil de données se déroule dans une classe de 5e dans laquelle deux élèves (Martin et Florine) bénéficient du dispositif ULIS. Nous allons dans un premier temps préciser la nature des traces recueillies avant de présenter ensuite les éléments des programmes du cycle 3 et du cycle 4 correspondant au chapitre qui borne ce dossier et qui nous seront ensuite utiles en vue de l'analyse.

2 Les différentes traces recueillies

Les traces recueillies sont de trois types. Il y a tout d'abord cinq entretiens (préliminaire et post-dossier) avec l'enseignant de mathématiques et la coordonnatrice sous une forme semi-directive (Campenhoudt & Quivy, 1995; Grawitz, 2001). Ces entretiens visent à prendre connaissance du projet initial d'enseignement en ce qui concerne le chapitre « *les nombres en écriture fractionnaire* » puis, à l'issue de la constitution des dossiers, à expliciter les matériaux recueillis par les enseignants. Un entretien non prévu initialement a été réalisé avec Rachel, l'AESHco du dispositif, car il est apparu dans l'entretien *post*-dossier réalisé avec la coordonnatrice que l'aide humaine était intervenue dans ce chapitre. L'ensemble de ces entretiens sont transcrits de façon à pouvoir y faire référence en indiquant un tour de parole (noté « tdp ») précis. Le second type de traces correspond à la constitution de deux dossiers, l'un par l'enseignant de mathématiques, l'autre par la coordonnatrice du dispositif. Ces dossiers comportent différents matériaux choisis et collectés par l'enseignant (Leutenegger, 2000) concernant le chapitre étudié et qu'il estime intéressant de transmettre dans le cadre de notre recherche. Les matériaux recueillis sont les suivants :

[11] Indicateurs consultés sur la plateforme académique PARME

[12] Socle commun de connaissances et de compétences

Dossier enseignant de mathématiques	*Dossier coordonnatrice Ulis*
La trace écrite de la leçon. Les exercices réalisés par les élèves. Le devoir maison réalisé. Un panel des évaluations des élèves (n=10). Une extraction du cahier de texte numérique de la classe en mathématiques.	Les emplois du temps des élèves. Un journal des demandes de Martin et de Florine lors des regroupements accompagné de photos des exercices. L'évaluation de Florine terminée en ULIS avec les annotations de l'AESHco concernant les aides apportées. Un dossier d'aide utilisé après l'évaluation en regroupement avec Florine.

3 Méthodologie d'analyse

L'organisation de l'analyse des différents matériaux recueillis débute par l'étude des différentes traces des deux dossiers afin de relever dans chacun de ces documents les différentes tâches et types de tâches qui y apparaissent. Nous confrontons ensuite ces tâches au savoir prescrit, qui résulte de la transposition didactique externe afin de chercher à les positionner dans le cadre de la dialectique ancien/nouveau. L'exploration des programmes[13] concernant ce chapitre sur les nombres en écriture fractionnaire en classe de 5e nous montre que les objets potentiellement nouveaux dont l'enseignant peut s'emparer pour l'année de cinquième sont avant tout liés aux diverses représentations d'un même nombre et au travail relatif aux proportions et aux fréquences. Parmi les objets repérés dans les programmes de cycle 4, nombreux sont ceux qui ont déjà pu être rencontrés auparavant mais qui sont appelés à être retravaillés dans une forme plus complexe.

Une fois ce premier niveau d'analyse réalisé, nous confrontons les points saillants qui émergent à l'étude des entretiens (préliminaire et post-dossier). Ces entretiens sont utilisés dans une visée explicative afin de mieux comprendre les projets des enseignants ainsi que leurs rapports aux objets qui apparaissent dans les dossiers.

Après avoir présenté notre dispositif de recherche ainsi que la méthodologie d'analyse retenue, nous allons maintenant nous concentrer sur l'analyse des différents matériaux collectés par les enseignants dans les deux dossiers collectés.

III - ANALYSE D'UN CHAPITRE TRAITANT DES ECRITURES FRACTIONNAIRES EN CLASSE DE CINQUIEME

Pour réaliser l'analyse des matériaux recueillis, nous allons dans un premier temps repérer les objets introduits par l'enseignant de mathématiques. Nous observerons ensuite ceux transmis dans le second dossier par la coordonnatrice en séparant ceux travaillés en regroupement et ceux pris en charge par l'AESHco dans le cadre d'un temps dédié à de l'aide aux devoirs pour les élèves du dispositif ULIS.

1 Les objets rencontrés dans la classe de mathématiques

Dans un premier temps, la trace écrite de la leçon, qui correspond à la transposition didactique interne (Chevallard, 1991), nous permet d'avoir une vision des objets d'enseignement retenus par l'enseignant. Le texte de la leçon est organisé en deux blocs, une première partie concerne le sens d'une écriture fractionnaire et ensuite une seconde concernant la fraction d'une quantité. L'objet à enseigner « utiliser diverses représentations d'un même nombre » est transposé en objet d'enseignement « sens d'une écriture fractionnaire ». Celui-ci est précisé par l'enseignant dans le texte de la leçon : *une écriture fractionnaire peut représenter un quotient, une quantité, un nombre (décimal ou rationnel) et une proportion*. Le

[13] L'année 2016/2017 correspondant à la mise en place de nouveaux programmes nous nous sommes intéressés aux programmes de 2008 et de 2016 concernant le cycle 3 et le cycle 4. Nous considérons les objets repérés dans les programmes de 2008 au cycle 3 et au cycle 4 (année de 6ème) comme potentiellement anciens et les objets repérés dans les programmes de 2016 au cycle 4 (année de 5ème) comme potentiellement nouveaux.

second objet d'enseignement introduit est celui du « calcul de la fraction d'une quantité », il correspond à l'objet à enseigner « calculer des proportions ».

La leçon se termine par une partie bilan qui permet à l'enseignant de préciser aux élèves ce qu'il attend d'eux et ce qu'ils doivent retenir, cette partie est d'ailleurs évoquée par l'enseignant lors de l'entretien *post*-dossier : « j'ai pris l'habitude aussi cette année de faire un petit bilan, un résumé de ce qu'il faut savoir faire à la fin d'un chapitre pour bien lister un peu les compétences euh et les aider dans leurs révisions euh savoir bien sur quels points ils doivent réviser […] je leur ai demandé ça les aide » (tdp n°25). Ce bilan permet de découvrir deux points qui n'apparaissent pas dans le corps de la leçon : *savoir encadrer une fraction* et *donner l'abscisse d'un point sous forme fractionnaire* qui correspondent à des objets à enseigner que l'on retrouve dans le texte du savoir au Cycle 3 (« repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée » et « encadrer une fraction par deux entiers consécutifs »). Nous pouvons penser que le fait de mentionner ces objets réputés anciens permet à l'enseignant de limiter leur obsolescence.

L'entretien préliminaire au dossier nous permet de préciser la position de l'enseignant de mathématiques par rapport à la dialectique ancien/nouveau en ce qui concerne ce chapitre : « les écritures fractionnaires […] j'aborde cette notion pour la première fois même si bon c'est une notion bien sûr que eux connaissent depuis plusieurs années » (Entretien *préliminaire*-dossier, tdp n°6). Il précise ensuite son projet d'enseignement et détaille les objets nouveaux qui vont être introduits : « on refait le point sur les différents sens de l'écriture fractionnaire […] accentuant sur la partie nombres quotient celle qu'ils ont le moins développée et la partie aussi le sens d'une fraction étant vu comme une proportion […] c'est un sens qu'ils découvrent on va en profiter aussi pour retravailler sur les valeurs approchées, les arrondis et bien insister sur le fait qu'un nombre en écriture fractionnaire peut être un nombre décimal ou pas […] en deuxième partie on va retravailler sur le calcul de la fraction d'une quantité » (Entretien *préliminaire*-dossier, tdp n°6). Le projet de l'enseignant de mathématiques permet de faire avancer le temps didactique en introduisant deux objets nouveaux. Cependant, les élèves devront également mobiliser des objets anciens rencontrés au cycle 3, ainsi, l'enseignant sollicite la mémoire didactique des élèves. Afin de préciser ces objets, nous allons observer les différents types de tâches qui les constituent.

Le dossier constitué par l'enseignant de mathématiques comportait également les différents exercices réalisés, un devoir maison et un panel des évaluations. L'analyse des différents exercices a consisté à déterminer pour chacun d'eux le type de tâche, la ou les tâches correspondantes, ainsi que les techniques associées. L'analyse des 17 exercices proposés en classe de mathématiques nous permet de voir que 7 types de tâches (T) sont rencontrés. Ceux-ci correspondant à 15 tâches (*t*) différentes. La fréquence des rencontres de ces types de tâches permet d'avoir une vision des priorités définies par l'enseignant, nous en proposons ici une synthèse reprenant ce qui est proposé aux élèves pendant ce chapitre au sein de la classe de mathématiques (exercices réalisés et corrigés en classe, lors du devoir maison et lors du devoir surveillé en classe).

	Classe	*DM*	*DS*	***Total***
Compléter une égalité	1	0	1	**2**
Convertir un nombre écrit dans une forme sous une autre forme	3	1	1	**5**
Se repérer sur une demi-droite graduée	2	1	1	**4**
Exprimer une proportion	3	0	2	**5**
Encadrer un nombre par deux entiers consécutifs	1	0	1	**2**
Calculer la fraction d'une quantité	6	0	2	**8**
Exprimer une partie d'une surface sous la forme d'une fraction	0	0	1	**1**

Figure 3. Représentation des fréquences de rencontres des tâches repérées

L'analyse des exercices proposés met en avant une avancée du temps didactique dans cette classe car la majorité des exercices mettent en avant des types de tâches repérées comme nouveaux. Il apparaît cependant que des objets identifiés comme anciens, bien que non travaillés dans la leçon, restent présents tout au long de la séquence jusque dans les exercices retenus par l'enseignant dans l'évaluation finale. Il semble y attacher une certaine importance lorsqu'il déclare : « moi j'ai des satisfactions ça concerne […] la droite graduée, ça a plutôt bien fonctionné » (Entretien *post*-dossier, tdp n°23). La persistance de ces objets permet de limiter leur obsolescence et peut traduire une volonté de l'enseignant de favoriser la mémoire didactique des élèves dans le sens où il ne revient pas sur ces objets anciens dans la leçon mais qu'à travers les exercices proposés, il permet aux élèves de les remobiliser avant de complexifier les tâches proposées.

L'analyse des tâches rencontrées permet essentiellement de dégager les priorités retenues par l'enseignant de mathématiques dans ce chapitre. Trois types de tâches sont particulièrement investis : *calculer la fraction d'une quantité*, *exprimer une proportion* et *convertir un nombre écrit dans une forme sous une autre forme*.

Après avoir observé les tâches proposées en classe de mathématiques, nous allons nous intéresser à celles qui sont également présentes en regroupement ULIS pour les deux ERIH de cette classe de 5e qui bénéficient du soutien du dispositif.

2 Les objets rencontrés en regroupement ULIS

Les emplois du temps transmis par la coordonnatrice nous permettent de voir que les deux élèves (Martin et Florine) présents dans la classe de 5e et qui bénéficient de l'appui du dispositif Ulis ont quatre heures en regroupement. Ces quatre heures potentielles ne semblent pas forcément effectives, dans l'entretien préliminaire la coordonnatrice indique : « mes élèves de 5e4 ULIS viennent deux ou trois heures en ULIS parce qu'ils suivent tous les cours » (tdp n°2), elle ajoute également « elle [Florine] a du mal à revenir en ULIS car comme ils sont beaucoup inclus, ils veulent vraiment faire partie de la classe donc ça nous arrive des fois d'aller la chercher en permanence » (tdp n°8). Dans le dossier transmis, un journal des aides a été tenu, il a permis de tenir une trace chronologique des demandes d'aide lors des temps de regroupement pour les deux ERIH ainsi que les réponses données. Ce journal met en avant trois demandes formulées par les ERIH de la classe de 5e, une demande lors d'un temps de regroupement traitée par la coordonnatrice et deux autres demandes traitées par l'AESHco lors d'un temps d'aide aux devoirs. Ce document nous montre tout d'abord que les objets travaillés sont directement liés à des demandes formulées par les élèves. Martin et Florine prennent la responsabilité de déplacer des objets issus de la classe de mathématique jusque dans le regroupement ULIS.

La première demande traitée en regroupement venait de Martin et portait sur un exercice du devoir maison. Elle a lieu après quatre séances en classe de mathématiques (en fin de chapitre). L'exercice en question visait à partir d'un tableau à double entrée[14] à proposer une écriture fractionnaire puis une approximation décimale des densités de population pour quatre pays. L'enseignant de mathématiques avait proposé une aide en indiquant la formule nécessaire pour calculer la densité de population d'un pays. La formule est donnée sous la forme d'un quotient présenté en écriture fractionnaire. L'unité est indiquée. La coordonnatrice transmet dans le dossier deux photos de l'exercice, l'une avant la demande d'aide et la seconde une fois l'exercice réalisé. Nous observons sur le cliché précédent la demande d'aide que Martin a déjà écrit sous forme d'une écriture fractionnaire la densité de population française en reprenant les données du tableau et en s'appuyant sur la formule donnée en aide. À ce stade, il a déjà répondu à la tâche attendue dans cet exercice :

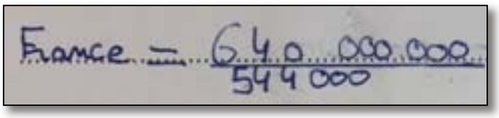


Figure 4. Réponse initiale de Martin

La demande d'aide de Martin porte sur la simplification de cette écriture fractionnaire. Sur le journal, la coordonnatrice a indiqué qu'elle lui demande *en haut et en bas que peux-tu faire* ? *Martin redonne la règle et le reste est réalisé seul*. Elle précise son intervention dans l'entretien post-dossier : « j'ai eu une demande de Martin euh au début de la leçon où il avait des difficultés à simplifier les fractions donc je lui ai

[14] Ce tableau indiquait pour quatre pays le nombre d'habitants et la surface correspondante

rappelé euh juste posé la question comment tu peux faire quand tu as plusieurs zéros en haut et en bas et tout de suite c'est revenu il a dit ah oui on peut simplifier et donc il a été capable de donner la règle de supprimer donc les zéro » (Entretien *post*-dossier, tdp n°2). Suite à l'intervention de la coordonnatrice, Martin fait évoluer son écriture de la façon suivante :

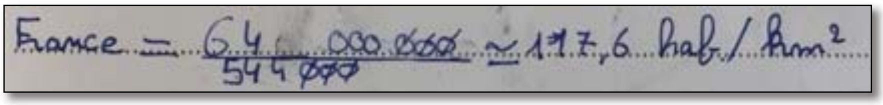


Figure 5. Réponse modifiée de Martin

On observe que Martin a corrigé l'écriture du numérateur (640 000 000 devient 64 000 000) et la technique utilisée pour simplifier est de barrer le même nombre de zéros au numérateur et au dénominateur. La question de la simplification d'une fraction n'apparaît ni dans la leçon, ni dans les exercices proposés par l'enseignant de mathématiques. L'aide de la coordonnatrice vise à répondre à la question de Martin mais ne porte pas directement sur la tâche en jeu. Nous observons que la réponse initiale de Martin correspondait aux attentes de l'énoncé qui était de donner une écriture fractionnaire de la densité de population, celui-ci est engagé dans la tâche et semble maitriser les objets nouveaux introduits dans la leçon, à savoir « le sens d'une écriture fractionnaire » et le « calcul de proportion ». Nous ne pouvons pas dire que cette aide fasse avancer le temps didactique car le soutien apporté permet une première simplification de la fraction mais ne va pas jusqu'à permettre à Martin de proposer une écriture irréductible de la fraction. Par son intervention, la coordonnatrice facilite cependant la remise en mémoire d'une technique connue de Martin mais elle ne semble pas avoir connaissance des objets nouveaux introduits par l'enseignant de mathématiques (cela était formulé dans l'entretien préliminaire, la coordonnatrice évoquait le fait de ne pas savoir quel chapitre allait débuter les 5e).

L'observation de cet exercice semble montrer qu'il n'y a pas d'échanges entre enseignants en ce qui concerne les objets travaillés en classe de mathématiques depuis le début de la séquence (soit après 5h de cours) et nous pouvons imaginer qu'elle répond à la demande de Martin en s'appuyant sur son rapport personnel à l'objet fraction et à l'importance pour elle de présenter une fraction sous une forme simplifiée alors que la tâche attendue dans cet exercice était de transformer une écriture fractionnaire en écriture décimale (valeur approchée), tâche réalisée par Martin.

Un autre épisode concerne Florine car dans l'entretien *post*-dossier, la coordonnatrice évoque également les difficultés de Florine en ces termes : « il va falloir que je reprenne effectivement sur les fractions la compréhension en elle-même parce que sinon elle va passer à côté de plusieurs choses et puis le reste elle va pas réussir à suivre donc là on devra refaire effectivement peut être un ou deux exercices et à l'aide de manipulation des choses que j'ai ici pour qu'elle comprenne bien ce que c'est une fraction parce que je pense que dès le début elle n'a pas compris » (tdp n°2). Elle évoque cette prise de conscience des difficultés de Florine suite à des échanges avec Rachel, l'AESHco du dispositif et envisage un temps de remédiation par la suite pour aider Florine à comprendre la notion de fraction.

Les exercices proposés[15] par la coordonnatrice en regroupement pour Florine sont analysés avec la même méthodologie que ceux rencontrés en classe de mathématiques. La répartition des fréquences de rencontres par types de tâches permet d'avoir une vision des priorités de la coordonnatrice afin d'aider Florine. Nous en proposons ici une synthèse des fréquences de rencontres.

[15] Ces exercices sont proposés plusieurs semaines après la fin du chapitre dans la classe de mathématiques et nous sont transmis spontanément par la coordonnatrice.

Compléter une égalité	**0**
Convertir un nombre écrit dans une forme sous une autre forme	**5**
Se repérer sur une demi-droite graduée	**0**
Exprimer une proportion	**0**
Encadrer un nombre par deux entiers consécutifs	**1**
Calculer la fraction d'une quantité	**0**
Exprimer une partie d'une surface sous la forme d'une fraction	**2**

Figure 6. Représentation des fréquences de rencontres des tâches repérées en regroupement

Le travail proposé à Florine en regroupement permet de mettre en avant que la coordonnatrice accorde principalement de l'importance au type de tâche « convertir un nombre dans une forme sous une autre forme ». Cependant, l'analyse des tâches liées montre qu'il s'agit de tâches plus simples que celles présentées en classe de mathématiques. Ces tâches peuvent être reliées à des objets à enseigner que l'on retrouve dans les programmes de cycle 3.

L'analyse des objets rencontrés en regroupement Ulis nous a permis de montrer que le seul objet rencontré pendant le chapitre est lié à une demande provenant de Martin. La coordonnatrice ne semble pas connaitre précisément les objets et les types de tâches considérés comme importants par l'enseignant de mathématiques et l'intervention observée concerne la remise en mémoire d'une technique connue par Martin. Le travail proposé à Florine plusieurs semaines après la fin du chapitre semble permettre de confirmer cette hypothèse : un seul type de tâche est proposé et les tâches correspondent à des objets à enseigner du programme de cycle 3. Après avoir étudié les objets rencontrés en regroupement, nous allons maintenant nous intéresser aux aides proposées dans le cadre de l'aide aux devoirs avec l'AESHco.

3 La place de l'aide aux devoirs

Au début de nos observations et de nos rencontres avec le binôme enseignant/coordonnateur, nous n'avions pas conscience qu'un autre système didactique auxiliaire existait sous la forme d'un temps d'aide aux devoirs à destination des élèves du dispositif ULIS. Celui-ci a été découvert lors de l'entretien *post*-dossier réalisé avec la coordonnatrice. Ce temps d'aide aux devoirs est pris en charge par l'AESHco. Un entretien avec l'aide humaine a pu être réalisé afin d'expliciter les matériaux recueillis dans le dossier.

Le journal des aides met en avant deux interventions de l'AESHco dans ce cadre. La première intervention concerne l'exercice du devoir maison que nous venons de développer avec Martin. L'AESHco indique à ce sujet : « Florine ne sait pas simplifier, elle tape tout le calcul sur la calculatrice et sait arrondir au centième. Elle s'était trompée de sens dans la fraction » (tdp n°20). L'entretien *post*-dossier permet de préciser les aides apportées : « elle a pas compris du tout le système de simplification » (tdp n°20). Là encore, l'AESHco va se focaliser dans un premier temps sur la simplification de l'écriture fractionnaire qui n'est pas une tâche travaillée dans la classe de mathématiques. Le journal des aides a été complété à la fois par la coordonnatrice et l'AESHco, nous pouvons donc faire l'hypothèse que l'aide humaine, lorsqu'elle travaille avec Florine le 30 janvier, a pris connaissance des inscriptions du 27 janvier de la coordonnatrice qui précise qu'elle a aidé Martin à simplifier et ainsi proposé le même type d'aide à l'élève. Cependant, les observations précisées par l'entretien *post*-dossier nous permettent de dire que Florine était en mesure de répondre à la première partie de la question en proposant une écriture de la densité de population sous une forme fractionnaire. Elle est capable également avec une aide technique de calculer le résultat du quotient pour proposer une écriture décimale arrondie. L'aide humaine précise : «en fait euh la fraction elle va taper directement sur la calculatrice elle va pas prendre le numérateur divisé par le dénominateur et euh elle marque le résultat de la calculatrice c'est tout ce qu'elle fait euh par contre elle sait arrondir au centième au dixième […] elle se trompe sur l'ordre elle comprend qu'on va prendre la partie euh le numérateur c'est la petite partie du problème sur la grosse partie enfin la partie entière quoi ça elle elle inverse tout le temps» (tdp n°20). Il apparaît que l'aide apportée porte sur la technique pour trouver le résultat d'un quotient à l'aide de la calculatrice. Par cet aspect, l'aide humaine travaille sur l'aspect technique d'une tâche issue de la classe de mathématiques (calculer des proportions) et permet de faire avancer le temps d'apprentissage.

La seconde intervention en aide aux devoirs rapportée dans le journal des aides porte sur une demande de Martin concernant un exercice du livre qui visait à encadrer une fraction par deux entiers consécutifs. L'AESHco précise dans l'entretien *post*-dossier : « je lui ai demandé ce qu'est un nombre entier, il a su euh me répondre que c'était un nombre sans virgule et euh comment du coup lui rappelant ça bah il a tout de suite compris ce qu'il fallait » (tdp n°22). La demande d'aide de Martin porte donc sur un objet ancien. L'AESHco, par son questionnement, facilite le recours à la mémoire didactique de l'élève et permet ensuite à l'élève de s'engager dans la tâche.

Un troisième type d'intervention est proposé sur le temps d'aide aux devoirs, il n'apparaît pas dans le journal des aides mais est évoqué par l'enseignant de mathématiques et l'aide humaine dans les entretiens *post*-dossier, il s'agit de proposer un temps supplémentaire à Florine pour terminer l'évaluation qui clôt le chapitre dans la classe de mathématiques. L'aide humaine va permettre à Florine d'avoir une heure quarante, en plus, pour terminer l'évaluation débutée en classe. Nous allons maintenant nous intéresser aux liens qui apparaissent entre le système didactique principal et les deux systèmes didactiques auxiliaires[16] que nous venons de mettre en évidence en nous appuyant plus particulièrement sur l'étude de l'évaluation de Florine.

4 Liens entre SDP, SAD*r* et SDA*ad*

Nous venons de montrer que les trois systèmes didactiques en jeu partagent un objet commun général qui est « les fractions ». D'un point de vue chronologique, les systèmes auxiliaires apparaissent à la fin de l'étude du chapitre en classe. Les objets nouveaux introduits en classe de mathématiques semblent avoir des difficultés à apparaître dans les systèmes auxiliaires. Dans le SDA*r,* un premier objet apparait à l'initiative d'un élève puis d'autres exercices sont proposés par la coordonnatrice plusieurs semaines après la fin du chapitre. Dans le SDA*ad*, deux demandes apparaissent à l'initiative des élèves et une demande de temps supplémentaire est initiée par l'enseignant de mathématique à l'AESHco.

L'analyse des entretiens va nous permettre de préciser les liens entre les trois systèmes didactiques repérés. Le relevé des évocations des différents liens effectifs ou potentiels entre les acteurs lors de l'entretien *post*-dossier peut apporter un éclairage supplémentaire sur les actions permettant de synchroniser les différents systèmes didactiques. Du point de vue de l'enseignant de mathématiques, celui-ci fait part du fait qu'il apprécie le fait que les SDA permettent d'offrir du temps supplémentaire. Le temps offert en question concerne ici l'évaluation : « c'est ça qui est intéressant parce qu'elle a quand même essayé de faire la question en lui donnant un peu plus de temps que le temps imparti au départ donc je trouve ça c'est bien qu'on ait la possibilité de faire comme ça je trouve parce que après matériellement c'est difficile de reprendre avec l'élève ou de lui laisser plus de temps les cours s'enchainent » (entretien *post*-dossier, tdp n°41). Il n'évoque durant les entretiens pas d'autres liens que cette vision provisionnelle du temps pour terminer un travail. L'AESHco a laissé des annotations sur l'évaluation à destination de l'enseignant de mathématiques pour préciser ses actions. Du point de vue de la coordonnatrice, l'entretien *post*-dossier laisse apparaître qu'il n'y a pas eu d'échanges avec l'enseignant avant l'évaluation au sujet de ce chapitre. Elle précise également que si ces deux élèves sont inclus majoritairement, c'est parce qu'ils font preuve d'autonomie, cette autonomie entraine de son point de vue moins de liens formels entre les acteurs (tdp n°36). La coordonnatrice insiste sur l'importance de l'AESHco pour qu'elle puisse se rendre compte des difficultés des élèves, ainsi, les échanges qu'elles ont eu au sujet de l'évaluation de Florine, font dire à la coordonnatrice que cette dernière n'a pas acquis la notion de fraction « heureusement que Rachel est là parce que quand elle fait l'évaluation donc là c'est

[16] Lorsque nous aurons besoin de les différencier, nous noterons SDA*r* le système didactique auxiliaire pris en charge par la coordonnatrice ULIS dans le cadre des temps de regroupement et SDA*ad* le système didactique auxiliaire pris en charge par l'AESHco dans le cadre des temps dédiés à l'aide aux devoirs pour les élèves du dispositif ULIS.

elle qui l'a continuée, nos échanges font que euh on va pouvoir revenir sur le travail de Florine […] voilà si on l'avait laissée sans que on en parle avec l'AVS eh ben on serait pas revenu dessus et donc elle serait passée sur une autre leçon sans avoir acquis les fractions» (entretien *post*-dossier, tdp n°30). Bien que ne fréquentant pas la classe de 5^{e}, l'aide humaine semble occuper une fonction de transmission d'informations entre le SDP et le SDA*r*. L'entretien *post*-dossier avec l'aide humaine permet de préciser son rôle à ce niveau. Elle indique que l'enseignant de mathématiques l'a sollicitée pour qu'elle termine l'évaluation en Ulis et qu'elle échange avec la coordonnatrice.

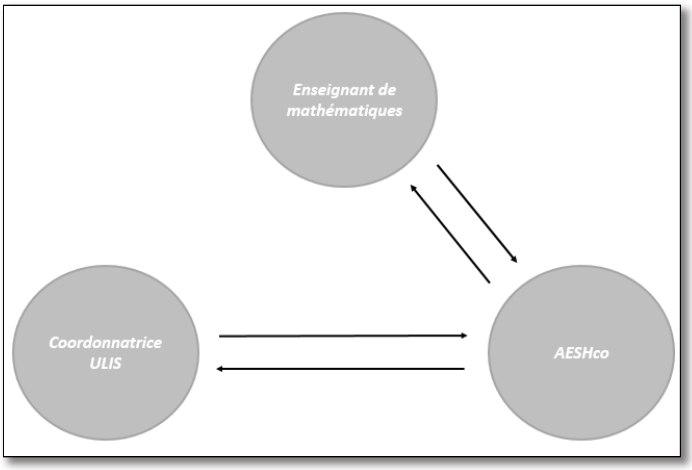


Figure 7. Schématisation des liens repérés entre les acteurs

Après avoir évoqué les liens entre SDP et les deux SDA d'un point de vue temporel puis dans les discours au moment de l'entretien *post*-dossier, nous allons réaliser un focus sur l'évaluation de Florine car il ressort que c'est ce document qui a principalement servi de support aux échanges entre les différents acteurs.

Pour approfondir l'observation des liens entre les différents systèmes didactiques, nous allons particulièrement nous intéresser à l'évaluation de fin de chapitre de Florine qui est réalisée en classe pendant une heure puis avec l'AESHco en aide aux devoirs, à la demande de l'enseignant de mathématiques. Dans les annotations laissées sur la copie, l'aide humaine précise que ce temps supplémentaire fut de 1h40. L'évaluation comportait dix exercices[17] dont quatre exercices relatifs aux nombres représentés en écritures fractionnaire. Ceux-ci comportent 7 types de tâches qui correspondent à 10 tâches différentes (voir tableau n°3). L'AESHco a indiqué les exercices pour lesquels elle a apporté de l'aide à Florine ainsi que la nature des aides apportées. Sur dix questions, il apparaît que Florine avait répondu à trois questions de façon autonome en classe. Dans le SDA*ad* elle complète sa copie en répondant à cinq questions en plus. L'aspect relatif au temps supplémentaire alloué est mis en avant par l'enseignant : « C'est ça qui est intéressant parce qu'elle a quand même essayé de faire la question en lui donnant un peu plus de temps que le temps imparti au départ » (entretien *post*-dossier, tdp n°41). Deux questions resteront sans réponse. Les annotations laissées par l'AESHco sur la copie montrent que son aide est essentiellement verbale et qu'elle cherche à mobiliser la mémoire de l'élève en ce qui concerne le vocabulaire spécifique aux mathématiques (« elle m'a demandé la signification de proportion » ; « rappel de ce qu'est un nombre entier » ; « il faut poser sous la forme d'une fraction »). L'entretien *post*-dossier permet de préciser les actions de l'aide humaine lors du temps d'aide aux devoirs : « on est revenu exercice par exercice qu'elle n'avait pas fait et euh je lui indiquais beaucoup de chose enfin sans indiquer les choses mais je t'ai de toute façon j'ai tout écrit » (tdp n°2). Lorsque nous cherchons à confronter le travail de Florine vis à vis des évaluations de ses pairs, nous observons qu'elle se situe avec des résultats dans la moyenne du panel recueilli d'autres élèves de la classe avec des réussites et encore certaines difficultés. Nous n'observons pas de grand décalage par rapport au reste de la classe. Lors de l'entretien *post*-dossier, l'enseignant nous livre son point de vue à ce sujet : « par rapport à la compétence que j'ai évaluée euh elle est on va dire en cours d'acquisition euh alors elle fait partie euh ouais des élèves qui

[17] Nous ne nous intéresserons pas aux six exercices qui traitent de la notion de symétrie axiale

bon voilà elle a quelques difficultés euh mais sur des exercices un peu plus pointus eh ben elle a réussi quand même » (tdp n°35). L'enseignant fait à ce moment-là référence à un exercice où il s'agissait de passer d'une représentation graphique à une écriture sous forme fractionnaire (exercice n°7, voir infra). Il fait également part de difficultés constatées : « on voit que la notion de proportion n'a pas trop bien passée » (tdp n°41). L'analyse de L'évaluation nous permet de mettre en évidence les tâches qui semblent poser le plus de difficultés à Florine :

- Transformer une écriture décimale en écriture fractionnaire
- Compléter une égalité du type $a \times \frac{b}{a} = b$ (avec a et b $\in \mathbb{N}$ donnés, il s'agit de trouver $\frac{b}{a}$)
- Exprimer une proportion sous la forme d'une fraction
- Associer l'abscisse d'un point sous la forme d'un nombre en écriture fractionnaire lorsque le dénominateur ne correspond pas au découpage de l'unité de la demi-droite

Les échanges entre l'enseignant de mathématiques et l'AESHco ont donc permis d'offrir du temps supplémentaire à Florine pour compléter l'évaluation. En retour, l'aide humaine inscrit des annotations relatives aux aides apportées pour que l'enseignant en ait connaissance. L'aide humaine informe également la coordonnatrice ULIS des difficultés qu'elle observe chez Florine. Les éléments transmis à la coordonnatrice par l'AESHco nous semblent peu précis, l'entretien *post*-dossier nous donne des indications sur ces échanges : « Florine semblait gérer sauf qu'à l'issue du devoir en parlant avec Rachel il va falloir que je reprenne effectivement sur les fractions la compréhension en elle-même parce que sinon elle va passer à côté de plusieurs choses et puis le reste elle va pas réussir à suivre » (tdp n°2). Elle précise également l'importance à ses yeux du rôle de l'AESHco pour prendre connaissance des difficultés ou non des élèves : « heureusement que Rachel est là parce que quand elle fait l'évaluation donc là c'est elle qui l'a continuée, nos échanges font que euh on va pouvoir revenir sur le travail de Florine euh retravailler avec elle […] si on l'avait laissée sans que on en parle avec l'AVS eh ben on serait pas revenu dessus et donc elle serait passée sur une autre leçon sans avoir acquis les fractions » (tdp n°30). L'aide humaine précise son ressenti également : « je me suis rendu compte au niveau de l'évaluation qu'elle maitrisait absolument pas et qu'elle sait pas elle sait pas faire non » (tdp n°2). Nous notons ici la différence significative de point de vue sur les résultats de Florine entre l'enseignant de mathématiques et l'aide humaine. Ces échanges entre l'aide humaine et la coordonnatrice semblent cependant à la base du travail proposé ensuite en remédiation dans le SDA*r*. Nous allons maintenant observer à un grain plus fin un exercice de l'évaluation et son pendant proposé ensuite en remédiation.

L'exercice 7 est proposé lors de l'évaluation par l'enseignant de mathématiques. Florine réalise cet exercice en autonomie dans la classe. La tâche proposée est *exprimer une partie d'une surface sous la forme d'une fraction* et le type de tâche *exprimer une partie d'une surface sous la forme d'une fraction ou sous la somme de fractions sans découpage apparent de la figure*. L'enseignant lors de l'entretien *post*-dossier précise sa satisfaction vis-à-vis des réponses de Florine sur cet exercice : « sur des exercices un peu plus pointus elle a réussi quand même » (tdp n°35). Dans cet exercice, Florine arrive à décomposer de façon autonome les figures 1 et 3 de façon à exprimer la surface colorée par rapport à la surface totale.

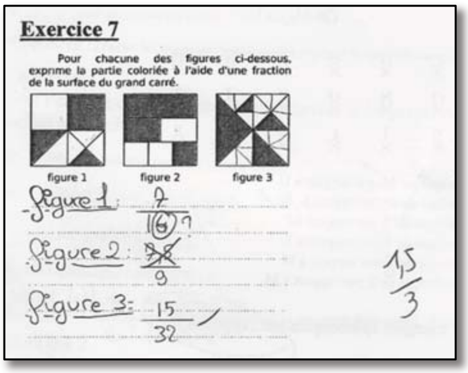


Figure 8. Exercice réalisé dans le SDP par Florine lors de l'évaluation

Nous retrouvons le même type de tâche dans les exercices proposés à Florine en remédiation par contre la tâche proposée est différente, il s'agit *d'exprimer une partie d'une surface pré découpée sous la forme d'une fraction*.

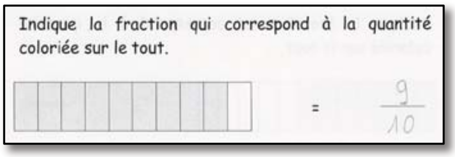


Figure 9. Exercice réalisé à posteriori dans le SDA*r* par Florine

La coordonnatrice propose à Florine une tâche plus simple (la surface est déjà pré découpée) alors même que l'exercice réalisé en évaluation montre que l'élève n'est pas en difficulté face à ce type de tâche. L'analyse de l'ensemble des exercices proposés par la coordonnatrice nous permet de montrer que les tâches proposées en regroupement ne correspondent pas aux difficultés qui subsistent dans l'évaluation et que lorsque celles-ci sont en phase, généralement, la tâche proposée en regroupement est plus simple et correspond à une technique déjà acquise par Florine. Cette différence de synchronisation entre les tâches proposées en SDA*r* et en SDP semble confirmer l'absence de liens directs entre la coordonnatrice et l'enseignant de mathématiques lors de ce chapitre.

Nous venons de montrer que les interventions du SDA*ad* après la séquence de mathématiques sont envisagées comme un apport provisionnel de temps. Les actions de l'AESHco semblent principalement verbales afin de solliciter la mémoire de l'élève et les indications qu'elle transmet sont peu spécifiques. Ces informations, qui traduisent une différence de point de vue entre la coordonnatrice et l'enseignant de mathématiques qui semble néanmoins à l'origine du choix des exercices proposés dans le SDA*r*. Les tâches présentées ne correspondent pas aux difficultés relevées dans l'évaluation. L'absence de liens directs entre le SDA*r* et le SDP semble être à l'origine de la difficulté de pouvoir proposer à Florine des tâches synchronisées avec les difficultés fines qui subsistent au sujet des objets nouveaux introduits lors de ce chapitre.

IV - CONCLUSION

Les élèves reconnus institutionnellement handicapés qui bénéficient du dispositif ULIS au collège se trouvent au cœur de différents systèmes didactiques. Le SDP étant celui de la classe ordinaire de 5e, nous avons montré dans cette étude que deux SDA coexistent au côté du système principal, celui au regroupement ULIS avec la coordonnatrice et un second lié à l'aide aux devoirs avec l'AESHco du dispositif. L'enquête exploratoire réalisée dans les collèges vosgiens avait permis de mettre en évidence que la majorité des liens évoqués entre SDP et SDA étaient des liens a posteriori, le SDA intervenant après le SDP dans une vision provisionnelle de la temporalité. À travers cette étude, nous avons cherché à observer les liens entre ces différents systèmes didactiques en prenant pour échelle temporelle l'étude d'un chapitre concernant les nombres en écriture fractionnaire en classe de 5e. Dans notre étude, les objets liés au chapitre étudié apparaissent dans les SDA plusieurs séances après avoir été introduits dans le SDP. Pour réaliser nos observations nous nous sommes appuyés sur les notions de temps didactique, temps d'apprentissage et temps praxéologique.

Notre question de recherche était la suivante : *quelles sont les relations entre les différentes temporalités existantes dans les systèmes didactiques en jeu au sein d'un dispositif Ulis au collège ?* Nous l'avions déclinée à travers trois autres interrogations : *Quels sont les objets mathématiques communs aux deux systèmes didactiques* ? *Quel est le sens des flux de ces objets ?* Le *SDA lors des regroupements permet-il de faire avancer le temps praxéologique* ?

Nous avons tout d'abord pu observer que si l'objet commun fraction est présent dans le SDP et les SDA, il s'agit de le préciser plus finement. Ainsi, dans le SDP, le temps avance avec l'introduction d'objets nouveaux. L'enseignant semble vigilant et propose également, dans les exercices ou les évaluations, une petite part d'objets réputés anciens ce qui permet de favoriser la mémoire didactique des élèves. Dans le SDA*r* nous avons vu que certains objets apparaissent à la demande des élèves et que l'enseignante spécialisée va proposer des tâches plus simples qui ne sont pas synchronisées avec les difficultés repérées dans l'évaluation finale. Le SDA*ad* semble principalement utilisé comme permettant d'ajouter de façon provisionnelle du temps pour Florine, à la demande de l'enseignant de mathématiques, afin de terminer un travail débuté dans le SDP. Les actions de l'AESHco semblent parfois porter sur des techniques et sont principalement destinées à mobiliser la mémoire didactique des élèves.

La question du sens des flux des objets a permis de montrer que les objets apparaissent dans le SDP. Certains d'entre eux rejoignent les SDA. Ils peuvent être déplacés dans un système auxiliaire par les ERIH ou par l'enseignant de mathématiques. De façon majoritaire, le SDA mobilisé pendant le chapitre est celui lié à l'aide aux devoirs. L'AESHco se voit donc occuper une place centrale entre le SDP et le SDA regroupement en transmettant des informations à la coordonnatrice, nous avons pu montrer que celle-ci, générales et peu précises, n'aident pas la coordonnatrice à mieux connaître les objets travaillés et les difficultés réelles de ses élèves. Des informations relatives au travail dans le SDA*ad* retournent dans le SDP par le biais d'annotations écrites de la part de l'aide humaine. Dans notre étude le SDA*r* est mobilisé principalement a posteriori en remédiation. Nous avons mis en évidence une difficulté pour la coordonnatrice à se saisir des tâches nouvelles travaillées dans le SDP, cela a été observé à travers les exercices proposés en regroupement.

Notre étude nous a permis de montrer que le temps didactique avance au sein de la classe de mathématiques et que les deux ERIH sont engagés dans les tâches proposées au sein de cette classe de 5e. Dans les systèmes auxiliaires, le temps didactique n'avance pas mais des techniques anciennes sont remises en mémoire. Les difficultés de synchronisation entre les tâches proposées dans le SDA*r* et les difficultés repérées lors de l'évaluation nous questionnent et ouvrent des perspectives pour la suite de notre recherche où nous devrons chercher à mettre en évidence quelles actions facilitent la synchronisation entre les différents systèmes didactiques en jeu au sein des dispositifs ULIS.

V - BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K., KOUDOGBO, J., MORIN, M.-P., TAMBONE, J., & THEIS, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, *36*/*2*, 197−230.

ASSUDE, T., PEREZ, J.-M., SUAU, G., & TAMBONE, J. (2015). Conditions d'accessibilité aux savoirs. In J. Zaffran (Éd.), Accessibilité et handicap : anciennes pratiques, nouvel enjeu (p. 209-224). Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

ASSUDE, T., PEREZ, J.-M., TAMBONE, J., & VERILLON, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Education et didactique*, *5*(2), 65-84.

CAMPENHOUDT, L. V., & QUIVY, R. (1995). *Manuel de recherche en sciences sociales*. Paris: Dunod.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, ***19*** **(2)**, 221-226.

CHOPIN, M.-P. (2011). *Le temps de l'enseignement - L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe* (Presses Universitaires de Rennes). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

CLOT, Y., FAÏTA, D., FERNANDEZ, G., & SCHELLER, L. (2000). Entretiens en autoconfrontation croisée: une méthode en clinique de l'activité. *Perspectives interdisciplinaires sur le travail et la santé*, (2-1). https://doi.org/10.4000/pistes.3833

GRAWITZ, M. (2001). *Méthodes des sciences sociales* (11e éd.). Paris: Dalloz.

LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*(2), 209-250.

MEN. Unités localisées pour l'inclusion scolaire (Ulis), dispositifs pour la scolarisation des élèves en situation de handicap dans le premier et le second degré, Pub. L. No. 2015-129 (2015).

MEN. Parcours de formation des élèves en situation de handicap dans les établissements colaires, Pub. L. No. circulaire n°2016-117, circulaire (2016).

MERCIER, A. (2001). Petit vocabulaire à l'usage des enseignants débutants. IUFM Université de Provence. Consulté à l'adresse https://hchicoine.files.wordpress.com/2008/05/mercier-2001-temps-didactique.pdf

MERCIER, A. (2012). CHOPIN Marie-Pierre. Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe. *Revue française de pédagogie*, (178), 132-135.

PEREZ, J.-M. (2015). Normes, école et handicap : la notion d'inclusion en éducation. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (70-71), 25 à 38.

RENE DE COTRET, S., & GIROUX, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts). *Education et francophonie*, *XXXI* (2), 155-175.

TAMBONE, J. (2008). *Enseigner dans un dispositif auxiliaire : la production d'un objet de formation par des enseignants spécialisés exerçant en regroupement d'adaptation* (Thèse de doctorat). Université de Provence.

TAMBONE, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les sciences de l'éducation - Pour l'ère nouvelle*, *47*(2), 51-71.

LES FIGURATIONS : ECRIT INTERMEDIAIRE POUR PROBLEMATISER

Sylvie GRAU
Professeure de mathématiques, ESPE NANTES
Laboratoire CREN
sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé
En classe, la mise en commun suite à une résolution de problème complexe est un moment délicat. Pour nous, l'enjeu est de donner accès aux élèves à un savoir problématisé, c'est-à-dire qu'ils sachent non seulement pourquoi la solution est ce qu'elle est, mais aussi pourquoi elle ne peut pas être autrement (Orange, 2012). Or, les élèves ont des représentations très différentes d'un même problème, ils n'ont pas toujours les outils sémiotiques pour formaliser ces représentations. C'est pourquoi nous proposons aux élèves de critiquer des « figurations » (Grau, 2017a), une figuration étant une sorte de caricature d'une procédure de résolution, afin de les aider à formaliser la manière dont ils construisent le problème, c'est-à-dire comment ils mettent en tension leurs connaissances, leurs représentations, dont certaines sont souvent implicites, avec les données du problème (Fabre, 2011). A partir d'exemples en cycle 3 autour de problèmes numériques, nous montrerons en quoi ces figurations peuvent être une aide aux élèves en difficultés, par le fait qu'elles donnent à voir l'organisation de la pensée mais aussi parce qu'elles permettent de travailler les conversions de registres (Duval, 2006).

Professeure de mathématiques, formatrice et doctorante en sciences de l'éducation au sein du laboratoire du CREN de l'université de Nantes, je m'intéresse à la place des problèmes dans l'apprentissage et en particulier au processus d'institutionnalisation. Si ma recherche est centrée sur un élément de savoir, les résultats de mes travaux peuvent avoir une portée plus générale sur l'analyse du processus de problématisation chez les élèves. Je vais présenter le cadre de la problématisation et ses enjeux potentiels pour l'apprentissage des mathématiques. Je vais essayer de montrer en quoi la reprise de textes est essentielle et je présenterai ce que j'appelle une *figuration*. Enfin j'analyserai quelques exemples pour montrer en quoi cette approche pourrait modifier l'enseignement et l'apprentissage autour de la résolution de problèmes.

I - LA PLACE DU PROBLEME DANS L'APPRENTISSAGE

1 La problématisation : un cadre pour penser l'apprentissage

Si les mathématiques sont ancrées dans la résolution de problèmes, la diversité des contextes, des objectifs, des compétences mobilisées, rend cette activité très floue. Si nous reprenons les textes officiels, le socle met bien en évidence dès le cycle 2 un processus qui reprend l'épistémologie de Piaget (cité par Legendre, 2006). En effet, dans l'extrait : « La pratique du calcul, l'acquisition du sens des opérations et la résolution de problèmes élémentaires en mathématiques permettent l'observation, suscitent des questionnements et la recherche de réponses, donnent du sens aux notions abordées et participent à la compréhension de quelques éléments du monde. », on retrouve la triade « contempler, opérer, transformer » que Piaget a identifiée aussi bien dans la psychogenèse historique que la psychogenèse individuelle. En d'autres mots, l'apprentissage de concepts mathématiques passe de l'observation d'objets dont la réalité leur est propre, à une phase d'opérations sur ces objets (classer, relier, calculer …) par la manipulation de symboles, pour arriver au stade où les objets sont incorporés dans une théorie qui les englobe et permet de les interpréter en son sein.

Il est précisé dans le programme du cycle 2 que « la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ». Nous avons déjà trois facettes de l'activité : apprendre à chercher un problème (ce qui est précisé ensuite dans le texte : « On veillera à proposer aux élèves dès le CP des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas de simples problèmes d'application à une ou plusieurs opérations mais nécessitent des recherches avec tâtonnements. »), résoudre un problème, poser un problème.

Fabre (2011) utilise un losange pour représenter la problématisation (cf. schéma 1).

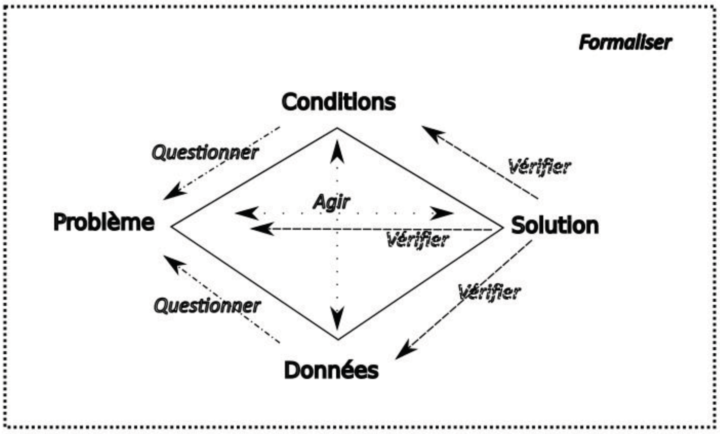


Schéma 1. Losange de problématisation et rôles

Un des sommets désigne le problème, la question qui est posée ; un autre désigne les données qui sont les contraintes internes au problème ; un troisième désigne les conditions qui sont les contraintes externes au problème et qui regroupent les savoirs, savoir-faire, représentations, modèles, expériences dont dispose l'élève pour traiter les données ; et enfin le dernier sommet désigne la solution du problème. Poser le problème amène à s'intéresser à la question. Résoudre le problème consiste à aller de la question à la solution ; si les techniques nécessaires sont disponibles et les données nécessaires déjà construites, l'élève peut résoudre un problème sans problématiser. Construire un problème correspond à la mise en tension des données et des conditions. Les compétences mathématiques du programme de mathématiques de 2015 sont en fait les différentes manières de mettre en relation les sommets de notre losange. Ainsi, « chercher » amène à un traitement des données, à poser la question, à mettre au travail des conditions, compétence nécessaire pour « modéliser » et « représenter » qui correspondent à la mise en tension des données et des conditions, « raisonner » peut être orienté vers la solution tout comme « calculer » et « communiquer » et amène à deux fonctions : décrire (plutôt du côté de la question) et argumenter (plutôt du côté des conditions). Raisonner peut aussi partir de la solution pour aller vers les données ou les conditions dans le cas du raisonnement inductif.

On comprend alors que la résolution du problème n'aura pas la même place dans l'apprentissage suivant le statut des conditions. Les conditions sont-elles à découvrir ? Dans ce cas, le problème est une situation problème (Astolfi, 1993), un problème initial. Sont-elles construites et déjà mobilisables voire disponibles (Robert & Rogalski, 2002) ? Dans ce cas, le problème est un problème d'application si les données sont de même nature que celles déjà rencontrées, ou de réinvestissement si le contexte est différent, voire un problème ouvert si le problème est à construire. Travaille-t-on sur la mise en tension entre données et conditions ? Dans ce cas, le problème peut être un « problème pour chercher » ou un problème ouvert (Charnay, 1992). Dans les programmes du cycle 3, le texte précise que l'activité « contribue à enrichir la culture scientifique des élèves » par la mise en perspective historique des connaissances. C'est-à-dire par l'explicitation de la manière dont les hommes ont construit les problèmes à différentes époques en fonction de l'évolution des savoirs, des contextes, des besoins… donc des conditions.

2 Différents aspects à prendre en compte

Ceci nous amène à préciser un autre aspect théorique de la problématisation. Tall (2006) définit trois mondes mathématiques : les mathématiques « pratiques », théoriques et formelles. Il démontre que ces trois mondes sont emboîtés et qu'un concept évolue dans ces trois mondes. Il donne l'exemple de l'addition. Dans le monde des mathématiques pratiques, 2+3 est égal à 3+2 parce que je le vois en comparant des collections par exemple. Dans le monde des mathématiques théoriques, 2+3 et égal à 3+2 parce que je peux le calculer. Dans celui des mathématiques formelles, 2+3=3+2 parce que l'addition est commutative. Nous retrouvons la triade de Piaget : je vois que 2+3 est égal à 3+2, j'opère et je constate que 2+3=3+2, je transforme en démontrant l'égalité à partir des propriétés de l'opération dans N. Cela rejoint aussi l'idée que, en mathématiques comme en sciences, l'activité de l'élève est régie par trois types de registres (Orange, 2012) : le registre empirique qui est celui des faits, des expériences ; le registre des modèles qui est celui des mondes des idées, des explications ; et le registre explicatif (REX) qui est le cadre scientifique. En mathématique, le REX peut être considéré comme un cadre (Douady, 1986). Si on a longtemps considéré le processus comme étant une progression linéaire du pratique vers le formel, les recherches de Tall (Tall, 2006) sur les neurosciences et sur le rôle des émotions ont permis de démontrer que ce n'était pas le cas et que cette progression ne pouvait pas être en quelque sorte « élémentée » pour être enseignée. Toute activité, toute production de l'élève résulte de la mise en cohérence de ces trois registres. Les faits sont-ils cohérents avec les idées émises, ces idées sont-elles cohérentes avec la théorie, les faits viennent-ils conforter la théorie, la théorie permet-elle d'anticiper des faits ? Ainsi, face à un problème numérique, les élèves ont des idées et des modèles construits dans un cadre théorique (arithmétique, grandeurs et mesures, géométrie…), ils peuvent être amenés à effectuer des traitements sur les données (calculs, comparaison, tri…) qui produisent de nouvelles données empiriques. Cependant le registre des modèles peut incorporer des idées qui relèvent de différentes cultures : la culture mathématique scientifique, la culture scolaire, la culture sociale. Ainsi lorsque certains élèves ont à évaluer la pertinence d'une procédure, ils peuvent utiliser des arguments mathématiques (faits, techniques, propriétés, définitions…) tout aussi bien que des arguments scolaires (on a toujours fait comme ça, pour résoudre il faut calculer, il faut utiliser ce qu'on vient d'apprendre, on ne peut pas faire 2–3…) ou des arguments sociaux (tel élève trouve toujours la bonne réponse, la dernière affiche est toujours la solution attendue, on n'écrit pas tant qu'on est pas sûr, je suis mauvais en mathématiques…). Nous voyons qu'ici certains arguments relèvent du contrat didactique avec différentes facettes, la facette épistémologique et la facette sociale (Hersant, 2014) et ce à différents niveaux (mathématiques, classe, contexte précis).

Une autre triade est décrite par Piaget (Piaget & Garcia, 1983), il s'agit de la triade « intra, inter, trans ». Nous pouvons reprendre cette triade pour caractériser la manière dont les données sont traitées. Une donnée peut suffire à donner l'interprétation générale de la situation (intra), plusieurs données peuvent être mises en relation pour donner le sens (inter), une idée générale extérieure à la situation peut en donner le sens (trans). Prenons un texte de problème mathématique, l'expression « de plus » peut suffire pour suggérer qu'il faut effectuer une addition (intra), identifier plusieurs prix dans le texte peut induire une procédure additive (inter), avoir l'idée qu'il s'agit d'un problème additif peut permettre de sélectionner les données pertinentes dans le texte (trans).

L'enseignement doit prendre en compte ces différents aspects de l'apprentissage :

- l'aspect cognitif, pour amener les élèves à passer du contempler à l'opérer puis au transformer et à passer de l'« intra » au « trans »;
- les registres, pour amener les élèves à identifier le monde mathématique dans lequel le problème est posé, celui dans lequel il peut être résolu, et la validité de cette solution suivant le monde mathématique considéré ;
- l'aspect langagier, pour amener les élèves d'un genre premier à un genre second, c'est-à-dire à passer de l' « ici et maintenant » à un discours plus général ou à un autre contexte.

3 Caractériser les problèmes par leur fonction dans l'apprentissage

Pour résumer, nous pouvons rencontrer dans la chronogenèse du savoir des problèmes qui interviennent à différents moments avec des caractéristiques différentes. Il peut s'agir d'un :

- problème initial : la question doit amener un besoin (limite d'un outil, ou caractérisation d'une nouvelle condition), on va de l'observer à l'opérer ;
- problème d'application : automatisation d'une technique ou d'une procédure ;

- problème de réinvestissement, ouvert ou pour chercher : permet des transferts, des liens, des changements de cadres, des conversions. Le but est de limiter le domaine de validité ou d'action d'un savoir. On vise le monde des mathématiques formelles par la mise en évidence de nécessités liées à des contraintes théoriques, pour aller vers la preuve ;
- problème d'évaluation : doit attester la disponibilité du savoir visé, demande de reconnaître une situation et d'adapter les outils au contexte.

Chaque type de situation amène à travailler dans le losange d'une manière différente et donc demande à l'enseignant de définir le type d'étayage adapté à ce travail ainsi que ce qui doit être institutionnalisé. La difficulté est que, dans les pratiques usuelles, ces types de problèmes sont confondus, l'objectif d'apprentissage n'est pas clair et les interventions de l'enseignant agissent sur tous les niveaux. Le programme demande d'amener les élèves à savoir construire des problèmes, c'est-à-dire savoir sélectionner les données et les conditions en fonction d'une solution attendue à une question que l'élève se pose lui même dans un contexte inédit. Cela pose la question du processus d'institutionnalisation. Quelles compétences faut-il développer chez les élèves et comment ?

II - LA MISE EN COMMUN : UNE ETAPE DELICATE

1 Des conditions qui favorisent la problématisation par les élèves

Dans les pratiques usuelles, les élèves ont un problème à résoudre, ils cherchent d'abord seuls puis en groupe. Une solution ou une ébauche de solution est proposée par chaque groupe et une mise en commun à l'oral permet de comparer les productions. Un débat peut amener à valider des procédures et des solutions. L'enseignant par une construction dialoguée met en évidence les éléments de savoir qui lui semblent pertinents. L'ensemble se fait sur une ou deux séances.

Lors de la transcription des échanges dans des débats mathématiques en classe entière, la construction des losanges de problématisation montre qu'au fur et à mesure des échanges, différents problèmes sont posés, et que si globalement l'avancée permet de problématiser, tous les élèves ne participent pas également au même niveau de problématisation (Grau, 2017).

Par ailleurs en analysant les inter-actions verbales dans les groupes d'élèves, on a plus de chance d'obtenir une problématisation lorsque les élèves prennent tous alternativement différents rôles : questionner, agir, vérifier, formaliser. Ces rôles correspondent à une prise en compte différente des éléments du problème.

L'objectif pourrait donc être d'amener chaque élève à tenir tous les rôles au travers d'un « débat intérieur » lui permettant d'être autonome, en faisant fonctionner les dualités automatismes/inhibition et ouverture de possibles/validation dans un cadre pertinent.

Les expérimentations montrent que certaines conditions s'avèrent particulièrement favorables à cet échange de rôles :

- la sécurité affective est assurée ;
- aucun élève n'est en position de surplomb ;
- les élèves entrent dans le jeu de l'autre (empathie, écoute) ;
- les élèves osent questionner, le statut de l'erreur permet ce questionnement ;
- les élèves partagent des tâches, agissent conjointement ou en parallèle ;
- le contrat didactique est explicitement posé dans un cadre, un monde mathématique.

Pour amener les élèves à prendre ces différents rôles, la situation peut elle-même jouer un rôle et la consigne attribuer un autre rôle à l'élève ou au groupe. Par exemple la situation peut prendre en charge l'action et il peut être demandé à l'élève de vérifier, la situation peut prendre en charge la question et il peut être demandé à l'élève de formaliser etc.

2 Les figurations et leurs fonctions

Si on étudie à un niveau plus individuel ce qui se passe lors des échanges dans les groupes d'élèves, on voit que le niveau de problématisation peut être très différent d'un élève à l'autre et que les élèves peuvent travailler dans des mondes mathématiques différents, mobiliser des registres différents, avoir des registres de modèles très différents. Il devient alors très difficile pour l'enseignant d'amener les élèves à une même communauté de savoir sur le temps relativement court d'un débat en classe entière. Comme le langage est essentiel dans le processus, il peut être intéressant de proposer aux élèves de faire un travail réflexif sur les productions en petits groupes ou individuellement, les amenant à rédiger cette réflexion. Pour éviter que les arguments ne portent sur des aspects sociaux liés à la place des élèves dans le groupe ou dans la communauté, les productions travaillées doivent être anonymes. J'appelle figuration l'aménagement des productions des élèves par l'enseignant pour en faire un support d'analyse destiné aux élèves. Si l'objectif est de prendre conscience des caractéristiques de la situation, les figurations doivent montrer explicitement ce qui doit être débattu. C'est pourquoi certains éléments sont amplifiés ou symbolisés pour rendre explicite le raisonnement des élèves. La figuration a en fait trois fonctions :

- une fonction épistémique : elle vise la construction d'un savoir précis, la figuration est une épure du savoir visé ;
- une fonction argumentative : elle vise la preuve ou la critique, la figuration attire le regard sur les données sélectionnées, c'est un filtre ;
- une fonction cognitive : la figuration active des connaissances (des automatismes, des schèmes d'action, des analogies, des découpages en sous-buts), la figuration amplifie ce qui peut amener une reconnaissance d'objets ou de procédures.

Les élèves doivent produire un nouvel écrit à partir des figurations, ce qui doit les amener à préciser les nécessités. Ce travail s'intéresse plus à la construction du problème qu'à sa résolution, l'enseignant peut donc valider certains aspects.

La construction des figurations par l'enseignant lui permet de prendre du recul pour analyser les productions des élèves et organiser la suite du travail. Lorsqu'un débat suit immédiatement la recherche, l'enseignant a rarement le temps et le recul nécessaire pour tenir compte d'un maximum de paramètres. C'est en particulier le cas pour les problèmes ouverts car les élèves peuvent très bien utiliser des procédures que l'enseignant n'avait pas anticipées.

Par ailleurs, la figuration autorise l'usage de symboles non conventionnels mais qui permettent d'organiser la réflexion. A l'écoute d'enregistrements d'échanges entre élèves ou entre élèves et enseignant pendant la résolution de problèmes, on retrouve de nombreux indices déictiques : des indices personnels (je, tu, nous sans qu'on puisse savoir qui est le locuteur et à qui il s'adresse), des indices spatio-temporels (avant, après, ici, à côté, au-dessus… sans qu'on puisse savoir à quoi ils réfèrent), des indices de monstration (ce, cette, celle-là…). L'oral peut très bien se contenter de ces indices, l'écrit demande de passer à genre plus second (au sens de Jaubert & Rebière, 2001). Pourtant l'utilisation de symboles et de conventions mathématiques peut gêner la compréhension du raisonnement.

Nous allons voir sur des exemples en quoi peut consister une figuration.

III - LES EXEMPLES

Exemple 1 : un problème pour introduire un nouveau savoir en CM1

Un problème de durée a été posé à des élèves de CM1 (Figure 1) :

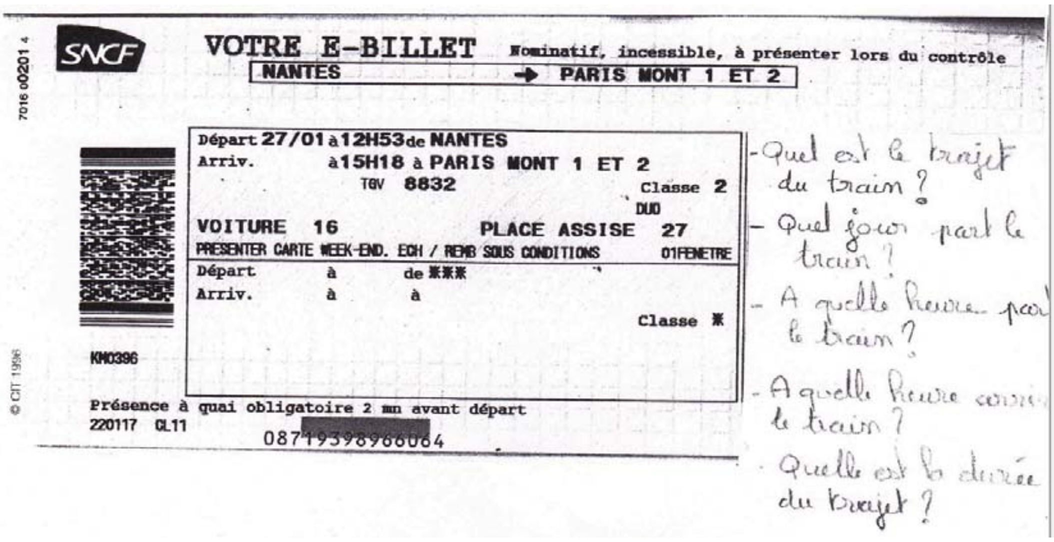


Figure 1. Problème de durée [1]

Prenons l'exemple de l'élève qui produit cet écrit (Figure 2) :

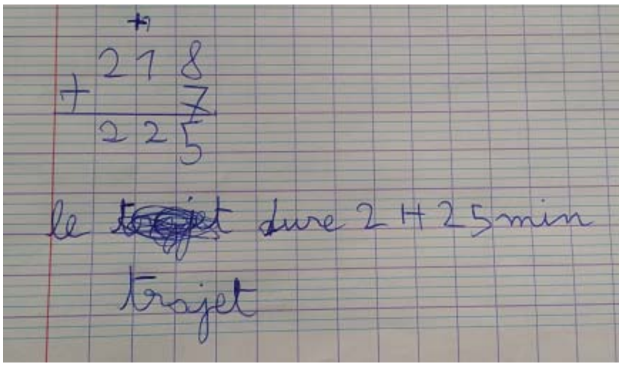


Figure 2. Réponse écrite de l'élève A de CM1 au problème de durée

Si l'enseignant demande à l'élève d'expliciter son écrit, il va montrer du doigt, faire référence au billet, ou utiliser des formulations du type « j'ai fait ça moins ça. » Dans l'action et en présentiel, ce type de formulation est suffisant pour se comprendre.

Si maintenant on demande à l'élève d'enregistrer son commentaire pour le faire écouter à un autre moment à un autre élève, il modifie son propos :

2.2481	Alors,
5.35347	***Là*** en fait y a 12 heures 53, **le train il part à 12 heures 53**.
11.4326	On garde, on met, le train il heu, il s'arr... il est heu... maintenant **on rajoute** 7 minutes.
23.8841	**Là on est** à 13 heures pile.
28.0944	*silence*
31.428	**Le train il s'arrête à 15 heures 18.**

[1] Questions sur le billet de train : Quel est le trajet du train ? Quel jour part le train ? A quelle heure part le train ? A quelle heure arrive le train ? Quelle est la durée du trajet ?

35.4041	13 plus 2 ça fait 15 et on rajoute 18.
41.8121	Du coup **là j'ai** calculé heu 218 plus 7 et **j'ai** trouvé 225.

Tableau 1. Transcription des propos de l'élève A

On trouve encore de nombreux indices déictiques (là, je, on) dans cette transcription, mais aussi deux formulations explicites qui sont en fait les données du problèmes (« Le train part à 12h53 », « Le train il s’arrête à 15h18 ») qui peuvent venir des réponses aux questions préliminaires posées par l’enseignante (A quelle heure part le train ? A quelle heure il arrive?). Par contre, pour ce qui est des opérations, les formulations sont incomplètes (« on rajoute 7 minutes » mais à quoi ?) et surtout les calculs ne sont pas expliqués ou justifiés. Si pour le premier calcul, l’unité est présente (« 7 minutes »), elle ne l’est plus dans la suite (« 13 plus 2 ça fait 15 ») et l’écriture 218 symbolise en fait 2h18min.

Cette reformulation orale permet à l’élève de conscientiser les opérations effectuées mentalement qui ne figurent pas sur la trace écrite. On note aussi que l’élève ne fait pas de retour sur la situation pour répondre explicitement à la question.

On peut voir sur cet autre exemple que la stratégie est la même (Figure 3).

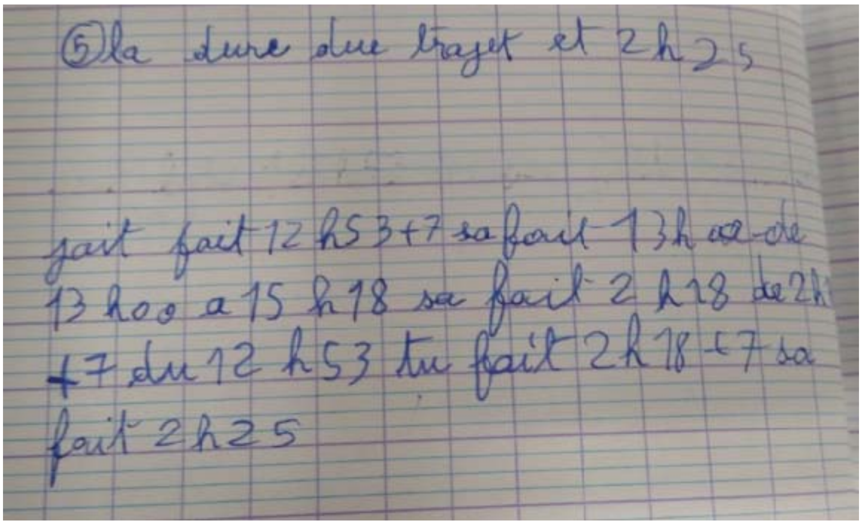


Figure 3. Réponse écrite de l'élève B de CM1 au problème de durée

Dans la production qui suit (Figure 4), la procédure n’est pas donnée mais on a une représentation symbolique de la durée par une double flèche courbée entre l’heure de départ et l’heure d’arrivée.

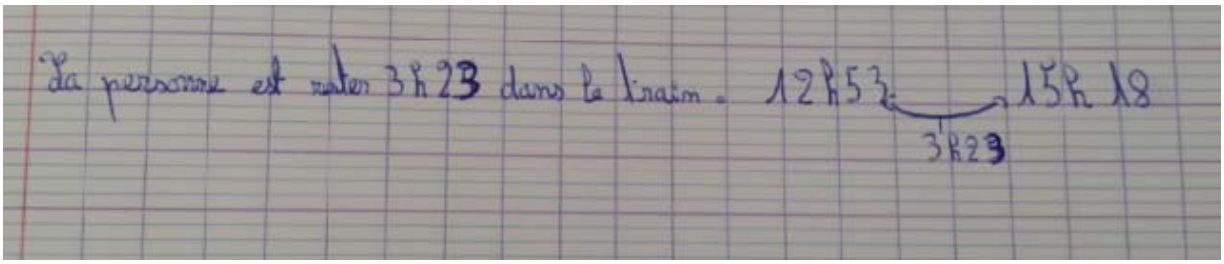


Figure 4. Réponse écrite de l'élève C de CM1 au problème de durée

Revenons au losange de problématisation, il s’agit dans ce problème de déterminer une durée sachant l’heure de départ et l’heure d’arrivée. Les élèves disposent de conditions relativement communes dans la classe de CM1 : une heure dure 60 minutes, on ne peut pas opérer sur les heures et les minutes en même temps, on peut calculer sur les nombres comme on le fait habituellement.

Quel est l’obstacle ? Que faut-il que l’élève apprenne ?

Une première difficulté est de construire le concept de durée. Pour reprendre l’épistémologie de Piaget (Piaget & Garcia, 1983), comment peut-on contempler une durée ? C’est possible de deux manières : sur un cadran d’horloge ou sur une ligne du temps.

La différence entre les élèves se fait déjà à ce niveau, qu’est-ce qui rend nécessaire l’utilisation de l’une ou de l’autre des représentations ? Le cadran ne permet pas de visualiser des durées supérieures à une heure. Il s’agirait donc de faire verbaliser les élèves sur la nécessité d’utiliser une représentation mentale d’une ligne du temps dès que la durée est estimée dépasser une heure. Ce qui suppose donc une première analyse des données pour comparer la durée à 60 minutes.

Ensuite pour opérer sur la ligne du temps, on procède par comparaison et découpage en unités de temps. Ici encore deux choix sont possibles, avancer d’heure en heure jusqu’à ce que ce ne soit plus possible ou avancer en s’appuyant sur des nombres « ronds ». Le choix se fait dès lors qu’on compare le nombre de minutes, si celui de l’heure d’arrivée est supérieur à celui de l’heure de départ, les deux procédures sont équivalentes. Sinon, s’appuyer sur des nombres « ronds » est plus efficace.

Amener les élèves à apprendre à résoudre un problème de calcul de durée ne peut donc pas se résumer à apprendre une procédure mais bien à mettre en évidence les nécessités liées au contexte.

L’enseignant doit donc attirer l’attention de l’élève sur la représentation mentale de la ligne du temps et au découpage de la durée en s’appuyant sur les nombres « ronds ». Cette procédure a l’avantage de permettre de trouver le résultat dans tous les cas.

L’étape suivante est d’additionner des durées et pour cela, il faut mobiliser deux cadres mathématiques qui portent chacun des nécessités :

- dans le cadre des mesures de grandeurs, on ne peut opérer que sur des mesures exprimées dans la même unité ;
- dans le cadre de l’arithmétique, il s’agit de calculer dans deux bases différentes (la base 60 pour les minutes et la base 24 pour les heures).

L’obstacle est la mise en relation des deux unités. Il s’agirait donc d’amener les élèves à formaliser les nécessités liées à cette prise en compte simultanée des durées en heures et des durées en minutes. Cet obstacle peut être dépassé en écrivant les unités à l’intérieur des calculs.

Dans la production suivante (Figure 5) on peut repérer les nécessités qui sont identifiées : la durée est symbolisée par le trajet entre les deux gares signalées par leur nom et par les flèches courbes entre nombres qui peuvent être comprises comme un symbole fonctionnel, les heures et les minutes sont traitées séparément, la durée globale est obtenue par addition des durées calculées sur les heures et sur les minutes.

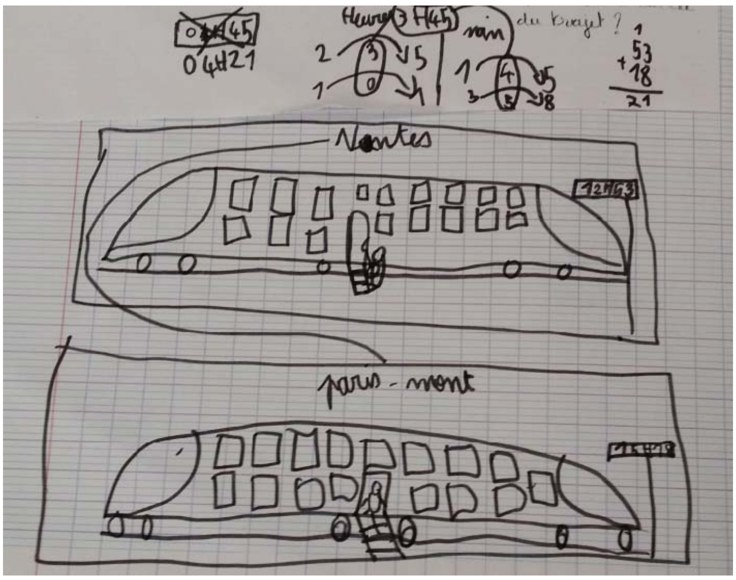


Figure 5. Réponse écrite de l'élève D de CM1 au problème de durée

En quoi pourrait consister une figuration dans notre cas ? La dernière production (Figure 5) présente plusieurs erreurs. En particulier l'écart entre 53 et 18 est calculé séparément entre unités et dizaines ce qui amène une erreur alors que la même technique amène au bon résultat pour le calcul sur les heures. L'élève D calcule l'écart entre 1 et 5 d'une part et entre 3 et 8 d'autre part. Comme il cherche la distance entre les nombres, il calcule 4 d'une part et 5 de l'autre, ce qui lui donne 45. Au cours de la mise en commun, le risque, en partant des travaux des élèves, est de travailler différentes notions, ou de se perdre dans des considérations sans intérêt par rapport à l'objectif d'apprentissage (ici le dessin). En faisant une figuration, il devient possible de concentrer l'attention sur une question seulement, celle qui permet de travailler le savoir visé pour l'apprentissage. Il est aussi possible d'ajouter des éléments qui ne sont pas apparus dans les productions écrites mais qui ont été évoqués à l'oral. Ici par exemple, les élèves ont demandé à l'enseignante s'ils pouvaient utiliser l'horloge pour se représenter le problème, les écrits n'en gardent pas trace.

On peut alors proposer aux élèves différentes représentations symboliques du problème et donner la solution (voir annexe 1). La question posée aux élèves est alors non plus de résoudre le problème mais d'expliquer comment on peut trouver cette réponse. Le fait de proposer différents schémas a pour objectif de faire parler les élèves autour des représentations symboliques et par la comparaison de ces représentations, d'interroger sur les automatismes qui peuvent être à inhiber.

Dans l'idée de choisir pour soi la représentation qui semble la plus efficace, il est aussi important de signifier pourquoi cette représentation peut être différente d'un élève à l'autre.

Une autre pratique peut consister à donner une « astuce » comme celle donnée en annexe 2 trouvée sur l'internet. On peut cependant s'interroger sur la nature des connaissances construites par les élèves avec ce type de support. En quoi la technique apporte-t-elle des connaissances sur les objets mathématiques ? Le discours autour de cette technique évoque-t-il une théorie mathématique quelconque ?

On peut encore choisir de proposer un texte de savoir comme celui proposé par Cap Maths des éditions Hatier (voir annexe 3). Plusieurs procédures sont expliquées sur des exemples. Cependant, la difficulté pour l'élève est de savoir quand il doit choisir telle ou telle procédure. C'est pourquoi il est important que le texte de savoir garde une trace de ces nécessités, ce qui n'est pas le cas dans cet extrait, même si les différentes représentations des durées sont proposées.

Exemple 2 : un problème de réinvestissement

Concernant les problèmes numériques plus classiques, la question est souvent de justifier la validité d'un résultat ou d'une procédure. Les figurations peuvent avoir pour but d'amener les élèves à justifier les liens entre ces procédures et les nécessités associées à une classe de problèmes identifiée.

Prenons l'exemple d'un problème posé en classe de CE1. Il s'agit d'un problème multiplicatif proposé en janvier à une période où les élèves n'ont pas automatisé la technique de la multiplication.

Les différentes productions présentées dans l'exemple précédent montrent que les élèves utilisent des symboles qui ne sont pas toujours conventionnels (par exemple, la flèche courbée pour indiquer les durées qui est proche de la flèche fonctionnelle). En effet, suivant le niveau de scolarité, les symboles désignant certains concepts, certaines notions ou même certaines opérations, ne sont pas enseignés. On peut s'interroger sur ce manque d'outils symboliques puisque nous avons vu que le passage par les symboles est indispensable pour lier le monde des mathématiques « pratiques » à celui des mathématiques formelles. Il s'agit donc de donner ou de permettre aux élèves d'inventer un registre sémiotique permettant de décrire puis d'opérer sur les objets mathématiques rencontrés.

A partir des procédures présentées en annexe 4, on peut imaginer la mise en commun sous forme de débat ou de discussion collective d'une procédure, amenant à proposer des alternatives. Pourtant l'important n'est pas que les élèves sachent quelle est la procédure la plus efficace mais qu'ils sachent choisir celle qui est efficiente pour eux. Pour cela la validation du résultat doit permettre aux élèves de se concentrer sur les raisons. Si on ne veut pas disperser l'attention, la figuration éliminera par exemple les erreurs de calcul liées à la technique, pour se focaliser sur la manière dont le problème est posé.

Ainsi on peut proposer aux élèves de discuter des productions suivantes :

Solution 1	Solution 2	Solution 3	Solution 4	Solution 5
6 × 3 = 18 10 × 3 = 30 20 × 3 = 60 60 + 18 = 78	$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 26 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 78 \end{array}$	⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗	$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 26 \\ +\ 26 \\ +\ 26 \\ \hline 78 \end{array}$	26 × 3 = 78

La consigne peut alors être d'expliquer les procédures, de repérer ce qui est semblable, de justifier pourquoi toutes ces solutions sont valides, de choisir celle qui semble la plus efficace et de justifier, de critiquer (dans l'idée d'une critique positive)… L'important est de permettre aux élèves d'échanger oralement mais aussi de produire un écrit autour de cette figuration pour voir comment ils formulent les nécessités afin de reprendre ces formulations dans le texte de savoir. C'est aussi l'occasion de voir que la solution 3 n'est pas moins bonne que d'autres pour peu qu'elle permette de trouver la bonne solution et pour cela il faut savoir compter de trois en trois.

Une étape suivante peut justement consister à lister ce qu'il faut savoir pour utiliser telle ou telle procédure (connaître ses tables, la technique de la multiplication posée, la commutativité de la multiplication, des faits mathématiques comme 3 × 25 = 75, compter de 3 en 3 etc.) On peut alors montrer aux élèves que ce sont les connaissances de l'élève qui orientent son travail et donc que les erreurs sont plus souvent liées à une connaissance trop présente plutôt qu'à un manque de connaissances.

Exemple 3 : un problème pour chercher

Prenons un autre problème que je vais simplifier en disant qu'à partir d'un tableau qui met en correspondance la pluviométrie lue sur un site météorologique et la hauteur d'eau dans le pluviomètre de M.Legoff, la question est de savoir si pour une pluviométrie prévue le 21 mars de 9L/m², la hauteur d'eau dans le pluviomètre dépassera 130mm, hauteur à laquelle la cave de M.Legoff risque d'être inondée. Ce problème est analysé dans un article de la revue Repères Irem (Grau, 2017b).

Les élèves de 6ème sont par groupes et produisent des écrits. Examinons un exemple de production :

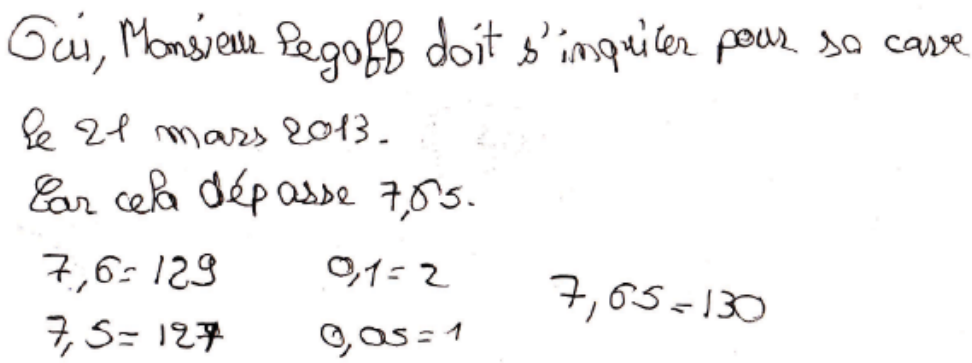

Oui, Monsieur Legoff doit s'inquiter pour sa cave
le 21 mars 2013.
Car cela dépasse 7,65.
7,6=129 0,1=2 7,65=130
7,5=127 0,05=1

Figure 6. Réponse écrite du groupe E de 6ème au problème du pluviomètre

On remarque que les élèves utilisent ici le concept d'affinité sans avoir les outils pour l'expliquer. Ils associent à une grandeur x une grandeur y en écrivant $x = y$ (7,6=129 et 7,5=127) mais à côté, ils associent à une variation de x, la variation correspondante de y (0,1=2). Implicitement ils supposent que les variations sont proportionnelles (0,05=1), ce qui revient à faire une interpolation linéaire sur un intervalle pour conclure que 7,65=130.

Cet exemple n'est pas isolé et il atteste que les élèves peuvent utiliser des concepts outils sans avoir le formalisme pour les décrire ou les généraliser et ce très tôt dans la scolarité.

Par contre, certains automatismes, pour résoudre les problèmes de proportionnalité, comme par exemple par la technique du produit en croix, amènent les élèves à considérer que tous les problèmes présentés en tableaux ou mettant en jeu la covariation de deux grandeurs sont des problèmes de proportionnalité et à utiliser les techniques associées sans interroger leur pertinence.

IV - CONCLUSION

Le travail sur les figurations peut être l'occasion de questionner les symboles et de lever un peu le voile sur les automatismes, sur les indices qui appellent des schèmes d'action, sur les savoirs et compétences que mobilisent les élèves et qui peuvent être des obstacles à l'ouverture de nouveaux possibles. C'est l'occasion de montrer que, ne pas savoir résoudre un problème relève plus souvent d'un savoir qui entrave que d'un manque de savoir.

L'étayage doit permettre à chaque élève de résoudre le problème ou un problème similaire, de formaliser les caractéristiques des situations travaillées.

Pour l'enseignant, les figurations permettent d'orienter le travail autour des savoirs visés en prenant en compte les représentations des élèves et en faisant le choix des aspects qui ne seront pas pris en compte dans la suite du travail. Elles permettent d'introduire ou de mettre en commun des outils sémiotiques permettant d'opérer sur les objets mathématiques.

Bien sûr, un tel travail ne peut pas se faire systématiquement pour chaque notion, il peut être entrepris sur un temps long, régulièrement sur chaque période, pour des notions particulièrement difficiles car mobilisant différents cadres ou registres de représentations sémiotiques.

V - BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI, J.-P. (1993) Placer les élèves en « situations-problèmes » ? INRP. Paris.

CHARNAY, R. (1992) Problème ouvert, problème pour chercher. Grand N, (51), 77-83.

DOUADY, R. (1986) Jeu de cadres et dialectique outil/objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, (7/2), 5-32.

DUVAL, R. (2006) La conversion des représentations : un des deux processus fondamental de la pensée. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

FABRE, M. (2011) Eduquer pour un monde problématique : la carte et la boussole. Paris: PUF.

GRAU, S. (2017a) Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Mémoire de doctorat en Sciences de l'Education, Laboratoire du CREN, Université de Nantes.

GRAU, S. (2017b). Modélisation : le cas des fonctions affines. Repères IREM, (108), 41-62.

HERSANT, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(1), 9-31.

LEGENDRE, M.-F. (2006). L'épistémologie de Piaget. Consulté le 06/09/2017, à l'adresse http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=323&IDMODULE=72 - s02

ORANGE, C. (2012). Enseigner les sciences : Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe (Première Édition). Bruxelles: De Boeck.

PIAGET, J., & GARCIA, R. (1983). Psychogenèse et histoire des sciences. Paris: Flammarion.

ROBERT, A., & ROGALSKI, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. Petit x, (60), 6-25.

TALL, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. Annales de didactique de Strasbourg, (11), 195-215.

ANNEXE 1 : EXEMPLE DE FIGURATIONS POUR L'EXEMPLE 1

Voici quatre représentations du problème. La solution est 2 heures et 25 minutes.
Choisis le schéma qui te semble le plus efficace pour trouver la solution.
Explique ton choix.

Schéma 1

Schéma 2

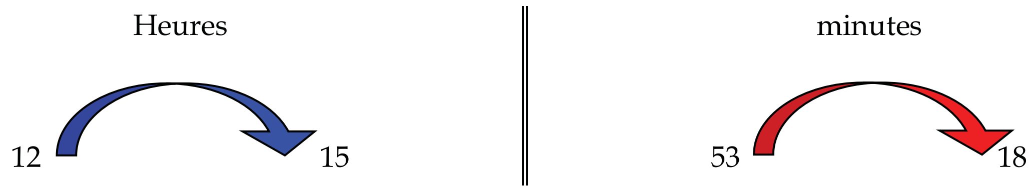


Schéma 3

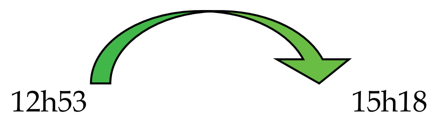
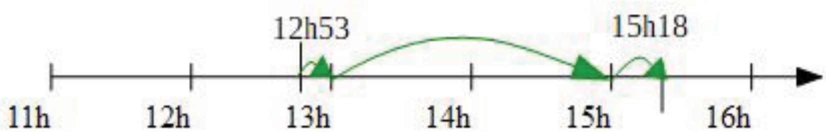
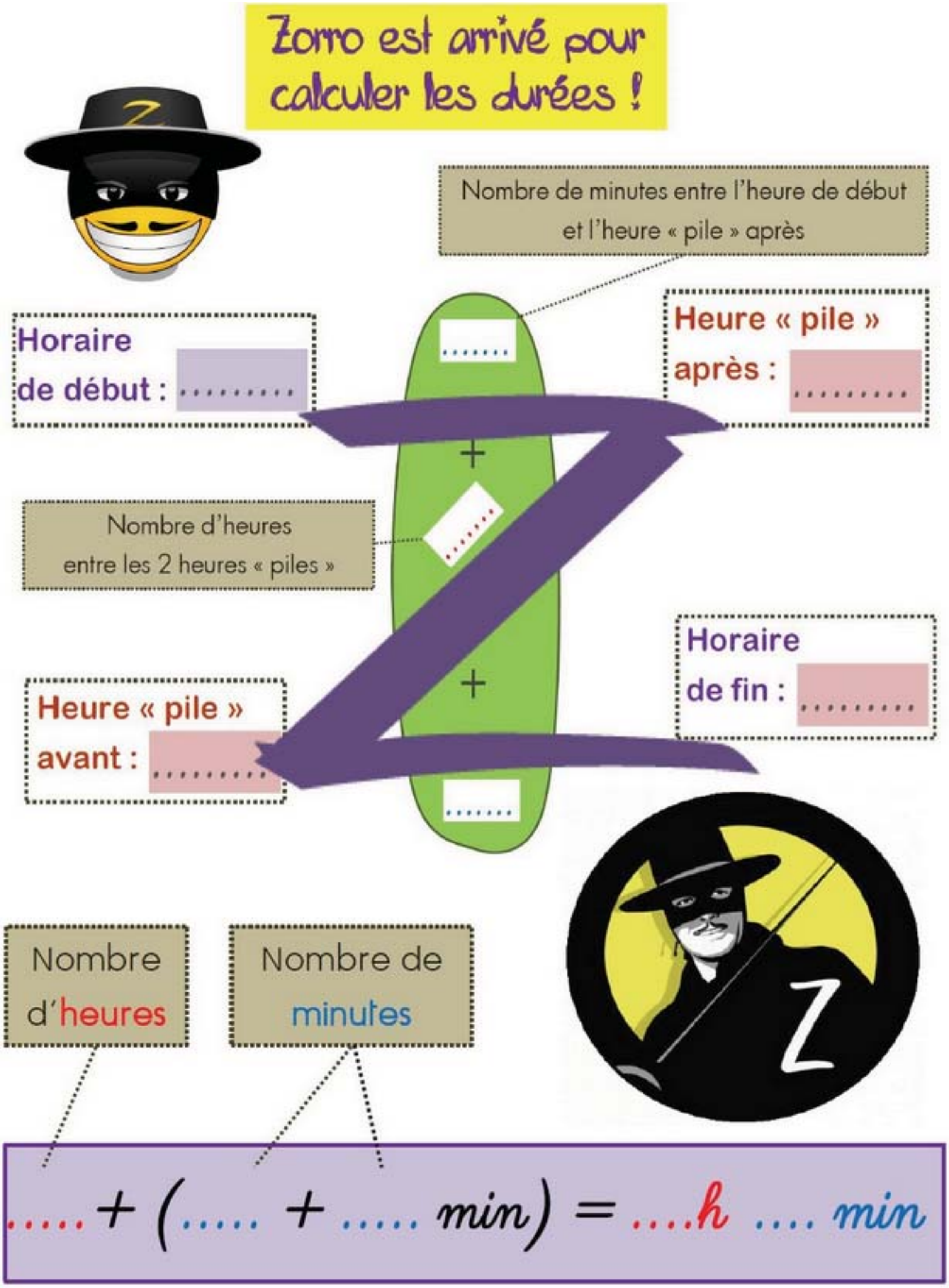


Schéma 4



ANNEXE 2 : EXEMPLE DE FCHE METHODE SUR L'INTERNET

http://mamaitressedecm1.fr/?p=60



ANNEXE 3 : EXEMPLE DANS UN MANUEL

Cap Maths Cycle 3 CM1 CM2 Editions Hatier 2017

– Tu peux t'aider d'une horloge ou d'une ligne du temps en t'appuyant sur des nombres ronds.

EXEMPLE : de 8 h 34 à 10 h 12,

8 h 34 —Il s'écoule 26 min→ 9 h —Il s'écoule 1 h→ 10 h —Il s'écoule 12 min→ 10 h 12

26 min + 1 h + 12 min = 1 h 38 min

Entre 8 h 34 et 10 h 12, il s'écoule **1 heure 38 minutes.**

– Tu peux utiliser les équivalences entre unités.

EXEMPLE 1 : Quelle est la durée totale de deux événements successifs de 40 min 25 s et de 35 min 45 s ?

40 min 25 s + 35 min 45 s

40 min + 35 min + 25 s + 45 s

75 min + 70 s

76 min + 10 s

= 60 min + 16 min + 10 s

La durée totale est de **1 h 16 min 10 s.**

EXEMPLE 2 : pour trouver la différence entre 40 min 15 s et 35 min 25 s :

➔ Tu peux transformer 1 minute en 60 secondes.

40 min = 39 min 60 s, donc 40 min 15 s = 39 min 75 s,

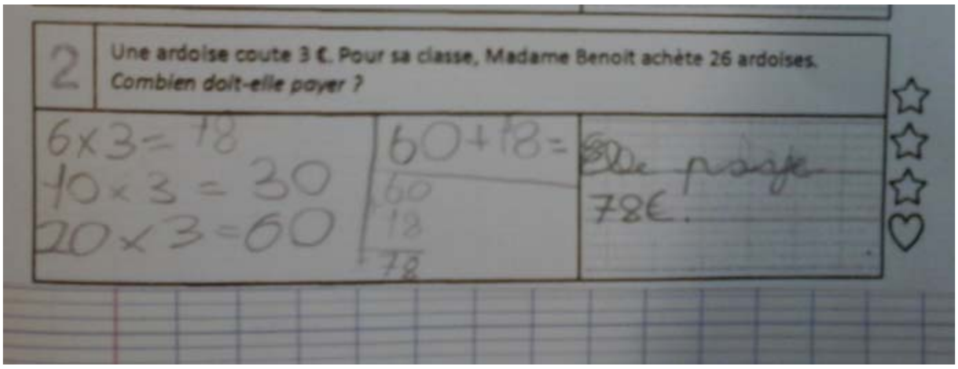
39 min 75 s – 35 min 25 s = 4 min 50 s.

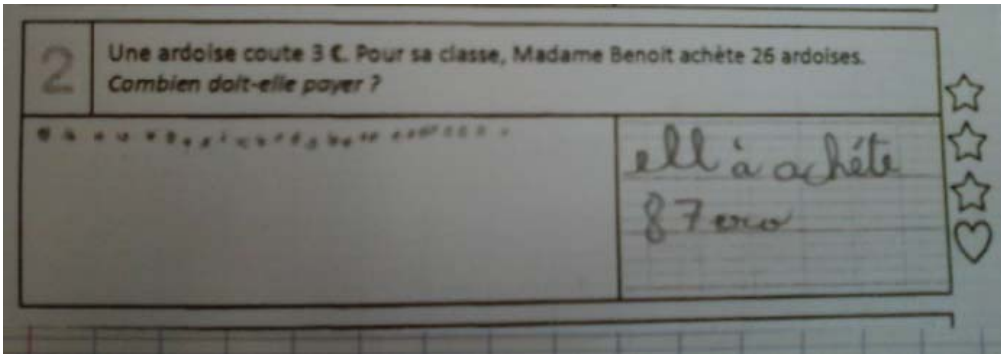
➔ Tu peux aussi faire un schéma :

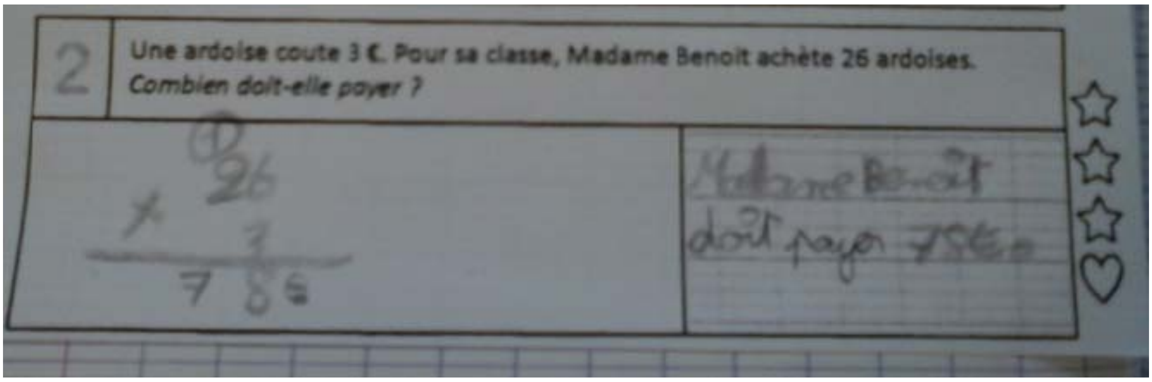
35 min 25 s —Il s'écoule 35 s→ 36 min —Il s'écoule 4 min→ 40 min —Il s'écoule 15 s→ 40 min 15 s

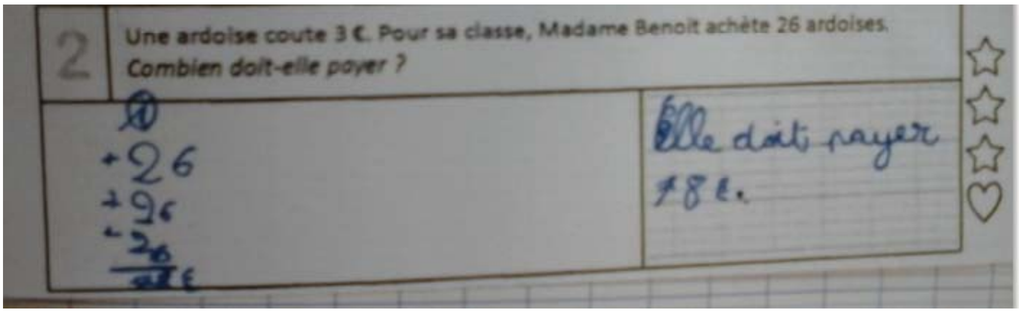
Donc la différence est de **4 min 50 s.**

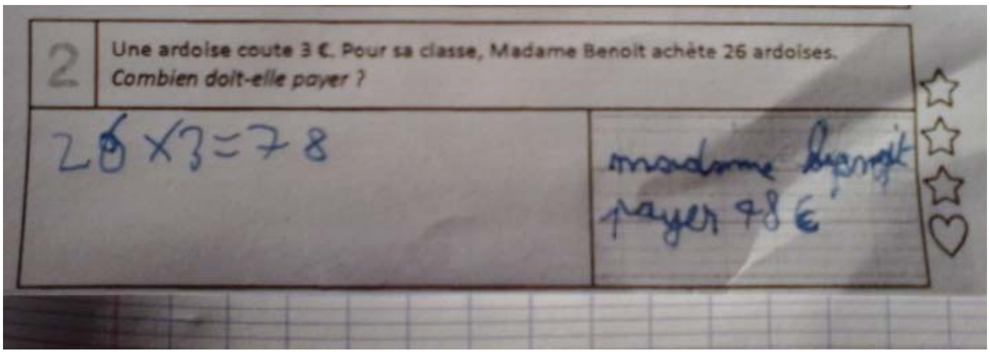
ANNEXE 4 : PRODUCTIONS D'ELEVES POUR L'EXEMPLE 2











MATH & MANIPS :
MANIPULER POUR CONSTRUIRE LA NOTION DE VOLUME

Marie-France GUISSARD
Directrice de recherche, CREM asbl
Belgique
mf.guissard@crem.be

Pauline LAMBRECHT
Chercheur, CREM asbl
Belgique
pauline.lambrecht@crem.be

Résumé
Lors du 38e colloque COPIRELEM, une équipe du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) a présenté un atelier décrivant plusieurs activités d'une recherche consacrée à l'introduction des manipulations dans l'apprentissage des mathématiques (Henry V. & Lambrecht P., 2012). Ces activités, appelées *Math & Manips* (Guissard M.-F. & al., 2014), ont été conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des manipulations. La présente communication propose une analyse en profondeur d'une séquence mise au point ultérieurement, suite à des échanges avec des enseignants et des chercheurs. Cette activité, dédiée à l'acquisition de la notion de volume par des enfants de 10 à 12 ans, propose différentes expériences (remplissage de boîtes de formes variées et immersion de solides de masses et formes diverses, ...) qui favorisent la construction d'images mentales variées dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale. Cette activité prépare le terrain pour aborder la séquence suivante (dont une version provisoire avait été succinctement présentée lors de l'atelier mentionné) qui construit la formule du volume du parallélépipède rectangle par remplissage de boîtes au moyen de cubes de différentes dimensions et se termine par un retour vers les expériences initiales à la lumière de cette formule.

I - INTRODUCTION

Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) s'est dernièrement consacré à une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves (Guissard & al., 2014). Ces activités, appelées *Math & Manips,* sont conçues pour mettre l'élève en situation de conflit cognitif. Les élèves sont confrontés par le milieu à des phénomènes interpellants, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle mobilise et, par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit de précédents travaux du CREM, la recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début de l'école (petite section) jusqu'à la fin du secondaire.

La publication (Guissard & al., 2014) à destination des enseignants décrivant l'ensemble des activités est disponible sur le site du CREM (www.crem.be). La méthodologie permettant à chaque enseignant de s'approprier les séquences y est détaillée. S'y trouve également la description du matériel facile à se procurer et à utiliser.

Tout comme les autres activités de cette recherche, celles présentées dans ce compte-rendu ont été testées dans les classes et proposées aux enseignants lors de divers colloques ou formations continuées. Les réflexions qui en ont découlé ont donné lieu à des remaniements successifs. Le texte ci-dessous[1] rend compte de la version finalisée des séquences d'apprentissage destinées aux élèves de 10-12 ans.

II - CONSTRUCTION DE LA NOTION DE VOLUME

C'est au cours de la mise au point d'une séquence d'apprentissage visant la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle que s'est posée la question du concept même de volume. Comment l'expliquer aux élèves, quelles conceptions s'en forgent-ils dans leur vie quotidienne et dans leur parcours scolaire ?

La séquence d'apprentissage proposée ici est une tentative de réponse à ces questions ; elle nous semble de nature à donner aux élèves des images mentales variées du concept, à diversifier les approches et surtout à ne pas réduire le volume d'un objet à une formule.

Pour trouver le volume d'un objet creux[2], il est possible de le remplir par exemple de riz, de sable ou d'eau. Si cet objet est de forme parallélépipédique, le remplir de cubes permet une approche du calcul de la mesure du volume qui, par la suite, amènera une formule. Nous développons cette idée dans la section III de ce texte.

Lorsque l'objet est plein, rechercher son volume par remplissage est impossible. Dans ce cas, le volume est défini comme la place qu'occupe l'objet dans l'espace. Il est cependant plus facile de déterminer la place que prend un objet lorsqu'il est immergé dans un liquide car, contrairement à l'air, le déplacement du liquide est visible et mesurable.

La suite d'expériences proposée ci-dessous amène à comparer les volumes d'objets creux, que l'on peut remplir, et d'objets pleins que l'on peut immerger. Notre choix s'est porté sur des objets creux dont les parois sont suffisamment fines pour être négligeables car nous ne souhaitions pas travailler explicitement la distinction entre « volume intérieur » et « volume extérieur » d'un objet.

Ces activités sont menées avec la classe entière en interaction avec l'enseignant. En général, c'est un élève qui expérimente face à ses condisciples. Lors des manipulations, il est important d'aborder les problèmes d'approximation liés au processus expérimental.

1 Comparaison d'objets creux

Figure 1

Deux boîtes de formes très différentes, une boîte de conserve de forme cylindrique et une boîte parallélépipédique (figure 1), sont présentées à la classe. La seconde boîte a été construite de même volume que la première, à l'insu des élèves. Ceux-ci doivent indiquer, sans utiliser de matériel supplémentaire, la boîte qui peut contenir le plus de riz quand elle est remplie « à ras bord ».

Une première étape d'estimation à vue, avant toute manipulation, débouche sur des avis partagés car la seule perception visuelle ne permet pas d'affirmer qu'une boîte peut contenir plus ou moins de riz que l'autre. Certains élèves se basent sur des propriétés de l'objet telles la hauteur ou la « largeur ». L'estimation a justement pour objectif de faire émerger ces premières conceptions.

Les élèves s'engagent ensuite dans une démarche de comparaison avec le riz mis à leur disposition. La solution la plus évidente consiste à remplir de riz « à ras bord » une première boîte, à transvaser ensuite ce riz dans la seconde pour constater que la seconde boîte est également remplie à ras bord. Il arrive

[1] Le texte de la partie II est très proche du texte publié dans la revue *Grand N* (Guissard & al., 2015), présentant l'activité dans sa version aboutie.

[2] Le « volume » d'un objet creux est parfois nommé « contenance » ou « capacité ». Pour la suite de notre activité, il est important d'introduire également ici le mot « volume ».

cependant que des élèves remplissent les deux boîtes puis réalisent que ces remplissages ne permettent pas de comparaison sans autre matériel.

Ceci permet de conclure que les deux boîtes contiennent la même quantité de riz et de définir ainsi la caractéristique *avoir même volume*. Cette expérience permet d'associer le volume d'un objet creux à la quantité de matière qu'il peut contenir et de montrer aux élèves que *des objets de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

2 Comparaison d'objets pleins

Cette séquence vise à multiplier les expériences pour analyser les liens entre la taille, la forme et la masse d'un objet avec son volume.

2.1 Objets pleins identiques

Deux boules identiques[3] en pâte à modeler (figure 2) sont présentées aux élèves. Comme ces objets ne peuvent être remplis, leurs volumes seront comparés en immergeant chaque boule l'une après l'autre, dans une quantité d'eau suffisante pour minimiser les erreurs expérimentales. Les élèves doivent prévoir laquelle de ces deux boules déplacera le plus d'eau.

Figure 2

Les boules étant identiques, les élèves pensent, à juste titre, qu'elles déplacent la même quantité d'eau. L'objectif est surtout ici de mettre en place la procédure expérimentale qui exige de faire exactement la même expérience avec chacune des deux boules, ce qui implique de retirer la première avant de plonger la seconde dans l'eau.

Sur la paroi d'un récipient contenant de l'eau, un élève, chargé de mener l'expérience devant la classe, colle un morceau d'adhésif transparent sur lequel seront notés par un trait les différents niveaux d'eau. Il note d'un trait bleu le niveau initial de l'eau, immerge ensuite la première boule et note d'un trait rouge le niveau alors atteint par l'eau. La différence entre les deux traits permet de représenter hauteur de la quantité d'eau déplacée. En effet si, pour chacune des deux boules, le niveau atteint par l'eau est le même, le volume d'eau déplacé par chaque boule est le même. La comparaison des niveaux permet ainsi de comparer les volumes des deux boules, mais pas de les mesurer.

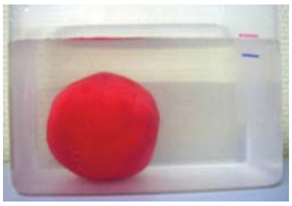


Figure 3

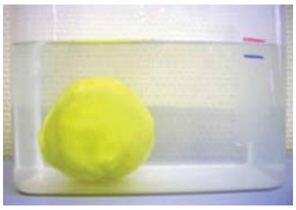


Figure 4

On constate, à l'issue de l'expérience, que les déplacements d'eau provoqués par chaque boule et les différences de niveau qu'ils engendrent sont identiques (figures 3 et 4). L'expérience confirme que deux boules identiques déplacent la même quantité d'eau. L'enseignant dégage une première approche de la notion de volume d'un objet plein : *deux objets qui, plongés dans l'eau, déplacent la même quantité d'eau ont le même volume*.

Certains élèves sont tentés de plonger la deuxième boule sans retirer la première. Dans ce cas, chaque boule déplace bien la même quantité d'eau, mais les différences de niveau provoquées par ces déplacements dépendent de la forme du récipient. Ce processus ne permet la comparaison que lorsque le récipient est à section constante. Cette discussion nous est apparue prématurée dans une phase de construction de la notion de volume avec des élèves encore très jeunes. C'est pourquoi nous avons imposé la procédure où les boules sont immergées successivement. Cette réduction de la part de liberté dans l'activité dévolue aux élèves nous a semblé inévitable, à ce stade de la construction du concept, pour atteindre les objectifs que nous nous étions fixés.

[3] Pour la suite de l'activité, il est impératif que ces deux boules soient de même volume que la boule de pétanque choisie pour l'expérience « Objets de masses différentes ».

2.2 Objets pleins de tailles différentes

Figure 5

Cette fois deux boules de pâte à modeler de tailles visiblement différentes (figure 5) sont proposées. Avant toute manipulation, les élèves doivent prévoir quelle boule déplacera le plus d'eau.

Généralement, les élèves voient qu'une boule prend plus de place que l'autre et prévoient spontanément que les déplacements d'eau ne seront pas égaux et que la boule la plus grosse déplacera le plus d'eau.

Ils confirment leurs observations en réalisant l'expérience, sur le même modèle que la précédente. Cette expérimentation montre que le déplacement d'eau varie bien quand le volume varie. Elle complète la première approche de la notion de volume. Elle amène l'enseignant à préciser que *la quantité d'eau déplacée correspond au volume de l'objet* et que *plus le volume de l'objet est important, plus la quantité d'eau déplacée est importante*.

2.3 Objets pleins de formes différentes

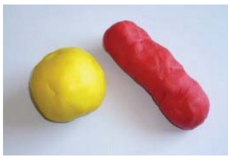


Figure 6

Les deux boules identiques en pâte à modeler de la figure 2 dont on a déjà constaté qu'elles avaient le même volume, sont réutilisées. L'une, ici jaune, est conservée et, devant les élèves, l'enseignant transforme l'autre (ici rouge) en un objet de forme très différente, par exemple un « donut » ou un « colombin » (figure 6), ou même plusieurs boules plus petites disjointes. Les élèves relèvent les caractéristiques de l'objet déformé : il est plus long (ou plus haut) mais plus fin, il contient la même quantité de pâte à modeler, …

Ils formulent ensuite, oralement ou par écrit, leur prévision quant aux déplacements d'eau provoqués par l'immersion de chacun des deux objets. Lors des expérimentations dans les classes, nous constatons que les élèves qui pensent, au préalable, que les déplacements d'eau seront différents, le justifient en expliquant, par exemple, qu'un objet long et fin ou haut et mince prend davantage de place qu'une boule. Ceux qui pensent que le niveau de l'eau va rester le même expliquent qu'on n'a ni ajouté ni enlevé de pâte à modeler.

Ensuite, l'expérience est réalisée en rappelant que, lorsque les déplacements d'eau provoqués par deux objets immergés tour à tour sont identiques, on dit que ces deux objets ont le même volume. Cette expérience montre que *lorsqu'on modifie la forme d'un objet plein, il garde le même volume*. C'est l'acquisition de la conservation du volume qui est contrôlée au cours de cette expérience.

2.4 Objets pleins de masses différentes

Figure 7

Pour l'expérience suivante, deux boules de même diamètre, mais de masses très différentes[4] sont présentées. Dans notre exemple, nous avons choisi une boule de pétanque en acier et une boule en pâte à modeler (figure 7). Les élèves doivent prévoir laquelle de ces deux boules déplace le plus d'eau.

Comme la boule en acier est bien plus lourde que la boule en pâte à modeler, certains élèves pensent qu'en les immergeant, la boule la plus lourde déplacera plus d'eau. Face à l'expérience, les élèves voient que les quantités d'eau déplacées par les deux boules sont identiques. Prenant appui sur les conclusions précédentes, ils déduisent que ces deux boules ont le même volume.

Les élèves découvrent, via cette expérience, que *deux objets de masses différentes peuvent avoir le même volume*.

2.5 Objets pleins de formes et de masses différentes

Figure 8

Pour terminer, il s'agit de comparer, d'une part, le volume du colombin provenant de la déformation d'une boule en pâte à modeler et d'autre part le volume de la boule de pétanque (figure 8). Il est demandé aux élèves ce qu'ils peuvent dire du volume de

[4] La différence de masse est telle qu'il est inutile d'utiliser un instrument pour peser les boules.

ces deux objets. Remarquons que c'est la première fois que le mot volume est utilisé dans la question.

Dans ce cas, il est d'abord fait appel à la seule réflexion des élèves. Ils ne réaliseront l'expérience que dans une seconde phase, pour valider les propositions ou s'ils en éprouvent le besoin. Le colombin a le même volume que la boule en pâte à modeler, la boule d'acier a également le même volume que la boule en pâte à modeler, donc le volume du colombin est le même que le volume de la boule d'acier. Les élèves rencontrent ici, en actes, une propriété fondamentale de l'égalité : la transitivité de l'égalité.

On amène les élèves à en déduire que *deux objets de masses et de formes différentes peuvent avoir le même volume*.

3 Remplissage et immersion

La première expérience a montré comment comparer le volume de deux objets creux par remplissage, les suivantes ont donné une méthode pour comparer les volumes d'objets pleins, la procédure par immersion dans un même récipient et comparaison des niveaux d'eau. Il semble naturel de s'intéresser à la question suivante : Est-il possible de comparer le volume d'un objet plein à celui d'un objet creux, par exemple celui de la boule de pétanque à celui d'une boîte en carton ?

Pour établir un lien entre les deux méthodes de comparaison, un objet creux qui peut être soit rempli, soit immergé, peut être proposé. Au début du collège, à ce moment de l'activité, il est envisageable de laisser les élèves proposer eux-mêmes des expériences qui mettraient ces liens en évidence. Pour réaliser la suite de l'activité, nous avons choisi un cube en plexiglas avec un couvercle qui permet de l'ouvrir ou de le fermer hermétiquement. Le niveau initial de l'eau est noté d'un trait sur la paroi du récipient contenant l'eau. Le cube est tout d'abord lesté en y plaçant des pièces de monnaie. Une variante consiste à lester avec de l'eau (éventuellement colorée). Cette proposition a été contestée auparavant par des enseignants du fondamental[5] par crainte d'une confusion entre eau du grand récipient et eau du petit cube[6]. L'enseignant pose alors la question de l'impact de la modification de la masse sur le volume. Les élèves peuvent évoquer l'expérience avec la boule de pétanque pour se convaincre que l'ajout des pièces de monnaie est sans influence sur la quantité d'eau déplacée. Si ce n'est pas le cas, l'expérience peut être renouvelée.

Le cube est ensuite fermé puis immergé, et le niveau atteint par l'eau est noté (figure 9). Dans un second temps, le cube lesté est retiré et vidé des pièces de monnaie puis remplit « à ras bord » avec de l'eau (ne provenant pas du récipient). Enfin, le cube rempli d'eau est vidé dans le récipient (figure 10).

Figure 9

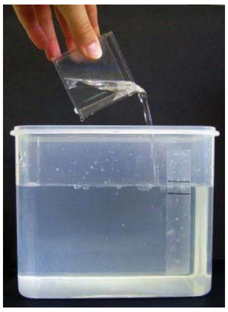


Figure 10

Constat : Le niveau atteint par l'eau correspond à celui noté précédemment. Les élèves sont amenés à formuler la conclusion. Celle qui est attendue est du type : *la quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion*.

Une autre expérience mène à la même conclusion. Il s'agit d'immerger le cube en plexiglas dans un récipient rempli d'eau à ras bord et placé dans un bac plus grand. L'eau qui déborde lors de l'immersion du cube est récupérée et transvasée dans le cube.

Constat : Cette quantité d'eau permet de remplir exactement le cube.

Une seule de ces deux expériences peut suffire mais il est utile d'explorer les deux manières de faire pour permettre à un maximum d'élèves de créer des liens entre les différentes images mentales construites précédemment.

Ces manipulations fournissent des pistes pour imaginer des expériences permettant de comparer, par exemple, le volume d'une boîte en carton et celui d'une boule de pâte à modeler, mais cela se

[5] L'enseignement fondamental en Belgique regroupe les enseignements maternel et primaire.

[6] Pour éviter ces manipulations qui pourraient perturber le raisonnement des élèves, il est désormais possible de créer, avec l'aide des imprimantes 3D, un cube qui ne nécessite plus d'être lesté. Il faut alors que son couvercle soit muni d'une longue tige qui permette à l'expérimentateur de maintenir le cube dans l'eau, sans avoir à y plonger ses doigts.

complexifie de plus en plus. Le processus expérimental montre ici ses limites, il devient nécessaire de trouver un moyen de « mesurer » le volume pour établir des comparaisons plus aisément.

III - BOÎTES PARALLÉLÉPIPÉDIQUES

Cette section est consacrée à la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle. Des liens entre diverses mesures d'un même volume seront établis, ainsi que des rapports entre unités de volume. Ce type d'activités étant plus courant, nous soulignerons uniquement les éléments importants de la ligne directrice de la séquence. La description complète se trouve dans l'ouvrage du CREM (Guissard & al., 2014, https://www.crem.be/publications).

1 Construction d'un solide en cubes

Figure 11

Après avoir distribué des paquets de six cubes emboîtables, les élèves sont amenés, dans un premier temps, à construire un solide différent de celui qui leur est présenté, constitué également de six cubes (figure 11). Cette consigne a pour but d'engager les élèves dans l'activité mais l'intention est également d'attirer l'attention sur le mot « volume » de la deuxième consigne : « construisez un solide de volume différent du mien en utilisant tous les cubes ».

Des élèves, persuadés qu'un tel solide n'existe pas mais souhaitant se conformer à la consigne, retirent et cachent un cube afin de présenter un solide qui réponde partiellement à la consigne. Cette seconde consigne vise à faire prendre conscience aux élèves que *le volume d'un objet ne varie pas si on utilise le même nombre de cubes*.

2 Comparaison du volume de boîtes parallélépipédiques

Figure 12

L'enseignant présente les trois boîtes parallélépipédiques de la figure ci-contre[7] (figure 12) et met à disposition 38 cubes en bois de 2 cm d'arête. La première question posée aux élèves est : « Quelle est la boîte la plus grande ? ». Cette question amène évidemment à des réponses différentes selon qu'ils s'attachent à la hauteur, à la longueur, … ou au volume des boîtes. Les élèves remarquent qu'il est nécessaire de préciser la question. Il leur est alors demandé d'identifier la boîte de plus grand volume et d'expliquer comment s'y prendre pour répondre. Après proposition des élèves, l'un d'entre eux est chargé de remplir chacune des boîtes avec des cubes qui sont dénombrés.

Il est établi que pour comparer le volume des boîtes, il suffit de comparer le nombre de cubes qu'elles contiennent, ce nombre de cubes peut donc servir à mesurer le volume. À partir de cette mise au point, le volume des boîtes de la section suivante pourra s'exprimer en nombre de cubes.

3 Construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle

3.1 Boîtes en carton

Figure 13

Des groupes d'élèves sont constitués ; chaque groupe reçoit 38 cubes en bois de 2 cm d'arête afin de l'aider à trouver le volume (en nombre de cubes en bois) des quatre boîtes de la figure ci-contre[8], distribuées une à une au fil de l'activité.

Le volume de chaque boîte doit être exprimé en nombre de cubes. Les boîtes ont été

---

[7] Les trois boîtes sont construites comme suit : une boîte cubique d'arête 6 cm, une boîte parallélépipède rectangle à base carrée de côté 4 cm et de hauteur 12 cm, et une boîte parallélépipède rectangle de longueur 10 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 4 cm.

[8] Les quatre boîtes parallélépipédiques à construire ont les dimensions suivantes :
– boîte 1 : longueur 6 cm, largeur 4 cm, hauteur 8 cm ;
– boîte 2 : longueur 12 cm, largeur 8 cm, hauteur 4 cm ;
– boîte 3 : longueur 14 cm, largeur 10 cm, hauteur 6 cm ;
– boîte 4 : longueur 16 cm, largeur 12 cm, hauteur 8 cm.

conçues de manière à obliger les élèves à faire évoluer leur démarche pour déterminer la mesure du volume d'un parallélépipède rectangle. La première boîte peut être remplie entièrement, on trouve son volume par dénombrement de cubes. La base de la deuxième boîte peut être couverte mais la deuxième couche de cubes, nécessaire pour remplir la boîte, reste incomplète. Les élèves dénombrent alors les cubes manquants ou multiplient le nombre de cubes présents dans la première couche par deux. Pour calculer le volume de la troisième boîte, il est nécessaire que les élèves remarquent qu'il faut trois couches pour la remplir. Pour la quatrième boîte, il n'est même plus possible de couvrir la base avec les 38 cubes. Les élèves doivent procéder à un calcul pour déterminer le nombre de cubes de la couche couvrant la base, avant de calculer le volume de la boîte.

Différentes stratégies apparaissent dans les groupes, notamment car il est également possible de remarquer des rapports entre les dimensions de certaines boîtes. Pour chaque boîte, il est demandé aux élèves de décrire la procédure qu'ils ont appliquée pour calculer la mesure de son volume. Ceci permet à l'enseignant de détecter l'évolution des raisonnements au sein de chaque groupe d'élèves, et d'identifier la construction mentale, menant à la découverte de la formule.

3.2 Boîtes dessinées

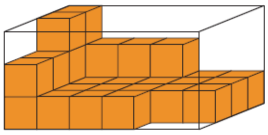


Figure 14

L'activité se poursuit par un travail papier-crayon sur la recherche du volume de boîtes parallélépipédiques auxquelles l'élève n'a plus accès physiquement mais dont il a une représentation en deux dimensions comme sur la figure 14.

Si certains élèves ne parviennent pas à se représenter le solide en trois dimensions, nous suggérons de les laisser reconstruire l'objet avec des cubes en bois. C'est une démarche naturelle d'utiliser les cubes en bois restés accessibles, il faut laisser l'élève y recourir aussi longtemps que nécessaire.

3.3 Boîtes imaginaires

Les situations suivantes demandent à l'élève une démarche d'abstraction supplémentaire puisqu'il n'a plus la boîte représentée devant lui. Une première question est posée : « Dans une boîte, je couvre la base avec 12 cubes et je place 5 cubes dans la hauteur. Quel est son volume ? ». Après avoir donné une réponse à cette question, il est demandé aux élèves de représenter cette boîte à l'aide de cubes. Les solides auront même volumes mais ne seront sans doute pas tous identiques car il y a trois dispositions possibles pour une base composée de 12 cubes (3 sur 4, 2 sur 6 et 1 sur 12).

L'exercice se poursuit en proposant un énoncé dans lequel une donnée est parasite : « Pour recouvrir la base d'une boîte, il faut 14 cubes. Sa hauteur est composée de 5 cubes et sa longueur de 7 cubes. Quel est le volume de cette boîte ? ». Une telle question permet d'identifier des élèves qui multiplient les trois nombres sans comprendre la formule.

Une question de synthèse : « Comment faire pour trouver le volume (en nombre de cubes) d'une boîte de forme parallélépipédique ? » est ensuite posée. Pour avoir réalisé la manipulation, les élèves mettent en évidence que, dans toutes les recherches précédentes, ils ont calculé le produit du nombre de cubes qu'on peut placer sur la base par le nombre de cubes que l'on peut empiler pour atteindre la hauteur indiquée. Si le nombre de cubes que l'on peut placer sur la base (aire de la base) n'est pas connu, ils le calculent en multipliant les nombres de cubes que l'on peut mettre en longueur et en largeur.

4 Calcul du volume du parallélépipède rectangle en cm³

Figure 15

Les boîtes 1 à 3 de la section « boîtes en carton » sont à nouveau distribuées aux groupes d'élèves, accompagnées cette fois de 50 petits cubes de 1 cm d'arête et de deux cubes en bois de 2 cm d'arête. Ces trois boîtes doivent à présent être remplies avec des petits cubes et il est demandé aux élèves d'identifier combien sont nécessaires pour remplir chaque boîte.

Les élèves cherchent soit par calculs, soit par remplissage partiel. Pour chaque boîte, ils ont suffisamment de cubes pour les aligner sur une longueur, une largeur et une hauteur. Il se peut que des élèves ne passent pas par l'utilisation des petits cubes mais se basent sur le fait que la longueur de l'arête d'un cube en bois est le double de celle d'un petit cube. De ce fait, ils peuvent être tentés de doubler le nombre de cubes en bois pour calculer le volume en petits cubes. Ces élèves obtiennent un résultat différent de celui des élèves ayant travaillé par remplissage partiel. La vérification par remplissage trouve alors tout son sens.

Le défi de trouver le volume (en petits cubes) de la boîte 4 sans l'avoir à leur disposition est ensuite proposé aux élèves. Le lien entre le nombre de cubes en bois et le nombre de petits cubes étant difficile à percevoir, l'enseignant peut proposer de comparer le petit cube avec le cube en bois, dans le cas où l'idée n'est pas venue d'un élève. Il faut 8 petits cubes pour reconstituer un cube en bois, ce qui permet de trouver à partir du nombre de cubes en bois, le nombre de petits cubes nécessaires pour remplir la boîte 4.

L'intérêt de cette activité est de montrer que, pour une même boîte, le nombre de petits cubes est différent du nombre de cubes en bois. Ces nombres sont des mesures du volume de la boîte. Ils diffèrent parce que l'on a utilisé des « cubes étalons » différents. Cette activité amène la nécessité du choix d'un étalon commun pour comparer des volumes en les mesurant. Le choix du centimètre cube comme étalon conventionnel est alors présenté aux élèves.

5 Une boîte particulière

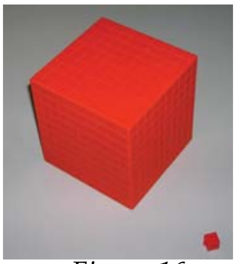


Figure 16

Une nouvelle boîte (figure 16) est proposée aux élèves, sans la nommer. Il s'agit d'un cube d'arête de mesure un décimètre. Après en avoir donné une estimation, il est demandé de chercher la mesure du volume de cette boîte en cm³ (nombre de cubes d'arête de mesure un centimètre). À moins d'avoir déjà manipulé cette boîte auparavant, les élèves donnent généralement des estimations très en deçà de la réalité (300 à 350 cm³).

Puisqu'il leur est possible de mesurer les dimensions de cette boîte, les élèves effectuent le calcul 10 × 10 × 10 qui font 1 000. On met donc 1 000 petits cubes de 1 centimètre d'arête dans le cube de 1 décimètre d'arête.

L'enseignant rappelle aux élèves que la mesure de chaque arête, exprimée en centimètres, peut aussi être exprimée en décimètres. La boîte que les élèves ont devant eux a une longueur, une largeur et une hauteur égales à 1 décimètre. L'enseignant amène les élèves à comparer cette boîte cubique au petit cube : *un centimètre cube est le volume d'un cube mesurant un centimètre d'arête, un décimètre cube est le volume d'un cube ayant 1 décimètre d'arête.*

6 Adéquation des unités

Pour terminer cette partie, les élèves doivent trouver le volume de boîtes dont les dimensions sont données les unes en centimètres, les autres en décimètres. Dans un premier temps, les mesures sont entières en décimètres et sont des multiples de dix en centimètres. Diverses réponses peuvent surgir parmi lesquelles deux sont solutions. L'une nécessite la conversion des mesures de longueur en centimètres, l'autre en décimètres. C'est une situation adéquate afin de réfléchir à l'équivalence des réponses exprimées en centimètres cubes et décimètres cubes. De plus, il est à observer que le nombre donnant la mesure du volume en dm³ est dans ce cas d'un ordre de grandeur plus facile à appréhender.

La recherche du volume de la boîte suivante légitime l'extension de la formule aux nombres décimaux. La question suivante est posée aux élèves : « Quel est le volume d'une boîte ayant 55 cm de longueur, 3,4 dm de largeur et 21 cm de hauteur ? Exprimez votre réponse en cm³ et en dm³. ». Après conversion des unités, les réponses obtenues sont 39 270 cm³ et 39,270 dm³ (ou 39,27 dm³). Cette dernière réponse est soit issue de l'équivalence entre 1 dm³ et 1000 cm³, soit du calcul 5,5 × 3,4 × 2,1 dm³. Comme le résultat est le même, le dernier calcul est reconnu comme légitime même si cette multiplication des trois nombres ne peut plus s'appuyer sur la démarche mentale de dénombrement de cubes.

Calculer le volume d'un solide dont les mesures sont exprimées en nombres décimaux amène les élèves à dépasser l'image mentale du volume qu'ils s'étaient construite à partir des manipulations.

IV - CALCUL DU VOLUME D'UN OBJET

Cette section revient sur les expériences de mise en place de la notion de volume en étayant les comparaisons de volumes sans mesures, par des comparaisons de mesures en millilitres, ou des calculs de mesures de volume en cm^3. Ces mesures valident d'une certaine manière les méthodes mises en place :

– pour les objets pleins : immersion et comparaison des quantités d'eau déplacée,

– pour les objets creux : comparaison des quantités contenues.

Ce retour aux expériences initiales permet de garder à l'esprit que le volume est une grandeur physique qu'il ne faudrait pas réduire à quelques formules. Ces activités permettent également un débat sur les valeurs approchées issues des résultats expérimentaux.

1 Objets pleins

Lorsqu'un objet est immergé dans un récipient, son volume correspond au volume de l'eau déplacée. Si le récipient est de forme parallélépipédique, le volume de l'eau déplacée est celui d'un parallélépipède rectangle qui peut être visualisé en entourant la boîte d'élastiques aux différents niveaux atteints par l'eau.

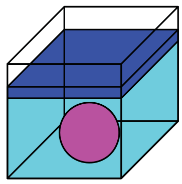


Figure 17

La longueur et la largeur de ce parallélépipède correspondent respectivement à la longueur et la largeur du récipient dans lequel l'objet est immergé. La hauteur correspond à la différence des niveaux de l'eau avant et après immersion (figure 17). La formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle nous donne un moyen de calculer le volume de l'objet immergé, quelle que soit sa forme.

Éprouvons la méthode pour un objet dont le volume peut être obtenu soit par calcul direct, soit par immersion, par exemple le cube en plexiglas lesté de l'expérience « Remplissage et immersion » (figures 9 et 10). Nous le plongeons dans une boîte parallélépipédique transparente de 10 cm d'arête. Nous choisissons un parallélépipède car le calcul du volume du parallélépipède à partir de ses trois dimensions est connu.

Le parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée a une longueur et une largeur de 10 cm, une hauteur qui ne peut être déterminée avec précision mais située au mieux entre 1,5 cm et 1,6 cm. Le volume d'eau déplacée est donc compris entre $10 \times 10 \times 1{,}5\ cm^3$ soit $150\ cm^3$ et $10 \times 10 \times 1{,}6\ cm^3$ soit $160\ cm^3$. Ce procédé donne une valeur approximative du volume de l'objet. Et, dans notre exemple, une imprécision de lecture de 1 mm sur la hauteur donne une différence de volume de $0{,}1 \times 10 \times 10\ cm^3$, soit $10\ cm^3$.

Comparons, pour ce même objet, le volume ainsi obtenu avec le volume calculé à l'aide de la formule. L'arête de ce cube mesure 5,4 cm, son volume est égal à $5{,}4 \times 5{,}4 \times 5{,}4\ cm^3$ soit $157\ cm^3$. La mesure obtenue par la formule est bien comprise dans l'encadrement donné par l'expérience et valide d'une certaine façon la méthode par immersion. Notons que la mesure de l'arête du cube n'est pas non plus exempte d'erreur de mesure.

2 Objets creux

La manipulation réalisée pour la comparaison d'objets creux nous a montré que les boîtes proposées, parallélépipédique et cylindrique (figure 1), ont le même volume. Nous avons à présent d'autres outils pour le confirmer.

Pour calculer le volume de la boîte cylindrique, la remplir d'eau « à ras bord » ; cette quantité d'eau est ensuite versée dans un récipient gradué. Dans notre exemple, le niveau d'eau se situant à mi-chemin entre 800 mL et 900 mL, la valeur approchée du volume est comprise entre $800\ cm^3$ et $900\ cm^3$ (l'étiquette de la boîte indique 850 mL). Cette activité exploite la conversion des unités de capacité en unités de volume.

Pour calculer le volume de la boîte parallélépipédique, il suffit d'appliquer la formule, ce qui donne pour notre exemple $17 \times 10 \times 5\ cm^3$, soit $850\ cm^3$. Cette fois encore, le résultat de l'expérience est confirmé par le calcul.

V - CONCLUSION

La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expériences menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place, dans cette séquence, une série d'expériences qui confrontent les préconceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale.

Le retour vers les expériences initiales, ne permettant que des comparaisons sans mesures, pour en réexploiter les démarches au moment où on dispose de moyens de calcul, nous a semblé essentiel pour tisser des liens entre la démarche expérimentale et le calcul théorique. Ce va-et-vient montre notamment l'intérêt de la démarche expérimentale pour déterminer la mesure d'un volume pour lequel aucune formule n'est disponible, mais attire aussi l'attention sur les limites de cette démarche, et sur les erreurs expérimentales qu'elle entraîne.

BIBLIOGRAPHIE

GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P., VANSIMPSEN S. & WETTENDORFF I. (2014). *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*. CREM https://www.crem.be/publications

GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P. & VANSIMPSEN S. (2015). *Math* & *Manip* pour construire la notion de volume, *Grand N, n°* 96, pp. 35-44.

HENRY V. & LAMBRECHT P. (2012). *Math & Manips* : introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages. *Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM*, Dijon.

LES CHANTIERS MATHERNELLE UNE FORMATION CONTINUE DES PE PAR L'ACCOMPAGNEMENT D'ÉQUIPES

Pierre EYSSERIC
Formateur PE, ESPE Aix Marseille Université
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Résumé
Le 13 mars 2012, avait lieu à Lyon la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. L'état des lieux effectué à cette occasion montrait l'importance, pour viser une amélioration des compétences en mathématiques des élèves, d'une formation continue des enseignants, pensée à partir des réalités professionnelles vécues dans les établissements d'exercice.
Dans cette optique, dans l'académie d'Aix-Marseille, un nouveau type de formation continue en mathématiques a été proposé aux PE exerçant en école maternelle : les chantiers mathématiques,
D'abord lancées de façon expérimentale en 2012-2013 pour quelques circonscriptions, ces formations concernent aujourd'hui plus de la moitié des circonscriptions des Bouches du Rhône et depuis deux ans, nous tentons une extension du dispositif aux autres cycles en commençant par le nouveau cycle 3.
Cette communication présente les modalités de cette formation continue de PE par l'accompagnement d'équipes de PE tout au long d'une année scolaire. La présentation de la genèse du dispositif montre comment sa naissance a été préparée localement par un fort investissement historique des formateurs maths de l'IUFM puis de l'ESPE dans la formation continue des PE. Elle permet d'amorcer un questionnement sur l'exportation de ce dispositif en d'autres lieux. Enfin, au travers de quelques exemples de productions issues de ces formations, un lien est établi avec la production de ressources pour la formation initiale et/ou continue des PE en mathématiques.

Le texte qui suit est un témoignage sur une pratique de formation continue des professeurs d'école qui est mise en œuvre depuis 2012 dans l'académie d'Aix-Marseille, essentiellement dans le département des Bouches du Rhône. Dans un premier temps expérimenté avec des équipes de PE exerçant en cycle 1, ce dispositif est aujourd'hui proposé à tous les PE, quel que soit leur cycle d'exercice.

Nous présenterons dans un premier temps le dispositif de formation puis, en revenant sur sa genèse, nous insisterons sur les aspects liés au contexte local. Enfin nous terminerons par la présentation de quelques exemples de travaux issus des chantiers Mathernelle montrant comment ce dispositif débouche souvent sur la production de ressources pour la formation des PE.

I - LE DISPOSITIF

Nous le présentons ici tel qu'il s'est stabilisé aujourd'hui pour sa mise en œuvre avec des enseignants d'école maternelle. Actuellement en phase de développement avec des enseignants de cycle 2 et/ou de cycle 3 (en incluant quelquefois les professeurs de mathématiques des classes de sixième), cette extension débouchera probablement sur des évolutions du dispositif décrit.

1 La temporalité

On peut distinguer six moments qui vont rythmer cet accompagnement des enseignants tout au long d'une année scolaire.

1.1 Le lancement d'un chantier

Les chantiers sont lancés au cours d'une rencontre qui a en général lieu au cours de la première période (septembre ou octobre). Une équipe de 12 à 15 professeurs d'école se retrouve durant deux heures environ avec le formateur qui va accompagner le chantier.

Cette première réunion va permettre de :

- Mieux préciser aux enseignants l'action de formation continue dans laquelle ils se sont engagés. Ceux-ci sont en général informés en amont par l'équipe de circonscription mais l'expérience montre que souvent les collègues arrivent sans avoir vraiment compris la nature particulière du dispositif de formation qui leur est proposé. Il est donc important de prendre le temps de le leur présenter en insistant sur l'accompagnement, alors qu'ils sont davantage habitués à des formations de type transmissif.
- Former de petites équipes (souvent les enseignants d'une même école) qui vont choisir de travailler ensemble sur un même sujet dans le cadre du chantier.
- Choisir le thème de travail de chacune des petites équipes. À ce stade, les collègues sont souvent un peu déstabilisés car ils s'attendent à ce que le contenu mathématique de la formation leur soit imposé. Or il n'en est rien ici puisqu'il s'agit pour le formateur de s'adapter aux préoccupations professionnelles des formés dans le cadre des apprentissages mathématiques à l'école. Le formateur doit dans un premier temps permettre l'expression de ces préoccupations par les stagiaires ; il peut éventuellement donner des exemples de thématiques déjà choisies par d'autres collègues dans des chantiers Mathernelle afin de montrer le caractère très ouvert de ce choix. On peut partir sur un sujet mathématique très vaste comme la construction du nombre et dans ce cas, c'est au cours des travaux de l'année que le groupe sera conduit à réduire son champ de travail ou parfois à demander sa poursuite au cours de l'année scolaire suivante ; mais on peut aussi choisir un sujet plus pointu comme le décomposition et la recomposition des nombres au cycle 1 ; le thème peut aussi avoir un caractère transversal comme l'utilisation de jeux dans les apprentissages mathématiques, ou le lien entre mathématiques et EPS, ou encore mathématiques et arts… enfin, certaines équipes ont choisi d'utiliser ce chantier pour mettre en place un projet collectif autour des mathématiques comme l'organisation d'un défi mathématique dans les classes ou d'olympiades de mathématiques au sein de l'école avec implication des familles, ou encore, dans un registre très différent, la construction d'une progression d'école sur une partie des contenus mathématiques du cycle 1. Au cours des échanges entre stagiaires et avec le formateur, les préoccupations professionnelles se précisent, quelques premiers éléments de réponse sont parfois apportés par le formateur et le choix définitif du thème de chaque petite équipe est laissé aux enseignants qui le communiquent au formateur soit à l'issue de la rencontre, soit par courriel dans un délai d'une quinzaine de jours.
- Arrêter ensemble avec chacune des petites équipes un calendrier de travail (dates des différentes rencontres présentées ci-après).

Lorsqu'un chantier concerne une équipe de plus d'une quinzaine d'enseignants, nous avons fait le choix d'un encadrement par deux formateurs qui se répartissent ensuite le suivi et l'accompagnement des petites équipes.

1.2 L'envoi de ressources

Une fois arrêté le thème de travail de chaque équipe, le formateur envoie par courriel des ressources qu'il choisit en fonction des préoccupations professionnelles des collègues et de sa connaissance du sujet choisi. Cela nous a conduit à nous constituer au fil des ans une petite bibliothèque de ressources qui s'enrichit chaque année grâce aux recherches des formateurs impliqués dans le dispositif mais aussi par intégration dans ces ressources de travaux effectués par les collègues dans les chantiers des années précédentes. Il s'agit de permettre aux collègues de progresser dans leur réflexion professionnelle et nous insistons sur le fait qu'ils n'ont aucune obligation d'utiliser toutes les ressources envoyées. Ils peuvent trouver telle ou telle ressource trop complexe pour être mise en œuvre dans leur école ; dans ce cas, il convient de trouver d'autres propositions susceptibles de faire progresser la réflexion professionnelle des collègues sans chercher à les emmener trop vite, vers des pratiques trop éloignées de leur fonctionnement actuel. Parfois, au contraire, la ressource proposée est déjà connue et utilisée par les collègues et ils sont en attente d'un approfondissement de celle-ci prenant en compte les questions issues de leur pratique ; celui-ci pourra commencer au travers d'échanges par courriel avec les collègues en formation avant de se poursuivre au cours des rencontres des phases suivantes.

1.3 Rencontre formateur-PE dans chaque école

Après cet envoi de ressources éventuellement suivi d'échanges par courriel, le formateur vient rencontrer chacune des petites équipes constituées dans son école pour une réunion de travail d'une durée de 1 à 2 heures. La date et l'horaire de cette rencontre sont contractualisés par les PE avec le formateur lors de la réunion de lancement du chantier ; en raison du nombre de chantiers suivis par un formateur, ces rencontres s'étalent de novembre à janvier et on a donc un calendrier d'accompagnement qui varie d'une école à l'autre. Cependant, on choisit parfois d'aller voir plus tôt une équipe qui le demande et qui a besoin de notre aide pour démarrer alors que d'autres équipes seront à leur demande rencontrées plus tard afin de leur laisser le temps de s'approprier les ressources et de commencer à travailler sur le thème choisi au sein de l'école.

Dans tous les cas, le formateur ne vient pas pour une formation de type descendant mais pour échanger avec les collègues, répondre à leurs questions, travailler avec eux sur le thème choisi.

Parfois, les collègues ont déjà prévu des situations pour leurs classes, voire ont commencé à les mettre en œuvre et il s'agit de réfléchir avec eux à des modifications susceptibles d'améliorer les apprentissages ou de répondre à des obstacles rencontrés en situation. D'autres fois, il s'agira simplement de répondre aux questions que se posent les collègues avant la mise en œuvre de situations proposées dans les ressources envoyées ou encore, de construire avec eux une séquence d'apprentissage en s'appuyant sur certaines des ressources transmises.

1.4 Visite du formateur dans les classes

Un peu plus tard dans l'année, le formateur vient dans l'école pour observer dans les classes un moment de la mise en œuvre des situations d'apprentissage mathématique sur lesquelles les collègues ont travaillé au sein du chantier. En fonction des souhaits des équipes et des contraintes liées à l'emploi du temps du formateur, cette visite a lieu entre le mois de janvier et le début du mois de mai. Selon le nombre de classes concernées par le chantier dans une école, le formateur restera une demi-journée ou une journée complète dans l'école (dans le cas de quelques grosses écoles maternelles, il a pu arriver qu'il revienne une deuxième journée afin de voir toutes les classes du chantier). Le fait de rester une demi-journée ou une journée complète dans l'école permet de faire alterner temps d'observation et temps d'échanges avec les collègues. En particulier, le temps du repas pris en salle des maîtres.ses avec les collègues est un temps de travail important dans le dispositif de formation. C'est l'occasion de requestionner les situations à partir du vécu des PE comme des observations réalisées par le formateur ; cela permet d'ancrer la formation dans la pratique professionnelle réelle des enseignants et de ne pas la limiter à du travail « hors sol » sur des situations d'apprentissages mathématiques.

Ces visites sont aussi l'occasion pour le formateur de prélever des traces du travail réalisé dans le chantier : documents de préparation des PE, photographies de travaux d'élèves, films réalisés au cours des séances observées, …

1.5 Rencontre bilan du chantier

Cette dernière rencontre a lieu en général entre la mi-mai et la fin de l'année scolaire. Les différentes micro-équipes constituées au cours de la première rencontre se retrouvent ensemble dans une des écoles avec le formateur et parfois avec une partie de l'équipe de circonscription pour un temps de mutualisation des travaux réalisés par chacun à l'occasion du chantier.

Pour ce bilan, aucune forme particulière n'est attendue mais les PE participants sont invités à venir avec tout ce qu'ils ont envie de montrer à leurs collègues en lien avec leur réflexion sur les apprentissages mathématiques durant l'année écoulée. Les présentations prennent donc des formes diverses en fonction des équipes : présentation orale, diaporama, présentation de travaux d'élèves, présentation d'un matériel conçu au sein de l'école pour tel ou tel apprentissage, … Le contenu est en général très riche comme pourront l'illustrer les quelques exemples présentés dans la dernière partie de ce texte.

Le formateur veille à favoriser les échanges entre les différentes équipes d'un même chantier qui ont souvent travaillé sur des thèmes différents mais sont intéressées pour un réinvestissement dans leurs classes par les travaux des autres équipes. Il peut apporter ponctuellement quelques compléments à l'analyse des situations présentées ou les illustrer à partir des images fixes ou animées réalisées lors de ses visites dans les classes.

1.6 Vers de nouvelles ressources

Le formateur prend en charge la mise en forme des travaux réalisés au cours d'un chantier afin de les diffuser plus largement auprès des professeurs d'écoles. Ce travail de mise en forme et de diffusion a pu être réalisé complètement lors de la première année d'expérimentation du dispositif dans trois circonscriptions et nous avons alors choisi de diffuser les travaux via le site de la mission maternelle des Bouches du Rhône[1]. Malheureusement, suite à l'augmentation importante du public concerné par ce dispositif de formation, dans la limite des moyens donnés par l'institution, nous avons dû faire des choix entre l'accompagnement des collègues volontaires pour entrer dans ce dispositif de formation et la diffusion systématique des travaux réalisés et nous avons décidé de privilégier l'accompagnement.

De ce fait, année après année, les documents en attente d'analyse, de mise en forme et de diffusion s'accumulent et ce sixième temps reste sans nul doute le maillon à renforcer dans le dispositif.

Actuellement, l'exploitation de ces documents se fait souvent à l'occasion d'une demande lors du démarrage d'un nouveau chantier : une question est mise en relation avec un travail réalisé par une autre équipe lors d'un chantier des années précédentes ; le formateur va procéder alors à un petit travail d'archéologie pour récupérer des traces de ce travail, les commenter et les proposer comme ressource pour le chantier qui démarre.

Une exploitation plus systématique de toutes ces données nécessiterait d'autres moyens que ceux mis à disposition pour la formation et la forme du travail pour parvenir à diffuser l'ensemble des travaux issus de ces chantiers reste sans doute à inventer.

2 Le cadre institutionnel

Après quelques ajustements au cours des premières années, ce dispositif de formation est reconnu comme un des modes d'intervention des formateurs ESPE dans la formation continue des PE au sein des circonscriptions. Cela permet d'avoir une double reconnaissance du travail effectué dans le service des professeurs d'école engagés dans la formation comme dans celui des formateurs assurant l'accompagnement des équipes.

2.1 Du côté des professeurs d'école

La reconnaissance par les circonscriptions du travail effectué est très variable et peut aller dans certains cas jusqu'à la mobilisation de la totalité des 18h d'animations pédagogiques annuelles sur ce dispositif.

Cependant, nous insistons auprès des circonscriptions auxquelles nous proposons cette formation sur la nécessité de reconnaitre l'investissement des collègues pour au moins 18h de leur temps de services : ces heures peuvent être prises sur le temps des animations pédagogiques de circonscriptions mais aussi sur les heures dévolues aux travaux en équipes pédagogiques, voire dans le cas de certains projets sur le temps prévu pour les activités pédagogiques complémentaires.

En particulier, lorsqu'un enseignant isolé s'engage sans le reste de l'équipe enseignante dans le dispositif de formation, nous l'encourageons vivement à présenter son travail au reste de l'équipe à l'occasion d'un conseil de cycle par exemple.

[1] http://www.mission-maternelle.ac-aix-marseille.fr/domaines/dlm/acc_dlm.html

2.2 Du côté des formateurs

Le format retenu et qui semble faire à peu près consensus aujourd'hui est de 18 HTD pour l'accompagnement en chantier mathématique de 12 à 15 enseignants issus de deux à trois écoles.

Lorsque le groupe est plus important et concerne plus de trois écoles, on rajoute 6 HTD par école supplémentaire. Dans le cas de grosses écoles, c'est l'effectif du groupe à accompagner qui va être davantage pris en compte pour établir l'horaire formateur ; par exemple 36 HTD pour un chantier ne concernant que quatre écoles mais plus de 25 classes du fait de la présence de deux écoles à plus de huit classes.

Il est important que les horaires annoncés ici pour les formateurs comme pour les PE ne sont pas des horaires de présence en formation mais un forfait horaire de reconnaissance du travail effectué par les uns et les autres. Personne ne pointe pour garantir les heures effectuées mais l'ensemble du dispositif repose sur un contrat de confiance entre le formateur, les formés et l'équipe de circonscription. Les principaux indicateurs sur lesquels les circonscriptions s'appuient pour considérer que cela vaut la peine de continuer à solliciter les formateurs ESPE pour former les PE de leur circonscription via ce dispositif sont d'une part les présentations de travaux effectuées lors de la rencontre bilan du chantier, d'autre part les évolutions de pratiques constatées lors des visites de classes par les membres de l'équipe de circonscription.

3 Trois caractéristiques importantes

Pour terminer cette présentation, il convient d'insister sur trois éléments importants susceptibles de caractériser le dispositif mis en place.

3.1 L'accompagnement

On est dans un dispositif en rupture avec la forme traditionnelle généralement descendante et transmissive de la formation. Il ne s'agit pas de transmettre de « bonnes pratiques » à des collègues qui en général n'ont rien demandé et qui considèrent leur propre pratique comme très satisfaisante.

On est dans un modèle horizontal et coopératif partant des préoccupations professionnelles des collègues engagés dans le dispositif. Il y aura bien des apports du formateur mais celui-ci ne peut pas les anticiper, les prévoir avant le lancement du chantier. Il va s'agir de prendre en compte les questions des formés, de proposer des pistes de réponses en acceptant de les discuter et de les retravailler avec les collègues, de construire avec eux. On est dans un dispositif où le formateur va aussi apprendre des formés.

3.2 Le travail d'équipe

Même si nous n'avons jamais voulu exclure un enseignant isolé et volontaire pour entrer dans ce dispositif de formation, nous insistons sur l'importance du travail en équipe. Ce seront donc le plus souvent des équipes d'école qui vont choisir d'approfondir ensemble avec l'accompagnement d'un formateur tel ou tel aspect des apprentissages mathématiques à l'école. Lorsque des enseignants isolés participent, on va effectuer des regroupements de façon à favoriser dans tous les moments de la formation les échanges entre pairs, les confrontations de pratiques. Signalons à ce sujet une demande des PE apparue à plusieurs reprises lorsqu'on effectue avec eux le bilan de l'action de formation : aller observer les pratiques de leurs collègues dans le cadre du dispositif de formation. Cela pourrait être une piste d'évolution des chantiers mathématiques pour l'avenir ; nous allons peut-être parvenir à l'explorer cette année en utilisant une partie des moyens de remplacement pour les formations REP+ dans le cadre d'un chantier d'une circonscription située en réseau d'éducation prioritaire.

3.3 La notion de zone proximale de développement professionnel

Le dispositif de formation ne vise pas l'acquisition par les formés de pratiques professionnelles standardisées et « idéales ». Il s'agit de prendre chaque collègue engagé dans le dispositif là où il en est de sa réflexion sur les apprentissages mathématiques et de l'accompagner tout au long d'une année afin de lui permettre de faire évoluer sa pratique sans attendre les mêmes évolutions chez chacun. On est bien ici dans une volonté de prendre en compte la diversité des PE qui entretiennent des rapports très variés aux mathématiques et à leur apprentissage.

II - LE CONTEXTE LOCAL

Il semble important avant d'essayer d'exporter en d'autres lieux ce dispositif de formation d'examiner les éléments du contexte local qui ont favorisé l'émergence de ce dispositif de formation dans l'académie d'Aix-Marseille.

1 Un dispositif inscrit dans l'histoire locale de la formation continue des PE

1998

Pas d'intervention des formateurs IUFM dans la formation continue des PE de l'Académie, en dehors du Vaucluse.

2017

Environ 700 heures de FC PE assurées par l'équipe maths ESPE sur quatre départements, soit les trois quarts des demandes de FC PE faites à l'ESPE par les directions académiques et une participation de l'équipe maths ESPE à la formation continue des PE à peu près stable depuis plus d'une douzaine d'année.

Examiner comment s'est effectuée la mutation qui a permis de passer de la situation de 1998 à une situation dans laquelle l'équipe maths ESPE apparait comme un acteur incontournable de la formation continue des PE devrait permettre de mieux comprendre les conditions locales qui ont permis l'émergence et la reconnaissance des chantiers mathématiques comme dispositif de formation.

2 Les trois facteurs de cette évolution

2.1 Un travail d'équipe des formateurs maths PE

Il existe chez les formateurs en mathématiques pour les PE de l'IUFM puis de l'ESPE d'Aix Marseille une véritable culture du travail d'équipe qui se traduit depuis plus de vingt ans par un séminaire de trois jours vers la fin du mois de juin, trois à quatre journées de réunion de l'équipe programmées tout au long de l'année, des élaborations collectives des situations de formation proposées tant pour la préparation du concours que pour la formation des PE stagiaires, des échanges réguliers de ressources entre les formateurs, ….

Dans le cadre de la formation continue des professeurs d'école, cela nous a permis d'avoir une réponse d'équipe aux demandes des circonscriptions et d'être reconnu en tant qu'équipe tant au sein de l'institution de formation que dans les différentes circonscriptions avec lesquelles nous travaillons.

2.2 Une démarche volontariste

Se faire connaitre dans les circonscriptions et permettre à nos partenaires IEN et CPC d'identifier ce que nous pouvions apporter dans le cadre de la formation continue des PE a été l'objet durant six années (de 1999 à 2005) d'une véritable démarche volontariste de l'équipe.

Chaque premier mercredi de l'année civile, une journée de didactique des mathématiques à l'école primaire a été organisée en partenariat entre l'IUFM et l'IREM. Ces journées ont permis de diffuser des ressources souvent issues de la participation de membres de l'équipe aux colloques de la COPIRELEM mais aussi de montrer des exemples de formations que nous pouvions assurer dans les circonscriptions. Suite à chacune de ces journées, les conférenciers et animateurs d'ateliers, tous bénévoles, ont rédigé des comptes-rendus qui ont été diffusés auprès des circonscriptions de l'académie.

Ainsi, progressivement, s'est constitué, tout au long de ces six années, un réseau de travail entre l'équipe des formateurs de l'IUFM et les équipes de circonscriptions et les demandes d'intervention dans des stages départementaux et/ou dans des animations pédagogiques de circonscription ont alors rapidement augmenté. Cela nous a conduit en 2006 à renoncer à cette journée annuelle car nous n'avions plus les forces de l'assurer et de répondre parallèlement à toutes les demandes d'intervention en formation continue. Début 2018, il est prévu de tenter de reprendre ces rencontres annuelles afin d'intégrer dans cette dynamique les nouveaux formateurs de l'ESPE comme ceux des circonscriptions.

2.3 Un travail au sein des instances IUFM puis ESPE

Parallèlement à ces actions pour être reconnus comme des partenaires incontournables dans la formation continue des professeurs d'école, les membres de l'équipe élus dans les instances de l'IUFM, puis de l'ESPE, sont régulièrement intervenus pour défendre et la formation continue des PE et la faire reconnaitre comme une des missions principales de l'institution de formation. Cela nous a permis de maintenir dans le service des formateurs une part non négligeable dévolue à la formation continue des professeurs d'école.

3 Naissance des chantiers mathématiques

C'est dans ce contexte, avec une équipe de formateurs en mathématiques pour les PE reconnue au sein de nombreuses circonscriptions de l'académie que le dispositif des chantiers mathématiques a été proposé, à titre expérimental et pour les enseignants de maternelle, pour quatre circonscriptions à la rentrée 2012.

L'état des lieux effectué par la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège (IFE, 13 mars 2012) qui montrait l'importance, pour viser une amélioration des compétences en mathématiques des élèves, d'une formation continue pensée à partir des réalités professionnelles vécues dans l'établissement d'exercice, nous a vivement encouragé à défendre cette proposition.

Les modalités matérielles ont été ajustées au fil des années et le dispositif a aujourd'hui atteint une forme suffisamment stabilisée pour nous conduire à l'étendre à tous les cycles de l'école.

III - BILAN APRES CINQ ANNEES

1 Une nouvelle dynamique pour la formation ?

D'un point de vue comptable, il est clair que ce dispositif de formation continue est plus couteux que des conférences ou animations pédagogiques d'un format plus classique : 18 HTD pour accompagner 12 à 15 enseignants dans un chantier mathématique, 3 HTD pour une conférence de 2h auprès d'une centaine d'enseignants, 6 HTD pour deux animations pédagogiques de 3h avec 25 enseignants…

Les quelques exemples cités ci-dessus pourraient conduire à un verdict sans appel : trop cher ! Mais il convient aussi de s'interroger sur l'impact effectif sur les pratiques des différents dispositifs. Quelle transformation des pratiques à l'issue d'une conférence ou d'une animation ? Dans ces formations s'adressant à un nombre plus ou moins important d'enseignants, le discours, quelle que soit sa qualité, ne pourra pas entrer en résonnance avec la diversité des préoccupations professionnelles des participants. Certains vont venir par obligation sans se sentir véritablement concernés, d'autres seront vraiment intéressés par la formation mais, repris le lendemain par les préoccupations quotidiennes, ne la réinvestiront pas ou peu dans leur pratique quotidienne.

L'hypothèse de départ des chantiers mathématiques est qu'un accompagnement des enseignants peut favoriser le réinvestissement dans les pratiques des formations reçues. Les retours que nous avons des équipes de circonscriptions avec lesquelles nous travaillons depuis plusieurs années tendent à confirmer cette hypothèse. Les observations réalisées dans les classes d'enseignants engagés plusieurs années de suite dans les chantiers mais sur des thèmes différents vont dans le même sens : le travail réalisé dans un chantier mathématique ne se limite pas à une incidence sur les pratiques au cours de l'année de formation mais celui-ci va être repris au cours des années suivantes. Par exemple des PE au cours d'un chantier mathématique sur le nombre ont pu comprendre l'intérêt de situations de communication avec un élève émetteur et un élève récepteur au niveau des apprentissages ; l'année suivante, non seulement on a pu voir ces collègues poursuivre le travail avec les situations problèmes qu'ils s'étaient appropriées pour enseigner le nombre à leurs élèves mais, engagés dans un chantier mathématique sur les formes, ils ont réinvesti ce dispositif d'apprentissage (situation émetteur-récepteur) pour construire des situations d'apprentissage dans le nouveau domaine exploré.

À partir de ces éléments, voici les éléments de bilan que nous retenons :

- avec bien sûr des différences interindividuelles, on constate un très fort investissement des collègues engagés dans le dispositif qui ont en général consacré aux travaux mis en place un temps bien supérieur à celui reconnu par l'institution ;
- une réelle appropriation de différentes ressources par les collègues alors que dans d'autres formations, cette appropriation est parfois présente dans les intentions à la sortie d'une conférence mais se concrétise plus rarement une fois de retour dans les écoles. Lors des rencontres formateur-PE dans les écoles, nous sommes souvent agréablement surpris par la connaissance manifestée par les collègues des ressources envoyées alors qu'on craignait de leur avoir adressé trop de documents et de ne pas avoir suffisamment ciblé les ressources sur leurs préoccupations ;
- un ressenti très positif des stagiaires qui ont apprécié la confiance accordée par l'institution puisque toutes les heures octroyées pour ce travail ne se traduisaient pas obligatoirement par la signature d'une feuille de présence – une partie étant réalisée chez soi, dans les écoles ou à distance ;
- des productions de qualité par les différentes équipes qui font du bilan de chantier en fin d'année un temps fort et riche de la formation : les travaux réalisés commencent ici leur mutation en ressources pour les collègues.

2 De nouvelles ressources…

Pour terminer cette présentation, nous citons quelques exemples de productions dans ces chantiers et renvoyons aux annexes pour les documents les illustrant.

a. Travail autour de la situation fondamentale du nombre comme mémoire de la quantité réalisé au sein d'une école maternelle en décloisonnant les classes une fois par semaine pour adapter le niveau des problèmes aux progrès des élèves (voir annexe 1).
b. Travail sur la décomposition et la recomposition des premiers nombres par la mise en place de jeux dans des classes de MS et GS (voir annexe 2).
c. Réinvestissement des situations de communications rencontrées à l'occasion d'un chantier sur les nombres dans un travail sur les formes géométriques (voir annexe 3).
d. Travail sur l'espace (repérage, représentation, déplacement) débouchant dans le cadre d'une pédagogie de projet sur la réalisation d'un dessin animé, version codée d'un album lu en classe (voir https://www.youtube.com/watch?v=L6aIvjXWYw8).
e. Un jeu mis en place avec des MS et des GS pour développer des compétences heuristiques (voir annexe 4).
f. Un travail autour du repérage et des déplacements dans l'espace en lien avec l'utilisation de robots de sol : le document de formation de l'annexe 5 a été réalisé par une enseignante ressource en informatique à partir des vidéos réalisés lors de la phase d'observation du travail dans les classes d'un chantier mathématique.

Toutes ces productions pourraient devenir de nouvelles ressources pour les PE mais il reste à trouver les moyens pour exploiter et rendre diffusables l'ensemble des travaux recueillis à l'occasion de ces formations. Un vaste chantier à engager…

IV - CONCLUSION

Après une phase expérimentale, le dispositif a très rapidement pris beaucoup d'ampleur (une vingtaine de chantiers en 2016-2017 et à peu près autant en 2017-2018). Cette croissance répond certes à une demande du terrain (des PE comme de leurs équipes de circonscriptions) mais elle nous confronte aujourd'hui à plusieurs questions importantes pour l'avenir du dispositif.

La première est celle du coût de ces formations : celui-ci pouvait passer quasi-inaperçu tant qu'il s'agissait de 4 ou 5 chantiers mais ce n'est plus le cas avec, pour un seul département, presque l'équivalent d'un temps plein consacré à l'accompagnement d'équipes de PE. En période de restriction de moyens, les institutions (ESPE comme Directions Académiques) commencent à vouloir réduire les moyens horaires accordés au chantier en nous demandant de « faire autant mais avec moins ».

La deuxième est celle de la valorisation des travaux issus des chantiers mathématiques.

C'est de notre capacité à trouver conjointement des réponses pertinentes à ces deux questions que dépend aujourd'hui la pérennité de ce dispositif de formation. Car c'est par la valorisation et la diffusion des productions issues des chantiers que nous pourrons convaincre les institutions de l'efficience du dispositif et donc de la pertinence de l'investissement financier qu'il représente.

V - BIBLIOGRAPHIE

Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège (2012), Site Educmaths (http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale)

EYSSERIC P. (2014) Comptes-rendus de chantiers mathématiques, Site de la mission maternelle 13 (http://www.mission-maternelle.ac-aix-marseille.fr/domaines/dlm/acc_dlm.html)

ANNEXE 1

Projet de décloisonnement : construction du nombre

Jeu du bus

Consigne générale *« le véhicule ne peut partir que s'il est complet. Il ne doit pas rester de place vide. Tu dois aller chercher juste assez d'enfants pour compléter le véhicule, pas un de plus, pas un de moins »*

Puis *« attention, il y a des enfants qui sont déjà installés »*

Jeu du repas

Consigne générale *« tu ne peux commencer à manger que si l'assiette est remplie. Tu dois aller chercher juste assez de fruits pour remplir l'assiette, pas un de plus, pas un de moins »*

Puis *« attention, j'ai déjà commencé à remplir l'assiette »*

***Niveau 4.5 :** niveau 4 avec la quantité 5* ***Niveau 3.10 :** niveau 3 avec la quantité 10*

NIVEAU 0 correspondance terme à terme

Remplir le véhicule avec des figurines/objets

Technique : correspondance terme à terme

L'élève n'est pas obligé de se déplacer : le stock de figurines est à côté.

NIVEAU 1 construire une collection

Remplir les véhicules mais on remplace les figurines objets par les étiquettes bonhomme.

Les étiquettes bonhomme sont loin, l'élève doit effectuer des voyages

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 2 compléter une collection

Remplir les véhicules, déjà partiellement « pré-remplis » par des étiquettes bonhomme, placés par le PE

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 3 commande orale ou digitale (construire et compléter collection)

Elèves : 2 rôles à tenir : un élève passe la commande orale ou digitale à un autre élève qui fournit la quantité demandée

PE : rôle d'arbitre(régulation) sur correspondance entre quantité commandée et quantité fournie

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 4 commande écrite

Elèves : 2 rôles à tenir : un élève écrit la commande (ou utilise une carte nombre) à un autre élève qui fournit la quantité demandée

PE : rôle d'arbitre (régulation) sur correspondance entre quantité commandée et quantité fournie

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 5 compléter une collection avec personnages « à quai »

PE place des étiquettes bonhomme à côté du véhicule « prêts à embarquer ».

L'élève doit aller chercher le complément.

Difficulté : les bonhommes ne sont pas encore montés, donc toutes les places apparaissent « disponibles ». L'élève doit effectuer une projection mentale pour trouver le complément.

NIVEAU 6 addition de moyens de transport

PE utilise plusieurs moyens de transport pour créer la collection (5 = barque + kayak)

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 7 construire la collection par « paquets »

Les étiquettes bonhomme proposées sont en « paquets » (étiquettes de 2 bonhomme, de 3 bonhommes…)

Difficulté : l'élève doit effectuer une décomposition de la quantité demandée : 5 places c'est un paquet de 2 et un paquet de 3…)

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 8 compléter une collection invisible mais énoncée

Le moyen de transport est montré vide (pour préciser la collection qui sera demandée), puis la carte est retournée.

Puis PE annonce (ou montre une carte nombre) le nombre de places déjà prises. L'élève doit aller chercher le complément

Difficulté : l'élève n'a plus aucun repère visible, sa stratégie doit reposer uniquement sur le traitement de la quantité

Objectif 1 seul voyage

NIVEAU 9 situations de partage / division

Situation : « Le véhicule est en panne, tous les voyageurs doivent descendre. L'élève doit aller chercher les véhicules nécessaires (sauf le véhicule de départ) pour que les voyageurs puissent continuer leur voyage »

Selon les véhicules de rechange proposés par PE, le problème se complexifie. (10 = 5 + 5 ou 10 = 3 + 3 + 3 + 1)

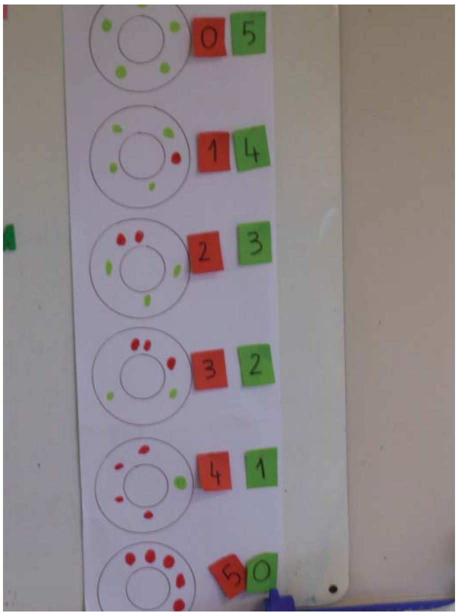
NIVEAU 10 surcomptage

A partir de 5 ou 10, défi / annonce rapide pour ne pas tout compter depuis 1.

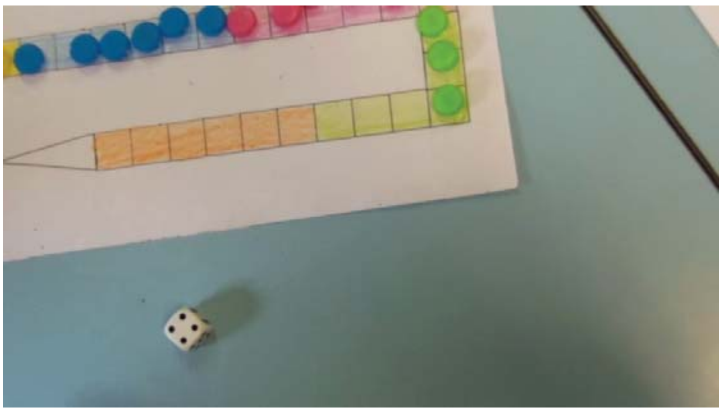
ANNEXE 2

Décomposition des premiers nombres

1 Des affichages :



2 La chenille



Un jeu pour décomposer les nombres de 1 à 6.

Dans la situation de la photo :

Le joueur a fait 4 avec le dé.

Il doit demander au banquier 3 jetons verts et un jeton orange pour compléter sa chenille.

3 Un jeu de cartes

Une carte « trois » est visible au centre (ici trois avec les doigts).

Le joueur dont c'est le tour doit déposer une ou plusieurs cartes pour « faire six ».

La règle peut évoluer : faire trois, faire quatre, faire cinq, …

Lorsqu'on a joué, on pioche autant de cartes qu'on en a posé (tant que la pioche n'est pas vide).

Pour chaque joueur la carte retournée est nouvelle : soit la dernière posée par le joueur précédent, soit retournée à partir de la pioche.

4 Discolud

Le joueur fait tourner la roue.

Dans la règle « faire six » (règle évolutive en fonction des nombres utilisés sur les pastilles) le joueur peut récupérer deux pastilles que se font face et font six en tout.

5 Compléter la grille

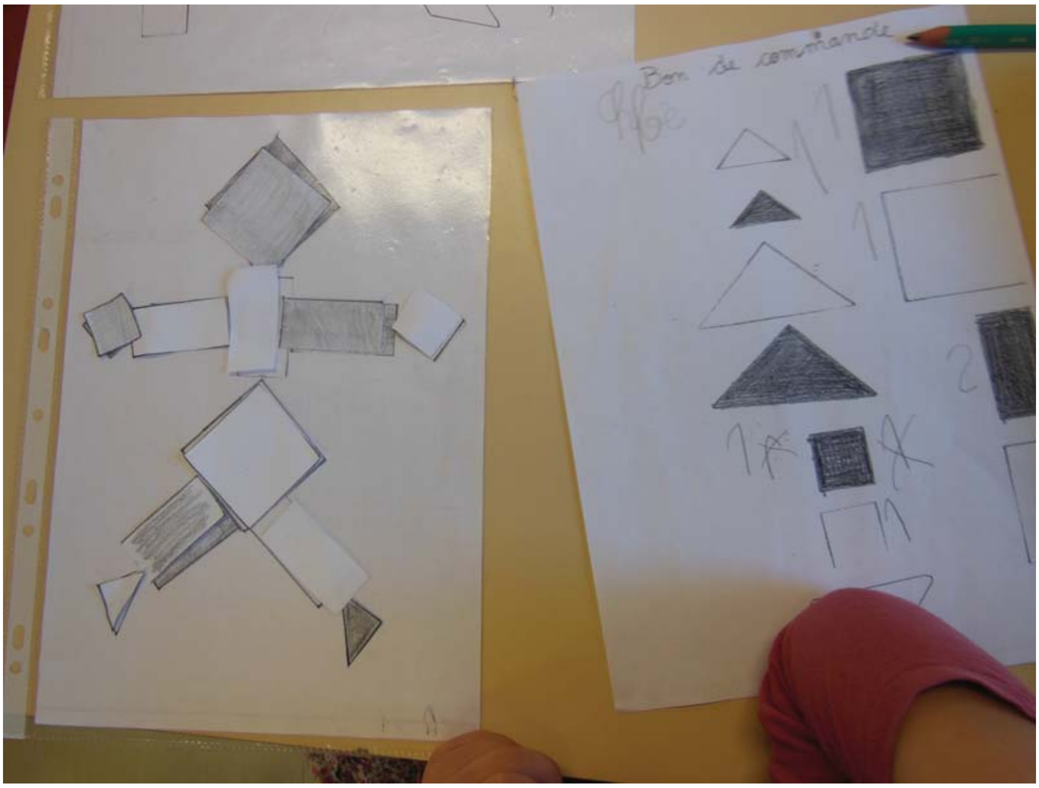
- À deux se mettre d'accord pour aller chercher juste ce qu'il faut de jetons pour compléter les cases vides.
- Deux variantes :
  - Se mettre d'accord et un seul joueur se déplace pour prendre ce qu'il faut en un seul voyage ;
  - Se mettre d'accord et chacun des deux joueurs fait un seul voyage pour prendre des jetons : les jetons rapportés doivent être placés sur les cases vides, un par case et il ne doit pas en rester.

ANNEXE 3

Réalisation d'une commande de forme pour reproduire l'assemblage de la figure de gauche.

À droite, le bon de commande de Chloé.

À gauche, l'auto-validation au retour.



ANNEXE 4

Une situation de recherche - MS-GS 2016-2017

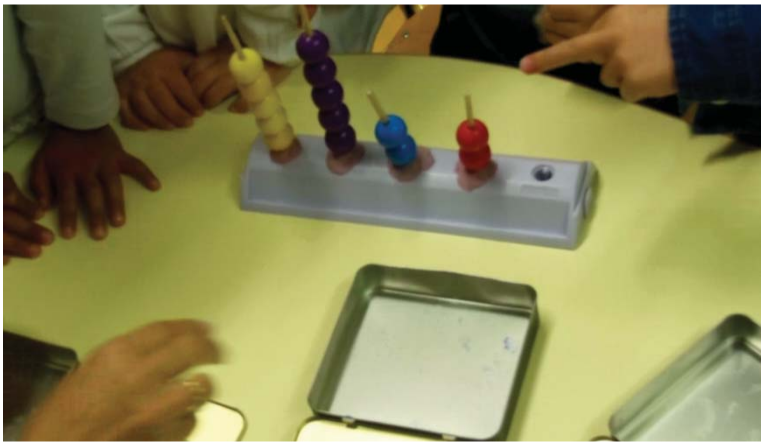
Il faut :

- Mettre toutes les perles sur les tiges de l'abaque
- Que toutes les perles d'une tige aient la même couleur.

Toutes les tiges n'ont pas la même taille.
Dans chaque boîte, quatre couleurs de perles mais le nombre varie d'une couleur à l'autre.
Chaque boîte contient une collection différente.

Une perle bleue ne rentre pas.
Comment faire ?

Un problème qui résiste…



… mais qui est finalement résolu grâce :

aux multiples essais ;

à la coopération entre élèves ;

aux verbalisations des actions effectuées et des problèmes rencontrés.

ANNEXE 5

Beebot en GS

LA PLACE DE LA DESCRIPTION DANS LA REPRODUCTION DE FIGURES AU CYCLE 2

Cécile NIGON
Formatrice, ESPE de Lyon, site de Saint-Etienne
IREM de Lyon, groupe NUMATECOL
cecile.nigon@univ-lyon1.fr

Annette BRACONNE-MICHOUX
Professeur, Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Sandrine MICHOT
Étudiante - enseignante, Université de Montréal
sandrine.michot@umontreal.ca

Résumé
Dans cette communication, nous présentons deux expérimentations de reproduction de figures au cycle 2, l'une au Québec, l'autre en France visant à mettre en évidence le rôle de la description dans la réussite de la tâche (Pierrard, 2004). En particulier, nous nous attarderons à étudier les différents niveaux de langage utilisés ou compris par les élèves dans cette activité ("dire-penser-agir"), considérant que les mots de vocabulaire employés témoignent de l'appropriation des concepts en jeu (Rebière, 2002). Ces expérimentations s'appuient aussi sur le changement de regard que les élèves doivent porter sur les figures pour mieux en appréhender les propriétés (Duval & Godin, 2005). En France, les élèves ont utilisé un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra sur tablette) quand, au Québec, ils ont travaillé dans un environnement papier-crayon (papier quadrillé et papier blanc). Dans les deux environnements, les élèves ont reproduit des figures selon trois « scénarios » dans lesquels la description de celles-ci a été proposée à différents moments dans le processus de reproduction : à partir d'une figure modèle, avant ou après la reproduction de la figure ; à partir d'une description donnée par l'enseignante. Il semble bien qu'en présence de la figure modèle, la description (mise en mots) par l'élève soit un préalable qui favorise la réussite de l'activité même si le vocabulaire utilisé n'est pas toujours le vocabulaire géométrique. En revanche, ces mêmes élèves semblent ne pas avoir de difficultés à construire une figure d'après un programme de construction rédigé par l'enseignante.

I - INTRODUCTION

La construction et la description de figures sont préconisées dans les programmes de l'école primaire tant en France qu'au Québec. Nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à l'utilisation et à la compréhension du vocabulaire géométrique par des élèves de cycle 2 dans le contexte d'une activité de reproduction de figures géométriques. Au Québec, les programmes n'ont pas changé depuis 2001. L'utilisation des TICE n'y est pas évoquée et leur implantation et leur usage dans les classes sont donc très variables. En particulier, elles ne sont jamais utilisées pour la géométrie. En revanche, la volonté du gouvernement français et de certaines collectivités territoriales d'équiper les écoles de tablettes numériques, nous a incitées à expérimenter des séances avec celles-ci. Il était donc intéressant d'expérimenter à des fins de comparaisons dans les deux environnements (numérique et papier-crayon), l'utilisation (la maîtrise des mots de vocabulaire en lien ou non avec la compréhension des concepts) que les élèves pouvaient faire du vocabulaire dans le cadre d'une telle activité.

Dans ce contexte, les questions auxquelles nous nous intéressons sont les suivantes : comment des élèves de 3e année primaire s'approprient-ils les propriétés théoriques des figures géométriques ? Quelle maîtrise du vocabulaire en ont-ils ? Quel rôle joue le langage, et en particulier les interactions langagières entre les élèves ? Est-ce qu'en mettant l'accent sur le langage au cours de l'activité de géométrie, on donne à l'élève la possibilité de réaliser certains apprentissages, comme la précision du vocabulaire, l'organisation du texte, ou tout simplement une liste de propriétés de figures mises en œuvre ? (Pierrard, 2004 ; Rebière, 2002)

L'expérimentation présentée ici s'inscrit dans le cadre du travail recherche/action d'un groupe de l'IREM de Lyon (site de Saint-Etienne) et dans le cadre d'une recherche à l'Université de Montréal. Compte tenu des programmes de mathématiques en vigueur en France et au Québec, ainsi que des spécificités des environnements (numérique à Saint-Etienne, papier-crayon à Montréal), et des connaissances des élèves (programmes), nous avons mis en œuvre les mêmes scénarios d'expérimentation sur des figures légèrement différentes. Nous développons ce propos dans la partie II (§ 2).

II - METHODOLOGIE

1 Mise en œuvre des trois scenarios

Le choix de ces trois scénarios est inspiré de Keskessa et al. (2007).

1.1 Scénario 1

Dans ce scénario, les élèves ont travaillé dans l'ordre suivant :

Figure modèle → description → reproduction

Alors qu'ils avaient la figure modèle sous les yeux, nous avons demandé aux élèves de la décrire "de façon à ce qu'un camarade puisse la reproduire". Notre intention était de repérer quels éléments de la figure ils allaient considérer et lesquels ils allaient ignorer (penser), quelle précision ils allaient avoir dans l'usage du vocabulaire géométrique (parler/écrire) (Rebière, 2002). Mais, il nous importait aussi de savoir si des élèves de CE2 (ou équivalent) allaient décrire les figures en termes de surfaces ou de lignes, opérant alors une certaine déconstruction dimensionnelle (Duval & Godin, 2005) nécessaire à la reproduction de figures (agir).

1.2 Scénario 2

Dans ce scénario, les élèves ont travaillé dans l'ordre suivant :

Figure modèle → reproduction → description

L'objectif de ce scénario est de provoquer un décalage dans le temps entre le « penser-agir » et le « parler/écrire » pour repérer les éléments que les élèves prennent en compte quand ils ont la responsabilité de la reproduction d'une figure et de vérifier que ce sont ces éléments que l'on retrouve dans les descriptions qu'ils proposent ensuite, puisqu'ils n'auront plus la figure modèle sous les yeux.

1.3 Scénario 3

Dans ce scénario, les élèves ont travaillé dans l'ordre suivant :

Programme de construction → construction

Ce scénario devrait nous permettre de repérer comment les élèves interprètent un texte contenant du vocabulaire géométrique, sous la forme d'un programme de construction. Si les élèves qui suivent ce scénario réussissent à construire la figure sans en avoir un modèle sous les yeux, nous pourrons penser qu'ils en ont eu une bonne interprétation. Toutefois, le choix des mots et des formulations seront différents d'un lieu d'expérimentation à l'autre. En France, les textes proposés sont conformes aux attentes institutionnelles : « Les professeurs veillent à utiliser un langage précis et adapté » (Programme de cycle 3[1], 2016) quant au Québec, faute de telles injonctions, le choix a été fait d'utiliser une syntaxe

[1] Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015.
http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708

proche de celle des élèves pour décrire les relations spatiales entre les sous-figures (langage naturel). Dans tous les cas, nous nous attendons à des descriptions beaucoup plus approximatives dans les deux scénarios précédents à propos de ces mêmes figures : erreurs de vocabulaire géométrique, difficultés dans la description des relations spatiales, absence de référence aux dimensions, ...

2 Choix des figures

Les deux groupes d'élèves ayant travaillé dans des environnements différents, il n'a pas été possible d'utiliser exactement les mêmes figures. En France, les figures seront identifiées par "Figure 1" et "Figure 2" ; au Québec, elles seront repérées par "Figure A" et "Figure B".

Dans les deux environnements, nous avons fait le choix de deux figures complexes composées de deux figures élémentaires : la première figure où les deux figures élémentaires sont juxtaposées l'une à l'autre, et la deuxième où les deux figures élémentaires sont partiellement superposées l'une à l'autre. Dans ce dernier cas, la figure complexe peut être interprétée aussi en termes de figures juxtaposées. Les quatre figures seront analysées dans chaque paragraphe consacré à l'environnement d'expérimentation.

Pour l'expérimentation en environnement numérique, le choix du niveau CE2 a induit le choix des figures. En effet, avec le logiciel GeoGebra, la construction d'un angle droit robuste passe par l'utilisation de l'outil "perpendiculaire" alors que la construction d'un carré utilise l'outil "polygone régulier". Il était peu envisageable de proposer aux élèves de reproduire des figures dont les côtés de l'angle droit ne suivraient pas les lignes du quadrillage ou qui ne soient pas des carrés sur fond blanc. En revanche, dans l'expérimentation papier-crayon, ces figures élémentaires ont pu être proposées puisqu'elles sont en lien avec l'apprentissage de l'utilisation de l'équerre.

Les dimensions des figures à Saint-Etienne et à Montréal étaient différentes. Sur tablette, les longueurs sur quadrillage ne pouvaient excéder 6 unités, et les figures sur fond blanc n'avaient pas de mesure affichée ; de plus les élèves ne savaient pas construire un segment de longueur donnée. Sur papier-crayon, les élèves de Montréal sont peu habitués à utiliser la règle et l'équerre ; il fallait donc leur demander de réaliser des constructions de dimensions conséquentes pour éviter les erreurs de maladresse ou d'imprécision.

III - EXPERIMENTATION EN ENVIRONNEMENT NUMERIQUE

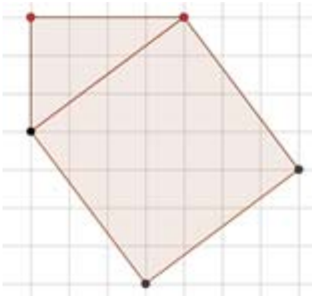
L'expérimentation a été menée dans une classe de CE2 de 24 élèves d'une école REP de Saint-Etienne. Le logiciel choisi est le logiciel Geogebra, logiciel que les élèves ont déjà utilisé. De plus les dernières évolutions des tablettes et des logiciels ont rendu très fluides les manipulations des commandes de géométrie dynamique. La gestuelle pour ouvrir les menus, activer les commandes et tracer les figures paraît naturelle à des jeunes qui utilisent la tablette dans leur environnement familial. Tous les outils qui pouvaient être utiles à la construction des figures de l'expérimentation avaient été présentés et mis en œuvre par les élèves, en amont de l'expérimentation, en particulier l'utilisation de la commande « polygone régulier ». Les figures modèles ont été données en version papier, faute d'avoir pu les déposer sur le serveur de l'école ou sur les tablettes des élèves pour des raisons techniques.

1 Mise en œuvre des trois scenarios

La classe a été organisée en trois groupes de huit élèves. Chaque élève avait une tablette, les huit élèves ont été regroupés autour d'un même îlot sous forme d'atelier en tutelle avec un adulte. Chaque groupe a donc suivi un seul des trois scénarios. Les élèves ont travaillé successivement sur les deux figures. Les échanges ont été enregistrés dans chacun des îlots et des photos des productions d'élèves ont été faites.

2 Analyse *a priori*

2.1 Figure 1 (avec quadrillage)



Texte du scénario 3 associé à cette figure :

> *Reproduis sur ta tablette la figure décrite ci-dessous :*
> ***Figure 1 : sur quadrillage***
> *Trace un triangle rectangle.*
> *Trace un carré dont un des côtés est le grand côté du triangle rectangle.*

Figure 1. Modèle de la figure 1

Les choix que nous avons faits pour élaborer la figure :

- Cette figure est composée de deux sous-figures juxtaposées l'une par rapport à l'autre : un triangle rectangle et un carré. Les côtés de l'angle droit du triangle rectangle mesurent 4 et 3 ; l'hypoténuse du triangle rectangle mesure 5 et c'est aussi le côté du carré.
- Le côté du carré n'est ni en position prototypique ni tracé selon une diagonale du quadrillage.

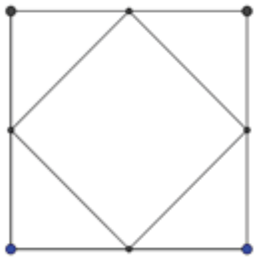
Les questions qui nous intéressaient étaient les suivantes :

- Les élèves reconnaissent-ils le carré ?
- Comment reproduisent-ils ses côtés ? (longueur des côtés évaluées en cm, en nombre de diagonales de carreaux, ou perceptivement ?)
- En quels termes évoquent-ils les figures qu'ils reconnaissent ? En quels termes décrivent-ils les actions à mener pour reproduire les deux sous-figures ?

Les difficultés que nous avions anticipées étaient les suivantes :

- Dans le cas où l'élève construit le quadrilatère en 1er, il pourrait avoir de la difficulté à construire le triangle rectangle isométrique au modèle. Soit, le triangle n'est pas un triangle rectangle, soit, les dimensions ne sont pas les bonnes.
- L'intérieur des polygones est colorié ce qui pourrait faciliter la vision 2D de l'ensemble de la figure au détriment des sous-figures même si le 4e côté du carré a été tracé.
- Dans les scénarios 1 et 2, le lien entre les deux sous-figures tant dans les descriptions exprimées que dans la chronologie du tracé et les mots utilisés pour évoquer ces liens pourraient se révéler difficiles.
- Dans le scénario 3, le premier obstacle serait la connaissance des mots carré et triangle rectangle puis la compréhension du lien entre les deux figures avec l'expression "*dont un des côtés est le grand côté du triangle rectangle*".

2.2 Figure 2 (sans quadrillage)



Texte du scénario 3 associé à cette figure :

> *Reproduis sur ta tablette la figure décrite ci-dessous :*
> ***Figure 2 : sans quadrillage***
> *Trace un carré*
> *Place les milieux des 4 côtés du carré*
> *Trace le quadrilatère qui a pour sommets les 4 milieux.*

Figure 2. Modèle de la figure 2

Les choix que nous avons faits pour élaborer la figure :

- Cette figure est composée de deux carrés superposés ;
- Les sommets du carré intérieur sont les milieux des côtés de l'autre carré.

Les questions qui nous intéressaient étaient les suivantes :

- Les élèves reconnaissent-ils le carré en position non prototypique ?
- Est-ce que l'absence de coloriage favorise une vision 1D de la figure complète par rapport à une vision 2D ?
- Est-ce que les élèves réussissent davantage à verbaliser le lien entre les deux figures élémentaires ?

Les difficultés que nous avions anticipées étaient les suivantes :

- Les élèves pourraient ne pas reconnaître le carré intérieur et le décrire comme tel.
- Dans les scénarios 1 et 2, le lien entre les deux sous-figures tant dans les descriptions exprimées que dans la chronologie du tracé et les mots utilisés pour évoquer ces liens pourraient se révéler difficiles.
- Dans le scénario 3, la compréhension du mot « quadrilatère » et donc de la 3e phrase du programme de construction pourrait poser problème.

2.3 Critères de réussite

Les observables sur lesquels nous prévoyons de porter notre attention pour dire d'une construction qu'elle est réussie ou non sont les suivants :

- Dans la figure 1, sur quadrillage, nous considérons comme réussie toute « construction » d'un carré qui s'appuie sur les nœuds du quadrillage alors qu'elle n'est pas robuste et/ou n'a pas fait appel à l'outil « *polygone régulier* ».
- Les descriptions seront jugées au bénéfice du doute en faveur de l'élève. En effet, nous accepterons toute verbalisation faisant appel au vocabulaire technologique lié à l'utilisation du logiciel alors que nous n'avons aucune certitude que celui-ci maîtrise le sens des mêmes mots dans un contexte géométrique. Ex : « Il faut aller dans « *segment* » à côté du « *point* » tracer un trait ».
- Dans le scénario 3, pour la figure 1, les deux configurations possibles (juxtaposition et superposition) seront acceptées.

3 Analyse *a posteriori*

3.1 Figure 1

Scénario 1

Description : Dans ce scénario, sept élèves sur huit parlent en premier du carré. Pour décrire la position du triangle, ils se réfèrent ensuite aux propriétés spatiales de la figure, en disant par exemple : « *c'est comme une maison sur le côté* ». Quand l'enseignant demande comment faire pour construire ce carré, les élèves utilisent le vocabulaire technologique associé aux outils du logiciel : « je prends "*point*" et "*segment*" et en comptant les carreaux » pour placer les sommets du carré sur les nœuds du quadrillage. L'élève, qui a parlé du triangle en premier, dit du carré qu'il est un losange. Une discussion dans le groupe s'engage pour savoir si c'est un losange ou un carré. Un autre élève intervient : « *c'est un carré car le losange serait plus maigre* ».

Construction : Alors que les descriptions proposées identifient correctement les deux sous-figures (triangle rectangle et carré) aucun élève n'utilise l'outil "carré" du logiciel, abandonnant ainsi une vision globale de la figure, pour s'orienter vers un comptage de carreaux en vue d'une copie à l'identique sommet par sommet. Certains élèves rencontrent des difficultés pour placer les deux sommets du carré qui ne sont pas liés au triangle et tracer les segments qui sont en oblique dans la page. Ces élèves ont des difficultés surtout à formaliser leur erreur dans le comptage des carreaux : « *ça a pas l'air d'être droit* », « *ça ne suit pas les lignes* ».

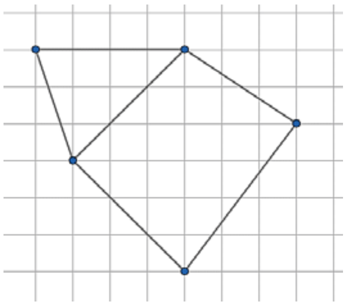


Figure 3. Construction réalisée par un élève pour la figure 1

Quand on demande une description, les élèves utilisent le vocabulaire géométrique pertinent mais quand on leur demande de commenter leur travail (leur "agir"), ils ont tendance à utiliser des mots du langage naturel (non géométrique) ou le vocabulaire technologique du logiciel.

Scénario 2

Les élèves voient et reconnaissent, en premier, le carré malgré sa position non prototypique. Même si la description ne leur a pas été demandée, ils disent : « *il y a un carré* » et la plupart commencent par construire cette sous-figure. Deux procédures sont utilisées : l'une dans laquelle l'élève préserve l'orientation du carré dans la page et va pouvoir terminer correctement sa construction, l'autre dans laquelle l'élève construit le carré en position prototypique dans la page (voir figure 4) et ne sait plus comment placer le triangle rectangle pour qu'il soit à la fois en position prototypique et adjacent au carré.

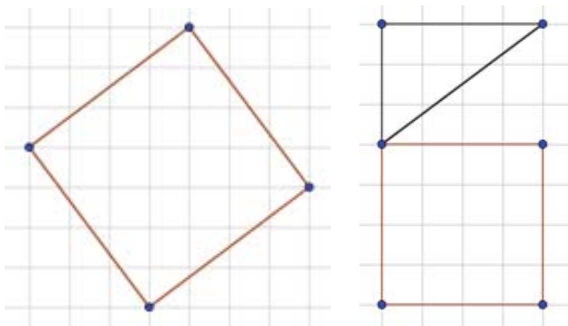


Figure 4. Construction réalisée par un élève pour la figure 1

Les élèves ont des difficultés à décrire cette dernière erreur tant en langage géométrique qu'en langage naturel.

Pour cette première figure, le temps de construction a été long, jusqu'à 25 minutes pour certains élèves, ce qui est beaucoup plus que dans le premier scénario (10 minutes environ). On peut supposer que les échanges langagiers avant la reproduction ont permis aux élèves d'une part, de faire évoluer leur regard des propriétés spatiales vers les propriétés géométriques en identifiant les formes et le lien entre ces formes et, d'autre part, de réfléchir à la chronologie du tracé.

Scénario 3

Les élèves n'ont aucune difficulté pour construire un triangle rectangle et un carré. Tous les élèves utilisent le quadrillage pour tracer les angles droits en suivant les lignes et aucun n'utilise les relations spatiales présentées dans la 2e phrase entre les deux figures. Ils obtiennent tous une figure similaire à la figure ci-dessous (figure 5).

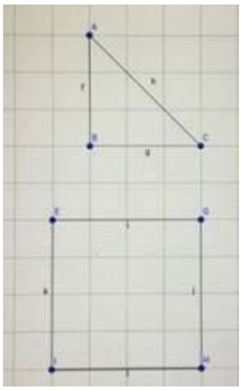


Figure 5. Construction réalisée par un élève, sans relations spatiales

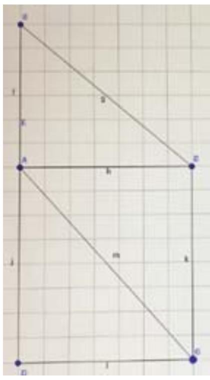


Figure 6. Construction réalisée par un élève, avec relations spatiales

Constatant que toutes les productions sont fausses, l'enseignant montre aux élèves la figure distribuée aux autres groupes, soit la figure modèle dont ils avaient la description. Leur première réaction se porte sur la forme : "*C'est une maison, il faut mettre le triangle en haut du carré comme le toit d'une maison* ». Ils sont dans une vision 2D de la figure. Quand l'enseignant demande aux élèves de préciser les différences entre le modèle et leur production, un élève propose de « *mettre ça, ici* » en montrant le triangle et en déplaçant son doigt vers le carré. On remarque à ce moment-là la prépondérance des propriétés spatiales au détriment des propriétés géométriques. Puis les élèves déplacent soit le triangle soit le carré pour obtenir une forme qu'ils pensent semblable au modèle dans la mesure où le carré est adjacent au triangle (voir figure 6).

Ce scénario nous permet de faire deux remarques sur l'usage du vocabulaire : d'une part, lorsque les élèves expliquent les différences entre leur production et la figure modèle, ils utilisent un champ lexical qui n'est pas celui de la géométrie mais qui relève plutôt du langage naturel et, d'autre part, lorsqu'ils communiquent entre eux à propos de l'utilisation du logiciel, ils utilisent un vocabulaire technologique comme en témoigne l'exemple suivant qui nous semble particulièrement révélateur du décalage entre les mots utilisés et les concepts en jeu. Un élève ne se souvient plus comment tracer les segments dans Geogebra. Il demande à son voisin qui lui répond : « *Il faut aller dans segment, à côté du point* » en indiquant les icônes sur sa tablette. Dans un autre échange on entend : « *tu utilises "segment" et "point" pour tracer un trait* ». Ces exemples incitent à la plus grande prudence : nous n'avons aucune certitude (voire aucune information) sur les liens que les élèves font (ou ne font pas) entre le vocabulaire technologique qu'ils utilisent et les concepts géométriques de même nom.

3.2 Figure 2

Scénario 1

<u>Description</u> : Les élèves voient immédiatement le carré extérieur d'autant plus que celui-ci se trouve en position prototypique. Assez rapidement, ils s'appuient sur les éléments technologiques à partir de la commande « polygone régulier » pour décrire la construction d'un carré sans le quadrillage : « O*n prend « polygone régulier » puis on marque 4 et on clique sur Ok et ça fait un carré* ». L'enseignant demande de poursuivre la description de la figure. Un élève voit un losange à l'intérieur du carré, un autre voit un carré. Un troisième reprend « *C'est un carré retourné* », « *On fera un carré puis un losange dans le carré* ». L'enseignant insiste un peu pour les amener à préciser la position des sommets du petit carré ; une élève énonce clairement « *au milieu d'un segment du carré* ».

Comme pour la figure 1, au moment de la description de la figure, les élèves mobilisent du vocabulaire géométrique.

<u>Construction</u> : Elle a été très rapide. Après 3 minutes de travail, des figures justes apparaissent. Ensuite les élèves se lancent dans le coloriage avec un petit souci à régler : il faut définir les sous figures pour pouvoir les sélectionner. Les élèves ont dû changer leur regard sur la figure : passer d'une vision par superposition de deux carrés à une vision par juxtaposition de cinq figures et les définir comme telles. (Duval & Godin, 2005)

Scénario 2

Comme dans la construction de la figure 1, les élèves commentent spontanément leurs actions. La première remarque que l'on entend est : « »*il faut utiliser* « *polygone régulier* ». Si l'élève prononce immédiatement ces mots « polygone régulier », c'est pour nous une indication très forte de la reconnaissance de la figure comme étant celle d'un carré et que pour la construire, il a besoin d'un outil qui s'appelle « polygone régulier ». A propos du carré intérieur, un premier élève dit qu'il faut « *mettre les points au pif* » mais un autre rétorque : « *il faut mettre les deux points et ça va nous mettre le milieu* ». Ce dernier fait référence aux gestes qu'il faut effectuer pour utiliser l'outil « *milieu ou centre* » *:* on doit cliquer sur les deux extrémités du segment pour que l'outil « *milieu* » fonctionne. Cet élève ayant repéré que les sommets du carré intérieur sont les milieux des côtés du carré extérieur, il encourage alors les autres à utiliser aussi cet outil (voir figure 7).

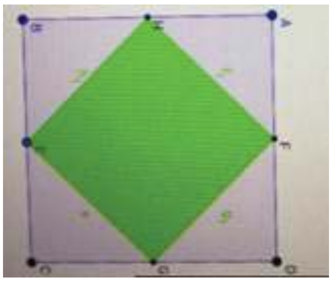


Figure 7. Figure 2 construite et coloriée par un élève

Comme dans le scénario 1, on remarque que la construction de cette deuxième figure est très rapide, en particulier beaucoup plus rapide que la construction de la figure 1. La description qui soutient la construction s'appuie sur un vocabulaire technique accompagnant les gestes à effectuer sur la tablette.

Scénario 3

Contrairement à la figure 1, les élèves réussissent à produire correctement la figure 2. Le mot quadrilatère n'est pas un obstacle. Les élèves se souviennent de l'outil « *milieu ou centre* » qu'ils utilisent ensuite pour placer les quatre milieux. Ils terminent la construction en utilisant l'outil « *segment* ».

Pour cette figure, trois élèves construisent très rapidement la figure demandée sans aide de l'enseignant : le lien entre les deux sous-figures a été plus simple à comprendre que dans la première.

Comme dans le scénario 1, les élèves terminent en utilisant « *couleur et style* » pour produire une belle figure ; soit en s'imposant une déconstruction dimensionnelle de celle-ci (voir figure 8) !

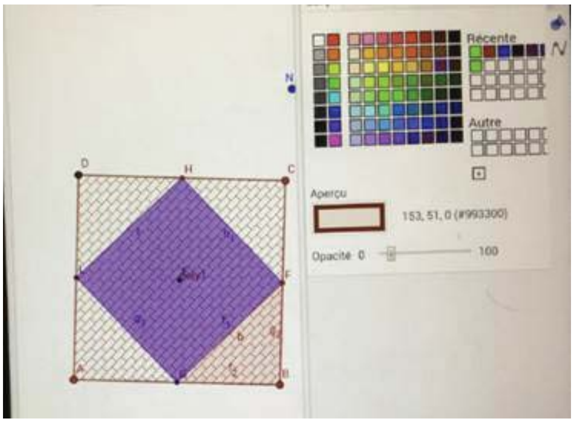


Figure 8. Figure 2 en cours de coloriage, telle que produite par un élève

A l'issue de cette expérimentation, il semble bien que la mise en commun de la **description de la figure avant sa construction** par chaque élève soit une aide pour chacun. On peut imaginer que, lors de cette mise en mots, les élèves ont l'opportunité d'appréhender divers éléments de la figure (nature des sous-figures, outils à utiliser, etc.) pour, ensuite, mieux réussir la construction. Mais l'usage du logiciel induit l'utilisation d'un vocabulaire qui accompagne les gestes à effectuer sur la tablette, vocabulaire qui reprend les mots du vocabulaire géométrique. Il y a donc là une ambiguïté sur la maîtrise du vocabulaire en lien avec la maîtrise des concepts. C'est pourquoi il est intéressant de vérifier si le phénomène se reproduit dans l'environnement papier-crayon.

IV - EXPERIMENTATION EN ENVIRONNEMENT PAPIER-CRAYON

Ce travail s'inscrit dans le contexte d'une recherche universitaire cherchant à préciser le rôle de la description des figures dans le cadre de leur reproduction auprès d'élèves de 3e année (équivalent du CE2) d'une école de Montréal. Nous avons constaté, dans les classes, que les activités proposées aux élèves sont souvent limitées à des reconnaissances de figures (en position prototypique), quelques descriptions reposant sur une connaissance mémorisée de leurs propriétés et que très rares sont les situations où l'on demande à l'élève une construction pour laquelle il devra faire usage de ses instruments (règle, équerre).

L'expérimentation a été menée dans une classe de 3e année de 23 élèves de Montréal. Ceux-ci sont d'origines socio-économiques très diverses. Si certains élèves sont québécois d'origine et francophones, d'autres sont des primo-arrivants allophones. Pour ces derniers, le français est alors leur 2e, 3e voire 4e langue. La compréhension des consignes et la rédaction d'un programme de construction sont donc autant de défis mathématiques que linguistiques, pour les élèves mais aussi pour l'enseignant (scénario 3).

1 Mise en œuvre des trois scenarios

Sous la responsabilité de l'enseignante, la classe a été divisée en trois groupes (groupe 1, groupe 2 et groupe 3[2]) de 8 élèves et, dans un même groupe, les élèves ont travaillé individuellement sur les mêmes figures. L'expérimentation s'est déroulée sur trois semaines. Chaque semaine, un seul scénario a été mis en œuvre sur l'ensemble des 6 figures distribuées dans chacun des trois groupes. Ainsi tous les élèves de la classe ont travaillé dans les mêmes conditions sur l'ensemble des 6 figures à un moment différent de l'expérimentation. La semaine suivante, un autre scénario a été mis en place au cours duquel les élèves ont reçu deux autres figures à reproduire, et il en fut ainsi pour les trois scénarios. Nous avons donc les productions de tous les élèves à propos des 6 figures dans les 3 scénarios envisagés. Nous ne développerons ici que les résultats obtenus à partir des figures A et B. Le tableau suivant résume l'organisation chronologique et matérielle de cette expérimentation.

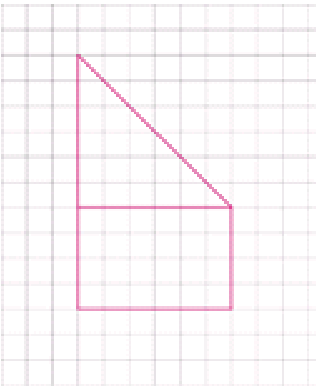
	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Semaine 1 : scénario 1	Figures A et B	Figures C et D	Figures E et F
Semaine 2 : scénario 2	Figures E et F	Figures A et B	Figures C et D
Semaine 3 : scénario 3	Figures C et D	Figures E et F	Figures A et B

Dans les scénarios 1 et 2, à l'issue de la description individuelle, les élèves d'un même groupe ont été invités à mettre en commun leur production pour rédiger, sur une affiche, une description collective qui ne soit pas la copie conforme de l'une des descriptions individuelles mais une nouvelle composition (injonction de l'enseignante).

[2]Il est important de mentionner qu'au sein d'un même groupe de 8 élèves, l'enseignante a constitué des sous-groupes de 4 élèves afin de favoriser la qualité des échanges au cours des périodes de mises en commun (description collective). Par exemple, dans le groupe 1, il y a eu deux sous-groupes de 4 élèves qui ont travaillé simultanément sur les mêmes figures.

2 Analyse *a priori*

2.1 Figure A



Dans le scénario 3, le texte associé à cette figure est le suivant :

> Figure A :
> - Construis un rectangle de 4 cm par 6 cm.
> - Construis un triangle isocèle rectangle qui touche la longueur du rectangle. Un des côtés de l'angle droit mesure 6 cm.

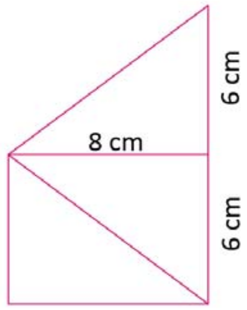
Figure 9. Modèle de la figure A

Cette figure est composée de deux figures élémentaires juxtaposées : un rectangle de 6 cm de long sur 4 cm de large et un triangle isocèle rectangle adjacent extérieurement au rectangle. On peut aussi considérer qu'il s'agit d'un trapèze rectangle dans lequel on a tracé la hauteur qui permet de faire apparaître le rectangle. Le papier utilisé pour cette figure est quadrillé au centimètre ; les mesures des longueurs ne sont donc pas données aux élèves. Pour connaître les dimensions, soit ces derniers comptent les carreaux, soit ils utilisent leur règle graduée. Dans les constructions, les difficultés auxquelles on peut s'attendre sont liées à l'usage du papier quadrillé lui-même (respect des lignes du quadrillage, respect des nœuds du quadrillage, confusion entre le dénombrement des carreaux et celui des nœuds du quadrillage, etc.), au respect des mesures et à l'usage des instruments (tracés rectilignes et angles droits selon les lignes du quadrillage). Dans les descriptions individuelles, il sera intéressant de relever le vocabulaire utilisé pour évoquer les sous-figures et les liens entre ces deux éléments. Enfin, il nous importe de savoir comment les descriptions individuelles auront été réinvesties dans la description collective.

Pour le scénario 3, nous avons choisi de proposer un texte qui se rapproche d'un programme de construction, les deux figures étant juxtaposées l'une à l'autre. Ce texte s'adressant à des élèves de 3e année, il devait être le plus court possible avec des structures de phrases simples et un vocabulaire accessible à tous, donc relativement limité. C'est ainsi que nous ne pouvions dire que le triangle et le rectangle avaient un côté commun, d'où l'expression « touche ». De plus, dans le contexte de la classe et la présence du papier quadrillé, il était implicite que le triangle avait un côté commun avec le rectangle. Afin d'attirer l'attention des élèves sur le fait que le triangle rectangle était isocèle, nous n'avons donné que la longueur d'un des côtés de l'angle droit.

La présence du quadrillage et des mesures permettait d'obtenir dans les scénarios 1 et 2 des figures superposables au modèle et dans le scénario 3, un rectangle et un triangle isocèle rectangle, superposables au modèle. Dans ce dernier scénario, comme dans l'environnement numérique, les deux configurations (juxtaposition et superposition) ont été acceptées.

2.2 *Figure B*



Le texte associé à cette figure est le suivant :

Figure B :
- Construis un rectangle qui mesure 8 cm de long par 6 cm de large.
- Collé au-dessus de ce rectangle, construis un triangle rectangle. Les côtés de l'angle droit du triangle mesurent 6 cm et 8 cm.
- Trace la diagonale du rectangle.
- *Tu dois trouver un triangle isocèle qui a une base de 12 cm.*

Figure 10. Modèle de la figure B

La figure B est proposée sur du papier blanc et les mesures ne sont pas données aux élèves. Ils doivent donc utiliser leurs instruments pour connaître les longueurs et repérer les angles droits, même si ceux-ci sont tous en position prototypique. La distinction essentielle entre la figure B et la figure A réside dans le support et la responsabilité qui incombe maintenant aux élèves d'utiliser leurs instruments de géométrie, utilisation à laquelle les élèves à Montréal ne sont pas habitués. En effet, ils utilisent principalement leur règle pour effectuer des mesures de longueurs sans autre intention que de donner ces mesures : très rares sont les constructions de segments de longueur donnée, et encore plus rare l'utilisation de l'équerre pour vérifier ou construire des angles droits.

Cette figure peut être interprétée de plusieurs façons, en juxtaposition et/ou en superposition. On peut voir trois triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm et 6 cm, adjacents les uns aux autres. On peut aussi interpréter cette figure comme un rectangle de 8 cm sur 6 cm dans lequel on a tracé une diagonale et auquel est adjacent extérieurement un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm et 6 cm. En termes de superposition, on peut voir un rectangle de 8 cm sur 6 cm et un triangle isocèle dont la base est le double de la largeur du rectangle et la hauteur est la longueur du rectangle. On peut aussi considérer qu'il s'agit d'un trapèze rectangle dans lequel on a tracé la hauteur qui permet de faire apparaître un rectangle et une diagonale du rectangle qui permet de repérer un triangle isocèle.

Dans les trois scénarios, on peut s'attendre aux mêmes difficultés et aux mêmes erreurs que dans la figure A, tant dans les descriptions que dans les constructions. Mais, dans les scénarios 1 et 2, on peut aussi s'attendre à plus de difficultés pour décrire tous les éléments de la figure, en donner les positions relatives, en particulier la diagonale du rectangle. Dans les constructions, les approximations pourraient être encore plus nombreuses, en lien avec l'utilisation des instruments.

Dans le programme de construction utilisé pour le scénario 3, nous avons choisi de mettre en italique une indication de validation de construction, à la fois pour que l'élève puisse contrôler son travail (d'où l'expression « la diagonale » et non pas « une diagonale ») mais aussi pour lui suggérer qu'un changement de regard sur la construction (en superposition) fait apparaître d'autres figures.

Enfin, il est envisageable que les relations spatiales entre les figures élémentaires ne soient pas prises en compte, que les élèves construisent un rectangle et un triangle rectangle indépendants l'un de l'autre, et que la diagonale du rectangle soit oubliée.

3 Analyse *a posteriori*

3.1 *Figure A*

Scénario 1

<u>Description</u> : Tous les élèves décrivent les deux éléments de la figure en termes de juxtaposition en utilisant le vocabulaire géométrique, avec quelques imprécisions : le mot « carré » est utilisé à la place de « rectangle », « face » au lieu de « figure » ou « côté », etc. Les descriptions font référence aux surfaces et les mesures indiquées sont des mesures de longueurs sauf dans un seul cas où l'élève évoque les aires des deux figures élémentaires (voir figure 13 ci-dessous). Il nous semble important de signaler que 5

descriptions sur 8 contiennent plus d'informations qu'il n'en faut pour la reproduction de la figure (informations redondantes). La position relative du triangle par rapport au rectangle est évoquée par la moitié des élèves en langage naturel : "*un triangle isocèle et un rectangle collés ensemble*", etc. comme en témoigne la description individuelle reproduite ci-dessous (figure 11)

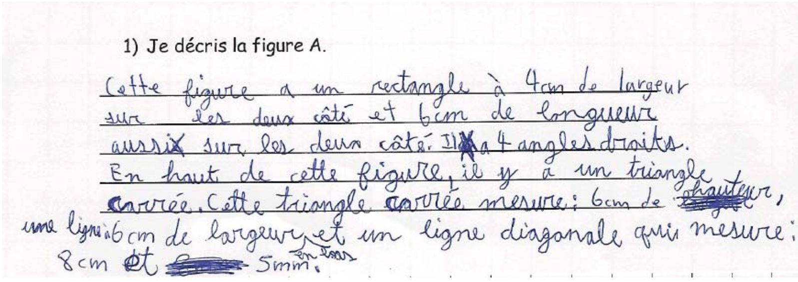

1) Je décris la figure A.
Cette figure a un rectangle à 4cm de largeur sur les deux côté et 6cm de longueur aussi sur les deux côté. Il a 4 angles droits. En haut de cette figure, il y a un triangle carrée. Cette triangle carrée mesure : 6cm de hauteur, une ligne 6cm de largeur et un ligne diagonale qui mesure : 8cm et 5mm en trop.

Figure 11. Description individuelle de la figure A

Les descriptions collectives reprennent pratiquement tous les éléments des descriptions individuelles. Elles contiennent donc de nombreuses redondances et mais ont pu aider les élèves à construire ensuite la figure (voir figure 12).

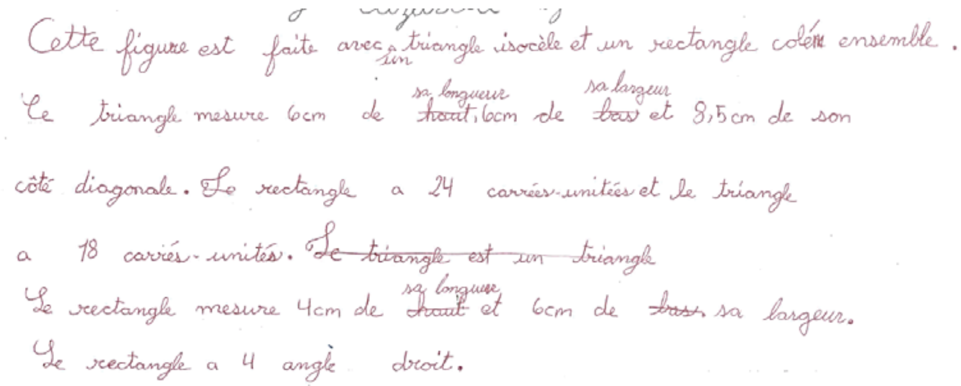

Cette figure est faite avec un triangle isocèle et un rectangle colés ensemble.
Le triangle mesure 6cm de ~~haut~~ sa longueur, 6cm de ~~bas~~ sa largeur et 8,5cm de son côté diagonale. Le rectangle a 24 carrées-unitées et le triangle a 18 carrés-unités. ~~Le triangle est un triangle~~
Le rectangle mesure 4cm de ~~haut~~ sa longueur et 6cm de ~~bas~~ sa largeur.
Le rectangle a 4 angle droit.

Figure 12. Description collective de la figure A

Constructions : Nous faisons l'hypothèse qu'avoir eu à décrire la figure avant de la construire a aidé les élèves, car nous n'avons relevé qu'une figure non conforme au modèle parmi les 8 productions. La seule figure fausse est produite par l'élève évoqué ci-dessus qui a utilisé les mesures d'aires dans sa description (voir figure 13 ci-dessous).

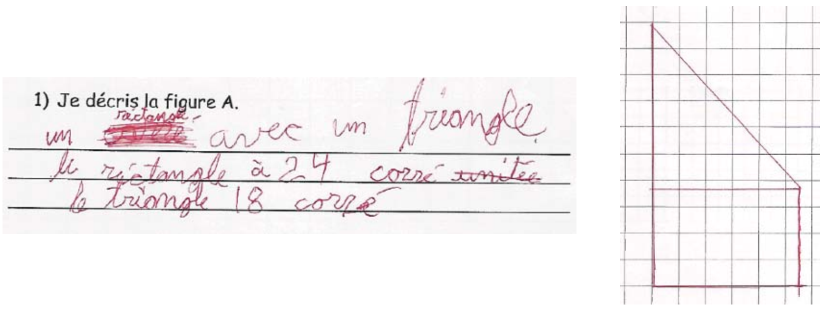


Figure 13. Productions d'un élève (scénario 1)

On peut remarquer les difficultés de l'élève à suivre les lignes du quadrillage et le non-respect des dimensions. Ces erreurs sont-elles liées à un mauvais usage de la graduation de la règle ? C'est possible dans la mesure où les dimensions du rectangle sont d'un demi-centimètre supérieures aux dimensions attendues. Néanmoins, l'élève ne comprend pas l'usage qu'il peut faire des nœuds du quadrillage. Nous pouvons interpréter cette erreur comme le signal du fait que l'usage du papier quadrillé n'est peut-être pas aussi transparent qu'on voudrait bien le croire. De plus, les mesures d'aires qu'il propose dans sa description ne semblent pas lui avoir été utiles pour contrôler sa construction.

A l'opposé, tous les élèves qui évoquent les mesures de longueurs dans leur description réussissent leur construction.

Scénario 2

Construction : Dans ce scénario, les élèves font la construction alors qu'ils ont la figure modèle sous les yeux et aucun commentaire ne leur est demandé. Les 3 élèves qui produisent des constructions fausses ne respectent pas les mesures et/ou ne suivent pas les lignes du quadrillage, sans que l'on sache comment ils utilisent leurs instruments de géométrie ni même s'ils les utilisent (voir figure 14) où nous avons ajouté la description proposée par l'élève).

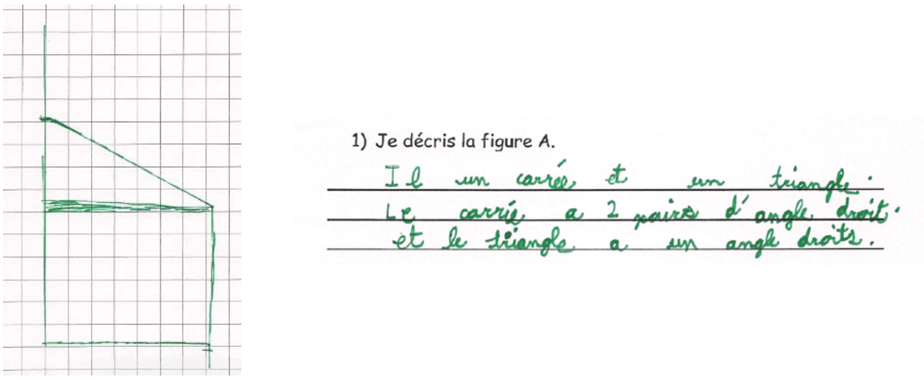


Figure 14. Productions d'un élève (scénario 2)

Description : Les textes font référence aux figures élémentaires en utilisant un vocabulaire géométrique parfois approximatif, comme dans les descriptions issues du scénario 1. Quand les positions relatives entre les deux figures sont évoquées (juxtaposition), c'est en langage naturel : 6 élèves sur 8 sont dans ce cas.

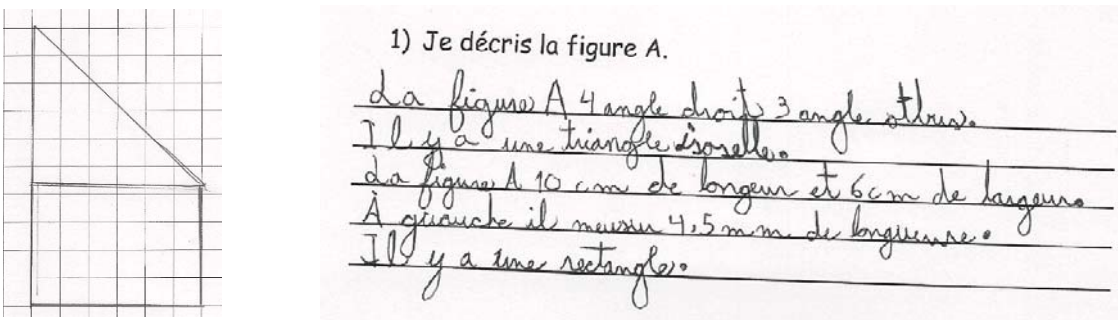


Figure 15. Productions d'un élève (scénario 2)

Un seul élève produit un texte en lien avec sa construction et mentionne les mesures qu'il a utilisées (voir figure 15).

Quatre élèves sur les 8 font référence aux carreaux comme unité de mesure ; les autres n'en mentionnent aucune.

Les descriptions collectives reprennent autant d'éléments que possible des descriptions individuelles, en insistant sur les mesures d'aires au détriment des longueurs. Faut-il voir là un lien avec le fait que l'expérimentation a eu lieu au moment où les élèves étaient initiés aux mesures d'aire ? Ce n'est pas impossible.

Scénario 3

La construction du rectangle ne pose pas de problème particulier, sauf à une élève qui construit un rectangle de 5 cm de long. En revanche, le respect des deux contraintes liées à la construction du triangle isocèle rectangle est plus difficile. Souvent une seule contrainte est respectée : l'angle droit ou les deux côtés de même longueur. Seuls 3 élèves sur 7 réussissent la construction du triangle isocèle rectangle.

Enfin, il est intéressant noter que 3 élèves sur 7 interprètent le programme de construction en termes de juxtaposition quand les 4 autres le font en termes de superposition ; ce qui souligne bien l'ambiguïté dans le texte proposé aux élèves (voir figure 16). Ces 4 élèves commettent aussi des erreurs liées vraisemblablement au dénombrement des carreaux : le rectangle a 5 cm de long, le triangle rectangle n'est pas isocèle, etc.

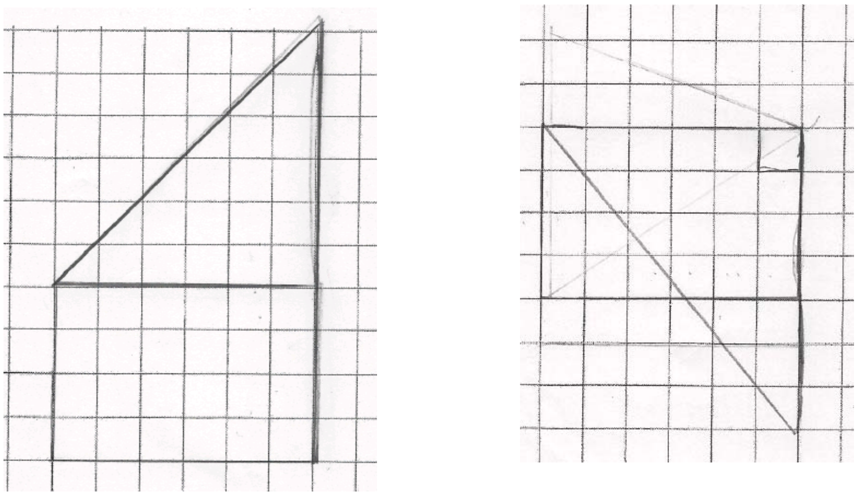


Figure 16. Deux interprétations du programme de construction (scénario 3)

3.2 Figure B

Scénario 1

Description : Dans ce scénario, les élèves décrivent les deux éléments de la figure (rectangle et triangle rectangle) en termes de juxtaposition en utilisant le vocabulaire géométrique, avec les mêmes imprécisions que celles rencontrées à propos de la figure A. Seuls 2 élèves donnent toutes les mesures nécessaires à la reproduction de la figure, 2 autres ne donnent que les mesures du rectangle et 3 élèves n'en donnent aucune. Les positions relatives des différents éléments de la figure sont précisées par 4 élèves sur 8 (voir figure 17).

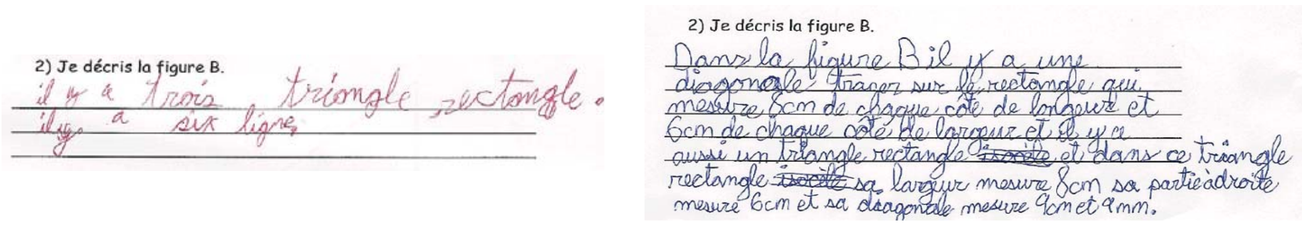


Figure 17. Deux descriptions de la figure B

Construction : Dans ce scénario, tous les élèves réussissent à reproduire la figure B, même si l'un d'entre eux doit faire plusieurs tentatives avant de considérer que sa construction est satisfaisante. On peut donc voir là un indice du fait que l'usage des instruments de géométrie n'est pas une source de difficulté particulière, ou encore que le papier quadrillé n'apporte pas l'aide que l'on pourrait imaginer. En particulier, les constructions sur papier quadrillé, dans l'ensemble, ne sont pas plus précises ou soignées que les constructions sur papier blanc (respect des lignes du quadrillage, des nœuds du quadrillage tant pour les longueurs que pour les angles droits).

Scénario 2

Construction : Dans ce scénario, 2 élèves réalisent des constructions fausses : pour l'une, le triangle n'est pas un triangle rectangle, pour l'autre, une extrémité de l'hypoténuse n'est pas aussi un sommet du rectangle (voir figure 18). Au vu des productions des élèves, il semble bien que l’usage des instruments de géométrie sur papier blanc ne soit pas une source de difficulté majeure. Cette « réussite » peut être liée au fait que les angles droits de la figure modèle étaient en position prototypique et nous n’avons pas d’information particulière sur l’usage précis que les élèves ont pu faire de leur équerre.

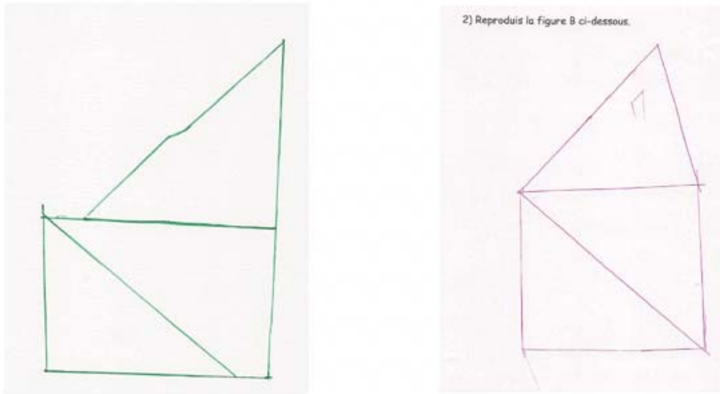


Figure 18. Les deux constructions fausses de la figure B

Description : Les descriptions proposées par les élèves sont rédigées en termes de juxtaposition des figures, faisant référence aux surfaces (formes) et aux lignes ; rares sont celles où les dimensions sont mentionnées (2 élèves sur 8). Le vocabulaire utilisé peut être très approximatif chez certains élèves et la description des positions relatives du triangle rectangle, du rectangle et de la diagonale se révèle une tâche particulièrement délicate et complexe, quand d’autres témoignent d’un grand souci de précision (voir figure 19).

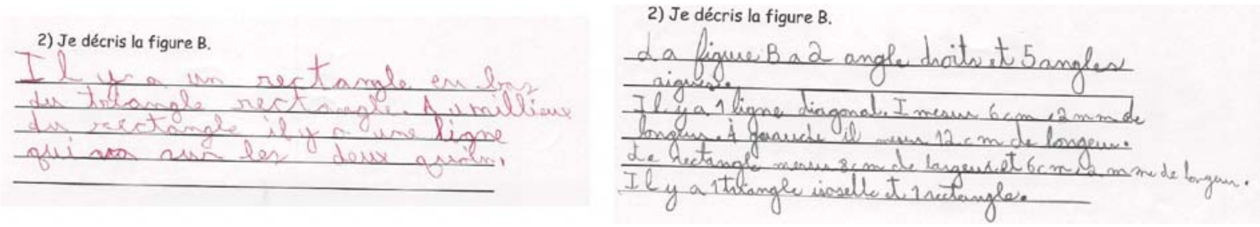


Figure 19. Deux descriptions individuelles de la figure B

Les mises en commun ne permettent pas de surmonter cette difficulté. Les descriptions collectives sont en quelque sorte « la somme » des descriptions individuelles, comme si, en travaillant en groupes, les élèves avaient eu le souci de « ne rien manquer » (voir figure 20).

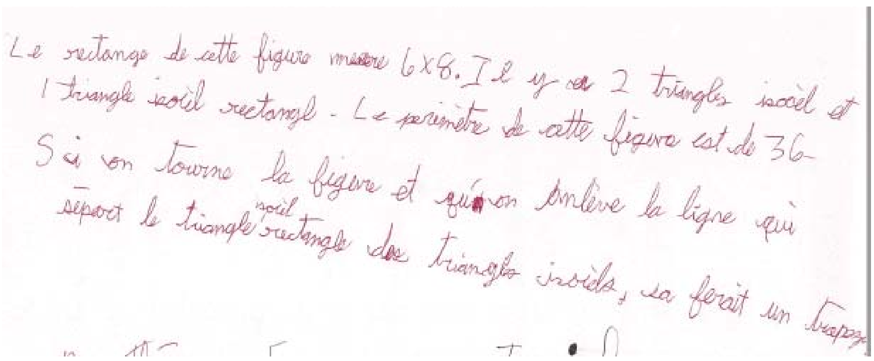


Figure 20. Description collective de la figure B

Dans le scénario 3, on peut considérer que, comme dans la construction de la figure A, les élèves ont compris le message donné dans le programme de construction. Ils ont tous réussi la construction du rectangle et 4 élèves sur 7 ont aussi réussi celle du triangle rectangle ainsi que le tracé de la diagonale. Comme on pouvait s’y attendre, presque tous les élèves sont un peu maladroits dans l’utilisation de l’équerre, donc dans la construction des angles droits (voir figure 21). En effet, dans ce scénario, les élèves n’ayant pas de modèle sous les yeux, leur réussite est beaucoup plus dépendante de la maîtrise de cet instrument de géométrie : ils n'ont pas de référence visuelle pour les aider à produire une figure précise.

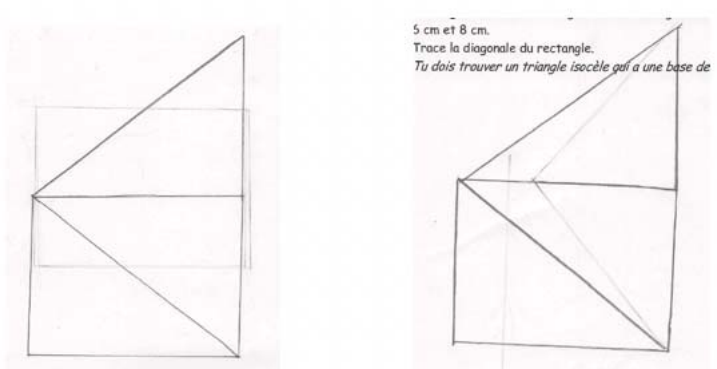


Figure 21. Deux constructions de la figure B

Dans les productions de 2 élèves, on ne trouve aucune trace du triangle rectangle adjacent au rectangle. On ne peut pas savoir si ces élèves interprètent le texte en termes de superposition ou ont de la difficulté à construire le triangle rectangle adjacent extérieurement.

Compte tenu des tracés effacés, il est possible que la phrase en italique ait permis des ajustements pour une construction réussie. Quand la validation par calque est proposée aux élèves, la verbalisation des différences entre la production et le modèle est difficile : le vocabulaire utilisé pour décrire les erreurs est, au mieux, emprunté au langage naturel.

V - CONCLUSION

La première remarque que l'on peut faire à propos de cette expérimentation est l'enthousiasme des deux groupes d'élèves pour l'ensemble de ces nouvelles activités. Ils savaient que les défis pourraient être grands, mais c'est avec beaucoup de sérieux et d'investissement personnel qu'ils se sont pliés à la tâche.

La deuxième remarque concerne les textes à proposer aux élèves dans le scénario 3. Rédiger un programme de construction accessible à des élèves de CE2 ou de 3e année, qui représente un défi intéressant, sans faire usage des lettres pour désigner les sommets, se révèle une tâche délicate pour l'enseignant : l'utilisation des lettres pour désigner les sommets n'est pas explicitement au programme ni en France ni au Québec et de surcroît, cet usage doit faire l'objet d'un enseignement-apprentissage particulièrement soigné et rigoureux (Perrin-Glorian, 2006). Si l'usage du vocabulaire géométrique va de soi pour la description des figures élémentaires, il n'en est pas de même pour décrire leurs positions relatives. L'expérimentation au Québec en témoigne : pour éviter des structures grammaticales trop complexes, on est amené à utiliser le vocabulaire naturel : « qui touche », « collé au-dessus » ... On peut facilement imaginer que cette difficulté dans le choix des mots pour l'enseignant en soit aussi une pour l'élève : où est la frontière entre le langage naturel, permis dans la description d'une figure géométrique et le langage géométrique attendu ? La figure suivante (figure 22) montre bien l'impasse dans laquelle se trouve l'élève dès qu'il a interprété le programme de construction en termes de superposition et non pas de juxtaposition : cet élève n'a pas été en mesure de changer son regard sur la figure en relisant le programme de construction et l'indice de validation qui était proposé.

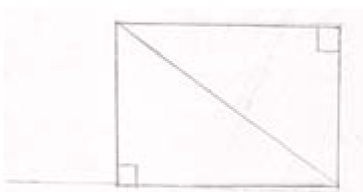


Figure 22. Une interprétation en juxtaposition de la figure B

Si l'on compare les taux de réussite de construction des figures (2 figures fausses sur 16 dans le scénario 1 et 8 sur 16 dans le scénario 2 dans l'expérimentation papier-crayon), il semble bien que, dans les deux environnements, ce soit le scénario 1 qui ait été le plus favorable comme si, en imposant la description avant la construction, l'élève avait été obligé de se concentrer (« penser ») sur les caractéristiques de la figure par le « parler » (y compris en faisant usage d'un vocabulaire métaphorique) pour ensuite mieux maîtriser la reproduction (« l'agir »). On peut facilement imaginer que les mises en commun ont aussi contribué à cette réussite dans la construction par la verbalisation d'un plus grand nombre de caractéristiques de chaque figure. De plus, dans le cas du scénario 2, l'intérêt de la description postérieure à la construction repose sur la validation des textes individuels par la mise en commun. Mais ce n'est pas exactement ce qui s'est passé dans l'environnement papier-crayon où les descriptions collectives sont les « sommes » des descriptions individuelles. Aurait-il été pertinent que l'enseignante participe à la validation de ces descriptions collectives ? C'est possible puisque, dans l'environnement numérique, la présence de l'adulte a permis de faire ressortir les éléments nécessaires à une description attendue.

On peut aussi dire que le langage utilisé est influencé par le matériel mis à la disposition des élèves, un logiciel de géométrie ou un environnement papier-crayon. En particulier, dans l'environnement numérique, l'utilisation du logiciel induit celle d'un vocabulaire technologique qui utilise des mots du langage géométrique mais dont l'utilisation reste associée à la description des gestes à effectuer pour construire la figure plutôt qu'à la description des éléments des figures proposées.

Il est important également de souligner que, dans ces deux environnements, la plupart des élèves a une bonne compréhension du vocabulaire géométrique ; par contre ils ont plus de difficulté à « parler » : désigner les figures par leur nom, décrire les positions relatives en utilisant un vocabulaire géométrique.

En conclusion, et aussi pour répondre à la demande des élèves des deux groupes de renouveler ce type d'activités, nous pensons que, ce faisant, les apprentissages des figures, des concepts géométriques en lien avec le vocabulaire géométrique s'en trouveraient renforcés. De plus, dans les deux environnements, les descriptions collectives n'ont pas été exploitées avec tous les élèves de la classe. Ce serait peut-être l'occasion pour certains d'entre eux de les conforter dans leurs apprentissages, tant en termes de vocabulaire que d'utilisation des instruments ou de propriétés des figures à connaître pour fins de reproduction. Une telle expérimentation reste à mener sur le long terme et sur un plus grand nombre de sujets.

VI - BIBLIOGRAPHIE

DUVAL R., GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, **76**, 7-27.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J., DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N,***79**, 33 – 60.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J., VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Petit x ;* **72,** 6-39

PIERRARD A. (2004) Des écrits pour présenter des dessins géométriques, *Grand N,* **74**, 7 – 30.

REBIERE M. (2002) Quelques remarques pour réfléchir au rôle des pratiques langagières dans les apprentissages mathématiques. In *Actes du 29ème colloque COPIRELEM,* 33-55.

http://www.arpeme.fr/documents/27C678BC216956B50DB2.pdf

POSTER 21

PREMIERS PAS VERS LA CONSTRUCTION D'UN REGARD GEOMETRIQUE SUR LES FORMES A LA TRANSITION CYCLE 1 - CYCLE 2

Marie Geourjon
Professeur des écoles, école de la Monne, Saint-Saturnin
IREM de Clermont-Ferrand
marie.geourjon@ac-clermont.fr

Rémi CANIVENQ
Professeur des écoles, école George Sand, Thiers
IREM de Clermont-Ferrand
remi.canivenq@ac-clermont.fr

Résumé
Dans le cadre d'une réflexion autour de la continuité de l'enseignement de la géométrie du cycle 1 au cycle 3, nous avons entrepris un travail d'élaboration de progressions et de situations visant à accompagner nos élèves de Grande Section et de CP dans un premier mouvement de déconstruction dimensionnelle de formes, premier pas vers la géométrie (Duval et Godin (2005), Perrin-Glorian, Leclerc et Mathé (2013)). Nous présentons dans ce texte des éléments de ces progressions. Celles-ci articulent travail sur des solides et reproduction d'assemblages de formes par juxtaposition puis superposition, via des situations d'action, un jeu sur les instruments à disposition et des situations de formulation (Brousseau, 98).

Enseignants dans le premier degré, nous avions des difficultés à faire progresser nos élèves en géométrie. Nous nous sentions démunis pour choisir ou construire des activités riches et variées favorables aux apprentissages, comme c'est aussi le cas pour beaucoup de collègues. Le groupe IREM de Clermont-Ferrand, Université Clermont-Ferrand Auvergne-Rhône-Alpes, nous a donné un cadre pour réfléchir autour de la continuité de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Nous avons mené un travail collaboratif entre enseignants du premier degré et du second degré en appui sur des échanges avec des didacticiens des mathématiques. Les éléments théoriques du groupe de Lille nous ont permis de mieux comprendre des enjeux de l'enseignement de géométrie et nous ont livré des premières pistes didactiques.

L'objectif général de notre travail s'inscrit dans une volonté de penser un enseignement cohérent de la géométrie de la première année de maternelle au cours moyen deuxième année. Plus particulièrement, nous centrant sur les niveaux auxquels nous enseignons (Grande Section et Cours Préparatoire), nous avons voulu interroger la manière dont nous pouvions repenser, parfois réorganiser, enrichir, le travail sur les formes proposées à nos élèves de fin du cycle 1 et début du cycle 2 afin de faire de celui-ci un premier pas vers la géométrie des cycles 2 et 3. Nous avons donc pensé une progression de la géométrie en GS/CP, en commençant par un travail sur les solides jusqu'à une analyse des figures planes en termes de bords et de lignes. Ce sont des éléments de cette progression que nous avons souhaité présenter lors de ce colloque à travers un poster (Annexe 1). Nous présentons une progression que nous avons mise en place dans nos deux classes avec quelques variantes. Pour certaines activités, les variables didactiques nous ont permis de différencier le travail proposé. Par exemple, la nature et le nombre de formes à disposition pour réaliser les assemblages étaient différents. Nous n'avons pas eu les mêmes exigences concernant les formulations orales pour décrire les solides et les formes.

Dans un premier temps, nous nous efforcerons de mettre en évidence la manière dont l'étude théorique nous a permis non seulement de penser, de concevoir et d'articuler des progressions pour nos situations de classe mais aussi de nous donner les moyens de les analyser. Dans un second temps nous développerons l'analyse a priori de situations de classe permettant le passage de la juxtaposition de formes à la superposition de formes. Cette partie sera suivie d'une analyse a posteriori sur le travail effectivement réalisé avec nos élèves. Nous ferons enfin le bilan de notre pratique de l'enseignement de la géométrie.

I - DES ELEMENTS THEORIQUES POUR ELABORER UNE PROGRESSION POSSIBLE EN GEOMETRIE PLANE A L'ECOLE

Duval et Godin (2005) et Perrin-Glorian, Mathé, Leclercq (2013) ont montré qu'il existe plusieurs manières de voir et d'analyser une figure. De manière générale, l'analyse d'une figure ou d'un assemblage de figures attendue à partir du cycle 3 passe par la connaissance des propriétés géométriques de ces figures. Or ces différentes propriétés géométriques portent essentiellement sur des relations entre les lignes et les points : égalité de longueurs de segments, perpendicularité, parallélisme de droites… La manière de voir et d'analyser la figure doit donc évoluer d'une vision en termes de surfaces vers une vision en termes de lignes et de points. « Entrer dans la géométrie nécessite donc de modifier de manière profonde son rapport aux figures et la nature des sous-éléments des figures à prendre en compte, d'objets de dimension 2 (2D-surfaces) à des relations entre objets de dimension 1 (1D-lignes), voire de dimension 0 (0D - points). C'est le principe de la déconstruction dimensionnelle. » (Duval et Godin, 2005, p. 7). Ces trois visions ne sont pas cloisonnées. Une articulation et un va-et-vient entre elles sont nécessaires pour permettre à l'élève de cycle 3 d'analyser une figure dans le cadre de la géométrie.

Une analyse des programmes de l'école de 2015, à la lumière des éléments théoriques précédents, nous permet d'envisager des enjeux généraux de l'enseignement de la géométrie pour chaque cycle. Ainsi, dès le cycle 1, l'élève travaillerait la vision de surfaces et son passage à la vision de lignes. Au cycle 2, il retravaillerait ce passage de la vision de surfaces à la vision de lignes vues comme des bords de surfaces. Puis l'élève serait amené à passer à la vision de lignes proprement dite en segmentant les bords des surfaces, en repérant des prolongements possibles de segments (en segments et en droites), en percevant des alignements de segments et de points. Au cycle 3, l'élève, tout en poursuivant le travail sur la vision de lignes, passerait de cette vision de lignes à la vision de points. C'est bien en termes de mobilité du regard que nous envisageons cet enseignement. À la fin de la scolarité à l'école primaire, l'élève doit être capable d'utiliser ces différentes visions pour lui permettre d'analyser de manière géométrique une figure, non seulement en termes de surfaces mais aussi en termes de réseaux de lignes et de points. Il doit pouvoir voir et utiliser les objets, leurs propriétés et les relations entre eux, essentiels dans les activités de démonstration proposées au collège.

Forts de ces éclairages, notre travail a consisté à (re)penser la progression générale que nous proposions à nos élèves de fin de cycle 1 et de début de cycle 2.

Une première séquence porte sur les solides, dans le but de travailler la reconnaissance d'objets en trois dimensions (3D) via la reconnaissance globale de formes (2D), jusqu'à la capacité à décrire des solides et nommer les formes composant leurs faces. Ce travail est suivi d'une séquence visant l'analyse de figures complexes en termes d'assemblages de formes juxtaposées. Cette séquence se centrait sur des activités de pavage ou de reproduction de figures complexes, à l'aide de gabarits. Les gabarits utilisés étaient des formes transparentes. Ces gabarits étaient des instruments qui permettaient à la fois de mobiliser des informations sur des formes (2D) et de tracer les contours. Ainsi cette séquence visait à amener les élèves à passer d'un regard porté sur les formes (2D) à un regard porté sur leurs contours (ligne 1D, frontières de surfaces). Une troisième séquence visait à enrichir le regard des élèves sur ces figures complexes, en leur apprenant à analyser ces figures en termes d'assemblages de formes qui se chevauchent. Cet enrichissement de l'analyse des figures complexes et l'introduction de la superposition constitue pour nous un premier pas vers l'identification de prolongements de lignes et les propriétés d'alignement de segments. Nous nous centrerons dans ce texte sur cette séquence, et plus précisément sur la première séance de cette séquence, séance d'introduction de la superposition.

L'élaboration générale de nos séquences s'est appuyée sur le cadre que nous livre la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Des situations d'action ont été pensées pour permettre l'émergence de connaissances comme outils pour résoudre des problèmes portant sur des formes et des dessins (par exemple paver ou reproduire une forme). Nous avons porté une attention particulière aux moments de verbalisation pour expliciter des connaissances d'action. Le coloriage des formes fait apparaître les surfaces (2D) alors que les traits au crayon à papier rendaient compte des contours (1D). Par ces situations de formulation, orale ou écrite, nous avons ensuite rendu nécessaires la désignation des objets géométriques. Nous avons aussi bien sûr pris soin de penser des phases d'institutionnalisation, permettant de transformer ces connaissances géométriques en savoirs géométriques.

II - FOCUS SUR L'ANALYSE DE FIGURES COMPLEXES EN TERMES D'ASSEMBLAGES DE FORMES QUI SE JUXTAPOSENT ET QUI SE CHEVAUCHENT

Nous présentons dans la suite du texte la séance d'introduction de la superposition, dans nos classes de Grande Section de maternelle et de CP. L'activité proposée aux élèves consiste à décomposer une forme en assemblages de formes. Nous rendons compte dans ce texte d'éléments de l'analyse a priori puis a posteriori de cette séance.

1 Présentation et analyse a priori de la situation

La tâche de l'élève consiste à décomposer une forme dont on donne le contour en un assemblage de formes, à l'aide de gabarits de formes géométriques transparentes (figure 1).

Les élèves utilisent des gabarits de formes transparentes. Ils avaient à disposition les formes dont ils pouvaient avoir besoin (losange, triangles équilatéraux petit et grand, trapèze) pour reproduire les assemblages plus deux autres (rectangle, carré). La nature, le nombre et la présentation des formes (mélangées ou triées) sont des variables didactiques.

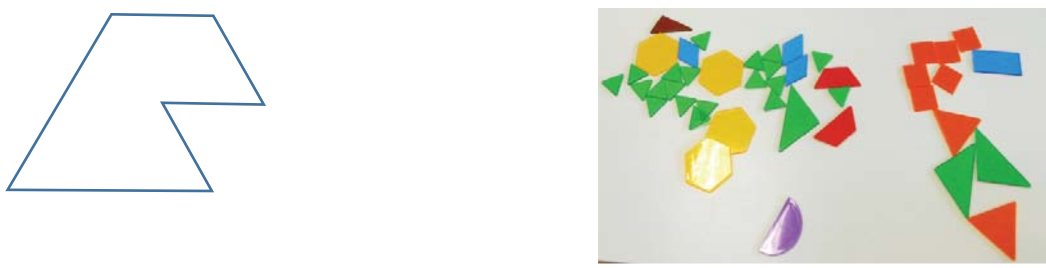


Figure 1

1.1 Phase 1 : Décomposer la forme en un assemblage de formes juxtaposées

Dans un premier temps, les élèves sont invités à utiliser les gabarits pour paver la forme (c'est à dire la recouvrir sans chevauchement ni espace).

Notre objectif est d'amener les élèves à prendre conscience qu'il existe une multitude de manières possibles de décomposer une forme, et donc de l'analyser et de la voir.

1.2 Phase 2 : Décomposer la forme en un assemblage de formes qui se chevauchent : un premier pas vers le prolongement de bords

Dans un second temps, nous choisissons un assemblage par juxtaposition (figure 2 à gauche). Les élèves reproduisent cet assemblage (figure 2 à droite).

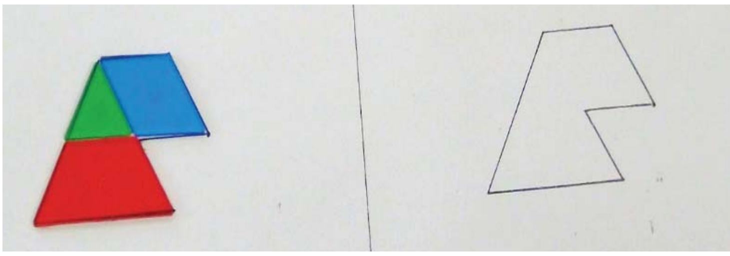


Figure 2

La consigne est maintenant la suivante : « Vous allez devoir recouvrir la même forme, à droite sur votre fiche, de façon à faire apparaître les mêmes traits intérieurs, mais avec seulement deux gabarits : un grand triangle et un trapèze. La seule solution au problème posé est la suivante (figure 3).

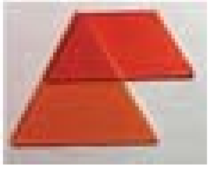


Figure 3

Notre objectif consiste donc à amener les élèves à passer d'une analyse en termes de formes juxtaposées à une analyse en termes de formes qui se chevauchent.

Positionner le triangle nécessite de considérer que l'on peut prolonger un des bords de la forme initiale pour former ce triangle (figure 4a). De même, positionner le trapèze amène à visualiser la possiblité de prolonger un bord de la forme pour créer une nouvelle forme (figure 4b).

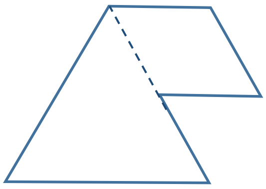


Figure 4a

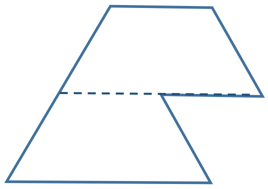


Figure 4b

1.3 Formulation écrite

Nous demandons ensuite aux élèves de dessiner leurs assemblages, pour garder mémoire des assemblages réalisés. Les élèves disposent toujours du contour de la forme initiale, des gabarits, de crayons de papier et de crayons de couleurs. Le dessin demandé doit être fait sur le contour de la forme initiale. Les traits intérieurs sont des prolongements des contours des formes utilisées, cela rend compte d'une vision de lignes (1D). Le coloriage des formes permet de voir si l'assemblage est juxtaposé ou superposé, il rend compte de la vision de surface (2D).

Dans cette phase, les gabarits deviennent des instruments de tracés (de contours de formes), centrant l'activité des élèves vers une analyse de la figure portant sur des lignes, vues comme frontières de surfaces.

1.4 Mise en commun et verbalisation

Une phase de mise en commun et verbalisation doit permettre de mettre en évidence qu'un même réseau de lignes peut être le résultat d'un assemblage par juxtaposition ou d'un assemblage par superposition. Nous avons prévu de projeter une photo des deux assemblages (par juxtaposition puis par superposition) au tableau, de demander à un élève de tracer le contour des formes, sur les deux assemblages. En éteignant le vidéoprojecteur, nous observerons sur le tableau la même figure (figure 5). Nous pourrons alors verbaliser le fait que cette figure peut être vue de différentes manières : soit comme une juxtaposition de formes, soit comme une superposition de formes. Le retour au contour initial pourra enfin mettre en évidence que l'on peut prolonger des bords pour former le triangle, ou le trapèze.

Nous le voyons à travers cette brève description, cette séance a pour but d'articuler à la fois un travail sur les surfaces et un travail sur les contours de ces surfaces pour enfin faire un premier pas vers la perception de prolongement de bords.

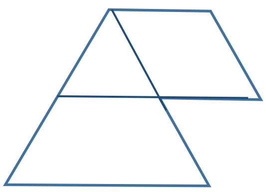


Figure 5

2 Éléments d'analyse a posteriori de la séance

2.1 *Les difficultés à percevoir, de manière spontanée, le prolongement de bord et les formes superposées*

Les élèves n'ont pas eu de difficulté à juxtaposer les formes, ils ont trouvé de nombreuses possibilités de décomposition. Cependant superposer deux formes a été beaucoup plus difficile. À cela trois raisons majeures. D'abord, le contrat didactique change dans cette situation. Depuis le début du travail en géométrie, il est demandé aux élèves de juxtaposer des pièces pour paver des figures (à l'instar des puzzles). Un élève dit : « On n'a pas le droit comme ça ! » en montrant la superposition d'un camarade. La situation les contraint cependant à utiliser le chevauchement pour résoudre le problème. Ils vont apprendre à définir la superposition par rapport à la juxtaposition. Ensuite, certains élèves posent les pièces en alignant le bord des pièces au contour de la figure (figure 6). Les rétroactions du milieu leur permettent de prendre conscience de leur échec, car la forme dépasse du contour. Ainsi l'élève cherche d'autres solutions en tournant la pièce mais tout en essayant de faire coïncider tous les bords des pièces avec les contours de la figure.

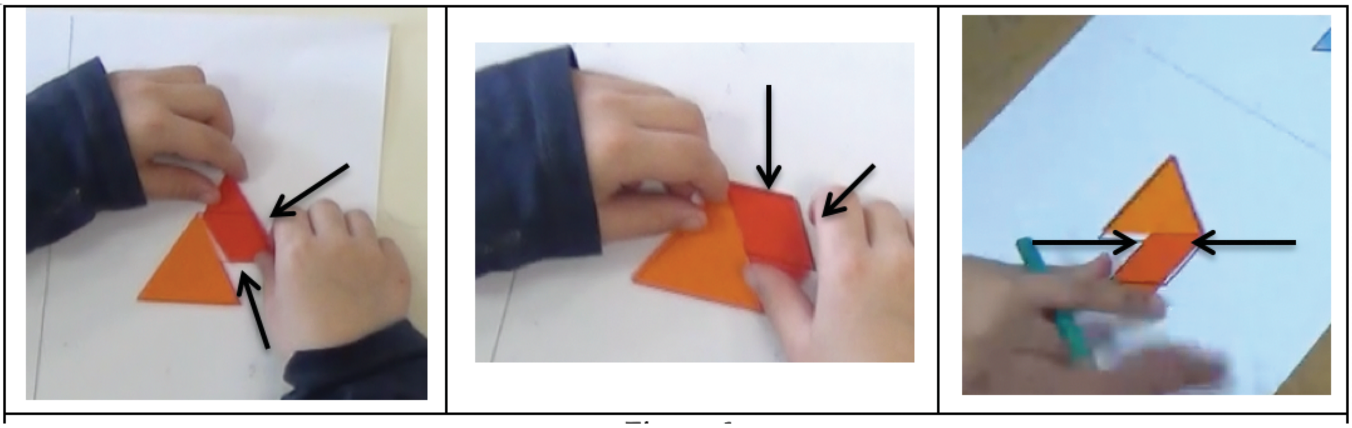


Figure 6

Enfin, positionner le triangle et le trapèze, on l'a vu, nécessite de visualiser des prolongements de bords, ce qui s'avère ne pas être évident.

Ces procédures montrent que les élèves tentent de respecter les alignements de bords de pièces sur le contour de la figure, ils ne voient pas seulement la figure en termes de surfaces mais la voient aussi en termes de contour (comme le suggère la présentation de la forme). Toutefois, ils éprouvent des difficultés à voir à quoi peuvent correspondre le triangle et le trapèze sur la forme donnée et ne se sont pas immédiatement aidés des traits intérieurs de la figure 2 (juxtaposition).

2.2 *Le dessin des assemblages*

La reproduction des assemblages montre trois manières de tracer les traits intérieurs de la figure : uniquement à main levée (figure 7), à main levée et avec les gabarits (figure 8), ou uniquement avec des gabarits (figure 9).

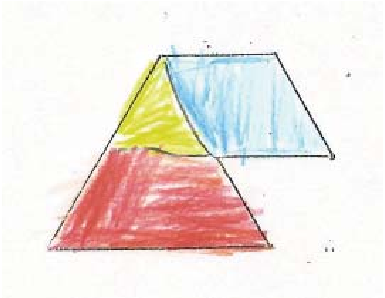


Figure 7

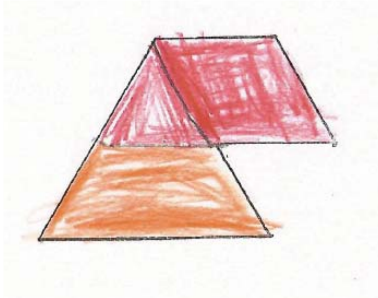


Figure 8

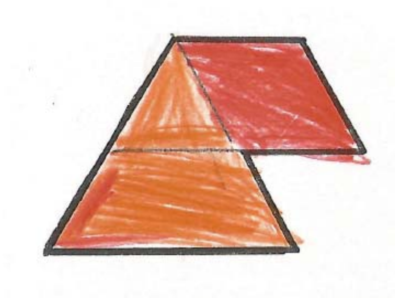


Figure 9

Le coloriage des formes nous montre deux procédures : soit les élèves superposent les couleurs et elles se mélangent (figure 8), soit ils colorient une des deux formes (surtout le trapèze) entièrement. Les élèves ont eu des difficultés à mélanger les couleurs (figure 9), pourtant nécessaire pour rendre compte de l'information : juxtaposées ou superposées. Nous pensons que le mélange des couleurs, au même titre que la superposition des formes, n'est pas une habitude scolaire.

2.3 Mise en commun et phase de verbalisation

La comparaison entre les dessins des assemblages juxtaposés et superposés a permis de mettre en exergue la différence entre les deux procédures et donc de les définir. Pendant l'analyse des formulations écrites, les interventions de l'enseignant permettent aux élèves de verbaliser et donc de conscientiser leurs actions. Ils explicitent leur procédure pour mettre en évidence les critères de réussite de la reproduction des assemblages. Ils comprennent que le coloriage et le tracé permettent de voir les formes utilisées. Pour être plus précis, le coloriage rend compte de la procédure utilisée : « quand la couleur est par-dessus » ou « que les couleurs se mélangent. », les formes ont une partie qui se superpose ; « quand les couleurs ne se mélangent pas », les formes ont été juxtaposées.

3 Prolongements

Cette séance est la première séance d'une séquence dans laquelle les élèves s'entraînent ensuite à décomposer et reproduire des formes, en les analysant en termes d'assemblages juxtaposés ou superposés. Cette dernière procédure leur permet de percevoir puis d'expliciter des prolongements de bords (segments) en d'autres bords et à matérialiser, de façon encore plus ou moins explicite, des propriétés d'alignement de sommets avec des bords.

Globalement, la comparaison des productions de nos élèves réalisées au cours des situations proposées montre leurs progrès. Ils dessinent mieux leurs assemblages. Ils tracent dans la plupart des cas tous les traits des contours intérieurs des formes utilisées. Quand les tracés des formes à l'aide des gabarits sont incomplets, il leur arrive fréquemment de prolonger les bords à main levée. Ils superposent plus volontiers les couleurs pour rendre compte de la superposition.

Sur la totalité de nos deux classes, seulement deux élèves utilisaient encore le double trait à la fin de la séquence (figure 10). Ces derniers sont dans la vision de surfaces. Les autres n'ont tracé que les traits intérieurs manquants en s'aidant du gabarit. Ils ont prolongé les bords de surfaces et sont plutôt dans une vision de ligne.

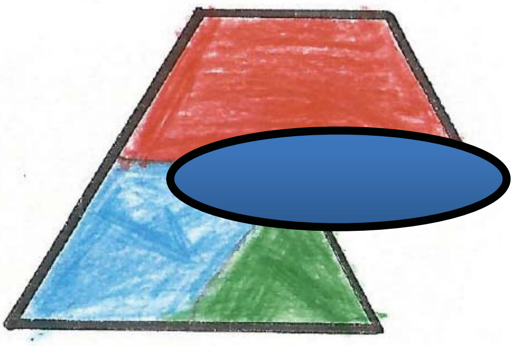


Figure 10

S'ils se rendaient compte qu'ils avaient oublié des traits, ils le complétaient le plus souvent à main levée. Cette procédure met en évidence leur capacité à tracer des traits pour prolonger des bords de formes.

Analyser une figure en termes de surfaces superposées est donc une compétence qui n'est pas innée. A l'instar du groupe de Lille, ce travail nous paraît pourtant essentiel pour faire du travail sur les formes un premier pas vers l'analyse géométrique de figures et accompagner progressivement les élèves d'un travail sur des surfaces à un travail sur des droites, des segments et des points. Cette compétence demande donc d'être enseignée et exercée. Manipuler des formes pour les assembler en les juxtaposant et en les superposant aiguise le regard des élèves sur les figures. Dessiner ces assemblages pour les reproduire, leur permet d'enrichir leur analyse des figures et de percevoir les premières propriétés de prolongement et d'alignement de lignes (segments).

III - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères IREM*, **90**, 5-14

IV - ANNEXE : POSTER

La déconstruction dimensionnelle au service des apprentissages en géométrie à l'école

Objectifs :

À partir des éléments théoriques du groupe de Lille, nous avons repensé notre travail en géométrie dans nos classes de GS et CP et enrichi la réflexion dans nos équipes d'école pour améliorer la continuité de l'enseignement de la géométrie du cycle 1 au cycle 3.

Éléments de progression

Cycles	Objectifs	Instruments	Langage	Vision de la figure
	Reconnaissance, reproduction de solides (assemblage de formes) et d'assemblage de solides, d'un point de vue global	Solides et solides à construire empreintes de solides	Des mots pour décrire l'action, les solides, les faces des solides, les assemblages de solides	Volume (3D) Surface (2D)
	Reconnaissance, reproduction de formes isolées, d'un point de vue global	Gabarit Pochoir Crayon	Réinvestir le nom des formes, Connaissances pour l'action, Des mots pour décrire l'action.	Surface (2D) Contour (1D)
	Reconnaissance, reproduction d'assemblage de formes juxtaposées, d'un point de vue global	Gabarit Pochoir Crayon	Noms des formes et des polygones Nombre de côtés Bords droits et arrondis Juxtaposition	Surface (2D) Contour (1D)
Cycle 1	Reconnaissance, reproduction de formes superposées	Gabarit Pochoir Crayon	Noms des formes et des polygones Nombre de côtés Bords droits et arrondis Juxtaposition et Superposition	Surface (2D) Contour (1D) Prolongement de bords (1D)
Cycle 2	Reproduire des figures ou assemblages de figures en identifiant des propriétés géométriques portant sur les bords des formes ou sur des « coins » particuliers	Règle informable Instruments de report de longueur Équerre	Alignement de bords Prolongement des bords pour trouver le sommet. Deux lignes qui se coupent forment un point.	Surfaces (2D) Bords (contour, segments) (1D) « Coin » (2D)
Cycle 3	Reproduire des figures ou assemblages de figures en identifiant des propriétés géométriques portant sur des segments, des droites, des points.	Règle informable Instruments de report de longueur (compas) Équerre	Alignement de bords Prolongement des bords pour trouver le sommet. Deux lignes qui se coupent forment un point. Perpendicularité / Parallélisme	Réseaux segments, droites (1D), points (0D) (intersection de lignes).

Les solides : passage de 3D à 2D

Activité 1 : Fabriquer le plus possible de solides différents.
Activité 2 : Faire les empreintes des solides.
Activité 3 : Apparier les solides et leurs empreintes.

L'élève perçoit le solide, objet de dimension 3, comme constitué de plusieurs faces, objets de dimension 2.
Il nomme les solides et les faces.

Les formes juxtaposées : passage de la 2D à la 1D

Activité : À la manière d'un défi : trouver le plus possible de façons différentes de paver le carré violet à l'aide des formes et garder une trace des solutions.

L'élève apprend à décomposer une surface en un assemblage de surfaces juxtaposées et prend conscience de différentes manières possibles de voir et de décomposer une forme.

De la juxtaposition à la superposition : un premier pas vers les prolongements de lignes et les propriétés d'alignement

Activités

Etape 1 : Les élèves doivent paver (juxtaposition) des formes à l'aide de 3 pièces et la dessiner.
Etape 2 : Ils doivent remplir des formes avec seulement 2 pièces (superposition) et la dessiner pour permettre à quelqu'un de retrouver l'assemblage produit.
Etape 3 : mise en commun et verbalisation.

Etape 1 : la juxtaposition

Etape 2 : la superposition

Etape 3 : la verbalisation

Pour remplir le contour d'une figure, on peut le faire soit en juxtaposant des formes soit en superposant moins de formes tout en ayant les mêmes traits intérieurs.

Activités

Etape 1 : trouver une superposition possible de 3 formes à partir d'un contour de figure, sans passer par une juxtaposition et produire un message écrit (dessin) pour permettre à un camarade de retrouver l'assemblage créé.
Etape 2 : reproduire un assemblage de formes à partir du dessin d'un camarade.
Etape 3 : validation entre pairs et verbalisation.

4 contours :

Etapes 1 et 2 :

Etape 3 : Validation et verbalisation

La figure est vue en termes de surfaces superposées et en termes de contours, voire de traits et d'articuler ces deux types de vision (surfaces et lignes) dans son dessin.
Travailler la superposition de formes amènent les élèves à enrichir leur analyse des figures et à percevoir de premières propriétés de prolongement et d'alignement de lignes (segments).

LECTURE ET ECRITURE AU CYCLE 3 QUEL TRAVAIL EN MATHEMATIQUES ? QUEL APPUI POUR L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ?

Christophe HACHE
Université Paris Diderot
LDAR (EA 4434) UPD URN UA UCP UPEC et IREM de Paris
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

Résumé
Depuis plusieurs années le groupe « Léo, langage, écrit, oral » de l'IREM de Paris mène une réflexion autour des questions relatives au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il expérimente diverses modalités de travail en classe en cours de mathématiques au collège (et plus ponctuellement en classe de français) : formulations et reformulations (de définitions du cours, de propriétés du cours, de démonstrations du cours ou de réponses aux exercices), écrits intermédiaires, écriture individuelle et collective, apprentissage de la compréhension de textes, rôle de l'oral… Cette communication a pour but de mettre en perspective ces expérimentations, surtout menées au cycle 4, et les propositions des programmes de cycle 3 en français et en mathématiques.

Le groupe « Léo, langage, écrit, oral » de l'IREM de Paris travaille sur les questions relatives au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il expérimente diverses modalités de travail en classe en cours de mathématiques au collège (et plus ponctuellement en classe de français) : formulations et reformulations (de définitions du cours, de propriétés du cours, de démonstrations du cours ou de réponses aux exercices), écrits intermédiaires, écriture individuelle et collective, apprentissage de la compréhension de textes, rôle de l'oral… Nous aborderons ici dans un premier temps certains points des programmes de français du cycle 3 qui font particulièrement écho aux problématiques et expérimentations travaillées par le groupe Léo. Le travail spécifique du groupe sera présenté en seconde partie. Nous conclurons en évoquant certains éléments des discussions menées autour du poster[1] liés à des perspectives pour le cycle 3.

I - LES PROGRAMMES DE FRANÇAIS AU CYCLE 3

Nous ne faisons pas une présentation exhaustive et objective des programmes. Nous nous centrons essentiellement sur deux entrées[2] : l'écriture d'une part, et la lecture et l'apprentissage de la compréhension de texte d'autre part. Cette présentation a pour but à la fois d'éclairer les expérimentations du groupe présentées dans la partie II, et de susciter une prise de recul et un questionnement concernant la prise en compte des problématiques liées à la langue dans l'enseignement des mathématiques : les élèves lisent et écrivent en mathématiques, comment cette dimension de leur activité est-elle travaillée en français ? Peut-elle l'être en mathématiques ? Comment ? Quelles questions le programme de français pose-t-il aux pratiques usuelles en cours de mathématiques ?

1 Enseigner l'écriture

Le programme fixe le cadre que précisent les documents d'accompagnement :

> « Au cycle 3, les élèves affirment leur posture d'auteur et sont amenés à réfléchir sur leur intention et sur les différentes stratégies d'écriture. Les situations de réécriture et de révision menées en classe prennent toute leur

[1] Le poster correspondant au présent texte est en annexe (V) et disponible en ligne (Hache, 2017).

[2] Et nous relevons, dans chaque cas, des points clefs qui seront repris dans la partie II.

place dans les activités proposées. (…) Chaque élève peut ainsi devenir progressivement un acteur conscient et autonome de ses productions » (P 2016[3], p110)

Cette idée d'élève en posture d'auteur, acteur conscient et autonome de ses productions, est précisée par les documents ressources.

« Pour pouvoir revenir sur son texte et le réécrire, il faut être capable de réfléchir sur ses productions, de les mettre à distance, de les comparer avec d'autres, d'avoir un regard critique, un véritable regard d'auteur conscient des effets produits, des échecs ou des réussites de son travail » (F3E1 2016, p3)

« La validation des textes par des pairs en présence du scripteur est au moins aussi efficace que l'appréciation par l'enseignant. Si l'élève a éprouvé en tant que lecteur un sentiment positif, il cherchera à le faire éprouver à son tour à ses camarades, ce qui devrait modifier son rapport à l'écriture. Si les moyens utilisés pour obtenir ces effets positifs sont mis en valeur et font l'objet d'une explicitation, l'élève les emploiera avec une réelle intention. Cela peut lui permettre de construire à terme une « posture d'auteur ». Il est donc important que les textes circulent et soient communiqués aux pairs pour qu'ils en éprouvent les effets. (…) Ils construisent ainsi un nouveau rapport à l'écrit, dépassent les premières appréhensions, pour éprouver un plaisir certain à écrire pour être lu » (F3E5 2016, p2)

Un document est consacré à l'importance, dans l'activité d'écriture, du travail de réécriture.

« Concevoir l'écriture comme une compétence qui se construit par l'amélioration des textes et des retours réflexifs sur les productions nécessite de repenser le rôle attribué à la réécriture » (F3E6 2016, p1)

Certains éléments du programme font des liens explicites avec les autres disciplines. Il s'agit ici de sciences expérimentales, mais la situation décrite est comparable à celle de la recherche d'une conjecture, ou de la formulation collective d'une propriété mathématique :

« L'élève doit ici synthétiser ce que la classe doit retenir à l'issue de cette démarche d'investigation. Cet écrit de synthèse peut être individuel. C'est à partir de ce travail que sera établie la synthèse collective validée. Une fois cette synthèse établie, il est important que (le professeur) permette à chaque élève de reformuler, avec ses propres mots et supports, la synthèse collective validée » (F3E2b 2016, p2)

Citons enfin quelques mots sur l'écriture « pour penser » :

« Écrire, c'est, dans certains cas, mettre au travail la pensée, c'est lui permettre de se développer et de s'organiser » (F3E2 2016, p1)

« [L'écriture a] une fonction de communication avec soi-même : écrire mot après mot, phrase après phrase, oblige à préciser sa pensée, à l'affiner, à l'identifier comme sienne pour pouvoir la confronter à celle des autres » (F3E2b 2016, p2)

1 Lecture et compréhension de l'écrit

Pourquoi apprendre à comprendre un texte ?

« La nouveauté de ces programmes réside en grande partie dans l'affirmation de la nécessité d'un enseignement explicite de la compréhension, ce qui implique la mise en place de stratégies identifiées. Au même titre que la lecture, enseignée de façon explicite, la compréhension peut et doit s'enseigner. Lire c'est résoudre des problèmes posés par le texte. Les élèves ont donc besoin de découvrir, d'élaborer et d'expérimenter des stratégies adéquates qu'ils automatiseront par la suite. (…) Quelques principes liminaires : (…) il s'agit avant tout de former des lecteurs fluides et stratèges, ce qui implique de développer en même temps les capacités réflexives d'auto-évaluation, de régulation et les automatismes de la compréhension (…) [C'est un travail qui] suppose un enseignement explicite, structuré et différencié. (…) La compréhension peut se définir comme la capacité à construire, à partir du texte et des connaissances antérieures, une représentation mentale cohérente de la situation évoquée par le texte. Le fait de percevoir et de comprendre les mots et les phrases du texte ne constitue qu'une étape transitoire de ce processus » (F3L1 2016, p1)

[3] Les documents officiels sont codés dans le texte (« P 2016 » pour les programmes, « F3E2 2016 », « F3E5 2016 », etc. pour les documents ressources), les références précises sont indiquées en fin de texte (partie IV - 2).

L'enseignement est donc explicite.

> « L'enseignement de stratégies passe donc par l'explicitation, la prise de conscience de l'élève et la mise en œuvre délibérée des procédures à travers leur verbalisation, mais aussi la discussion, l'argumentation et le débat. Cela implique également un étayage fort fourni aux élèves. Celui-ci doit les aider à maîtriser progressivement les habiletés visées ; il peut prendre la forme d'aides techniques telles que des supports graphiques, des aides mémoire, des mots-signaux, mais il peut aussi consister en des aides apportées directement par l'enseignant » (F3L4 2016, p2)

La compréhension de texte se joue à plusieurs niveaux (local, au niveau des mots, des phrases, et plus global, construction progressive, et évolutive, d'une représentation mentale de l'ensemble du texte). Le lecteur doit être capable de

> « évaluer régulièrement sa compréhension et chercher à remédier aux difficultés qu'il détecte. Son échec cognitif provisoire (lorsqu'il ne comprend pas ce qu'il vient de lire) peut être compensé par une habileté métacognitive : engager des activités stratégiques pour résoudre le problème posé (revenir en arrière, reformuler un passage, chercher à surmonter une incohérence, construire des synthèses intermédiaires, accorder plus d'attention aux parties qui semblent ardues, etc.) » (F3L1, p3)

II - ÉCHOS AVEC LES EXPERIMENTATIONS DE LEO

1 Formulation, reformulation de définitions, de propriétés (et autres)

Une première série d'expérimentation est regroupée sous le titre « formulations et reformulations ». Un document de présentation a été mis en ligne (Hache 2016), pour plus de précision il sera nécessaire de s'y reporter. Ces expérimentations ont pour point commun de faire formuler aux élèves (avec l'enseignant.e), collectivement, les définitions et théorème du cours, et des démonstrations (du cours ou relatives aux exercices), de faire travailler les élèves sur des formulations existantes ou proposées par des pairs. Les modalités de travail sont variées.

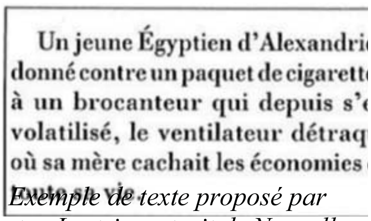
L'objectif est à la fois d'obtenir des formulations mieux comprises par les élèves, et, par là même, les objets considérés et leurs propriétés, mais aussi de produire une réflexion sur la nécessité des contraintes de formulation en mathématique (et les libertés : il n'y pas une seule façon de rédiger la définition du milieu d'un segment par exemple).

2 Compréhension de textes en maths et en français

Une expérimentation a été menée en 6e autour de l'apprentissage de la compréhension de texte[4]. Il s'agissait, en séances d'« aide personnalisée », de faire travailler les élèves sur la lecture de texte en explicitant les processus en jeu dans la compréhension, ceci dans des contextes de mathématiques ou de français.

Le support essentiel était le manuel Lector-Lectrix (Cèbe et Goigoux, 2009). Certains documents du Réseau des observatoires locaux de la lecture[5] ont aussi été utilisés.

Il s'agissait lors des séances successives d'expliciter par exemple la notion de représentation mentale (se faire un film) et de faire dire aux élèves si ce qu'ils disaient à propos du texte était « dans le texte » (dans une phrase ? Dans plusieurs phrases en faisant des recoupements ?) ou « dans ma tête » (à partir de quelque chose dans le texte ? Seulement dans ma tête ?). Un travail est fait en prolongement sur la compréhension, mais aussi sur la mémorisation, sur le remplissage d'un tableau à partir des informations d'un texte (texte contenant des données numériques de différents type), sur la confection de graphiques (textes présentant des personnes se déplaçant d'un point à un autre à des vitesses différentes).


Un jeune Égyptien d'Alexandri
donné contre un paquet de cigarett
à un brocanteur qui depuis s'
volatilisé, le ventilateur détraq
où sa mère cachait les économies
toute sa vie

Exemple de texte proposé par Lector-Lectrix, extrait de Nouvelles en trois lignes de Félix Fénéon

[4] Le lecteur pourra se reporter aux documents de travail proposés lors de stages de formation : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/documents_du_stage_maths_et_francais_2016-2017

[5] Roll : http://roll-descartes.net/

3 Dictées et phrases du jour

L'objectif est ici également de porter une réflexion sur les pratiques langagières en mathématiques, les formulations, le symbolisme, etc. À partir d'un protocole, « phrases du jour », proposé par Danièle Cogis (Cogis, 2015), nous avons expérimenté[6] la modalité de travail suivante : l'enseignant dicte une phrase mathématique ; les élèves l'écrivent individuellement, puis se mettent d'accord à deux ou en petits groupes sur une formulation, la séquence se termine par une présentation des productions et une discussion dont le but est de discuter la graphie correcte, d'expliciter les sources d'éventuelles erreurs, d'ambiguïtés, etc. Une fois les élèves habitués à la démarche, le travail peut aussi être fait sous forme de « question flash » en début d'heure (sans la phase intermédiaire en petit groupe). Exemple de phrases dictées :

- « A est le milieu de $B\ C$ ». Réponse écrite attendue « A est le milieu de $[BC]$ », on pourra faire remarquer qu'il y aurait moins d'implicite avec la phrase dictée « A est le milieu du segment $B\ C$ », ou « le point A est le milieu du segment $B\ C$ ».
- « Le double de 7 plus 1 », deux réponses sont acceptables (15, quatorze plus un, ou 16, le double de huit) ce qui permet de discuter, pour l'écriture des calculs, de la nécessité des règles de priorité et du rôle du parenthésage, et d'aborder la question des formulations orales des calculs.
- Ce type d'exercices peut se prolonger sans difficulté avec le calcul algébrique. Une fois l'usage des mots « somme », « produit », etc. stabilisé on peut dicter « le carré de x plus un » (« $x^2 + 1$ » ou « $(x + 1)^2$ » ?) ou demander une façon de formuler oralement « $(3x + 1)^2$ ». Ce type de travail permet de préparer le travail sur la factorisation ou le développement en faisant travailler aux élèves l'identification d'une expression algébrique comme une somme ou comme un produit.

III - CYCLE 3, PERSPECTIVES EN MATHEMATIQUES

Dans la première partie du cycle 3 il est intéressant de souligner que les enseignements de français et de mathématiques sont assurés par la même personne. Le levier interdisciplinaire est donc plus directement mobilisable. On a vu aussi que certains dispositifs existant en 6e facilitent un travail commun mathématiques – français (cf. II - 2).

Certains des travaux présentés ci-dessus sont spécifiques du cycle 4 : la preuve (raisonnement hypothéco-déductif), le statut des définitions (caractérisations mathématiques) et des propriétés donnent au travail sur la langue un aspect particulier (formulation à l'aide de la langue naturelle de propriétés formelles[7]).

Le travail réflexif et collectif sur la langue, qui caractérise les expérimentations décrites ci-dessus (cf. II), doit cependant être initié très tôt en français (cf. I), mais aussi en mathématiques. Au-delà de celles décrites ci-dessus, les discussions autour du poster ont permis d'évoquer certaines situations classiques qui peuvent donner lieu à ce type de travail : situation de figure téléphonée et de programme de construction peuvent être l'occasion de débats sur l'efficacité (ou l'ambiguïté) de certaines formulations ou notations, pouvant aller jusqu'au travail explicite sur un langage technique géométrique (voir Petitfour, 2015) ; on peut aussi imaginer un travail riche sur les formulations des algorithmes de calculs correspondant aux quatre opérations par exemple.

IV - REFERENCES

1 Bibliographie

CEBE S. et GOIGOUX R. (2009) *Lector & Lectrix, Apprendre à comprendre des textes narratifs - CM1 - CM2 - 6e – Segpa*, Retz édition. Introduction disponible en ligne :
http://extranet.editis.com/it-yonixweb/images/322/art/doc/a/a3b590826a16e735313537313331353037393337.pdf

COGIS D. (2005). *Pour enseigner et apprendre l'orthographe*, Delagrave

[6] Là aussi un document élaboré dans le cadre de formations est en ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Leo-Phrase%20du%20jour-201701.pdf

[7] Voir par exemple Hache 2013 et Hache et Mesnil 2017. Voir aussi le document d'accompagnement M4MML 2016.

HACHE C. (2013), Langage mathématique à la transition primaire / collège, in *Actes du 39e colloque de la Copirelem, juin 2012*, pp 452-463, Copirelem, Quimper
http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/87/01/11/PDF/CH-Quimper-jun2012-Texte-6.pdf

HACHE C. (Coord.) (2016) *Formuler, reformuler*, IREM de Paris, document en ligne
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Leo-FP-Reformulation.pdf

HACHE C. (2017) *Lecture et écriture au cycle 3. Quel travail en mathématiques ? Quel appui pour l'apprentissage des mathématiques ?* Poster au colloque Copirelem, juin 2017
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Leo-201706-Poster-Copirelem.pdf

HACHE C. et MESNIL Z. (2017) Pratiques langagières et preuves, in *Actes du 22e colloque de la CORFEM, juin 2015*, Nîmes https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116v1

PETITFOUR E. (2015) Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques visuospatiaux inclus en classe ordinaire, *Recherches en éducation,* **23**,
http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no23.pdf

2 Documents officiels

[P 2016] Programmes pour les cycles 2, 3 et 4, bulletin officiel de l'éducation nationale, numéro spécial n°11 du 26 novembre 2015. http://cache.media.education.gouv.fr//file/MEN_SPE_11/01/9/2015_collegeprogramme_28-7_614019.pdf

[F3E1 2016] Enseigner l'écriture, quelques principes. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/06/6/1_RA_C3_Francais_Ecriture_Quelques_principes_591066.pdf

[F3E2 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, recourir à l'écriture pour réfléchir et pour apprendre : les écrits de travail. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/06/9/2_RA_C3_Francais_Ecriture_ECRITS_DE_TRAVAIL_591069.pdf

[F3E2b 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, recourir à l'écriture pour réfléchir et pour apprendre : les écrits de travail. Des écrits qui rythment la démarche d'investigation. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/Ecriture/08/1/8_RA_C3_Francais_Ecriture_Investigation_591081.pdf

[F3E3 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, un entraînement régulier. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/08/7/11_RA_C3_Francais_Ecriture_GAMMES_591087.pdf

[F3E5 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, évaluer autrement les écrits scolaires. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/09/7/15_RA_C3_Francais_Ecriture_EVALUER_591097.pdf

[F3E6 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, réécrire : principes et tactiques. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/10/3/18_RA_C3_Francais_Ecriture_REECRIRE_591103.pdf

[F3E7 2016] Enseigner l'écriture au cycle 3, prendre en compte les normes de l'écrit. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ecriture/93/8/17_RA_C3_Francais_Ecriture_norme_ecrit_591938.pdf

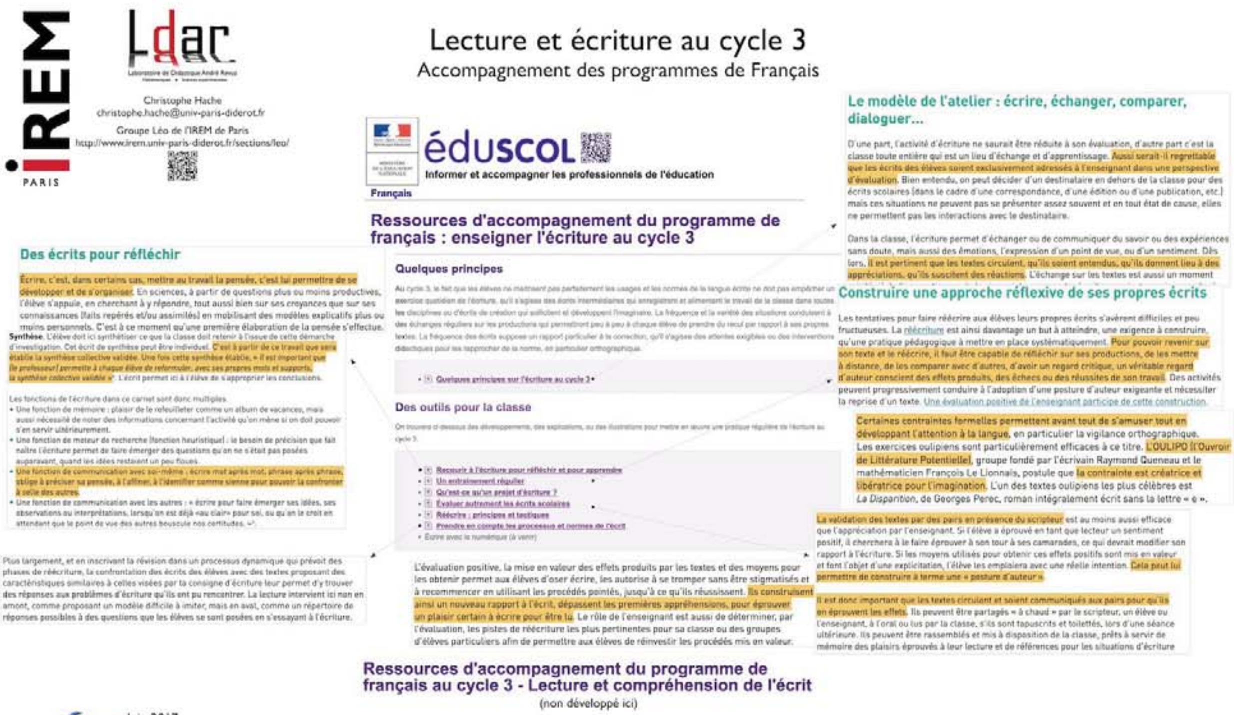
[F3L1 2016] Lecture et compréhension de l'écrit au cycle 3 : enjeux et problématiques. Pourquoi enseigner la compréhension ? Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Lecture_Comprehension_ecrit/86/3/RA16_C3_FRA_01_lect_enj_ens_N.D_612863.pdf

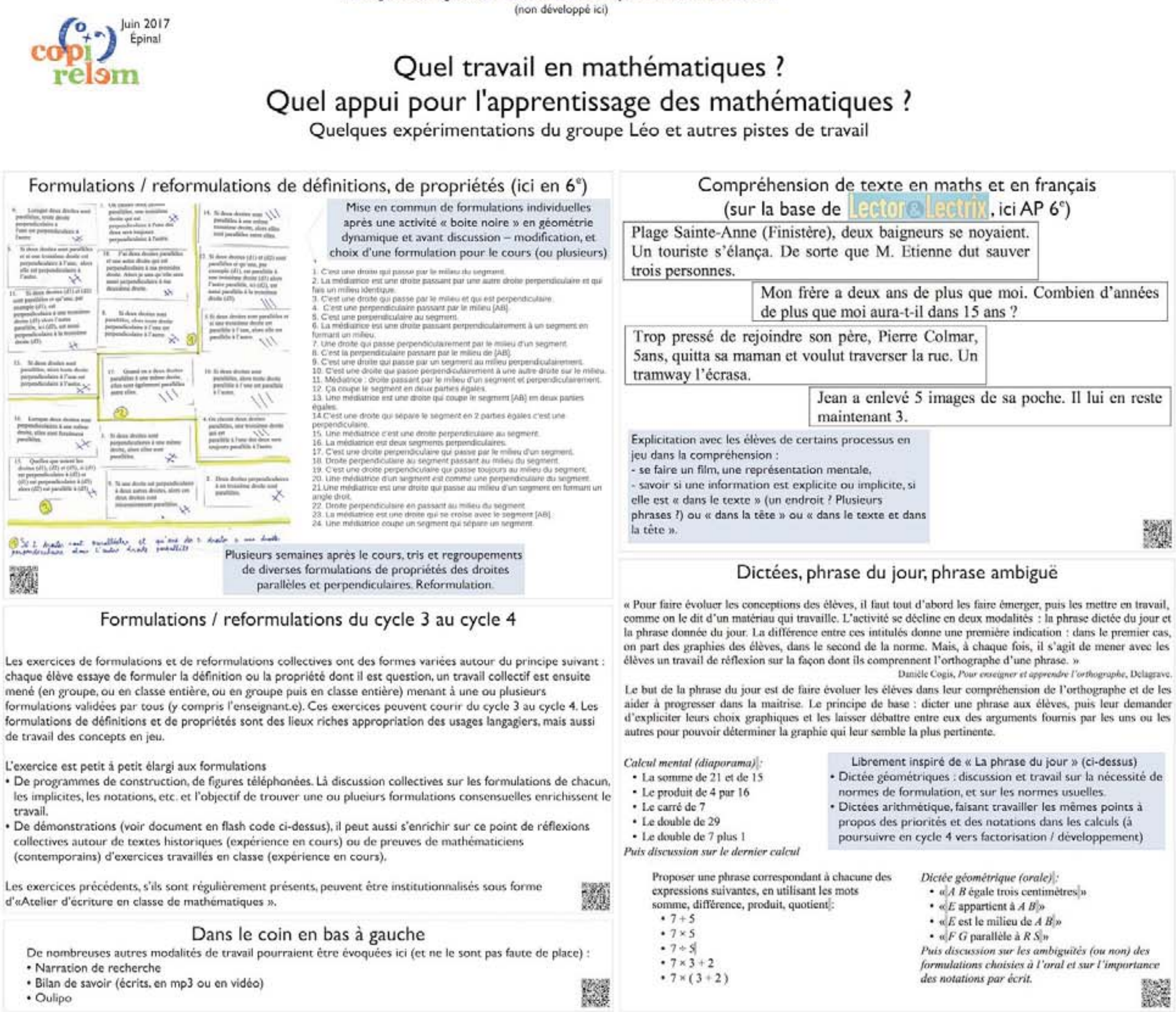
[F3L4 2016] Lecture et compréhension de l'écrit au cycle 3 : comprendre différents types de textes. Les stratégies de compréhension. Eduscol, maurs 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Lecture_Comprehension_ecrit/87/6/RA16_C3_FRA_04_lect_comp_strat_N.D_612876.pdf

[M4MML 2016] *Mathématiques et maîtrise de la langue*. Eduscol, mars 2016.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/6/RA16_C3C4_MATH_math_maitr_lang_N.D_600996.pdf

V - ANNEXE, LE POSTER PRESENTE

Lien dans la bibliographie (Hache 2017).





Titre : Actes du 44e Colloque de la COPIRELEM
Épinal les 13, 14 et 15 juin 2017

Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

Auteurs : Conférenciers, orateurs de communication et animateurs d'atelier du Colloque, COPIRELEM

Mots clés : Formation des enseignants, didactique des mathématiques, situation de formation, sémiotique

Dépôt légal : Juin 2018

Nombre de pages : 598

Éditeur : ARPEME

ISBN : 978-2-917294-20-8

EAN : 9782917294208

Public Concerné : Formateurs de mathématiques chargés de la formation des professeurs des écoles

Résumé : Ce document contient les textes des conférences de Teresa Assude, Caroline Bulf, Anne-Cécile Mathé et Cristina Sabena, ainsi que les textes des ateliers et communications du colloque.