Liste des communications

C11	**Présentation du LéA Saint Charles. Mise en œuvre d'une ingénierie de la soustraction.**	Céline GIORDANO Karine MILLON-FAURÉ
C12	**Coopération entre professeurs d'école et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique concernant les premiers apprentissages numériques.**	Mireille MORELLATO Dominique TRUANT
C13	**Étude des effets d'une formation d'initiation à la recherche sur la dynamique du développement des pratiques de professeurs des écoles stagiaires.**	Brigitte GRUGEON-ALLYS Julie HOROKS Monique CHARLES-PÉZARD Julia PILET
C14	**Penser le travail mathématique en formation des maîtres.**	Alain KUZNIAK
C15	**Une ressource à restaurer : un usage commun des mots grandeur, quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal, etc.**	Rémi BRISSIAUD
C16	**Une ressource pour enseigner la numération décimale de position. Des apports essentiels pour la formation des enseignants.**	Frédérick TEMPIER
C21	**Recherche collaborative : questions d'intégration d'une ingénierie didactique broussaldienne aux pratiques enseignantes.**	Michèle COUDERETTE Valérie MARROU Carine CONSTANT Anne ICHES
C22	**La narration d'un jeu de tâches : une ressource pour la formation des enseignants primaires ?**	Christine DEL NOTARO,
C23	**Quelles ressources les enseignants utilisent-ils afin de trouver des énoncés de problèmes ouverts en mathématiques au cycle 3 ?**	Christine CHOQUET
C24	**Enseigner les mathématiques avec des écoliers non ou peu francophones.**	Catherine MENDONÇA DIAS
C25	**Mallettes de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1- cycle 2.**	Laetitia BUENO-RAVEL Pierre EYSSERIC Gwenaëlle RIOU-AZOU Sophie SOURY-LAVERGNE
C26	**Analyse de la programmation mathématique au CP de six professeurs d'école.**	Aline BLANCHOUIN
C27	**Quoi de neuf dans la numération au CP ? Une nouvelle ressource pour la classe.**	Eric MOUNIER Nathalie PFAFF,
C28	**Quels critères de validité, quelle appropriation par les enseignants de ressources issues de recherches en didactique ?**	Jacques DOUAIRE Fabien EMPRIN

LE LEA SAINT CHARLES PRESENTATION D'UNE INGENIERIE SUR LA SOUSTRACTION

Céline GIORDANO
PEMF école St Charles 1, l'ESPE Marseille
EA ADEF 4671 Aix-Marseille Université
giordano.celine@neuf.fr

Karine MILLON-FAURE
Chargée d'étude à l'IFE
EA ADEF 4671 Aix-Marseille Université
karine.MILLON-FAURE@univ-amu.fr

Résumé
Dans cette communication à deux voix, nous nous intéressons à l'usage qui peut être fait des ingénieries didactiques non seulement dans le cadre de la recherche mais également pour la formation des enseignants. Après nous être interrogés sur la finalité de certaines ingénieries didactiques, nous présentons les Lieux d'Éducation Associés (LéA) encadrés par l'Institut Français de l'Éducation (IFE) et nous cherchons à montrer l'intérêt que ce dispositif peut présenter à la fois pour les chercheurs et pour les enseignants. Pour illustrer ce point de vue, nous nous focalisons sur un exemple particulier, le LéA Saint Charles, dans lequel nous travaillons toutes deux depuis plusieurs années, et nous détaillons une des réalisations que cette collaboration entre enseignants et chercheurs a permise : une ingénierie didactique sur l'enseignement de la soustraction au CE1. Nous étudions alors l'activité mathématique que cette forme d'enseignement a impulsée dans la classe ainsi que le point de vue de l'enseignante en charge de la classe, afin de mieux comprendre quels ont pu être les changements provoqués par la mise en place de ce dispositif, notamment du point de vue des possibilités d'apprentissage des élèves. Ceci nous amène à nous interroger sur l'intérêt que ce LéA peut représenter non seulement pour les didacticiens, mais également pour les enseignants qu'ils soient ou non associés à cette collaboration.

I - INTRODUCTION

En lien avec la problématique du colloque qui s'intéressait aux ressources susceptibles d'enrichir les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves, nous questionnons dans cette communication, le rôle que pourraient jouer sur ce point les didacticiens. C'est pourquoi nous interrogeons dans une première partie les finalités de certaines ingénieries didactiques emblématiques et nous étudions les obstacles qui peuvent freiner la diffusion de ces ressources auprès des enseignants. Nous présentons ensuite un dispositif soutenu par l'Institut Français de l'Education et qui repose sur la collaboration entre enseignants et chercheurs : le LéA St Charles. L'objectif de ce LéA est de réfléchir à l'amélioration de l'enseignement de la numération et du calcul à l'école primaire en concevant des scénarios de séances susceptibles d'accroître les possibilités d'apprentissage des élèves. Nous illustrerons notre discussion en détaillant une de ces réalisations : une ingénierie de la soustraction au CE1. Après en avoir expliqué les différentes étapes, nous montrons, en nous appuyant sur des travaux d'élèves, en quoi l'usage de cette ingénierie peut enrichir les pratiques enseignantes et améliorer les apprentissages. Ceci nous amènera enfin, à statuer sur l'intérêt que peut représenter le LéA St Charles, d'une part pour les recherches en didactique, mais également pour la production de ressources susceptibles d'être diffusées auprès des enseignants ordinaires.

II - IMPACT DES INGENIERIES DIDACTIQUES SUR L'ENSEIGNEMENT ORDINAIRE

1 Les finalités des ingénieries didactiques

Artigue (1990) définissait les ingénieries didactiques comme étant « un schéma expérimental basé sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation et l'analyse de séquences d'enseignement.» (Artigue, 1990, pp. 285-286). Brousseau (2008) précise que « l'ingénierie didactique consiste à déterminer des dispositifs d'enseignement communicables et reproductibles ». Il s'agit donc de la conception par des didacticiens de scénarios, plus ou moins longs, qui sont ensuite expérimentés dans des classes et analysés par les chercheurs. Ceci souligne la dialectique de l'aspect recherche et expérimentation mise en œuvre dans les ingénieries didactiques.

Les premières ingénieries ont été créées dès les années 70 au COREM, sous la direction de Guy Brousseau. Le COREM était formé de chercheurs mais également de professeurs des écoles qui mettaient en place les ingénieries conçues par les didacticiens et contribuaient à l'analyse des séances. Beaucoup d'autres ingénieries ont vu le jour depuis, avec quelques variantes. Citons par exemple les ingénieries de Grenier (1988), de Perrin-Glorian (1992), mais également les parcours d'étude et de recherche de Chevallard (2009 et 2011). De nombreux scénarios, s'appuyant sur des principes issus de recherches en didactiques ont ainsi été créés, puis expérimentés en classe. Les analyses a posteriori de ces séances ont généralement permis de mettre en évidence la richesse de l'activité mathématique auxquelles ces ingénieries didactiques donnaient accès.

Il ne faut toutefois pas croire que l'objectif de toutes ces ingénieries didactiques était de créer des scénarios susceptibles d'améliorer l'enseignement dans les classes, comme le précise Chevallard (2011) :

> « On pourrait distinguer ici, d'emblée, une ingénierie didactique de recherche d'une ingénierie didactique de développement. On saisit en tout cas l'existence d'une tension entre deux pôles, que je désignerai, provisoirement, comme l'ingénierie didactique pour l'usage et l'ingénierie didactique pour la connaissance, tension bipolaire qui existerait donc, à suivre Guy Brousseau, à l'intérieur même de ce qu'il nomme 'l'ingénierie à visée phénoménotechnique' » (Chevallard, 2011).

Perrin-Glorian (2009) distingue également les ingénieries « construites par la recherche et pour la recherche » et celles pour l'enseignement. Les ingénieries du COREM faisaient notamment partie des

ingénieries didactiques pour la recherche puisque Brousseau s'est appuyé sur ces observations pour concevoir la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Son objectif, n'était pas d'améliorer de manière directe l'enseignement mais plutôt d'obtenir des observations nécessaires à ses recherches sans toutefois empêcher qu'enseignant et élèves n'atteignent les objectifs fixés par l'institution : « Dans le cadre des recherches scientifiques, l'ingénierie à visée phénoménotechnique a pour objet de concilier les obligations normales de tout enseignement à des élèves avec la reproduction et l'étude de phénomènes didactiques bien déterminés. » (Brousseau, 2008, p.3)

Pour ces chercheurs, les ingénieries didactiques constituent avant tout un moyen incontournable d'éprouver leurs théories. Ainsi Brousseau disait : « [l'ingénierie didactique] est indispensable pour étudier systématiquement et expérimentalement des modèles théoriques de dispositifs d'apprentissage et d'enseignement (les situations). » (Brousseau, 2008, p.3). De même, citant Chevallard (préparation à la 2e école d'été 1982), Artigue (2011) insistait sur « l'incapacité où nous nous trouvons étant donné le faible développement de notre théorie du système didactique et par conséquent la faiblesse du contrôle par la théorie des opérations de recherche de rencontrer notre objet de connaissance autrement que sous les espèces ou du moins hors du contrôle 'empirique' de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe» (Artigue, 2011, p.19). Nous voyons donc que pour beaucoup de didacticiens une ingénierie didactique a pour finalité première de permettre une avancée dans ses recherches. Dans ces conditions, on peut se demander si elles ont également pu être reprises dans les classes ordinaires afin de permettre un enrichissement des pratiques.

2 Diffusion des ingénieries

Au de-là de son utilisation par le chercheur qui l'a conçue, que devient ensuite une ingénierie didactique ? On peut constater que plusieurs d'entre elles jouissent d'une assez bonne diffusion auprès des autres chercheurs : tout didacticien, ou presque, a entendu parler de 'rationnels et décimaux' et de 'la course à 20' de Brousseau (1987 et 1998 respectivement). La diffusion auprès des enseignants par contre, se révèle beaucoup plus difficile. Ces ingénieries ne sont quasiment jamais reprises dans les classes ordinaires et on peut regretter que tout ce travail de recherche ne soit pas également utilisé par les praticiens.

Plusieurs raisons peuvent être évoquées pour expliquer cette réticence des enseignants à s'emparer du travail des chercheurs :

Certains reprochent notamment aux didacticiens de ne pas suffisamment prendre en compte les contraintes pratiques auxquelles ils doivent faire face et donc de concevoir des activités très difficiles voire impossibles à mettre en place dans des classes ordinaires.

Par ailleurs, la mise en place d'une ingénierie didactique va généralement nécessiter une réelle remise en cause de l'enseignant. Il va devoir transformer ses pratiques : modifier par exemple sa gestion de classe en travaillant davantage en groupe, en laissant les élèves manipuler plus souvent, faire davantage confiance au potentiel d'apprentissage des élèves en étant à certains moments, moins directif. On ne peut pas mettre en place une ingénierie didactique de la même manière qu'une activité d'un manuel ordinaire.

Troisième point important qui peut expliquer la faible diffusion des ingénieries didactiques auprès des enseignants : les difficultés de communication entre chercheurs et professeurs. Brousseau disait : « Alors que la description [des phénomènes didactiques] demande des efforts considérables, toutes ces précisions apparaissent comme superflues et même offensantes pour le lecteur, elles sont reçues comme un discours de cuistre. […] En résumé, les enseignants attendent la didactique sur un terrain où ils règnent en 'maîtres' (c'est bien le mot) et où rien ne les prépare ni les motive à la recevoir pour ce qu'elle est. » (Brousseau, 1990)

Ainsi, les didacticiens fournissent des précisions jugées inutiles, voire même offensantes par les professeurs mais oublient certaines informations pratiques que les enseignants jugent indispensables à l'appropriation de ces ingénieries. Il y a donc réellement un problème de communication entre chercheurs et praticiens.

III - LE LEA SAINT CHARLES

1 Les lieux d'Education Associés

C'est certainement la raison pour laquelle les ingénieries collaboratives se développent actuellement et notamment les LéA. Les LéA – Lieux d'éducation associés - ont été créés par l'IFE (Institut Français de l'Education) en 2011. Cette formule a remporté un certain succès puisqu'il y a à ce jour 31 LéA établis et beaucoup d'autres en cours de création. Parmi ces LéA, un seul porte sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il s'agit du LéA Saint Charles dans lequel nous travaillons toutes deux depuis plusieurs années.

Quelles sont les caractéristiques de ces LéA ? Trois points nous paraissent importants et nous laissent penser que les LéA permettront de surmonter les difficultés précédemment évoquées concernant la diffusion des ingénieries didactiques auprès des enseignants :

- tout d'abord, le LéA est défini dès le départ comme une collaboration entre enseignants et chercheurs, collaboration qui nécessitera la mobilisation des compétences propres à chacune des instances. Ainsi est reconnu l'intérêt de l'expertise des enseignants qui va permettre une meilleure prise en compte des contraintes pratiques.

- deuxième point, cette collaboration s'inscrit dans un temps long. Il ne s'agit plus de demander à un enseignant de mettre en place une ingénierie ponctuelle durant une ou deux séances. Enseignants et chercheurs s'engagent à travailler ensemble pendant plusieurs années. A partir de là, des habitudes de travail vont pouvoir s'installer. La communication va s'améliorer, chacune de ces deux instances apprenant progressivement à connaître l'autre : peu à peu l'enseignant acquerra quelques appuis théoriques lui permettant de mieux appréhender les analyses didactiques qui accompagnent les scénarios d'ingénieries et le chercheur aura une meilleure vision des contraintes pratiques de l'enseignement.

- enfin, l'objectif est clairement double : il doit s'agir d'ingénierie de recherche *et* de développement. L'équipe dans son ensemble s'engage à ce que le fruit de son travail puisse être exploitable à la fois pour la recherche en didactique mais également pour la formation des enseignants. Chaque instance a donc quelque chose à gagner dans cette collaboration.

Comme le disaient Monold-Ansaldi & Favelier (2013) : « Plus que de recherches « sur » l'éducation, il s'agit de recherche « avec » les acteurs, « pour » le développement des acteurs, de la profession, de l'institution… ». Dans le même ordre d'idée, Sensevy (2013) ajoutait :

> « Une assertion synthétique pourrait être la suivante : contre la dichotomie recherche fondamentale/recherche appliquée, les LéA permettent une recherche fondamentale de meilleure qualité parce qu'en meilleure articulation avec l'objet même de la recherche, c'est-à-dire l'apprentissage des élèves à travers l'enseignement des professeurs. » (Sensevy, 2009, p.2)

2 Etude d'un cas particulier

Pour mieux comprendre le fonctionnement d'un LéA, nous allons parler à présent d'un LéA particulier : Le LéA St Charles. Ce projet a été initié en 2010 et il est devenu en 2011 l'un des premiers LéA. Il s'agit d'une collaboration entre des chercheurs de l'IFE et tous les enseignants d'une école primaire de Marseille : l'école St Charles.

Nous travaillons sur des ingénieries réécrites par Serge Quilio à partir des travaux de Guy Brousseau et qui portent toutes sur l'enseignement du numérique à l'école primaire. Ainsi nous réfléchissons à l'enseignement des nombres et des algorithmes opératoires pour chaque classe : notamment l'ingénierie sur la soustraction au CE1, qui sera plus longuement présentée par la suite.

Cela demande de la part des chercheurs un accompagnement de la mise en place des ingénieries. Il ne s'agit pas seulement de donner aux enseignants les scénarios de nos ingénieries mais de réfléchir aux contraintes pratiques, de répondre à leurs questions… Nous filmons ensuite la plupart des séances et nous analysons ces vidéos.

À partir de ces analyses et du vécu de la séance, enseignants et chercheurs repèrent d'éventuels problèmes, réfléchissent à de possibles améliorations. Ces échanges peuvent avoir lieu par mails, par téléphone, au cours d'entretiens individuels ou de réunions d'équipe. Il y a donc au sein de ce LéA, des interactions riches et régulières entre enseignants et chercheurs. Ensemble nous imaginons des améliorations de nos ingénieries que nous expérimentons l'année suivante. C'est là l'un des intérêts de travailler sur un temps long.

IV - ANALYSE D'UNE DES INGENIERIES DIDACTIQUES CONÇUE DANS LE LEA SAINT CHARLES

Cette partie a pour objectif de montrer en quoi l'ingénierie de la soustraction constitue une ressource didactique dont l'usage peut enrichir les pratiques de l'enseignant et améliorer les apprentissages des élèves. Après un bref rappel des Programmes Officiels de 2008, la démarche générale de l'ingénierie est exposée. Puis, un moment crucial, à savoir la construction du modèle théorique des problèmes soustractifs, sera développé.

1 Rappel du Programme Officiel (2008)

Dans le domaine Nombres et calcul, le Programme Officiel de 2008 indique p. 18 :

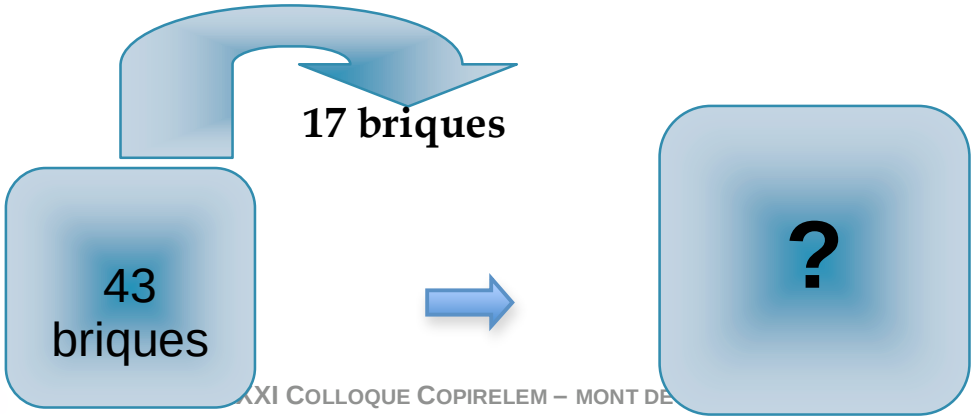
> « [les élèves] mémorisent les tables d'addition, […] apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, […] et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. L'entraînement quotidien du calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.
>
> La compétence 3 du socle commun Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique précise que l'élève doit être capable de calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions […] à l'issue du cycle 2. »

L'ingénierie que nous avons expérimentée, propose une approche différente de celle habituellement utilisée pour l'enseignement de la soustraction mais s'astreint tout de même à respecter les objectifs du programme officiel précédemment cités.

2 Présentation de l'ingénierie de la soustraction : la progression générale

Les problèmes travaillés sont de type partition ou retrait dynamique.

Exemple 1 : Dans la boite, il y a 43 briques. J'en enlève 17. Combien en reste-t-il ?



Exemple 2 : Dans la boite, il y a 43 briques. 17 sont bleues. Les autres sont rouges. Combien y en a-t-il de rouges ?

La démarche de l'ingénierie peut se résumer par ces étapes : l'élève apprend à

1. identifier une situation soustractive grâce à la modélisation de problèmes : cette modélisation se réalise par une simulation du problème avec une boite et des briques, celles-ci pouvant s'imbriquer pour représenter des dizaines ou bien des unités ; ainsi, l'élève se construit une représentation des situations soustractives,

2. résoudre le problème de manière empirique : par dénombrement, en modélisant la situation avec la boite, l'élève résout le problème,

3. résoudre le problème de manière intellectuelle : le matériel n'est plus à la disposition de l'élève ; l'enseignant peut alors observer diverses procédures de résolution :

- par le dessin : l'élève représente de façon plus ou moins abstraite la boite et les briques ; la modélisation de la situation est donc représentée schématiquement
- par le calcul : l'élève utilise des stratégies personnelles : approximation, essais-erreurs, décompositions-recompositions du nombre en dizaines et unités.

L'étape 3 sera illustrée par des productions d'élèves dans la partie II.4.a de cet exposé.

4. vérifier un résultat de manière empirique : le statut de la boîte change ; d'outil de résolution, elle devient moyen de vérification ; en ouvrant la boite, l'élève vérifie le nombre de briques restant à l'intérieur.

5. vérifier un résultat de manière intellectuelle par l'addition : le surcomptage (1 par 1 puis par groupement), très vite remplacé par des recompositions, amène l'élève à écrire sa proposition sous forme d'écriture additive, l'addition devenant ainsi l'opération vérifiant la soustraction : 17 + … = 43.

6. réajuster son résultat, s'il est erroné, en utilisant l'addition pour atteindre le nombre total : au-delà du moyen de vérification, l'addition devient outil de résolution par réajustements et tâtonnements ; c'est la méthode de la fausse position

Les étapes 5 et 6 seront développées par des productions d'élèves dans la partie III.4.b de cet exposé.

7. améliorer l'efficacité de son réajustement en obtenant le résultat exact en deux coups, en un coup

8. améliorer l'efficacité de son algorithme : il s'agit de passer de l'addition à trou à la soustraction (opérations posées en colonnes) et notamment avec un traitement efficace du retrait des dizaines et des unités (commencer par les unités, gérer la retenue).

3 Présentation de l'ingénierie de la soustraction : les principes de l'ingénierie

Dans l'article *Hétérogénéité et attentes différentielles : une approche de didactique comparée* (2012), Leutenegger et Quilio exposent l'idée fondatrice de cette ingénierie : l'enseignement repose, bien sûr, sur le savoir antérieur des élèves, c'est-à-dire l'addition, pour construire les différents sens de la soustraction, repérer et résoudre les problèmes qui peuvent se résoudre avec une soustraction mais aussi pour fonder une technique. Ainsi dans la genèse de l'apprentissage envisagé, deux rôles sont assignés à l'addition : elle joue un rôle dans la construction des sens de l'opération de soustraction et elle fonde la recherche d'un moyen économique de calcul des différences.

Comme dans *Le cas de Gaël* (2001), de Brousseau et Warfield, texte fondateur de l'ingénierie sur la soustraction, « [dans la situation proposée], les définitions constructives de la soustraction [sont

remplacées] par une définition algébrique (la différence) » « On ne cherche plus à construire un terme, explique Guy Brousseau, mais à comprendre une relation et à rechercher un objet qui satisfait une condition. C'est le prototype des situations avec lesquelles on a exploré les possibilités de remplacer l'arithmétique par l'algèbre à l'école primaire. » (Brousseau & Warfield, 2001).

Yves Chevallard (1989), dans *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*, expose que le calcul algébrique correspond à la syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. Il montre que la dialectique entre numérique et algébrique peut se reconstruire grâce à la modélisation mathématique. L'algèbre constitue le langage privilégié des modélisations car il assure une économie de moyens sémiotiques et donc un gain d'efficacité. Le raisonnement se réalise à travers le calcul algébrique qui conserve aussi une trace de ce raisonnement. Donc, l'algèbre est à la fois un outil qui permet de travailler le modèle mais aussi un langage qui assure la construction du modèle.

A l'école primaire, l'ingénierie de la soustraction permet cette rencontre avec l'algèbre et le fonctionnement de la dialectique entre algèbre et numérique : les élèves ne font pas de l'algèbre précocement mais raisonnent algébriquement grâce à un modèle lié aux situations mises en place.

4 Un moment crucial de l'ingénierie : la construction du modèle théorique

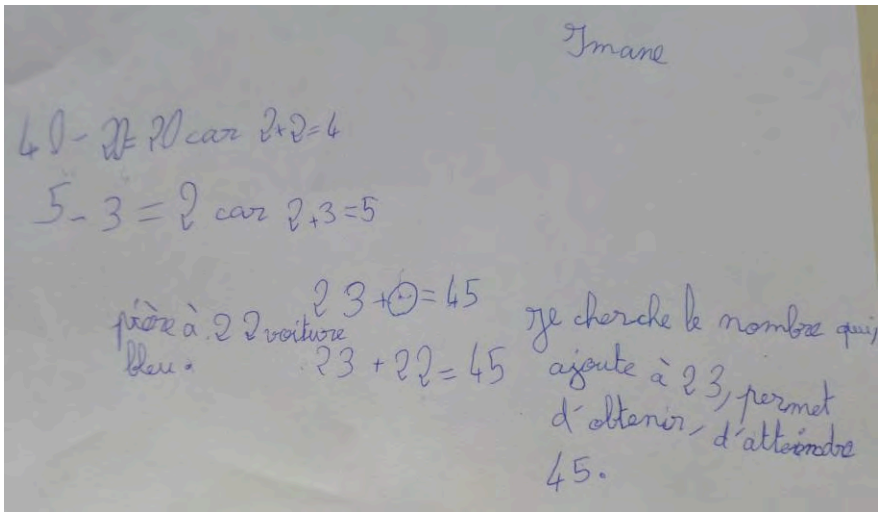
Un moment crucial de l'ingénierie est présenté plus en détails : celui qui correspond aux étapes 5 et 6 de la progression : vérifier de manière intellectuelle une proposition et éventuellement la réajuster. Cette vérification et ce réajustement, qui se réalisent par la méthode de fausse position, assurent la construction du modèle théorique des problèmes.

Après une phase d'action (la recherche de réponses provisoires), les élèves sont en phase de validation.

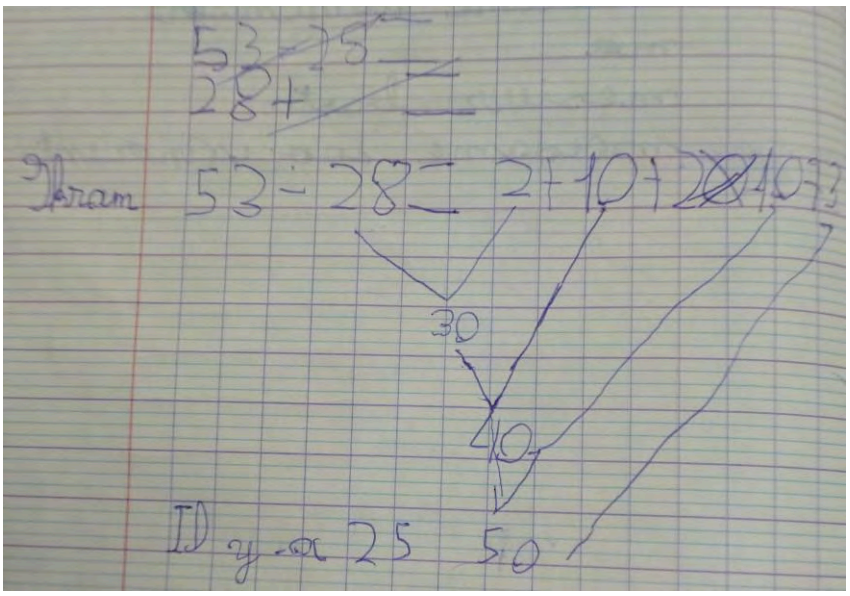
4.a Résolution des problèmes : obtention des premières réponses provisoires

Lors de la résolution des problèmes, les réponses provisoires des élèves sont obtenues à partir de stratégies personnelles. En voici deux exemples :

- Sur la production d'élève qui suit, nous pouvons observer après décompositions, le retrait des dizaines et des unités ; ces retraits sont justifiés par le répertoire ; puis l'élève recompose les nombres pour déterminer celui qui ajouté à 23 permet d'atteindre 45.



- Sur cette deuxième production d'élève, nous observons une écriture algébrique permettant de déterminer la différence par recomposition du nombre 53 à partir d'une partition 28 de la collection totale ; à chaque fois, l'élève cherche à atteindre la dizaine supérieure.

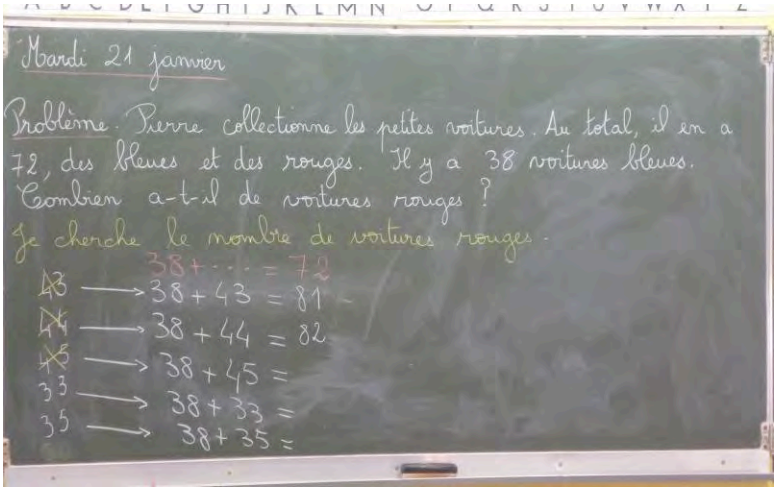


4.b Vérification des réponses provisoires

Les élèves avaient à résoudre le problème suivant :

Problème 1. Pierre collectionne les petites voitures. Au total, il en a 72, des bleues et des rouges. Il possède 38 voitures bleues. Combien a-t-il de voitures rouges ?

Le milieu est constitué des réponses provisoires suivantes: 43, 44, 45, 33, 35.



- Après avoir testé 43 par l'addition 38 + 43 et obtenu 81, Imane et Malika invalident cette proposition
- Ikram et Amina rejettent également 45 parce que « déjà avec 43 on a dépassé 72, ça va encore plus dépasser »
- le même raisonnement est mené pour 44
- puis, à partir de cette réponse 44, Soheib propose un premier réajustement : il explique qu'avec 44 « on a trouvé une dizaine de trop 82 je dois enlever une dizaine »
- les élèves augmentent le milieu d'une nouvelle proposition qu'ils veulent tester : 34.

Ainsi, à partir des premières réponses proposées, les élèves sont capables:

- d'éliminer certaines réponses
- de réajuster une réponse par modification des dizaines ou des unités
- d'augmenter le milieu de nouvelles propositions sans recommencer complètement les calculs.

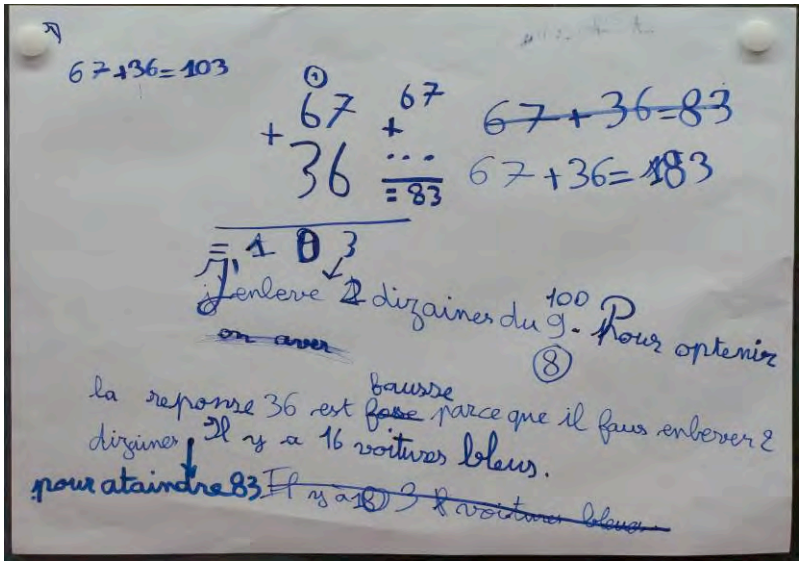
Le même problème est conservé en variant les nombres (83 et 67) mais cette fois-ci la première partie de la consigne (résoudre le problème) est supprimée. C'est l'enseignant qui fournit des réponses factices à la classe afin de les choisir assez proches de la solution et ainsi induire chez les élèves des procédures de réajustement : une ou deux unités d'écart, une ou deux dizaines, supérieures ou inférieures ou bien les deux cumulées.

Après avoir vérifié les réponses, l'objectif est d'être capable de réajuster la réponse pour atteindre le total initial. La classe utilise pleinement la méthode de la fausse position.

Problème 2. Marc a 83 voitures, des rouges et des bleues. 67 sont rouges. Combien en a-t-il de bleues ?

Les réponses fournies à la classe sont: 35 37 36 25 26 27 15 17. Chaque groupe a une réponse à tester.

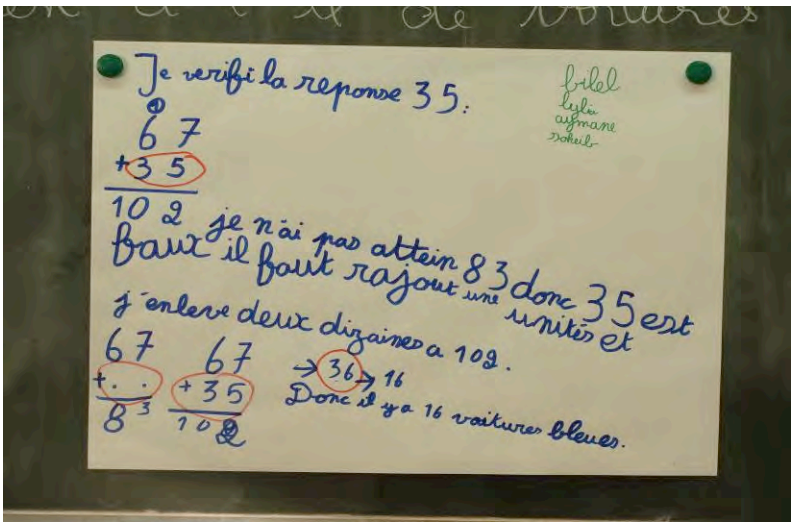
Regardons tout d'abord le travail d'Amina et d'Ikram qui testent la réponse 36.



Les élèves écrivent l'addition à trou qui montre quel total doit être atteint. Puis, ils effectuent l'addition 67 + 36. A partir du total obtenu, 103, ils déduisent que la proposition est erronée et qu'ils doivent enlever 2 dizaines à 103 pour retrouver 83. Le décompte des dizaines à partir de 103 est écrit (sur le film, Ikram explique qu'il a enlevé deux dizaines à 103 et obtenu 93 puis 83, et non pas 9 et 8 comme ce qui est noté).

Enfin, ils concluent en annonçant la solution du problème, 16 voitures bleues, mais sur l'affiche le retrait des dizaines à 36 est implicite.

Examinons à présent le travail de Soheib, Lylia, Aymane et Bilel



De même, sur cette affiche, les élèves posent en colonne les additions à trous et cherchent le nombre qu'il faut ajouter à 67 pour atteindre 83. Lors de la phase de formulation, les élèves explicitent comment ils déterminent la solution du problème par la méthode de fausse position qui fonctionne par réajustements.

Le réajustement effectué sur les dizaines et les unités est ici cumulé, comme nous avons pu l'observer en analysant une vidéo de séance de classe. Voici un extrait de la retranscription de la vidéo :

Lylia : en fait on a posé en colonne 67 + 35 et on a trouvé au total 102 et 102 c'était pas...

Bilel : fallait retrouver 83

Soheib : il fallait enlever 2 dizaines et rajouté 1 unité

P: pourquoi ?

Soheib : pour que ça fait 103 et que ça fait 83

[...]

Soheib : donc on a compté jusqu'à 36 et on a enlevé 2 dizaines et ça fait 16

Le questionnement de l'enseignante permet aux élèves, cette fois-ci, d'expliciter la « manipulation » qu'ils mènent sur leur première réponse car les élèves expliquent le réajustement sur le total mais passent sous silence celui sur la réponse provisoire.

P: vous avez posé 67 + 35 égal 102. Si la réponse 35 était exacte vous auriez dû retrouver quel...

Aymane : 83

P: et 83 ça représente quoi ?

Aymane : c'est le nombre de voitures rouges et bleues

P: c'est le nombre total de voitures. On veut atteindre 83. Mais vous, vous avez atteint 102. […] Vous avez ajouté 1 unité et enlevé 2 dizaines à quel nombre ?

Les élèves : à 102

P: Est-ce que 35 est la réponse exacte ?

Les élèves : non

P: Comment vous avez trouvé 16 à partir de 35 ?

Soheib : dans 35 on doit ajouter 1 unité et enlever 2 dizaines

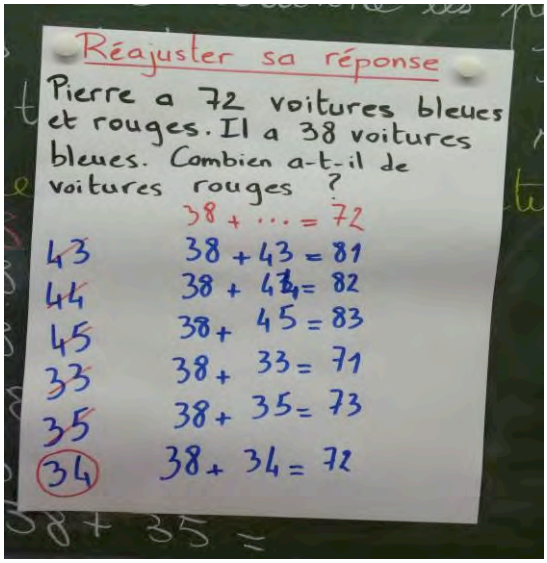
P: quelle est la réponse au problème ?

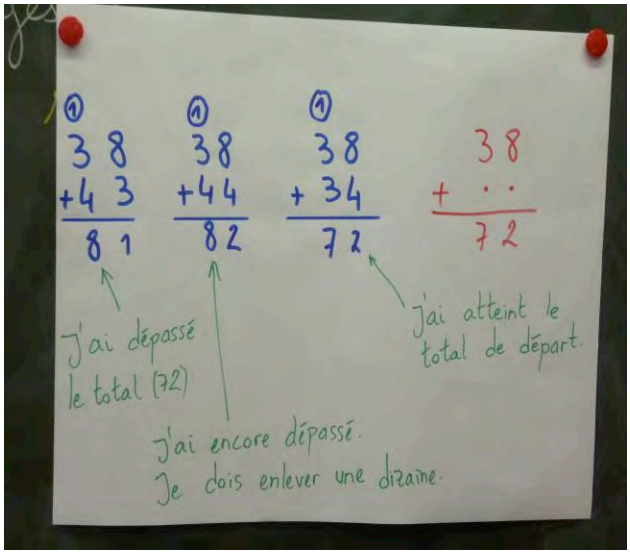
Aymane : il y a 16 voitures bleues.

Ainsi, la validation des propositions par addition et la méthode de fausse position qui s'en suit permettent de construire le modèle théorique du problème : a + … = b.

Le relevé de toutes les additions que nous gardons en mémoire sur une affiche participe à cette construction. En effet, lister les additions, comme nous le voyons sur les deux affiches suivantes, présente un double intérêt :

- en ligne, l'affiche permet aux élèves d'observer les données du problème (les constantes) et la variable ; la dialectique algèbre-numérique est ici mise en évidence,
- en colonne : les élèves gardent une trace du réajustement.





Remarque : l'algorithme qui se déduit naturellement des procédures personnelles des élèves est celui de l'emprunt de dizaines et non pas celui qui utilisent la propriété d'invariance de la différence par ajout d'un terme à chaque membre.

5 Bilan de cette ingénierie

L'usage de cette ingénierie dans la pratique enseignante présente des points communs avec tout enseignement de la soustraction : le recours à des problèmes pour identifier une classe de problèmes, la nécessité de construire et mémoriser un répertoire, également la construction d'un algorithme.

Sa spécificité vient de l'usage de la méthode de fausse position. Celle-ci présente un double intérêt : elle rend les élèves experts sur l'utilisation en acte des propriétés du code numérique et par conséquent sur les stratégies de résolution personnelle ; au-delà de cette expertise, les élèves apprennent à procéder en suivant une démarche mathématique fondamentale : déterminer la solution d'une équation à partir d'une approximation voire d'une erreur pour s'en approcher jusqu'à l'obtention de la solution exacte.

V - INTERET DU LEA SAINT CHARLES POUR LES ENSEIGNANTS ET LES CHERCHEURS

1 Du point de vue des enseignants

Regardons à présent ce que le LéA St Charles a pu apporter aux enseignants et notamment à ceux associés à notre équipe. Cela leur a notamment permis de découvrir dans des conditions privilégiées des activités résultant de recherches en didactique et d'en ressentir les avantages pour leur enseignement et les apprentissages de leurs élèves. Ainsi, une enseignante qui a travaillé avec nous sur l'ingénierie du CE2 continue d'utiliser ces mêmes activités dans sa nouvelle école d'affectation.

Cela leur a également permis de s'initier à la didactique et de mieux comprendre ce que cette science pouvait apporter à leurs pratiques. D'ailleurs, deux des enseignantes de cette école ont déjà commencé une thèse en didactique.

Plus largement, le fait de pouvoir travailler avec l'ensemble des enseignants de cette école nous a amené à réfléchir à la compatibilité de nos ingénieries d'une année à l'autre et donc de concevoir un enseignement du numérique plus homogène. Par ailleurs, leur collaboration nous a permis de mieux prendre en compte les contraintes pratiques et donc de concevoir des ingénieries didactiques plus faciles à mettre en place dans les classes. Ceci nous a également amené à améliorer le discours accompagnant les ingénieries afin de donner effectivement aux enseignants toutes les informations nécessaires à leur mise en place. A partir de ce travail il est à présent envisageable de diffuser nos ingénieries auprès d'autres enseignants. Cette étape a déjà été amorcée pour l'ingénierie développée au CP, sous le nom de projet ACE. C'est d'ailleurs l'objet de la communication de Mireille Morellato et Dominique Truant dans ce colloque *(« Coopération entre professeurs d'école et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique concernant les premiers apprentissages numériques »)*. Nous réfléchissons actuellement à une possible accélération du processus, en formant éventuellement non pas les enseignants mais les formateurs d'enseignants.

2 Du point de vue des chercheurs

Ce dispositif a également permis de recueillir de précieuses données pour les chercheurs de l'équipe. Tout d'abord, nous avons trouvé là une sorte de terrain d'expérimentation pour nos ingénieries. La collaboration des enseignants de l'école Saint Charles, habitués à exploiter dans leurs classes les scénarios que nous leur proposons, garantit une mise en œuvre la plus fidèle possible de nos *desideratas*. Ceci nous permet de réellement observer les effets de nos ingénieries, de juger de leur pertinence et de repérer les points à améliorer.

Par ailleurs, alors que chaque enregistrement vidéo d'une séance de classe nécessite habituellement des démarches fastidieuses (discussion avec l'enseignant, le directeur de l'école, demande d'autorisation pour les droits à l'image…), nous pouvons, dans le LéA St Charles, facilement effectuer plusieurs films par semaine. Toutes ces ressources constituent des supports intéressants pour observer divers phénomènes didactiques et mettre en place des méthodologies généralement délicates à utiliser. C'est ainsi que ce dispositif facilite le suivi de *biographies didactiques* d'élèves (Mercier, 1995). Il s'agit en effet de repérer et d'étudier les moments (appelés *biographèmes)* attestant d'une évolution dans les apprentissages d'un élève particulier. Les très nombreux films que nous enregistrons régulièrement dans chaque classe, nous permettent de suivre les réactions, les propos ainsi que les stratégies utilisées par l'élève choisi. Nous avons ainsi pu suivre pendant un an le travail d'un élève de CE2 concernant l'apprentissage de la multiplication et nous avons pu étudier les facteurs (issus du milieu ou des interactions avec l'enseignant ou les pairs) qui ont pu influer sur cette progression dans ses apprentissages. Ceci a donné lieu à un article, encore en cours d'expertise (Quilio, Millon-Fauré, à paraître). Nous avons également entrepris de suivre pendant deux ans une élève durant les tâches de résolution de problèmes. L'objectif est de déterminer les éléments qui guident ses choix lors de la détermination des opérations à effectuer et de voir si le travail effectué en classe facilite cette étape. Un autre chercheur, Alain Yaïche, a décidé de consacrer ses recherches de thèse au suivi (pendant deux ans) du travail de plusieurs élèves lors d'activités numériques.

La mise en place du LéA St Charles nous permet enfin d'effectuer des *suivis de cohortes.* Il s'agit cette fois d'observer sur un temps long, tout un groupe d'élèves. Or, le fait de travailler avec l'ensemble des enseignants de cette école, nous permet de mettre en place dans chaque niveau, des évaluations régulières. Nous pouvons ainsi surveiller les apprentissages de tout un groupe d'élèves à courts et à longs termes et réfléchir ainsi aux faiblesses des ingénieries que nous avons proposées. Nous voudrions d'ailleurs prolonger ce suivi jusqu'au collège de secteur, voir jusqu'au lycée.

3 Quelques obstacles à surmonter

Il faut bien reconnaître toutefois que certains obstacles demeurent. La mise en place de ces ingénieries nécessite pour l'enseignant beaucoup plus de temps et d'investissement pendant les séances de classes : en effet, nos activités se déroulent l'essentiel du temps sous forme de travail de groupes, ce qui demande une régulation particulière durant les phases de recherche et une gestion spécifique des temps de mise en commun. C'est une des raisons pour lesquelles, le temps didactique avance moins vite dans nos ingénieries qu'avec des activités ordinaires. Mais l'enjeu de cette forme de travail est également d'installer des savoirs plus solides et plus facilement transférables dans d'autres contextes, ce qui pourrait éventuellement permettre de gagner un peu de temps les années suivantes. Par ailleurs, ces activités devraient permettre de travailler d'autres compétences, directement en lien avec l'activité mathématique (comme la méthode de fausse position lors de l'ingénierie sur la soustraction) ou bien transdisciplinaires (autonomie, travail de groupes…).

Les enseignants signalent également que l'appropriation de ces ingénieries leur demande davantage de temps et d'investissement que la préparation d'activités ordinaires. Les scénarios comportent en effet de nombreuses indications sur la régulation attendue de la part des enseignants, celle-ci étant particulièrement délicate. Ceci rend la lecture et l'appropriation de ces consignes particulièrement longue. Enfin, la participation au LéA nécessite également un travail supplémentaire : les enseignants doivent effectuer des comptes rendus de leurs séances, assister aux réunions et participer à nos échanges par mails ou téléphone…

Signalons toutefois qu'aux dires des enseignants associés, ces difficultés apparaissent essentiellement la première année, puis s'estompent avec le temps. Ainsi, une fois l'ingénierie bien en main, l'enseignant peut l'intégrer sans problème dans sa gestion de classe, ce n'est que dans un premier temps qu'elle peut déstabiliser les pratiques.

En outre, en ce qui concerne plus spécifiquement le problème de la diffusion, là encore de nombreux obstacles subsistent : la conception d'un document d'accompagnement qui contienne très précisément les informations nécessaires à un enseignant ordinaire pour une mise en place satisfaisante de nos ingénieries reste un défi de taille, même si ce travail collaboratif nous a grandement aidés dans cette entreprise. De plus, cet accompagnement des enseignants ne peut se cantonner à l'élaboration d'un document écrit. Une régulation directe de l'activité de l'enseignant demeure nécessaire, au moins au départ. Reste à réfléchir à un mode de transmission suffisant pour que des enseignants extérieurs à notre expérimentation puissent s'approprier nos ingénieries, mais tout de même moins exigeant que celui mis en place au sein du LéA St Charles.

VI - CONCLUSION

En examinant le LéA St Charles, nous avons pu observer l'intérêt qu'un tel dispositif pouvait représenter : l'analyse détaillée d'une de ses conceptions (l'ingénierie sur la soustraction) a permis d'illustrer la richesse de l'activité mathématique que celle-ci avait provoquée dans la classe. De manière plus générale, nous avons insisté sur le rôle qu'avait joué ce projet dans la formation des enseignants associés, ainsi que sur les recherches qu'il avait rendues possibles en facilitant l'accès à certaines données, difficiles à récoltées habituellement.

Ainsi, même si nous disposons encore de peu de recul sur cette expérimentation, ces premières considérations sur les LéA paraissent encourageantes. Ces collaborations, sur un temps long, entre didacticiens et enseignants semblent en mesure d'atteindre le double objectif qu'elles se sont fixés : constituer une avancée à la fois pour la recherche et pour l'enseignement ordinaire.

Toutefois il reste encore à surmonter le problème de la diffusion auprès des enseignants. Si les scénarios que nous avons créés constituent déjà des outils intéressants pour les enseignants associés à notre expérimentation, nous aimerions à présent diffuser ces ressources locales auprès d'un plus large public.

Il convient alors de réfléchir aux moyens à mettre en œuvre pour que tous les enseignants volontaires puissent s'approprier ces ingénieries sans les dénaturer. Ceci permettrait à chacun de disposer de ressources qui s'appuient sur des résultats de la recherche en didactique tout en étant réellement utilisables dans une classe ordinaire.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 15-26.

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. Recherches en didactiques des mathématiques, 9, 3, 282-307.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux Collaboration(s).

BROUSSEAU G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N*, 47, 93-114.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. & Warfield V. (2001) *Le cas de Gaël*. P.3

BROUSSEAU G. (2008). Premières notes sur l'observation des pratiques de classes. http://visa.inrp.fr/visa/presentation/Seminaires/Journees_inaugurales/premieres_notes_observation.pdf

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, **19.**

CHEVALLARD Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. *Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009.*

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

CHEVALLARD Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 81-108.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*. Thèse, Université Joseph Fourrier, Grenoble 1.

LEUTENEGGER F. & QUILIO S. (2012) Hétérogénéité et attentes différentielles : une approche de didactique comparée. *Revue suisse des Sciences de l'Education. Academic Press Fribourg,* **34 (3)**.

MERCIER A. (1995) La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 97-142.

MONOLD-ANSALDI, R. & FAVELIER, N. (2013). Les lieux d'éducation associés à l'IFE ; des laboratoires pour l'action conjointe des chercheurs et des enseignants. Journal de l'IFE de Mars 2013.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e.* Thèse de doctorat. Paris : université de Paris 7.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 57-78.

QUILIO S. & MILLON-FAURE K. (à paraître) Quels sont les éléments qui peuvent influer sur l'évolution des stratégies utilisées dans la classe ? Etude d'une biographie d'élève**. (ou)**

SENSEVY, G. (2013). Neuf propositions pour les LéA. Journal de l'IFE de Mars 2013.

COLLABORATION ENTRE PROFESSEURS D'ECOLE ET CHERCHEURS : UN EXEMPLE DE DIALOGUE DANS LE CADRE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE COOPERATIVE EN MATHEMATIQUES

Mireille MORELLATO
PEMF, école St-Charles 1 (Marseille)
CREAD (Rennes)
mireille@syrah.fr

Résumé Dans cette communication, issue d'un travail de thèse en cours sous la direction de Gérard Sensevy et Serge Quilio, nous présentons l'étude de certaines modalités d'un travail coopératif entre professeurs d'école et chercheurs dont la finalité est la construction et la mise en œuvre d'une ingénierie pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres à l'entrée de l'école élémentaire obligatoire (CP). Cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'une recherche nationale intitulée « Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire » (ACE). La spécificité des développements produits repose sur une ingénierie didactique coopérative dans laquelle le travail collaboratif amène professeurs et chercheurs à dialoguer afin de proposer une construction de l'ingénierie plus pertinente aussi bien au plan ingénierique (transformer le dispositif) qu'au plan fondamental (comprendre la pratique).

I - INTRODUCTION

Nous proposons de présenter l'étude de certaines modalités de travail mises en œuvre récemment dans une ingénierie didactique de type coopératif (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013) portant sur la construction du numérique au Cours préparatoire (CP). Cette expérimentation, implémentée de septembre 2011 à juin 2014 (soit 3 années scolaires), s'inscrit dans le cadre d'une recherche nationale intitulée « Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire » (ACE). Dans ce contexte, le travail du collectif professeurs/chercheurs porte sur la mise en œuvre en classe de situations didactiques dans la lignée des travaux de Guy Brousseau (Brousseau, 2004). Les éléments de l'étude montrent qu'une telle mise en œuvre nécessite de nouvelles pratiques d'enseignement car elle implique une direction de l'étude des élèves par les enjeux de la situation, imposant aux professeurs une vigilance accrue aux enjeux mathématiques. Nous présentons dans ce texte un moment de travail coopératif entre professeurs et chercheurs sur l'enrichissement d'une ressource concernant les représentations de la situation didactique et l'analysons dans le cadre de la *Théorie de l'action conjointe* (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005), (Sensevy & Mercier, 2007), (Sensevy, 2011).

II - CADRES THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

1 Une ingénierie didactique de type coopératif

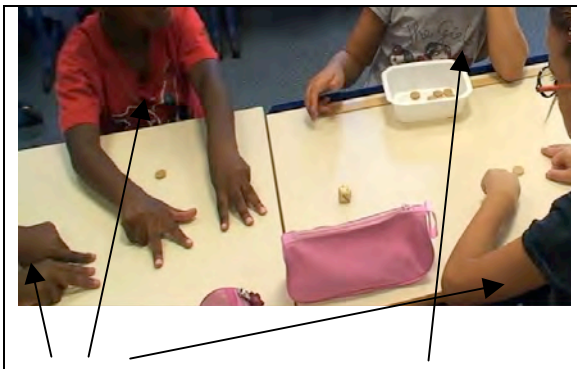
Une ingénierie didactique est un dispositif crée par et pour la recherche (cf les travaux de Michèle Artigue, Yves Chevallard, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Aline Robert publiés dans les actes de la 15e école d'été organisée par l'ARDM, (Margolinas et *al.*, 2009)). Nous nous inscrivons dans le cadre d'une ingénierie didactique de type coopératif telle que décrite par Gérard Sensevy, Dominique Forest, Serge Quilio et Grace Moralès (2013). Les modalités qui organisent le travail entre les membres du collectif suivent un processus itératif. La première année, des séances d'enseignement-apprentissage sont mises en œuvre dans des classes d'étude à partir d'un document princeps décrivant succinctement la situation

didactique. Une analyse des mises en œuvre est produite collectivement. Elles permettent l'élaboration d'un document présentant une progression de séquences d'enseignement. La deuxième année, les mises en œuvre s'effectuent dans des classes expérimentales et les classes d'étude à partir de ce document. A nouveau, des analyses collectives des mises en œuvre sont menées et le document réécrit partiellement ou complété. Le processus est reproduit la troisième année avec des classes supplémentaires. Chacun, en fonction de ses compétences, propose des stratégies, des gestes, des outils pour l'enseignement car chacun est « connaisseur de la chose » selon son point de vue et peut dire ce qui est envisageable, ce qui est nécessaire, indispensable… Collectivement des choix sont faits et les décisions qui en découlent assumées. De telles ingénieries de type coopératif permettent ainsi le partage des fins éducatives et des moyens entre professeurs et chercheurs, favorisent la co-conception et l'acquisition de connaissances mathématiques, didactiques, épistémologiques.

2 La situation fondatrice de l'ingénierie didactique et ses représentations

2.1 Description rapide de la situation didactique du « Jeu des annonces »

La situation didactique du *Jeu des annonces*[1] repose sur un jeu dans lequel les élèves doivent « annoncer » avec les doigts de leurs mains le score qui va s'afficher sur le(s) dé(s) avant le lancer de ce(s) dé(s). Le nombre obtenu par les annonces est ensuite comparé avec le score du/des dé(s) afin de déclarer une égalité ou une inégalité entre les valeurs obtenues.



(Photo 1 - Capture d'écran d'une vidéo tournée lors d'une séance du *Jeu des annonces*)

Sur la photographie 1, nous observons une partie : nous pouvons voir que chacun des trois joueurs a réalisé une annonce avec ses deux mains. Par exemple, le joueur du centre a annoncé « 6 » sous la forme « 3 et 3 » (notée par la suite « D3G3 » pour 3 doigts sur la main droite et 3 doigts sur la main gauche). Chacune de ces annonces est comparée avec le score d'un dé à six faces, lancé par l'arbitre après que les annonces ont été produites et immobilisées sur la table.
Le joueur du centre ainsi que celui de droite ont déjà gagné un pion (placé devant eux) lors de parties précédentes car leur annonce était égale au lancer du dé. C'est l'arbitre qui valide les annonces et distribue les pions.

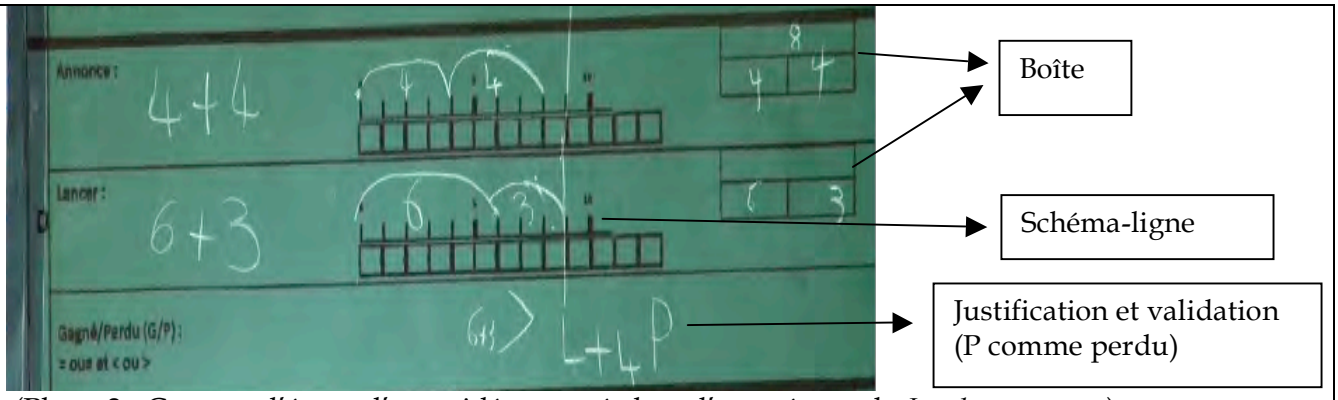
Lors de la partie, les élèves désignent la grandeur « quantité de points » à l'aide des doigts comme c'est l'usage dans l'environnement culturel et social. Cette pratique de désignation de quantité avec les doigts est faite au moyen d'une seule main, puis de l'autre si nécessaire. Ici la règle contraint à utiliser les deux mains. Le nombre à désigner se retrouve alors sous la forme d'une combinaison additive. Cette nouvelle pratique, mise en œuvre lors de nombreuses parties, permettra d'explorer les multiples modalités d'écriture des nombres à désigner puis à les comparer. La situation didactique construit ainsi l'étude pour l'apprentissage d'une pratique de mesure (la quantité associée à la grandeur nombre d'objets) qui utilise la propriété des ensembles à pouvoir se partitionner en sous-ensembles qui ne nécessitent pas de comptage. En effet, au début de l'année scolaire du CP, les quantités appréhendables sont inférieures à 6 et convoquent une forme spontanée de dispositions naturelles (configurations des points du dé, des doigts de la main). Cette étude prend pour les élèves une dimension expérientielle car ils doivent se

[1] La situation didactique a été initialement proposée, dans le cadre de la recherche ACE sous la forme d'un document de travail, par A. Mercier et S. Quilio (ENS-IFé).

construire une expérience pour cette pratique de mesure à partir de leurs connaissances. Les professeurs ont à diriger cette étude.

2.2 Représentations de la situation

Selon Raymond Duval, les notions, concepts, idées en mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement et pour les étudier ou pour raisonner avec, il faut passer par des représentations sémiotiques rudimentaires ou complexes qui peuvent relever d'un registre oral, écrit, graphique, gestuel ou matériel (Duval, 2006). Voici un exemple des représentations utilisées dans la situation didactique du *Jeu des annonces* :



(Photo 2 - Capture d'écran d'une vidéo tournée lors d'une séance du *Jeu des annonces*)

Sur la photo 2 ci-dessus, une partie est ainsi représentée :
-en haut, l'élève a annoncé D4G4 (4 doigts sur sa main gauche et 4 doigts sur sa main droite) qu'il représente sous trois formes : (i) une écriture additive « 4+4 », (ii) un schéma-ligne (un pont de 4 et un autre pont de 4) et (iii) une boîte (représentation « semi-algébrique » des parties et du tout) où il écrit le total car il connaît le résultat (« 4 et 4 font 8 ») ;
-en-dessous, il représente les lancers de deux dés (6 et 3) sous les formes d'écriture additive, de schéma-ligne et boîte. Remarquons que l'élève semble ne pas connaître le résultat de 6+3 ; il ne l'écrit pas dans la boîte.
L'élève peut cependant comparer annonce et lancer et écrire 6+3>4+4 puis « P » (la partie est perdue (P) car l'annonce n'est pas équivalente au lancer du dé) car il peut constater cette non-équivalence (et même la préciser : le lancer est supérieur à l'annonce) grâce au schéma-ligne, en utilisant l'analogie avec les longueurs.

Il s'agit de reconnaître une même situation mathématique dans des représentations dont les contenus sont apparemment différents ou de jouer sur des registres différents dans les procédures de résolution. Dans une situation didactique, toute représentation permet d'en éprouver l'économie. Elle se réfère à la situation mathématique et la dénote (Matheron & Mercier, 2004). Autrement dit, un dialogue est possible entre les différentes représentations. Guy Brousseau dirait que « l'intérêt des représentations réside dans ce qui peut être fait dans un univers et qui ne peut pas être fait dans l'autre » (Brousseau, 2004, p. 254) : je peux comparer 4+4 et 6+3 grâce au schéma-ligne même si je ne connais pas la somme de 6+3.

Nous pourrions remarquer que dans cet exemple, nous nous situons à la charnière entre un travail dans la numérosité et un travail sur le nombre et avec les nombres. En effet, au début de la mise en place de la situation didactique, les élèves ont à désigner une quantité avec des nombres : ils agissent dans la numérosité en distinguant une quantité et en la dénotant. Quand les élèves ont à comparer deux écritures additives, ils opèrent sur les représentations de ces quantités.

3 Question étudiée

Après avoir lu et travaillé le document présentant la progression des séquences d'enseignement, document élaboré conjointement par les chercheurs et les professeurs des classes d'étude la première année d'implémentation du dispositif (2011-12), et après avoir mis en œuvre dans leur classe la situation didactique proposée, les professeurs des classes expérimentales (2012-13) ont une relecture du document (c'est-à-dire de la situation didactique). Cette relecture véhicule à la fois l'expérience de la mise en œuvre qu'ils ont réalisée et les questions qu'ils se posent, notamment sur la direction de l'étude des élèves dont ils ont la charge. En effet, nous avions décrit la situation didactique comme une étude expérientielle de la situation mathématique par les élèves, étude que les professeurs doivent diriger. Les réunions entre les professeurs et les chercheurs sont des moments où ils partagent ces réflexions.

Comment professeurs et chercheurs vont-ils partager leurs points de vue, leurs expériences et leurs questionnements ? Nous considérons qu'il s'agit d'une question didactique que nous aborderons ici au travers des échanges dans le collectif à propos des usages des représentations dans la situation didactique.

4 Méthodologie

Notre travail d'analyse s'effectue dans le cadre de la *Théorie de l'action conjointe* (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005), (Sensevy & Mercier, 2007), (Sensevy, 2011). Nous nous intéressons aux transactions entre chercheurs et professeurs autour des enjeux (qui sont objets de savoir dans cette recherche ACE). Le travail d'analyse empirique repose sur les enregistrements vidéo des réunions du collectif ; ils constituent des traces de la réalisation effective et des questionnements à l'œuvre.

Le contenu des enregistrements des réunions a permis de produire un corpus de transcriptions. Nous avons procédé à une reconstruction du vécu par un découpage du corpus en épisodes. Nous avons opté pour une approche s'intéressant aux épisodes didactiques biographiques du collectif (Mercier, 1999) qui ont la particularité d'être significatifs par rapport aux enjeux de savoir tout en adoptant le point de vue des actants. Nous avons ainsi conduit une réduction des données (Sensevy, 2011) : il s'agit de comprendre les enjeux des interactions langagières à travers la production d'une vision synoptique des épisodes. La vision synoptique, concept de Ludwig Wittgenstein, est une vision d'ensemble qui consiste en « un arrangement possible des faits en vue de les penser », p.585 (Glock, 2003). Nous tentons d'analyser le mécanisme d'équilibration qui se joue au cours de ces épisodes entre le contrat et le milieu (Sensevy, 2011) c'est-à-dire entre un arrière-plan partagé (le contrat) dont le collectif dispose et un problème d'ingénierie (ou milieu-problème) qu'il aborde avec cet arrière-plan. Ce problème permet alors de faire évoluer l'arrière-plan partagé c'est-à-dire le système de connaissances du groupe.

III - ANALYSE DES TRANSACTIONS

Pour cette communication le choix s'est porté sur les transactions au sujet des usages des représentations (et non l'utilisation technique, sujet également et largement abordé dans le collectif) dans la situation didactique.

1 Des échanges autour des usages des représentations

Les épisodes ont été extraits de la seconde réunion de l'année (24 octobre 2012) entre chercheurs et professeurs ; c'est la première fois que le sujet est abordé. Il est à noter que le document de la progression de l'ingénierie ne mentionne pas quels sont les usages de ces représentations dans la version disponible à ce moment-là ; elles sont seulement présentées et le document engage à les utiliser « dans un langage écrit commun pour comparer leur annonce avec le lancer » sans plus d'autres précisions (cf. annexe 1).

Chaque épisode sera présenté de manière à rechercher le plus possible le sens de l'action pour qui serait un familier de cette action c'est-à-dire en respectant le sens que ces épisodes pourraient prendre pour les actants. La transcription des échanges est placée en annexe 2. Nous proposerons ensuite la synthèse de cette série épisodique.

1.1 Vue synoptique des épisodes

Dans le premier épisode, le chercheur présente de manière générale l'usage des représentations dans la situation didactique : mettre en évidence la composition de l'annonce en deux ou trois termes afin de permettre un raisonnement sur la situation mathématique (« les boîtes de Fischer / le schéma / la représentation avec des segments / c'est pour raisonner » Tour de Parole 150). Il anticipe sur le fait que le schéma-ligne, la boîte et les configurations de doigts et dé(s) forment un système de relations qui se réfèrent à la situation du jeu : « les manipulations qu'il va y avoir vont pouvoir être référées à ce système / à cette référence commune que sont les annonces et les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces » (TdP 154).

Dans le deuxième épisode, un professeur (le professeur A) s'interroge sur l'usage des représentations mises en œuvre (« j'ai cherché à voir l'utilité » TdP 171). Il partage son expérience sur le rôle des représentations : pour le professeur A, la boîte sert à anticiper le nombre à atteindre (« je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas » TdP 171) et le schéma-ligne à vérifier cette somme : si je place 2 puis 3 alors la composition doit correspondre au repère 5 (TdP 173). Il évoque également son interrogation sur le rôle et les limites du schéma-ligne dans la vérification : selon le professeur A, dans le cas d'élèves sachant compter, la vérification n'est pas nécessaire car les élèves sont sûrs du résultat de l'annonce (ils ont vérifié en comptant sur leurs doigts), dans le cas d'élèves ne sachant pas effectuer une somme, le schéma-ligne qui ne fait pas encore sens pour eux ne permet pas la validation du gain.

Dans le troisième épisode, un professeur (le professeur C) exemplifie l'usage des représentations. Il rebondit ainsi sur les propos tenus par le chercheur (TdP 150) au sujet de la fonction de raisonnement sur la situation mathématique en relatant sa propre mise en œuvre : « on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus / mais jamais pour vérifier » (TdP 180). En « visualisant » sur le schéma-ligne les ponts représentant les deux (ou trois) mains de l'annonce et le lancer du dé, les élèves peuvent tirer des informations de la situation (par exemple en cherchant de combien l'annonce est supérieure ou inférieure au lancer). Le professeur propose aussi des fictions de parties : combien aurait dû faire le dé pour qu'annonce et lancer soient égaux.

Dans le quatrième épisode, un professeur (le professeur B) discute le rôle du schéma-ligne comme outil de vérification. Pour ce professeur, le schéma-ligne est utile surtout pour la vérification du résultat de l'annonce dans un jeu à trois mains car les élèves ne peuvent plus utiliser leurs deux mains pour compter la somme (« ils vont utiliser leurs deux mains et vérifier l'annonce en direct / mais à trois mains ils ne peuvent plus le faire / et là le schéma ligné va servir de vérification » TdP 188). Le schéma-ligne permet alors d'agir là où l'on ne peut plus le faire matériellement. Mais pour les professeurs D et E, le schéma-ligne n'est pas assez fiable dans cette fonction de vérification car les élèves peuvent faire des erreurs en l'utilisant.

Dans un cinquième épisode, les professeurs D et F considèrent les représentations schéma-ligne, boîte et écriture comme répétitives (« c'est trois façons de faire la même chose » TdP 197)

Dans un sixième épisode, le chercheur montre que les représentations se réfèrent à la situation didactique du *Jeu des annonces* au départ mais qu'elles sont le modèle additif de nombreuses autres situations. A partir de l'évocation par le professeur G d'une autre situation qu'il utilise en calcul mental (il propose une référence à une quantité de billes provenant de deux poches de pantalon), le chercheur précise que les représentations du modèle additif que sont boîte, schéma-ligne et écriture additive sont bâties en référence à une situation mais transférables à d'autres. Il montre que l'usage des représentations pour anticiper sur une situation possible doit être sous le contrôle de la situation ; contrôle à construire par les élèves : « l'usage de cette représentation pour anticiper fictivement ce qui pourrait apparaître concrètement c'est un grand pas pour les élèves / c'est pas spontané / ça se construit / il faut apprendre à la contrôler » (TdP 403). Le contrôle consiste alors à mettre en lien

situation empirique et représentations qui sont des modèles de la situation : « il [le contrôle] doit référer aux usages que vous avez construits précédemment / ou qui pourront apparaître avec les billes / avec les fleurs / avec les élèves de la cour / y a des tas de situations où on pourrait utiliser convoquer / utilisez-le dans vos usages courants / combien on est aujourd'hui / et bien on est 4 filles plus 12 garçons » (TdP 403).

Dans un septième épisode, un professeur (le professeur H) rapporte au collectif une observation qu'il a faite dans sa classe. Il a observé chez des élèves un raisonnement par anticipation sur la situation didactique à trois mains : quelle troisième annonce pourrait-on proposer connaissant les deux premières ? (« ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6 » TdP 442). Le chercheur rappelle alors l'apport des représentations dans cette action d'anticipation qui permet de raisonner sur la situation et encourage à leur utilisation (« voilà une opportunité / n'hésitez pas à utiliser les représentations à ce moment-là / c'est là que ça va jouer fort » TdP 445).

Dans le huitième et dernier épisode de la série, professeurs et chercheur débattent sur les différentes fonctions de la boîte. Ils ne la considèrent pas de la même façon : pour le professeur C la boîte joue le rôle de répertoire additif (TdP 901) et n'autorise pas les manipulations telles que les décompositions et compositions (« ça enlève le côté malin du truc quoi moi j'ai des gamins qui cassent un nombre pour le mettre avec l'autre parce que c'est plus utile et avec la boîte tout est emboîté quoi » TdP 903), pour le professeur I elle permet de représenter la composition de l'annonce sans utiliser les signes opératoires « + » et « = » (« c'est une autre manière d'envisager l'addition » TdP 902), pour le chercheur elle aura un intérêt dans la désignation de la différence (« je vois des intérêts par rapport à la main manquante » TdP 904). Le chercheur rappelle alors que la représentation symbolique sous forme de nombres et de signes opératoires est la seule qui permet les calculs.

1.2 Synthèse

Cette série épisodique nous renseigne sur l'évolution des conceptions du groupe sur les représentations lors de la première année d'implémentation de l'ingénierie (2012-2013). La manière de considérer le schéma-ligne va s'enrichir au cours des transactions : d'outil de vérification le schéma-ligne est peu à peu construit comme un objet sur lequel raisonner pour anticiper ou imaginer une partie de jeu, et qui peut être un modèle pour d'autres situations additives. La fonction de vérification du schéma-ligne dont l'utilité est interrogée dès le départ par un professeur est remise en question par le groupe : en effet, des erreurs dans son utilisation technique le rendent non fiable, les élèves connaissent de manière plus sûre le résultat de leur annonce en utilisant leurs deux mains (ou le répertoire additif). Le schéma-ligne permet cependant selon un professeur de soutenir la vérification dans une situation de jeu à trois mains en l'absence de techniques de composition encore pas ou peu installées à ce stade de l'apprentissage. En orientant les transactions, dès le début des échanges, sur la diversité des fonctions des représentations (« c'est pour raisonner […] les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces » - Ch, TdP 146), le chercheur suscite la narration d'expériences de mises en œuvre autour des représentations dans les classes qui ne seraient pas de l'ordre de son usage technique (par exemple : « combien il y a de plus combien aurait dû faire le dé pour qu'il y en pour que ça soit égal et on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus » - prof C, TdP 180). Les différentes représentations (schéma-ligne, boîte mais aussi écritures) sont à la fois vues comme redondantes par certains professeurs et comme particulières dans le sens où ces représentations autorisent ou pas, et certaines plus que d'autres suivant les cas, l'expression d'une réponse au service d'une question posée dans et par la situation (par exemple mettre en évidence la composition d'une annonce ou le nombre à atteindre pour gagner au jeu ou la différence entre annonce et lancer). Le chercheur relève aussi que les représentations sont construites en un système qui se réfère à la situation du *Jeu des annonces*, situation qui les contrôle en retour, et, de par le modèle additif qu'elles figurent, sont transposables à d'autres situations.

2 Un mécanisme d'équilibration didactique à l'œuvre

L'arrière-plan concernant les représentations que les membres du collectif partageaient au départ était concrétisé par le document de la progression de l'ingénierie. Ce document (cf. annexe 1) indique les

différentes représentations et l'importance de les mettre en lien. Mais ce sont les mises en œuvre dans les classes expérimentales et les questionnements (utilité du schéma-ligne, schéma-ligne comme outil de vérification), les points de vue (sur le rôle de la boîte), les observations (d'actions d'élèves) et les constats (limites du schéma-ligne) qui ont permis qu'une discussion émerge, vive et soit appréhendée par tous. Autrement dit, les mises en œuvre et ce qui en découle ont fait milieu. Les transactions ont été rendues possibles et fructueuses car le chercheur a indiqué la direction du travail collectif (les représentations servent à raisonner) et a fourni des apports didactiques et épistémiques (fonctionnement des représentations en système, importance de la référence à la situation du jeu, modèle additif). Les transactions ont été aussi rendues possibles et fructueuses par les apports des professeurs qui ont donné à voir leur pratique (professeurs A, C et G), ont donné à voir leur compréhension (professeurs D et F), ont partagé des observations (professeurs B, D, E et H). Le chercheur a exprimé une hypothèse de travail (le jeu entre représentations) et les professeurs, en appui sur le milieu (en constitution) de leur pratique, lui donnent vraiment sa chair à la fois empirique et conceptuelle. De tels échanges ont permis que le système de connaissances du groupe sur ce point de l'ingénierie devienne plus riche et par là commence à se transformer.

IV - CONCLUSION

Les transactions ont permis aux membres du collectif de progresser dans leur connaissance de l'ingénierie et de sa mise en œuvre. Nous avons vu que le travail du collectif met au jour et met à jour ce qu'il faudrait montrer et faire et qui se trouve dans la pratique effective et non seulement dans le texte du savoir. En effet, dans une ingénierie de type coopératif, les ressources sont constituées dans et par le dispositif même, c'est-à-dire grâce au travail coopératif : les ressources ne sont pas uniquement constituées par le texte de la progression des séquences d'enseignement (même s'il est co-construit et réécrit ou complété) mais aussi par le style de pensée (Fleck, 2008) qui se constitue au fil de l'expérience et par l'expérience partagée entre les membres du groupe.

V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (2004) *Théorie des situations didactiques* (2e éd.). Grenoble: La pensée sauvage.

DUVAL R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, numéro spécial, 45-81.

FLECK L. (2008) *Genèse et développement d'un fait scientifique* (3e éd.). Paris: Flammarion.

GLOCK H.-J. (2003). *Dictionnaire Wittgenstein*. Paris: Gallimard.

MARGOLINAS C., ABBOUD-BLANCHARD M. & BUENO-RAVEL L. (2009) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

MATHERON Y. & MERCIER A. (2004) Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. *Revue des sciences de l'éducation*, **30(2)**, 355-377.

MERCIER A. (1999) *Sur l'espace-temps didactique. Etudes du didactique, en Sciences de l'Education.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université de Provence, France.

SCHUBAUER-LEONI M.-L. & LEUTENEGGER, F. (2005) Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), 407-429.

SENSEVY G. (2011) *Le sens du savoir: éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles: De Boeck.

SENSEVY G., FOREST D., QUILIO S. & MORALES G. (2013) Cooperative Engineering as a Specific Design-Based Research in Joint Action Theory in Didactics. *ZDM*, 45(7), 1031-1043.

SENSEVY G. & MERCIER A. (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

VI - ANNEXE 1

Extrait du document support de l'ingénierie – version du 24 septembre 2012 – p 8

Présentation des représentations à utiliser dans la situation didactique

Le professeur lors de cette mise en commun notamment au cours de la première séance introduit les deux systèmes de représentation, le segment et la boîte, systèmes qui sont réinvestis lors des parties fictives (séances 3 et 4 de ce module et dans les modules suivants).

L'objectif est que les élèves puissent passer d'un système de représentation à un autre. Par exemple, à partir d'un segment représenter la boîte puis écrire l'addition correspondante.

L'introduction rapide des représentations segments et boîtes permet d'entraîner tous les élèves dans un langage écrit commun pour comparer leur annonce avec le lancer.

Par exemple, le professeur propose au tableau à partir d'une annonce choisie, de la représenter de plusieurs façons.

Annonce : 2+1
Lancer : 4
Gagné/Perdu (G/P) : P

3	
2	1

VII - ANNEXE 2

Transcription des épisodes concernant l'enjeu « représenter les quantités » - Usages des représentations

Episodes biographiques - Extraits transcription ou résumés - Réunion du 24 octobre 2012
Episode 1 (31 min 26 – 34 min 21) Chercheur : entre nous on va adopter un vocabulaire entre nous on appelle ça les boîtes de Fischer le schéma la représentation avec des segments je ne souhaite pas qu'on appelle ça règle […] *c'est pour raisonner* pour raisonner […] c'est une représentation qui est liée et qui va être >j'avance un petit peu par rapport à ça< dont les usages vont être réglés par les usages soit avec les doigts soit avec les boîtes et la boîte va être réglée soit avec le schéma ligné soit avec les annonces et donc *les*

manipulations qu'il va y avoir vont pouvoir être référées à ce système à cette référence commune que sont les annonces et les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces (TdP 146-154)
Episode 2 (épisode 36 min 19 – 37 min 53) Prof A : le premier problème pour moi et je pense c'est aussi celui de nos élèves c'est pourquoi je remplis ça ça ne sert à rien pour jouer et du coup après au retour *j'ai cherché à voir l'utilité* alors la boîte c'est venu assez rapidement la boîte je mets les résultats de mon calcul et *je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas euh:: la boîte* après c'est venu très naturellement pour la droite vérifier la somme de:: voilà son annonce et quel était le nombre et la droite graduée alors je sais pas si c'est bien ou pas mais ça a une utilité j'ai vu *c'est une vérification du calcul effectué* Prof B : moi j'ai vu comme toi Prof A : ils font leur calcul pour moi 3+2 ça fait 5 d'accord je mets le 5 et sur ma droite je vais vérifier alors je mets 3 points après je mets 2 points et je vérifie que ça fait bien 5 et que je me suis pas trompé Prof B : c'est ça oui Prof A : alors après évidemment c'est qu'ils comptent mais d'un autre côté ils le faisaient aussi ils vérifiaient avec leurs doigts des fois *ils sont sûrs ils avaient pas besoin de le faire mais du coup ceux-là je leur impose quand même de remplir quand même la droite et ça ça me gêne* et euh:: par contre ceux qui arrivaient pas à faire la somme il fallait bien 3+2 combien ça fait ils me regardent avec des yeux comme ça comment je fais et tu te rappelles pas non je me rappelle pas et *alors comment je fais pour euh pour savoir si j'ai gagné ou pas* (TdP 171-175)
Episode 3 (épisode 37 min 53 – 40 min 47) Prof C : le sens du schéma ligné moi je l'ai introduit comme une comparaison entre une annonce et un lancer voilà mon annonce on compte pas forcément combien de ponts il y a ou combien mais *on voit tout de suite si c'est différent ou si c'est égal* et après on a beaucoup enfin moi *j'insiste toujours sur combien il y a de plus combien aurait dû faire le dé* pour qu'il y en pour que ça soit égal et *on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus* mais jamais pour vérifier (TdP 180)
Episode 4 (épisode 42 min 20 – 43 min 35) Prof B : moi j'ai fait plutôt comme la collègue [Prof A] le schéma ligné et c'est encore plus flagrant sur le module 4 ouais sur le module 4 il sert de vérification parce que les élèves dans le module 2 ils n'en ont pas besoin dans le sens où ils vont utiliser leurs deux mains et vérifier l'annonce en direct mais *à trois mains ils ne peuvent plus le faire et là le schéma ligné va servir de vérification* c'est-à-dire qu'ils vont remplir la boîte ils vont écrire le résultat dans le haut de la boîte et le schéma ligné va leur permettre de vérifier ce résultat de la boîte en fait […] Prof D : parce que *parfois ils font des erreurs sur le schéma ligné* qu'ils font pas dans la boîte Prof E : ça j'ai vu moi aussi (TdP 188-195)

Episode 5 (épisode 43 min 36 – 43 min 55)

Prof D : ils s'en servent pour représenter enfin c'est vraiment on refait trois fois le même truc je fais une annonce j'écris je fais une addition je fais la boîte je fais la ligne

Prof F : c'est trois façons de faire la même chose (TdP 196-197)

Episode 6 (épisodes 1h 12min 46 – 1h 19min 06 et 1h 25min 03 – 1h 29min 13)

A partir d'un constat par les professeurs de difficultés des élèves de transférer la situation du *Jeu des annonces* pour donner la somme de deux termes (sur la feuille de calcul prévue dans le domaine calcul mental), un professeur (G) propose une référence à une quantité de billes provenant de deux poches de pantalon. Le chercheur rappelle le système de référence construit avec le *Jeu des annonces* et demande de considérer l'écriture additive *comme modèle pour d'autres situations*.

Chercheur : l'usage de cette représentation *pour anticiper fictivement ce qui pourrait apparaître concrètement* c'est un grand pas pour les élèves c'est pas spontané ça se construit *il faut apprendre à la contrôler* voyez le contrôle sur ces représentations il est pas spontané donc *il doit référer aux usages que vous avez construits précédemment* ou qui pourront apparaître avec les billes avec les fleurs avec les élèves de la cour *y a des tas de situations où on pourrait utiliser convoquer utilisez-le dans vos usages courants* combien on est aujourd'hui et bien on est 4 filles plus 12 garçons (TdP 403)

Episode 7 (épisode 1h 29min 13 - 1h 32min 12)

Prof H : j'en ai un qui a fait une annonce à un moment donné donc le premier a annoncé quelque chose le deuxième annonce autre chose et j'ai vu le troisième réfléchir alors *ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6*

Chercheur : c'est bon ça

Prof H : c'est génial

Chercheur : alors est-ce que tu as utilisé alors *voilà une opportunité n'hésitez pas s'il vous plaît à utiliser les représentations* à ce moment-là c'est là que ça va jouer fort (TdP 442-445)

Episode 8 (épisode 2h 43min 10 – 2h 44min 27)

Prof C : elle [la boîte] me gêne pour un truc alors je suis persuadée que les gamins quand ils ont 3 et 2 si on met le 5 en haut la seule utilité que j'y vois *c'est d'avoir un répertoire additif* >c'est pas inintéressant hein< effectivement mais ils vont chercher ils vont toujours compter quoi avec cette boîte

Prof I : pas spécialement non c'est une autre manière d'envisager l'addition

Prof C : *ça enlève le côté malin du truc* quoi moi j'ai des gamins qui cassent un nombre pour le mettre avec l'autre parce que c'est plus utile et avec la boîte tout est emboîté quoi

Chercheur : *je vois des intérêts par rapport à la main manquante* […] il faut faire attention ce ne sera pas une représentation qui permet de calculer faut être très vigilant par rapport à ça *la*

représentation qui permet de calculer c'est le nombre et les signes opératoires (TdP 901-907)

ÉTUDE DES EFFETS D'UNE FORMATION D'INITIATION À LA RECHERCHE SUR LA DYNAMIQUE DU DÉVELOPPEMENT DES PRATIQUES DE FUTURS PROFESSEURS EN DÉBUT DE CARRIÈRE

Brigitte GRUGEON-ALLYS
PR, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
LDAR, Université Paris Diderot
brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Julie HOROKS
MCF, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
LDAR, Université Paris Diderot
julie.horoks@u-pec.fr

Résumé
La recherche présentée vise à évaluer l'impact d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques, dans le cadre du master MEEF Premier degré à l'ESPE de l'académie de Créteil, sur la formation des futurs enseignants, et plus particulièrement, sur leur façon d'enseigner les mathématiques. Nous examinons le dispositif de formation (contenu et tâches de formation) puis nous présentons les éléments méthodologiques développés pour analyser et mettre en relation les pratiques réelles des enseignants débutants mises en place au cours des séances de mathématiques et les pratiques attendues après la formation reçue, en particulier la vigilance didactique (Grugeon-Allys 2008, Charles-Pézard 2010). Dans le cadre de la double approche (Robert & Rogalski, 2002), nous cherchons à interpréter le développement professionnel des étudiants de M2 en lien avec leur composante personnelle et les contraintes de travail de l'établissement où ils enseignent. Nous présentons les premiers résultats portant sur une année d'exercice à partir de l'analyse d'un questionnaire et des observations menées en classe.

Dans le cadre du master « Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation du premier degré » (MEEF) à l'ESPE de l'académie de Créteil – Université Paris Est Créteil, les étudiants suivent pendant deux ans une initiation à la recherche pour « entamer un travail qui permettra au futur enseignant de s'inscrire dans une dynamique de développement professionnel ». Le programme de formation indique aussi que « s'initier à la recherche en produisant un travail personnel de recherche, rend(ra) mieux capable de lire des travaux de recherche, de s'en approprier les résultats, de les mettre en relation avec les connaissances déjà disponibles et de développer une attitude réflexive. » C'est cette affirmation que nous questionnons ici et essayons de tester. La discipline de recherche dans laquelle s'effectuera cette initiation est choisie parmi plusieurs options relevant de propositions rattachées à des laboratoires de recherche. Cette initiation porte sur environ 140h réparties sur deux ans et doit permettre aux étudiants de produire un mémoire de recherche, qui sera évalué dans le cadre du master.

Le projet que nous présentons ici est réalisé dans le cadre de la recherche en éducation organisée à l'ESPE - Université Paris Est Créteil. Il implique des enseignants chercheurs du laboratoire LDAR – UPEC[1], qui sont aussi des formateurs intervenant dans l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques analysée ici. Ce projet vise à évaluer l'impact de cette initiation sur la formation et la

[1] Nadine Grapin, Brigitte Grugeon-Allys, Julie Horoks, Eric Mounier, Cécile Ouvrier-Buffet, Monique Pézard-Charles et Julia Pilet

dynamique de développement des pratiques des futurs enseignants, sur le court terme en stage et sur le moyen terme dans les deux premières années d'exercice. C'est l'aspect développement des pratiques enseignantes en germes, hors de la classe et en classe, qui est ici analysé, dans un domaine spécifique, celui de l'enseignement des mathématiques. Dans cette communication, nous étudions le développement des pratiques enseignantes d'anciens étudiants de M2, ayant suivi l'option de recherche OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », au cours de leur première année d'exercice.

Nous présentons d'abord la problématique et le cadre théorique puis la méthodologie développée, en particulier pour analyser des contenus de formation et leur évolution. Nous illustrons ensuite l'expérimentation réalisée et des résultats portant sur les effets de la formation sur le développement des pratiques enseignantes et sur l'évolution de la maquette. Pour terminer, après une brève conclusion, nous projetons quelques perspectives de recherche.

I - PROBLÉMATIQUE ET CADRE THÉORIQUE

Nous cherchons à évaluer l'impact d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques sur la formation et le développement professionnel des futurs enseignants, et plus particulièrement, sur leur façon d'enseigner les mathématiques. Qu'entend on par évaluer l'impact d'une formation ?

1 Problématique

Des recherches ont déjà porté sur l'évaluation des formations initiales des professeurs stagiaires du premier degré (Butlen 2002, Peltier-Barbier 2004) ou du second degré, en particulier sur celles de professeurs de mathématiques (Grugeon-Allys 2008, 2010). Certaines ont porté sur l'étude du rôle du mémoire. Mais ces recherches ont principalement eu lieu avant l'évolution du dispositif de formation dans le cadre de la "masterisation". Depuis 2010, la réforme de la formation des futurs enseignants, avec la mise en place des masters d'enseignement et de formation, a modifié les contenus et modalités de la formation. Des unités d'enseignement ont été attribuées à l'initiation à la recherche pour transformer la perception et la pratique du métier, avec des objectifs très variables selon les académies, voire à l'intérieur d'une même académie (Grugeon-Allys 2012).

Pour aborder cette question difficile et complexe, sous différentes facettes et de manière plus générale, nous nous demandons :

- Qu'est-ce qu'une recherche sur la formation et comment peut-on la mener ?
    1. Comment en analyser les contenus et modalités ?
- Qu'évalue-t-on en termes d'effets potentiels ou réels, et comment ?
- Quels moyens, théoriques et méthodologiques, peut-on se donner ?

Pour tenter de construire un cadre d'analyse permettant de répondre à ces questions, et suite aux recherches de Grugeon-Allys (2008, 2010), nous cherchons alors à définir une référence pour caractériser la formation en relation avec les pratiques enseignantes visées.

Pour aborder l'évaluation de l'impact de l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques sur la formation des futurs enseignants, nous nous demandons :

- Quels éléments dans la dynamique de développement professionnel des étudiants ont évolué au cours de la formation par la recherche, puis des premières années d'exercice du métier ? Quelles régularités dans les pratiques ? Quelles variabilités ?
- Quelles relations entre ces régularités et les effets potentiels de la formation par la recherche définis *a priori* à partir du choix des contenus et des modalités de formation ?

- En quoi les conditions mises en place favorisent-elles l'entrée des étudiants dans une démarche de pratique réflexive (Altet 1998) portant aussi bien, sur les savoirs tant disciplinaires (ici mathématiques) que didactiques mobilisés pour enseigner, et sur leur opérationnalisation dans les pratiques développées aussi bien hors de la classe qu'en classe ?

2 Présentation de la formation à et par la recherche dans l'OR1

Les contenus de l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques sont inspirés de théories de la recherche en didactique des mathématiques française, et plus particulièrement de résultats liés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. L'initiation doit permettre de familiariser les étudiants avec quelques résultats marquants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle a aussi pour objectif de leur donner les outils nécessaires pour pouvoir réaliser un mémoire de recherche à l'issue des deux années de master. Les contenus privilégiés sont en particulier ceux relatifs aux objets mathématiques enseignés à l'école : découverte du nombre, des décimaux et fractions, calcul mental et posé, travail sur les grandeurs et la mesure, premiers apprentissages géométriques, ou encore résolution de problèmes.

La grille suivante donne la chronologie des différentes séances de l'initiation, qui seront analysées plus en détails par la suite[2] :

1ère année de master	**2ème année de master**
Introduction aux théories de DDM (TSD, TAD)	Rappel des cadres de la didactique des mathématiques
Quelques exemples de situations didactiques	Méthodologie pour le mémoire
Analyse de tâches, variables didactiques, etc.	Analyse de protocoles
Recherche bibliographique	Présentation d'un outil d'analyse de tâche
Lectures d'articles	Méthodologie pour le mémoire
L'évaluation en DDM	Gestion de l'hétérogénéité
Analyse de travaux d'élèves, pistes pour problématique	Méthodologie pour le mémoire
Gestion des élèves en difficulté	Méthodologie pour le mémoire
Méthodologie pour le mémoire	Analyse des pratiques enseignantes
Analyse de travaux d'élèves, pistes pour problématique	Analyse de vidéo
Analyse de vidéos (1)	Méthodologie pour le mémoire
Analyse de vidéos (2)	Analyse des pratiques enseignantes
Numération	Classifications/définitions

[2] Cette grille concerne l'initiation proposée à la promotion d'étudiants ayant suivi le master en 2011-2012 et 2012-2013, elle a évolué depuis, en particulier en lien avec la réflexion menée pendant cette étude.

Méthodologie pour le mémoire	Méthodologie pour le mémoire
Résolution de problèmes	L'enseignement de la soustraction
Calcul mental	Analyse de manuels
Maternelle	Méthodologie pour le mémoire
Méthodologie pour le mémoire	Situations de recherche : Maths à modeler
Méthodologie pour le mémoire	

Tableau 1 : Contenus de l'OR1

Certaines séances sont introduites à travers un contenu mathématique spécifique (calcul mental, numération), d'autres tournent autour d'un axe de recherche particulier (élèves en difficulté, pratiques enseignantes telles que l'évaluation ou la gestion de l'hétérogénéité) ou d'un outil de recherche lié aux données recueillies (vidéo, manuel, protocoles, productions d'élèves). Quelques cours s'articulent autour de l'exposition d'éléments théoriques et de leur illustration par des exemples de recherches et de résultats. Enfin, de nombreuses séances sont consacrées au suivi méthodologique du travail personnel des étudiants.

En terme de modalités de formation, dans le cadre de l'OR1, on peut considérer qu'elles diffèrent probablement des stratégies des formateurs utilisées dans le reste de la formation (cf. homologie, monstration et transposition, Houdement et Kuzniak 1996), puisque ce sont des activités liées à l'initiation à la recherche et non à l'enseignement. Par exemple, lorsque les étudiants sont amenés à « faire une analyse *a priori* fondée sur les concepts de TSD», nous les incitons à développer une pratique liée à la recherche. Un des enjeux visés est d'amener les étudiants à transférer cette démarche d'analyse *a priori* dans des situations professionnelles.

3 Cadres théoriques : plusieurs niveaux à questionner

L'enjeu de cette recherche est de mettre en relation le scénario de formation développé dans l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » et les pratiques en classe développées lors des deux premières années d'exercice, par les étudiants de deuxième année de master ayant suivi cette formation. Le phénomène didactique étudié est complexe et comporte de multiples facettes, tant du côté de la formation - système « savoir de formation/enseignant/formateur » - et du côté des pratiques enseignantes que du côté des apprentissages - système « savoir mathématique/élève/enseignant » - et il est donc nécessaire de les prendre en compte pour éclairer les différents aspects du phénomène.

Différentes théories didactiques sous-tendent donc nos analyses à tous les niveaux de cette étude : celles qui guident les choix effectués pour la formation, celles qui guident sa mise en œuvre et nous permettent d'analyser ce qui se passe en formation, celles qui nous permettent d'analyser les pratiques des stagiaires dans leurs classes, ou encore celles qui sont enseignées comme objets et outils dans le cadre de l'initiation à la recherche.

La conception du scénario de formation dépend d'hypothèses sur la formation mais aussi des contraintes de la formation liées à l'organisation générale du Master MEEF (cours répartis dans trois volets disciplinaire / professionnel / recherche, horaires, stages, formateurs, etc.). Les principales hypothèses qui fondent le scénario de formation portent à la fois sur les pratiques enseignantes visées par la formation et sur les contenus, les tâches et les modalités de formation qui peuvent contribuer à permettre un « pas de côté » pour favoriser une pratique réflexive.

L'analyse des pratiques des enseignants en classe (pratiques déclarées par les enseignants lors d'entretiens ou à partir de questionnaires ou pratiques effectives observées en classe), doit prendre en compte les contraintes personnelles et les contraintes du métier.

Pour tenir compte de cette complexité de la formation et des pratiques, il nous paraît donc nécessaire d'organiser une étude multidimensionnelle en mobilisant plusieurs cadres théoriques en fonction des objets de recherche, formation ou pratiques enseignantes, du grain d'analyse global ou local, du statut de l'enseignant générique ou spécifique.

3.1 Hypothèses sur la formation et double approche didactique et ergonomique

Les hypothèses portant sur la formation et les contraintes du métier relèvent de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002) qui imbrique une approche didactique où les activités du professeur sont analysées en fonction des apprentissages potentiels des élèves en mathématiques et une approche ergonomique où le professeur est considéré comme un individu dans l'exercice du métier d'enseignant. Les activités des professeurs sont constitutives de leurs pratiques.

Ce point de vue prend en compte la complexité et la cohérence des pratiques, associant les apprentissages des élèves et des déterminants du métier, pour dégager des logiques d'action de l'enseignant. Les pratiques enseignantes se stabilisent rapidement au cours de la formation et des premières années d'exercice (Montmollin 1984, Robert 2005). La double approche didactique et ergonomique permet une interprétation diachronique et globale du développement des pratiques, pour un enseignant spécifique donné, à partir de leur recomposition *via* cinq composantes des pratiques, cognitive et médiative, personnelle, institutionnelle et sociale. De plus, des cohérences sont observables à différents niveaux de l'activité du professeur, aux niveaux global (préparations et stratégie d'enseignement), local (organisation et gestion des situations, gestion des interactions et des improvisations), micro (gestion des gestes).

D'autres hypothèses sur la formation nous viennent de recherches déjà effectuées : l'importance de s'appuyer sur le collectif et d'organiser des mises en commun (cf. double régulation, Rogalski 2008), de partir des pratiques presque déjà là des enseignants (Robert, Roditi et Grugeon 2008), de leur proposer des analyses de ressources en prise avec la réalité du métier pour développer l'expérience (mais dans un contexte de recherche), de leur apporter non pas des méthodes à appliquer mais plutôt des alternatives pour enseigner (Robert et Horoks 2007).

3.2 Outils d'analyse de la conception et de la mise en œuvre de la formation

La conception et la mise en œuvre de la formation s'appuient sur plusieurs cadres en fonction des aspects étudiés et de différents grains d'analyse. Les contenus de la formation définis *a priori* prennent en compte des apports de la recherche en didactique des mathématiques en particulier des concepts issus de la théorie des situations didactiques - TSD : situation didactique, situation a didactique, situation d'action, de formulation ou de validation, variable didactique, contrat didactique, dévolution, institutionnalisation, milieu, stratégie optimale, rétroaction du milieu, analyse *a priori* / *a posteriori*, conception, mais aussi de concepts issus de la théorie anthropologique du didactique - TAD : transposition didactique. Les contenus portent aussi sur des résultats de recherche relatifs à l'enseignement de notions mathématiques (notamment la numération, le calcul mental, la géométrie), aux difficultés des élèves, aux pratiques enseignantes (Butlen et al. 2003, Charles-Pézard 2010). Ces concepts sont mobilisés comme outils conceptuels, dont on peut caractériser deux grands types suivant leur usage par les étudiants. Certains des concepts abordés sont utiles, plus ou moins directement, pour la classe, par exemple les concepts de variables didactiques ou de différentes phases d'une séance. D'autres outils ne voient leur présence ici justifiée que pour engager les étudiants dans l'initiation à la recherche, notamment pour concevoir des situations, des questionnaires leur permettant de tester des

hypothèses. Nous considérons que ces deux types d'outils conceptuels pourront participer au développement des pratiques de ces futurs enseignants.

La formation à l'ESPE a pour objectif d'accompagner les étudiants à développer différents niveaux de l'activité de l'enseignant en lien avec les compétences professionnelles à construire. Pour modéliser les niveaux de l'activité de l'enseignant visées dans l'OR1 il nous semble nécessaire de caractériser les types de tâches (Chevallard 1999) proposés et les modalités de formation. Les tâches ainsi caractérisées devraient permettre de motiver les raisons d'être des concepts travaillés et d'amener les étudiants à mobiliser les concepts outils transposés de la didactique des mathématiques (essentiellement ceux de la TSD) pour les résoudre. L'usage de ces outils devrait conduire les étudiants à construire dialectiquement une « certaine » prise de distance par rapport à une pratique professionnelle et une première construction d'expérience professionnelle en prise sur la réalité de l'enseignement (Cf. hypothèses sur la formation 2.1). Ce choix théorique reposant sur une approche multidimensionnelle permet de définir une référence en termes de types de tâches / activités enseignantes visées[3], pour caractériser la formation en relation avec les activités visées (relativement aux pratiques enseignantes ou pratiques liées à l'initiation à la recherche). De cette référence, nous construisons deux grilles d'analyse des pratiques :

- La liste des activités enseignantes visées *a priori* par la formation mise en relation avec une grille d'analyse des contenus de formation
- L'échelle de développement *a priori* des pratiques pour évaluer les pratiques effectives des professeurs d'école[4] en lien avec les activités enseignantes développées en classe. Nous présentons les types de tâches et l'échelle de développement au paragraphe II.

3.3 L'analyse des effets de la formation sur les pratiques enseignantes

L'analyse des pratiques enseignantes durant les deux premières années d'exercice doit permettre de mettre en perspective les pratiques visées par la formation et les pratiques effectives des enseignants en classe.

Pour comparer les pratiques visées en formation et les pratiques effectives, nous utilisons la double approche, fondée sur la théorie de l'activité de Vygotsky, qui permet de distinguer tâche prescrite / tâche effective d'une part et donc pratique visée (prescrite)/pratique effective d'autre part (Robert 2008). L'évolution des pratiques est étudiée à partir de l'étude des écarts entre les pratiques visées en formation et celles effectivement mises en place en classe, en termes de différents types de savoirs pour l'enseignement, des différentes compétences professionnelles développées, de régularités ou de variabilités de pratiques effectives (Robert, Pariès et Rogalski 2008). Les régularités sont mises en perspective des choix réalisés en formation, notamment des types de tâches développés en lien avec les concepts de la DDM mobilisés. Les variabilités sont mises en perspective des contraintes liées soit à la composante personnelle, soit aux composantes institutionnelle ou sociale (notamment l'établissement d'exercice).

Pour construire une grille d'analyse des pratiques, nous nous appuyons sur les trois i-genres définis par Butlen et al. (2003).

Les enseignants de l'i-genre 1 ou 2 se caractérisent par :

- des scénarios ne présentant pas ou très rarement de problèmes consistants aux élèves,
- des temps de recherche très réduits,
- une baisse quasi systématique des exigences de la part du professeur,

[3] Quand on parle d'activité, il s'agit d'activité engendrée par une tâche, au sens de la théorie de l'activité. Quand on parle d' « activité visée », on entend avec une technique relevant de la technologie et théorie visée, c'est-à-dire les activités enseignantes mettant en jeu les concepts transposés et les outils de la didactique des mathématiques. Les pratiques sont la résultante de toutes ces activités enseignantes.

[4] Professeur d'école stagiaire (PES) la première année d'exercice.

- une individualisation non contrôlée de l'enseignement,
- la mise en œuvre d'une certaine forme de pédagogie différenciée rendant le plus souvent impossible l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation,
- une difficulté à gérer le temps didactique . (Butlen, Charles-Pézard, Masselot 2011).

Les pratiques enseignantes visées par la formation relèvent principalement de l'i-genre 3 :

- proposition de problèmes consistants,
- organisation de phases de recherche pour les élèves,
- organisation de temps de synthèse et d'institutionnalisation suivies d'activités de réinvestissement,
- gestion collective des apprentissages et des comportements
- maintien des exigences en termes d'apprentissages.

Les pratiques d'enseignants du i-genre 3 sont caractérisées sur une échelle à quatre niveaux :

Niveau 1	proposition de problèmes consistants et aménagement d'un temps de recherche
Niveau 2	organisation d'un temps permettre aux élèves d'expliciter les procédures
Niveau 3	organisation d'un temps pour hiérarchiser les procédures
Niveau 4	organisation d'une institutionnalisation des savoirs visés

Tableau 2 : Les 4 niveaux des pratiques du i-genre 3

La mise en place de ces quatre niveaux permet à un enseignant d'exercer une vigilance didactique, définie « comme un ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro. » (Butlen et al. 2012b). Pour exercer une certaine vigilance didactique, les enseignants doivent mobiliser des connaissances mathématiques et didactiques en situation, en particulier « des outils permettant de lire le réel, issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner ». Ces outils issus en partie de la TSD peuvent permettre la mise en œuvre d'une analyse *a priori* pour identifier le savoir mathématique en jeu dans une situation d'apprentissage, le choix de variables didactiques et l'incidence de leurs valeurs sur les procédures et les résultats des élèves, pour mieux anticiper la mise en actes du projet. Pendant la classe, ces outils peuvent aider au repérage de phénomènes et à la prise de décisions.

4 Hypothèses de recherche

Nous formulons deux hypothèses de recherche :

- Hypothèse 1 : Une entrée par la recherche dans la formation à partir de types de tâches s'appuyant sur l'usage d'outils conceptuels liés à des résultats de recherche en didactique, peut favoriser le développement chez l'étudiant, futur PE, d'une « appréciation critique argumentée ».
- Hypothèse 2 : La mobilisation de ces outils conceptuels, sous certaines conditions organisées pendant la formation, peut contribuer à enrichir et à favoriser l'acquisition de certains savoirs pour l'enseignement ainsi que l'exercice d'une vigilance didactique (Charles-Pézard 2010, Butlen et al. 2012a), élément constitutif d'une pratique réflexive, chez les futurs enseignants.

II - METHODOLOGIE

Nous examinons maintenant les pratiques visées *a priori* par la formation.

1 Pratiques visées *a priori* par la formation

Les pratiques visées sont listées *a priori* (et non en fonction des contenus de l'option) à partir du référentiel national de compétences des pratiques enseignantes (cf. BO du 25 juillet 2013) et des résultats de recherche sur les pratiques. Elles prennent en compte les contenus mathématiques visés et leurs spécificités, à partir des résultats de la recherche en didactique des mathématiques pour le 1er degré. Nous distinguons les pratiques d'enseignant des pratiques de chercheur, visées par la formation.

1.1 Pratiques d'enseignant visées a priori par la formation

Nous listons ci-dessous différentes activités constituant les pratiques d'enseignant visées :

- Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée
- Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)
- Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources
- Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique
- Gérer différents types de séances (Introduction, institutionnalisation, entraînement, réinvestissement, évaluation)
- Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), institutionnalisation)
- Evaluer les élèves
- Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves
- Faire un retour réflexif sur le déroulement d'une séance
- Continuer à se former et innover.

Pour mettre en relation les activités enseignantes visées et les types de tâches mis en place pour développer ces activités, nous nous demandons :

- Pour chaque tâche proposée dans le cadre de l'initiation à la recherche *via* l'option OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », quelles sont les activités enseignantes potentiellement visées ?
- Pour chaque activité enseignante visée, quelles sont les tâches proposées dans le cadre de l'option OR1, et les contenus de DDM relatifs à ces tâches, qui peuvent avoir une influence particulière sur le développement de cette pratique ?

Quelle prise en compte du reste de la formation par rapport aux tâches proposées et à la formation de ces pratiques ?

1.2 Des types de tâches travaillés

De même, nous listons les types de tâches conçus dans la formation en OR1 pour développer les pratiques d'enseignant visées.

- Analyser des tâches et des situations
- Analyser des productions d'élèves

- Analyser des manuels
- Faire des analyses *a priori* / *a posteriori* de séances
- Analyser des vidéos au regard d'une problématique
- Rechercher et analyser des articles
- Problématiser et formuler des hypothèses de recherche
- Construire une méthodologie pour répondre à un questionnement

Nous remarquons que certains types de tâches peuvent être proposés dans les autres volets de la formation. Quels sont ceux qui sont spécifiques à l'initiation à la recherche ? Par exemple, pour ce qui concerne l'analyse de vidéos dans les autres volets de la formation, on peut imaginer qu'elle est proposée aux étudiants, mais probablement pas au regard d'une problématique définie en amont.

1.3 Des différences avec les autres UE contenant (de la didactique) des mathématiques

Même si les types de tâches peuvent être communs avec les autres UE mobilisant des contenus de didactique des mathématiques, nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ne sont probablement pas équivalents pour autant. Plusieurs éléments se conjuguent pour distinguer les tâches mises en œuvre dans d'autres UE. En voici des illustrations.

Les tâches proposées dans les autres UE utilisent différents types de ressources mais rarement, voire jamais, les articles de recherche utilisés dans une UE d'initiation à la recherche. D'autre part, préparer et mener une séance dans sa classe relève du développement de pratiques professionnelles alors que définir et mener une expérimentation en classe pour tester des hypothèses de recherche amène à prendre de la distance par rapport à des choix didactiques définis a priori, même si ce type de tâche permet aussi de développer des pratiques d'enseignant.

Nous pointons ici la différence entre question professionnelle et problématique de recherche même si les limites restent assez floues. Dans un mémoire de recherche, un étudiant de M2 va tester par exemple si « l'utilisation régulière du calcul mental dans des calculs additifs et soustractifs, sous certaines conditions, va favoriser la résolution de problèmes du champ des structures additives », hypothèse formulée à partir de l'étude des travaux de Butlen et Pézard (1992) Même si cette étude va de façon incontournable amener l'étudiant à rencontrer des questions professionnelles, l'enjeu visé n'est pas de même nature.

De même, l'analyse de données (productions d'élèves, vidéo) ne se fait pas avec les mêmes objectifs que pour une UE de formation professionnelle. Dans le cas d'une analyse de vidéo en lien avec une question de recherche, l'enjeu visé par l'analyse d'une vidéo conçue et enregistrée à cet effet, est de tester une hypothèse de recherche, avec une certaine généralité liée aux résultats mobilisés des travaux de recherche déjà étudiés. Ce ne serait pas le cas dans une analyse de vidéo, où l'enjeu serait d'analyser relativement à une analyse *a priori* (nécessaire aussi), les gestes professionnels réalisés par un enseignant, leur écart par rapport aux enjeux visés, au niveau de l'activité de l'enseignant (global, local et micro) puis de proposer localement des alternatives pour cette séance, à ces trois niveaux d'intervention possibles.

Il n'est pas toujours facile de faire ce pas de côté, pour des étudiants qui visent le métier d'enseignant, sans l'avoir encore vécu, et pour des chercheurs qui forment aussi et surtout de futurs enseignants !

1.4 Pratiques de chercheur visées a priori par la formation

Au-delà des pratiques d'enseignants, d'autres pratiques sont aussi développées : les pratiques de chercheur. Voici des activités qui relèvent de celles-ci et qui sont visées *a priori* par la formation.

- Élaborer une recherche bibliographique
- Problématiser dans le cadre de la DDM

- Formuler des hypothèses de recherche
- Diffuser des résultats de recherche en lien avec les problématiques du métier d'enseignant
- Définir une méthodologie d'analyse et recueillir des données
- Faire une analyse *a priori / a posteriori* fondée sur des concepts de la DDM en lien avec les savoirs en jeu, en s'appuyant sur les concepts de la TSD (Brousseau, 1998), de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1989)
- Mettre en place ou adapter une ingénierie didactique.

Ces activités sont nécessaires pour mener à bien un mémoire dans le champ de la didactique des mathématiques, ce qui est l'évaluation demandée au semestre 4 du master.

2 Niveau d'échelles des pratiques enseignantes

Pour étudier la dynamique de développement professionnel des professeurs d'école stagiaires débutants pour les étudiants ayant suivi l'OR1 en 2012-2013, il nous est nécessaire de définir une grille permettant d'analyser, de comparer et d'évaluer les pratiques des PES en dehors de la classe et en classe. Pour ceci, nous avons caractérisé *a priori* une échelle des pratiques enseignantes.

Nous nous référons au cadre de la double approche pour prendre en compte les contraintes institutionnelles, sociales et personnelles. Nous prenons aussi en compte les trois i-genres définis par Butlen et al. (2003). Cependant, l'échelle définie ne prend pas en compte le niveau global des pratiques. Aussi, nous avons donc croisé les activités enseignantes visées pendant la formation en lien avec les tâches travaillées en formation et les niveaux d'échelles définis. Nous obtenons, pour chacune des activités listées, 3 niveaux, C, B et A. Le niveau C relève du i-genre 1, le niveau A d'un i-genre 3 de référence. Le niveau B indique la connaissance de savoirs didactiques partiels, peu structurés et mobilisés de façon isolée. On peut aussi envisager un niveau A-, entre B et A, qui relèverait d'un i-genre 3 ne comporte pas de hiérarchisation des procédures, ni d'une institutionnalisation complète mais locale, et permettrait au chercheur de noter une pratique en voie de construction.

Illustrons notre propos. Qu'en est-il pour l'activité « construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence) » ?

	C	B	A
construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)	* Situation isolée, non adaptée aux objectifs * au cycle 1, les ateliers conduisent majoritairement à de l'occupationnel	* Situation adaptée par rapport aux objectifs visés, située plus ou moins dans une progression, mais sans variables didactiques qui permettraient de faire évoluer les procédures * au cycle 1, au moins 1 atelier présentant des enjeux d'apprentissage par rapport aux objectifs visés	* Situation adaptée par rapport aux objectifs visés, située dans une progression, avec un milieu riche lié à des variables didactiques qui permettent de faire évoluer les procédures * au cycle 1, les ateliers visent des apprentissages et sont situés dans une progression

Tableau 3 : Les trois niveaux pour l'activité « construire une situation adaptée »

Les différents niveaux tiennent compte des pratiques visées par la formation, pour atteindre avec le niveau A une pratique « de référence » selon nous. Le niveau B conduit à une situation adaptée par rapport aux objectifs visés, rarement située dans une progression, et sans variables didactiques qui

permettraient de faire évoluer les procédures.[5] Entre A et B, on pourrait ici envisager un niveau A- avec un milieu matériel pertinent mais peu explicité.

Un autre exemple, avec l'activité « gérer les différentes phases d'une séance », permet de voir comment les différents éléments théoriques évoqués précédemment, ici tirés de la TSD servent aussi à définir ici les différents niveaux possibles :

	C	B	A
gérer les différentes phases d'une séance dévolution, **recherche,** **mise en commun** **institutionnalisation**	* Pas de phases clairement identifiées (oral collectif, exercices individuels écrits avec faible mise en commun, usage dominant de fichier) * Peu d'initiatives laissées aux élèves, validation à la charge du professeur	* Des phases sont organisées mais pas forcément gérées pour engager les élèves dans la recherche et la comparaison des procédures * Initiatives partagées mais peu de validation à la charge des élèves, ou qui ne visent pas la construction d'une rationalité mathématique * au cycle 1, les phases sont gérées au sein des ateliers	* Organisation d'une phase de lancement (reformulation ou autre) * Organisation d'un temps de recherche * Organisation d'une mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), avec des initiatives partagées et des validations visant à la construction d'une rationalité mathématique * Organisation de bilans conduisant à une institutionnalisation (dépersonnalisation, décontextualisation) en lien avec l'activité * au cycle 1, les phases sont gérées aussi au sein du collectif

Tableau 4 : Les trois niveaux pour l'activité « gérer les différentes phases d'une séance : dévolution, recherche, mise en commun, institutionnalisation »

Ici encore, un niveau intermédiaire entre A et B pourrait être défini, lorsqu'on observe une prise en compte des élèves pour organiser la formulation et la validation des procédures, mais sans prendre en compte leur hiérarchisation, et que des bilans oraux sont faits par l'enseignant, mais sans dépersonnalisation ni décontextualisation pour le moment, ni de traces écrites et d'affichages

Nous présentons maintenant l'expérimentation réalisée et comment nous avons mobilisés ces outils pour étudier le développement professionnel des étudiants lors de la première année d'exercice.

III - EXPÉRIMENTATION ET PREMIERS RÉSULTATS

1 Expérimentation réalisée et données recueillies

1.1 Expérimentation

L'UE d'initiation à la recherche a été mise en place depuis septembre 2010 dans le cadre du master MEEF de l'ESPE de Créteil. Nous avons étudié la dynamique de développement des pratiques des premiers étudiants ayant choisi l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » comme

[5] Dans le cadre de la TAD, on chercherait à identifier les techniques associées aux types de tâches et les technologies concernées, ce qui a été fait par Grugeon-Allys (2008).

UE d'initiation à la recherche et l'ayant suivie sur 2 ans : en 2011-2012 pour le M1 et 2012-2013 pour le M2 et 21 d'étudiants l'ont suivie. Nous avons fait passer un questionnaire aux étudiants en fin de M2, avant les soutenances, pour appréhender leurs points de vue sur la formation reçue. Nous ne présenterons pas cette partie de la recherche ici, même si elle nous permet de repérer des évolutions éventuelles du regard que les étudiants portent sur leur formation et son utilité.

En 2013-2014, nous avons organisé le suivi de 12 professeurs d'école stagiaires[6] (PES, première année d'exercice) issus de cette promotion de M2, nommés dans des écoles dans les trois départements de l'académie de Créteil[7]. Au delà des PES ayant suivi l'OR1, nous avons aussi suivi huit étudiants ayant participé à une autre option de recherche. Ces étudiants constituaient un groupe témoin. Nous cherchons des régularités dans les pratiques des PES ayant suivi l'OR1, aspects non présents dans les pratiques des autres PES.

Pour accéder à des éléments des pratiques de ces PES hors classe et en classe, pendant cette première année d'exercice, nous avons organisé la méthodologie suivante. Nous avons réalisé les deux visites prévues dans le cadre de l'accompagnement des PES par les professeurs de l'ESPE. Nous avons explicité le protocole de visite avant les deux visites aux PES (protocole conçu pour que tous les chercheurs respectent les mêmes modalités de visite, avant, pendant et après l'observation, et annoncent les mêmes objectifs aux PES) et avons précisé que nous exploiterions les données recueillies dans une recherche en cours[8], indépendamment du processus de titularisation. Les étudiants nous ont fourni leurs préparations de séances (certains ne les ont pas fournies d'eux mêmes). Nous avons organisé l'observation en classe et les entretiens formatifs, comme indiqué dans le protocole. Les comptes rendus de visites et les bilans de formation ont été pris en compte lors des deux commissions de titularisation. Aussi, la mise en place du protocole de visite nous a semblé essentielle pour expliciter les conditions de la visite afin d'éviter au maximum d'interférer avec le processus d'évaluation des étudiants. Nous présentons ci-dessous les données recueillies dans ce contexte.

1.2 Données recueillies

La formation dans l'OR1

Nous analysons d'abord les contenus de formation, types de tâches et modalités de l'OR1 mise en place en M1 (2011-2012) et en M2 (2012-2013), pour en lister toutes les tâches et les activités qui ont pu en découler.

Les réponses au questionnaire en fin de M2

Nous analysons les réponses aux questionnaires passés en fin de M2 pour obtenir leurs points de vue sur la formation reçue et des éléments portant sur leurs pratiques déclarées. Quinze étudiants ont répondu au questionnaire. Plusieurs thèmes étaient abordés, parmi lesquels l'intérêt porté aux contenus de l'OR1, le lien entre ces contenus et ceux des autres UE, la place du mémoire. Les étudiants ont aussi fourni leur note à l'épreuve orale de mathématique du concours de professeur des écoles, ainsi que les rapports de visites effectuées pendant leur stage et les écrits professionnels associés à ces stages.

Les données recueillies sur les pratiques des PES

Pour recueillir les données relatives aux 20 PES observés en classe (dont 12 issus de l'OR1), nous avons défini une grille d'observation commune à l'ensemble des chercheurs impliqués dans la recherche, permettant d'organiser et d'harmoniser le recueil d'informations suite à l'observation, lors de chaque visite. Cette grille retrace à la fois dans le détail ce qui s'est passé lors des séances observées, mais comporte aussi des éléments plus généraux (établissement, nombre d'élèves, affichages dans la classe, participation à des projets d'école, etc). Entre les deux visites effectuées pour chaque PES, nous avons

[6] Nous avons sollicité tous les étudiants de l'OR1 ayant validé leur Master, et suivi en stage dans l'académie tous ceux qui avaient accepté de l'être

[7] 6 PES dans le 93, 4 PES dans le 94 et 2 PES dans le 77.

[8] Nous avions présenté la recherche dans laquelle nous étions engagés depuis l'année de M2.

construit une grille d'analyse relative à l'échelle de leur développement. Nous avons ainsi décrit la dynamique de développement à l'œuvre en fin de première année d'exercice, à partir des niveaux sur l'échelle de développement des pratiques, pour chaque activité visée a priori dans la formation, indiqués après chaque visite. La comparaison de ces grilles doit permettre ainsi de repérer des régularités à mettre en relation avec la formation et de faire apparaître des variabilités à mettre en relation avec d'autres déterminants des pratiques (institutionnel, social et personnel), notamment l'établissement dans lequel les PES ont exercé, l'équipe pédagogique avec laquelle ils ont travaillé.

Nous avons aussi réalisé un entretien après la deuxième visite pour obtenir des traces de la formation suivie pendant l'OR1, sur des points qui n'auraient pas été spontanément abordés lors des entretiens formatifs de visite.

L'enjeu de l'analyse de ces données est de tester les hypothèses de recherche présentées à la fin du paragraphe 1.

Nous présentons maintenant les premiers résultats de la recherche, relatifs au suivi des étudiants pendant leur première année en classe à l'issue de la formation.

2 Effets de la formation sur le développement des pratiques enseignantes

Nous avons fait l'hypothèse qu'une entrée par la recherche dans la formation à partir de types de tâches s'appuyant sur l'usage d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherches en didactique peut favoriser le développement d'une « appréciation critique argumentée ».

2.1 Des régularités pour les étudiants ayant suivi l'option

Des premiers résultats

Pour les 12 PES ayant suivi l'option, nous avons réalisé une synthèse des niveaux sur l'échelle de développement par type d'activité :

Activités	C	B	A
Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée	1	5	6
Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)	1	6	5
Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec leur enseignement	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec les apprentissages des élèves	1	9	2
Gérer différents types de séances	1	7	4
Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun institutionnalisation)	1	4	7
Evaluer les élèves	1	8	3
Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves	1	9	2
Faire un retour réflexif sur une séance	1	4	7

Continuer à se former et innover	1	4	7

Tableau 5 : niveaux de développement professionnel des PES issus de l'OR1, pendant leur première année en classe

Il apparaît clairement des régularités dans l'analyse des niveaux de développement. Les niveaux se situent entre A et B, selon les activités visées *a priori* par la formation, à l'exception d'une PES qui était en grande difficulté et n'arrivait pas à gérer la paix scolaire dans sa classe, les origines de ces difficultés relevant certainement d'éléments extérieurs à la formation. Nous indiquons des points saillants.

Les PES ont construit des situations qui globalement ont du sens pour les élèves. Lors de leur préparation, ils ont anticipé plus ou moins implicitement les procédures et les erreurs envisageables dans la résolution des tâches proposées en mathématiques, sans toujours faire explicitement référence aux concepts de la didactique lors de l'entretien.

En ce qui concerne la gestion des différentes phases d'une séance, nous constatons que, à l'exception de la stagiaire en difficulté, les PES laissent un temps de recherche assez conséquent aux élèves, puis prennent en compte les procédures pendant une phase de mise en commun mais certains n'organisent pas encore leur hiérarchisation. Nous remarquons que les phases de synthèse sont davantage menées collectivement, ce qui entraîne que la validation reste encore souvent prise en charge par l'enseignante.

Un exemple : Carole

Nous illustrons la dynamique de développement à partir de l'exemple de Carole. Carole est une PES nommée en Grande Section de maternelle dans une ZEP difficile du département de la Seine Saint Denis. En fin de M2, elle avait donné un avis assez négatif sur la formation reçue dans l'UE d'initiation à la recherche.

Dès la première visite, Carole propose des situations qui ont du sens pour les élèves, mais ne s'appuient pas assez sur des situations vécues par eux. Elle organise une mise en commun rapide en regroupement sur l'atelier dirigé. Lors de la deuxième visite, elle a pris en compte des conseils : dans la séquence proposée, elle a d'abord proposé des situations vécues avant des situations plus abstraites ; les variables didactiques étaient prévues *a priori* implicitement, ainsi que les procédures et les difficultés envisageables ; elle a construit une grille pour les repérer qu'elle a utilisé en situation ; lors du regroupement, pour l'atelier correspondant à l'évaluation finale, elle a organisé une mise en commun des procédures en les faisant verbaliser par les élèves puis en les hiérarchisant et a terminé par une institutionnalisation. Voici la grille récapitulant la dynamique de développement des pratiques de Carole :

	1ère visite	**2ème visite**				
NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT DES PES	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**A**
repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée		x			x	
construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)		x				x
choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources		x			x	
connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec leur enseignement		x			x	

connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec les apprentissages des élèves		x			x	
gérer différents types de séances		x				x
gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun, institutionnalisation)		x				x
évaluer les élèves		x				x
gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves		x			x	
faire un retour réflexif sur une séance		x				x
continuer à se former et innover			x			x

Tableau 6 : Niveau de développement de Carole pour deux visites

Lors de l'entretien en fin de visite, le formateur a questionné Carole pour l'amener à mettre en relation les pratiques développées comme PES et la formation reçue lors du Master MEEF. Carole a en effet exprimé les apports qu'elle a trouvés dans sa formation, et en particulier grâce aux outils pour analyser ce qui se passe en classe, elle souligne l'analyse *a priori* qui lui permet, de prévoir et d'analyser les écarts entre ce qui était prévu et ce qui s'est effectivement passé. Elle dit le faire de manière instinctive, « sans y penser ». Pourtant Carole avait répondu de manière assez négative au questionnaire posé en fin de formation, ce qu'elle , moins d'un an plus tard, à des difficultés à concilier toutes les demandes du Master et du concours de professeur des écoles, et en particulier le travail « énorme » lié au mémoire. Cela met un peu en lumière des apports possibles de la formation, exprimées par Carole mais aussi des conditions de travail en formation très difficiles au vu des contraintes liées à la réalisation parallèle du Master, des stages et du concours, ce qui pourrait expliquer les réponses de Carole en fin de M2.

2.2 Des variabilités liées aux contraintes

Nous identifions des variabilités entre les PES qui peuvent être liées à différents types de contraintes. Suite aux entretiens, nous associons des contraintes à la composante personnelle.

Ces variabilités peuvent relever du rapport des PES au rôle de l'école, de leur rapport au savoir mathématique, d'une maturité plus ou moins grande, d'une posture ayant eu plus ou moins de mal à s'installer. De plus, nous avons relevé une grande différence entre les PES, selon qu'ils aient ou non réalisé en M2 leur stage en alternance.

Ces variabilités peuvent aussi dépendre du type d'établissement dans lequel les PES ont effectué leur première année d'exercice : nomination en maternelle ou en élémentaire, nomination en ZEP ou non, existence d'un projet d'école ou non, travail d'équipe possible avec des collègues installés ou non depuis longtemps dans l'établissement, d'i-genre 1 ou 3. Ces conditions d'exercice vont favoriser plus ou moins leur intégration dans leur nouveau métier.

Revenons sur le cas de Carole. Les déterminants liés à sa composante personnelle sont favorables à une entrée rapide dans le métier : « (Elle est) *issue d'un milieu humble.* (Elle insiste sur le) *rôle fondamental de l'école pour pouvoir réussir.* (Elle a développé) *une éthique et une forte conscience du rôle et des missions de l'enseignant.* (Elle porte) *une ambition pour les élèves et une volonté de développer leur sens des responsabilités* »

Carole a été nommée dans un établissement qui offre des conditions favorables à son intégration rapide dans ce métier. L'école développe un projet d'école autour de plusieurs entrées : « *l'étude des différents continents, la construction d'un abécédaire autour des lettres définies à partir du nom des continents étudiés*

(Afrique, Asie, ..), la construction d'un livre à compter ». L'établissement développe un travail d'équipe. Au début, Carole a eu des difficultés à s'insérer dans le travail d'équipe et a favorisé des discussions sur sa progression avec les enseignants nommés en Grande Section. Elle a participé au travail d'équipe et aux projets d'école après la deuxième visite : « (Il y a une) *très bonne atmosphère.* (C'est une) *grande aide.». En Grande Section,* « (il y a) *échange des fiches. Pas sur les préparations mais sur les activités ».*

Nous faisons l'hypothèse que, au delà de la formation, ces déterminants, à analyser dans le cadre de la double approche, ont été autant de catalyseurs pour favoriser une dynamique de développement des pratiques chez Carole.

2.3 Résultats

En ce qui concerne les hypothèses formulées, l'analyse des données recueillies suite à la première année d'exercice des PES ayant suivi l'UE d'initiation à la recherche à partir de l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », met en évidence qu'une entrée par la recherche dans la formation peut avoir des effets favorables :

- un changement probable du regard des PES sur la formation, malgré des contraintes très fortes lors de l'année de formation,
- le développement d'une appréciation critique argumentée, en lien avec l'usage des d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherche en didactique, mobilisés pour résoudre les types de tâches proposés dans l'OR1, même si ce résultat reste à étayer.

Il est important d'étudier la stabilité d'un tel développement à moyen terme puis à plus long terme puis de le comparer aux PES du groupe témoin, ce que nous n'avons pas encore réalisé.

La recherche engagée a déjà apporté des effets concrets sur la formation. En effet, elle nous a conduit à faire évoluer la maquette de l'OR1 pendant l'année 2013-2014, pour prendre en compte davantage le développement potentiel des pratiques enseignantes visées.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Il nous faut tout d'abord souligner les nombreuses limites à notre étude : en premier lieu le faible nombre d'étudiants, qui ne permet pas de résultats très généraux, surtout si on considère que certains de ces étudiants, qui ont choisi l'OR1 parmi d'autres options, pouvaient avoir déjà une prédilection pour les mathématiques et leur enseignement, ce qui influence peut-être leurs pratiques en classe. D'autre part, le nombre et les rôles des chercheurs impliqués dans cette recherche est aussi à questionner : le grand nombre d'intervenants dans le cadre des cours de l'OR1 a rendu difficile la possibilité d'avoir une vision globale des contenus proposés et stratégies adoptées lors des séances, malgré un travail important pour essayer de reconstituer les objectifs de chacun, mais sans avoir accès au déroulement précis des séances ; quant aux différents rôles des chercheurs, qui sont aussi formateurs et évaluateurs, ils ne facilitent pas l'objectivité, ni du côté des chercheurs, ni de celui des étudiants PES.

Il nous semble cependant avoir observé chez les PES issus de l'OR1, malgré des contraintes extérieures fortes qui ont pu influencer leurs choix, des pratiques plus développées que les autres en ce qui concerne la gestion des phases d'une séance, ce qui semble cohérent avec le travail effectué dans le cadre de l'option, en particulier sur l'analyse de situations et de vidéos. Nous avons repéré chez eux aussi des capacités à faire une analyse pertinente de leur propre pratique et à continuer à se former, sans forcément utiliser de manière explicite les concepts travaillés lors de l'OR1, mais avec un certain recul. Bien entendu, il ne nous est pas possible de distinguer ce qui provient des apports de l'option par rapport au reste de la formation, même si les questionnaires proposés en fin de M2 nous ont permis de mesurer, pour chaque étudiant, l'originalité plus ou moins grande des tâches proposées dans l'OR1 par rapport aux tâches proposées par ailleurs. Enfin, il nous faudra analyser finement les observations réalisées chez les PES issus d'autres options pour pouvoir effectuer une comparaison plus poussée.

Cette réflexion sur les contenus et modalités de la formation par l'initiation à la recherche, et leurs effets potentiels, nous a aussi amenés à faire évoluer notre offre de formation, en ayant plus que jamais à l'esprit, pour chaque séance proposée, les activités enseignantes visées et les besoins des futurs PES.

V - BIBLIOGRAPHIE

ALTET, M. (1998) Quelle formation professionnalisante pour développer les compétences de " l'enseignant professionnel " et une culture professionnelle d'acteur, in Tardif, M., Lessard, C. et Gauthier, C. (dir.) *Formation des maîtres et contextes sociaux. Perspectives internationales*, Paris, PUF, pp. 71-86

ASSUDE T., GRUGEON B. (2006) Développement d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration de logiciels de géométrie dynamique. *Revue Quadrante*, 13(2) 31-50.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012a) Quelques pistes de réflexion à l'issue de deux années de mise en place des Masters préparant à la profession de Professeur des Ecoles. In R. Lozi & N. Biagioli (Eds). *Actes des 2èmes rencontres des chercheurs en interdidactique*, (254-264).

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012b) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *in actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »* Genève, Suisse

BUTLEN B., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2011) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In actes du Colloque international INRP, 16, 17 et 18 mars 2011 « Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle ».

BUTLEN D., MASSELOT P., PÉZARD M. (2003) De l'analyse des pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/ REP à des stratégies de formation, *Recherche et formation*, n°44, 45-61.

BUTLEN D., PÉZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Grenoble vol 12, n°2.3, 319-368.

CHARLES-PÉZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol 30-2, 197- 261

CHARLES-PEZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble, La pensée sauvage

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 19, n° 2, 221-266.

GRUGEON-ALLYS B. (2012) L'initiation à la recherche dans le Master Enseignement et Formation (M.E.E.F.) à l'IUFM d'Amiens In R. Lozi & N. Biagioli (eds) *Acte des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique : L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'université.* Université de Nice Sophia-Antipolis, 25-26 octobre

GRUGEON-ALLYS B. (2010) Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice, In R. Goigoux, L. Ria et M.C.Toczek-Capelle (eds), *Les parcours de formation des enseignants débutants,* Presses Universitaires Blaise Pascal. ISBN 978-2-84516-401-7.

GRUGEON B. (2008) Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM, in F. Vandebrouck (eds), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* pp. 328-366. Toulouse : Octarès. ISBN 978-2-915346-59-6

GRUGEON-ALLYS B (2006) Conception et évaluation de la formation des professeurs stagiaires de collège et lycée, in Chiocca et Laurençot (eds), *DVD des actes de la CORFEM*. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 16, n° 3, 287-322.

.MONTMOLLIN (DE) M. (1984) *L'intelligence de la tâche,* Berne : Peter Lang.

ROBERT A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol 10, 209-250.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des professeurs de mathématiques. In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des professeurs,* F. Vandebrouck (eds) (45-52). Collection Formation, Octarès Editions.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies,* vol 2.4, 505-528.

ROBERT, A., HOROKS, J. (2007) Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 279–287.

ROBERT A., RODITI E., GRUGEON B. (2008) Diversité des offres de formation et travail du formateur d'professeurs de mathématiques du secondaire. *Petit x* n°74, 60-90.

ROGALSKI J., (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité : une perspective de psychologie ergonomique, In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des professeurs,* F. Vandebrouck (eds) (23-30). Collection Formation, Octarès Editions.

SAYAC N. & DELARUE-BRETON C. (2012) Recherche, rapport au savoir et (pré)professionnalisation des enseignants. In R. Lozi & N. Biagioli (eds) *Acte des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique : L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'université.* Université de Nice Sophia-Antipolis, 25-26 octobre.

VERGNAUD G. (1989) Psychologie et développement cognitif et didactique des maths : un exemple : les structures additives. *Petit x*, 22, 51-69.

WENTZEL B. (2008) « Formation à la recherche et postures réflexives d'enseignants en devenir ». *Recherche et formation, 59, Formation* à *la recherche, formation* par *la recherche,* 89-103.

PENSER LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN FORMATION DES MAITRES

Alain KUZNIAK
Professeur, Université Paris Diderot
LDAR (EA 1547)
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Résumé
. Pilotées par les grandes évaluations internationales, les réformes de l'enseignement des mathématiques au niveau européen modifient peu à peu, mais radicalement, les contenus et les visées de cet enseignement. Le travail mathématique attendu se trouve ainsi transformé et il n'est pas aisé de le situer entre les attentes traditionnelles mises en place dans le champ de la recherche mathématique et celles utilitaristes relevant des attentes sociétales.

Dans cette communication, nous avons montré comment la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) permettait d'éclairer précisément cette question des formes et des enjeux de l'activité mathématique en situation scolaire.

I - LES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

En effet, les ETM ont notamment été développés pour décrire et définir la nature et la circulation du savoir mathématique dans la classe et l'activité mathématique effective de l'élève en relation avec celle du professeur.

L'essentiel de la communication a été consacré à une présentation de notre modèle qui articule approches épistémologique et cognitive. Nous avons envisagé les différentes entrées possibles dans le travail géométrique :

- *entrée perceptive* en lien avec le travail de visualisation ;
- *entrée expérimentale* articulée sur les outils technologiques ;
- entrée discursive couplée avec la question de la preuve.

Nous avons proposé une articulation de ces différentes entrées autour de la constitution d'un travail géométrique cohérent basé, d'une part, sur la gestion de l'approximation et, d'autre part, sur un travail sémiotique sur les figures.

Pour une présentation complète du modèle, nous renvoyons plus particulièrement aux comptes-rendus des ateliers de Kuzniak et Rauscher (2003, 2004) lisibles dans les actes des colloques de la COPIRELEM du colloque d'Avignon et de La Roche-sur-Yon ainsi qu'à l'article de Kuzniak (2011).

Quant au modèle des ETM, son usage en formation des enseignants est notamment illustré dans l'article de Gomez-Chacon et Kuzniak (2011).

Enfin, nous avons aussi exploré la pertinence et les usages possibles des ETM dans la formation des enseignants du premier et du second degré notamment pour penser la constitution de planification. Cet aspect a fait l'objet d'un travail d'atelier avec Assia Nechache : ***Penser une progression en en formation des enseignants***. Une présentation détaillée de l'atelier figure sur le CDROM des actes de ce colloque **Atelier 33.**

II - BIBLIOGRAPHIE.

Les références ci-dessous sont disponibles en ligne.

Gomez-Chacon, I. & Kuzniak, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométriques de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 187-216.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 19-24.

https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/#c62294

Kuzniak, A. & Rauscher, J-C (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2002, La Roche sur Yon.

Kuzniak, A. & Rauscher, J-C (2004). Un exemple de sensibilisation des étudiants PE1 à la géométrie en tant qu'objet à enseigner. Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2003, Avignon.

www.arpeme.fr/index.php?id_page=4

UNE RESSOURCE À RESTAURER : UN USAGE COMMUN DES MOTS GRANDEUR, QUANTITÉ, NOMBRE, CARDINAL, ORDINAL ET DÉNOMBREMENT

Rémi Brissiaud
Chercheur au Laboratoire Paragraphe, EA 349 (Université Paris 8)
Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »
Membre du conseil scientifique de l'AGEEM
remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Résumé
Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ?[1] Il est en effet montré que la pérennité de l'enseignement du comptage-numérotage en France a été rendue possible par un incroyable laxisme chez de nombreux psychologues et de nombreux didacticiens dans l'emploi des mots *grandeur*, *quantité*, *nombre*, etc. Ainsi, une confusion regrettable est celle entre la représentation numérique d'une quantité et la nominalisation de la représentation de cette quantité par une suite de numéros : 6 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les nombres (6, par exemple), y compris quand on considère des « nombres de… » (6 chaises, par exemple) étant le résultat de la mise en relation des quantités, considérer « les aspects cardinaux du nombre » par opposition à ses « aspects ordinaux » conduit à l'usage d'oxymores et à des erreurs didactiques graves.

I - LA COMPRÉHENSION DU NOMBRE COMMENCE AVEC CELLE DE L'ITÉRATION DE L'UNITÉ

Le projet de programme et de recommandations pour l'école maternelle (Conseil Supérieur des Programmes 2014–1, p. 54) indique que « Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à *la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres* ». Il faut se réjouir que cette propriété qu'on appelle le plus souvent **l'itération de l'unité** (Pierre Gréco, 1960, 1962, 1963), soit présente dans ce projet parce qu'elle n'était mise en avant ni dans le programmes de 2002 lui-même, ni dans ses documents d'accompagnement, ni dans les programmes de 2008. Or, nous allons voir que les psychologues développementalistes s'accordent aujourd'hui pour considérer qu'on ne peut pas parler de représentation *numérique* de la quantité de 6 voitures par exemple tant que l'enfant ne sait pas construire une collection correspondante en utilisant cette propriété de proche en proche : « 2 voitures, c'est 1 voiture et encore 1 », « 3 voitures, c'est 2 voitures et encore 1 », « 4 voitures, c'est 3 voitures et encore 1 »…

1 Le comptage-dénombrement : un comptage qui théâtralise l'itération de l'unité

Considérer la compréhension de la propriété d'itération de l'unité comme critère de l'entrée dans le nombre, c'est considérer que le comptage ne donne accès au nombre que lorsqu'il peut être interprété ainsi : « 1 ; et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4… ». On appellera « *comptage-dénombrement* » une façon d'enseigner le comptage qui théâtralise l'itération de l'unité, c'est-à-dire telle que l'éducateur crée les conditions pour que l'enfant comprenne que chacun des mots *deux, trois, quatre…* **réfère** à la *pluralité* d'unités qui résulte de l'ajout d'une nouvelle unité. En effet, quand on prononce un mot devant un jeune enfant en montrant quelque chose avec le doigt, comme c'est le cas lors d'un comptage, la signification

[1] Une version plus longue de ce texte a été mise en ligne sur le site de Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques sous le titre : « *Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ?* » et comme sous-titre « *Une ressource à restaurer : un usage commun des mots grandeur, quantité…* » : http://www.cfem.asso.fr/debats/premiers-apprentissages-numeriques.

que l'enfant va attribuer aux mots utilisés, dépend évidemment de ce que l'on montre avec le doigt (Markman, 1989, 1990).

Envisageons le cas où les unités qu'il s'agit de dénombrer sont des objets déplaçables et supposons par exemple que la tâche consiste à former une collection de 6 cubes à partir d'un tas de cubes situé en bord de table. Pour montrer à un enfant comment l'on compte, l'enseignant va les déplacer du bord de la table vers son centre. Il n'y a qu'une façon de commencer : l'enseignant dit « un » en déplaçant un cube. Pour continuer, en revanche, il y a deux possibilités de coordination entre le pointage du doigt et la prononciation du mot « deux » : soit l'éducateur dit « deux » dès le moment où il pose le doigt sur un nouveau cube, c'est-à-dire avant que celui-ci soit déplacé, et l'enfant comprendra qu'il va déplacer un cube qui s'appelle « le deux », le mot « deux » fonctionnant comme une sorte de numéro ; soit l'éducateur ne dit « deux » qu'après que le cube a été déplacé, c'est-à-dire après que la collection de deux cubes a été formée, ce qui favorise la compréhension du fait que le mot « deux » désigne une pluralité. Les deux mêmes possibilités existent avec le cube suivant, évidemment : soit le mot « trois » est prononcé dès le moment où le doigt est posé sur un nouveau cube, soit il l'est seulement après que la nouvelle collection a été formée, etc. C'est la seconde façon de faire, à savoir ne prononcer le nouveau mot-nombre que lorsque la pluralité correspondante a été formée, qui correspond à ce qu'on appelle l'enseignement du comptage-dénombrement.

L'enseignement du comptage-dénombrement est encore plus explicite, c'est-à-dire « mieux porté par le langage », quand l'enseignant s'exprime ainsi (on laisse le lecteur imaginer ce que fait le doigt au moment où chacun des noms de nombres est prononcé) : « 1 », « et-encore-1, 2 », « et-encore-1, 3 »… Enfin, la forme la plus explicite qui soit est celle où, de plus, le nom de l'unité est prononcé : « 1 cube ; et-encore-1, 2 cubes ; et-encore-1, 3 cubes… ». En effet, dans l'expression « 3 cubes », par exemple, la syntaxe de ce petit groupe nominal fait que le mot 3 réfère à une pluralité, il n'est pas un numéro. Or, la signification des mots-nombres que le comptage-dénombrement cherche à privilégier est celle de quantités, c'est-à-dire de pluralités. Que l'on prononce ou non l'unité, et il est souhaitable de le faire souvent, il est clair que le comptage-dénombrement ne conduit pas d'emblée au « *nombre naturel* » qu'utilisent les mathématiciens, le « *nombre naturel 6* » par exemple, mais à un « nombre de… » : 6 cubes, 6 crayons, 6 images… Un enfant de maternelle, qui rentre dans le nombre, se l'approprie évidemment sous une forme plus contextualisée que celle que manie l'expert. Cependant, nous verrons qu'il ne faut pas confondre ce « nombre de… » avec la quantité correspondante car le « nombre de… », grâce à l'itération de l'unité, renvoie à des relations entre quantités et pas seulement la quantité elle-même.

Lorsque les unités sont alignées et non déplaçables (une file de points dessinés par exemple), enseigner le comptage-dénombrement consiste à entourer avec le doigt chacune des nouvelles quantités engendrées : « 1 point ; et-encore-1, 2 points (la collection des 2 points est entourée avec le doigt) ; et-encore-1, 3 points (idem) ; et-encore-1, 4 points (idem)… » (Brissiaud, 2007, p. 70).

La recommandation d'enseigner le comptage-dénombrement n'est pas nouvelle. On la trouve par exemple en 1962 sous la plume de René Brandicourt, instituteur d'école d'application et pédagogue dont la renommée était bien établie à l'époque puisqu'il est co-auteur d'un ouvrage consacré aux premiers apprentissages numériques avec Jeanne Bandet, Inspectrice Générale des écoles maternelles et Gaston Mialaret, l'un des créateurs des Sciences de l'Education en France. Il écrit dans cet ouvrage : « *À ce sujet, comme pour d'autres exercices qui suivent, nous signalons le danger qu'il y a, dans le comptage, à énoncer les nombres en prenant les objets un à un. C'est en posant la 2ème assiette sur la 1ère que je dis 2, non en la prenant en mains (la 2ème n'est pas 2, elle est 1) ;* ibid. *pour la 3ème, la 4ème… C'est en examinant la pile constituée que j'énonce 2, 3 , 4… 6.* »

Et, quelques lignes plus loin dans le même texte : « *C'est la même raison qui nous fait écarter, dans cette période d'acquisition de la notion de nombre, les exercices cependant amusants qui consistent à enregistrer par audition : 6 coup à l'horloge, 6 chocs à la porte, 6 chutes d'objets… Car on n'entend jamais qu'un bruit à la fois, et on a beau compter les bruits un à un, on ne perçoit que le 1er, le 2ème, le 3ème… le 6ème, jamais les 6 ensemble, qu'on ne pourrait d'ailleurs pas distinguer.* » Il est important de noter que, selon René Brandicourt, ces recommandations valent pour l'école maternelle comme pour le début du CP.

2 Théâtraliser la correspondance 1 mot – 1 unité, c'est enseigner le comptage-numérotage

Si la propriété d'itération de l'unité est si cruciale, on comprendrait mal que l'on enseigne à l'école une autre forme de comptage que le comptage-dénombrement. Or, vers la fin des années 1980, l'école française a renoncé à enseigner le comptage-dénombrement pour favoriser la façon de compter qui était rejetée par Brandicourt, celle où chacun des mots *un, deux, trois, quatre…* réfère à une unité et une seule parce que l'enseignant théâtralise la correspondance 1 mot – 1 unité. En fait, c'est cette façon d'enseigner le comptage qui est le plus souvent privilégiée dans les familles, c'est donc la façon de sens commun. Ainsi, supposons qu'un parent demande à son enfant (de 3 ans, par exemple) de compter les cubes d'une collection qui en contient quatre. Il est fréquent d'observer l'enfant toucher chacun des cubes avec l'index tout en récitant la comptine numérique mais sans aucune coordination entre les deux, ce qui peut conduire l'enfant à dire : « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » alors qu'il n'y a que quatre cubes. Dans ce cas, la plupart du temps, le parent prend le doigt de l'enfant en lui disant qu'il va lui montrer comment on compte, il pose le doigt sur l'un des cubes et dit « un » en appuyant sur le doigt de l'enfant, il pose ensuite le doigt sur le cube suivant et dit « deux » en appuyant à nouveau sur le doigt, etc. Il théâtralise ainsi la correspondance 1 mot – 1 unité. Lorsque le comptage est enseigné ainsi, les mots-nombres fonctionnent comme des sortes de numéros : « *le un, le deux, le trois, le quatre…* » et, donc, l'on peut parler de l'enseignement d'un comptage-numérotage (Brissiaud, 1989, 1995).

Depuis la deuxième partie des années 1980, depuis près de 30 ans donc, c'est l'enseignement du comptage-numérotage qui est recommandé par le ministère et non celui du comptage-dénombrement. La diffusion de cette recommandation a commencé avant l'année 1990 mais cette date est importante parce que c'est celle de la publication d'un ouvrage qui va d'emblée devenir une référence dans les centres de formation des maîtres : Ermel, Grande Section de maternelle (Charnay & al., 1990). Dans le chapitre 3 de cet ouvrage, intitulé « *Nos choix didactiques* », les nombres sont présentés comme des « *mémoires des quantités* » qui nécessitent des « *actions de correspondance objet-nombre : à chaque objet doit être associé un mot-nombre et un seul* » (p. 44). Cet ouvrage a joué un rôle considérable dans la diffusion de la recommandation d'enseigner le comptage-numérotage. Et cette recommandation s'est longtemps maintenue. Ainsi, en 2010, le ministère a mis en ligne sur le site *eduscol* une évaluation de fin de GS (MEN/DEGESCO, 2010) qui s'accompagnait de conseils pédagogiques afin que les enfants progressent dans leurs comptages. Les auteurs de l'évaluation suggéraient d'organiser « *une réflexion sur « les critères d'un bon comptage (ne rien oublier, ne pas compter 2 fois, faire correspondre les éléments au fur et à mesure du comptage), sur la base de discussions entre élèves sur les stratégies employées (cocher les éléments au fur et à mesure du comptage,* ***numéroter****…)* ». Notons que la mise en gras du mot « numéroter » est de notre fait. Cette évaluation, avec la recommandation précédente, est restée présente sur le site *eduscol* jusqu'en 2013.

Cependant, comme nous l'avons signalé au début de ce texte, ce choix didactique est en cours d'évolution puisque le projet de programme maternelle recommande d'éviter l'enseignement du comptage-numérotage (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-1, p. 48). Malheureusement, nous verrons que, dans le même temps, le ministère collabore à l'élaboration de « ressources numériques » qui conduisent à enseigner le comptage en théâtralisant la correspondance 1 mot – 1 unité. Comment expliquer une telle confusion ?

3 Restaurer un usage commun des mots quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal…

Comment expliquer le basculement vers l'enseignement du comptage-numérotage à la fin des années 1980 et comment expliquer la confusion actuelle ? Une première explication a été avancée dans un ouvrage précédent (Brissiaud, 2013) : les chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique n'étudient pas de façon suffisamment précise les choix didactiques qui étaient ceux des instituteurs et des corps d'inspection entre la naissance de l'école de la République vers 1880 et la réforme dite des « mathématiques modernes » en 1970. Ils considèrent trop souvent que la critique développée au moment de cette réforme discrédite définitivement ces choix. Si bien que les ouvrages destinés à la formation des maîtres qui contiennent une partie historique remontent rarement à la période précédant 1970 et, quand ils le font, la critique est souvent expéditive, considérant souvent que la seule

préoccupation des enseignants pendant cette période aurait été de « *remplir des têtes vides* » et que leurs élèves sachent résoudre les problèmes pratiques de la vie quotidienne. Or, la lecture du *Dictionnaire Pédagogique* de Ferdinand Buisson (1882) ou d'ouvrages tel que celui dont Mialaret a dirigé la publication en 1955 permet d'accéder à une pensée didactique beaucoup plus complexe et intéressante que cela. Bref, une première explication est l'existence d'une sorte d'amnésie de ce qu'était réellement la didactique du nombre après la naissance de l'école de la République et pendant ses 90 premières années.

Mais une autre explication, fondamentale, doit être avancée : le basculement vers la préconisation du comptage-numérotage et la confusion qui règne aujourd'hui résultent avant tout d'un incroyable laxisme dans la façon de s'exprimer tant chez les psychologues que chez les didacticiens depuis plus de 30 ans. Les uns comme les autres se sont mis à parler de « *nombres* » ou de « *dénombrement* » alors que seules des « *quantités* » étaient en jeu. Par ailleurs, ils ont été insuffisamment attentifs au fait que les situations-problèmes où il s'agit de repérer un rang sont la plupart du temps résolues par les jeunes enfants sans aucune utilisation des nombres parce qu'ils ne font qu'utiliser des « *numéros* », etc. Or, nous allons voir qu'une analyse théorique un peu précise (en se rapportant par exemple à la définition des nombres qui était celle de Newton, d'Alembert, Condorcet…) et l'examen de l'ensemble des résultats empiriques disponibles montrent de façon éloquente que l'usage des mots-nombres en tant que numéros fait obstacle à l'accès au nombre. Cette mise au point devrait permettre d'en finir avec les hésitations.

Ainsi, le progrès dans la didactique du nombre dépend aujourd'hui du rétablissement d'une ressource commune : un usage consensuel des mots quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal, etc. Afin d'avancer vers un consensus dans la définition et l'usage de ces différentes notions, une possibilité aurait été l'écriture d'un « *Vocabulaire critique pour enseigner les nombres à l'école* » avec, comme entrées, les différents mots concernés. Cependant cette forme d'ouvrage se parcourt en l'abordant par telle ou telle entrée selon la préoccupation du moment et l'une des logiques d'exposition se trouve alors reléguée à un rôle subalterne : la logique historique. Or, comme dans bien d'autres domaines, la perspective historique est une façon privilégiée de comprendre l'état actuel des idées parce qu'elle permet d'en retracer l'évolution tout en s'efforçant d'en expliquer la dynamique.

C'est la raison pour laquelle ce texte continuera comme il a commencé en adoptant un mixte des deux logiques : les notions (comptage-dénombrement, comptage-numérotage, etc.) seront présentées tantôt au sein de sections qui leur sont explicitement consacrées, tantôt au sein d'autres sections adoptant une perspective historique plus affirmée dont la ligne directrice sera toujours une tentative de réponse aux questions : pourquoi le basculement vers l'enseignement du comptage-numérotage, il y a 30 ans environ ? Pourquoi tant de confusion aujourd'hui ?

Sur le sujet qui nous intéresse ici, nous allons voir que, sur le versant psychologie, il convient de remonter au minimum à un ouvrage publié par Gelman et Gallistel en 1978 (Rochel Gelman est une psychologue développementaliste alors que Charles Randy Gallistel est plutôt spécialiste des apprentissages chez l'animal). En fait, il est préférable de remonter aux travaux de Piaget et Gréco, vers le milieu du siècle dernier : nous serons donc conduit à un survol de plus de 50 années de recherche en psychologie des apprentissages numériques. Sur le versant épistémologie, nous nous appuierons principalement sur l'*Encyclopédie* de d'Alembert, Bossut, de la Lande, Condorcet et collègues, ainsi que sur les travaux de Cantor.

En français, les mots *grandeur*, *quantité* et *nombre* ont un sens assez bien établi et ces mots, en anglais, se traduisent respectivement par *magnitude*, *quantity* et *number*. Mais on trouve dans un grand nombre de textes pédagogiques francophones, dont le projet de programme maternelle, d'autres mots qui sont des anglicismes : le mot « cardinalité », par exemple. L'usage d'anglicismes est courant en science et, donc, l'usage de ce mot en particulier ne doit pas être considéré comme un tabou, mais il conviendrait, dans ce cas, de mettre en rapport la notion correspondante avec celles qui sont déjà appréhendées par notre langue : grandeur, quantité et nombre. Rien n'est possible, donc, sans avoir au préalable une vision à peu près claire de la différence entre grandeur, quantité et nombre. C'est ce que visent les deux sections qui suivent, d'abord de manière intuitive, en présentant ce que l'on doit considérer comme des

représentations analogiques de la quantité et du nombre respectivement, puis en se référant aux « grands anciens » : Euclide, Newton, les encyclopédistes, etc.

II - GRANDEUR, QUANTITÉ ET NOMBRE : UNE APPROCHE INTUITIVE

1 Un symbole quantitatif : la collection-témoin

Considérons un berger qui, il y a plusieurs milliers d'années, aurait été amené à prendre possession d'un troupeau de moutons. Il était capable d'en apprécier la grandeur visuellement, mais cela était du plus grand intérêt qu'il accède à une meilleure connaissance de cette grandeur en réalisant une correspondance terme à terme : 1 mouton – 1 caillou. En procédant ainsi, en effet, on obtient une collection de cailloux (ou de billes d'argile) qui symbolise la quantité, ce qu'on peut appeler une collection-témoin de la quantité :

Qu'apporte cette représentation de la *quantité* de moutons par rapport à la simple perception de la *grandeur* du troupeau ? Elle est définie à « une unité près » : on n'est plus dans l'approximation. En utilisant une correspondance terme à terme, le propriétaire des moutons aura la possibilité, au retour du berger, de savoir s'il rapporte moins, autant ou plus de moutons. Alors que la notion de grandeur évoque l'idée d'approximation, la notion de quantité, elle, évoque l'idée d'exactitude à une unité près (Cf. le « *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* » d'André Lalande, 1926-1988, par exemple). Donnons un autre exemple : on sait qu'à sa naissance le bébé différencie les grandeurs discrètes lorsque celles-ci ont des tailles suffisamment différentes (Dehaene, 1997-2010). Le bébé utilise évidemment un traitement approximatif de ces grandeurs, il ne traite ni les quantités, ni les nombres.

La collection-témoin de cailloux précédente représente une quantité de moutons mais peut-on dire qu'elle en représente le nombre ? Le moins que l'on puisse dire est qu'en présence d'une telle quantité de cailloux, on connaît très mal le nombre de moutons ou, du moins, on ne le connaît pas immédiatement. On est donc face à un symbole quantitatif qui n'est pas encore un symbole numérique.

2 Un symbole numérique : la collection-témoin organisée

La situation change du tout au tout lorsqu'on utilise cet autre symbole pour représenter la même quantité de moutons :

Avec une collection-témoin organisée (cas de celle ci-dessus), la quantité est toujours représentée à « une unité près » mais, de plus, l'accès à la quantité ne nécessite plus une longue correspondance terme à terme, il est direct. Il n'y a aucun risque de confondre la quantité correspondante avec celle qui la précède ou celle qui la suit. Avec une collection-témoin organisée, ce n'est pas seulement la quantité qui est symbolisée, ce sont aussi les différences de « un » entre deux quantités successives, c'est-à-dire l'itération de l'unité. Dans ce cas, on peut parler de symboles qui fonctionnent de manière numérique.

Ces dernières années, de manière générale, les différents auteurs n'accordaient guère le qualificatif de « numérique » à ce type de représentation analogique (l'auteur de ces lignes n'est pas irréprochable de ce point de vue), mais c'est une erreur. D'une part, en effet, ce type de représentation est celui que les mathématiciens pythagoriciens, puis Pascal, Fermat… appelaient des « nombres figuraux » et ceux-ci leur ont permis de démontrer des théorèmes de haute volée en théorie des nombres (on pourra, sur ce sujet, se reporter à un très bel article de François Bresson, 1987). D'autre part, il est clair que lorsque les

enseignants et les enfants utilisent de telles collections-témoins organisées, ils commentent verbalement l'usage qu'ils en font : les pratiques verbales correspondantes consistent alors en l'explicitation des décompositions sous-jacentes, il s'agit bien de pratiques numériques au sens où les pédagogues les ont longtemps définies.

On notera en effet qu'une telle collection-témoin organisée ne donne pas seulement accès à la décomposition correspondant au dernier ajout de 1 (seize-et-encore-1) parce que l'évocation d'autres décompositions est facilitée : c'est dix-et-encore-7, c'est trois-fois-5-et-encore-2 et, en dénombrant successivement les points de la ligne du haut, celle du bas et du milieu, c'est deux-fois-7-et-encore-3… Or, dans les années 1880, Buisson considérait que comprendre un nombre c'est « *pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté* ». Lorsqu'on met ainsi l'accent sur les décompositions, comprendre le nombre 8, par exemple, c'est s'être forgé la conviction que pour construire une collection de 8 unités, on peut en ajouter 1 à une collection de 7, on peut en ajouter 3 à une collection de 5, on peut réunir deux collections de 4, on peut enlever 2 à une collection de 10, etc. Et plus tard dans la scolarité, c'est savoir que 200 est égal à 8 fois 25, que 1000 est égal à 8 fois 125… Comprendre un nombre, c'est savoir comment on peut le former à l'aide de nombres plus petits que lui et c'est savoir l'utiliser pour en créer de plus grands. Rappelons que Buisson fut le directeur de l'enseignement primaire de Jules Ferry, dirigea le célèbre Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction primaire et occupa une chaire de Pédagogie à la Sorbonne. Il fut donc le pédagogue le plus influent lors de la création de l'école de la République. Cette définition du nombre a été reprise par les pédagogues qui, à la Libération, s'inscrivaient dans le mouvement de l'Éducation Nouvelle : Henri Canac (1955), Suzanne Herbinière-Lebert, Brandicourt, etc. Aujourd'hui, c'est celle qui est derrière la distinction que fait Pierre Arnoux (2012) entre « nombres vivants » et « nombres inertes ».

III - LE NOMBRE N'EST PAS LA QUANTITÉ, IL NAIT DE LA MISE EN RELATION DES QUANTITÉS

1 Newton : l'unité numérique est plus abstraite que l'unité quantitative

Dès le XVIIe siècle, Isaac Newton insistait sur le fait que les nombres et les quantités sont des entités différentes (on trouve plus loin une traduction du propos ci-dessous, sous la plume des encyclopédistes) : « *By number we understand not so much a multitude of unities, as the abstracted ratio of any quantity to another quantity of the same kind, which we take for unity* » (Newton, 1728-1967). Ainsi, distinguait-il la quantité et le nombre, insistant sur le fait que la notion de nombre est plus abstraite que celle de quantité parce qu'elle doit être située du côté de *la mise en relation ou la comparaison des quantités*. De manière plus précise, il définissait le nombre comme un rapport de deux quantités.

La définition de Newton est reprise dans la partie Mathématiques de l'*Encyclopédie* méthodique par d'Alembert, Bossut, de la Lande et Condorcet (1784), au début du texte qui figure à l'entrée NOMBRE (T2, p. 464) : « *M. Newton définit plus précisément le nombre, non pas comme une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité* »

L'*Encyclopédie* conserve donc la définition de la quantité qui était celle d'Euclide, à savoir une « *multitude d'unités* » mais, dans le même temps, cet ouvrage est explicite sur le fait que le nombre est de nature différente parce qu'il n'est pas une multitude d'unités quantitative. En fait, l'*Encyclopédie* adopte une définition du nombre qui permet de comprendre que ces deux sortes d'unités doivent être distinguées : le rapport 8 chaussures / 2 chaussures est le nombre 4, c'est-à-dire une entité qui ne renvoie plus à des chaussures seulement. Cela met en évidence que l'unité numérique est plus abstraite que celle des quantités et, donc, le nombre plus abstrait que la quantité. Précisons ce point.

Face à une collection de chaussures, par exemple, on n'a pas accès à la même quantité selon que l'unité est une chaussure ou une paire de chaussures. Une *quantité* est toujours une « *quantité de…* ». D'un point de vue pédagogique, le plus souvent, ce point de vue est insuffisamment pris en compte : en effet, il convient d'aider les enfants à s'approprier la notion d'unité, afin qu'ils comprennent celle de quantité et, donc, celle de nombre. Ce sujet, crucial, est abordé ailleurs (Brissiaud, 2007), bien qu'il mériterait d'être

approfondi. Et cela d'autant plus que le projet de programme maternelle (Conseil supérieur des Programmes 2014-1 et 2014-2) est muet sur cette question. La définition du nombre de Newton, quant à elle, présente l'avantage de souligner la nature plus abstraite du nombre lorsqu'on le compare à la quantité : si une quantité est toujours une « *quantité de…* », le nombre, lui, peut être considéré en tant que tel et pas seulement en tant que « *nombre de…* ». En effet, lorsque deux quantités ont la même unité, le fait d'en considérer le rapport fait « disparaître » cette « unité quantitative » de sorte que le « 1 » numérique vaut pour 1 chaussure, 1 lunette, 1 raisin, 1 paire de chaussures, 1 paire de lunettes, 1 grappe de raisins, 1 cm, 1 dm, 1 dizaine, 1 centaine…

Travailler sur les *rapports entre quantités* est évidemment un moyen de les mettre en relation mais il existe un autre moyen de le faire, c'est d'*ordonner leurs différences* : telle quantité étant jugée différente de telle autre du fait qu'elles ne peuvent pas être mises en correspondance terme à terme, de combien diffèrent-elles ? Peut-on les ordonner selon leurs différences ? C'est ce type d'approche qui a inspiré les travaux de Jean Piaget vers le milieu du siècle dernier (Piaget et Szeminska, 1941). Dans cette perspective, les différences égales à l'unité jouent évidemment un rôle crucial parce que dans le cas de quantités dites discrètes ou discontinues, il n'y a pas de différence plus petite que l'unité et l'on comprend qu'il faille dès lors viser la compréhension de la propriété d'itération de l'unité : « *Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres.* » (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-1, p. 54).

Remarquons enfin que le comptage-dénombrement, celui qui théâtralise l'itération de l'unité, aide les enfants à progresser vers la prise en compte d'une unité **plus abstraite** que l'unité des quantités. En effet, lorsqu'on compte des cubes sous la forme : « 1 cube ; et-encore-1, 2 cubes ; et-encore-1, 3 cubes… » ou des jetons sous la forme : « 1 jeton ; et-encore-1, 2 jetons ; et-encore-1, 3 jetons… », il est possible, en accentuant la prononciation de « et-encore-1 », par exemple, d'attirer l'attention de l'enfant vers une action indépendante de la nature de l'unité quantitative (cube ou jeton) : celle d'en ajouter une nouvelle. Cela aide l'enfant à progresser vers la prise en compte d'une unité numérique.

2 Les encyclopédistes : les nombres sont les « raisons » des quantités

Cette définition du nombre en tant que résultat de la comparaison des quantités au moyen de leurs différences, est-elle présente dans l'*Encyclopédie* ? Elle l'est effectivement, mais pour s'en rendre compte, il faut mettre en relation plusieurs entrées de cet ouvrage. En effet, à l'entrée NOMBRE de l'*Encyclopédie*, la définition adoptée est celle de Newton : le nombre est présenté comme le *rapport* de deux quantités. Cependant, lorsqu'on cherche à préciser ce qu'est un *rapport* en se reportant à l'entrée RAPPORT du même ouvrage, on trouve un court texte (7 lignes, p. 727) qui commence ainsi :

« *RAPPORT : C'est le résultat de la comparaison de deux quantités l'une avec l'autre, relativement à leur grandeur. On se sert aussi du mot* raison *…/… Voyez RAISON* ».

Le texte consacré à la notion de rapport étant particulièrement court, le lecteur est motivé à chercher également à l'entrée RAISON de l'*Encyclopédie*, comme cela est recommandé. Là, on trouve un long texte (3 pages à partir de la p. 725) qui commence ainsi :

« *RAISON : C'est le résultat de la comparaison que l'on fait entre deux grandeurs homogènes, soit en déterminant l'excès de l'une sur l'autre, ou combien de fois l'une contient l'autre, ou y est contenue.* »

Et, plus loin dans le texte de cette entrée, la première forme de comparaison est qualifiée de recherche de la « *différence* » ou encore de la « *raison arithmétique* » alors que la seconde forme de comparaison est dite conduire à la « *raison géométrique* » ou « *simplement raison* ». Au final, on trouve dans cet ouvrage l'idée que le nombre est la raison de deux quantités, celle-ci pouvant prendre deux formes : la raison arithmétique (ou différence) et la raison géométrique (ou rapport).

Commentons plus précisément les propos tenus dans cette entrée *RAISON*. La première phrase dit que le nombre est « *le résultat de la comparaison de deux quantités l'une avec l'autre, relativement à leur grandeur* » : on peinerait à mieux définir les relations entre grandeurs, quantité et nombre en une seule phrase. Par ailleurs, présenter le nombre comme la *raison* des quantités, pour peu que l'on revienne à l'étymologie

du mot *raison*, renvoie vers l'idée que le nombre est la *mesure* ou encore *l'explication* des quantités. Encore une proposition qui invite à bien distinguer le nombre et la quantité ! Derrière la double définition du nombre qui est avancée, d'une part en tant que raison arithmétique et d'autre part en tant que raison géométrique des quantités, il y a évidemment la difficulté que les mathématiciens avaient à l'époque à penser l'articulation entre les nombres naturels, les rationnels et ceux que l'on appellera ensuite les réels (chez Euclide, la théorie des rapports était une théorie dont les fondements étaient géométriques).

Ici, nous nous en tiendrons évidemment à considérer les nombres comme des raisons arithmétiques des quantités (plus loin dans ce texte, nous verrons cependant que les notions de « *nombre ordinal* » et de « *nombre cardinal* » sont le résultat d'un prolongement historique des débats créés par l'existence de deux raisons pour les quantités, l'une arithmétique et l'autre géométrique). Considérer le nombre comme la raison arithmétique des quantités nous ramène évidemment au caractère crucial de l'itération de l'unité, c'est-à-dire au caractère crucial de l'enseignement du comptage sous la forme d'un « comptage-dénombrement » : « une unité ; et-encore-une, deux unités ; et-encore-une, trois unités ; et-encore-une, quatre unités… » Comment expliquer que vers la fin des années 1980, l'école française ait renoncé à enseigner cette forme de comptage ? Un ouvrage a joué un rôle considérable (voir Brissiaud, 2013), celui que Gelman et Gallistel (1978) ont intitulé : « *The Child's Understanding of Number* ».

IV - SELON GELMAN ET GALLISTEL, LE COMPTAGE-NUMÉROTAGE DONNE ACCÈS À LA « NUMEROSITY », MAIS QU'EST-CE QUE LA « NUMEROSITY » ?

Le titre de l'ouvrage de Gelman et Gallistel est leurrant parce qu'il y est très peu question du nombre, du moins au sens où les encyclopédistes définissaient cette notion. Pour l'essentiel, ces chercheurs se sont livrés à une analyse du comptage selon ce qu'ils appellent des « *principes* » dont les trois premiers sont, de leur point de vue, les principes du « *Comment compter* ». Le premier principe est celui de correspondance 1 unité – 1 mot : il faut veiller à bien dire un mot-nombre différent chaque fois qu'une nouvelle unité est pointée, le deuxième le principe de suite stable : les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre à chaque comptage et un troisième, un principe qu'ils appellent le « *principe cardinal* » : le dernier mot-nombre prononcé lors d'un comptage permettrait précocement à l'enfant d'accéder à ce que ces chercheurs dénomment en américain la « *numerosity* ».

Ainsi la forme de comptage que ces chercheurs analysent est celle où l'éducateur théâtralise la correspondance 1 mot – 1 unité : « le un ; le deux ; le trois ; le quatre… », c'est-à-dire le « comptage-numérotage ». C'est celle que les parents enseignent le plus souvent mais aussi celle qui, selon Brandicourt, ne devrait jamais être favorisée à l'école. À aucun moment ces auteurs n'envisagent que l'enseignement du comptage pourrait prendre une autre forme : cela semble aller de soi que c'est ainsi qu'il faut enseigner « *comment compter* ».

D'après Gelman et Gallistel, les enfants auraient une connaissance précoce du fait qu'à l'issue d'un comptage-numérotage, s'ils respectent bien l'ordre des mots-nombres, le dernier mot prononcé désigne la « numerosity ». Mais qu'est-ce que la « numerosity » ? S'agit-il de la grandeur, de la quantité ou du nombre ?

La section qui suit contient plusieurs passages en anglais mais il était difficile de faire autrement : l'un des principaux problèmes que l'on rencontre aujourd'hui pour penser les apprentissages numériques est l'emploi fréquent d'anglicismes tels que « numerosity » traduit « numérosité » ou « cardinality » traduit « cardinalité » sans que nous sachions ce que les chercheurs qui les utilisent veulent dire de manière précise. Or, traduire les passages des articles originaux sur lesquels nous allons nous appuyer aurait conduit à préjuger des interprétations qui sont les nôtres.

1 Présentation d'une recherche particulièrement éclairante

Une recherche récente de Mathieu Le Corre (2014), intitulée « *Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle* », est particulièrement instructive et incontournable pour répondre à la question : qu'est-ce que la numerosity ? Il faut d'abord noter que ce chercheur retient comme critère

d'accès au « principe cardinal » la réussite à la tâche « *Donne-moi N objets* » lorsque N est inférieur ou égal à 5, c'est-à-dire un critère bien plus strict que celui utilisé par Gelman et Gallistel (répéter le dernier mot d'un comptage lors de la tâche « *Combien y a-t-il de…* » ou changer d'intonation lorsque ce dernier mot est prononcé). La tâche « *Donne-moi N objets* » est le plus souvent retenue aujourd'hui depuis que Sarnecka & Carey (2008) ont montré que lorsque des enfants états-uniens la réussissent jusqu'à 5, ils la réussissent aussi loin qu'ils savent compter-numéroter, ce qui atteste d'une certaine généralisation et, donc, que le comportement des enfants n'est pas une pure mécanique. Le Corre s'adresse à des enfants (3 ans 8 mois en moyenne) qui viennent de découvrir le « principe cardinal » (52 enfants ont été testés et 30 seulement ont été retenus), ils savent tous compter verbalement jusqu'à 10 au moins, ce qui garantit qu'ils réussissent la tâche « *Donne-moi N objets* » jusqu'à 10 au moins.

Le Corre propose deux autres tâches aux enfants : 1°) Une tâche d'estimation-comparaison de la « numerosity » : des cartes contenant 6, 8 ou 10 points sont montrées et l'enfant doit dire combien il y en a sans les compter ; cette tâche est qualifiée ici d' « estimation-comparaison » parce que le chercheur ne va pas s'intéresser à la qualité des estimations lorsque celles-ci sont évaluées indépendamment les unes des autres mais il va chercher à savoir si l'enfant face à une collection de 10 points, proposent un mot-nombre qui se situe plus loin dans la suite verbale que celui qu'il propose face à 6 points ; 2°) Une tâche de comparaison : on dit à l'enfant que dans une boîte fermée, il y a 6 poissons et dans une autre, 10 poissons ; un animal veut manger le plus de poissons possible ; laquelle des deux boîtes doit-il choisir ?

Quatorze enfants sur les trente échouent totalement les deux tâches : leur taux de réussite n'est pas meilleur que s'ils répondaient au hasard. Et pourtant, tous savent donner 10 unités et 6 unités respectivement !

Rapportons une partie de la conclusion de Le Corre (p. 14) : « *our results suggest that the acquisition of the cardinal principle does not involve or require the acquisition of any knowledge of the numerical significance of the order of the number words in the list. Rather, we suggest that knowledge of the cardinal principle is exactly as Gelman and Gallistel (1978) first described it: that is, knowledge that the last number word of a count denotes the numerosity (or cardinality) of the counted set when the count is correct.* »

2 Le comptage-numérotage ou la représentation de la quantité par une collection de numéros

Comment interpréter les résultats de l'expérience qui vient d'être décrite ? Il faut avant tout se rappeler que l'ensemble de ces enfants savent donner jusqu'à 10 jetons. On peut donc considérer qu'ils commencent à traiter la quantité. De manière plus précise, il faut considérer que la récitation dans l'ordre de la collection des 10 premiers **numéros** permet à ces enfants de construire une collection ayant la taille demandée.

Il faut en effet parler de **numéros** parce qu'on dispose de nombreuses preuves empiriques du fait qu'un enseignement du comptage basé sur une théâtralisation de la correspondance 1 mot – 1 objet, conduit les enfants à considérer les mots-nombres comme des sortes de numéros. Ainsi, lorsque des enfants de 4 ans et demi environ viennent de compter 7 objets de cette manière et lorsqu'on leur demande de montrer les 7 objets, en insistant sur la marque du pluriel (« les 7 objets »), ils montrent quand même un seul objet : le dernier pointé (Fuson, 1988). De façon récente, Colomé & Noël (2012) obtiennent des résultats qui vont dans le même sens avec des enfants francophones. Par ailleurs, lorsqu'on demande à des élèves de GS de rédiger un message écrit afin de ne pas oublier combien il y a d'objets dans une collection de 7 objets qu'ils viennent de compter-numéroter, ils dessinent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire l'ensemble des numéros qu'ils viennent d'utiliser (Sinclair & col, 1988 ; Brissiaud, 1989, Margolinas & Wozniack, 2012).

Et s'il s'agit de comparer deux collections de 4 et 5 unités respectivement, on observe certains enfants qui comptent la première en disant : 1, 2, 3, 4 , sans être capables de résumer leur comptage-numérotage par le mot 4 ; mais cela ne les empêche pas de se tourner vers l'autre collection en disant : 1, 2, 3, 4, 5, sans non plus dire 5. Dans l'un et l'autre cas, ils ne savent pas répondre à la question « Combien y a-t-il… ? » et pourtant, ils concluent correctement en disant que la collection « 1, 2, 3, 4, 5 » est plus nombreuse que la collection « 1, 2, 3, 4 » : ils ont compris que lorsque le comptage-numérotage « va plus loin » ou « dure plus longtemps », on peut dire : « Il y a plus là que là » (Droz & Paschoud, 1981). Dans un premier

temps, donc, le comptage-numérotage permet la représentation de la quantité par **une collection-témoin de numéros** (on notera que dans ce cas la comparaison est réussie, du fait que le comptage-numérotage a été effectif).

Mais les trente enfants retenus dans l'expérience de Le Corre sont plus avancés : ils comprennent l'expression « *Donne-moi 10 jetons* » et ils ont donc commencé à coordonner deux significations du mot « 10 », celle où ce mot sert à désigner une quantité de jetons (les 10 jetons), et celle où ce mot renvoie au dernier numéro utilisé (le jeton numéro 10 dans la numérotation 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Ainsi, ce que Gelman appelle le « principe cardinal » peut être appelé un « *principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros* » : 10 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. L'enfant qui accède à ce « principe » se comporte comme s'il avait compris que pour mémoriser la collection de numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, par exemple, dont il sait qu'elle représente une quantité donnée, il suffit, grâce à l'ordre des mots-nombres, de mémoriser le dernier numéro : 6 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6.[2]

Intéressons-nous cependant aux 14 enfants sur 30 qui échouent la tâche d'estimation-comparaison et celle de comparaison. Si des collections de respectivement 6 et 10 unités leur étaient montrées physiquement, ces enfants sauraient montrer celle qui en contient le plus (Dehaene, 1997-2010). Il faut en conclure que chez ces enfants, la nominalisation de la quantité ne donne pas encore accès aux propriétés qui sont celles des grandeurs sous-jacentes : les noms des quantités sont insuffisamment coordonnés aux grandeurs correspondantes pour permettre la comparaison alors que celle-ci serait possible à partir des collections elles-mêmes.

Ainsi, cette recherche de Le Corre montre que dans un premier temps, la nominalisation de la quantité que l'enfant a acquise dans un contexte de comptage-numérotage donne accès à des quantités qui sont loin de permettre la comparaison. Ceci peut se reformuler de la manière suivante : cette recherche montre que l'accès à ce que Gelman appelle le « principe cardinal » ne coïncide pas avec l'accès au nombre. En effet, si, comme cela a été argumenté, le nombre se fonde dans la comparaison des quantités, le critère d'accès au nombre n'est pas respecté. Au delà d'un tel raisonnement qui s'efforce d'être précis, quel chercheur aurait envie de parler de nombre alors que près d'un enfant sur deux ne dispose même pas de ce que Le Corre appelle « the later-greater principle » ?

En fait, nous verrons plus loin dans ce texte qu'un enfant qui en est là de son cheminement est plus éloigné du nombre que s'il représentait la quantité par une collection-témoin de points, de traits ou de doigts parce qu'il va lui falloir, pour organiser ses collections-témoins de numéros, surmonter l'obstacle de la polysémie des mots-nombres. Mais le point essentiel de l'analyse précédente est celui-ci : lorsqu'à la suite des travaux de Gelman, on considère que le comptage-numérotage donne accès à la « numerosity », ce mot doit être traduit par « quantité » et non par « nombre » (l'usage du mot « cardinality », lui aussi employé par Le Corre, est discuté plus loin dans ce texte).

V - LES PRINCIPES DU COMPTAGE SELON GELMAN ET GALLISTEL : UN USAGE MALHEUREUX DU MOT "CARDINAL"

Le comptage-numérotage ne donne accès qu'à la quantité mais Gelman et Gallistel ont malheureusement utilisé le mot « *cardinal* » pour dénommer le principe correspondant, ils parlent de « *principe cardinal* » ce qui a eu comme conséquence que de nombreux chercheurs ont très vite franchi le pas : ils ont remplacé le mot « *numerosity* » par « *number* ». Mais commençons par retracer l'histoire de la signification du mot « *cardinal* » afin de mieux comprendre pourquoi un usage « malheureux » du mot *cardinal* n'a rien d'étonnant : en fait, seul un contrôle épistémologique rigoureux de son usage permet d'éviter les confusions. Par exemple : on trouve souvent dans les textes de didactique les expressions

[2] Pierre Gréco (1962) parle de *quotité* quand un enfant nominalise sa représentation de la quantité ainsi. Peu de chercheurs sont aussi scrupuleux que lui dans l'emploi des mots et, bien évidemment, il est extrêmement attentif à distinguer la *quotité* du *nombre* en considérant que l'accès au nombre nécessite l'appropriation de l'itération de l'unité. Le mot *quotité* n'a pas été retenu dans le corps principal de texte afin d'éviter l'emploi d'un mot supplémentaire dont la compréhension nécessite l'appropriation de sa définition.

« aspect cardinal du nombre » ou « aspect ordinal du nombre » alors que dans le cas des nombres finis, ces expressions sont des oxymores.

1 Le mot « cardinal » pour désigner l'usage principal des nombres et la signification principale des numéraux

Le mot « *cardinal* » vient du latin « *cardo* » qui désigne le « *pivot* » ou le « *gond* » d'une porte, c'est-à-dire sa pièce principale. D'où le sens figuré de ce mot, celui de « *principal* ». Dans un premier temps, ce mot a été utilisé dans ce sens figuré au IVe siècle pour qualifier les « vertus cardinales », puis vinrent les « vents cardinaux », les « points cardinaux » et, en grammaire, le fait de qualifier les mots qui réfèrent à des nombres, les numéraux, tantôt en tant que cardinaux (sept, treize…) quand ils désignent des quantités (c'est le sens « pivot » des numéraux), tantôt en tant qu'ordinaux (septième, treizième…) quand ils désignent des rangs.

Pourquoi avoir qualifié de « principal » l'usage des nombres correspondant à la mise en relation des quantités plutôt que celle des rangs ? D'un point de vue théorique, lorsqu'on s'en tient à un usage banal du nombre, c'est-à-dire lorsqu'on évite les pièges de l'infini et tant qu'on s'en tient aux relations additives, les deux points de vue se correspondent parfaitement : lorsqu'on adopte le point de vue de la mise en relation (ou mesure) des quantités, on dit que « 6 unités, c'est 5-unités-et-encore-1 ; c'est 4-unités-et-encore-2 » et lorsqu'on adopte le point de vue de la mise en relation (ou mesure) des rangs que « le 6e rang, c'est le 5e rang après le 1er ; c'est le 4e rang après le 2e ; c'est le 3e rang après le 3e ; etc. ». On a affaire à deux conceptualisations différentes des égalités 6 = 5 + 1 ; 6 = 4 + 2 ; etc. Alors, pourquoi l'un des usages des nombres serait-il « cardinal » ?

Allons vers des contextes définis de manière plus précise et changeons la taille des nombres en considérant 1984 enfants. Cette quantité d'enfants est possiblement formée de 6 garçons et 1978 filles ou bien de 1978 garçons et 6 filles. Chacune de ces propositions nous paraît immédiatement aussi vraie l'une que l'autre. En revanche, s'il est facile de vérifier que 6 ans après l'an 1978 on était en 1984, le fait que 1978 ans après l'an 6, on était de même en 1984, nous demande réflexion. En fait, on n'a jamais vu quiconque acquérir l'intelligence des nombres, c'est-à-dire la connaissance de telles relations, en apprenant à maîtriser, au sein d'un système de numérotation, les relations entre chaque élément et son successeur, le successeur de son successeur, etc. Il y a une bonne raison pour cela : la commutativité de l'addition (6 + 1978 = 1978 + 6), une propriété conceptuelle importante des nombres, est souvent évidente dans un contexte où l'on traite des quantités (lorsqu'on réunit une équipe de garçons et une équipe de filles, a-t-on ajouté les filles aux garçons ou les garçons aux filles ?) alors que cette propriété, dans un contexte où l'on traite des rangs, signifie que le $x^{ème}$ élément après le $y^{ème}$ est aussi le $y^{ème}$ après le $x^{ème}$. Appliquée aux rangs, la commutativité est souvent loin d'être évidente. Il faut se l'approprier dans un contexte de quantités avant d'être convaincu que, dans un contexte de rangs, ça marche encore.

Comme nous l'avons vu en considérant les travaux d'Euclide, de Newton et ceux des encyclopédistes, la notion de nombre s'est construite à partir de celle de quantité. Ce n'est pas étonnant que cette notion ait été associée de manière privilégiée au contexte qui lui a donné naissance. On comprendrait mal qu'elle ne le reste pas aujourd'hui. On remarquera d'ailleurs que d'un point de vue morphologique, les numéraux ordinaux sont dérivés des cardinaux : ils s'obtiennent en y ajoutant *ième* à la fin. Ainsi, vers 1850, tout était parfaitement clair : les nombres avaient deux usages, la mise en relation (ou la mesure) des quantités et la mise en relation (ou la mesure) des rangs. Par ailleurs, il apparaissait clairement que la mesure des quantités et celle des rangs sont deux usages qu'il ne convient pas de mettre sur le même plan et, comme on n'utilise pas les mêmes mots numéraux dans l'un et l'autre cas, on qualifiait de cardinaux ceux qui sont utilisés dans le contexte des quantités (usage principal des nombres) et d'« ordinaux » ceux qui le sont dans le contexte des rangs (usage second des nombres). Tout va se compliquer dans la seconde moitié du XIXe siècle.

2 Le mot « cardinal » pour désigner la nature de certains nombres infinis

En mathématiques universitaires, en revanche, l'adjectif « cardinal » est aujourd'hui utilisé pour qualifier autre chose qu'un usage des nombres ou les mots de la langue qui servent à cet usage, il qualifie les nombres eux-mêmes : on parle aujourd'hui de « nombres cardinaux ».

L'invention de ces nouveaux nombres remonte au 19e siècle avec les travaux de Cantor notamment. À cette époque, les mathématiciens ont ressenti le besoin d'utiliser le mot « cardinal » dans ce sens très différent (il qualifie les nombres eux-mêmes et non leur usage) afin de préciser les différentes sortes d'infinis qu'ils rencontraient. Ainsi, les nombres réels compris entre 0 et 1, ceux qu'on atteint ou approche avec des écritures décimales du type 0,43897… forment un ensemble infini qui est plus « nombreux » que les entiers naturels : Cantor a en effet montré qu'aucune correspondance terme à terme entre ces nombres et les entiers naturels n'est possible. En revanche, il a montré que les fractions (il faudrait dire : les rationnels) comprises entre 0 et 1, énumérées ci-après selon leurs dénominateurs croissants : 1/1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6, 1/7… peuvent être mises en correspondance terme à terme avec les entiers naturels, ce qui est contre-intuitif : on a en effet l'impression qu'avec les seules fractions de numérateur 1 : 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6…, on va « épuiser » l'ensemble des numéros et que, donc, il y a bien plus de fractions que d'entiers.

Pour préciser ces différentes sortes d'infinis, les mathématiciens ont eu besoin d'articuler la notion de nombre infini lorsqu'elle s'appuie sur la correspondance terme à terme (c'est le point de vue de la quantité), avec celle de nombre infini lorsqu'elle s'appuie sur la création d'un ordre (c'est le point de vue des rangs). Ils ont choisi de parler de « nombre cardinal » dans le premier cas et de « nombre ordinal » dans le second.

Ainsi, comme les fractions comprises entre 0 et 1 peuvent être mise en correspondance terme à terme avec les entiers, ces deux ensembles ont le même cardinal, ils sont aussi « nombreux » l'un que l'autre lorsqu'on les considère du point de vue de la correspondance terme à terme mais, dans le même temps, on a vu qu'on a envie de dire que les fractions comprises entre 0 et 1 sont plus « nombreuses », ce qui est effectivement le cas lorsqu'on les considère d'un point de vue ordinal : si l'on nomme ϖ l'ordinal (infini) correspondant à l'ensemble des entiers naturels, par exemple, c'est aussi celui de l'ensemble des fractions du type 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… Si l'on continue à créer un rang supplémentaire en considérant que 2/3 est la fraction suivante, cette fraction sera repérée par l'ordinal $\varpi + 1$, la suivante par $\varpi + 2$, etc. D'un point de vue cardinal $\varpi + 1$ et ϖ désignent la même entité : il n'y a rien de choquant à ce que l'infini-et-encore-un soit égal à l'infini parce que « un », c'est vraiment petit à côté de l'infini. On a donc affaire au même cardinal. En revanche, d'un point de vue ordinal, $\varpi + 1$ et ϖ sont deux ordinaux distincts qui se suivent. Ainsi, lorsqu'on s'intéresse aux ensembles infinis, il existe de nombreux ordinaux (rangs) distincts qui ne sont pas des cardinaux (quantités) distincts.

3 Éviter les expressions « aspect cardinal » et « aspect ordinal » des nombres finis : ce sont des oxymores

En revanche, lorsqu'on s'en tient aux ensembles finis, parler de « nombre cardinal », de « nombre ordinal » ou faire l'économie de l'un et l'autre qualificatif en parlant tout simplement de « nombre », c'est référer aux mêmes entités. Lorsqu'on s'en tient aux ensembles finis, le nombre est nombre, il n'est jamais spécifiquement cardinal ni jamais spécifiquement ordinal parce qu'il est indistinctement les deux. Ce point de vue était à la base de l'approche de la genèse du nombre que Piaget a avancée (Piaget & Szeminska, 1941). L'aspect « logiciste » de la théorie de ce grand chercheur n'est plus d'actualité mais son fondement épistémologique n'a pas vieilli : le nombre est mise en ordre des quantités selon leurs différences, il n'est ni dans les quantités envisagées seulement en tant que telles, ni dans la mise en ordre d'autres entités que les quantités.

On parle souvent de la théorie de Cantor comme d'une théorie des ensembles mais, fondamentalement, il s'agit d'une théorie des infinis. Concernant les nombres finis, son seul apport est d'avoir mis fortement en avant le fait que l'égalité de deux quantités se fonde dans la correspondance terme à terme. Cependant, lorsqu'on s'en tient aux nombres finis, cette explicitation du rôle de la correspondance terme

à terme ne change en rien la définition qu'il convient de donner des nombres : ceux-ci doivent toujours être considéré comme la raison des quantités parce qu'ils résultent de leur mise en ordre selon leurs différences.

Si l'on veut se convaincre du fait que les nombres finis ont une seule nature qui est d'être la raison des quantités, il suffit là encore de se reporter à l'*Encyclopédie* méthodique par d'Alembert, Bossut, de la Lande et Condorcet. Dans cette encyclopédie, il n'existe pas d'entrée correspondant au mot CARDINAL et cela s'explique bien : à cette époque où l'essentiel avait été dit concernant les nombres finis, le mot cardinal ne renvoyait à aucune entité théorique qui serait différente de celle décrite dans l'entrée NOMBRE.

Aujourd'hui, il est préférable de faire l'économie des expressions « nombre cardinal » et de « nombre ordinal » lorsqu'on parle de nombres finis dans un contexte didactique parce que l'usage des adjectifs « cardinal » et « ordinal » est superfétatoire. Allons même plus loin : il faut éviter de parler de l' « aspect cardinal » et de l' « aspect ordinal » des nombres finis ou encore de « cardinalité » et d' « ordinalité ». En effet, si la nature profonde du nombre, lorsqu'il est fini, est que ces deux aspects (l'aspect quantité et l'aspect mise en ordre des quantités) ne peuvent pas être envisagés séparément sans que la notion même de nombre disparaisse, chacune de ces expressions est un oxymore.

La distinction entre un aspect « cardinal » et un aspect « ordinal » des nombres finis est en effet contradictoire. Qui aurait envie de distinguer l'« aspect quantité » et l'« aspect mise en ordre » de l'itération de l'unité alors que s'approprier cette propriété, c'est tout le contraire de **distinguer** ces deux aspects puisque c'est **en réaliser la fusion** : « *Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres* » ? Or, l'itération de l'unité est la porte d'entrée vers le nombre et l'on ne peut donc pas isoler l'un des deux soi-disant « aspects du nombre » sans s'exprimer de manière contradictoire. Du fait qu'il est mise en relation des quantités et, donc, de nature plus abstraite que les quantités, le nombre ne peut plus être considéré sous un aspect qu'il n'a plus : celui de quantité.

4 La confusion née de l'emploi du mot « cardinal » par Gelman

L'usage du mot « cardinal » dans l'expression « principe cardinal » est malheureux parce que, dans le courant du 20e siècle, suite aux travaux de Cantor, ce mot s'est trouvé de plus en plus souvent utilisé comme synonyme du mot « nombre », ça ne serait que pour éviter la répétition de ce mot, dans un souci de style. On lit par exemple dans le projet de programme pour l'école maternelle (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-2, p. 19) que : « *(La construction du nombre) est conduite à partir de collections dont l'enseignant pourra raisonnablement, en fonction des approches qu'il utilise et des caractéristiques des élèves, limiter le cardinal entre 10 et 20 en grande section.* » Si on remplace le mot « cardinal » par « nombre », la même idée est véhiculée, de manière plus simple. On remarquera que c'est le mot « cardinal » et non le mot « ordinal » que l'usage a retenu comme synonyme de « nombre » alors que depuis les travaux de Cantor, aucune raison d'ordre mathématique ne justifie un tel choix : il faut très certainement y voir une conséquence du fait que l'usage cardinal des nombres est leur usage principal.

Comment s'étonner dès lors que la définition du « principe cardinal » ait évolué de la manière suivante : « *the [numeral] applied to the final item in the set represents the* number *of items in the set.* » (Sarnecka & Carey, 2008). En Français, Michel Fayol (2012), dans deux pages contigües d'un *Que-sais-je* consacré à l'acquisition du nombre, définit ainsi le "principe cardinal" selon Gelman (p. 62) : « *Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le* nombre *total d'éléments* ». Ainsi, il n'est plus question de « numerosity » mais de « number » en anglais et de « nombre » en français.

Il ne fait guère de doute que la polysémie du mot « cardinal » explique que l'accès au « principe cardinal » soit très souvent considéré comme un critère de l'accès au nombre alors qu'il n'est qu'un principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros. La quantité n'étant de toute évidence pas le nombre, faut-il en conclure que la théorie de Susan Carey,

autre très grande psychologue contemporaine (professeur de psychologie au MIT puis à Harvard), serait grossièrement fausse ?

VI - LA DÉFINITION DU « PRINCIPE CARDINAL » A ÉVOLUÉ, LE CRITÈRE DE SON APPROPRIATION AUSSI

En fait, la situation est plus complexe que cela : dans le même temps que la définition du « principe cardinal » a évolué (on n'y parle plus de « numerosity » mais de nombre), le critère d'appropriation de ce principe a, lui aussi, changé : non seulement l'enfant doit savoir donner N objets jusqu'à 5, on ne se contente plus qu'il sache répéter le dernier mot d'un comptage-numérotage en réponse à la question « Combien y a-t-il… » mais, de plus, l'enfant qui atteint ce critère serait censé comprendre l'itération de l'unité. Ainsi, dans le même article de Sarnecka & Carey, celui où l'on nous dit que le dernier mot d'un comptage-numérotage désigne le nombre, on lit dans la présentation de cette recherche :

« *The first question of the present study then, is: Is the cardinal principle a procedural rule about counting and saying 'how many'?Alternatively, the cardinal principle can be viewed as something more profound – a principle stating that a numeral's cardinal meaning is determined by its ordinal position in the list. This means, for example, that the fifth numeral in any count list – spoken or written, in any language – must mean five. And the third numeral must mean three, and the ninety-eighth numeral must mean 98, and so on.*

If so, then knowing the cardinal principle means having some implicit knowledge of the successor function – some understanding that the cardinality for each numeral is generated by adding one to the cardinality for the previous numeral. The second question of the present study then, is: Is the cardinal principle a conceptual rule that is related to knowledge of the successor function? »

Et les auteurs avancent certaines données qui semblent montrer que la réussite à la tâche « *Donne moi N objets* » jusqu'à 5 s'accompagne d'une certaine compréhension de l'itération de l'unité. Nous allons voir que ce dernier point a depuis été remis en question mais l'important est ailleurs : Susan Carey renoue avec un critère d'accès au nombre utilisé par Piaget et Gréco. Ainsi, concernant le premier de ces chercheurs, il commente avec Bärbel Inhelder (1963) les propos d'un enfant qui avait été confronté à une tâche de conservation :

« Ça fait 1, 2 , 3 , 4 , 5 ici », *nous dit un sujet de 4 ans et :* « 1, 2, 3, 4, 5 là, mais ça fait quand même plus là (en montrant la rangée la plus longue) » "*Dans cet exemple, les noms de nombre 1 à 5 ne constituent qu'un moyen pour individualiser les éléments, mais n'entraînant ni la conclusion que le tout est égal à la somme des parties, ni par conséquent la conservation de ce tout. Or, sans additivité ni conservation, on ne saurait parler de nombres !*"

Pour Piaget, on ne peut pas parler de « nombre » chez cet enfant parce qu'il lui manque la conservation, bien entendu. Mais passons sur ce critère parce qu'il renvoie à un aspect de l'approche piagétienne particulièrement complexe et qui n'est pas d'actualité : son aspect « logiciste ». En revanche, Piaget souligne l'existence d'un autre manque qui, de son point de vue, a partie liée avec l'absence de conservation : sans additivité du comptage, on ne saurait parler de nombre. Cette propriété d'additivité est celle que Gréco appelait à la même époque l'itération de l'unité (Gréco, 1960, 1963).

On a déjà souligné les raisons qui expliquent que l'importance de cette propriété ait progressivement émergé au sein de l'école de Genève : la théorie de Piaget trouve sont origine dans le fait que les nombres finis sont indissociablement cardinaux et ordinaux ou encore que la correspondance terme à terme et l'ordre sont deux points de vue indissociables lorsqu'on parle du nombre.

C'est très exactement cette idée qu'expriment Sarnecka et Carey dans l'extrait rapporté plus haut, en insistant sur le caractère conceptuel de ce que devrait être un « *principe cardinal* ». Ils l'expriment en utilisant un mot dont, là encore, il convient de rechercher un équivalent en français : le mot « *cardinality* ». Or, c'est bien évidemment, là encore, le mot « quantité » qui convient. Ainsi, la phrase : *the cardinality for each numeral is generated by adding one to the cardinality for the previous numeral* peut-elle se traduire : (lors d'un comptage-dénombrement) « *la quantité correspondant à chaque mot-nombre résulte de l'ajout d'une nouvelle unité à celle correspondant au mot-nombre précédent* ». L'usage de l'anglicisme

« cardinalité » n'a aucune nécessité, celui du mot « quantité » permet une expression précise. On remarquera d'ailleurs que dans le premier extrait rapporté ici, Le Corre utilisait les mots « numerosity » et « cardinality » comme synonymes.

Ainsi, en 2008, Susan Carey renoue-t-elle avec un critère d'accès au nombre sur lequel Jean Piaget et plus encore Gréco avaient insisté. Sa notoriété a eu pour effet que l'étude de l'itération de l'unité s'est très vite imposée comme incontournable.

VII - L'ÈTUDE DE L'ACCÈS À L'ITÉRATION DE L'UNITÉ : UNE QUESTION DE PLUS EN PLUS VIVE EN PSYCHOLOGIE DES APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

Parmi les recherches dans lesquelles l'étude de l'itération de l'unité joue un rôle crucial, il faut souligner celle de Davidson, Eng & Barner (2012). En effet, ces chercheurs remettent en cause l'interprétation que Sarnecka et Carey (2008) font de leurs résultats. Davidson, Eng et Barner s'adressent à des enfants qui ont entre 3 ans 4 mois et 5 ans 3 mois et qui savent tous donner 5 objets (de plus, ils savent tous compter verbalement jusqu'à 9 au moins). Au sens de Susan Carey, donc, ces enfants devraient comprendre les 9 premiers nombres. Or, lorsqu'on leur demande de dénombrer une collection de 4 objets et qu'ensuite l'expérimentateur ajoute 1 autre objet en interrogeant : « Et maintenant, il y a 5 objets ou 6 objets ? », un certain nombre de ces élèves ne répondent pas mieux qu'au hasard. Avec de plus grandes collections, l'échec est massif.

Comment s'étonner d'un tel résultat ? Lorsque les éducateurs mettent l'accent sur la signification « numéro » des mots-nombres, pour qu'un enfant comprenne que « 6 unités, c'est 5 unités et encore une », alors que pour lui, le mot « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » et le mot « 5 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5 », il faut non seulement qu'il considère « 6 » et « 5 » à la fois comme des numéros et des pluralités mais, de plus, il faut qu'il comprenne que le numéro « 6 » doit être considéré comme « 1 » (c'est le « 1 de plus »). Lorsqu'on enseigne le comptage-numérotage, la polysémie des mots-nombres est un obstacle qui est trop souvent sous-estimé (nous reviendrons sur cette question plus loin dans ce texte).

Cette recherche prouve une nouvelle fois que l'accès au « *principe cardinal* » qu'il vaudrait mieux appeler : « *principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros* » (« 6 » vaut pour « 123456 »), n'induit pas l'accès à l'itération de l'unité, c'est-à-dire au nombre. Lorsque l'enfant comprend l'expression « 6 cubes » comme renvoyant à une collection de cubes qu'il sait former en comptant-numérotant jusqu'à 6, cette expression renvoie seulement à une quantité de cubes et non à un nombre de cubes : il est d'autant plus important de distinguer le « **nombre de…** » de la « **quantité de…** », suivant que l'enfant maîtrise ou non l'itération de l'unité, que c'est la même expression, « 6 cubes », que l'enfant utilise pour désigner l'une et l'autre de ces notions. Ce que dit l'enfant ne révèle pas d'emblée le niveau de conceptualisation qui est le sien.

Les résultats de cette recherche rappellent évidemment ceux de Gréco : les enfants n'accèdent pas à l'itération de l'unité quelle que soit la taille des collections, cet accès se fait de proche en proche, d'abord dans un domaine numérique limité puis au-delà, selon une progression qu'il vaudrait la peine de mieux étudier mais dont il n'est pas difficile d'anticiper qu'elle dépend de la façon dont se disent les nombres dans la langue de l'enfant. Par exemple : il est plus facile de comprendre que « 11 » c'est « 10 et encore 1 » quand « 11 » se dit « dix-un » et il est plus facile de translater la connaissance de l'itération de l'unité du domaine des 10 premiers nombres vers le domaine des 10 nombres suivants quand ils se disent : « dix-un, dix-deux, dix-trois, etc ».

Mais cette recherche de Davidson, Eng & Barner (2012) n'est pas la première à s'intéresser à l'itération de l'unité après celle de Sarnecka et Carey (2008). Dès 2008, dans un numéro spécial de *Philosophical Psychology*, Véronique Izard, Pierre Pica, Elizabeth Spelke et Stanislas Dehaene (2008) publient un article intitulé : « *Exact equality and successor fonction : Two Key Concepts on the Path towards Understanding Exact Numbers* ». Comme, dans leurs travaux, ils ont bien souvent considéré le sens inné des grandeurs comme un sens inné de *nombres qui seraient approximatifs*, ces auteurs éprouvent le besoin d'attirer l'attention sur

le fait qu'il existe une autre sorte de nombres : les « *nombres exacts* » et que l'étude de l'accès à ces nombres exacts s'appuie sur deux concepts clés : celui d'« *exact equality* » et celui de « *successor fonction* ». Intéressons-nous à ces concepts qui sont présentés comme la clé de l'accès au « nombre exact ». On peut considérer que le premier de ces concepts, dont ils disent que pour l'essentiel il trouve son origine dans la correspondance terme à terme, est celui de *quantité* et que le second est celui d'*itération de l'unité*. Au final, le nombre apparaît bien comme résultant de la mise en relation des quantités grâce, notamment, à l'accès à l'itération de l'unité. Après cet article, c'est évidemment toute la branche de la psychologie qui s'appuie sur l'imagerie cérébrale qui a emboîté le pas aux auteurs précédents. Par exemple, dans un article intitulé « *Finger numeral representations : more than just another symbolic code* », Samuel Di Luca et Mauro Pesenti (2011) présentent le « *successor-predecessor principles* » comme ce qui sépare « *an inner rough number sens* » d'un « *developped, symbolically represented, number concept* ».

Intéressons-nous à un autre courant de recherche en psychologie cognitive, celui qui est incarné par Lance Rips. Dans un livre publié en 2011 et intitulé : « *Lines of Thought: Central Concepts in Cognitive Psychology* », l'un des principaux concepts abordés est celui de nombre. Le propos de l'auteur est différent : il entend montrer que l'enfant ne traite vraiment du concept de nombre que lorsqu'il met les nombres eux-mêmes en relation et non plus les quantités correspondantes et que cela ne peut résulter que d'une activité de schématisation (au sens psychologique du terme). Il pense que le cheminement vers le nombre est nécessairement beaucoup plus « top-down » que celui qui est habituellement décrit. Dans les 53 pages consacrées au concept de nombre, l'itération de l'unité est omniprésente et elle est présentée comme étant au cœur de la notion de nombre. On y lit même ce qui n'est pas loin d'être une recommandation d'enseigner le « comptage-dénombrement », appelé « advanced counting » dans le texte (p. 82) :

« *the element of advanced counting (the numerals of the counting system) are in one-to-one correspondance with the natural numbers – a correspondance that preserves the successor relation. (That is, the successor relation on the naturals corresponds to that on the natural numbers.) I am not claiming that children attain the concept of natural number by learning advanced counting : I think it more likely that children learn an underlying set of principles that facilitates both advanced counting and the concept of natural number (see Section 2.5). However, advanced counting, not simple counting, provides the numerals that are the obvious counterpart of the natural numbers.* »

Un autre courant de recherche est incarné par Arthur Baroody et Catherine Sophian. J'ai débattu des travaux du premier dans « *Apprendre à calculer à l'école* » (Brissiaud, 2013, p. 51-52). La seconde a publié en 2007, c'est-à-dire la même année que « *Premiers pas vers les maths* », un ouvrage intitulé : *The origins of mathematical knowledge in childhood*. On lit dans la présentation de l'ouvrage trois recommandations pédagogiques que je ferais miennes sans en changer un mot :

« *Sophian advances three instructional recommendations: First, instruction about numbers should always be grounded in thinking about quantities and how numbers represent the relations between them; second, instruction in the early years should always be guided by a long-term perspective in which current objectives are shaped by an understanding of their role in the overall course of mathematics learning; and third, instruction should be directly toward promoting the acquisition of the most general mathematical knowledge possible.* »

Concluons cette section : tous les chercheurs ne défendent pas aujourd'hui la même théorie des premiers apprentissages numériques, loin s'en faut, mais il semble bien que nous soyons à une sorte de tournant du fait que la répétition du dernier mot d'un comptage-numérotage, longtemps considérée comme le critère d'accès à la « numérosité » ou à la « cardinalité » sans qu'on sache précisément ce que ce terme désigne, n'est aujourd'hui retenue par aucun chercheur comme critère de l'accès au nombre. En revanche, l'appropriation de l'itération de l'unité semble bien être devenue une référence commune à l'ensemble des chercheurs en tant que porte d'entrée vers le nombre ou, selon, vers le « nombre exact ».

VIII - UNE VARIANTE DU CHOIX D'ENSEIGNER LE COMPTAGE-NUMÉROTAGE : PRÉSENTER LE NOMBRE COMME MOYEN DE GARDER LA MÉMOIRE DES RANGS ET DES QUANTITÉS

1 Deux choix didactiques qui se sont succédé

Ainsi, aucun chercheur en psychologie développementale ne pense aujourd'hui que le comptage-numérotage conduit précocement et facilement au nombre. C'est évidemment le moment de rappeler l'existence de deux choix didactiques contraires qui se sont succédé depuis la naissance de l'école de la République (Brissiaud, 2013).

- Soit l'on n'enseigne pas la quantification à l'aide d'un comptage-numérotage parce que le choix est fait d'enseigner d'emblée les nombres en s'appuyant sur l'itération de l'unité et les décompositions. Dans ce cas, les mots-nombres sont d'emblée utilisés comme désignant des pluralités et, via des collections-témoins organisées ; les quantités sont mises en relation entre elles, ce qui a pour conséquence que la quantification est d'emblée numérique. Il n'y a pas d'étape intermédiaire durant laquelle une quantification non numérique, celle qui résulte du comptage-numérotage, est valorisée à l'école. C'est ce choix qui prévalait avant 1986.
- Soit l'on enseigne la quantification à l'aide d'un comptage-numérotage. Les enfants utilisent alors des collections de numéros comme symboles quantitatifs (pour eux, « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 ») ; l'accès au nombre se faisant dans un second temps, quand ils accèdent à l'itération de l'unité, c'est-à-dire quand ils ont surmonté l'obstacle que crée la polysémie des mots-nombres inhérente à ce choix. Dans le cadre d'un tel choix, en effet, lorsque l'enseignant dit un mot-nombre, l'enfant doit l'interpréter soit comme renvoyant à une pluralité (ce mot désigne alors une quantité), soit comme renvoyant à une individualité (il est alors un numéro).

Or, des arguments issus de l'histoire des pratiques et des discours pédagogiques, de recherches évaluatives menées à partir d'enquêtes d'observation, de la psychologie des apprentissages numériques, de la psychologie interculturelle et enfin de la psychologie clinique plaident en faveur du premier choix, celui d'une entrée directe dans le nombre (Brissiaud, 2013). Cette supériorité s'explique vraisemblablement du fait que dans le contexte de la quantification à l'aide de collections de numéros, pour que les élèves comprennent l'itération de l'unité, il convient qu'ils fassent les bonnes interprétations alors que les deux sortes de significations (numéros et quantités) sont inextricablement mêlées. En effet, quand pour un enfant le mot « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » et le mot « 5 » à « 1, 2, 3, 4, 5 », comprendre que « 6, c'est 5 et encore 1 » nécessite de considérer « 6 » et « 5 » à la fois comme des numéros et des pluralités et, de plus, de comprendre que le numéro « 6 » doit être considéré comme « 1 » parce que c'est « le « 1 de plus » ».

Il faut signaler de plus que les difficultés des élèves dans la compréhension de l'écriture décimale des nombres à plusieurs chiffres ont très vraisemblablement partie liée avec l'enseignement du comptage-numérotage. En effet, de nombreux travaux montrent que les élèves entrant au CE2, par exemple, ont bien appris à lire et écrire ces nombres mais que ces savoir-faire résultent de l'entraînement et non de la compréhension des écritures correspondantes (Brissiaud, 2004 ; Chambris, 2008 ; Mounier, 2010 ; Tempier, 2013 ; Brissiaud & Richard, à paraître). Cela s'explique du fait que nombreux élèves, quand ils lisent « 347 » et prononcent « *trois-cent-quarante-sept* », ne prononcent correctement le début de ce mot : *trois-cent* que parce qu'ils savent que le chiffre « 3 », quand il est dans la « colonne des centaines », doit se dire « *trois-cent* », sans que pour eux ce chiffre « 3 » signifie réellement « 3 fois 100 ». Pour eux, de même, « *quarante* » est le mot qu'il faut dire quand on voit le chiffre « 4 » dans la « colonne des dizaines », sans que ce chiffre signifie « 4 fois 10 ». Ces élèves savent lire et écrire les écritures chiffrées sous la dictée mais ils n'ont pas accès au sens du nombre en tant que somme de centaines, de dizaines et d'unités : encore un phénomène de « faux bons résultats ».

Ces élèves n'ont pas compris que les centaines et les dizaines sont des « grandes unités de compte » et que, fondamentalement, l'écriture des nombres se fonde dans un changement d'unités analogue à celui que l'on utilise avec les autres grandeurs telles que les longueurs : « *Le double-décimètre est un outil*

inadapté pour prendre les mesures d'un champ, et dans ce cas on choisit une chaîne d'arpenteur, c'est-à-dire un outil qui matérialise une unité plus grande. De même, dès que la taille d'une collection est un tant soit peu importante, les éléments de cette collection ne constituent plus une bonne unité de compte pour se représenter la quantité correspondante, et on change d'unité en prenant comme nouvelles unités la dizaine, puis la centaine. » (Brissiaud, 1989 ; un point de vue analogue est développé par Christine Chambris, 2008).

Une étude récente de la DEPP (Andreu & al, 2013) montre que la compréhension de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres est, ces dernières années, plutôt en régression. Mais comment s'en étonner ? Aujourd'hui, les enfants rencontrent presque systématiquement les écritures « 10, 11, 12, 13… 20, 21, 22, 23… 30, 31… » dans le contexte d'une file numérotée, en s'appuyant sur la récitation de la comptine numérique. En mettant en correspondance terme à terme les mots de la comptine et les cases de la file numérotées, ils apprennent, par exemple, que lorsque le numéro qui figure dans une case est du type « 2§ », il faut le lire « vingt-§ » (« 22 » se lit « vingt-deux », « 23 » se lit « vingt-trois », « 24 » se lit « vingt-quatre »,etc.). Ils apprennent à résoudre l'une des principales tâches scolaires (lire et écrire les nombres à deux chiffres) sans aucune référence aux propriétés conceptuelles qui fondent cette écriture (celles d'un changement d'unité de compte). Il sera d'autant plus difficile ensuite de faire en sorte qu'ils s'approprient ces propriétés conceptuelles (le fait que « 327 », c'est « 32 dizaines et 7 unités », par exemple) qu'ils auront auparavant automatisé cette autre façon de réussir les principales tâches scolaires, sans faire appel à des propriétés conceptuelles.

On aurait pu penser que l'accumulation de preuves en faveur du choix d'une entrée directe dans le nombre, sans enseignement du comptage-numérotage, conduirait l'ensemble de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques à œuvrer dans le cadre de ce choix didactique. Ce n'est malheureusement pas le cas. Ainsi, une proposition pédagogique fréquente et très influente aujourd'hui consiste à recommander aux enseignants de travailler séparément la représentation des quantités et celle des rangs. C'est cette conception qui explique que le projet de programme maternelle se structure autour de deux objectifs : « *Construire le nombre comme mémoire de la quantité* » et « *Construire le nombre comme mémoire de la position* ». C'est également cette conception qui a guidé des chercheurs du CREAD[3] lors de l'élaboration de deux ressources numériques : le logiciel « *Le train des lapins* » (le *nombre* comme mémoire de la position) et le logiciel « *Des voitures et des garages* » (le *nombre* comme mémoire de la quantité). Un dernier point : ces ressources ont été conçues sous l'impulsion du bureau des écoles de la DGESCO et elles font partie d'une Mallette Numérique dont on peut craindre qu'elle soit largement diffusée telle quelle, sans aucune mise en garde.

En effet, le malheur est que cette approche des apprentissages numériques est fondée sur une conception épistémologique erronée du nombre et qu'elle n'est, en fait, qu'une variante du choix d'enseigner le comptage-numérotage, celui dont tout laisse à penser qu'il est à l'origine de trop d'échec scolaire.

2 Peut-on enseigner le nombre comme moyen de garder la mémoire des rangs ?

Le nombre est-il un moyen de *garder la mémoire* des rangs ? Bien sûr, mais il est beaucoup plus que cela puisqu'il est un moyen de *mettre en relation* les rangs : la 7ème case est la 1ère après la 6ème case, la 2ème après la 5ème case, la 3ème après la 4ème case…, par exemple. Par ailleurs, nous avons vu que ce type de relations qui, formellement, sont les mêmes que celles qui lient les quantités, s'établissent d'abord dans le contexte *cardinal* (*i.e.* principal) que constitue celui des quantités. On est donc *a priori* conduit à douter de la possibilité d'accéder réellement au nombre lorsqu'on l'étudie seulement comme « *moyen de garder la mémoire des rangs* ». Examinons de plus près ce qu'il en est en analysant la situation pédagogique censée permettre cette approche du nombre.

Celle-ci consiste à « *garder la mémoire de la position* » d'une image située dans une file d'images, ou alors de la position de l'une des fenêtres d'un TGV, par exemple. Un problème permettant de travailler cet objectif consiste à mettre les élèves devant une file de cases vides dont les dimensions sont celles d'images d'animaux, par exemple. Par ailleurs, une « file modèle » d'images d'animaux est affichée dans

[3] Le CREAD est Centre de Recherche sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique (Rennes 2). Le site présentant ces deux logiciels est à l'adresse : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=201

un lieu éloigné. L'enseignant demande aux élèves de désigner sur la file vide la case où se situerait une image donnée, le lapin par exemple, si on la remplissait comme la « file modèle ».

Or, pour réussir ce problème, il suffit de compter-numéroter les images de la file modèle jusqu'à l'image du lapin (la 1, la 2, la 3, la 4, la 5, la 6, par exemple) et de compter-numéroter à l'identique les cases de la file vide. Il n'est pas nécessaire de savoir comment le nombre 6 s'exprime en nombres plus petits que lui. Pour garder la mémoire d'un rang, l'usage de numéros suffit, le nombre n'est pas nécessaire. Dans tous les comptes rendus d'expérimentation de séquences du type « file des images d'animaux », c'est très exactement ce qu'on lit : les enfants y apprennent à désigner les rangs à l'aide de numéros.

Que penser d'une telle activité ? C'est une excellente initiation au comptage-numérotage : nul besoin, comme c'est le cas dans un contexte de représentation des quantités, de surmonter l'obstacle que constitue la polysémie des mots-nombres : là, il suffit que les élèves fassent fonctionner les mots-nombres en tant que numéros pour réussir du début jusqu'à la fin : dans la vie quotidienne, en effet, l'usage de numéros est la plupart du temps bien suffisant pour représenter les rangs, il n'est pas nécessaire de mettre ces rangs en relation grâce au nombre. Grâce à cette activité les élèves vont apprendre la suite des numéros, ils vont apprendre à bien respecter la correspondance 1 unité – 1 mot-nombre, cela va les valoriser aux yeux de leurs parents : « Il sait compter jusqu'à… ». Il sera d'autant plus difficile ensuite de dépasser cette façon de faire dans le contexte de la représentation des rangs, mais aussi dans celui de la représentation des quantités.

3 Peut-on enseigner le nombre comme moyen de garder la mémoire des quantités ?

Le nombre est-il un moyen de *garder la mémoire* des quantités ? Bien sûr, mais il est beaucoup plus que cela puisqu'il est un moyen de *mettre en relation* les quantités et qu'il faut même considérer cette proposition comme une définition du nombre : les nombres sont *les raisons* des quantités. On est donc *a priori* conduit à douter de la possibilité d'accéder au nombre en sous-utilisant celui-ci, c'est-à-dire en le considérant seulement comme un « *moyen de garder la mémoire des quantités* ». Examinons de plus près ce qu'il en est en analysant la situation pédagogique censée permettre cette approche du nombre.

L'élève est devant une collection de coquetiers (ou de garages ou de bouteilles) et l'enseignant lui demande d'aller chercher à l'autre bout de la classe, en un seul voyage, une collection d'œufs (ou de voitures ou de bouchons) qui conduise à mettre exactement un œuf (une voiture, un bouchon) dans chaque coquetier (garage, bouteille). Or, pour réussir ce problème, il suffit de compter-numéroter les coquetiers (le 1, le 2, le 3, le 4, le 5, le 6, le 7, le 8, par exemple) et de compter-numéroter, à l'identique, les œufs. Supposons de plus que l'enseignant installe une répartition des rôles entre deux enfants de sorte que celui qui est devant les coquetiers doit rédiger un message à celui qui est devant les œufs parce qu'il incombera à cet autre enfant de construire la collection équipotente, on imagine facilement que les élèves vont progressivement prendre conscience que le message « 8 » fonctionne aussi bien que le message « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 » : quand on sait réciter les numéros dans l'ordre, il suffit de mémoriser le dernier pour garder la mémoire de ceux qui le précèdent. Les élèves vont ainsi apprendre à « nominaliser » la quantité qu'ils représentaient auparavant par une collection de numéros. Mais nul besoin de mettre des quantités en relation, nul besoin de la notion de nombre. Dans un ouvrage paru en 2007, *Premiers Pas vers les Maths*, j'écrivais à propos de cette situation (p. 50) : « *la critique majeure qu'il faut faire à cette situation-problème est qu'elle met en jeu un seul nombre (par exemple, le nombre « six » dans le cas du problème des bouteilles et des bouchons). Or, les nombres forment un système et on ne peut pas comprendre le nombre « six » sans le comparer à ceux qui le précèdent. Autrement dit, on ne peut pas comprendre le nombre « six » sans s'intéresser à ses décompositions.* »

Que penser d'une telle activité ? C'est une excellente activité lorsque l'on a choisi d'enseigner la quantification à l'aide d'une collection de numéros et de faire accéder les élèves à la nominalisation de cette quantité par le dernier mot prononcé. Mais la difficulté sera grande ensuite pour que les élèves accèdent réellement aux nombres, certains n'y accéderont jamais parce qu'ils n'arriveront pas à surmonter l'obstacle que l'enseignant a créé en favorisant la polysémie des mots-nombres.

Il faut souligner que de nombreux formateurs qualifient cette situation de « *situation fondamentale du dénombrement* ». Ils qualifient ainsi un problème dont la résolution ne nécessite pas d'utiliser les nombres. Là encore, précisons ce que devrait être l'usage du mot « **dénombrement** » : il convient d'appeler ainsi toute stratégie permettant d'accéder réellement au nombre. Or ces stratégies sont toutes des stratégies de décomposition-recomposition : face à une collection de 7 unités, celle-ci est, par exemple, d'abord analysée comme formée de 3 unités, 3 autres et encore 1 (phase de décomposition) avant d'être désignée soit par 3-et-encore-3-et-encore-1, soit par le nom du nombre correspondant (phase de recomposition). Parmi ces stratégies de décomposition-recomposition, il y a celle où les unités sont énumérées l'une après l'autre, qu'on appelle le comptage-dénombrement : « 1, et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4… ». Si l'on utilise le mot « dénombrement » dans le sens qui vient d'être précisé, la situation de commande d'une collection équipotente du type coquetiers-œufs n'est pas nécessairement une situation de dénombrement.

Une objection possible est évidemment que cette situation, si elle n'est pas nécessairement une situation de dénombrement, cela peut éventuellement être le cas : en effet, rien n'empêche l'enfant d'utiliser une stratégie de décomposition-recomposition afin d'accéder à une représentation numérique de la quantité des coquetiers. Cependant, quiconque a expérimenté dans des classes d'école maternelle sait qu'il est difficile de faire en sorte que les enfants utilisent des stratégies de décomposition-recomposition et que lorsque la situation ne les contraint pas à l'usage de telles stratégies, elles n'émergent guère spontanément. De plus, nous allons voir que la situation de repérage d'une case d'une file et celle de commande d'une collection équipotente doivent être considérées comme faisant partie d'une sorte de « package » théorique. Or, et cela sans aucun doute, la première situation conduit au comptage-numérotage. Pour que ce ne soit pas le cas de la seconde, il faudrait beaucoup d'explications aux enfants… et à leurs enseignants.

4 Une erreur épistémologique qui risque d'avoir de graves conséquences

Ainsi, derrière la proposition didactique précédente, il y a le choix d'enseigner le comptage-numérotage. Les formateurs qui avancent cette proposition didactique sont-ils conscients de ce choix ? On peut en douter. En effet, derrière cette proposition didactique on trouve le cadre théorique qui consiste à distinguer deux prétendus aspects du nombre : *l'aspect cardinal* et *l'aspect ordinal*. Ce cadre théorique trouve son origine dans un livre que nous avons déjà évoqué et dont l'impact en formation des maîtres a été considérable : Ermel GS (Charnay & al., 1990). Cependant sa présentation la plus développée se trouve dans un ouvrage récent intitulé « *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique* » (Claire Margolinas & Floriane Wozniak, 2012). Les deux situations qui viennent d'être présentées organisent l'exposé de cet ouvrage. La situation de commande d'une collection équipotente à une collection donnée est présentée dans le chapitre 1 comme une situation « *fondamentale* » permettant d'accéder au *cardinal*. Celui-ci est défini ainsi (p. 40) : « *le cardinal d'une collection est ainsi le représentant de toutes les collections qui lui sont équipotentes, c'est-à-dire de toutes les quantités égales : quatre représente la quantité de toutes les collections équipotentes à la collection des mots-nombres un, deux, trois, quatre.* ».

Ainsi les auteurs parlent de « cardinal » alors que le mot « *quatre* » est explicitement défini comme le résultat d'un processus de nominalisation de la quantité quand celle-ci est représentée par une collection de numéros : « 4 » vaut pour « 1, 2, 3, 4 ». L'usage du mot « cardinal » conduit le lecteur à penser qu'on lui parle de nombre alors que ce n'est pas le cas.

Quant à la situation de repérage d'une position, elle est présentée dans le chapitre 3 comme permettant de travailler « *l'ordinal, c'est-à-dire le nombre comme mémoire de la position* » (p. 73). Or, dans tout le chapitre correspondant, lorsqu'on analyse l'activité des enfants telle qu'elle est décrite, on arrive à la conclusion qu'ils ne font que raisonner sur des numéros. Comme ces numéros sont appelés des *ordinaux*, les lecteurs peuvent croire qu'on leur parle de nombres alors que n'importe quelle suite de symboles ordonnés, sans aucun rapport avec les quantités (les lettres de l'alphabet, par exemple) feraient aussi bien l'affaire.

Et dans la conclusion, on lit dans une section intitulée « *Commencer par le cardinal ou l'ordinal ?* » (p. 116-117) : « *D'un point de vue didactique ce qui parait essentiel est d'appréhender la dualité de ces deux conceptions du nombre et, pour les professeurs, d'identifier clairement les situations mathématiques que ces deux aspects*

modélisent. De la notion de collection se déduit celle de quantité d'où nait le concept de nombre cardinal via le processus de dénombrement[4]*. De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal via le processus de repérage* ».

On a vraiment l'impression d'être face à un cadre théorique structuré alors qu'aucune des propositions avancées ne peut être retenue. Rappelons qu'on ne peut pas isoler le point de vue de la quantité de celui de l'ordre sans que l'idée même de nombre disparaisse : le nombre est la raison arithmétique des quantités et il résulte de la mise en ordre des quantités selon leurs différences. Du fait qu'il est mise en relation des quantités et, donc, de nature plus abstraite que les quantités, le nombre ne peut plus être considéré sous un aspect qu'il n'a plus : celui de quantité. De manière évidente, il ne peut pas être envisagé sous le seul aspect de la mise en ordre non plus. Ainsi, chacune des deux situations didactiques qui nous intéressent ici, ne *modélise* pas un de ces prétendus *aspects du nombre* : 1°) parce qu'il ne suffit pas d'accéder à la quantité pour accéder au nombre et 2°) parce que la mise en ordre d'autres entités que des quantités (la mise en ordre d'images d'animaux, de fenêtres de TGV, etc.) ne conduit pas au nombre.

Cet usage d'oxymores et les approximations lexicales qui l'accompagnent ont principalement un effet : celui de masquer que, pour l'essentiel, les deux situations décrites sont des situations d'apprentissage du comptage-numérotage. On remarquera d'ailleurs que la notion d'itération de l'unité ne figure nulle part dans ce livre : l'ouvrage s'intitule « *Le* nombre *à l'école maternelle – Une approche didactique* » mais, en fait, **il n'y est pas question du nombre**, du moins du nombre tel que le conçoivent Newton, les encyclopédistes, Buisson, Piaget, Gréco et la quasi-totalité des chercheurs contemporains en psychologie. Le plus grave, évidemment, étant que le choix didactique en faveur du comptage-numérotage, celui qui est masqué par ces propos, se trouve promu alors qu'il joue très vraisemblablement un rôle non négligeable dans l'aggravation de l'échec scolaire en mathématiques depuis la fin des années 1980.

IX - CONCLUSION

La quasi-totalité des chercheurs en psychologie des apprentissages numériques considèrent aujourd'hui l'accès à l'itération de l'unité comme la porte d'entrée vers le nombre. Cette unanimité est récente et elle donne l'espoir qu'après presque 30 ans d'enseignement du comptage-numérotage à l'école, une page commence à se tourner : celle où cet enseignement n'était pas interrogé par les didacticiens, où il était considéré comme allant de soi alors qu'avant 1970, il avait été rejeté par l'école française pour de bonnes raisons. En effet, les résultats empiriques abondent qui étayent l'idée que l'enseignement du comptage-numérotage et ses succédanés (les situations-problèmes visant à faire étudier le *nombre* comme moyen de garder la mémoire des quantités et des rangs) constituent un détour inutile qui éloigne du nombre.

Dans la mesure du possible, dans sa pratique quotidienne, l'enseignant doit s'efforcer d'attirer l'attention des enfants sur les dimensions pertinentes de ce qu'ils doivent apprendre[5]. Dans le cas du nombre, enseigner le comptage-dénombrement, c'est théâtraliser l'itération de l'unité et, donc, attirer l'attention des enfants sur ce qui fonde le nombre. Enseigner le comptage-numérotage, c'est au contraire créer un obstacle langagier à l'accès au nombre et enfermer les enfants les plus fragiles dans la représentation des quantités par des collections de numéros.

Il serait intéressant de connaître les arguments d'éventuels chercheurs ou pédagogues qui, aujourd'hui, recommanderaient de continuer à enseigner le comptage-numérotage plutôt que le comptage-dénombrement. La parution de « *Premiers pas vers les maths* » en 2007 se voulait une alerte concernant les difficultés grandissantes des écoliers français avec le nombre et, depuis, les craintes exprimées dans cet ouvrage n'ont fait que se confirmer. La critique du comptage-numérotage y était vive et, pourtant, les

[4] De notre point de vue, le mot *dénombrement* doit ici être compris comme *comptage.*

[5] Il est important de noter que la portée de ce propos se trouve relativisée du fait qu'il commence par l'expression : « *Dans la mesure du possible* ». En effet, l'enfant ne perçoit pas nécessairement le monde comme nous (cf. la difficulté de traiter les phonèmes correspondants aux consonnes occlusives, par exemple) et attirer son attention sur une dimension qui lui est inaccessible ne peut qu'échouer.

formateurs qui, depuis près de 30 ans, recommandent l'enseignement du comptage-numérotage ou l'un de ses succédanés, ont continué comme si de rien n'était. Espérons que ce temps est révolu.

X - BIBLIOGRAPHIE

ANDREU, S., LE CAM, M. & ROCHER, T. (2014) Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note n°19-Mai 2014 de la DEPP*.

ARNOUX, P. (2012) *Des nombres « vivants » ? Digression sur la vie des nombres*. Texte mis en ligne sur le site educmath (IFE) http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-arnoux

BAROODY, A., BAJWA, N. & EILAND, M. (2009) Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ? *Developmental disabilities research reviews* ; 15, 69-79.

BRANDICOURT, R (1962). Des principes à la pratique pédagogique. In J. Bandet (Ed) : *Les débuts du calcul*, 87-108. Paris : Editions Bourrelier.

BRESSON, F. (1987) Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, P. Mounoud & J.-P. Bronckart (Eds) *Psychologie – Encyclopédie de la Pléiade*, 933-982. Paris : NRF

BRISSIAUD, R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*. Paris : Retz

BRISSIAUD, R. (1995) Le comptage en tant que pratique verbale : un rôle ambivalent dans le progrès des enfants. *Repères*, 12, p. 120-143.

BRISSIAUD, R. (2005) Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. Actes du congrès scientifique international de Toulouse : Comprendre. *Rééducation Orthophonique*, n°223, pp. 225-238.

BRISSIAUD, R. (2007) *Premiers pas vers les maths – Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

BRISSIAUD, R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone.* Paris : Retz

BUISSON, F. (1882-1887) Dictionnaire de pédagogie, 1ère éd. Paris : Hachette.

CANAC, H. (1955) L'initiation au calcul entre 5 et 7 ans. In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (ed.), *L'enfant et le nombre*, p.9-27. Paris : Didier.

CHAMBRIS, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse Université Paris 7.

CHARNAY, R., DOUAIRE, J., GUILLAUME, J. C. & VALENTIN, D. (1990) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cycle des apprentissages, Grande Section de Maternelle.* Collection ERMEL. Paris : Hatier.

COLOME, À. & NOËL, M. P. (2012). One first? Acquisition of the cardinal and ordinal uses of numbers in preschoolers. *Journal of experimental child psychology,* 113(2), 233-247.

CONSEIL SUPERIEUR DES PROGRAMMES (2014-1) Projet de programme et recommandations école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf

CONSEIL SUPERIEUR DES PROGRAMMES (2014-2) Projet de programme école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/6/CSP-PROJET_DE_PROGRAMME_eCOLE_MATERNELLE_337326.pdf

D'ALEMBERT, BOSSUT, DE LA LANDE, CONDORCET & COLLEGUES (1784) *Encyclopédie méthodique – Mathématiques* T1 et T2. Paris : Panckoucle

DAVIDSON, K., ENG, K. & BARNER, D. (2012). Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*, *123*(1), 162-173.

DEHAENE, S. (1997-2010) *La bosse des maths – 15 ans après.* Paris, Odile Jacob.

DI LUCA, S. & PESENTI, M. (2011). Finger numeral representations: more than just another symbolic code. *Frontiers in psychology*, *2*.

DROZ, R. & PASCHOUD, J. (1981) : Le comptage et la procédure "(+1)-itérée" dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue Suisse de Psychologie,* 40, 219-237.

FAYOL, M. (2012) *L'acquisition du nombre.* Collection : Que sais-je ? Paris : Puf

FUSON, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer.

GELMAN R. & GALLISTEL C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge : Harvard University Press.

GRECO, P. (1960). Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. *Problème de la construction du nombre, Paris, PUF*.

GRECO, P. (1962) Quantité et Quotité. In *Structures numériques élémentaires, Etudes d'épistémologie génétique, XIII,* J. Piaget (Edit.), Paris : PUF.

GRECO, P. (1963). Le progrès des inférences itératives et des notions arithmétiques chez l'enfant et l'adolescent. *La formation des raisonnements récurrentiels, EEG XVII*.

IZARD, V., PICA, P., SPELKE, E. S. & DEHAENE, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical psychology*, *21*(4), 491-505.

LALANDE A. (1926-1988) *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, 16ème édition. Paris : PUF.

LE CORRE, M. (2014). Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle. *British Journal of Developmental Psychology*, *32*(2), 163-177.

MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2012) *Le nombre à l'école, une approche didactique.* Bruxelles : De Boeck éditeur

MARKMAN, E.M. (1989) : *Categorisation and naming in children*. Cambridge, MA: MIT Press.

MARKMAN, E.M. (1990) : Constraints children place on word meanings. *Cognitive Science*, 14, 57-77

MEN/DEGESCO (2010) Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle, mis en ligne le 12 mars 2010.

MIALARET, G. (1955) *Pédagogie des débuts du calcul*. Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco).

MOUNIER, E. (2010) : *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse Université Paris 7.

NEWTON, I. (1728/1967). Universal Arithmetic: Or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. In D.T. Whiteside (Ed.), *The mathematical Works of Isaac Newton*, Vol. 2 (pp. 3–134). New York: Johnson Reprint Corp.

PIAGET, J. & INHELDER, B. (1963). Les opérations intellectuelles et leur développement. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds). *Traité de psychologie expérimentale*, VII, L'intelligence, 109-155.

PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. (1941) *La genèse du nombre chez l'enfant.* Paris : Delachaux et Niestlé.

RIPS, L. (2011) *Lines of thought – Central concepts in cognitive psychology*. Oxford University Press

SARNECKA, B.W. & CAREY, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition,* 108(3), 662-674.

SINCLAIR, A., MELLO, D. & SIEGRIST, F. (1988) La notation numérique chez l'enfant. In H. Sinclair (Ed): *La production de notations chez le jeune enfant – Langage, nombres, rythmes et mélodies.* Paris : PUF

SOPHIAN, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood.* Lawrence Erlbaum Associates.

TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse Université Paris 7.

DE LA CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION A L'IDENTIFICATION DE BESOINS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Frédérick TEMPIER
PRAG, ESPE académie de Poitiers
LDAR, Paris 7
Frederick.tempier@univ-poitiers.fr

Résumé
Les programmes et manuels actuels ne font pas de l'aspect décimal (relations entre unités) un enjeu essentiel pour l'apprentissage de la numération des nombres à quatre chiffres en CE2 (Chambris 2008, Tempier 2010a). Dans notre thèse (Tempier 2013), nous avons cherché à concevoir une ressource pour aider les enseignants à prendre en compte ce savoir dans le cadre d'une ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian 2011). L'objectif de cette communication est double : présenter la ressource construite (différentes parties, choix des situations, descriptions des savoirs en jeu …) et pointer des éléments essentiels de formation des enseignants pour une utilisation adaptée de cette ressource (dégagés à partir des expérimentations de la thèse).

INTRODUCTION

La numération écrite chiffrée des nombres entiers est une notion essentielle pour les mathématiques de l'école primaire. Elle s'appuie sur deux principes qui sont indissociables :

- à chaque rang de l'écriture en chiffres correspond une unité de numération (par exemple au troisième rang on écrit des centaines) que je nommerai principe de position ;
- chaque unité est égale à dix unités de l'ordre inférieur (par exemple une centaine = dix dizaines) que je nommerai principe décimal.

L'étude de la transposition didactique de la numération à travers les programmes officiels et des manuels de 3ème primaire (Chambris 2008, Tempier 2010a) montre qu'une place centrale est donnée aux tâches mettant en jeu le principe de position de la numération : l'association entre l'écriture en chiffres et le nom du nombre, la comparaison et les décompositions canoniques du type 1304 = 1x1000 + 3x100 + 4. Cela a des conséquences :

- sur les pratiques des enseignants pour qui le principe décimal n'est pas toujours un enjeu d'enseignement (Tempier 2010b) ;
- sur les apprentissages des élèves : un certain nombre d'élèves rencontrent des difficultés dans des tâches mettant en jeu les relations entre unités (Tempier 2013), comme « 1 centaine = … dizaines » (48% de réussite[1]), « 60 dizaines = … centaines » (31% de réussite) et « dans 764 il y a … dizaines » (39% de réussite).

Pourtant les relations entre unités sont essentielles pour accéder à une véritable compréhension de l'écriture chiffrée. Elles sont aussi utiles pour comprendre le fonctionnement des techniques de calcul posé des quatre opérations.

Tout cela m'a amené, dans mon travail de thèse (Tempier 2013), à chercher à affiner mes constats (axe 1) sur la prise en compte du principe décimal à différentes étapes de la transposition didactique (étude des programmes et de manuels, étude de classes ordinaires) et à étudier comment enrichir les pratiques (axe

[1] Sur 104 élèves de 8/9 ans en France.

2) des enseignants en prenant davantage en compte le principe décimal. Pour cela j'ai choisi de concevoir une ressource qui soit à la fois :

- utile, c'est-à-dire qui permette aux enseignants de s'approprier les enjeux de l'enseignement de la numération et aux élèves de construire les connaissances visées,
- et utilisable par les enseignants, c'est-à-dire qu'ils puissent s'en emparer facilement pour leur travail de préparation ou de mise en œuvre en classe.

J'ai fait le choix de restreindre mon objet d'étude à l'enseignement de la numération en classe de 3ème primaire (élèves de 8/9 ans) pour les nombres à quatre chiffres car il y a de nombreuses relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs. De plus, c'est une étape essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Je m'appuie sur une méthodologie d'« ingénierie didactique pour le développement d'une ressource et la formation des enseignants » (Perrin-Glorian 2011) afin de questionner

J'utilise une méthodologie par cycles pour l'ingénierie didactique. Il est en effet essentiel de réaliser plusieurs allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique pour produire une ressource utilisable par les enseignants.

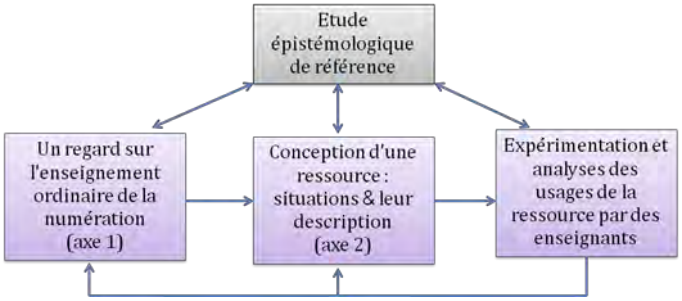


Figure 1 : schéma général de la méthodologie

Chaque cycle m'amène à prévoir des modifications des situations ou de leur description dans la ressource et me permet aussi d'identifier des besoins pour la formation des enseignants (voire des recommandations pour les programmes) quand il y a des résistances importantes du côté des enseignants que l'on peut lier à des manques de savoirs didactiques pour enseigner la numération.

Je souhaite ici présenter les deux versions de la ressource construites dans le cadre de cette thèse puis les besoins de formation que j'ai pu identifier dans les analyses des séances de classes ordinaires ou dans la mise en œuvre des situations proposées dans la ressource.

I - PRESENTATION DE LA RESSOURCE

1 Principes généraux pour la ressource

La conception des deux versions de la ressource s'appuie sur certains principes généraux définis au début de mon travail en m'appuyant sur des résultats de recherches portant sur l'usage des ressources par les enseignants de l'école primaire voire plus généralement sur leurs pratiques[2].

- La ressource est à destination des enseignants. J'y propose des situations à usage didactique. Il n'est pas visé un suivi pas à pas par l'enseignant : les usages seront nécessairement variés. Je décris donc les éléments qui semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée par l'enseignant. La détermination de ces éléments essentiels des situations fait partie des questions de recherche.
- Une place importante semble devoir être faite a la description des enjeux de savoir du fait de contraintes institutionnelles actuelles qui peuvent amener les enseignants à se centrer sur les

[2] Nous nous appuyons en partie sur les travaux de Ball et Cohen (1996), Margolinas, Mercier et René de Cotret (2006), Margolinas et Wozniak (2010), Arditi (2011), Coulange (2011), Margolinas et Laparra (2011). Par manque de place nous ne développons pas davantage les résultats de ces recherches. Pour davantage de précisions se reporter à Tempier (2013) p. 167-181.

activités proposées aux élèves sans toujours se préoccuper des savoirs qu'elles pourraient permettre de faire émerger.

- Des éléments sont proposés pour aider l'enseignant à construire une séquence à partir des situations proposées car les ressources ne permettent pas toujours aux enseignants de s'approprier les progressions sur un thème donné ou plus généralement sur l'ensemble des mathématiques travaillées dans l'année. Pour la numération il semble en particulier essentiel que les enseignants soient conscients de la mise en jeu des savoirs dans d'autres thèmes mathématiques de l'école comme le calcul posé. D'autres apports généraux sur l'enseignement de la numération peuvent être proposés. La détermination des principaux apports fait aussi partie des questions de recherche et sera affinée à partir des besoins des enseignants révélés par les expérimentations.
- Enfin, il faut motiver les enseignants à utiliser la ressource en leur montrant l'intérêt qu'ils peuvent y trouver. Cela peut se faire en pointant les manques au niveau des savoirs de numération observés dans certains manuels ou l'importance de la numération pour le calcul posé. Mais cette entrée par les savoirs pourrait ne pas suffire. Il est important de s'appuyer également sur les difficultés des élèves, notamment pour les tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération.

2 Choix des situations

Pour la conception des situations, je m'appuie sur la situation fondamentale du nombre de Brousseau (1995) : un actant A et un actant B doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes. Mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps (la seule correspondance terme à terme ne suffit pas pour réussir). Sous ces contraintes, l'utilisation du nombre (parlé ou écrit) est la solution la plus économique à ce problème. Pour mon travail sur la numération écrite, je ne considère que le cas de collections ayant au moins cent (voire mille) éléments et j'impose que le code de désignation utilisé soit l'écriture en chiffres. Le jeu 1 consiste alors à produire une écriture chiffrée à partir d'une collection et le jeu 2 est le jeu inverse.

J'ai choisi d'enrichir cette situation en introduisant une description de la quantité avec les unités de numération (UN) car elles permettent de décrire (à l'oral comme à l'écrit) des nombres d'unités supérieurs à dix contrairement aux mots de la numération parlée en France (Brissiaud 2005, Chambris 2008) : on peut dire « vingt centaines » alors que l'on ne peut pas dire « vingt cents » dans notre système de numération parlée. J'ai donc ajouté deux autres jeux (jeux 3 et 4) de traduction d'écritures d'une écriture chiffrée (par exemple 1304) à une écriture en UN (par exemple 1M 3C 4U) ou réciproquement :

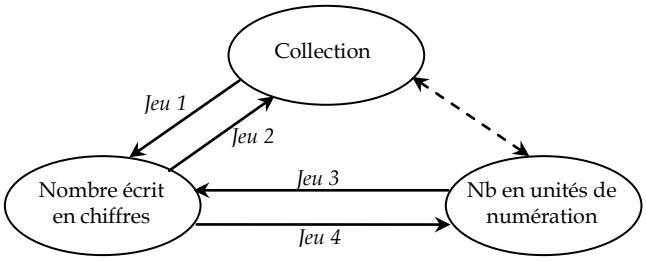


Figure 2 : les jeux de la situation fondamentale

La collection qui est à dénombrer (jeu 1) ou à constituer (jeu 2) peut être non organisée (« en vrac »), totalement groupée ou partiellement groupée. J'ai montré que c'est une variable didactique essentielle. Cela correspond au nombre d'unités de chaque ordre dans le cas de l'utilisation des écritures en UN (jeux 3 et 4). Le choix de cette variable didactique peut permettre de mettre en jeu différentes connaissances liées aux deux principes de la numération.

Pour la construction des situations et du canevas didactique de la ressource je m'appuie sur cette situation fondamentale en faisant des choix pour sa « mise en scène ». Concernant la progression générale, j'ai choisi de partir de la situation de dénombrement, c'est à dire passer d'une collection ou

d'une écriture en unités de numération (EUN) à une écriture chiffrée (EC), avant de proposer la situation de commande (passer d'une EC à une EUN).

Pour la situation de dénombrement il y a trois variantes. Je propose un matériel de référence constitué de bûchettes en bois. La première variante permet la constitution des groupements successifs. La deuxième permet de mettre en jeu le principe de position pour dénombrer une collection totalement groupée comme 1M (1 millier) et 4D (4 dizaines) par exemple. C'est seulement dans la troisième variante que les conversions entre unités sont véritablement un enjeu car la réunion de deux collections amène à avoir plus de dix unités à certains ordres[3]. Dans l'exemple donné ici en réunissant les deux collections on obtient 12C (12 centaines) qu'il faut convertir en 1M et 2C.

La situation de commande permet de réinvestir les connaissances en partant cette fois de la donnée de l'EC pour produire une EUN en tenant compte de différentes contraintes sur le stock du marchand qui permettent de mettre en jeu les conversions entre unités.

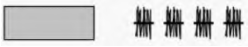
Situation de dénombrement de collections	V1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	V2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	V3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1ère collection : 2M 8C 1D 3U 2ème collection : 4C 1M 2U. Nombres paris : 31215, 3215, 3315, 4215
Situation de commande de collections	V1 : Commandes de bûchettes	Il nous faut 2615 bûchettes, mais le marchand n'a plus de bûchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?
	V2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

Figure 3 : les situations (version 1 de la ressource)

3 Choix d'ergonomie de la ressource

Enfin, concernant l'ergonomie de la ressource, on peut voir sur la page d'accueil (annexe) de la version 1 trois parties : des apports sur la numération, des propositions de situations (les 2 situations principales avec leurs variantes et des situations complémentaires) et des aides pour construire une séquence. L'analyse de l'usage de cette première version a amené à revoir l'organisation générale de la ressource suite à des difficultés constatées pour la conception d'une séquence à partir des situations proposées :

- en intégrant des exercices d'entraînement car certains enseignants se contentaient des situations proposées ;
- en mettant en évidence le canevas didactique avec les deux situations et leurs variantes ainsi que le jeu sur les contextes différents (comme les situations de la version 1 ne proposaient qu'un travail autour du contexte des bûchettes, certains enseignants ne proposaient que ce contexte).

On peut voir cette entrée par le canevas didactique dès la page d'accueil de la version 2 (annexe).

[3] Dans la version 2 de la ressource nous proposons de dénombrer directement une collection partiellement groupée plutôt qu'une réunion de deux collections.

II - DES BESOINS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Je m'appuie sur différentes expérimentations avec des enseignants ayant au moins 5 années d'expérience :

- en 2008/2009 : une étude de cas des pratiques de trois enseignants « ordinaires » (qui utilisent leur ressources usuelles, sans intervention du chercheur) ;
- de 2009 à 2012 : trois expérimentations dans le cadre de mon ingénierie didactique de développement d'une ressource, dont je vais maintenant préciser le dispositif expérimental.

J'ai commencé par mener une pré-expérimentation avec seulement deux enseignants qui devaient suivre la ressource proposée (version 0) tout en l'adaptant si besoin. La version 1 de la ressource a fait l'objet d'une expérimentation avec 7 enseignants qui devaient suivre les 5 problèmes proposés dans la ressource. Pour la version 2 de la ressource j'ai travaillé avec 6 autres enseignants qui avaient toute liberté dans l'usage de la ressource.

J'ai réalisé un entretien avant et après la séquence pour tous ces enseignants. L'entretien final a permis de faire le point sur l'utilisation de la ressource pour chaque enseignant et de discuter de modifications possibles. Mais pour mieux associer certains enseignants à ce travail collaboratif avec le chercheur j'ai aussi organisé des réunions de travail avec une partie des enseignants avant et après l'utilisation de la ressource (« groupe de travail », GT). Les autres enseignants utilisent la ressource dans des conditions plus ordinaires (« groupe libre », GL). Je n'ai observé que des séances des enseignants du GT.

Expérimentation	**Nombre d'enseignants**	**« Contrat » d'expérimentation pour le suivi de la ressource**	**Nombre de séances observées**	**Evaluations des élèves**
Pré-expérimentation (version 0)	2	*Suivi de la ressource proposée avec adaptations possibles.*	*La plupart des séances mises en œuvre.*	*Avant/après*
Expérimentation (version 1)	4 (groupe de travail GT) / 3 (groupe libre GL)	Suivi des 5 problèmes principaux. Adaptations possibles pour la mise en œuvre. Construction d'une séquence à la charge de l'enseignant.	3 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après
Expérimentation 2 (version 2, après-thèse)	3 (GT) / 3 (GL)	Liberté totale dans l'utilisation de la ressource.	2 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après

Figure 4 : tableau du dispositif expérimental de l'ingénierie didactique

Il y a une évolution des conditions d'expérimentation avec les enseignants au cours des cycles. J'ai fait le choix de donner de plus en plus de liberté aux enseignants dans la mise en œuvre des situations pour progressivement s'approcher des conditions « réelles » d'utilisation d'une ressource par des enseignants, hors contexte de recherche.

Pour l'analyse des séances je fais une comparaison entre l'analyse *a priori* des situations de la ressource et l'analyse des déroulements observés et je cherche à identifier les raisons des décalages éventuellement observés. Pour l'analyse des séquences je compare les séquences réalisées au canevas didactique proposé afin d'étudier les enrichissements produits par les enseignants et l'usage du canevas didactique.

Voici les principaux besoins de formation identifiés :

- Dans le cadre de l'utilisation de la ressource :
  - ✓ S'approprier la progression proposée dans la ressource (situations et variantes).
- En général :
  - ✓ Comprendre l'intérêt d'un travail sur les deux aspects de la numération.

- ✓ Comprendre le rôle du matériel et des unités de numération pour en faire un usage adapté en classe.
- ✓ Connaître les techniques pour décomposer/recomposer (Collection ou EUN -> EC et EC -> EUN) et leurs technologies afin d'identifier les savoirs à institutionnaliser en classe.

1 S'approprier la progression proposée dans la ressource (situations et variantes).

Lors de l'expérimentation 2 le fait que les enseignants aient une liberté totale dans l'utilisation de la ressource (alors que dans la 1 ils devraient suivre les situations) a pu permettre d'étudier leur appui sur le canevas didactique proposé (dès la page d'accueil, cf. annexe 2) pour construire leur séquence.

J'ai alors pu observer que certains enseignants prennent plus ou moins de libertés avec le canevas didactique proposé pour construire leur séquence. Certains suivent la chronologie générale mais « sautent » certains passages de la progression. D'autres piochent des exercices alternativement dans chaque situation principale sans prendre appui sur la logique de l'organisation didactique proposée dans la ressource. Tout se passe comme si, pour certains enseignants, la ressource était utilisée comme une banque d'exercices dans laquelle ils viennent « piocher » en fonction de leurs envies ou de leurs besoins.

Tous les enseignants, n'investissent ni la variante de dénombrement d'une collection partiellement groupée, ni les exercices de conversion : il y a donc toute une partie de la ressource qui n'est pas utilisée. Cela n'est pas sans lien avec le fait que ce sont des situations/exercices qui justement sont peu présents dans les manuels actuels (Tempier 2010a). L'importance du travail de conversion entre unités pourrait donc être difficile à faire passer par l'intermédiaire d'une ressource.

Dans le cadre de l'utilisation de cette ressource, donc de cette progression, il semble important que l'enseignant s'approprie la logique du canevas didactique et le lien entre les situations et les savoirs en jeu afin de faire des choix cohérents avec les enjeux principaux de la ressource :

- Le jeu sur l'organisation de la collection (en vrac, totalement groupée, partiellement groupée) permet de construire progressivement les différentes conditions de la technique de position (cf. 2.4) pour la situation de dénombrement et de faire des décompositions variées de nombres en jouant sur les relations entre différentes unités pour la situation de commande.
- Le rôle crucial de la variante 3 de la situation de dénombrement (collection partiellement groupée) pour introduire la nécessité des conversions entre unités. Si on s'arrête à la variante 2, les unités de numération ne sont utilisées que d'un point de vue positionnel. C'est la variante 3 qui permet de faire un travail sur les unités, en convertissant 10 unités d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur.
- Les élèves ont besoin de ces connaissances sur les conversions avant d'aborder la situation de commandes de collection pour que les décompositions qu'ils y feront s'appuient sur les conversions en jeu (dans 1234 il y a 12 centaines car 1 millier c'est 10 centaines). Si le travail sur les commandes vient trop tôt le risque est que l'on ne cherche qu'un « découpage » adéquat de l'EC.

2 Comprendre l'intérêt d'un travail sur les deux aspects de la numération.

Les programmes et certains manuels ne font pas de l'aspect décimal un enjeu essentiel pour l'enseignement de la numération (Tempier 2010a). Cela a une influence sur le projet des enseignants ordinaires que nous avons observés lors de leur séquence sur la numération en dehors de l'utilisation de la ressource de l'ingénierie (Tempier 2010b). Cela a aussi des influences sur la mise en œuvre de ce projet et même jusqu'à la façon dont les enseignants interprètent les erreurs ou difficultés des élèves.

Dans la première classe, aucune situation proposée n'amène à faire un travail sur le principe décimal. Cependant, on peut trouver dans l'évaluation finale un exercice de recomposition pour lequel les deux cas de la dernière ligne mettent en jeu des relations entre unités :

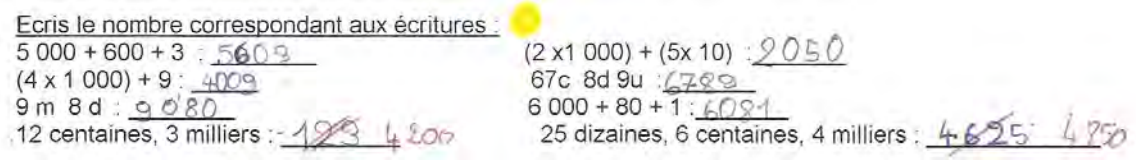


Figure 5 : une production d'élève, évaluation finale

Quand j'interroge l'enseignante sur les difficultés rencontrées par certains élèves dans cet exercice, elle explique les choix qu'elle a effectués :

> « On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors je n'avais pas mis de centaines ou voilà. Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait »

Les variables indiquées par l'enseignante ne correspondent pas à celles qui permettent de mettre en jeu les relations entre unités (ici il s'agit du fait d'avoir des nombres à deux chiffres pour certaines unités) et les erreurs sont interprétées comme des erreurs d'inattention et non en référence aux savoirs en jeu.

Dans la deuxième classe le principe décimal est susceptible d'être un enjeu dans une seule situation. Les élèves ont à disposition des étiquettes 1, 10, 100, 1000 et ils doivent recomposer les nombres suivants :

> 8c 4d 3u = …, 32d = …, 13c = …, 12c 8d 1u = …, 14c 2u = …, 12c 11d 2u =…
> (les lettres c, d, u représentent les centaines, dizaines, unités).

Pour les 5 premiers cas, les élèves se contentent de juxtaposer les chiffres sans utiliser le fait que 10 centaines = 1 millier. Cependant pour le dernier cas ce n'est plus possible car cela aboutirait à la réponse erronée 12112. Aucun élève ne trouve la solution et cela pose de réels problèmes de gestion de la mise en commun. L'utilisation des étiquettes aurait pu aider les élèves à échanger dix étiquettes 10 contre une étiquette 100, mais l'enseignant préfère amener les élèves à effectuer un comptage de cent en cent, dix en dix et un en un à l'oral. Cette approche par l'utilisation de la comptine numérique orale s'appuie sur une conception ordinale qui ne met pas en jeu de relations entre unités : par exemple le passage de « neuf-cents » à « mille » ne s'appuie pas sur la connaissance de la relation 10 centaines = 1 millier.

Ces constats me font penser qu'il y a d'abord un besoin pour les enseignants de prendre conscience de l'insuffisance de ce qui est proposé actuellement en numération dans les programmes et dans certains manuels et le déficit que cela peut entraîner pour l'apprentissage des élèves[4] (cf. par exemple les difficultés des élèves pour certaines tâches de numération citées en introduction).

Mais il est aussi important d'élargir au-delà du travail sur la numération des entiers : les enseignants doivent prendre conscience de l'intérêt d'une bonne compréhension de la numération pour l'apprentissage d'autres notions : le calcul posé, le calcul mental et les grandeurs et mesures. De plus, ces connaissances s'étendent lors du travail sur les grands nombres et des nombres décimaux. Le principe décimal s'étend par prolongement des relations entre unités d'ordres supérieurs (avec cependant des noms d'unités s'appuyant sur certains ordres particuliers : milliers, millions, etc.) et dans l'autre sens avec les décimaux, pour ce qui concerne les relations entre unités/dixièmes, dixièmes/centièmes, etc.

3 Comprendre le rôle du matériel et des unités de numération pour en faire un usage adapté en classe

Le troisième besoin de formation identifié est davantage lié aux mises en œuvre des situations de la ressource dans les classes. En effet, il est proposé dans la ressource d'utiliser :

- Un matériel de numération constitué de bûchettes en bois dont les groupements successifs se font : avec un élastique (1 dizaine), un sachet (1 centaine) et une boite (1 millier). Les entretiens

[4] Les difficultés des élèves : c'est un aspect important dans le cadre de la conception d'une ressource (Margolinas, Mercier et René de Cotret, 2006) pour en permettre l'acceptabilité par l'enseignant. On peut penser qu'il en est de même pour une formation d'enseignant.

avec les enseignants montrent que cela n'est pas une pratique courante pour des nombres de cette taille (au-delà du millier).

- Les unités de numération : pour décrire les groupements et pour faire des conversions d'unités. Chambris (2008) a montré que cette utilisation des unités de numération s'était perdue après la réforme des mathématiques modernes. Les unités semblent principalement utilisées dans les manuels pour nommer les colonnes du tableau de numération.

Dans la ressource, les unités de numération sont utilisées à la fois :

- dans la description des situations pour décrire les groupements. Par exemple voici comment sont décrites les collections pour la variante de dénombrement d'une réunion de deux collections :

Figure 6 : description des deux collections (situation de dénombrement, variante 3)

- dans les éléments de savoirs de cette situation où des conversions sont expliquées :

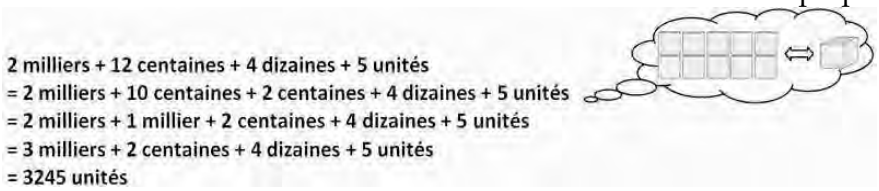


Figure 7 : description des conversions en jeu (situation de dénombrement, variante 3)

- dans les apports généraux pour l'enseignant, où le choix de leur utilisation est justifié par comparaison avec les écritures chiffrées des puissances de 10 (1, 10, 1000, 1000, …), qui sont actuellement davantage utilisées dans les manuels (Chambris 2008). Il ne s'agit pas de préconiser aux enseignants de ne plus les utiliser mais plutôt de montrer pourquoi dans les situations proposées nous privilégions les unités de numération. Le lien entre ces deux types d'écritures devra être fait à un moment.

3 milliers + 24 dizaines + 5 unités = ?	**3x1000 + 24x10 + 5 = ?**
On commence par décomposer 24 dizaines : 24 dizaines = 20 dizaines + 4 dizaines = 2 centaines + 4 dizaines (**aspect décimal**) On a donc : 3 milliers + 2 centaines + 4 dizaines + 5 unités, ce qui fait 3245 (**aspect position**).	Pour recomposer il faut d'abord **"calculer"** 3x1000 + 24x10. On utilise la **"règle des zéros"** (mais le savoir qui justifie cette règle est invisible) : 3x1000 = 3000 et 24x10 = 240 Il reste donc à calculer la somme 3000 + 240 +5 = 3245.
Dans ce cas **on utilise les savoirs de la numération.**	Dans ce cas on fait du calcul (règle des zéros, règles d'addition). Conséquence : **Les savoirs de la numération sont invisibles** quand on utilise les puissances de 10 (alors qu'ils justifient pourtant toutes les étapes).

Figure 8 : comparaison de deux types d'écriture relativement à la visibilité des savoirs en jeu (apports généraux pour l'enseignant)

Lors des deux expérimentations j'ai pu remarquer que les enseignants voient les apports de la ressource principalement à travers la question du matériel qui constitue la plus grande nouveauté apportée par cette ressource selon eux. Notamment, la première variante de dénombrement d'une collection en vrac apparaît pour certains comme centrale dans le processus, alors qu'elle sert surtout à permettre la constitution de différents groupements qui seront utiles pour la suite de la séquence (pour les vérifications notamment). Il y a peu de savoirs mathématiques construits dans cette première variante.

Au cours de l'expérimentation 1 j'ai pu étudier l'utilisation faite par les enseignants des unités de numération dans les séances observées. Pour le dénombrement d'une collection totalement groupée

(variante 2) j'ai d'abord pu constater une utilisation des UN par les enseignants pour décrire les rangs de l'écriture chiffrée (tableau de numération), conformément à ce qui est proposé dans la ressource. Mais pour les situations mettant en jeu le principe décimal (dénombrement d'une réunion de deux collections et situation de commande), plusieurs types de résistance à l'utilisation des UN sont apparus :

- rejet de l'utilisation des UN pour décrire les groupements ;
- référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu ;
- absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions.

Le rejet d'utilisation des unités de numération pour décrire les groupements a été observé dans une seule classe, celle de Mme A. Malgré les propositions de la ressource, l'enseignante utilise les expressions "boites", "sachets", etc. pour décrire les groupements matériels. Elle utilise pourtant toujours les UN pour décrire les rangs de l'EC comme l'illustre cet extrait d'une séance, où Mme A revient sur la conversion de 12 centaines en 1 millier 2 centaines en lien avec la retenue de l'addition (nous avons souligné le vocabulaire relatif aux groupements ainsi que l'utilisation des UN) :

> Mme A : huit plus quatre qu'est-ce qui se passe ici dans les centaines ?
>
> Un élève : douze
>
> Mme A : on retrouve nos douze sachets sauf qu'est-ce qui se passe ?
>
> Un élève : on met une retenue
>
> *L'enseignante finit d'écrire l'addition posée au tableau :*
>
> Mme A : et bien voilà pourquoi on met une retenue parce qu'on va garder que deux sachets pour les centaines et qu'ici avec nos dix ça va nous faire une boite de mille en plus. […] On comprend mieux maintenant la retenue : c'est notre petite boite de mille en plus.

On voit qu'il y a bien un vocabulaire pour parler des rangs (UN) et un autre pour les groupements (« boites », « sachets » …).

Le deuxième type de résistance, liée à une référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu, a été observé dans des classes où les enseignants acceptent d'utiliser les unités de numération pour décrire les groupements, conformément aux propositions de la ressource. Dans ces classes, lorsqu'il y a plus de dix unités à certains ordres l'enseignant fait une référence quasi systématique aux groupements matériels (réels ou dessinés). Ce phénomène peut se constater par exemple dans cet extrait de la mise en œuvre de la variante 2 de la situation de dénombrement dans la classe de Mme B (nous soulignons les éléments du discours de Mme B qui ramène vers le matériel)

Un élève (Marc) vient dessiner la réunion des deux collections au tableau (boites, sachets, etc.)). Mme B demande à cet élève comment on peut trouver le résultat. Face a la difficulté liée à la prise en compte des 12 sachets dessinés au tableau, Mme B demande à un autre élève (Joris) de l'aider « sans lui donner la bonne réponse, juste le mettre sur la voie » :

> Joris : en fait comme t'en as douze, ça fait plus de centaines […] Si t'as dix centaines ça revient à quoi ?
>
> Mme B : qu'est-ce que tu peux faire ? Si t'as dix pochettes qu'est-ce que tu peux faire ?
>
> Marc : ah oui un millier. *L'élève dessine une nouvelle boite au tableau.*
>
> Mme B : Les dix tu vas les mettre dans une boite. Alors enlève-les maintenant les dix que tu as mis dans la boite. Barre-les ou efface-les. Ah. […] Quand on a dix sachets on peut les mettre dans une boite. Et là le problème c'est qu'on n'en avait pas dix, on en avait douze. Donc dès que ça dépasse dix on peut les mettre dans une boite de mille.

Alors que les élèves utilisent les UN à l'oral, l'enseignante reformule en ramenant au matériel et aux actions sur le matériel (mettre dix sachets dans une boite). Elle montre aussi le matériel qui est posé sur son bureau pour illustrer ce qu'elle dit. Cette prégnance du matériel pourrait être guidée par une volonté des enseignants d'aider les élèves les plus fragiles (comme Marc) pour lesquels ils anticipent la difficulté des conversions.

Enfin le troisième type de résistance, l'absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions, a été observé dans les quatre classes, même dans celles où, par moment, les unités de numération sont utilisées à l'oral pour faire des conversions. En reprenant l'extrait de séance précédent on voit par exemple que Mme B raisonne sur le dessin des groupements au tableau sans jamais écrire la conversion

suggérée par l'élève Marc (12 centaines = 1 millier 2 centaines). Un peu plus tard dans cette même séance, alors qu'un élève explique les conversions qu'il a utilisées pour trouver le nombre total de bûchettes (« sept centaines et trois centaines ça fait dix »), l'enseignante n'écrit pas ces conversions mais continue de faire référence au matériel (« j'ai transformé mes sacs, je les ai mis dans une boite puisque j'en ai dix »). Il aurait ici été possible, au contraire, d'utiliser l'écriture 7c + 3c = 10c = 1m, ce qui aurait permis à la fois de souligner le raisonnement utilisé par cette élève, d'en garder une trace et de permettre aux autres élèves de se l'approprier. L'utilisation d'une écriture abrégée des unités de numération (contrairement aux exemples proposés dans la ressource) pourrait faciliter leur utilisation pour les élèves.

J'ai aussi pu constater une résistance au changement de contexte dont les entretiens avec les enseignants nous font penser qu'elle est liée :

- à l'absence d'exercices dans d'autres contextes dans la ressource ;
- à l'anticipation des difficultés pour les élèves liées au changement de contexte.

Cela amène certains enseignants à ne faire les situations proposées que pour le contexte des bûchettes et à proposer un nouveau contexte seulement à la fin. Cela pose des questions pour l'institutionnalisation : dans ces conditions comment amener les élèves à identifier les savoirs qui sont utilisables dans d'autres contextes ?

Tout cela me permet de penser qu'il y aurait besoin de travailler sur les unités de numération en formation pour comprendre leur intérêt, notamment justifier leur utilisation pour travailler avec des nombres d'unités supérieurs à dix, ce que l'on ne peut pas faire avec la numération parlée (valence instrumentale pour les conversions).

Il y a aussi un besoin de différencier ce qu'on appelle couramment les « groupements/échanges » et les conversions entre unités. Le premier type d'activités se situe dans une problématique matérielle : grouper/dégrouper pour organiser une collection (grouper 12 sachets en 1 boite et 2 sachets) et le deuxième type dans une problématique mathématique (convertir entre unités pour changer d'écriture : 3M 12C 5U = 4M 2C 5U) et elles permettent de justifier la réalisation des groupements/échanges. Ce sont les conversions qui ont un caractère général : que l'on utilise des bûchettes, de la monnaie, un boulier, ... on convertit toujours 10 dizaines en 1 centaine, alors que pour chacun de ces matériels on effectue des activités de groupements/échanges spécifiques (grouper dix paquets dans un sachet, échanger dix billets contre un billet, activer une boule de la colonne située à gauche, …). Pourtant, pour accéder aux conversions on peut penser qu'il est important de s'appuyer sur de telles activités de groupements/échanges. Un travail en formation pourrait être alors de s'interroger sur le rôle des unités de numération pour amener les élèves aux conversions à partir d'activités de groupements et échanges.

De plus, pour amener les enseignants à avoir une utilisation adaptée des unités de numération comme unités de compte, il faut les amener à en comprendre les différentes interprétations possibles (Thanheiser 2009). Par exemple, une centaine peut-être vue comme cent unités, dix dizaines ou une centaine :

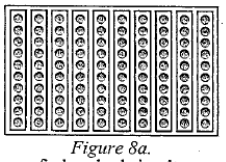


Figure 8a.
Image of a hundred simultaneously representing 1 hundred, 10 tens, and 100 ones.

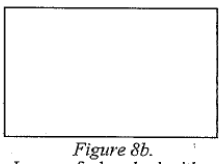


Figure 8b.
Image of a hundred with a focus on 1 hundred.

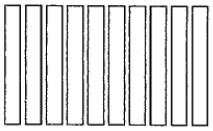


Figure 8c.
Image of a hundred with a focus on 10 tens.

Figure 8d.
Image of a hundred with a focus on 100 ones.

Figure 9 : différentes interprétations d'une centaine, extrait de Thanheiser (2009)

Ces différentes interprétations rendent possible une certaine flexibilité dans l'interprétation d'une écriture chiffrée. Par exemple le nombre 123 c'est à la fois : 123 unités (simples), 1 centaine 2 dizaines et 3 unités ou 12 dizaines 3 unités mais aussi 1 centaine 1 dizaine 13 unités, etc. Pour cela il faut une bonne connaissance des relations entre unités, ce qui peut se travailler avec la tâche de « conversion entre unités » qui est peu visible dans les manuels actuels. De plus, avec nos connaissances d'adulte nous avons en général d'autres procédés que l'appui sur les relations entre unités pour convertir entre unités. Par exemple pour convertir 60 centaines en milliers un adulte passe souvent par la multiplication par 100 qui donne le nombre 6000 dont il extrait l'information sur le nombre de milliers, plutôt que de s'appuyer sur la relation 10 centaines = 1 millier (60 centaines = 6x10 centaines = 6 milliers).

Enfin, les unités de numération sont aussi un point d'appui pour la décontextualisation des connaissances. En effet, cela permet de faire le lien entre les différents contextes : un millier peut représenter un millier de bûchettes, de cubes, d'euros, etc. Cela aide donc à identifier ce qui dans une situation particulière peut être utile pour d'autres situations.

4 Connaître les techniques pour décomposer/recomposer (EUN->EC et EC->EUN) et leurs technologies afin d'identifier les savoirs à institutionnaliser en classe.

Dans la version 1 de la ressource une tentative a été faite de description des savoirs en jeu pour chaque situation. J'ai pu faire le constat d'une certaine transparence du lien entre nombre écrit en chiffres et nombre parlé :

- le nombre est souvent seulement dit à l'oral lors d'un travail sur l'EC ;
- les enseignants ne donnent pas la possibilité aux élèves de l'écrire (situation de dénombrement : pas d'ardoise ou de cahier) même lorsque l'enjeu est la production de l'EC.

Cela rejoint ce que Mounier (2010) avait déjà observé en CP. Cela peut avoir pour conséquence le fait que l'EC n'est pas objet d'étude pour elle-même si elle est toujours confondue avec le nombre parlé, ce qui peut compromettre l'institutionnalisation de certaines techniques.

Voici les constats que nous avons pu faire concernant la formulation des techniques permettant de traduire une EUN en EC et réciproquement.

Pour la situation de dénombrement, passer d'une EUN à l'EC, tout se passe donc comme si on avait affaire à deux techniques différentes : une technique quand on a moins de 10 unités, une autre quand on en a plus. Le tableau de numération est seulement utilisé dans le cas où il y a moins de 10 unités à tous les ordres d'unités.

De plus, alors que c'était l'enjeu de cette situation, le dénombrement d'une réunion de collections ne permet pas toujours de faire émerger la nécessité des conversions. Le travail qui est fait sur l'addition posée dans les classes vient parfois empêcher le travail de conversion entre unités. Le lien entre les deux (à travers la retenue) n'est pas toujours fait.

Pour la situation de commande, passer d'une EC à une EUN, nous avons constaté une absence de formulation de technique dans toutes les classes (Tempier 2012). Plus précisément, lors des phases collectives de conclusion nous n'avons vu que des vérifications des commandes proposées par les élèves, c'est-à-dire un travail qui se fait toujours de l'EUN vers l'EC et jamais dans l'autre sens, celui visé par la situation de commande. Voici une transcription d'une phase collective dans la classe de Mme A, suite à la recherche d'une commande de 3167 bûchettes sans millier de disponible.

Un élève propose 31 sachets, 6 paquets de dix, 7 bûchettes seules.

Mme A : « combien de bûchettes dans trente-et-un sachets ? »

Un élève : « trois-mille-cent. »

Mme A écrit : « 31 sachets de 100 -> 3100 ».

Mme A : « combien il y a de sachets dans une boite ? »

Un élève : « dix sachets ».

Un autre élève a fait une commande de 12 sachets ...

Mme A : « combien ça fait de bûchettes ? Combien il y a de sachets dans une boite ? »

L'élève répond « dix » puis comprend que ça fait mille-deux-cent bûchettes.

L'enseignante ne laisse pas les élèves exprimer comment passer de l'EC de 3167 à la commande de 31 sachets, 6 paquets et 7 bûchettes.

En formation il nous semble important de rendre explicite ces techniques de traduction d'une EUN en EC (et réciproquement) en lien avec les savoirs mathématiques qui les justifient.

Pour traduire une EUN en EC par la technique dite « de position » il faut tenir compte de trois conditions :

- respect du rang de chaque unité dans l'écriture en chiffres ;
- présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres ;
- présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres (afin d'assurer l'unicité de l'écriture en chiffres d'un nombre).

Le travail sur cette technique en formation peut se faire en lien avec les difficultés courantes des élèves qui témoignent, selon nous, d'utilisations de techniques de juxtaposition de nombres (construites par ces élèves) ayant une portée limitée. En fonction des conditions prises ou non en compte par les élèves, cela donne lieu à différentes techniques[5] :

- Simple juxtaposition des nombres : écriture des nombres d'unités « visibles » dans l'ordre où ils sont donnés. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour 2m 3c 1d 4u (2314) mais des résultats erronés pour 3c 2m 4u 1d (3241) ou 2m 3c 4u (234).
- Juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'EC : écriture des nombres d'unités visibles en respectant l'ordre relatif des unités (prise en compte de la première condition) : les unités simples s'écrivent avant les dizaines (en partant de la droite et en allant vers la gauche), les dizaines avant les centaines, etc. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 2m 3c 1d 4u (2314) et 3c 2m 4u 1d (2314) mais des résultats erronés pour 2m 3c 4u (234) et 12c 2m 1d 4u (21214). Elle prend en compte la condition de respect du rang de chaque unité.
- Juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'EC : écriture des nombres d'unités « visibles » en respectant l'ordre relatif des unités et en écrivant des 0 en cas d'absence d'unité isolée. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 2m 3c 1d 4u (2314), 3c 2m 4u 1d (2314) et 2m 3c 4u (2304) mais des résultats erronés pour 12c 2m 1d 4u (21214). Elle prend en compte les conditions de respect du rang de chaque unité et de présence de chaque unité.

La deuxième technique à connaitre est la technique de décomposition (EC -> EUN) et son lien avec les conversions. Elle consiste à faire un « découpage » (troncature) approprié de l'écriture chiffrée. Par exemple 1234 = 12c 34u. Le nombre de centaines s'obtient directement à partir de l'EC en considérant le rang des centaines comme nouvelle référence (et non le rang des unités simples) : on obtient 12 centaines. On peut lire les unités simples restantes en reprenant le rang des unités simples comme référence et en considérant le nombre qui reste : 34 unités.

La formulation est complexe. En formation il est important de travailler des formulations plus adaptée de cette technique. Pour cela on peut s'appuyer sur des formulations d'élèves, comme par exemple :

- « Il faut couper le nombre en deux »

- « Il faut regarder les deux premiers chiffres du nombre et les deux premiers chiffres est égal au nombre de centaines ».

On peut alors étudier la validité de ces formulations pour d'autres nombres. Mais il nous semble surtout important d'amener les élèves à faire le lien avec les conversions entre unités, comme dans cet exemple de formulation d'une élève de CE2 : « *dans les centaines y'a forcément des centaines, dans les milliers on le sait*

[5] Ces techniques sont des « techniques-élèves », non explicitées dans des manuels par exemple. Celle qui a vocation à être institutionnalisée dans une classe est la technique de position du fait de son plus grand domaine d'application. Nous avons reconstruit ces techniques de simple juxtaposition à partir des observations des réponses des élèves aux exercices de l'évaluation ainsi qu'avec les résultats des travaux de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996).

qu'il y a des centaines. On ne va pas aller jusqu'aux dizaines et les unités parce que dans les dizaines et les unités y'a pas de centaines. Donc on regarde le rang des milliers et le rang des centaines ».

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Certaines résistances rencontrées dans la mise en œuvre des situations de la ressource proposée aux enseignants semblent difficiles à dépasser dans le cadre de l'utilisation d'une ressource et pourraient nécessiter un travail en formation des enseignants. Je ne vais pas revenir sur tous les besoins évoqués mais concernant les conversions entre unités, qui sont un nœud de mon travail, j'ai montré des besoins de formation :

- pour comprendre l'enjeu du travail sur les relations entre unités, l'intérêt pour le travail sur le calcul ou les grandeurs et mesures ;
- pour comprendre comment les conversions interviennent dans le canevas didactique proposé dans la ressource (dans le cadre de l'utilisation de cette ressource) et voir l'intérêt d'entraîner les élèves à faire des conversions dans des exercices ;
- pour formuler les conversions (avec les unités de numération) et les institutionnaliser dans les mises en œuvre des séances en lien avec les techniques de traduction d'une écriture chiffrée en écriture en unités de numération.

Ces besoins de formation ont émergé dans le contexte des expérimentations de l'ingénierie didactique de développement de la ressource que nous avons présentée. Ils sont donc attachés aux situations proposées dans cette ressource, au contenu de la ressource, … même si nous avons cherché à dégager des besoins plus généraux. Et nous n'avons pas cherché l'exhaustivité. Il y a certainement d'autres besoins qui concernent des aspects moins développés dans cette ressource (aspect ordinal du nombre, lien écrit/chiffrée …).

J'envisage de poursuivre le travail de conception de ressource dans le cadre d'une collaboration plus étroite avec des enseignants pour mieux comprendre ces besoins et les moyens de les dépasser, notamment sur les questions liées à l'utilisation des unités de numération pour le travail sur le principe décimal.

Enfin, des questions importantes pour la formation n'ont pas été abordées ici : comment travailler ces besoins en formation des enseignants ? Y'a-t-il des besoins à travailler davantage en formation initiale, d'autres en formation continue ? Sur quelles ressources (extraits de manuels, productions d'élèves, vidéos, situation de formation, …) peut-on s'appuyer en formation ? Cela constitue également des perspectives de travail pour la recherche et la formation.

BIBLIOGRAPHIE

ARDITI, S. (2011). Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

BALL D., COHEN D. (1996). Reform by the Book : What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform ? Educational Researcher, 25(9), 6-14.

BRISSIAUD, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

BROUSSEAU, G. (1995). Les mathématiques à l'école. Bulletin de l'APMEP, 400, 831-850. Disponible en ligne : http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/ EnseignementPrimaire/APM95.pdf (consulté le 27/06/2014)

CHAMBRIS, C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2, In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp.33-44). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C., LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp.19-32). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C., MERCIER, A., RENE DE COTRET, S. (2007). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques?* Actes des journées mathématiques INRP (2006, pp.25-36). Lyon : INRP.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

MOUNIER, E. (2010). *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

TEMPIER F. (2010a). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, Grand N n°86, IREM de Grenoble, p.59-90.

TEMPIER F. (2010b). L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : contraintes et libertés institutionnelles. Actes du 37ème colloque international de la COPIRELEM, L'enseignement des mathématiques à l'école : l'évaluation dans tous ses états, La grande Motte, 9 au 11 juin 2010, ARPEME.

TEMPIER F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691 (consulté le 27/06/2014)

THANHEISER, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 251–281.

ANNEXES

ANNEXE 1 : page d'accueil de la version 1 de la ressource

ANNEXE 2 : page d'accueil de la version 2 de la ressource

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Une ressource pour les enseignants de CE2

A+ A A- recherche...

ACCUEIL | DÉNOMBRER UNE COLLECTION | COMMANDER UNE COLLECTION | EN SAVOIR PLUS | PROLONGEMENTS

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants (en savoir plus), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

1. Dénombrer une collection

Plusieurs cas à envisager :

Une collection « en vrac » *(avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de bûchettes dans cette collection qui est devant nous ? »*

Une collection totalement groupée *(les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de cubes dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».*

Une collection partiellement groupée : *« Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »*

Dénombrements et conversions sans contexte : *« 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = ... ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = ... ? » ou encore : « 4 milliers = ... centaines ? ».*

2. Commander une collection

Plusieurs cas à envisager :

Commandes sans contrainte : « *des bûchettes sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »*

Commandes avec contraintes :
- *« le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».*
- *« le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.*
- *Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.*

Sans contexte : *Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, ...).*

Les savoirs de la numération

Principe de position : *Les milliers s'écrivent au 4ème rang à partir de la droite, les centaines au 3ème rang, etc.*

Principe décimal : *1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines = 100 unités, 1 millier = 10 centaines = 100 dizaines = 1000 unités*

Des propositions pour la classe

Situation d'introduction ("combien de bûchettes ?") et synthèse associée *Commentaires*	Situation d'introduction ("le jeu du marchand") et synthèse associée *Commentaires*
Exercices et problèmes *Commentaires*	Exercices et problèmes *Commentaires*
Bilan de savoirs *Commentaires*	Bilan de savoirs *Commentaires*

RECHERCHE COLLABORATIVE : QUESTIONS D'INTEGRATION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE BROUSSALDIENNE AUX PRATIQUES ENSEIGNANTES

Michèle COUDERETTE
Formatrice, ESPE MIDI PYRENNEES
michele.couderette@univ-tlse2.fr

Valérie MARROU
Professeur des Écoles Maitre Formatrice, École Marcel Guerret, Montauban
vmarrou@yahoo.fr

Carine CONSTANT
Professeur des Écoles, École Pierre Gamarra Montauban
carineconstant@neuf.fr

Anne ICHES
Professeur des Écoles, École de Saint Cirq
iches.anne@neuf.fr

Résumé
Dans notre communication, nous présentons la recherche collaborative que nous avons menée durant l'année 2014-2015. La visée de cette recherche collaborative est de développer des compétences de formation par la recherche ainsi que des outils et des ressources pour la classe sur le thème de la numération. Elle réunit cinq professeurs d'école, une formatrice ESPE ainsi qu'un chercheur en didactique.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'introduction de la soustraction au cycle 2. Nous nous appuyons sur une ingénierie didactique construite par le centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques (COREM), laquelle introduit la soustraction par la résolution de problèmes, privilégiant ainsi le travail sur les sens de la soustraction avant de travailler sur les techniques opératoires. La recherche collaborative vise à créer les conditions du partage des expériences des enseignants associés à la recherche sur la base des mises en œuvre opérées dans leur classe. La visée de cette recherche est d'observer le devenir de cette ingénierie didactique élaborée dans les années 80 lorsqu'elle est mise en œuvre par des enseignants. Il s'agit de comprendre comment, à partir des documents présentant cette ingénierie (Brousseau 1998, Quilio et Nedelec-Trohel, 2011) comment professeur et élèves, dans l'action conjointe co-construisent le sens de la soustraction, quelles difficultés didactiques ils rencontrent, comment ils les résolvent. Le travail collaboratif tente de traiter ces questions en maintenant le sens de l'ingénierie didactique initialement conçue, tout en poursuivant des buts de formation continue en didactique des mathématiques des participants à la recherche dans le domaine concerné.

I - INTRODUCTION

Notre communication porte sur un travail mené au sein d'une recherche collaborative. Celle-ci a impliqué trois professeurs d'école, un formateur ESPE ainsi qu'un professeur d'université, chercheur en didactique. Encadrées par l'ESPE de Midi Pyrénées, les recherches collaboratives ont pour but de

développer des compétences de formation par la recherche, ainsi que des outils et des ressources pour la classe.

Nous reprenons dans ces actes le plan de notre communication, telle que nous l'avons développée lors du colloque.

1. Le contexte de cette recherche
2. La présentation des différentes étapes de l'ingénierie didactique
3. Le travail collaboratif au sein de notre recherche
4. Quelques observables d'implémentation lors de moments que nous avons considérés comme moments clés de l'ingénierie didactique

II - CONTEXTE DE LA RECHERCHE COLLABORATIVE

Dans le domaine « Nombres et calcul » du programme 2008 du cycle 2 des programmes officiels, il est indiqué que « [les élèves] mémorisent les tables d'addition, [...] apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, [...] et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. » (p. 17). Dans les programmes de cycle 3, on retrouve la même préoccupation : « acquérir de nouvelles connaissances, de nouveaux outils, pour résoudre des problèmes. » Certes, la résolution de problèmes reste un point central dans les programmes, mais comme l'écrit Brousseau dans « Le contrat didactique : le milieu » (1990), « l'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur la communication d'une procédure de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est supposé en présenter le sens ». On peut craindre alors qu'avec l'introduction de l'étude de la technique opératoire de la soustraction dès la première année, l'entrée dans la résolution de problème de type soustractif ait lieu non pas par le sens de l'opération mais par l'automatisation d'une technique.

Plus loin dans le programme, il est rappelé que l'activité de résolution de problèmes est placée au centre du processus d'appropriation des savoirs mathématiques, en particulier à la construction du sens des opérations : « La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations » (Programmes de mathématiques au cycle 2, 2008). Nous prenons appui sur ce rappel pour mettre en œuvre dans trois classes d'école primaire une ingénierie didactique permettant, par la résolution de problèmes, d'acquérir le sens de l'opération « soustraction ». Nous verrons qu'elle permet parallèlement d'atteindre dans le domaine numérique d'autres objectifs mathématiques.

Dans les années 70, Brousseau et l'équipe de didactique des mathématiques de Bordeaux au sein du COREM créent des ingénieries pour la recherche en didactique et produisent des connaissances en didactique des mathématiques qui auront certaines répercutions sur les programmes scolaires en France. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'une d'entre elle, « l'introduction de la soustraction à l'école élémentaire », ingénierie élaborée par l'équipe de Brousseau au sein du COREM qui fait travailler, au travers de la résolution de problème, d'abord le sens de l'opération avant d'aborder les techniques opératoires. Nous avons travaillé à partir du document produit par Annie Berté. Notre recherche collaborative porte sur l'implémentation de cette ingénierie. Cette ingénierie a été écrite, rappelons-le, dans les années 90. Nous cherchons à en mesurer la pertinence, la viabilité, dans des classes ordinaires et mise en œuvre par des enseignants actuels c'est à dire en 2014 !

III - PRESENTATION DE L'INGENIERIE

Cette ingénierie introduit la soustraction par la résolution de problèmes, privilégiant d'abord le travail sur le sens de la soustraction avant de travailler sur les techniques opératoires. L'idée première est que les situations, pour pouvoir être dévolues, doivent reposer sur des savoirs connus des élèves. Aussi, une attention particulière est portée à la structure des problèmes ainsi qu'aux choix des variables

numériques qu'ils mettent en jeu : si les problèmes proposés peuvent être résolus avec les connaissances du moment des élèves, ils doivent aussi amener à des débats favorisant l'émergence d'un nouveau savoir.

Ainsi que le montre la figure ci-dessous, cette ingénierie se déroule en 6 phases :

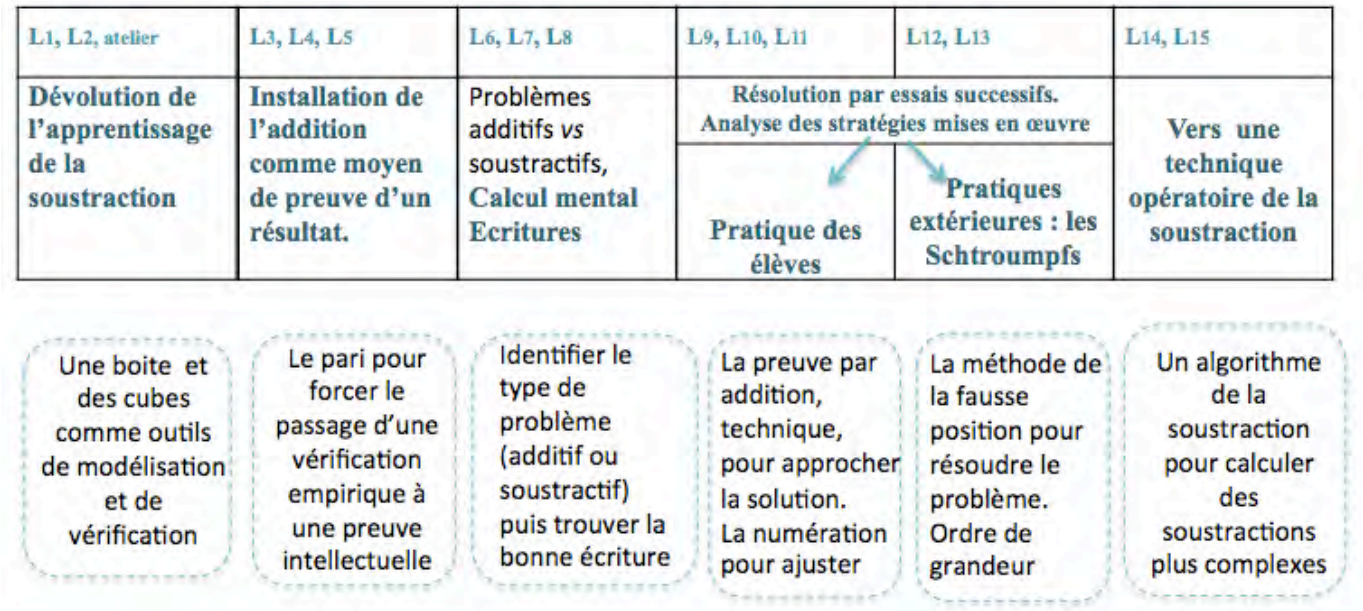


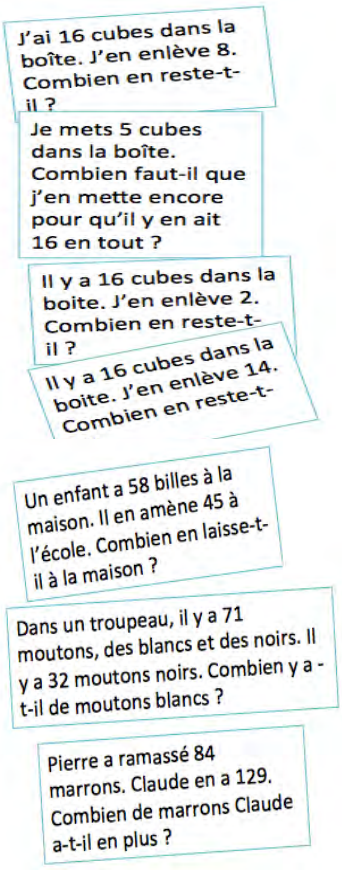
Figure 1 : déroulé de l'ingénierie didactique

- Une première phase sert à dévoluer l'apprentissage de la soustraction. Les élèves jouent au « jeu de la boite » qui consiste à déterminer le nombre de cubes que contient la boite. La boîte a ici deux fonctions : modéliser et vérifier.
- Dans la deuxième phase, on installe l'addition comme le moyen de preuve d'un résultat. Pour nous, cette phase est déterminante : alors que les élèves n'ont ni le sens de l'opération, ni une technique opératoire, on va demander aux élèves de prouver leur résultat. Cela va par la suite autoriser les élèves à proposer un résultat d'une quelconque façon, le moyen de preuve leur permettant de savoir si leur résultat est correct ou pas, ce qui ensuite ouvre la possibilité d'un débat autour des procédures élaborées.
- La troisième phase mêle problèmes mettant en jeu additions et soustractions. Les élèves doivent identifier le type de problème, additif ou soustractif, calculer et traduire leur stratégie par des écritures mathématiques. Durant cette phase le codage de la soustraction par le signe « - » est introduit.
- Dans la quatrième et cinquième phase, les problèmes sont résolus par essais successifs. On s'appuie d'abord sur les essais des élèves (quatrième phase), puis l'on fait ensuite appel à des personnages extérieurs (les Schtroumpfs) pour faire émerger des procédures différentes de celles des élèves.
- Enfin, la dernière phase amène les élèves vers une technique opératoire de la soustraction la soustraction en colonne.

Dans notre communication, nous ne présentons pas toutes les subtilités de cette ingénierie qui est une ingénierie longue, mais nous mettons l'accent sur un certain nombre d'éléments qui relèvent de l'analyse *a priori* de certains moments clés de cette ingénierie pour pouvoir ensuite, pointer les usages, leur transformation par les enseignantes au fil de la mise en œuvre dans leur classe.

Un des premiers points importants est le choix des nombres mis en jeu dans l'ingénierie. Ils sont soigneusement calibrés de façon à faire émerger différentes procédures de résolution : l'utilisation du répertoire additif, le surcomptage, le décomptage, mais aussi la recherche du complément ou bien l'appui sur la numération décimale.

Un second point important concerne les structures des problèmes. Elles ont pour but de faire émerger les différents sens de la soustraction. Certains relèvent de ce qu'appelle Brousseau un retrait dynamique (ce que l'on ajoute à une quantité pour obtenir une autre quantité ou ce que l'on enlève à une quantité pour obtenir une autre quantité) ou d'un retrait statique (la comparaison entre deux quantités), ce qui amène rechercher le une partie connaissant le tout ou à faire une comparaison entre deux quantités pour répondre à la question « combien de plus ou de moins ? »



Pour conclure, cette ingénierie met en scène des problèmes différents, par leur structure ou par les nombres qu'ils mettent en jeu, faisant ainsi émerger les différents sens de la soustraction :

- le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand (retrait dynamique)
- un opérateur qui enlève quelque chose (retrait dynamique)
- un écart entre deux nombres (retrait statique)

IV - TRAVAIL COLLABORATIF ENSEIGNANTS / CHERCHEURS

Rappelons que ce travail collaboratif a engagé trois professeurs d'école et un formateur ESPE. Aucun n'avait encore participé à une recherche collaborative. Un professeur d'université en didactique a encadré la recherche.

Notre étude a lieu en trois temps :

- Un premier temps, celui de l'étude : dégager les enjeux didactiques, analyser et s'intéresser aux conditions d'implémentation dans une classe
- Un deuxième temps, celui de l'action : implémenter l'ingénierie didactique dans trois classes de cycle 2
- Un troisième temps, celui de l'analyse : exploiter les données observées pour mettre au point d'un module de formation se déclinant en
  - ressources pour le plan de formation continue du Tarn et Garonne
  - production d'un DVD à partir des films de la recherche

Cette recherche collaborative permet ainsi de produire des connaissances sur les usages et les transformations des ingénieries didactiques et des ressources en formation initiale et continue.

Dispositif méthodologique de la recherche collaborative

Le schéma ci-dessous décrit le dispositif mis en place pour la recherche collaborative.

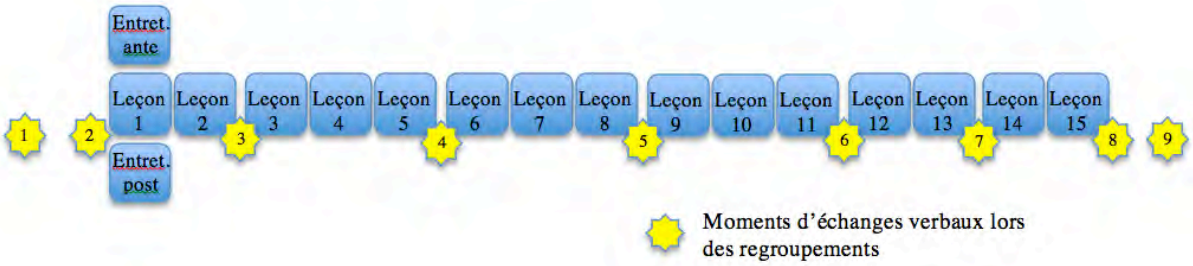


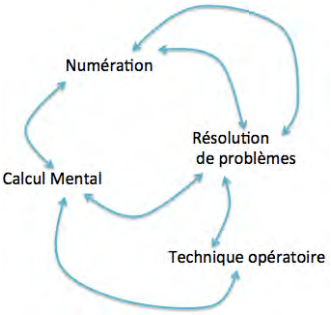
Figure 2 : dispositif de la recherche collaborative

Toutes les séances ont été filmées. Chaque séance a été précédée d'un entretien *ante* et *post* avec l'enseignante en charge de la séance, respectant ainsi le protocole d'observation de Leutenegger (2009). Des regroupements ont eu lieu toutes les deux ou trois séances. Les premiers ont plutôt servi à discuter les enjeux de l'ingénierie tandis que les derniers ont plus portés sur l'analyse des séances réalisées en s'appuyant sur les bandes vidéo. Ce n'était pas une stratégie d'auto confrontation mais un dispositif pour nous permettre une meilleure appropriation de l'ingénierie.

V - QUELQUES OBSERVABLES D'IMPLEMENTATION LORS DE MOMENTS CLES DE L'INGENIERIE

Précisons que notre recherche collaborative a commencé en septembre 2013 et qu'elle s'écoulera sur deux années scolaires. Nous sommes donc actuellement au milieu du gué, et n'avons pas épuisé toutes les possibilités que nous offre ce dispositif de recherche collaborative, si tant est que l'on puisse l'épuiser, la communication dans ce même colloque de nos collègues de l'IFE-Saint Charles ayant fortement alimenté notre réflexion... Le dispositif de recherche collaborative, par ses réunions régulières, a permis de laisser libre cours aux questionnements sur les conceptions professionnelles, sur les pratiques professionnelles. Concernant plus précisément l'ingénierie didactique, la travailler ensemble, la décortiquer afin d'en rechercher les enjeux de savoir mis à l'étude pour chaque phase, chaque séance, a été en soi formateur. L'implémenter dans trois classes a permis de relever des difficultés de mise en œuvre. Nous présentons ci-dessous quelques réflexions développées lors de la communication.

1 Un questionnement et une évolution des conceptions professionnelles.



Un apport de la recherche collaborative a été, par la mise en confrontation, de faire émerger les conceptions professionnelles des enseignantes. La recherche collaborative a obligé chacune à préciser ses propres conceptions professionnelles, à les faire évoluer pour permettre une meilleure articulation des différents domaines mathématiques enseignés au CE1. En outre, expérimenter cette ingénierie dans les classes, a permis d'être en mesure d'argumenter avec plus d'efficacité de lors des rencontres avec de jeunes collègues : « *En tant que PEMF, je suis amenée à visiter des PES. La plupart du temps, ces nouveaux enseignants enseignent la numération et le calcul indépendamment de la résolution des problèmes. La recherche collaborative permet d'approfondir la réflexion et d'apporter des réponses plus convaincantes à ces professeurs, de leur montrer comment* ***par*** *la résolution de problème, on pouvait travailler la numération, ou bien le calcul mental et réfléchi etc. A la lecture des programmes, on ne fait pas de liens entre les différents thèmes d'étude. En fait, les programmes tels qu'ils sont écrits peuvent amener à décortiquer et à faire du saucissonnage : travailler la numération, le calcul mental, les techniques opératoires tout cela au service de la résolution de problème. Dans cette ingénierie, on fait de la résolution de problèmes tout en travaillant sur la connaissance des nombres, on travaille sur ranger, comparer, la*

numération etc. ... ce qui amène à faire ces liens-là, qu'on ne faisait pas forcément habituellement. On peut faire le parallèle avec l'étude de la langue : avant on ne faisait pas écrire les élèves, tant que l'orthographe et la conjugaison n'était pas installée. Aujourd'hui, la production d'écrit est un moyen de travailler l'orthographe et la grammaire. Et en fait, c'est un peu ce que l'on fait en travaillant avec cette ingénierie : des liens entre les domaines mathématiques. A travers la résolution de problèmes, on travaille la numération, le calcul, etc. Ce qui du coup rend plus cohérent notre pratique, en général. »

2 Un questionnement et une évolution de la pratique professionnelle

Un second apport de la recherche collaborative a été de provoquer un questionnement ainsi qu'une évolution de la pratique professionnelle en particulier sur la vie du contrat didactique au sein de la classe.

2.1 Un contrat didactique inhabituel, pas ou peu dans les usages des professeurs

Nous présentons ici deux moments qui ont déstabilisé aussi bien les enseignantes que les élèves. Les deux moments portent sur la deuxième phase : l'installation de la preuve par addition. On peut émettre l'hypothèse que dans les deux cas c'est un contrat didactique inhabituel ou peu en usage dans les classes qui à l'origine des difficultés rencontrées : les dimensions pérennes du contrat, celles qui sont en usage dans la classe, ne laissent pas de place à ce contrat inhabituel dans lequel les élèves ont à ne plus justifier ce qu'il font mais à se déplacer sur la question de la preuve.

Le premier moment concerne la phase du pari, on demande, on pousse les élèves à parier sur une réponse qu'ils savent pertinemment peu fiable. Si le professeur connaît l'enjeu d'étude, l'élève ne comprend pas pourquoi son professeur lui demande de parier sur une réponse qu'il a peut-être produite au hasard. Il comprend d'autant moins que le professeur s'intéresse plus aux réponses fausses qu'aux réponses correctes : habituellement, l'enseignante mettait en valeur un élève ayant une réponse correcte en lui demandant d'expliquer à ses camarades. Pour les enseignantes, la phase des paris a été difficile à mettre en œuvre : « *D'habitude, on faisait la preuve quand la technique opératoire était acquise. Or ici, on la met en place dès le début de la séquence, et elle est un élément de fondateur de l'ingénierie. On demandait aux élèves de parier un résultat alors qu'ils n'avaient ni le sens de la soustraction ni la technique opératoire et qu'ils l'avaient peut-être donné au hasard ! Beaucoup d'élèves avaient des réticences à s'engager dans cette démarche. Cela nous a obligé à prendre à notre charge le savoir et à "tirer" la classe.* »

L'extrait ci-dessous montre le professeur prenant à sa charge le savoir. Les élèves ont presque tous une réponse. Pour autant, ils sont réticents à s'engager dans le pari. Le professeur pousse alors une élève à parier, sachant pertinemment que sa réponse n'est pas correcte mais lui permettant de faire prendre conscience d'une part de l'aspect ludique du pari, d'autre part du véritable enjeu de la séance : vérifier c'est à dire mettre en place un moyen de preuve du résultat trouvé.

P	non alors on chut je vais essayer d'entendre vos réponses mais attention qui pense avoir une réponse ? Tout le monde a une réponse à donner à peu près ?
Es	oui
P	oui bon euh qui veut parier avec moi sur la bonne réponse ?
E	Moi ! (commentaire : la proposition de cet élève est correcte)
P	chut alors tu penses, alors Maxime, tu penses quoi ?
Maxime	30
P	Toi tu penses 30 et toi tu pensais quoi ?
E	32
P	32, tu pensais quoi ?
Le professeur interroge plusieurs élèves.	
P	tu pensais quoi ?
Rémi	37
P	37, est-ce que tu as envie de parier sur ton nombre?
Rémi	Non
P	Maxine tu as trouvé combien ?

Maxine	euh 36
P	36 d'accord tu veux parier avec moi ?
Maxine	ben… ça veut dire quoi ?
P	ben est ce que tu euh est-ce que
Gabriel	Tu dois dire la bonne réponse si
P	voilà avant d'ouvrir la boîte
E	c'est çà et ben t'as gagné
E_2	Est-ce que t'es sûre ? (Inaudibles)
Maxine hoche la tête […]	
P	donc maintenant Maxine avant de vérifier avec la boîte on va essayer de voir si on peut pas trouver un moyen pour vérifier avant l'ouverture de la boîte
P	Sans ouvrir cette boîte, Maxine, à l'intérieur j'ai le nombre que tu penses avoir trouvé c'est-à-dire
Maxine	36
P	36 ! Donc Maxine elle pense qu'il y a 36 cubes dans la boîte qui sont cachés on ne les voit pas, 36 et ici c'est quoi là que j'ai au-dessus sur ma boîte ?
E	Ah oui (inaudible)
P	Ce sont mes 18 ? bon hé bien
E	Maxine elle a gagné
P	chut Maxine vient à côté de moi
[…]	
P	Maxime elle a dit qu'elle en avait 36 dans la boîte, on est bien d'accord ?
Maxine	oui
P	bon alors Maxine tu vas compter à partir de ces 36 dans la boîte, et on va ajouter nos 18, d'accord ? Et en principe on devrait trouver combien en tout ?
Maxine	45
P	45 bon alors on y va Maxine, donc tu as dit 36. Vas-y. Tu les comptes là, 30
E	7, 37
P	37
Maxine	38
P	38
Maxine	39 euh 40 41 42 43 44 45
E_2	Non
E_3	mais non
P	Qu'est-ce qu'il se passe ?
E	c'est pas bon
P	Est-ce qu'elle termine à 45 là?
Es	non oui
P	Oui et qu'est-ce qui se passe ?
Es	(inaudibles)
P	hein?
E	Il en manque neuf
P	Donc ça veut dire quoi ? Est-ce que Maxine a trouvé le bon nombre ?
Es	Non !
P	elle elle elle pense elle pensait Maxine que 36, c'est ça ? Tu pensais que 36 cubes dans la boîte
Maxine	Je suis bête j'avais pas compris
P	Plus les 18 cubes sortis ça faisait 47, et tu viens de te rendre compte de quoi?
E	(Inaudible)
P	c'est pas ça, bon écoute c'est pas grave Maxine, hein on rejouera d'accord ?

Le second moment illustre la difficulté de ce contrat inhabituel à se déployer. Dans ses propos, l'enseignante montre l'incompréhension élèves / professeur quant à ce qui était en jeu dans ce moment d'apprentissage. « *Dans nos pratiques, pour résoudre un problème, il est d'usage de demander aux élèves d'expliciter leurs procédures, de les confronter, de les comparer et de les analyser. La synthèse a pour but de dégager la ou les procédures expertes qui permettront de résoudre d'autres problèmes de même type. Dans ce cas-là, l'enseignant s'attache davantage à la recherche d'une procédure qu'à celle d'un résultat. Dans le cadre de l'ingénierie, dès les premières leçons, nous avons été amenées à refuser les explications des procédures des élèves. Pourquoi ? Parce que l'enjeu d'étude de la séance était autre, installer la preuve par addition, donc peu importait la façon dont l'élève avait trouvé son résultat. Or les élèves voulaient expliquer leurs procédures de résolution, ce qui nous a amené à réagir de façon peu conventionnelle : "je ne veux pas savoir comment tu fais ! "* »

L'extrait ci-dessous illustre les échanges entre un élève voulant absolument expliquer sa procédure obligeant alors la professeure à lui dire explicitement « je ne veux pas que tu nous expliques comment tu as fait ».

P :	Donc toi tu dis 22 […]
P :	Cette fois tu n'as pas le droit de toucher…
Jonas :	à la boîte
P :	…les cubes
Jonas :	alors
P :	comment tu vas faire ?
Jonas :	alors déjà on enlève on en a enlevé 17, on enlève une unité ça fait 30, vous êtes bien d'accord avec moi?
E2 :	oui, mais arrête de dire ça
P :	pas du tout, qu'est-ce que tu dis on enlève une unité ça fait 30 ?
Jonas :	euh non une une… une dizaine
P :	une dizaine à quoi ?
Jonas :	euh à à euh 42
P :	alors je ne veux pas que tu nous expliques comment tu as fait, je veux que tu nous expliques comment tu vas vérifier, ta réponse qui est 22, comment tu vas faire pour la vérifier, sans toucher les cubes ?
Jonas :	euh
P :	comment tu vas faire ?
Jonas :	On peut vérifier un peu comme si on revient au début on enlève
P :	chut chut
Jonas :	Une dizaine
P :	À quoi ?
Jonas :	euh à... à euh 42
P :	Non là tu es en train de résoudre le problème, tu l'as résolu déjà. Tu as dit qu'il y en avait 22, donc maintenant tu vérifies…

2.2 Un regard tourné vers la recherche afin de consolider la pratique professionnelle

L'ingénierie didactique l'invitant fortement, nous nous sommes alors intéressées à la théorie des situations (TSD), en particulier à la notion de situation adidactique pour l'élève : nous nous sommes posé la question de l'importance du temps de dévolution donné à l'élève pour qu'il puisse s'emparer des problèmes et participer activement à la construction du savoir enjeu d'étude. Cette question est d'autant plus importante lorsque les contraintes institutionnelles sont fortes, un cours double voire triple niveaux par exemple. Comment alors adapter l'ingénierie ? Ce sera l'objet de notre recherche pour l'année à venir.

Pierre a ramassé 84 marrons, Claude en a ramassé 129. Combien de marrons Claude a-t-il en plus ?

J'ai 41 cubes dans la boite. J'en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a t-il de cubes maintenant dans la boîte ?

Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et des maillots de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby ?

Par ailleurs, étudier les problèmes mis en jeu dans l'ingénierie didactique a conduit à s'intéresser à la Théories des Champs Conceptuels, et en

particulier à la classification des problèmes additifs selon Vergnaud. Ainsi que le déclare une des enseignantes, étudier l'ingénierie didactique a aidé à une meilleure perception de l'impact des types de problèmes proposés aux élèves sur leur apprentissage : « *Avant de participer à cette recherche, j'avais tendance à privilégier des problèmes relevant d'un retrait comme dans le problème des bonbons ou d'une comparaison comme pour le problème des marrons. Je pensais peu à proposer des problèmes de partitions tels que les maillots de rugby. D'ailleurs, au début même si je savais que le problème était un problème de partition, je le mimais avec la boite de la même façon que le problème des bonbons ou des cubes.* »

VI - CONCLUSION

Le dispositif de la recherche collaborative offre un cadre favorable à la collaboration entre chercheurs et praticiens. La réflexion menée au sein de ce dispositif permet la co-construction de connaissances liées à des pratiques professionnelles. Cela a impliqué pour les enseignantes praticiennes un appel à des outils théoriques tels que la théorie des situations ou la théorie des champs conceptuels pour comprendre et s'approprier l'ingénierie didactique, pour le chercheur une analyse de la pratique effective dans les classes. Ce regard croisé permet de mieux cerner les conditions d'intégration d'une ingénierie didactique : une connaissance forte des outils théoriques didactiques qui sous-tendent cette ingénierie ainsi que, tout en gardant les principes premiers de celle-ci, une prise en compte des contraintes institutionnelles des écoles actuelles. Notre recherche est en cours, nous poursuivons l'analyse afin de pouvoir adapter cette ingénierie didactique aux contraintes actuelles.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

DESGAGNÉ S., BEDNARZ N., LEBUIS P., POIRIER L., COUTURE C. L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation, in *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 27, n°1, 2001, 33-64

LEUTENEGGER F. (2009) *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques*. Bruxelles : Peter Lang

MEN (2008), Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, B.O. n°3, 19 juin 2008, SCÉRÉN, CNDP

QUILIO S., NEDELEC-TROHEL I. (2011) Une ingénierie coopérative à l'École Élémentaire dans une école de ZEP à Marseille, 327-332, in *Actes de la XVIe école d'été de didactique des mathématiques*, Carcassonne.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 10 n°2-3, 133-170.

LA NARRATION D'UN JEU DE TÂCHES : UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Christine DEL NOTARO
Chargée d'enseignement, Université de Genève
DIMAGE
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

À partir d'exemples de narrations d'étudiants, cette contribution examine de quelle manière la narration peut tout à la fois inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève et les engager eux-mêmes dans une investigation personnelle et approfondie d'un milieu mathématique. Le terme de narration est pris au sens de restitution après-coup d'une situation vécue en classe de mathématiques. En nous appuyant sur Benjamin (1936), nous avons avancé l'hypothèse (Del Notaro, 2011) que ce que l'on narre peut devenir expérience non seulement pour qui l'écoute (reproductibilité), mais aussi pour soi-même. Le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement devient le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances et de celles des élèves. La narration d'un jeu de tâches est utilisée ici pour rendre compte des actions d'un sujet et pour prendre de la distance par rapport à ses propres actions en tant qu'expérimentateur et/ou enseignant. Le jeu de tâches, défini comme un ensemble de tâches non hiérarchisées, se révèle donc une ressource qui permet d'enrichir l'investigation des potentialités du milieu. L'expérimentateur qui pilote la tâche est ici un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Notre communication a pour but de présenter la narration comme interface à la fois des contenus mathématiques, des connaissances en jeu de part et d'autre et de l'expérience effectuée par les élèves et les étudiants.

I - LE JEU DE TÂCHES, UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION

1 La notion de jeu de tâches

Ainsi que nous avons déjà eu l'opportunité de le décrire dans des actes de la COPIRELEM (Del Notaro, 2012), le jeu de tâches est une manière originale de questionner les élèves qui a pris sa source dans les travaux du groupe DDMES (Didactique Des Mathématiques pour l'Enseignement Spécialisé) voici plus d'une dizaine d'années déjà. Ce groupe est animé par F. Conne (retraité de l'Université de Genève et de Lausanne) et J.-M. Favre (CFPS, Château du Seedorf, Noréaz) ; les membres sont enseignants dans le primaire, le secondaire, le spécialisé ou chercheurs en didactique des mathématiques[1].

De la difficulté d'interagir avec certains enfants de l'enseignement spécialisé est née l'idée du jeu de tâches, qui a pour particularité d'interférer à partir des propos et/ou des actions mathématiques des élèves dans le but de maintenir vive le plus longtemps possible, la tâche et/ou la question. Le groupe a présenté ses travaux au séminaire national en 2003[2] ; il en résulte un texte qui met en lumière les différentes interactions autour de tâches géométriques. Nous avons repris l'idée du jeu de tâches dans notre thèse de doctorat (Del Notaro, 2010) et avons élargi ce concept au domaine du nombre, avec des

[1] C. Cange (Institut Pré-de-Vert, Rolle), L. Del Notaro (École primaire du Mail, Genève), P. Depommier (Collège Arnold Reymond, Pully), D. Jean Richard (CPHV, Lausanne), C. Vendeira (Université de Genève), A. Meyer (ECES, Lausanne), J.-D.Monod (Gymnase cantonal, Nyon), C.-L. Saudan (Fondation de Vernand, Cheseaux-sur-Lausanne), A. Scheibler (enseignement secondaire, Aigle.

[2] DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

élèves de l'enseignement dit ordinaire. Nous avons particulièrement ciblé les relations de divisibilité dans différents critères, avec comme point de départ le critère de divisibilité par 4.

2 Définition

Nous avons tenté une définition générale du jeu de tâches, que nous utilisons dans nos recherches. Il s'agit avant tout d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. Nous procédons en premier lieu à une investigation personnelle du milieu qui pourrait se rapprocher d'une analyse a priori, mais sans les attributs de l'enseignement projeté, comme par exemple, les stratégies des élèves ou les variables didactiques. Cette investigation donne lieu à une constellation de tâches corollaires s'exprimant comme autant de pistes à prendre en fonction de ce que l'élève répondra. DDMES parle de cartes du jeu, image très parlante si l'on imagine des cartes que l'on abat en fonction du jeu de l'adversaire.

Contrairement au problème ouvert, il ne s'agit donc pas d'une technique pédagogique visant à mettre les élèves en recherche, bien que nous obtenions des résultats proches sur le plan de la motivation à chercher. Il s'agit plus exactement d'un ensemble de tâches qui s'autoalimentent à travers les interactions de l'expérimentateur et des élèves, répondant à une exigence mathématique qui met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées. C'est donc une entrée par les contenus de la tâche mathématique et de ce qu'elle provoque chez les deux parties que nous privilégions. L'investigation mathématique s'élargit aux deux parties qui avancent de concert dans le problème, de par les questions de l'un et les réponses des autres. Il va de soi que le jeu de tâches n'est pas vierge et se trouve nourri et influencé par certaines techniques comme le problème ouvert[3], par exemple, ou la technique des situations[4]. Notre réflexion actuelle sur le sujet nous amène à envisager le jeu de tâches comme une possible filiation d'ordre didactique, de l'entretien clinique-critique de Piaget[5], à la différence près que l'expérimentateur en tant qu'élément du milieu, va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève ; le jeu de tâches laisse ainsi une place importante à l'investigation en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant d'un savoir mathématique ; il procède d'une investigation du milieu à partir d'une tâche donnée.

Ducret (2004) décrit l'entretien clinique-critique comme un outil servant à comprendre, à découvrir la connaissance qu'un sujet a d'un concept ou d'un objet, ce qui implique pour l'expérimentateur une connaissance minimale de ce concept. Ducret ne développe pas cette dernière question; nous pourrions avancer que dans nos jeux de tâches, nous procédons à une investigation du milieu pour assurer cette connaissance minimale. Il dit encore que les questions posées à l'enfant peuvent être sans cesse rectifiées ou complétées en fonction des réponses obtenues et souligne le risque inhérent à cette méthode qui est de suggérer au sujet la notion que l'on croit/souhaiterait qu'il possède. Ce risque est bien connu en didactique des mathématiques ; notre jeu de tâches tente de se mettre à l'abri de l'induction de l'expérimentateur, premièrement en ne posant pas de question *stricto sensu*, mais en proposant une tâche mathématique en *réponse* à la tâche effectuée par l'élève. De ce fait, l'expérimentateur peut se laisser emmener par les propos de l'élève et bifurquer sur une autre tâche, ce que Ducret, citant Piaget (1926, p. 10), relève également concernant l'entretien clinique-critique :

> *« L'examen clinique participe de l'expérience en ce sens que le clinicien (l'aliéniste, mais ceci est valable pour le psychologue clinicien) se pose des problèmes, fait des hypothèses, fait varier les conditions en jeu (il changera par exemple l'objet de la discussion), et enfin contrôle chacune de ses hypothèses au contact des réactions provoquées par la discussion. Mais l'examen clinique participe aussi de l'observation directe, en ce sens que le bon clinicien se laisse diriger tout en dirigeant, et qu'il tient compte de tout le contexte*

[3] IREM de Lyon (1991)

[4] SRP de Genève (1991)

[5] Poster présenté à la *1st Conférence Jean Piaget* les 26-27 juin 2014 à Genève

> *mental au lieu d'être victime d'erreurs systématiques, comme c'est souvent le cas du pur expérimentateur. »*

La question de la constitution de l'expérience guide également nos recherches dans le sens que la question de l'épistémologie des connaissances y est non seulement reliée, mais joue un rôle de moteur dans le jeu. Relevons encore que, de même que pour le jeu de tâches,

> *« La méthode clinique-critique est un procédé par lequel le chercheur interagit dialectiquement avec des enfants, des adolescents ou des adultes, de manière à rassembler des informations qui, toutes ensemble, vont permettre à ce chercheur de répondre à la question qu'il se pose. »*

Le type d'entretien mené en jeu de tâches se rapproche donc de l'entretien clinique-critique en ce qu'il permet à l'élève et à l'expérimentateur de se forger une expérience autour d'un savoir mathématique particulier, dans un entretien qui se présente comme un jeu dans lequel on répond à une tâche par une autre tâche.

Les propos de Perraudeau (1998) nous intéressent particulièrement du fait qu'ils impliquent l'enseignement dans le processus :

> *L'entretien, si l'on se place dans une perspective constructiviste, permet de comprendre le raisonnement. A la suite de Piaget, nous qualifions de -critique- ce genre d'entretien car il ne se contente pas d'enregistrer ce que dit l'élève, le questionnement incite à dépasser la première idée, à déployer sa pensée. L'entretien devient un outil au service de l'enseignant, il permet de savoir quel est l'état d'une notion étudiée (conservée, en cours d'acquisition, non fixée) ; il permet aussi de savoir quel est le fonctionnement cognitif de l'élève et les difficultés qui peuvent apparaître au cours de l'apprentissage. Mais l'entretien, et on l'aura compris, est aussi un instrument au service de l'élève : il peut identifier ses problèmes et s'impliquer dans leur résolution.*

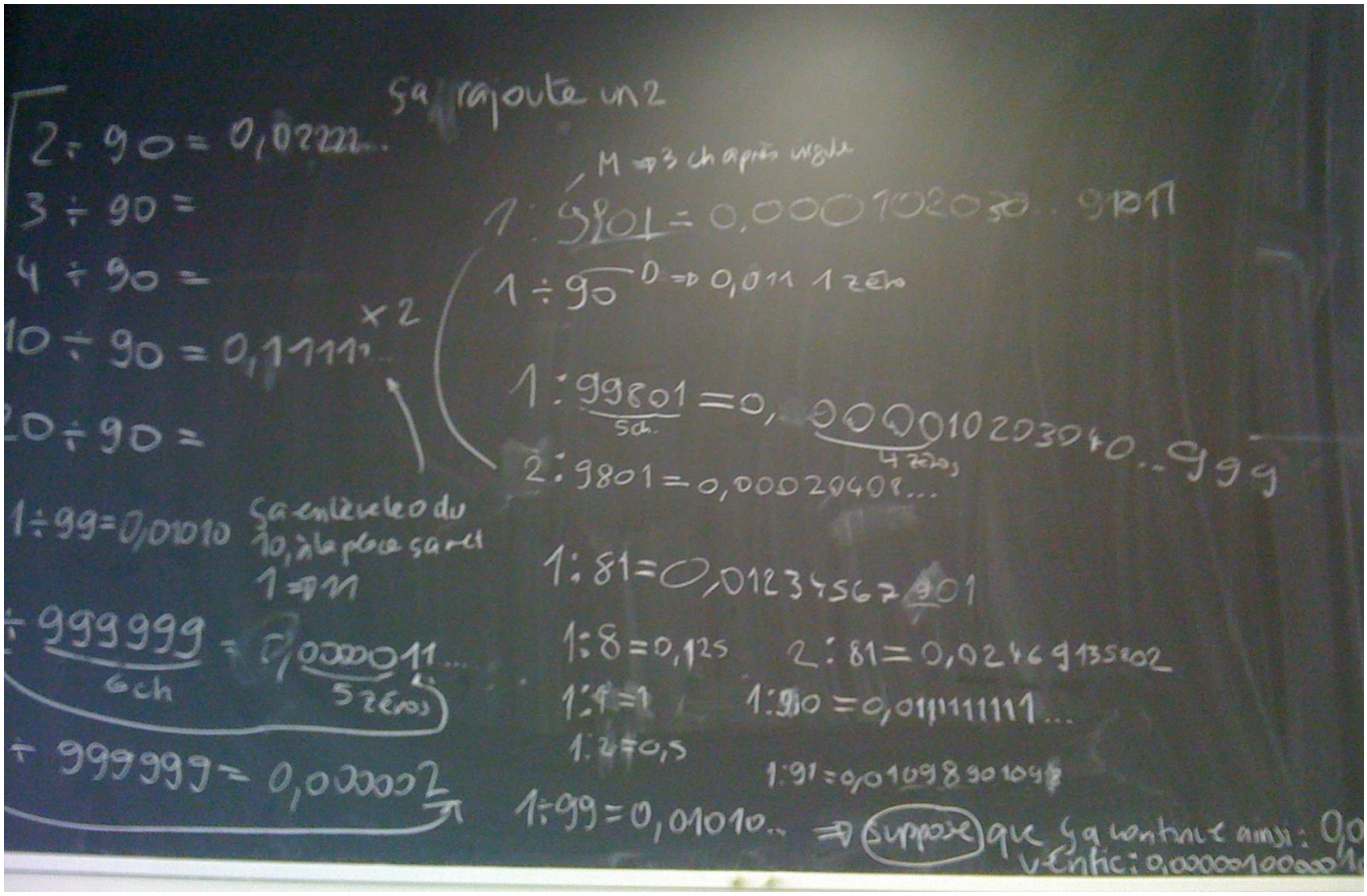
Ceci suppose, d'une part, que l'expérimentateur ou l'enseignant accepte l'idée de faire partie du milieu, dans le sens où il joue avec celui de l'élève, et admette une possible perte de contrôle de la tâche (Conne, 2001), ses propres représentations et/ou connaissances prenant le dessus et se trouvant parfois mises à mal par les propos de l'élève.

3 Exemple de jeu avec des élèves

Il n'y a pas véritablement de consigne dans un jeu de tâches : ces dernières ne sont pas préparées a priori dans la mesure où les réparties fusent en fonction de l'interlocuteur ; seules les différentes tâches issues de l'investigation du milieu de l'expérimentateur se trouvent prêtes à être injectées dans le milieu, mais sont parfois abandonnées au profit d'une intervention dictée par le moment présent.

Nous avons beaucoup exploré ce que nous avons nommé une *division particulière* (1/9801), du fait des nombreuses surprises qu'elle occasionne autant chez des élèves du primaire (11-12 ans) que chez des étudiants futurs enseignants. Elle est du reste bien connue pour toutes les curiosités qu'elle recèle. La première des choses que l'élève a envie de faire lorsqu'on lui propose cette division est de l'effectuer à la calculette ; le quotient : 0,0001020304 apparaît immédiatement comme surprenant, pour les questions que cela pose : est-ce que ça va continuer ? 050607 ? Qu'est-ce que l'on trouvera après 0809 ? La dévolution du problème se fait, le problème ne nous appartient plus : les élèves font des hypothèses (010 011 012 013 ou 10 11 12 13 ?) et s'engagent dans leur recherche. Les relances ou propositions de nombres permettent d'enrichir les variations du numérateur de 1 en 1 (1/9801, 2/9801, 3/9801) et ouvrent sur l'investigation des relations entre numérateurs (de 10 en 10 : 10/9801, 20/9801, ou 100 : 100/9801 ou 1000) et les incidences sur le dénominateur. Ce sont autant de relances qui font partie de nos « cartes » à abattre ; le jeu continue alors avec des tâches que l'on aura préalablement préparées (mais de manière non hiérarchisées) et qui seront proposées en fonction de ce que le sujet répondra. Qu'est-ce que des élèves de l'école primaire font de cette division et par quel bout l'empoignent-ils ? Ce sont ces questions à propos des relations numériques qui nous occupent et qui commencent à être traitées (Del Notaro, 2013, 2014).

Si l'on analyse les traces recueillies sur le tableau noir ci-après, notées par l'expérimentatrice en interaction avec une dizaine d'élèves de 11 ans, on constatera la quantité de recherches qui cohabitent, si l'on peut dire : en interagissant avec ces dix élèves, il est ressorti que leurs questionnements se focalisaient sur des déclinaisons de cette *division particulière*, les différentes cartes en étant les *coups du jeu*. Après une variation du numérateur de 1 en 1 de la division 1/90 ont suivi de nombreux essais et constats. Le jeu de tâches est autoalimenté par les élèves eux-mêmes, chaque tâche leur évoquant une autre piste. En commençant par faire varier en premier lieu le numérateur, puis le dénominateur, les élèves testent l'effet produit sur le quotient : ils sont pleinement dans la recherche, nul besoin de les aiguiller.



Ce type de recherche auprès des élèves a été repris en cours de formation, ce que nous détaillerons ci-après.

4 La restitution de l'expérience des étudiants par la narration écrite d'un jeu de tâches

La question s'est posée de la restitution d'un jeu de tâches, d'une part pour garder une trace de l'interaction, et d'autre part, pour empoigner la question de l'expérience.

Parmi différentes méthodologies et cadres d'interprétation, il en est un très productif à notre sens, qui est celui de la narration que nous qualifions de « libre ». Nous entendons par là une écriture en langage naturel de ce dont on se souvient. Ce qui nous intéresse est de comprendre ce que les étudiants retiennent et ce qu'ils évoquent comme connaissances, sur injonction de restituer ce qui s'est produit pendant l'interaction avec les élèves.

Sans exposer l'ensemble de notre dispositif dans ces lignes, nous précisons toutefois que les étudiants, après avoir élaboré quelques tâches autour de la division, ont été tenus de les faire passer auprès de quelques élèves en un jeu dont les tâches seraient à choisir au gré de l'avancement de l'interaction.

II - LA NARRATION

Dans les lignes qui suivent, nous souhaitons procéder à un bref tour d'horizon de cette notion de narration, pour finalement contextualiser la façon dont nous l'envisageons. La narration telle que nous la décrirons dans ce texte traitera essentiellement de la restitution écrite d'étudiants, futurs enseignants primaires, et non pas d'élèves. Les futurs enseignants rendent compte de leurs jeux de tâches avec les élèves, afin de comprendre quelles connaissances se donnent à voir et ce qu'elles nous apprennent d'un point de vue épistémologique.

1 La narration de recherche

La question nous est parfois posée de savoir en quoi notre narration se distingue de la narration de recherche. En préambule, il nous faut préciser rapidement que la narration telle que nous la préconisons n'est pas une narration de recherche, ainsi qu'elle se caractérise dans les textes de Chevalier (1992), Sauter (1998), pour ne citer que ces deux auteurs. Issue des années 90, dans la foulée de la technique des problèmes ouverts de l'IREM de Lyon (1991), cette dernière se présente comme un *« exposé détaillé, écrit par l'élève lui-même de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème »*. L'accent est mis sur la recherche et son organisation, plus que sur le résultat lui-même, c'est pourquoi les auteurs la qualifient de technique pédagogique. La narration de recherche présente l'avantage de ménager une place à l'expression de l'ingéniosité des élèves et à leur goût pour la recherche en mathématiques. En lien avec le problème ouvert, l'énoncé est court, n'induit ni la démarche ni la solution et permet à chacun de se lancer dans le tâtonnement et l'expérimental. Le point de vue pédagogique est prépondérant en ce que la démarche prend en compte les élèves en difficulté.

2 La narration selon le groupe DDMES

Pour le groupe DDMES, la narration revêt une importance dans le sens qu'elle restitue de manière subjective, les interactions entre les élèves et le milieu ; le groupe utilise la narration pour communiquer entre chercheurs :

> *« Il s'agit en effet de rendre compte des interactions élèves-milieu provoquées par nos jeux de tâches. Il faut donc partager avec autrui ce qui s'est passé, mais surtout déterminer en quoi tel événement ou acte de l'élève est à relever plutôt que tel autre. Le narrateur se trouve donc impliqué dans son récit, pour y mêler ses intentions didactiques, les connaissances qu'il perçoit être en jeu, attendues ou surprenantes, les gestes qui lui paraissent robustes, mais qu'il ne peut analyser, les hypothèses qu'il échafaude pour relancer de nouvelles tâches, etc. »* (2011, 6-7),

Ce que nous retenons ici comme fondamental pour notre propre travail est le fait que l'intuition de l'expérimentateur est clairement en lien avec ses propres connaissances en premier lieu et, nous le verrons, avec son expérience.

> *« L'enfant sait beaucoup plus qu'il ne peut dire, il fait. Si l'expérimentateur donne du crédit à tel acte, c'est qu'il élabore une hypothèse de connaissance, qui a le mérite d'être « d'actualité », et l'applique en termes de tâche. Seule la narration peut rendre compte de cette démarche. Elle raconte et argumente. Elle est idoine. »*

Pour que l'expérimentateur puisse élaborer une hypothèse de connaissance, il faut qu'il y ait une interaction de ces connaissances en jeu afin qu'elles soient évoquées chez lui et qu'il puisse ainsi les reconnaitre.

> *« Autre propriété de la narration: son caractère dynamique. Elle met le lecteur dans le même état que l'expérimentation narrée a mis le narrateur, et/ou peut-être dans le même état que la tâche a mis l'élève. Elle provoque donc à son tour des intuitions, des évocations, des liens à des connaissances et des savoirs. Ainsi elle donne à faire, incite le lecteur à expérimenter lui-même et du coup narrer à son tour. Cela fait de l'eau pour de nombreux moulins: interactions de connaissances des élèves avec des hypothèses sur des savoirs associés, interactions de connaissances de l'expérimentateur, associations argumentées avec des tâches, et savoirs didactiques. »*

La question de la reproductibilité est une question de taille : peut-on vraiment compter sur un tel effet de la narration ? C'est ce que nous expérimentons auprès des élèves et qui ne fonctionne pas toujours aussi bien que ce qui est décrit pour des adultes. Dès lors notre question est « à quelle-s condition-s la narration peut-elle engager cette interaction ? ». Les étudiants se montrent très réceptifs et se laissent prendre au jeu ; les élèves quant à eux, sont parfois très pris dans leur propre recherche pour s'intéresser véritablement aux narrations de leurs camarades.

3 La narration selon les propos de Benjamin

Nous avons repris les propos de Benjamin (1936) et avons tenté de les réinterpréter à la lueur de notre postulat de formation. A partir de l'idée que la narration est en lien avec l'expérience du sujet, nous avons imaginé l'idée d'une circulation de l'expérience, à travers les expériences des sujets. Benjamin dit que « *Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise. Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute* » (p.150)

Nous faisons de ce fait l'hypothèse que ce que l'on narre peut devenir expérience non seulement pour qui l'écoute, admettant par là une certaine reproductibilité de la part de celui qui écoute (ou lit), mais aussi pour soi-même. Nous sommes ici très proche des propos de DDMES.

Pourquoi la narration en langage naturel plutôt que le protocole ? Sur le moment, l'expérimentateur (chercheur ou enseignant) interagit en fonction de ses propres connaissances, ce qui ne lui laisse pas le temps de l'analyse, pris dans la dynamique de la communication avec l'élève. Il faut un « après-coup », une distance entre le guidage du jeu et une éventuelle interprétation de ce qui s'y est passé. Nous n'avons pas choisi la restitution par le protocole qui est une forme trop contraignante à nos yeux. Le protocole garantit certes une certaine objectivité, mais ce n'est pas le but que nous poursuivons : à l'image des connaissances qui fusent souvent de toutes parts dans l'interaction, et de manière parfois incontrôlée, il nous fallait un cadre qui laisse une place au subjectif ; le jeu de tâches en étant l'une de ses expressions. Ainsi, la narration spontanée, *après-coup*, en fonction de ce dont on se souvient ou de la reconstruction de notes personnelles est-elle devenue notre moyen privilégié pour tenter d'accéder à cette épistémologie des connaissances des élèves. En l'occurrence, le jeu de tâches révèle également l'épistémologie des étudiants, mais nous ne la discuterons pas dans cette contribution. Ces derniers ont donc pour consigne de restituer ce qui s'est produit lors d'une interaction avec des élèves, ayant pour but premier de rapporter une expérience.

Ainsi nous avons abordé plusieurs facettes de la narration dans notre travail. Elles concernent d'une part l'expérimentatrice qui *se* narre les événements pour les analyser dans la distance décrite plus haut et pour répondre à sa question épistémologique ; elles concernent aussi les étudiants dont la narration de l'interaction entre eux-mêmes et les élèves vont servir à mettre en exergue les liens entre l'expérience, l'élaboration d'une règle et sa logique sous-jacente. Enfin, elle concerne les élèves eux-mêmes, dont la narration de leur propre tâche (encore très sommaire et orale) peut mettre en lumière leur propre organisation des savoirs et leurs représentations.

4 Exemple de narration

Le narrateur, en tant que (re)lecteur de sa propre narration, tire parti de la réinterprétation de sa propre expérience. L'expérience qu'il fait dans sa propre action de narrer une situation didactique vécue le met en condition de réinterpréter cette situation; le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement étant le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances. Cette mise à distance permet de faire d'autres connexions logiques. La narration permet de montrer la pertinence d'une tâche pour un élève particulier du fait que l'interprétation des données (contenue dans la narration) par les étudiants, est ici le fil qui relie un jeu de tâches et une logique. Dans ce contexte, la narration nous permet de restituer un jeu de tâches particulier ; elle possède la particularité de projeter des intentions et de faire évoluer le scénario de l'investigation.

Prenons en premier lieu le cas de la transmission de l'expérience pour celui qui lit la narration – nous n'avons pas fait de narration orale avec les étudiants. A partir d'une narration d'étudiante intitulée

« *Laura : Tes divisions sont faciles* », nous avons proposé aux autres étudiants de tenter de retrouver le jeu de tâches à partir de la description. Cette étudiante avait « reçu » comme consigne de traiter les deux divisions 1/81 et 1/ 891. Précisons rapidement que les étudiants, après avoir investigué le milieu de la division 1/9801 ont eu à tester un jeu de tâches auprès d'un élève, pour s'acculturer à ce type de questionnement et avaient pour tâche de rédiger une première narration. Ils pouvaient recourir à un choix personnel de tâche ou reprendre l'une des propositions de « cartes » établies durant l'investigation du milieu que nous avons faite collectivement. En tant qu'enseignante universitaire, nous avons commencé à interagir avec l'ensemble des étudiants à propos de cette division, ce qui a donné des propositions de jeux assez variées.

Voici donc la narration d'une étudiante :

1/81 et 1/891 6 novembre 2013

Laura: « Tes divisions sont faciles ! »

Cette élève a d'habitude beaucoup de facilité en mathématiques. Lorsque je lui présente le calcul a effectuer, elle me dit qu'elle ne sait pas par quoi commencer. En effet, elle se retrouve bloquée car « le problème n'a pas de consignes », me dit-elle. Je suis surprise d'entre cela car quelques instants plus tard, elle me dit sans trop réfléchir que la deuxième division donne un résultat beaucoup plus petit que la première et le justifie correctement. Après avoir regardé un peu au plafond et par la fenêtre, elle prend sa calculatrice afin de vérifier son résultat. Elle effectue deux divisions et note sur une feuille le résultat de chacune d'entre elles. Je la regarde faire. Laura essaie alors immédiatement de taper sur sa calculatrice des divisions similaires à celle que je lui avais donnée et me dit très rapidement que «c'est facile». N'étant pas très sûre qu'elle a compris, car cette élève avance particulièrement vite, je m'efforce de lui demander ce qu'elle trouve d'intéressant. Elle trouve que faire des divisions comme ça c'est facile et ajoute un 9 à chacune fois dans le nombre. À chaque fois, elle note le résultat que la division lui donne. Elle me formule par la suite oralement que s'il n'y a qu'un 9, tous les chiffres dans le résultat ne seront répétés que deux fois, si on ajoute un 9, ils seront répétés 3 fois et que si l'on met trois 9 ils seront répétés 4 fois. C'est tout à fait juste. Je lui demande à la fin de l'exercice pourquoi elle pense que je lui ai donné cela à faire et elle me répond qu'il fallait qu'elle «trouve la logique».

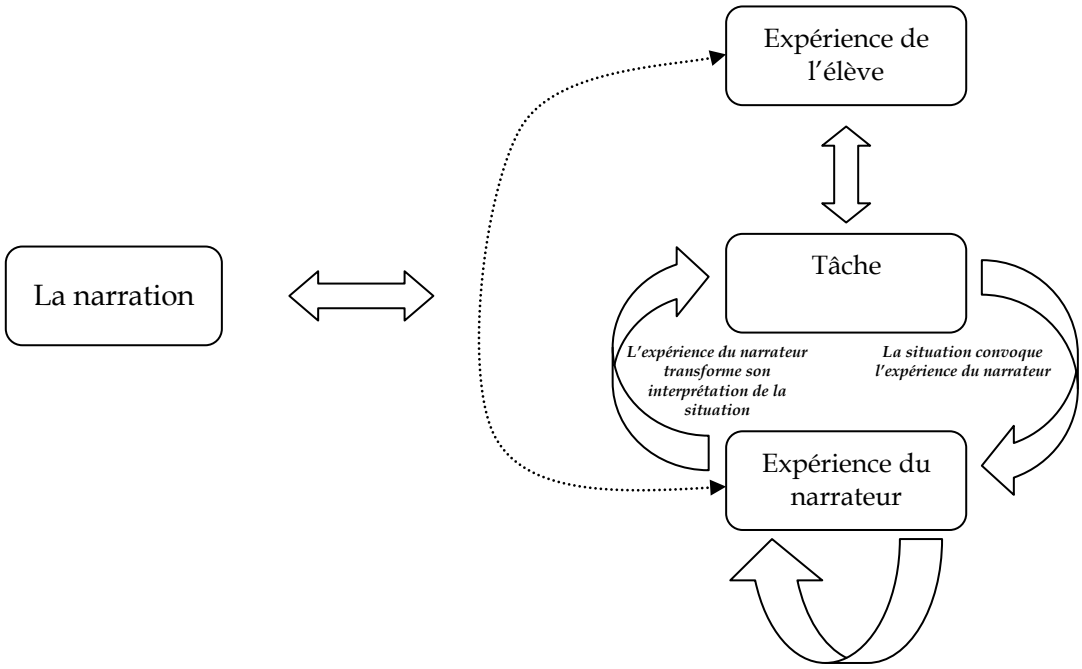
Ce n'est certes pas la plus intéressante ni la plus complète, mais ce que nous retiendrons est que même dans une narration simple et somme toute, assez laconique, le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement devient le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances et de celles des élèves. Elle permet de rendre compte des actions mathématiques d'un sujet en ce qu'elle impose une distance par rapport à ses propres actions en tant qu'expérimentateur et/ou enseignant. La restitution de l'expérience par la narration suppose donc une interaction entre un milieu (une tâche mathématique) et un élève, ainsi que le stipule DDMES. On peut affiner le grain en précisant que cette interaction milieu-élève est constituée par un sous-système : *expérience de l'élève, tâche mathématique, expérience du narrateur (expérimentateur)»*

Nous souhaitons livrer une autre illustration de l'expérience, à travers la narration d'une situation mais ne poursuivons pas le but de la reproduction exacte de mots d'élèves. Ce que nous apporte ce mode de restitution, entre autres, est de pouvoir rendre compte d'une pensée qui implique le contenu mathématique de l'événement didactique narré. Reprenons la citation de Benjamin qui nous a semblé en

adéquation avec l'idée que nous cherchons à transmettre, d'une circulation de l'expérience, d'une interaction entre les expériences. Pour ce qui concerne la première partie de cette citation, « *Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise* », nous faisons un parallèle avec la restitution de l'expérience d'une situation didactique vécue dans la contingence par tout chercheur ou professeur, et, osant une construction personnelle à partir de la deuxième partie « *Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute* », nous tentons une superposition du narrateur et du lecteur, en tant que même personne. Et si ce que l'on narre devenait expérience pour soi-même également, dans cette mise à distance que permet l'écriture ? Le narrateur en tant que lecteur de sa propre narration tire parti de l'expérience qu'il se narre, bénéficiant ainsi de sa propre expérience. L'expérience que le narrateur fait dans sa propre action de narrer une situation didactique vécue, le met en condition de réinterpréter cette situation ; le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement étant le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances. Cette mise à distance permet de faire d'autres connexions logiques ; la narration d'une situation produisant un effet sur le système interactif composé par l'expérience de l'élève, la situation didactique et l'expérience du narrateur.

Ainsi, nous envisageons cet effet comme un ensemble d'interactions entre la narration d'une situation didactique et le *système d'interactions entre l'expérience de l'élève, une situation didactique et l'expérience du narrateur.*

Dans l'expérience de la situation que l'élève fait faire à l'expérimentateur et l'interprétation de ce qui s'y déroule, il y a un recouvrement d'expériences entre élève et expérimentateur.



5 De l'interaction de connaissances à l'interaction entre les expériences

La narration montre la pertinence d'une tâche pour un élève du fait que l'interprétation des données contenues dans la narration, est le fil qui relie un jeu de tâches et une logique. Dans ce contexte, la narration nous permet de restituer un jeu de tâches particulier.

5.1 Les fonctions de la narration

La narration se révèle interface des contenus mathématiques, qui facilite la représentation de certaines notions. Elle soutient en outre leur appréhension : lorsque l'élève ou l'étudiant décrit ce qui s'est passé, il

y a une part d'élaboration du contenu. La narration restitue, en outre, les connaissances en jeu de part et d'autre, permettant l'accès pour les analyser. La narration révèle une certaine expérience effectuée par les élèves et les étudiants. Nous l'utilisons dans nos recherches ainsi qu'en formation pour montrer à la fois l'interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves à travers un jeu de tâches et les contenus mathématiques mis en jeu par l'élève ainsi que, éventuellement, la pertinence d'une tâche. De ce fait, nous envisageons la narration comme étant au service de l'expérience.

En ce qui concerne les fonctions identifiées de la narration, nous distinguons l'expérimentateur (pour lequel il s'agit essentiellement d'une prise de distance) des élèves, pour qui il y a une véritable mise en évidence des contenus. La prise de distance pour l'expérimentateur réside dans le fait d'envisager la narration comme un acte de se narrer à soi-même *(Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute)* afin d'élaborer une interprétation de sa propre narration pour comprendre comment se joue l'interaction de connaissances et peut-être, de jauger si la tâche est reproductible et à quelles conditions.

Du côté des élèves, la narration met en évidence les contenus mathématiques et permet la restitution d'une pensée qui implique les contenus de l'événement narré. L'expérience mathématique y est en outre restituée dans une certaine logique, déterminée par le recours à certaines règles ou certaines régularités.

III - PRATIQUE DE FORMATION

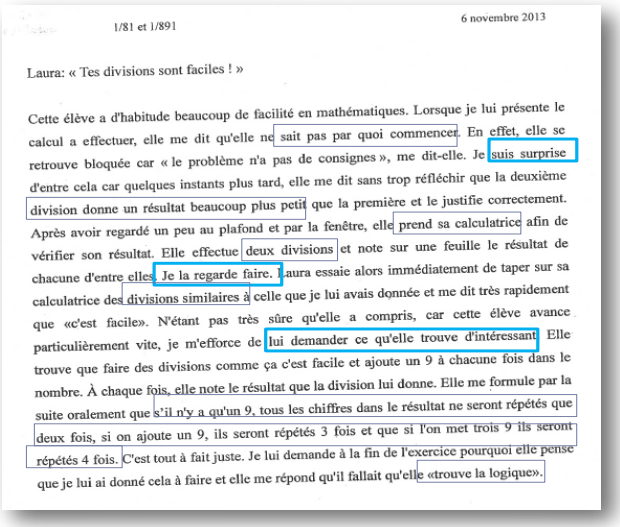
Nous tentons depuis deux ans de mettre sur pied un dispositif de formation qui implique le jeu de tâches et la narration. Ce dispositif laisse entrevoir l'avantage de mettre des étudiants en situation d'engager leurs propres connaissances dans l'interaction avec les élèves, plus habitués à être observateurs des procédures des élèves. L'idée de faire interagir les deux parties est née de la surprise manifestée par les étudiants à la lecture de narrations de nos propres jeux de tâches : il fallait les mettre en situation de faire passer eux-mêmes un jeu aux élèves, afin de les faire accéder à ce que les élèves étaient en mesure de produire et de les acculturer à une autre manière de faire des mathématiques, axée sur la réalisation d'expériences de part et d'autre. Nous envisageons la narration d'un jeu de tâches comme une ressource pour comprendre, d'un point de vue théorique, quelques éléments qui guident notre problématique :

- **C**omment les élèves se constituent-ils leurs connaissances et dans quel enchaînement ?
- La pratique de la narration peut-elle inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève ?
- De quelle manière les étudiants s'engagent-ils dans une investigation personnelle approfondie du milieu mathématique pour cibler un objet ?
- En quoi les futurs enseignants peuvent-ils tirer profit d'une compréhension plus approfondie des connaissances des élèves et ce qu'ils en disent ?

1 Comment les élèves construisent-ils leurs connaissances ?

L'un des cribles sommaires que nous proposons aux étudiants réside dans la démarche de n'extraire de la narration que les faits:

Reprise de *Laura* :



1/81 et 1/891 6 novembre 2013

Laura: « Tes divisions sont faciles ! »

Cette élève a d'habitude beaucoup de facilité en mathématiques. Lorsque je lui présente le calcul a effectuer, elle me dit qu'elle ne sait pas par quoi commencer. En effet, elle se retrouve bloquée car « le problème n'a pas de consignes », me dit-elle. Je suis surprise d'entre cela car quelques instants plus tard, elle me dit sans trop réfléchir que la deuxième division donne un résultat beaucoup plus petit que la première et le justifie correctement. Après avoir regardé un peu au plafond et par la fenêtre, elle prend sa calculatrice afin de vérifier son résultat. Elle effectue deux divisions et note sur une feuille le résultat de chacune d'entre elles. Je la regarde faire. Laura essaie alors immédiatement de taper sur sa calculatrice des divisions similaires à celle que je lui avais donnée et me dit très rapidement que «c'est facile». N'étant pas très sûre qu'elle a compris, car cette élève avance particulièrement vite, je m'efforce de lui demander ce qu'elle trouve d'intéressant. Elle trouve que faire des divisions comme ça c'est facile et ajoute un 9 à chacune fois dans le nombre. À chaque fois, elle note le résultat que la division lui donne. Elle me formule par la suite oralement que s'il n'y a qu'un 9, tous les chiffres dans le résultat ne seront répétés que deux fois, si on ajoute un 9, ils seront répétés 3 fois et que si l'on met trois 9 ils seront répétés 4 fois. C'est tout à fait juste. Je lui demande à la fin de l'exercice pourquoi elle pense que je lui ai donné cela à faire et elle me répond qu'il fallait qu'elle «trouve la logique».

- Ne sait pas comment commencer
- La 2ème division donne un résultat plus petit
- Prend sa calculette
- Effectue les 2 divisions
- Note le résultat
- Divisions similaires
- Prononce une règle (une logique?) issue de régularités observées
- L'étudiante présente la tâche, émet une surprise
- Regarde faire
- Demande ce qu'il y a d'intéressant
- Demande pourquoi elle lui a fait faire cette tâche. Elle subit l'interaction

2 Inciter les étudiants à faire ressortir les connaissances mathématiques de l'élève

Si l'on poursuit avec une autre narration dont les étudiants ont extrait les actions des élèves (standard, justifié à gauche) et les surprises, constats, questions, etc. des élèves (italique, justifié à droite), on parvient à mettre en évidence l'activité mathématique de l'élève.

Extraire les actions des élèves de la narration de l'étudiant :

Extraire surprises, constats, questions des élèves **:**

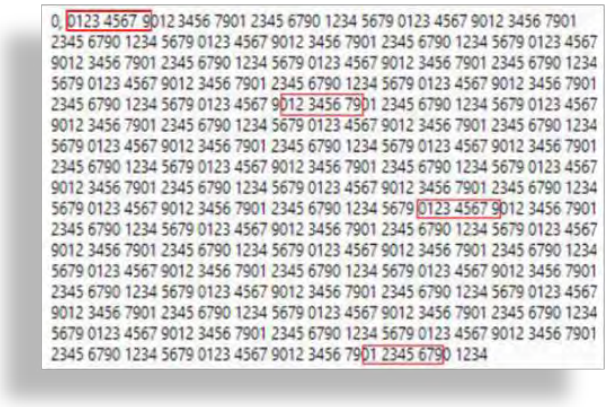
- Effectue la division 1/81 grâce au logiciel
  - *Grande surprise*
- Effectue l'autre calcul (1/8181)
- Récite les décimales et se questionne alors sur l'absence de 8
  - *Elle remarque la présence de 8 (de la première périodicité)*
- Refait le premier calcul
  - *Remarque immédiatement qu'il n'y a pas de 8*
- Refait la deuxième division
  - *Une suite de nombre se répète*
- Relit les décimales en « ciblant l'ordinalité », i.e qu'elle récite l'ordre, en faisant abstraction de leur répétition
- Ecrit les quotients : 0,012345679 et 0,0001222344456667889
  - *Elle dit : il y a **une logique.***
  - *Croissance dans les décimales dans les deux divisions*
  - *Croissance « de 1 en 1 », pour 1/81*
  - *Croissance « 3 chiffres, 1 chiffre, 3 chiffres, 1 chiffre » pour 1/8181*
- Effectue le calcul 1/62 pour vérifier sa logique
  - *Dit : un 0 immédiatement après la virgule pour chaque division*
  - *Compare les divisions 1/81 et 1/62, en laissant 1/8181 de côté*
- Effectue alors une autre division : 1/12

On peut ainsi inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève et les encourager à l'analyser pour mieux saisir les mathématiques convoquées par leurs élèves. Cela les engage en outre dans une investigation personnelle.

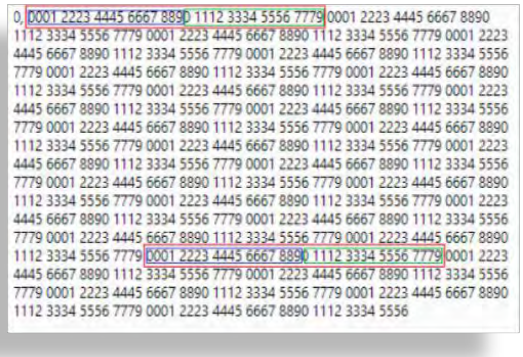
3 Engager les étudiants dans une investigation personnelle approfondie du milieu mathématique pour cibler un objet

Les extraits qui suivent proviennent d'une narration de deux étudiants. Ils illustrent leur engagement dans la tâche : ils se l'approprient complètement, ce qui les fait partir dans une direction très personnelle et fructueuse, à l'image de ce que l'on souhaite pour les élèves. Voici ce qu'ils disent :

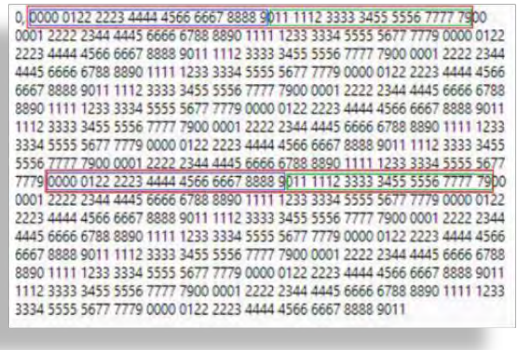
« Nous avons obtenu pour 1/81 : 0,01234567901(…) et pour 1/8181 : 0,0001222344456667(…). Nous avons essayé de mettre en évidence un lien entre les deux résultats obtenus dans le but de trouver une relation mathématique. Nous avons constaté que pour la première division, les décimales augmentaient de manière croissante de 0 à 9 avec toutefois, une exception pour le chiffre 8, celui-ci n'étant pas présent. De plus en effectuant le calcul sur le logiciel, nous avons remarqué une ***périodicité*** *dans le résultat :*



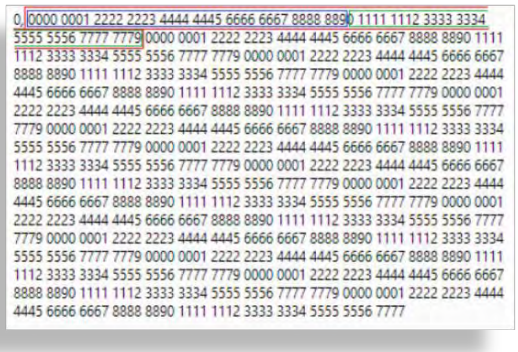
Nous avons également remarqué cette ***périodicité*** *en effectuant le calcul 1/8181. Cependant, nous pouvons remarquer une subtilité mathématique propre à cette division, que nous appellerons ici principe de «****double périodicité****». En effet, comme relevé par les cadres bleus et verts nous constatons deux segments chiffrés distincts mais se répétant, formant la périodicité.*



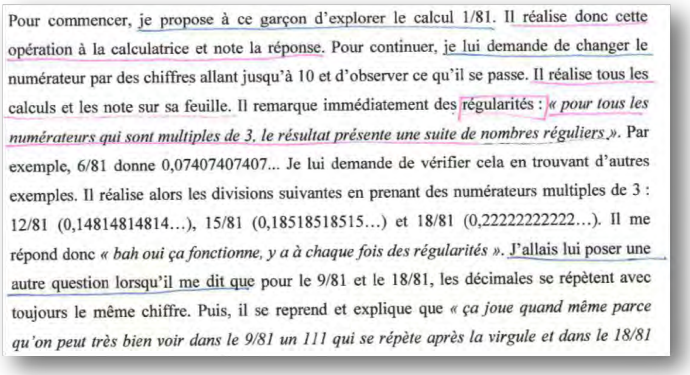
Face à ce constat, nous avons orienté notre recherche sur les déclinaisons du dénominateur, afin de donner une explication à l'agencement croissant des décimales retrouvé au sein des deux périodicités Pour cela, nous avons effectué la division 1/818181 :



Malgré l'orientation que nous voulions prendre en début d'investigation, à savoir, donner une explication à l'agencement croissant des décimales, nous nous sommes ***laissé surprendre par le jeu de tâche*** *en constatant un résultat équivalent au précédent. En effet, il existe à nouveau une «* ***double périodicité*** *» et une répétition de certains chiffres. Pour comprendre plus précisément ce phénomène qui nous a semblé plus intéressant, nous avons réalisé la division 1/81818181: »*



4 En quoi les futurs enseignants peuvent-ils tirer profit d'une compréhension plus approfondie des connaissances des élèves et ce qu'ils en disent ?


Pour commencer, je propose à ce garçon d'explorer le calcul 1/81. Il réalise donc cette opération à la calculatrice et note la réponse. Pour continuer, je lui demande de changer le numérateur par des chiffres allant jusqu'à 10 et d'observer ce qu'il se passe. Il réalise tous les calculs et les note sur sa feuille. Il remarque immédiatement des régularités : *« pour tous les numérateurs qui sont multiples de 3, le résultat présente une suite de nombres réguliers »*. Par exemple, 6/81 donne 0,07407407407... Je lui demande de vérifier cela en trouvant d'autres exemples. Il réalise alors les divisions suivantes en prenant des numérateurs multiples de 3 : 12/81 (0,14814814814…), 15/81 (0,18518518515…) et 18/81 (0,22222222222…). Il me répond donc *« bah oui ça fonctionne, y a à chaque fois des régularités »*. J'allais lui poser une autre question lorsqu'il me dit que pour le 9/81 et le 18/81, les décimales se répètent avec toujours le même chiffre. Puis, il se reprend et explique que *« ça joue quand même parce qu'on peut très bien voir dans le 9/81 un 111 qui se répète après la virgule et dans le 18/81*

Après une investigation personnelle plus approfondie, les étudiants se sentent renforcés et encouragés à se confronter « *sans filets* » aux élèves. L'auteure de la narration ci-contre est dans une véritable interaction et pilote le jeu. Elle interagit à partir de ses propres connaissances, de ce qu'elle entend et «comprend» de ce que lui dit l'élève. Nous avons interprété succinctement sa narration ; les actions des élèves soulignées dans sa narration ont été réécrites sous forme de points, pour éclaircir l'interprétation. *R* signifie «élaboration d'une règle.

- Je propose à ce garçon d'explorer le calcul 1/81
- Je lui demande de changer le numérateur…
- J'allais lui poser une autre question lorsque…
- Je décide de rebondir… et lui demande…
- Je lui demande de tester avec d'autres numérateurs M9
- Je lui demande de prédire les résultats
- Je lui demande jusqu'où prédire
- Je propose d'essayer avec un numérateur plus grand
- Je lui demande de résumer les constats
- Ce qui laisse la porte ouverte à un autre jeu de tâches

- Il réalise l'opération à la calculatrice et note la réponse
- Il réalise tous les calculs…
- Il remarque des régularités
- Il observe M3 et M9
- Il réalise les calculs…
- Il prédit les résultats
- …jusqu'à l'infini
- Ne sait plus que répondre
- *R :* Lorsqu'on divise les multiples…
- *R :* Lorsque les numérateurs sont aussi multiples…

Ces deux tableaux sous forme de question/réponse montrent la correspondance que l'on peut établir entre une injonction et une action effectivement réalisée. L'exercice qui consistait à interpréter les narrations des étudiants selon le crible élémentaire « *qu'est-ce que l'étudiant dit que l'élève fait, et qu'est-ce que l'élève fait* » est porteur pour plusieurs raisons : tout d'abord, il est simple à utiliser et garantit une certaine objectivité d'une part et l'assurance que les étudiants se centrent sur l'objet et non pas sur des considérations d'ordre émotionnel : l'interprétation du discours est centrée sur les connaissances et les actions de l'élève en mathématiques.

Les étudiants ont dû se centrer sur la question de savoir ce que fait réellement l'élève et donner des indices de ce qu'ils avancent, basés sur ce que le milieu renvoie.

IV - PROPOS CONCLUSIFS

En guise de conclusion, nous reprenons l'idée principale qui nous a portée dans la décision d'utiliser le jeu de tâches et sa narration en formation d'enseignants. Il nous a semblé que l'apport essentiel est de permettre aux étudiants d'inférer un raisonnement à partir des actions mathématiques des élèves et d'interpréter les connaissances manifestées. Le fait de procéder par étapes laisse le temps de l'élaboration de connaissances aux étudiants. Premièrement, ils procèdent à la narration de leur jeu de tâches en langage naturel ; une sorte de narration spontanée : ils écrivent comme les choses leur viennent, sans penser à autre chose que de restituer leur jeu de tâches. L'écriture possède cette fonction d'élaboration du contenu et de mise en ordre des idées. S'ils sont bloqués dans leur écriture, il leur *suffit* de restituer le plus *objectivement* possible, ce que l'élève a réellement fait, en pointant ce que le milieu

renvoie. Toutefois il est bien clair qu'il y a un abus de langage ici, car on ne peut parler de réelle objectivité dans cette démarche, partant du principe que ce qui nous intéresse n'est justement pas une réalité objective, mais bien ce que l'étudiant dit que l'élève fait. Toutefois, c'est à partir de cette subjectivité que l'on peut déceler les mathématiques évoquées par la tâche et convoquées dans l'interprétation de l'interaction entre l'élève et l'étudiant.

Les apports du jeu de tâches et de sa restitution par la narration peuvent s'inscrire dans une certaine stimulation des apprentissages et motivation à chercher, du fait de la propension des élèves et des étudiants à la création de questions de recherche à partir des tâches, qui s'égrènent au fil de la recherche ; ces dernières peuvent se révéler très personnelles et montrent où se situent les questions qu'élèves ou étudiants se posent à propos du nombre. Elles permettent en outre la mise en place et la constitution d'expériences chez les élèves, ce qui leur fait défaut la plupart du temps, car comme on le sait, la dévolution s'opère sur un temps très long, que les élèves n'ont pas toujours à disposition. La narration permet de mettre en évidence les mathématiques effectuées par les élèves et/ou les étudiants et de jauger l'expérience qu'ils en font. L'enseignant peut, lui aussi, exploiter de cette manière, les compétences et les connaissances de chaque élève pour stimuler et motiver ses apprentissages. Toutefois, il y a une condition forte : accepter l'idée de l'interaction de connaissances et de l'engagement de ses propres connaissances dans le milieu, ce qui suppose une dynamique. On n'est plus simple spectateur du travail de l'élève.

Pour terminer, nous avons retenu quelques lignes de narrations d'étudiants qui nous encouragent à poursuivre dans cette direction scientifique :

> *« Pour terminer, nous sommes surpris de l'engouement que nous avons eu lors de la phase réflexive concernant l'investigation du milieu. En effet, nous nous sommes laissés surprendre par l'envie d'investiguer davantage et par les possibilités de recherche que nos deux calculs de base offraient. Nous sommes donc convaincus du fait que ce type de démarche a un réel potentiel d'enseignement et d'apprentissage et qu'il serait pertinent de favoriser son utilisation en classe. Nous avons été impressionnés par l'intérêt dont les élèves ont fait preuve. Ils étaient réellement pris et motivés par les différentes tâches que nous leur avons mis à disposition afin de rechercher les différentes logiques autour de cette division. »*

V - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1991) Situations-problème et problèmes ouverts. IREM de Lyon.

BENJAMIN W. (1936). Rastelli raconte… et autres récits suivi de : le narrateur, Seuil.

CHEVALIER A. (1992) Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire, *Petit x*, **33**, 71-79.

CHARRIÈRE G. & al. (1991). Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, *cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique*, Département de l'instruction publique, Genève.

CONNE F. (2001). Pertes de contrôle et prises de contrôles dans l'interaction de connaissances. *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Corps, France.

DDMES (2011). Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes des deuxièmes journées didactiques,* Chaux-d'Abel, Suisse.

DEL NOTARO C. (2011). La narration comme révélateur de l'expérience mathématique des élèves et de l'expérimentateur. *Actes des deuxièmes journées didactiques,* Chaux d'Abel, Suisse, 24-26.

DEL NOTARO C. (2012). Le jeu de tâches, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves, 1-14, *Actes du XXVIIIème Colloque COPIRELEM*, IREM de Dijon, 1-14.

DEL NOTARO C. (2014). Des élèves à l'Uni! De la narration de l'expérience à l'expérience par la narration: mise en évidence de relations entre «règle, expérience et logique», *Educateur*, 01.14, 16-18.

DUCRET J.J. (2004). *Texte gris rédigé pour servir de base à un séminaire sur la méthode piagétienne qui s'est déroulé le 8 octobre 2004 dans le cadre du Service de la recherche en éducation du canton de Genève.*

PERRAUDEAU M. (1998). Échanger pour apprendre : L'entretien critique, Paris, Armand Colin, 159 p., ISBN 2-200-01971-8

SAUTER M. (1998). Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique, *Repères IREM*, **30**, 9-21.

QUELLES RESSOURCES LES ENSEIGNANTS UTILISENT-ILS AFIN DE TROUVER DES ENONCES DE PROBLEMES OUVERTS EN MATHEMATIQUES AU CYCLE 3 ?

Christine CHOQUET-PINEAU
Formateure, Espe de l'Académie de Nantes, Site du Mans
CREN, Université de Nantes
Christine.choquet@univ-nantes.fr

Résumé Cette communication rend compte d'un chapitre de notre thèse consacrée à l'étude, dans le cadre théorique de *la double approche didactique et ergonomique* (Robert, Rogalski, 2002), des pratiques de professeurs des écoles lorsqu'ils proposent en mathématiques des séances dédiées à des problèmes ouverts au cycle 3 (Choquet, 2014). Elle concerne l'analyse des ressources disponibles et l'étude des choix que font les enseignants parmi ces ressources afin de trouver des énoncés de problèmes ouverts. D'une part, après avoir identifié les ressources dont les professeurs des écoles peuvent raisonnablement disposer, nous en proposons une analyse qui vise à déterminer s'il est possible d'y trouver des énoncés de problèmes ouverts. Nous aborderons ainsi la question de la visibilité de ce type de problèmes pour des enseignants. Autrement dit, des enseignants cherchant des énoncés de problèmes ouverts peuvent-ils facilement en trouver dans les différentes ressources dont ils disposent ? D'autre part, nous présentons l'analyse des choix que cinq professeurs des écoles font pour leur classe. Cette analyse, utilisant des éléments du cadre théorique de *l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2010), nous permet de repérer, à partir de régularités identifiées dans les choix des professeurs, des *invariants opératoires* à savoir des connaissances, des représentations de l'enseignant, souvent implicites, qui semblent sous tendre l'utilisation des ressources par ces cinq professeurs des écoles et envisager une explication des choix qui sont faits.

Cette communication s'appuie sur une partie de notre thèse. Nous présentons d'abord brièvement notre recherche en précisant la problématique, le cadrage théorique ainsi que la méthodologie de recueil puis d'analyse de données. Nous développons ensuite l'enjeu de la communication selon deux axes : un premier s'intéressant à une analyse des ressources disponibles pour des professeurs des écoles lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts et le second présentant les choix effectués par les cinq professeurs des écoles observés dans notre travail ainsi qu'une tentative d'explication de ces choix.

I - PRESENTATION DE LA RECHERCHE

Notre recherche s'intéresse aux pratiques ordinaires de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts dans leur classe de cycle 3. Afin d'étudier ces pratiques, il nous semble nécessaire d'aborder la question des ressources en étudiant celles dont les enseignants disposent et les choix qu'ils font parmi cet ensemble de ressources.

1 Problématique et cadrage théorique

Nous rappelons tout d'abord la caractérisation des problèmes ouverts établie par Arsac & Mante (2007) :

« *L'énoncé est court. L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours. Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.* ». Dans notre recherche, nous

cherchons à décrire les pratiques ordinaires de professeurs des écoles lorsqu'ils proposent des problèmes de ce type dans leur classe afin de les comprendre. Concernant l'usage des ressources qui nous intéresse dans cette communication, il s'agit de décrire les choix que font les enseignants lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts et d'expliquer ces choix.

Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique développé par A. Robert & J. Rogalski (2002). Ce cadre permet d'envisager l'étude de la pratique des enseignants selon deux approches, didactique et ergonomique, en tenant compte de toute leur complexité. Cinq composantes de la pratique sont considérées : deux composantes, cognitive et médiative, sont liées aux séances menées par les enseignants et rendent compte du point de vue didactique des pratiques associées aux apprentissages potentiels des élèves. Les trois autres composantes, sociale, institutionnelle et personnelle, sont liées à l'exercice du métier d'enseignant et aux contraintes qui en découlent.

De plus, la résolution en classe de problèmes ouverts n'est pas directement liée à l'étude de savoirs mathématiques curriculaires. Les savoirs à enseigner dans le cas des problèmes ouverts restent flous (Hersant, 2010), ils ne sont explicitement exposés ni dans les instructions officielles, ni dans les manuels scolaires comme peuvent l'être les savoirs liés à l'enseignement d'une notion bien définie. L'ensemble des manuels scolaires à disposition des professeurs des écoles va par exemple réserver des pages à l'enseignement de la symétrie axiale et ces pages pourront être facilement identifiées par chaque enseignant. En revanche, même si les programmes de l'école primaire en vigueur (MEN, 2008) encouragent les enseignants à « *développer chez tous les élèves des capacités de recherche et de raisonnement* », ils ne sont pas clairs sur les moyens d'y parvenir, sur les savoirs alors à enseigner et les manuels ne proposent pas explicitement des pages réservées à des problèmes ouverts (dont un des objectifs est le développement de capacités de recherche chez les élèves). De ce fait, afin d'affiner les analyses en termes d'usage des ressources par les enseignants, nous utilisons des éléments du cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010) et ceci notamment afin de renseigner plus précisément la composante institutionnelle de leur pratique.

2 Méthodologie générale de cette recherche

Notre travail concerne des pratiques ordinaires au sens où nous ne sommes intervenus ni dans le choix des problèmes ouverts à proposer en classe, ni dans la préparation et la mise en œuvre des séances dédiées à l'étude de ces problèmes. Afin d'étudier ces pratiques ordinaires et notamment l'usage des ressources dans le cas de la proposition de problèmes ouverts en classe, nous avons choisi d'observer cinq professeurs des écoles enseignant au cycle 3. Ces cinq professeurs ne sont pas débutants, ils enseignent dans des écoles non défavorisées socialement et depuis au moins cinq ans avec des élèves de niveau cycle 3. Par ailleurs, nous précisons que ces cinq enseignants n'ont pas suivi d'études en mathématiques à l'université. En cela, nous pouvons dire qu'ils ne sont pas, comme bon nombre de professeurs des écoles en France (Artigue, 2011), spécialistes des mathématiques comme peuvent l'être des professeurs de mathématiques du second degré.

L'observation des séances s'est faite sur un temps long, elle est répartie sur l'année scolaire. Après un premier entretien avec les cinq enseignants en début d'année scolaire, nous avons observé, filmé du fond de la classe puis transcrit toutes les séances qu'ils nous disent dédier aux problèmes ouverts. Nous avons recueilli les travaux écrits des élèves sous forme de brouillons, feuilles de recherche et/ou affiches. Des travaux de groupes ont été enregistrés et transcrits. Des échanges avec les enseignants ont également eu lieu avant et après chaque séance et ont été transcrits. Ils ont permis de recueillir, tout au long de l'année, des informations sur la préparation des séances, sur leurs mises en œuvre et sur le travail des élèves lors de ces séances.

Nous détaillerons plus loin, dans chaque partie, notre méthodologie d'analyse concernant l'usage des ressources. Nous préciserons comment nous repérons les ressources raisonnablement disponibles pour les enseignants que nous observons et comment nous analysons ces ressources

puis comment, en nous appuyant sur le cadrage théorique choisi, nous tentons d'expliquer les choix que les enseignants font parmi les ressources disponibles.

II - ANALYSE DES RESSOURCES DONT LES PROFESSEURS PEUVENT RAISONNABLEMENT DISPOSER

Avant d'analyser les choix des cinq enseignants observés en termes de ressources, nous proposons dans cette partie de recenser celles que nous estimons être raisonnablement disponibles pour des professeurs des écoles lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts pour leur classe de cycle 3. Nous précisons ensuite comment nous les avons étudiées afin de déterminer si des énoncés de problèmes ouverts sont repérables dans ces ressources par des enseignants ordinaires et présentons les résultats de notre analyse.

1 Quelles sont ces ressources ?

1.1 Des manuels scolaires accompagnés de livres du professeur

Par manuels scolaires, nous entendons, dans la suite de cette communication, les ouvrages destinés aux élèves et par livres du professeur, nous considérons les ouvrages à destination des enseignants accompagnant, dans la plupart des collections, les manuels destinés aux élèves. Une majorité de professeurs des écoles de cycle 3 se réfère à un ou plusieurs manuels scolaires pour préparer leurs séances et pour travailler en classe (Durpaire, 2008), ces manuels étant le plus souvent accompagnés de livres du professeur. Suite aux nouvelles instructions officielles de l'année 2008, les maisons d'éditions ont envoyées, en 2009 et 2010, dans les écoles primaires de nouveaux spécimens pour le cycle 3. Nous avons recensé une douzaine de spécimens ainsi mise à disposition des professeurs. Il nous semble donc que tous ces manuels ne vont pas être utilisés, que les enseignants vont faire un choix parmi les collections proposées. Nous ne proposons ici pas une recherche exhaustive des manuels scolaires diffusés, nous décidons de centrer notre travail sur les deux collections les plus utilisées dans notre département (IA 72, 2010) : *J'apprends les maths* CE2, CM1 et CM2 (Editions Retz, 2010) et *CapMaths* CE2, CM1 et CM2 (Editions Hatier, 2008, 2010). Par ailleurs, nous choisissons d'étudier les manuels scolaires de CE2, CM1 et CM2 de la collection *Euromaths* (Editions Hatier, 2009, 2010). En effet, ces trois manuels étant conçus par des didacticiens (Briand, Ngono, Peltier & Vergnes), il nous semblait intéressant de l'intégrer à notre étude afin de les comparer aux deux autres collections.

1.2 D'autres types de ressources

Nous choisissons d'étudier d'autres ressources que nous pensons être raisonnablement disponibles pour des enseignants de cycle 3. Pour en faire une liste, nous nous sommes appuyés sur le document d'accompagnement des programmes intitulé « *Le problème pour chercher* » (MEN, 2003) que les professeurs observés dans notre travail, non débutant et enseignant depuis plus de cinq ans, ont pu avoir en main. Les auteurs de ce document proposent une liste de ressources, autres que les manuels scolaires, dans lesquelles il est possible de trouver des énoncés de problèmes de type ouvert :

> *« certains manuels intègrent de tels problèmes à leur progression.*
>
> - *Des travaux de recherches (comme ceux de l'équipe Ermel de l'INRP) fournissent également des exemples de mises en œuvre.*
> - *Certaines productions de la COPIRELEM ou des revues pour les enseignants […], par exemple un numéro spécial de la revue Grand N 'points de départ' (édité en 2003) propose des activités et problèmes mathématiques pour des élèves de cycle 3.*
> - *Les concours et rallyes mathématiques […] sont une autre source d'inspiration pour les enseignants : ces problèmes sont souvent disponibles en ligne sur le réseau Internet et peuvent être trouvés en utilisant un moteur de recherche. La revue Math-école publie également les épreuves du rallye mathématique transalpin. »* (MEN, 2003, p. 8).

Notre choix s'oriente donc tout d'abord vers les ouvrages de la collection *Ermel* dédiés aux niveaux CE2, CM1 et CM2 et le numéro spécial « *Points de départ* » de la revue professionnelle *Grand N* (IREM de

Grenoble, 2003). Il s'agit ensuite de différents sites Internet cherchant à promouvoir des rallyes mathématiques : le site dédié au rallye mathématique transalpin (ARMT) qui propose tous les ans, depuis l'année 1995, des épreuves communes à la Suisse, la France, la Belgique et l'Italie, les sites dédiés aux rallyes mathématiques de la Haute-Loire, du Puy de Dôme (niveau primaire) et de La Sarthe (niveau collège et cycle 3). Ces trois derniers rallyes sont choisis d'une part parce que, utilisant un moteur de recherche, les sites des rallyes de la Haute-Loire et du Puy de Dôme apparaissent régulièrement, au moment de nos analyses, en premier dans les listes proposées sur Internet et d'autre part parce que notre étude se situant dans la Sarthe, les enseignants observés sont susceptibles de connaître le site du rallye mathématique de la Sarthe et/ou d'être encouragés à le consulter par des inspecteurs et des conseillers pédagogiques du département.

2 Analyse des manuels scolaires

Nous cherchons ici à répondre à deux questions : les ressources identifiées proposent-elles des énoncés de problèmes ouverts ? Ces énoncés sont-ils repérables par des professeurs des écoles ordinaires ? Nous interrogeons ainsi la lisibilité des ressources pour des enseignants ordinaires. Autrement dit, s'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts, peuvent-ils facilement en trouver dans les différentes ressources dont ils disposent ?

Pour cela, après avoir identifié le statut des auteurs dans la communauté éducative des différentes collections, nous procédons à deux analyses successives. La première concerne l'étude des sommaires des différentes ressources, la seconde est une analyse d'énoncés utilisant la caractérisation du problème ouvert (Arsac & Mante, 2007).

2.1 Analyse des sommaires

Il s'agit de déterminer si à la lecture du sommaire, il est possible de déceler ou non la présence de problèmes ouverts dans la ressource étudiée. Pour cela, nous repérons dans le sommaire, l'utilisation faite par les auteurs d'expressions autour du mot-clé *problème*. Nous étudions également ce qu'en disent les auteurs dans le manuel scolaire destiné à l'élève et dans le livre du professeur. Autrement dit, nous déterminons si les auteurs annoncent explicitement des pages dédiées à ce type de problèmes. Si oui, nous analysons ensuite les énoncés proposés dans les pages ainsi repérées.

2.2 Analyse des énoncés

Quand des pages susceptibles de contenir des énoncés de problèmes ouverts sont repérées dans le sommaire, nous analysons ces énoncés en nous appuyant sur la caractérisation des problèmes ouverts par Arsac & Mante (2007). Nous étudions notamment la longueur de l'énoncé, la présence ou non de questions intermédiaires. Nous nous demandons si le domaine mathématique abordé dans le problème est familier ou non des élèves de cycle 3 et s'il est possible de mettre en œuvre pour des élèves de cet âge une démarche scientifique (à savoir s'il est possible pour eux de faire des essais, de formuler des hypothèses quant aux résultats attendus, de faire des tests pour vérifier ces hypothèses).

2.3 Résultats de ces analyses

Ces deux analyses successives nous permettent d'obtenir des résultats pour chacune des ressources étudiées. Nous présentons le pourcentage de problèmes ouverts trouvés par rapport à l'ensemble des problèmes proposés par les auteurs dans les pages repérées dans le sommaire et indiquons entre parenthèses le nombre d'énoncés de problèmes ouverts repérés que cela représente.

Concernant les sommaires des neuf manuels étudiés

À travers les sommaires des neuf manuels étudiés, des pages réservées à la résolution de problèmes sont annoncées. En revanche, comme nous pouvions nous y attendre, l'expression « problème ouvert » n'est jamais mentionnée.

Plus précisément, les sommaires des deux collections *Cap Maths* et *Euromaths* proposent des pages réservées respectivement à des *problèmes pour chercher* et à des *problèmes pour apprendre à chercher*. De ce fait, nous étudions ces pages en termes de présence ou non de problèmes ouverts. Nous pensons que des

enseignants de cycle 3 cherchant des énoncés de problèmes ouverts, suite à la lecture de ces sommaires, peuvent penser qu'ils en trouveront dans ces deux collections. Par ailleurs, le sommaire de la collection *J'apprends les maths* annonce des pages réservées à des *ateliers de résolution de problèmes* sans plus de précision. Nous choisissons de les étudier afin de repérer ou non des problèmes ouverts. Nous faisons l'hypothèse que des enseignants de cycle 3, du fait d'un sommaire non explicite en termes de problèmes de type ouvert, ne choisiront sans doute pas cette collection lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts.

Concernant les neuf manuels étudiés

Les propositions des trois collections sont différentes en termes de problèmes ouverts comme le montrent les résultats suivants :

- Collection *CapMaths*

  -dans les « unités » : CE2, CM1 pas de PO, CM2 (4),

  -dans la « banque de problèmes » : CE2 17% (19), CM1 11% (14), CM2 28% (37).

- Collection *Euromaths*

  -dans les pages « problèmes pour apprendre à chercher », « problèmes pour apprendre à débattre » : CE2 100% (9), CM1 100% (9), CM2 75% (12).

- Collection *J'apprends les Maths*

  -dans les « ateliers de résolution de problèmes » : CE2 2,8% (2), CM1 4,2%(5), CM2 2,3%(3).

Dans les manuels de la collection *Cap Maths*, peu d'énoncés de problèmes ouverts sont proposés dans les unités, les enseignants peuvent néanmoins en trouver dans les pages intitulées *banque de problèmes*, situées en fin de manuel. Ces énoncés sont en nombre suffisant pour permettre une utilisation sur l'année, mais ils relèvent presque tous de la résolution d'équations diophantiennes : des élèves de cycle 3, pour les résoudre, sont amenés à faire des hypothèses et à tester leur cohérence avec les données de l'énoncé. Malgré cela, la présentation de la *banque de problèmes*, peu explicite quant au caractère ouvert des problèmes, ne facilite pas le choix que les professeurs des écoles ont à faire parmi cette liste d'énoncés voire peut les décourager à l'utiliser.

Concernant la collection *Euromaths*, les pages intitulées « problèmes pour apprendre à chercher » proposent des énoncés de problèmes ouverts dans le domaine numérique pour les niveaux CE2 et CM1. Les pages intitulées « *problèmes pour apprendre à chercher* », « *problèmes pour apprendre à débattre* » proposent des problèmes ouverts dans les domaines numérique et géométrique. Nous considérons que le choix est ainsi facilité pour les enseignants de cycle 3. Ces différentes pages permettent d'identifier facilement des problèmes ouverts quand ils en cherchent.

Notre analyse des énoncés dans les pages intitulées « *atelier de résolution de problèmes* » de la collection *J'apprends les maths* montre que très peu des problèmes sont ouverts. De plus, la présentation des manuels n'est pas explicite en termes de problèmes ouverts et, même si certains énoncés pourraient être ouverts en les transformant, il nous semble difficile pour des professeurs des écoles ordinaires de faire un tri parmi les problèmes proposés.

3 Analyse des autres ressources

3.1 Méthodologie d'analyse

Afin d'étudier les autres ressources disponibles pour des enseignants du cycle 3, nous repérons, dans les sommaire des ouvrages et dans les pages d'accueil des sites, la proposition explicite ou non de problèmes ouverts. Puis nous analysons des extraits de ces ouvrages et des sites afin de repérer la présence ou non de problèmes ouverts.

3.2 Résultats des analyses

Dans la collection Ermel

Le sommaire des ouvrages destinés aux classes de CE2, CM1 et CM2 annonce la présence de problèmes rassemblés dans un module ayant pour enjeu de « *développer des stratégies de recherche* ». L'analyse de chacun des énoncés constituant ce module montre que 7 problèmes ouverts sont proposés pour la classe de CE2 , 5 problèmes pour la classe de CM1 et 4 problèmes pour la classe de CM2.

Dans le numéro spécial Grand N

Le sommaire annonce la présence d'une cinquantaine de problèmes s'adressant à tous les niveaux de l'école primaire. En analysant quelques énoncés nous semblant représentatifs de l'ouvrage, comme celui présenté ci-après (Cf. Figure 1), nous constatons que ce sont des problèmes ouverts pour des élèves de cycle 3.

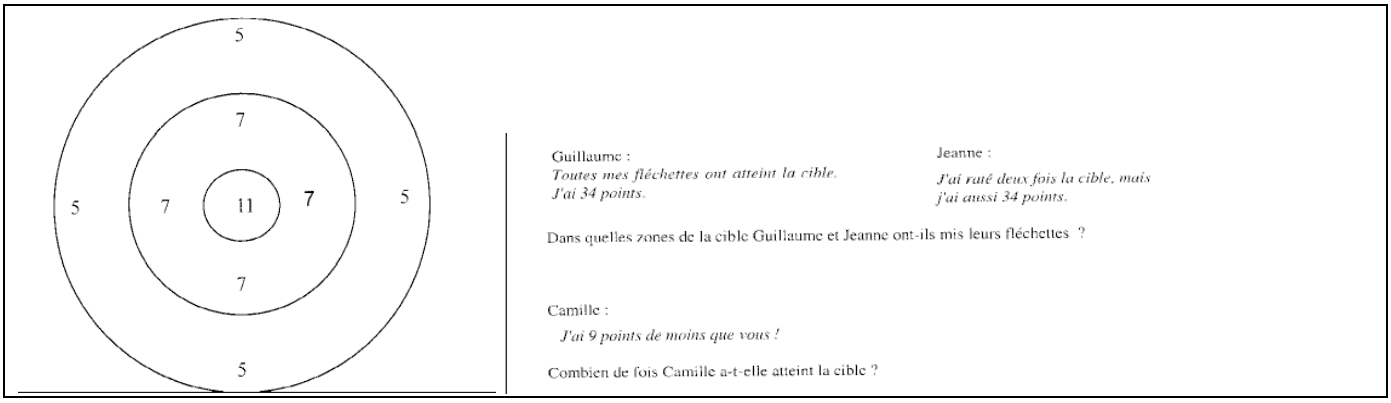


Figure 1 Point de départ, Grand N, p. 46, 2003

*Sur le site du Rallye Mathématique Transalpin (*RMT*)*

La page d'accueil du site oriente vers des archives du rallye mathématique qui a lieu tous les ans depuis l'année 2001. Les problèmes proposés au rallye sont disponibles sous la forme d'une fiche par énoncé, accompagné d'une brève analyse *a priori*. Bon nombre de ces problèmes, comme celui présenté ci-après (Figure 2), peuvent être des problèmes ouverts pour des élèves de cycle 3.

Sur les sites des autres rallyes mathématiques

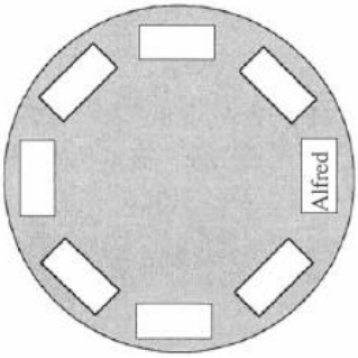
La page d'accueil de chacun des sites oriente vers des archives, vers des fiches d'une dizaine d'énoncés, accompagnés d'une brève solution. Ces fiches, dont nous donnons un exemple ci-après (Figure 3), ont été proposées aux élèves lors des rallyes mathématiques et ceci tous les ans depuis la fin des années quatre-vingt-dix.

14e RMT ÉPREUVE I janvier- février 2006 ©ARMT 2006 9

7. CHACUN À SA PLACE (Cat. 4, 5, 6)

Alfred, Brice, Carla, Dany, Émile, Frédéric, Gina et Henri vont s'installer autour d'une table ronde. Alfred a déjà choisi sa place et a mis des cartons vides sur la table pour indiquer la place de ses camarades.

- Gina veut être à côté de Frédéric, mais pas à sa gauche.
- Carla veut être assise entre Brice et Émile.
- Dany veut être à côté de Gina.
- Émile veut être juste en face d'Alfred.
- Henri veut être assis juste à la droite d'Alfred.



Trouvez une disposition possible et écrivez le nom des enfants à leur place.
Indiquez les étapes qui vous ont permis de placer toutes les personnes.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : positions relatives
- Logique : déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre logiquement les contraintes en se mettant à la place de chaque enfant.
- Procéder par essais, en plaçant les étiquettes et en vérifiant ensuite si les contraintes sont respectées.
- Commencer par placer les personnages dont la position est sans équivoque : Émile et Henri.
- Placer ensuite les autres enfants à partir de ceux qui sont déjà placés par essais successifs ou par déductions, par exemple, si Carla - qui doit être à côté d'Émile - était à sa droite, Brice viendrait ensuite et il ne resterait qu'une place entre Brice et Alfred et deux places entre Émile et Henri ; on ne pourrait plus alors placer les trois derniers enfants : Gina entre Frédéric et Dany.

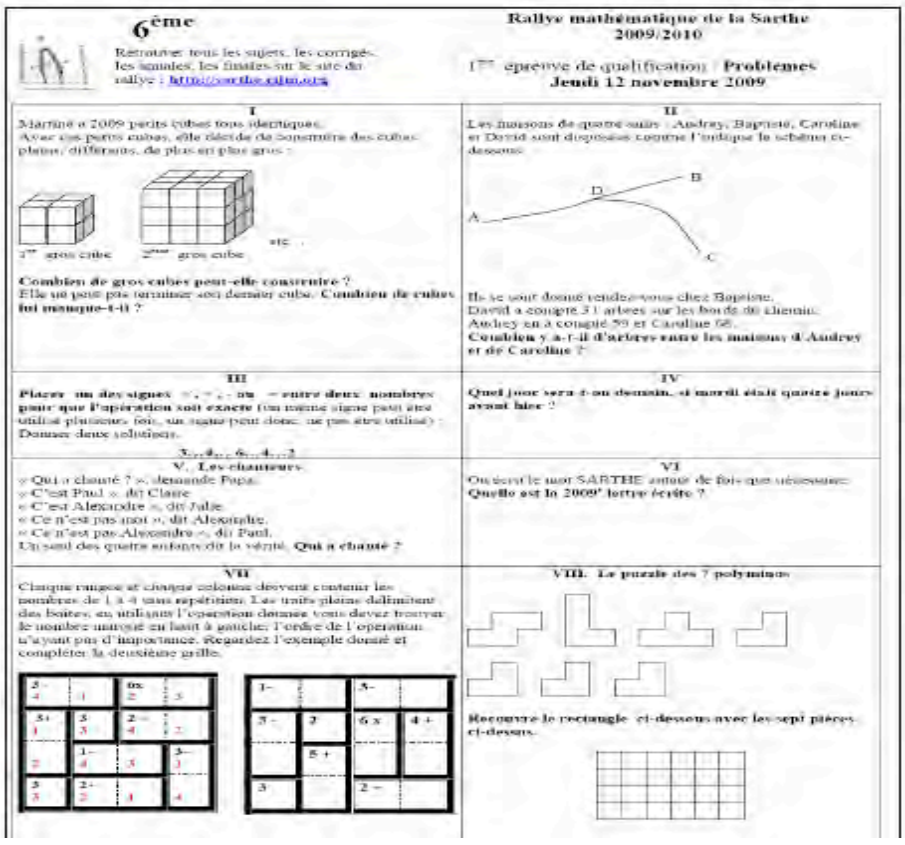
  Carla est donc à gauche d'Émile, suivie de Brice et de Henri. Les trois places qui restent sont pour Gina, à droite de Frédéric et Dany à droite de Gina (et à gauche d'Alfred). Ce qui donne dans le sens des aiguilles d'une montre :

  A, D, G, F, E, C, B, H.

Attribution des points

4 Réponse correcte (dans le sens des aiguilles d'une montre : A, D, G, F, E, C, B, H), avec explication sur la démarche

Figure 2 Fiche présentant un problème proposé lors du 14ème RMT, 2006.



6ème

Retrouver tous les sujets, les corrigés, les annales, les finales sur le site du rallye : http://sarthe.cilm.org

Rallye mathématique de la Sarthe 2009/2010

1ère épreuve de qualification : **Problèmes**
Jeudi 12 novembre 2009

I

Martine a 2009 petits cubes tous identiques.
Avec ces petits cubes, elle décide de construire des cubes pleins, différents, de plus en plus gros :

1er gros cube 2ème gros cube etc.

Combien de gros cubes peut-elle construire ?
Elle ne peut pas terminer son dernier cube. **Combien de cubes lui manque-t-il ?**

II

Les maisons de quatre amis : Andrey, Baptiste, Caroline et David sont disposées comme l'indique le schéma ci-dessous.

Ils se sont donné rendez-vous chez Baptiste.
David a compté 31 arbres sur les bords du chemin.
Andrey en a compté 59 et Caroline 68.
Combien y a-t-il d'arbres entre les maisons d'Andrey et de Caroline ?

III

Placer un des signes +, -, ÷ ou × entre deux nombres pour que l'opération soit exacte (un même signe peut être utilisé plusieurs fois, un signe peut donc ne pas être utilisé) : Donner deux solutions.

3…4…6…4…2

IV

Quel jour sera-t-on demain, si mardi était quatre jours avant hier ?

V. Les chanteurs

« Qui a chanté ? », demande Papa.
« C'est Paul », dit Claire.
« C'est Alexandre », dit Julie.
« Ce n'est pas moi », dit Alexandre.
« Ce n'est pas Alexandre », dit Paul.
Un seul des quatre enfants dit la vérité. **Qui a chanté ?**

VI

On écrit le mot SARTHE autour de fois que nécessaire.
Quelle est la 2009e lettre écrite ?

VII

Chaque rangée et chaque colonne doivent contenir les nombres de 1 à 4 sans répétition. Les traits pleins délimitent des boîtes, en utilisant l'opération donnée vous devez trouver le nombre marqué en haut à gauche; l'ordre de l'opération n'ayant pas d'importance. Regardez l'exemple donné et compléter la deuxième grille.

VIII. Le puzzle des 7 polyminos

Recouvre le rectangle ci-dessous avec les sept pièces ci-dessus.

Figure 3 Epreuves destinées aux élèves de sixième, 2009.

3.3 Conclusion sur les autres ressources

Notre analyse des différentes ressources autres que les manuels scolaires, dont nous ne présentons ici qu'un extrait, montre que celles-ci mettent à disposition des professeurs des écoles de nombreux problèmes ouverts. De plus, la présentation de ces ouvrages étant explicite quant à la présence de problèmes visant le développement des capacités de recherche chez les élèves apporte une certaine lisibilité aux enseignants cherchant des énoncés de problèmes ouverts. Nous pouvons penser qu'ils vont facilement trouver ces énoncés dans ces ressources. Malgré tout, il nous semble qu'une difficulté apparaît ici : en effet, l'offre est importante tant dans ces ouvrages que sur les sites dédiés aux rallyes mathématiques. De ce fait, les enseignants ont un réel choix à faire parmi les nombreux énoncés et nous pouvons penser que ce choix peut s'avérer pour eux difficile.

4 Conclusion

La proportion de problèmes ouverts dans les manuels scolaires étudiés ici n'est pas majoritaire parmi l'ensemble des problèmes proposés. Notre analyse nous permet de penser qu'un professeur des écoles va facilement identifier des problèmes ouverts dans les ouvrages de la collection *Euromaths* alors qu'il aura plus de difficultés à en trouver dans les ouvrages des collections *CapMaths* et *J'apprends les maths* notamment du fait d'une présentation non explicite en termes de problèmes ouverts dans ces deux collections.

Finalement, les professeurs des écoles pourront trouver des problèmes ouverts dans les ouvrages *Ermel*, dans le numéro spécial de la revue *Grand N* ainsi que sur des sites dédiés à des rallyes mathématiques tels que le rallye RMT, les rallyes mathématiques du Puy de Dôme et de La Sarthe. Néanmoins, nous pensons que, du fait d'un nombre important d'énoncés, l'utilisation de ces autres ressources et le choix d'énoncés pour la classe peuvent s'avérer difficiles.

Dans la suite, nous étudions ces choix et comment les différentes ressources identifiées sont utilisées par les cinq enseignants participants à notre étude.

III - LES CHOIX DES PROFESSEURS DES ECOLES

Dans cette partie, nous présentons les choix effectués par chacun des cinq enseignants observés dans notre étude en termes de ressources puis les analysons afin de les expliquer.

1 Les choix des cinq enseignants observés

Le tableau suivant résume les ressources choisies par les cinq enseignants.

	E1	E2	E3	E4	E5
Cap Maths					
J'apprends les maths					
Euromaths			CM2		
Ermel		CM1/CM2			
Revue Grand N					
Autres revues professionnelles					Brochure IREM 6ème
Site ARMT					
Autres sites	Site rallye du Puy de Dôme		Site IA21		
Formation initiale/continue				FI en IUFM	

En premier lieu, nous constatons qu'aucun d'entre eux n'utilise le manuel habituel de la classe afin de trouver des problèmes ouverts pour sa classe. Les ressources utilisées sont assez différentes d'un enseignant à l'autre. E1 cherche des énoncés sur le site du rallye du Puy de Dôme, E2 utilise les ouvrages

Ermel CM1 et CM2 ainsi que le site du rallye mathématique transalpin. E3 utilise le manuel de la collection *Euromaths* CM2 (qui n'est pas le manuel habituel de la classe) ainsi qu'un dossier[1] consacré à une expérimentation en cycle 3 menée par un groupe de professeurs des écoles et un inspecteur, publié sur le site de l'Inspection Académique de La Côte d'Or, E4 reprend des énoncés choisis lors de sa formation initiale suite à l'organisation d'un rallye mathématique. E5 choisit des énoncés dans une brochure[2] rédigée par un groupe IREM des Pays de La Loire à destination des professeurs de mathématiques de sixième.

2 Explication de ces choix

2.1 Précisions méthodologiques

Matheron et Noirfalise (2008) montrent que les professeurs des écoles, du fait de leur polyvalence et afin notamment d'alléger leur travail de préparation, ont tendance à utiliser des manuels scolaires. Le tableau précédent indique que dans le cas des problèmes ouverts, les enseignants de notre étude utilisent au contraire autre chose qu'un manuel scolaire. Comment expliquer cette différence de choix ? Pour répondre à cette question et afin d'étudier les choix en termes de ressources des cinq enseignants de notre étude, nous complétons le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique d'éléments du cadre théorique de *l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2010).

À partir de régularités identifiées dans les choix des professeurs, nous repérons cinq *invariants opératoires* à savoir des connaissances, des représentations de l'enseignant, souvent implicites, qui semblent sous-tendre l'utilisation des ressources par les professeurs et donc envisager une explication des choix qui sont faits.

2.2 Repérage d'invariants opératoires

Afin de déterminer ces invariants opératoires, nous avons pris en compte les connaissances des professeurs en termes de problèmes ouverts, connaissances qui se sont révélées tout au long de nos observations sur l'année et pendant les entretiens avec chaque enseignant. Un premier invariant opératoire IO1 est révélé : un problème ouvert amène les élèves à chercher sans l'aide de l'enseignant. Le choix des énoncés faits pour leur classe et le fait que les enseignants précisent qu'ils désirent rompre, grâce à ces problèmes, avec une certaine routine révèlent des autres invariants opératoires IO2 et IO3. Certains des problèmes choisis et l'organisation de certaines des séances observées notamment chez E2 poussent les élèves à conjecturer et à prouver des résultats. Un quatrième invariant opératoire IO4 est alors à considérer. Les problèmes ouverts, initiés par Arsac et Mante pour le second degré, peuvent être l'occasion pour des professeurs des écoles de faire fréquenter à leurs élèves de cycle 3 des problèmes pouvant être ensuite étudiés au collège. De ce fait, un cinquième invariant opératoire IO5 peut être proposé.

Le tableau suivant rend compte des cinq invariants opératoires repérés par enseignant :

[1] Dossier intitulé « La résolution de problèmes au cycle 3 : expérimenter la résolution d'un problème pour chercher », disponible à l'adresse
http://mathematiques21.ac-dijon.fr/sites/mathematiques21.ac-dijon.fr/IMG/pdf/Exp_Problemes_et_calcul.pdf

[2] Brochure intitulée « Enseigner les maths autrement en sixième », (Gilg, Letourneux, Massot, Pons, 1999).

	E1	E2	E3	E4	E5
IO1 : un problème ouvert amène les élèves à chercher sans l'aide de l'enseignant					
IO2 : un énoncé de problème ouvert est différent d'un problème traité habituellement en classe					
IO3 : un énoncé de problème ouvert a un caractère ludique					
IO4 : un problème ouvert mène à l'étude de preuves en mathématiques					
IO5 : un problème ouvert se rapproche des problèmes proposés en mathématiques en classe de sixième					

Comme l'indique le tableau, lorsque les cinq enseignants cherchent des énoncés de problèmes ouverts dans les ressources dont ils disposent, les cinq invariants opératoires n'interviennent pas tous en même temps et ne suivent pas la même hiérarchie. Les invariants opératoires IO1 et IO2 sont partagés par les cinq enseignants et renvoient aux enjeux des séances dédiées à des problèmes ouverts. Les trois autres invariants renseignent la fonction du problème : E2 choisit des problèmes afin de mener les élèves à la preuve en mathématiques ; E1 et E5 visent la préparation à l'entrée au collège ; E1, E3 et E4 s'attachent au caractère ludique des problèmes choisis.

IV - CONCLUSION

Nous avons étudié les ressources raisonnablement disponibles pour des enseignants de cycle 3 et examiné les choix en termes de ressources de cinq professeurs des écoles dans le cas de l'étude de problèmes ouverts en classe. Cette étude de pratiques ordinaires était placée dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & J. Rogalski, 2002) en y associant des éléments du cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010). Cette analyse a permis de préciser la pratique des cinq professeurs des écoles. Elle met à jour une certaine stabilité des pratiques du problème ouvert (Choquet, 2014) qui se révèle notamment dans le choix des ressources. Et le choix de ces ressources permet de révéler les enjeux des séances dédiées aux problèmes ouverts.

L'étude des choix des enseignants en termes de ressources renseigne trois composantes de la pratique de chacun des cinq enseignants. Elle renseigne d'une part la *composante institutionnelle* de leur pratique : des ressources différentes des ressources habituelles sont utilisées, le choix de ces ressources, une fois effectué, ne varie pas au cours de l'année, il est stable pour l'année. Elle renseigne d'autre part, la *composante cognitive* de leur pratique : l'enjeu d'apprentissage des séances dédiées aux problèmes ouverts apparaît dans les choix qui sont faits. Par exemple, E1 choisissant des énoncés sur un site dédié à un rallye mathématique oriente ses élèves dans des activités de recherche alors que E2 choisissant des énoncés dans les ouvrages *Ermel* vise plutôt l'initiation à la preuve en mathématiques. Elle renseigne enfin la *composante personnelle* de leur pratique en révélant leurs représentations personnelles sur l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement sur la place à accorder aux problèmes ouverts dans cet enseignement en primaire.

Finalement, les éléments étudiés dans cet article, les choix faits par chacun d'entre eux en termes de ressources pour trouver des problèmes ouverts tendent à montrer que ces cinq enseignants ne veulent prendre aucun risque à propos de l'étude de ces problèmes ouverts : ils n'en inventent pas, ils ne transforment pas d'énoncés pour en faire des problèmes ouverts pour leur classe, mais ils utilisent des ressources proposées par des professionnels de l'éducation (professeur de mathématiques, didacticiens, équipe Ermel, équipe IREM, IEN et groupe mathématique académique) qu'ils peuvent assimiler à des spécialistes de l'enseignement des mathématiques contrairement à eux et dans lesquelles ces problèmes sont explicitement présentés.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC M. & MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert.* Scéren : Lyon.

CHOQUET C. (2010) « Problèmes ouverts » au cycle 3 : quelques résultats sur les choix de professeurs des écoles, in *Actes du XXXVIIème colloque COPIRELEM,* Arpeme.

CHOQUET C. (2014) Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3. Thèse de doctorat. Université de Nantes.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (2000). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CE2,* ERMEL, Paris : Hatier.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1,* ERMEL, Paris : Hatier.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2,* ERMEL, Paris : Hatier.

GILG, C., LETOURNEUX, A.M., MASSOT, A., PONS, G. (1999). Enseigner les maths autrement en sixième. Nantes: Irem des Pays de La Loire éditions.

GUEUDET, G., TROUCHE, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes, INRP.

IREM de Grenoble (2003). *Spécial Grand N Points de départ, Activités et problèmes mathématiques pour les élèves de l'école primaire et du collège.* IREM de Grenoble éditions.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des esneignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2**, n°4, 505-528.

Manuels scolaires et livres du professeur

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2010). *Euromaths CE2*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM1*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM2*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2010). *Euromaths CE2, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM1, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM2, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CE2*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM1*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM2*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CE2, Livre du maître*. Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM1, Livre du maître*. Paris: Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM2, Livre du maître*. Paris: Retz.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2011). *Cap Maths CE2, Manuel de l'élève.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM1, Manuel de l'élève.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM2, Manuel de l'élève.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2012). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM1, Guide de l'enseignant.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM2, Guide de l'enseignant.* Hatier.

ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES AVEC DES ECOLIERS NON OU PEU FRANCOPHONES

Catherine MENDONÇA DIAS
Professeur de lettres, formatrice au CASNAV, RECTORAT DE BORDEAUX
Docteur en sciences du langage, CNU 7 et 70
SFERE d'Aix-Marseille
catherine.mendonca.dias@gmail.com

Résumé
Cette communication vise à établir un état des lieux de la recherche et des pratiques de classe en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques aux élèves non ou peu francophones, nouvellement arrivés en France et scolarisés en école élémentaire.
La première partie est consacrée à la présentation des élèves et aux moyens dont dispose l'enseignant pour mieux les connaître. Il s'agit pour l'enseignant d'identifier les acquis de l'élève allophone, à travers notamment des tests en langue d'origine, et d'anticiper des difficultés en mathématiques, en fonction des résultats et de la scolarité antérieure. A la lumière de ces éléments, l'enseignant est amené à aménager des différenciations pour faciliter le suivi des activités mathématiques. La deuxième partie aborde alors des gestes pédagogiques facilitateurs, des activités sur la langue de la discipline et des ressources pour des activités différenciées. Enfin, dans une troisième partie, sont présentés des projets qui cherchent à favoriser l'apprentissage de la langue en mathématiques en classe, selon une démarche pouvant être interculturelle.
A chaque étape, les ressources existantes sont présentées à l'attention du professeur, parfois déstabilisé à l'arrivée d'un élève non francophone. La plupart des propositions sont transférables pour des élèves natifs, éprouvant des difficultés en mathématiques.

I - INTRODUCTION

A l'école élémentaire, les professeurs sont parfois amenés à enseigner les mathématiques à des élèves allophones arrivants. "*Allophones*" signifie qu'ils parlent une ou plusieurs autres langues que le français et être "*arrivants*" implique une arrivée récente d'un autre pays, des conditions de scolarisation et des programmes scolaires différents. Ces élèves sont catégorisés parmi les élèves à besoins éducatifs particuliers (EBEP). En tant que formatrice au CASNAV[1], je rencontre des professeurs des écoles qui doivent gérer leurs arrivées, échelonnées au cours de l'année, dans des groupes déjà hétérogènes. Mon propos visera à établir un état des lieux de la recherche, des pratiques de classe et des ressources existantes. Il s'articulera autour de trois entrées.

Tout d'abord, une approche globale des besoins des élèves permettra de prendre en compte le profil des élèves allophones arrivants, profil à la fois social, voire psychologique, culturel et, bien entendu, linguistique et scolaire. Je présenterai aussi les évaluations diagnostiques existantes en mathématiques ainsi que les dispositifs proposés par l'Éducation Nationale et j'évoquerai les incidences de la scolarité antérieure sur l'apprentissage des mathématiques.

[1] Le *Centre Académique pour la Scolarisation des enfants allophones Nouvellement Arrivés et des enfants issus de familles itinérantes et de Voyageurs* est un service du rectorat.

En second lieu, la question de l'adaptation pédagogique sera abordée, à travers notamment des gestes pédagogiques simples et facilitateurs, tels que ralentir le débit de parole pour faciliter la compréhension du discours oral. Je présenterai des ressources et je proposerai une adaptation linguistique avec l'appui du Cadre Européen Commun de Références pour les Langues (CECRL).

Enfin, je rapporterai des projets de classe en mathématiques, axés sur la langue de la discipline ou menés avec une perspective interculturelle.

II - QUI EST L'ELEVE ALLOPHONE ET COMMENT IDENTIFIER SES ACQUIS OU ANTICIPER SES DIFFICULTES EN MATHEMATIQUES ?

1 Conditions d'arrivée et incidences sur l'apprentissage

1.1 Les origines des élèves arrivants

Pour fournir quelques données chiffrées, en 2012-2013, 44 400 élèves allophones arrivants[2] sont recensés, ce qui représente 0,47 % des élèves des 1er et 2nd degrés, mais certains ne sont pas repérés ou comptabilisés (c'est le cas des enfants de grande section de maternelle). Par ailleurs, d'autres sont arrivés l'année précédente ou celle d'avant mais ils n'ont pas encore atteint un niveau en français suffisant pour suivre en classe type. Ainsi, les chiffres réels sont supérieurs et de nombreux professeurs des écoles accueillent ce public, principalement dans les grandes villes.

Les origines des élèves sont variées. Par exemple, pour la Gironde, en 2012-2013, les 344 collégiens évalués représentent 55 pays. Par ailleurs, ces pays varient d'un département à l'autre : avec l'exemple de la Gironde, on observe que les 3 pays les plus représentés sont la Bulgarie, le Portugal et l'Espagne, ce qui n'est pas le cas sur le plan national[3]. On ne parlera pas d'élèves "étrangers", mais bien d'élèves "arrivants" car cette population ne coïncide que partiellement avec les élèves de nationalité étrangère.

1.2 Les incidences des conditions d'arrivée

Les **conditions d'arrivée** sont liées au regroupement familial, à la demande d'asile, l'accueil chez un membre de la famille, l'arrivée dans le cadre de contrat de travail pour les parents, le retour ou l'arrivée de Français, la venue pour soins médicaux ou l'adoption. L'école primaire est peu concernée par la venue de mineurs étrangers, arrivant seuls. Les conditions d'arrivée et le projet migratoire ont des incidences sur la stabilité ou l'instabilité du séjour et du domicile. C'est ainsi qu'on rencontre des élèves dont la famille est en procédure de demande d'asile et qui quittent brutalement l'école, du jour au lendemain, sans avoir le temps de dire au revoir à leurs camarades ni à leur professeur, soit qu'ils changent de foyer, soit que leur situation administrative évolue. Ces situations précaires compliquent le travail du soir, surtout quand l'enfant est hébergé avec sa famille à l'hôtel et qu'aucune personne francophone ne peut l'accompagner pour travailler. Enfin, on peut évoquer le maintien ou l'éclatement d'une cellule familiale quand, par exemple, des enfants arrivent dans le cadre d'un regroupement familial et découvrent un père éloigné depuis plusieurs années et une fratrie dans laquelle ils devront trouver leur place.

2 Ou 45 300 en comptant les élèves de Mayotte (chiffres de la DEPP).

3 Les 3 pays les plus représentés pour les collégiens inscrits dans les dispositifs en France étaient le Portugal, la Turquie et la Chine (KLEIN et SALLE, 2009 : 18)

Arriver dans un autre pays entraîne des confrontations et des bouleversements qui peuvent se manifester physiquement, par des maux au ventre, à la tête, de la fatigue, en réaction au climat, à la nourriture, à la longueur des journées à l'école française surtout quand on ne travaillait qu'en demi-journée. Et entendre français toute la journée, en continu, donne des migraines comme nous en ressentirions peut-être en entendant parler une autre langue, des heures d'affilée.

Les incidences peuvent être aussi d'ordre psychologique. Cécile Goï (2005) évoque le conflit de loyauté, concept inspiré des situations de divorce où l'enfant, tiraillé, ressent l'obligation de prendre parti. La langue est symbolique d'un éventuel conflit, ici entre le pays d'origine et le pays d'accueil. On rencontre des cas d'enfants en refus, consciemment ou non, de parler français pendant plusieurs mois, comme si l'entrée dans la nouvelle langue allait rompre ou trahir le lien avec le pays d'origine, la famille, le quartier. On observe aussi des mutismes sélectifs en milieu extra-familial[4] (Idris, 2005) telle que pour cette petite fille pakistanaise qui continuait sa scolarité dans un hôpital pour enfants et refusait de parler en milieu hospitalier, alors qu'elle s'exprimait chez elle, avec sa famille. Ce trouble de la communication se retrouve dans certaines situations de migration, liées ou non à un sentiment de secret familial, suivant les circonstances de départ. A l'inverse, d'autres enfants se jettent dans la langue française jusqu'à oublier leur langue d'origine, suivant un phénomène d'attrition qui conduit à un bilinguisme soustractif, c'est-à-dire le développement de compétences langagières dans une nouvelle langue au détriment d'une précédente. Les effets variables de la migration n'ont pas échappé aux psychologues, en atteste l'émergence de la clinique transculturelle, nourrie par les travaux de l'éthnopsychanalyse de Marie Rose Moro[5] notamment. Avec cette perspective, des professionnels en psychanalyse accueillent des familles en prenant en compte les dimensions culturelle, linguistique et migratoire[6].

Sur le plan sociolinguistique, remarquons que dans la sphère familiale, des parents utilisent leur langue d'origine pour les interactions privées mais aussi sociales et à l'opposé, dans la sphère scolaire, des professeurs encouragent de ne parler que français à la maison. D'une part, on voit mal l'efficacité d'apprendre à parler le français en milieu peu francophone et d'autre part, apprendre une langue seconde ne revient pas à abandonner sa langue maternelle. Mieux l'enfant maîtrise sa langue première, meilleures seront ses compétences langagières dans une autre langue.

D'après une de nos études, ces conditions d'arrivée en France et de départ du pays n'entretiennent pas de lien de causalité avec les réussites ou les échecs des élèves (Mendonça Dias, 2012). Il nous paraît toutefois important que le professeur ait connaissance de ces conditions pour prévenir les difficultés ou les irrégularités dans l'investissement personnel. Cette même étude souligne en revanche la corrélation entre les compétences scolaires initiales et les progrès ultérieurs dans l'apprentissage du français. Ces compétences initiales sont révélées par les tests organisés par le CASNAV, que nous allons détailler ci-après à la suite de la rencontre de la famille.

1.3 L'accueil de la famille

Soulignons l'importance de l'accueil de la famille (Goï, 2008 et 2011). Des exemples concernant le premier degré ont été discutés lors du colloque de l'Observatoire de l'Enfance en France qui s'est déroulé à Grenoble de 2008[7]. L'écart culturel peut être plus ou moins important, suivant l'expérience scolaire des parents (Mendonça Dias, 2010). Les informations chiffrées ne sont pas forcément les plus claires, contrairement à l'impression qu'on peut en avoir : par exemple, la classe de cinquième se situe au collège, en France, mais au Portugal, elle correspond à la 5ème année de primaire. Les notations ne sont pas toujours sur 20 : certaines sont organisées de 1 à 6, la meilleure note étant 1, etc.

---

4 http://www.cairn.info/zen.php?ID_ARTICLE=LFA_158_0058

5 http://www.marierosemoro.fr/index.php?option=com_frontpage&Itemid=1

6 Pour les enfants ayant connu des traumatismes, on peut aussi se reporter aux travaux de Cyrulnik portant sur le processus de résilience qui permet de se "reconstruire" après un événement traumatique (Cyrulnik, 1999).

7 Actes du colloque, *Travailler avec des enfants et des parents venus d'ailleurs*, Grenoble, mars 2008 [en ligne]. Disponible sur http://www.observatoiredelenfance.org/IMG/pdf/Point_sur_No8-2.pdf

Des livrets d'accueil bilingues existent[8] et l'opération *Ouvrir l'école aux parents*[9] permet d'accueillir les parents pendant quelques heures hebdomadaires sur le temps scolaire afin qu'ils étudient la langue française et soient formés sur les compétences culturelles nécessaires pour suivre la scolarité de leur enfant. En classe, on peut rapporter des projets renforçant le lien école-famille avec une perspective interculturelle : par exemple, un professeur invite les parents à lire le même conte dans leur langue d'origine[10]… L'accueil des familles est aussi réalisé en amont lors d'une évaluation initiale, avec la coordination du CASNAV, ce que nous allons maintenant commenter.

2 L'évaluation initiale par le CASNAV

2.1 Les tests d'évaluation initiale

A leur arrivée en France, les écoliers bénéficient d'une **évaluation initiale** qui devrait être "*menée par la personne nommée par l'inspecteur de l'éducation nationale, avec le concours des formateurs du Casnav*", d'après la circulaire de 2012. Le CASNAV est le Centre Académique pour la Scolarisation des enfants allophones Nouvellement Arrivés et des enfants issus de familles itinérantes et de Voyageurs. Il s'agit d'un service du rectorat, créé en 2002, en remplacement des CEFISEM qui remontent à 1976. Les formateurs du CASNAV peuvent accompagner les personnes en charge de l'évaluation initiale. Celle-ci donne des repères sur le niveau en compréhension écrite dans la langue d'origine et en mathématiques. Il existe deux types de tests pour les mathématiques : l'un traduit en plusieurs langues d'origine (dans l'ouvrage de Monique Charpentier ou réactualisé avec les nouveaux tests en ligne de l'académie d'Aix-Marseille[11]) et l'autre consiste en une évaluation non verbale, c'est-à-dire sans consignes écrites (il en existe différentes versions sur les sites des CASNAV de Lille, de la Guyane, de Strasbourg, de Grenoble et de Paris)[12]. Les résultats servent à choisir la classe d'affectation, sachant que l'élève ne peut pas avoir plus de deux ans de décalage par rapport à l'âge de référence. Ils permettent aussi de valider certaines compétences du socle. Sur le plan pédagogique, ils apportent de premiers indicateurs pour le professeur qui va le prendre en charge.

2.2 Les compétences initiales en mathématiques des écoliers venus d'autres systèmes scolaires

Les réponses apportées par les élèves aux tests sont utiles pour anticiper des difficultés en mathématiques. Certaines compétences ont été enseignées différemment, comme le procédé pour poser et résoudre des opérations : des enfants marocains rencontrés utilisaient la technique de multiplication par jalousies, dite arabe.

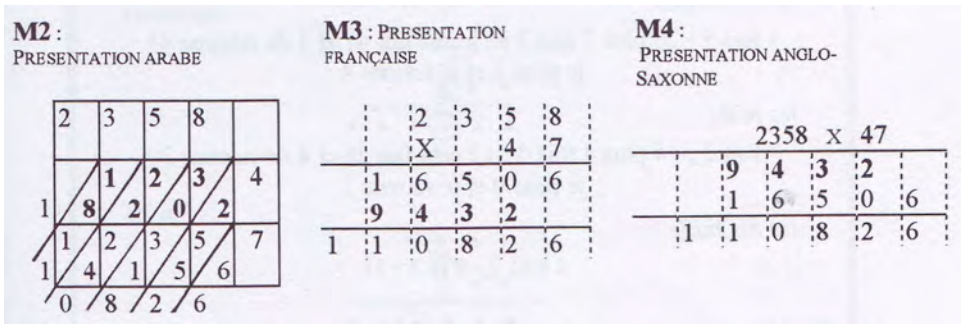
8 Ces documents sont recensés et téléchargeables à partir de : http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

9 Circulaire n° 2008-102 du 25 juillet 2008 : Opération expérimentale "*Ouvrir l'École aux parents pour réussir l'intégration*".

10 http://www.francaislangueseconde.fr/pour-la-famille/poursuivre-sa-langue-premiere/

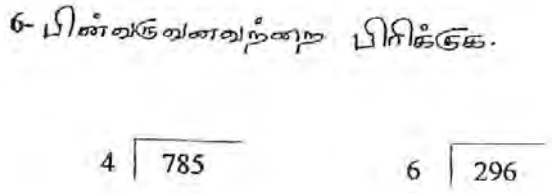
11 http://galileo.crdp-aix-marseille.fr/mathsenaf/

12 Cf. note 7.



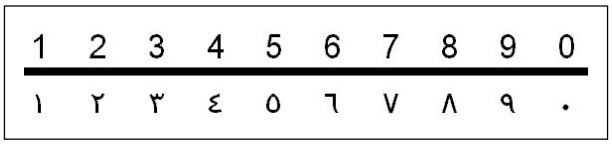
Ill. 1 - La présentation des opérations (Girodet, 1996 : 81).

La présentation peut changer comme le montrent ces divisions en tamoul où la position du dividende et du diviseur est inversée par rapport à la présentation française.



Ill. 2 - Exercice de division (Charpentier, 1995)

Les symboles ont d'autres valeurs : c'est le cas du point qui, suivant les pays, organise un nombre décimal ou ponctue les groupes de trois chiffres ou symbolise le signe de la multiplication. Les chiffres manipulés peuvent être aussi différents. C'est ainsi que des enfants iraquiens avaient l'habitude de calculer avec les chiffres utilisant l'écriture arabe. Leur professeur avait conclu qu'ils ne parvenaient pas à mener les calculs et les enfants, non francophones, ne pouvaient pas exprimer leurs difficultés, confondant le zéro avec le cinq, par exemple.



Ill. 3 – Ecritures des chiffres

Les enfants peuvent être aussi décontenancés par les énoncés des problèmes dont les références culturelles peuvent fausser leurs appréciations, par exemple lorsqu'il est fait référence à des distances entre des villes françaises ou des achats en euros. Il arrive aussi que d'autres compétences ne soient pas maîtrisées en raison des programmes scolaires : dans plusieurs pays, notamment en Afrique, la géométrie n'est pas développée au niveau primaire. A l'inverse, le programme peut être avancé par rapport au système français et c'est ainsi que des enfants russes, commençant leur scolarité obligatoire à 7 ans, ne sont pas en décalage avec leurs homologues français. L'évaluation initiale permet de faire le point sur ce qui a été étudié dans le pays d'origine et de se décentrer sur l'apprentissage, en terme de contenus (programme scolaire…) ou de gestion de la classe (enseignement à un groupe d'une centaine d'élèves, absence de matériel scientifique…).

3 L'inscription dans un dispositif

3.1 Les UPE2A

C'est dans le premier degré qu'ont été créés les premiers dispositifs, définis par une circulaire en 1970. Ainsi, en fonction du lieu de résidence et des besoins linguistiques, l'écolier peut rejoindre un **dispositif**, auparavant appelé Classe d'Initiation (CLIN) ou Cours de Rattrapage Intégré (CRI) et depuis 2012, rebaptisé dans le 1er et 2nd degrés en Unité Pédagogique pour Élèves Allophones Arrivants (UPE2A). En 2012, on comptabilise désormais 1739 dispositifs dans les écoles élémentaires. Toutefois, près d'un quart des écoliers arrivants ne bénéficie pas d'une prise en charge spécifique (nombre d'élèves insuffisants pour la création d'une UPE2A, manque de moyens…) bien que le premier degré soit apparemment mieux pourvu en dispositifs que le second degré[13].

L'UPE2A n'est pas une classe mais un dispositif : les élèves, inscrits dans une classe ordinaire, sont retirés de cours pour suivre, avec un professeur formé, un "*enseignement de français comme langue de scolarisation, quotidien et pour un temps variable (et révisable dans la durée) en fonction de leurs besoins*"[14]. Les écoliers peuvent y être inscrits à partir du Cours Préparatoire. Ils devraient y bénéficier d'un "*enseignement intensif du français d'une durée hebdomadaire de 9 heures minimum dans le premier degré*" ainsi que "*l'enseignement de deux disciplines autres que le français (les mathématiques et une langue vivante étrangère de préférence)*" (*ibid.*). Concernant l'enseignement des mathématiques, il s'agit de travailler la langue française comme "*langue instrumentale d'une autre discipline*" (*ibid.*). Or, dans les faits, bien des professeurs des écoles ne trouvent pas le temps de travailler la langue de la discipline mathématique dans le cadre de l'UPE2A : par exemple, d'après une enquête, dans 25 dispositifs en école primaire, environ la moitié ne proposait pas de cours spécifique de mathématiques (Mendonça Dias, 2012). C'est alors en classe ordinaire et dans des groupes fortement hétérogènes que se déroule l'apprentissage de la langue spécifique des mathématiques. Des formations générales sont proposées en animations pédagogiques ou à travers le plan académique de formation, sans que ne soit particulièrement abordée la question de l'enseignement des mathématiques aux élèves non ou peu francophones.

3.2 Le point sur la formation

Dans le cadre du remaniement des concours en 2013, une option FLS (Français Langue Seconde) peut être choisie au CAPES de lettres mais elle n'apparaît pas dans les nouveaux concours du CRPE. Néanmoins, depuis 2004, il existe une certification complémentaire en FLS[15]. Cette certification peut être passée par tout professeur, quels que soient sa discipline ou le cycle dans lequel il enseigne. Elle atteste de compétences acquises pour l'enseignement aux élèves allophones et est requise pour enseigner en UPE2A. De plus, suivant les académies, des professeurs des écoles sont exceptionnellement détachés au collège dans une UPE2A-NSA, pour les élèves Non Scolarisés Antérieurement (NSA), dont les compétences en mathématiques avoisinent parfois le cycle 1.

De façon plus générale, le CASNAV "*assure la formation des enseignants*" en formation continue ou initiale. La formation vise, par exemple, à déterminer les objectifs d'apprentissage individualisés et mettre en place les activités rattachées à celles du groupe classe. Toutefois, les stagiaires travaillent principalement sur la question de l'enseignement du français, indépendamment de la discipline, ce qui entretient peut-être un lien avec l'absence fréquente d'étude de la langue des mathématiques en UPE2A ou en classe ordinaire.

13 Chiffres de la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP), de 2012.

14 Circulaire n° 2012-141 du 2-10-2012, *Organisation de la scolarité des élèves allophones nouvellement arrivés.* Bulletin Officiel n° 37 du 11-10-2012.

15 Note de service du 19 octobre 2004 : *Attribution aux personnels enseignants des premier et second degrés relevant du MEN d'une certification complémentaire dans certains secteurs disciplinaires*.

III - QUEL ENSEIGNEMENT DIFFERENCIE PROPOSER POUR FACILITER LE SUIVI DES ACTIVITES MATHEMATIQUES ?

A notre avis, une meilleure connaissance des élèves permet de mieux identifier les sources des erreurs et d'anticiper les difficultés de compréhension que peut poser la langue de la discipline, au regard des compétences maîtrisées par l'élève en langue française et au vu de la polysémie des termes ainsi que de la complexité du discours. Les réponses apportées par le professeur se constituent parfois de simples gestes pédagogiques qui viennent faciliter la compréhension du discours oral et écrit. Quelques élèves rencontrent des difficultés ponctuelles liées aussi à la spécificité de la langue des mathématiques. Quelles ressources adaptées ou pour travailler l'aspect langagier peuvent alors venir en appui du professeur qui accueille des élèves allophones arrivants ?

1 Des gestes pédagogiques facilitateurs

Certains élèves essaieront immédiatement de communiquer en français, pour d'autres il faudra de longues semaines avant qu'ils n'osent ou ne puissent s'exprimer en français. L'enseignant doit faire preuve de patience et de bienveillance, du moins c'est ce qui ressort d'une observation d'une séance en mathématiques, observation portée par une équipe roumaine sur une vidéo française dans le cadre d'un projet international Culture d'Enseignement – Culture d'Apprentissage (CECA)[16]. Les observateurs relèvent que l'enseignant "*s'approche de chaque élève pour mieux l'entendre […] travaille alternativement avec tout le groupe et avec chaque élève […] respecte plus que tout autre le rythme de travail de chaque élève*". Par ailleurs, "*les consignes de l'enseignant sont clairement exprimées, d'une voix calme et amicale. Elles sont répétées lorsque l'enseignant considère qu'il est nécessaire*". Instaurer des rituels dans la communication et s'adresser à l'élève lui laissent la possibilité de parler quand il s'en sentira capable. Une étude universitaire en cours, menée par Elisabeth Faupin (2013), montre que des élèves sont mutiques en classe entière ou en insécurité linguistique quand on les interroge, mais qu'ils prennent plus facilement la parole avec leurs pairs, lors d'activités de groupe. L'auteur met en évidence la complexité pour comprendre les interactions en classe en raison du nombre d'interlocuteurs, des ruptures énonciatives, des digressions, des phrases en suspens du professeur qui attend les réponses des élèves… Voici un extrait des enregistrements qu'elle a menés en cours de mathématiques avec des élèves de 6ème dont quatre sont arrivés depuis moins de deux ans en France :

Professeur : alors / c'est l'exercice [*5s*] 45 page 197 [*6s : bavardages*] celui-là là la bonne phrase [*9s : bavardages*] chu:t /// alors / qui veut bien lire l-la consigne de cet exercice là euh Fad
Fad : la bonne phrase / dans chaque cas déchiffre euh
Un élève : décris>
Un autre élève : je vais faire un modèle
Professeur : décris pas déchiffre
Fad : pardon
Professeur : dans chaque cas / décrire la figure ci-dessous petit a
Fad : en utilisant le mot euh médiatrice
Professeur : petit b
Fad : en utilisant le mot symétrique // en utilisant ni le mot / médiatrice ni le mot symétrique
Professeur : // alors euh je vais vous laisser deux minutes là vous réfléchissez / vous regardez la figure / vous réfléchissez
Un élève : madame on redessine>
Professeur : non alors vous euh est-ce que vous devez la dessiner<
La classe : non non
Le même élève : je croyais que
Professeur : vous devez la décrire / vous devez dire ce que vous voyez
Un élève : elle est belle [*rires*]

16 http://ceca.auf.org/

Professeur : alors chut dans le petit a chut arrêtez de discuter / alors stop / stop / le petit a vous devez la décrire en utilisant le mot médiatrice / petit b en utilisant le mot / symétrique et petit c donc SANS le mot symétrique SANS le mot / médiatrice **[…]**

Une autre élève : j'ai pas compris<

Quand l'élève est assis près du professeur, celui-ci peut l'aider par sa gestualité ou en désignant de la main successivement les questions a, b et c de l'exercice. Les interactions en classe sont souvent nombreuses. Et le professeur de se tourner vers les uns et les autres, voire le tableau et le manuel, tout en prenant la parole, ce qui fait parfois perdre en audibilité. En plus, ces échanges sont rapides et parcellaires dans la mesure où bien des interlocuteurs n'élaborent pas de phrases complètes. Or, lorsqu'on ne comprend pas la langue, le débit de parole doit être ralenti et bien articulé. L'élève qui commence à se constituer son bagage linguistique est plus fortement soumis au phénomène d'homonymie : "sans" peut être entendu comme "cent", de même "déchiffre" comme "des chiffres", dans le contexte du cours de mathématiques. De même, le phénomène polysémique peut altérer sa compréhension : ainsi, le terme "*figure*" est différent suivant qu'il s'agit d'un cours de mathématiques ou d'arts plastiques. Quant au verbe "*décrire*", il sous-tend différentes tâches suivant qu'on se situe en cours de français, d'arts plastiques, de sciences ou de technologie (Zakhartchouk, 1999 : 41-42). La reformulation est censée faciliter la compréhension or, ici, le professeur synthétise et les énoncés se complexifient. L'enseignant peut s'appuyer sur le Cadre Européen Commun de Référence pour les Langues (CECRL) pour obtenir des repères linguistiques en français. Par exemple, pour un élève débutant, on privilégiera le temps du présent, la phrase simple ou éventuellement coordonnée avec "et" ou "mais", des mots plutôt concrets, rattachés au quotidien de l'enfant. On évitera l'usage de pronoms personnels dont le référent est implicite ou des tournures compliquées (gérondif…) de plus en plus elliptiques, comme le fait le professeur enregistré. On n'hésitera pas à répéter. Voici une reformulation possible du discours du professeur :

"le petit a vous devez la décrire en utilisant le mot médiatrice / petit b en utilisant le mot / symétrique et petit c donc SANS le mot symétrique SANS le mot / médiatrice"

>

"Exercice 45 [*le professeur désigne l'exercice avec le doigt, si possible directement sur le manuel de l'élève, et il écrit n° 45 au tableau]* : tu ÉCRIS [*le professeur mime l'acte d'écrire*] / sur ton cahier [*le professeur montre l'endroit sur le cahier où il faut écrire*] // la description / de la figure [*le professeur désigne du doigt la figure et la montre visiblement*] / la figure [*le professeur laisse le temps à l'élève de regarder la figure*] / petit a [*le professeur désigne le petit a du doigt et il écrit a sur le tableau]* tu utilises le mot médiatrice *[le professeur écrit "la médiatrice" à droite de "a" sur le tableau*] petit b [*le professeur désigne le petit b du doigt et il écrit b sur le tableau*] tu utilises le mot symétrique [*le professeur écrit "symétrique" à droite de "b" sur le tableau*] petit c [*le professeur désigne le petit c du doigt et il écrit c sur le tableau*] tu n'utilises PAS le mot médiatrice et tu n'utilises PAS le mot symétrique [*le professeur fait "non" de la main et il écrit "la médiatrice" et "symétrique" à droite de "c" sur le tableau, puis il barre les mots*]".

On le voit, le temps didactique est ralenti par un étayage plus ou moins important dont l'écueil est toutefois "*l'assistanat*" (Millon-Fauré, 2011 : 475). Pour certains mots, il peut être nécessaire d'utiliser un dictionnaire ou des lexiques[17]. Les résultats au test initial auront peut-être révélé si les notions de "médiatrice" et de "symétrie" sont acquises. Le cas échéant, il s'agira de traduire et pour faciliter l'annotation, des enseignants fournissent une photocopie du manuel à l'élève pour qu'il puisse écrire dessus. Des exercices préalables de vocabulaire sont parfois nécessaires (exercices d'appariement, légender une image…).

En réalisant l'activité, l'élève peu francophone va repérer les mots clés mais il ne sera pas en mesure de produire un écrit très élaboré. Le décalage entre ses compétences linguistiques et les attentes de l'enseignant risque parfois de le conduire à un "*refoulement didactique*", tel que le pointait Karine Millon-Fauré (2011). Progressivement, l'élève va cependant entrer dans l'activité, au début en travaillant par mimétisme : mieux vaut alors qu'il soit assis à côté d'un camarade en réussite scolaire qui réalisera la tâche plus rapidement et sera disponible pour éventuellement l'aider. Si le vocabulaire est nouveau,

17 Cf. note 7.

l'élève doit être amené à le prononcer, pour en faciliter la lecture (la relation grapho-phonologique étant parfois obscure), stimuler la mémorisation (mémoire auditive), faciliter la compréhension du discours oral et permettre l'expression orale de l'élève. La lecture oralisée est souvent une activité qui peut être rapidement menée par un élève peu francophone, à défaut d'intervenir dans les interactions orales, faute de compétences linguistiques suffisantes.

A titre de repères, un apprenant ne peut mémoriser que quelques mots nouveaux par séance, or les échanges sont denses et le vocabulaire abondant, c'est pourquoi le professeur guide pour aider l'élève à circonscrire le vocabulaire sur lequel travailler. On retrouve les mêmes contraintes à l'écrit où il s'agit de limiter la charge cognitive (nombre de mots, longueur de texte, nombre d'activités, organisation des exercices en difficultés croissantes).

2 Quelques remarques sur la maîtrise de la langue en mathématiques

Les élèves développent plus ou moins rapidement des compétences en langue française. Pourtant, avec quelques rudiments, certains parviennent à se débrouiller en mathématiques. Comme l'auteur de *L'âge du capitaine*[18], Stella Baruk, l'avait révélé, des élèves, parfois « *automathes* », n'ont pas toujours besoin de comprendre l'énoncé pour chercher la solution aux problèmes, en s'appuyant sur leurs expériences, les règles du contrat didactique (Brousseau, 1984) et en déduisant les attendus du calcul grâce à quelques mots clés compris. Les recherches de Karine Millon-Fauré ont pu confirmer ce "transfert" de compétences en ce qui concerne les élèves peu francophones :

> *« […] lorsque des élèves migrants apprennent la langue spécifique aux mathématiques dans un pays d'accueil, ils peuvent appuyer leurs apprentissages sur leurs connaissances dans la langue spécifique aux mathématiques acquises dans leur pays d'origine (à condition que leurs connaissances dans cette langue soient suffisamment solides) : il n'est pas indispensable pour eux de passer par la langue usuelle du pays d'accueil. » (Millon-Fauré, 2011 : 569).*

A l'inverse, une inspectrice académique en mathématiques, Janine Reynaud, pointait aussi que les difficultés en mathématiques relevaient parfois davantage de difficultés scolaires plutôt que linguistiques :

> « […] *des compétences fragiles en français n'entravent pas nécessairement la réussite en mathématiques et quand des difficultés se présentent dans cette discipline, elles sont souvent liées à un manque de connaissances en mathématiques dans la langue d'origine. »*[19].

Pour illustrer le "*manque de connaissances*" évoqué par Janine Reynaud, nous pouvons prendre l'exemple de Demba. Le jeune garçon, de langue wolof, a été scolarisé au Sénégal en langue française, langue qu'il manipule dans son quotidien, mais il n'en maîtrise pas le vocabulaire ni les discours quand il s'agit des mathématiques. Ainsi, quoique francophone, il rencontre plus de difficultés que d'autres camarades nouvellement arrivés qui ont une maîtrise moindre de la langue française mais des compétences supérieures en mathématiques. Dans ses recherches, Karine Millon-Fauré a mis en évidence l'absence de lien direct entre la maîtrise de la langue usuelle et celle des compétences langagières nécessaires aux activités mathématiques mais elle observait que les cours de mathématiques ne remédiaient pas aux besoins langagiers des élèves :

> "*Chez la plupart des élèves migrants, les cours de mathématiques ordinaires ne suffisent pas pour acquérir rapidement les compétences langagières indispensables aux apprentissages dans cette discipline*" (Millon-Fauré, 2011 : 481).

---

18 Le problème suivant a été proposé à 97 élèves de CE1 et CE2 : "Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?". Sur ces 97 élèves, 76 ont donné une réponse en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé : 26 ans ou 10 ans.

19 Entrées n° 9, *Aborder les mathématiques*, Centre Michel Delay, janvier 2006.

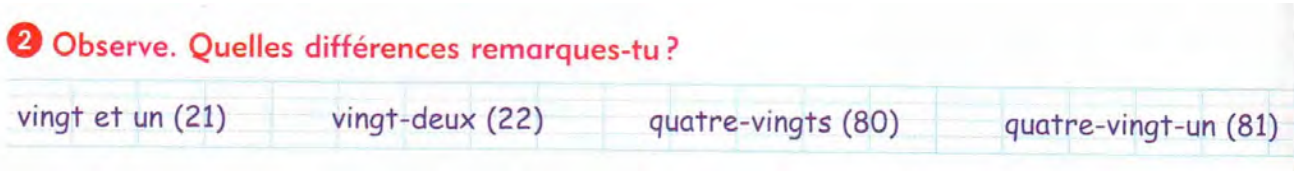
On peut supposer qu'un travail spécifique sur la langue des mathématiques peut aider les élèves à construire les compétences attendues dans le cours de mathématiques. Fatima Davin-Chnane concluait, à l'issue de l'observation de cours de mathématiques avec des élèves allophones :

> "*Si on ne prend pas en charge le problème langagier, y compris le vocabulaire sur les mathématiques, les élèves se sentent abandonnés et livrés à eux-mêmes. Dans ce dernier cas, ils abandonnent à leur tour et rompent le contrat didactique.*" (Davin-Chnane, 2005 : 325).

Nous allons donc évoquer quelques propositions d'activités pour travailler la langue de la discipline.

3 Des activités autour de la langue de la discipline "mathématiques"

En début d'année, le travail sur la langue des mathématiques débute souvent avec l'apprentissage des fournitures scolaires propres à la discipline (compas, équerre…) et des nombres. Ces derniers offrent l'avantage de la récurrence lexicale, avec ses 26 mots (Girodet, 1996 : 21), récurrence toute relative car le bambara n'en compte que la moitié (*ibid.* : 40). De plus, l'écriture d'un nombre présente une certaine bizarrerie : « *la numération française pour un nombre tel que cent-quatre-vingt-dix-sept relève d'une grande complexité à laquelle l'adulte natif n'est plus sensible […] On entend 100/4/20/10/7 et on doit écrire 197* »[20], constate Chantal Rouilleault, du Centre académique Michel Delay. Celle-ci met alors en évidence la difficulté de l'apprentissage des nombres en français et propose plusieurs options pédagogiques : travail réflexif, recours au lexique belge (septante, huitante…) et activités ludiques. Les auteurs de la méthode d'apprentissage du français par les collégiens nouvellement arrivés, *Entrée en matière*, ont prévu pour chaque séquence une page intitulée *D'une matière à l'autre* qui propose des exercices allant dans ce sens. A titre d'exemple, voici un exercice d'observation sur les nombres :



Ill. 4 - Exercice extrait de *Entrée en matières* (2005).

La mémorisation des nombres passe par toutes sortes d'activités (loto, bataille navale, activités sur des sites internet[21]…), mais nécessite aussi une réflexion pour comprendre le fonctionnement des nombres français. Le processus est différent de l'apprentissage des nombres par un enfant natif : les enfants allophones savent (pour la plupart) compter et dénombrer dans leur langue, ils connaissent les bases opératoires attendues pour leur classe d'âge, mais ils ne sont pas en mesure de comprendre le discours ou les consignes. Il s'agit alors d'assurer le transfert de ce qu'ils connaissent dans leur langue vers la langue cible, le français. C'est ainsi que le professeur peut proposer des exercices répétitifs comme ci-dessous, en privilégiant la consigne a) puisque dans les situations authentiques de cours, c'est davantage la réception orale des nombres qui posera problème aux élèves peu francophones plutôt que la production écrite des nombres en toutes lettres, qui relève plutôt de la discipline "français" :

" a) **Ecris en chiffres.** Quatre plus trois égale sept > …….
b) **Ecris en toutes lettres.** 4 + 3 = 7 > …….....

20 *Ibid.*

21 http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

c) **Complète puis écris en toutes lettres.** 4 + 3 = … > ……..…….... "

Comme nous l'avons vu précédemment, les interactions en classe sont denses, digressives et polyphoniques. A la lumière de ses recherches, Elisabeth Faupin a proposé de travailler à partir de dialogues pédagogiques (Faupin, 2013). Elle transcrit et adapte donc les enregistrements de classe pour créer un dialogue authentique exploitable en classe. En voici l'exemple qu'elle propose, à partir de l'enregistrement précédemment commenté :

Le prof	Alors, c'est l'exercice 45 page 197 ! Celui-là, la bonne phrase. Alors, qui veut bien lire la consigne de cet exercice ? Euh Fad !
Fad	*(Il lit)* La bonne phrase. Dans chaque cas, déchiffre, euh…
Le prof	Décris, pas déchiffre !
Fad	Pardon
Le prof	*(Le prof lit)* Dans chaque cas, décrire la figure ci-dessous. Petit a ?
Fad	(Reprend la lecture) En utilisant le mot médiatrice.
Le prof	Petit b ?
Fad	En utilisant le mot symétrique. Petit c, en n'utilisant ni le mot médiatrice, ni le mot symétrique.
Le prof	Alors, je vais vous laisser deux minutes. Vous réfléchissez, vous regardez la figure, vous réfléchissez.
Eric	Madame, on redessine ?
Le prof	Non, alors, est-ce que vous devez la dessiner ?
Classe	Non, non !
Le prof	Vous devez la décrire. Vous devez dire ce que vous voyez.
Julie	J'ai pas compris.

Le support permet de travailler les compréhensions et les productions orales et écrites. Des enseignants utilisant la baladodiffusion préenregistrent le texte avec le logiciel Audacity. Il existe aussi des logiciels de synthèse vocale qui permettent d'entendre le texte tapé sur l'interface du logiciel (par exemple, Dspeech[22]). Les supports peuvent trouver des réinvestissements à travers les jeux de rôle.

D'autres approches pédagogiques conduisent à manipuler le vocabulaire et les expressions étudiées en cours de mathématiques. Les figures téléphonées se prêtent bien aux séquences de géométrie puisqu'elles contraignent l'élève à s'exprimer à l'oral – comme s'il était au téléphone – pour donner des indications ou des consignes à un camarade, afin de lui faire reproduire une figure, par exemple. L'activité implique de parler en continu, ce qui est indispensable dans les compétences attendues mais peu travaillé en cours par les élèves allophones. La narration de recherches permet aussi à l'élève de raconter, avec ses propres mots et librement, à la première personne, le cheminement suivi pour résoudre les tâches en mathématiques. La trace écrite qui est construite lui offre un support lisible pour un apprentissage réflexif. Toutefois, peu francophone, l'élève aura besoin d'aide pour élaborer son récit, aide qui pourrait être apportée à travers un récit collectif en groupe ou une dictée à l'adulte. Enfin, les projets conduisent à manipuler la langue des mathématiques sans que cela soit une finalité en soi. On peut rapporter le projet entre deux classes de maternelle et une UPE2A de collège. Les élèves ont travaillé autour du thème "*Formes et couleurs*", ce qui a conduit à des échanges pour la création d'un album et la conception d'une exposition commune inspirée par les œuvres de Kandinsky et de Mondrian[23].

4 Les ressources pour des activités différenciées en mathématiques.

Il n'y a pas de programme scolaire pour l'UPE2A d'autant que les élèves réunis appartiennent à différents cycles : des enfants de CE1 peuvent être mélangés avec ceux de CM2. Qui plus est, en fonction

22 Dspeech est téléchargeable. On peut aussi utiliser en ligne : http://text-to-speech.imtranslator.net/speech.asp?url=WMfl&dir=fr&text

23 Retrouvez le projet et les productions en ligne : http://www.francaislangueseconde.fr/upe2a/album-madame-monsieur/

de leurs compétences initiales et leur parcours scolaire antérieur, les niveaux peuvent être très hétérogènes. Aussi, la différenciation s'impose en UPE2A et en classe ordinaire car les compétences ne correspondent pas forcément à celles attendues dans le cycle de rattachement. Afin de faciliter le travail, des enseignants ont élaboré des activités plus adaptées sur le plan linguistique mais aussi formel. Ces fiches concernent plutôt le collège (le site internet de Paul Byache, des livrets d'activités élaborés par Karine Millon-Fauré…[24]). Sur sa page consacrée au français langue de scolarisation, Eduscol met à disposition les séquences de remise à niveau élaborées par le CNED, du cycle 2 au cycle 3. On se rend compte que les fiches d'exercices en mathématiques se distinguent peu de celles de classe type : la présentation est plus aérée, les éléments parasites supprimés, les consignes plus laconiques éventuellement et les propositions ne suivent pas le programme d'une seule année scolaire.

D'autres ressources, ici plus spécifiques au fait d'être non ou peu francophones, sont accessibles à partir du portail *lepointdufle.net*. Ce site regroupe les liens pointant vers des pages de "français langue étrangère" (FLE). Il existe une rubrique "mathématiques"[25] intéressante en début d'apprentissage car les sites recensés proposent parfois un enregistrement sonore (signalé par l'icône d'un haut-parleur) ce qui permet aux élèves de travailler à leur rythme avec le support oral pour apprendre les nombres par exemple (dictée de nombres obtenus par des additions à résoudre…) ou du vocabulaire en géométrie. La possibilité d'écouter et réécouter facilite la compréhension et la mémorisation d'autant plus s'il y a des supports visuels. De même, de courtes vidéos pédagogiques conçues pour les écoliers natifs peuvent être profitables comme celles mises en ligne par Canopé[26] qui, de façon ludique, illustrent des leçons abordées en classe.

Enfin, il existe peu de littérature sur l'enseignement des mathématiques aux élèves allophones. Le seul ouvrage conçu explicitement pour les élèves allophones arrivants (Blanchard, Desmottes et al., 2004) vise le second degré. Mais est-ce que des ressources spécifiques sont vraiment nécessaires pour enseigner les mathématiques à un élève non ou peu francophone ? Nous avons vu quelques gestes simples, voyons maintenant dans quelle mesure des projets peuvent être mis en œuvre pour le profit de l'élève allophone mais aussi de ses pairs, natifs de France.

IV - QUELS PROJETS EN CLASSE POUR FAVORISER L'APPRENTISSAGE DE LA LANGUE DE LA DISCIPLINE ?

1 S'appuyer sur la langue d'origine

Pour construire des compétences dans une langue seconde, nous nous appuyons sur notre langue première, en déduisant, inférant, vérifiant. Les écoliers scripteurs s'interdisent généralement d'écrire les traductions des mots dans leur cahier. Pourtant, à la fin de la journée, après plusieurs traces écrites dans différentes disciplines, un élève mélange, oublie, hésite à savoir à quelle figure géométrique réfère le signifiant "rectangle" alors qu'il ne fait pas la confusion dans sa langue. Un autre ne se rappelle plus si le mot qu'il déchiffre dans la consigne signifie "souligne", "entoure" ou "barre". Le recours à la langue première, nécessaire, ne peut avoir lieu qu'avec l'accompagnement du professeur qui l'autorise, voire l'exploite au profit de toute la classe, comme le propose la démarche pédagogique de Nathalie Auger (2005) et que l'on retrouve dans les vidéos de classe tournées en école élémentaire[27].

24 Accessibles à partir de : http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

25 Il faut sélectionner dans le menu déroulant de gauche "publics spécifiques" puis "alpha mathématiques" : http://www.lepointdufle.net/maths_savoirs_de_base.htm

26 Les vidéos peuvent être télécharger avec le sous-titre et s'accompagnent d'une fiche pédagogique : http://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux//discipline/mathematiques.html

27 Extrait vidéo sur : http://www.cndp.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=481293

Dans notre pratique, nous utilisons des dictionnaires. Des lexiques bilingues sur les mathématiques ont été conçus et pour les plus jeunes, quelques imagiers ont été élaborés. Ces derniers peuvent être réalisés par les élèves eux-mêmes, sous forme d'imagiers numériques sonores, sur un support numérique de type Didapages.

2 Les éthnomathématiques et la perspective interculturelle

En 2009, un texte européen pointe le phénomène de déperdition touchant les compétences initiales des élèves allophones arrivants :

> « […] *les talents des enfants de migrants ne sont souvent pas découverts et restent inutilisés [ce qui] engendre des désavantages sociaux, culturels et économiques pour la société dans son ensemble.»*[28]

Effectivement, tandis que le prisme des programmes scolaires attire davantage sur ce qui n'est pas maîtrisé, à savoir la langue française et diverses compétences en mathématiques (en géométrie…), d'autres connaissances et savoir-faire ne sont pas repérés ou mis en valeur, tel que le plurilinguisme ou des compétences antérieures dans les disciplines. Dans un contexte scolaire multiculturel, les éthnomathématiques ouvrent la voie à une pédagogie ponctuelle qui intègre des pratiques issues de différentes cultures, dans la perspective d'être représentative de la diversité des élèves et de construire la réflexion sur les pratiques quotidiennes des mathématiques. Toutefois, rares sont les ressources proposant des activités allant dans ce sens. Eduscol consacre une page sur son site[29] et le Comité International des Jeux en Mathématiques a récemment créé des "livrets jeux"[30].

La démarche interculturelle (Abdallah-Pretceille, 2013) peut aussi motiver les élèves, dans la mesure où elle nécessite que chaque élève fasse appel à sa culture pour travailler collectivement sur une tâche commune. Nous rapportons une courte séquence mathématiques-français, au collège, portant sur le produit en croix. Dans une première étape, les élèves devaient trouver combien de M&M's ils pouvaient obtenir avec 1 €.

Compléter le tableau en faisant plusieurs produits en croix :

Nombre de m&m's	Poids des m&m's	Prix
1	0.915 g	
	1000 g	7,68 €
		1 €

Ill. 5 – Exercice 1 sur les produits en croix

Puis, la tâche consistait à savoir combien de M&M's il était possible d'acheter avec une pièce de monnaie, suivant les pays d'origine. Les élèves étaient amenés à faire des conversions, puis des calculs en croix à partir du tableau suivant, tableau complété avec l'argent des pays d'origine sur ce modèle :

28 *Résolution du Parlement Européen du 2 avril 2009 sur l'Education des enfants des migrants (2008/2329 INI)*

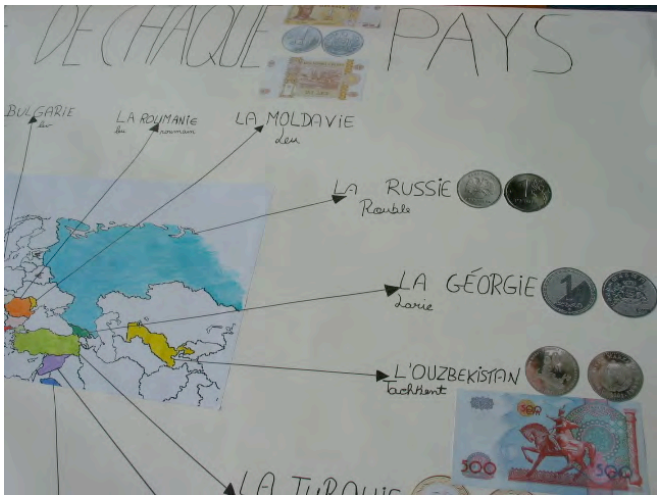
29 http://culturemath.ens.fr/dossiers/ethnomath%C3%A9matiques-202

30 http://www2.cijm.org/salon/133-livrets-jeux

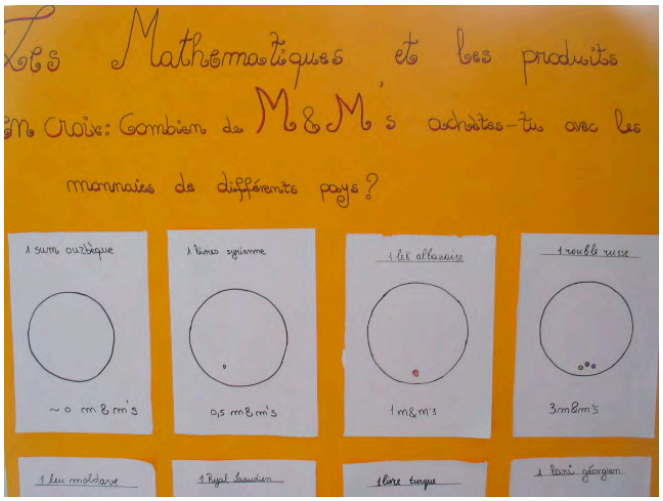
Argent	Monnaie	Nombre de m&m's
1 euro	1 euro	142
0.730149 €	1 dollar	
0.00720946 €	1 yen	
0.0529456 €	1 leu moldave	

Ill. 6 – Exercice 2 sur les produits en croix

Les résultats étaient présentés à travers la réalisation d'un planisphère et d'un affichage, qui a donné lieu à une présentation orale. Le travail mené en classe a alors été valorisé. Un questionnaire d'appréciation a été soumis ensuite et il est ressorti que les élèves s'étaient intéressés à cette séquence du fait qu'ils avaient pu faire découvrir un élément de leur pays d'origine et discuter des pays des autres.



Ill. 7 - Planisphère des monnaies



Ill. 8 – Affiche sur les M&M's

Dans ce projet, l'ouverture interculturelle se situe au niveau de la thématique. On pourrait imaginer une entrée similaire en calculs sur le thème des décalages horaires, des distances géographiques, des densités, liés aux pays d'origine… ou en géométrie, à travers la réalisation stylisée des drapeaux, un travail de symétrie inspiré par les masques de cérémonies ou de fêtes… Les éléments historiques tels que l'usage du boulier, la création du zéro, les grands mathématiciens… permettent aussi de prendre en compte la diversité et l'enrichissement mutuel dans la construction de la culture mathématique.

V - CONCLUSION

Dans ce colloque qui visait à faire le point sur les "*ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire*", nous avons essayé de faire le tour de l'existant concernant les écoliers allophones. Il ressort que peu d'outils et de ressources existent. Par ailleurs, beaucoup de professeurs n'abordent pas la question de la langue quand leur enseignement concerne les mathématiques, faute de temps ou de formation. Toutefois, les propositions apportées ici correspondent à des gestes simples, facilitant les interactions orales et écrites, et une harmonisation avec le rythme d'apprentissage, suivant les indicateurs du Cadre Européen Commun de Référence pour les Langues. Certaines propositions sont spécifiques aux élèves allophones, liées à leur découverte de la langue française et leur situation inédite d'arrivée en France, mais nombre d'entre elles sont transférables pour des élèves natifs.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ABDALLAH-PRETCEILLE M. (2013) *L'éducation interculturelle,* PUF, Que sais-je ?

Actes du colloque, *Travailler avec des enfants et des parents venus d'ailleurs*, Grenoble, mars 2008. http://www.observatoiredelenfance.org/IMG/pdf/Point_sur_No8-2.pdf

AUGER N. (2005) *Comparons nos langues. Démarche d'apprentissage du français auprès d'Enfants Nouvellement Arrivés (ENA)* [DVD vidéo] Montpellier : CRDP Académie de Montpellier.

BLANCHARD M., DESMOTTES D. et alii (2004) *Enseigner les mathématiques à des élèves non francophones. Des outils français-maths.* SCEREN, CRDP, Cahiers de Ville Ecole Intégration, Académie de Créteil.

BONAFE F. (coord.) (2002) *Les narrations de recherche, de l'école primaire au lycée*, co-édition IREM et APMEP.

BOYZON-FRADET D. (1997) "Enseigner/apprendre la langue scolaire, un enjeu fondamental pour les enfants issus de l'immigration", *Migrants Formation*, n° 108.

BROUSSEAU G. (1984) "Le rôle central du Contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations" [en ligne]. Disponible sur http://guy-brousseau.com/2332/le-role-central-du-contrat-didactique-dans-l%E2%80%99analyse-et-la-construction-des-situations-1984/

BYACHE P. (2013) *Témoignage : cours de mathématiques-FLS en classe d'accueil*, IREM n° 90, pp. 65-80.

CASTELLOTTI V. (2001) *La langue maternelle en classe de langue étrangère*, Paris : CLE International.

CERVONI B., DAVIN-CHNANE F., FERRREIRA-PINTO M. (2005) *Entrée en matière. La méthode de français pour adolescents nouvellement arrivés,* Vanves, Hachette FLE.

CHARPENTIER M., TWINGER J. (1995) *Mieux connaître pour mieux scolariser : tests de mathématiques en 27 langues*, Inspection académique de Strasbourg, ONISEP Alsace.

Circulaire n° 2012-141 du 2-10-2012, *Organisation de la scolarité des élèves allophones nouvellement arrivés*. Bulletin Officiel n° 37 du 11-10-2012.

DAVIN-CHNANE F. (2005), *Didactique du FLS en France : le cas de la discipline « français » enseignée au collège*. Villeneuve d'Ascq : Diffusion ANRT.

DAVIN-CHNANE F. (dir.) (2011) *Le français langue seconde en milieu scolaire français, Le projet CECA en France*, PUG Langues étrangères.

DESMOTTES D. (2009) "En classe d'accueil, faire du français en maths" in Cahiers Pédagogiques, *Enfants d'ailleurs, élèves en France*, n° 473.

FAUPIN E. (2013) "Des élèves allophones nouvellement arrivés au collège : comment les préparer à participer aux interactions didactiques en classe ordinaire ?", Actes du congrès AREF (Actualité de la Recherche en Education et en Formation), Montpellier [en ligne]. Disponible sur : http://www.aref2013.univ-montp2.fr/

FRANCOLS N. (2009) *Relation parents-professeurs*, Entrées, Bulletin d'échanges pour la scolarisation des nouveaux arrivants et des enfants du voyage, n° 23, Centre Michel Delay, académie de Lyon.

GOÏ C. (2011) "Relations école et Parents en situation interculturelle", IUFM de Chambéry, 29 septembre 2011. Disponible en ligne sur : http://www.ac-grenoble.fr/casnav/Espace_enseignant/articles.php?lng=fr&pg=918&prt=2

GOÏ C. (2008) "Élèves nouvellement arrivés en France et parents allophones : construire le lien entre l'école et la famille", Cahiers Pédagogiques n° 465, *Écoles et familles*.

GIRODET M.-A. (1996) *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes du calcul*. CREDIF essais.

IDRIS I. (2005) « Du culturel au thérapeutique : la vulnérabilité spécifique des enfants de migrants comme outils de réussite », *Les Conférences du CASNAV*, Académie de Paris, Tome 3, recueil des actes 2004 à 2005.

IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, coll. Bouquins.

Entrées n° 9 (2006) *Aborder les mathématiques*, Centre Michel Delay.

KLEIN, C. & SALLE, J. (2009) *La scolarisation des élèves nouvellement arrivés en France.* Paris : Ministère de l'Éducation Nationale, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

MENDONÇA DIAS, C. (2010) « La décentration dans l'accueil des parents : l'exemple des parents nouvellement arrivés en France », dans Madiot P. (coord.), *L'école et les parents au collège et au lycée*, Repères pour agir.

MENDONÇA DIAS, C. (2012) *Les progressions linguistiques des collégiens nouvellement arrivés en France.* Villeneuve d'Ascq : Diffusion ANRT.

MILLON-FAURE, K. (2011) *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants.* Thèse de doctorat, dir. d'A. MERCIER, Univ. Aix-Marseille I.

MORO, M.-R. (2002) *Enfants d'ici venus d'ailleurs. Naître et grandir en France*. Paris : La Découverte.

POLACK B. (2010) *Apprentissage intégré de la langue seconde et des mathématiques pour les élèves nouvellement arrivés en classe d'accueil*, master 2, dir. V. DE NUCHEZE, Université de Grenoble 3, Sciences du langage.

RAFONI J.-C. (2000) *Maths sans paroles*. CRDP de l'Académie de Versailles, CDDP des Hauts-de-Seine.

ZAKHARTCHOUK J.-M. (1999) *Comprendre les énoncés et les consignes*. CRDP.

MALLETTE DE RESSOURCES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE, CYCLE 1 – CYCLE 2

Lætitia BUENO-RAVEL
MCF, ESPE de Bretagne
CREAD (EA 3875)
laetitia.bueno-ravel@espe-bretagne.fr

Pierre EYSSERIC
PRAG, ESPE d'Aix-Marseille
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Gwenaëlle RIOU-AZOU
PRAG, ESPE de Bretagne
gwenaelle.riou-azou@espe-bretagne.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE
MCF, Institut Français de l'Education
S2HEP
sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr

Résumé
Cette communication présente une ressource « mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 – cycle 2 » conçue dans le cadre d'un projet impulsé par le Ministère de l'Éducation Nationale française et associant des équipes de recherche de la COPIRELEM, de l'IFE et du CREAD[1]. Face à l'ensemble important des ressources existantes, une partie du travail a consisté à effectuer une sélection de ces ressources (par exemple *Le jeu des voyageurs*, extrait d'ERMEL GS, le *boulier virtuel* Sésamath[2], etc.) ainsi qu'à les retravailler pour les rendre directement utilisables en classe par les enseignants en les accompagnant de recommandations précises et en explicitant et illustrant les situations proposées. Une autre partie du travail s'est centrée sur la conception de ressources nouvelles informatisées, associées à du matériel manipulable : logiciels pour le nombre en maternelle, e-pascaline, boulier virtuel paramétrable.
Nous commencerons par présenter les principes d'apprentissages sous-jacents à la sélection et l'élaboration des ressources des deux mallettes en voie de finalisation. Nous détaillerons ensuite la structure et le contenu de chacune des mallettes avant de conclure sur les conditions nécessaires à l'appropriation de ces ressources par les enseignants, afin qu'ils puissent les intégrer dans le cadre de l'exercice quotidien de leur métier.

Le projet « mallettes mathématiques pour l'école primaire » est issu d'une demande de la DGESCO de juin 2011. Il repose sur l'hypothèse, attestée par de nombreux travaux, de l'importance de la manipulation directe d'objets tangibles, dans un contexte de résolution de problèmes, pour soutenir les premiers apprentissages mathématiques, qui sont des apprentissages fondamentaux. Le projet privilégie, à chaque fois que faire se peut, la manipulation conjointe de duos d'artefacts, ou d'artefacts duaux, « logiciel » et « matériel ».

[1] COPIRELEM : Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire ; CREAD : Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique (EA 3875) ; IFE : Institut Français de l'Éducation.

[2] http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf (consulté le 17 septembre 2014).

Par ailleurs, dans un moment de foisonnement de ressources, le projet vise le rassemblement en une même entité, une « mallette », d'un ensemble d'outils et de situations d'usage, accompagné de recommandations et d'illustrations soutenant l'appropriation par le professeur et la mise en œuvre dans le cadre de la classe.

Le projet repose sur la collaboration de l'IFÉ (rassemblant le pôle CREAD à Rennes et le pôle EducTICE à Lyon) et de la COPIRELEM. Les ressources du projet se sont développées dans trois contextes : en Rhône-Alpes autour de l'équipe EducTICE de l'IFÉ, en Bretagne avec la contribution du CREAD et à la COPIRELEM avec des équipes de Bordeaux, Aix-Marseille et Toulouse. Les travaux ont débouché sur la production de deux mallettes :

- une première mallette autour de la construction du nombre en MS et GS[3] qui :
  - reprend diverses situations de référence autour du nombre, les revisite pour favoriser leur appropriation par les enseignants ;
  - propose des logiciels associés à certaines de ces situations (MARENE)[4] ;
  - présente, pour certains aspects du nombre, quelques situations nouvelles mettant en avant l'utilisation du jeu dans les apprentissages, le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, la place d'une pédagogie de projet à l'école maternelle.
- une deuxième mallette centrée sur l'expérimentation de situations d'apprentissage utilisant des instruments mathématiques :
  - la pascaline avec des ressources articulant matériel et logiciel pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul au CP et au CE1 (MACARhon)[5] ;
  - le boulier chinois avec des ressources pour l'apprentissage du nombre en GS et de la numération décimale et du calcul au cycle 2 (MARENE)[6].

Nous présentons tout d'abord le processus de conception à l'origine des deux mallettes avant de détailler le contenu de chacune des mallettes. En conclusion, nous soulevons brièvement la question de l'appropriation de ces mallettes par les professeurs.

I - PROCESSUS DE CONCEPTION DES MALLETTES

A l'origine, notre projet était de réunir, dans une mallette, des ressources pour le domaine nombre et calcul au cycle 1 et cycle 2, ressources articulant des situations, du matériel tangible pour la manipulation et des ressources dans les environnements numériques. Nous envisagions la possibilité que les composantes matérielles tangible soient disponibles dans des mallettes mises à disposition des enseignants.
Mais il existe déjà de très nombreuses ressources à destination des enseignants, plus ou moins bien diffusées, plus ou moins bien connues, plus ou moins bien utilisées, ...
Nous avons donc choisi de constituer, pour nos mallettes, une « collection » de ressources s'appuyant majoritairement sur des situations, des jeux ou des instruments mathématiques déjà existants. Le problème que nous avons voulu résoudre en constituant cette « collection » de ressources est celui de l'appropriation des ressources par les enseignants afin qu'il y ai un véritable usage en classe.

1 Constituer une collection de ressources

Dans la mesure du possible, nous avons réuni dans la mallette des ressources construites à partir de situations bien connues en formation, dont la validité est établie et qui sont effectivement utilisées en classe même si ce n'est pas par la majorité des enseignants. C'est le cas par exemple de la situation

[3] http://www.arpeme.fr/m2ep/index.html
[4] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=607
[5] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/mallette
[6] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611

papier-crayon du « bus » ou de son pendant en version informatisée, la situation « Voitures et Garages ». Ces deux situations sont inspirées du « Jeu des voyageurs » d'ERMEL GS. Cette situation initiale a été retravaillée et la mallette maternelle propose des variations de celle-ci suite à des mises en œuvre en classe.

Par ailleurs, nous avons également conçu de nouvelles ressources, spécifiquement pour les mallettes, afin notamment d'intégrer l'usage des technologies numériques et des machines mathématiques en classe. Par exemple, le boulier est un instrument intéressant pour l'enseignement/apprentissage de la construction du nombre et du calcul mais la manipulation du boulier en classe n'est pas toujours simple (les boules du boulier bougent si on le déplace !). Disposer d'une version informatisée d'un boulier, paramétrable par le professeur, peut favoriser l'utilisation de cet instrument mathématique en facilitant par exemple les phases de mises en commun.

2 Des principes de conception

Le contenu de la mallette ne se limite pas à un ensemble de situations ou logiciels. Ces situations et logiciels s'intègrent dans un ensemble plus vaste de ressources. En effet, les principes de conception des éléments de la mallette que nous avons suivis sont :

- fournir des explicitations et des illustrations des situations didactiques par des mises en œuvre en classe (à partir de document écrits, de vidéo, de tutoriel, etc.) ;
- situer le rôle de chaque ressource dans l'acquisition des notions mathématiques ;
- penser l'articulation entre la conception et l'usage, c'est-à-dire proposer des ressources qui sont modifiables et adaptables par chaque professeur au cours de leur utilisation, pour mettre en œuvre le principe de conception continuée dans l'usage.

3 Un travail collectif de conception

Enfin, ce travail s'est réalisé au sein d'équipes mixtes, comprenant des chercheurs, des formateurs des enseignants, pouvant s'apparenter à des communautés de pratiques. Ce travail collectif nous a permis d'organiser des expérimentations en classe et en formation, pour :

- améliorer les ressources proposées, grâce à des itérations de cycles de conception et d'expérimentation, avec une méthodologie de type designed based reasearch, qui permet de prendre en compte la complexité du terrain en concevant les ressources avec les enseignants, les formateurs et les implémentant sur le terrain réel puis analysant ;
- produire et de valider empiriquement les comportements et les productions des élèves qu'il est possible d'obtenir avec les situations proposées ;
- étudier les processus d'appropriation des ressources par les enseignants participants aux équipes mixtes ;
- identifier les caractéristiques des ressources à rendre modifiables par les enseignants ou les formateurs.

Nous détaillons maintenant le contenu de chacune des mallettes mathématiques que nous avons conçues.

II - DEUX MALLETTES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE : CYCLE 1 ET CYCLE 2

Les travaux ont débouchés sur la production de deux ressources :

- Une première mallette autour de la construction du nombre en MS et GS qui :

- Reprend diverses situations de référence autour du nombre, les revisite pour favoriser leur appropriation par les enseignants.
- Propose des logiciels associés à certaines de ces situations.
- Présente, pour certains aspects du nombre, quelques situations nouvelles mettant en avant l'utilisation du dans les apprentissages, le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, la place d'une pédagogie de projet à l'école maternelle.

- Une deuxième mallette centrée sur l'expérimentation de situations d'apprentissage utilisant des instruments mathématiques :
  - La pascaline avec des ressources articulant matériel et logiciel pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul au CP et au CE1.
  - Le boulier chinois avec des ressources pour l'apprentissage du nombre en GS et de la numération décimale et du calcul au cycle 2.

1 La mallette cycle 1 : Construction du nombre en maternelle, moyenne et grande section

Nous avons fait le choix du numérique pour présenter et diffuser ces ressources sur le nombre en faisant l'hypothèse que ce type de support faciliterait la diffusion.

D'autre part ce choix nous a permis de structurer les activités pour les élèves à partir d'une organisation des apprentissages sur le nombre. Cette organisation est matérialisée par des cartes mentales qui donnent une vision claire et rapide de l'articulation entre les différentes connaissances à aborder à l'école maternelle. Ces cartes mentales sont disponibles sur le site : http://www.arpeme.fr/m2ep/index.html

Ces cartes mentales permettent d'accéder rapidement aux ressources nécessaires pour comprendre les situations d'apprentissage tout en exposant clairement le lien entre les connaissances mises en jeu. Elles permettent d'associer dans un même document des textes, du matériel à imprimer, des images fixes ou animées avec la possibilité pour chaque utilisateur d'appréhender la ressource en suivant des chemins différents dans la carte.

Elles fonctionnent avec le logiciel libre de droit, Xmind utilisable aussi sur PC (windows ou linux) que sur Mac.

Voici la première arborescence qui organise les connaissances sur la construction du nombre pour les classes de MS et GS de la maternelle.

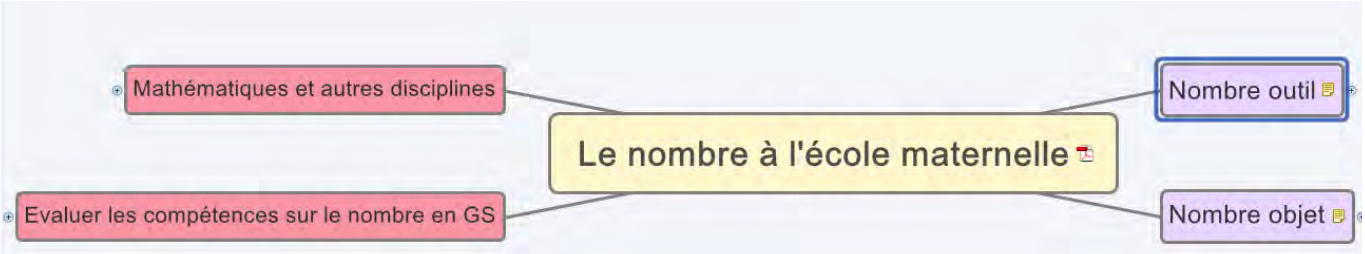


Figure 1. Le nombre à l'école maternelle

Les quatre branches ci-dessus ne constituent pas une partition des situations présentées dans la mallette. Les deux figures suivantes présentent le développement de ces branches.

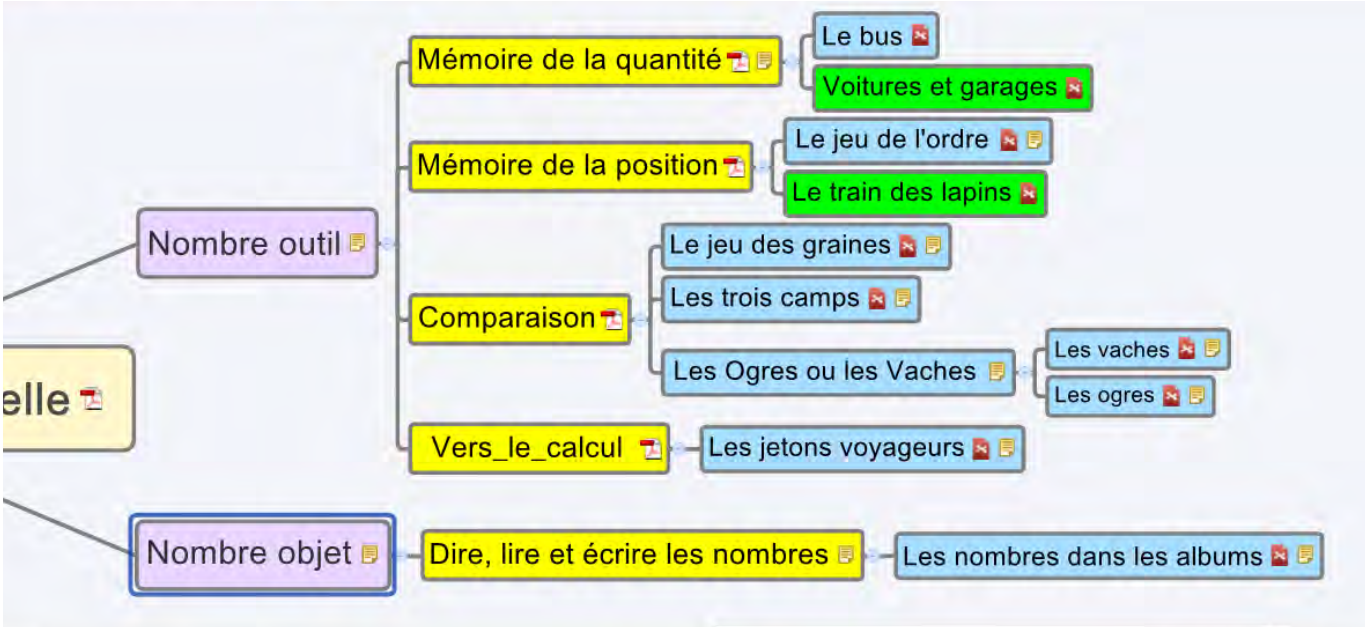


Figure 2. Développement des deux branches de droite : structuration de l'apprentissage du nombre autour des aspects outil et objet

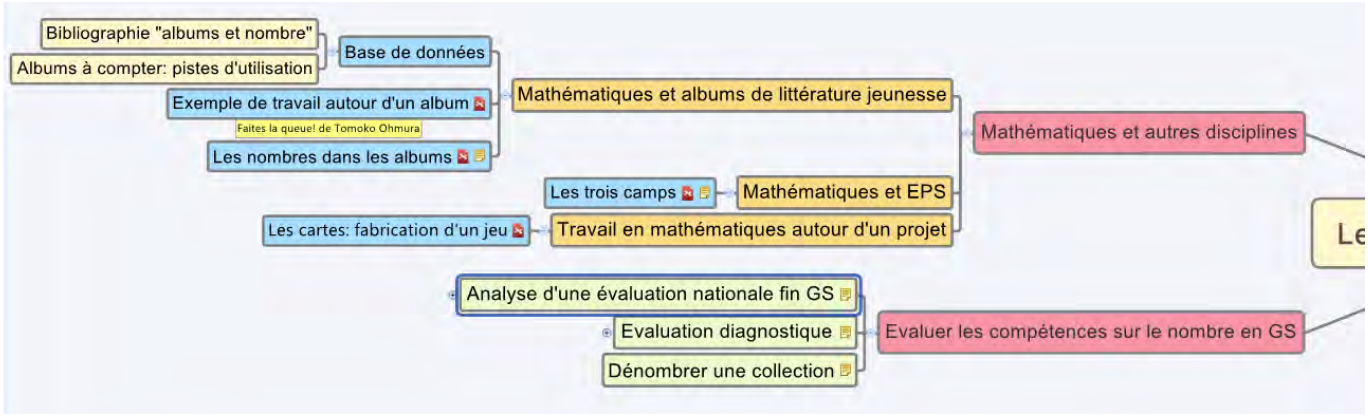


Figure 3. Développement des deux branches de gauche : structuration de l'apprentissage du nombre à partir de problématiques transversales

Les situations d'apprentissage apparaissent en bout de développement des diverses branches : un hyperlien Xmind permet alors d'ouvrir la carte mentale de chaque situation.

Cette mallette résulte de la collaboration entre les équipes de la COPIRELEM et du CREAD.

La COPIRELEM propose des situations d'apprentissage du nombre s'appuyant sur des matériels simples et faciles à mettre en place dans les classes (en bleu dans la carte ci-dessus).

Le CREAD reprend certaines des situations présentées dans la partie COPIRELEM mais sous un habillage différent, intégrant le travail en classe avec des logiciels utilisables y compris lorsque l'équipement informatique de l'école est très sommaire (en vert dans la carte ci-dessus).

1.1 La mallette maternelle : des situations de référence

La partie droite de la carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » structure l'essentiel des situations proposées autour de la dialectique outil-objet matérialisée par les deux branches : le nombre outil et le nombre objet. Le découpage de la branche outil en quatre familles de problèmes : mémoire de la quantité, mémoire de la position et vers le calcul est introduit par un texte qui questionne les fondements de l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

Un détour épistémologique permet d'appréhender le nombre comme une construction intellectuelle pour faciliter la résolution de certains problèmes pratiques rencontrés : conserver la mémoire de la

quantité, garder la mémoire d'une position, comparer des quantités sans avoir à manipuler les collections correspondantes ; prévoir le résultat d'une action sur une collection avant que celle-ci ait lieu (ajout, retrait, partage). L'enjeu de l'apprentissage du nombre à l'école maternelle apparait alors comme la mise à disposition de ces problèmes sociaux de référence afin de conduire progressivement les élèves vers une autonomie dans l'utilisation des nombres pour les résoudre.

Chacune des situations proposées constitue, pour nous, une situation de référence pour l'apprentissage des notions visées. Elles ont toutes été retravaillées avec des élèves dans les classes des PE des d'équipes locales (PE, CPC et formateurs) et sont souvent issues de ressources connues (en particulier ERMEL GS et BRIAND et al., CDrom). Bien que ces ressources soient nombreuses et de grande qualité, nous avons constaté d'importantes difficultés de mise en œuvre dans les classes par les professeurs des écoles. C'est pourquoi, nous proposons une présentation détaillée de chaque situation et de son déroulement, illustrée par des photos, de courtes vidéos de classe. De plus, les situations utilisent en général un matériel simple, disponible dans toutes les classes d'école maternelle. Et lorsque des supports particuliers sont nécessaires, ceux-ci sont proposés dans la carte mentale, sous forme de fichier pdf.

La carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » permet donc d'accéder à un deuxième niveau de cartes mentales : celle de chacune des situations proposées. Celles-ci sont pour la plupart structurées en cinq branches : présentation générale de la situation, étapes de mise en œuvre de la situation, matériel, échos de la classe, évaluation sur le modèle ci-dessous :

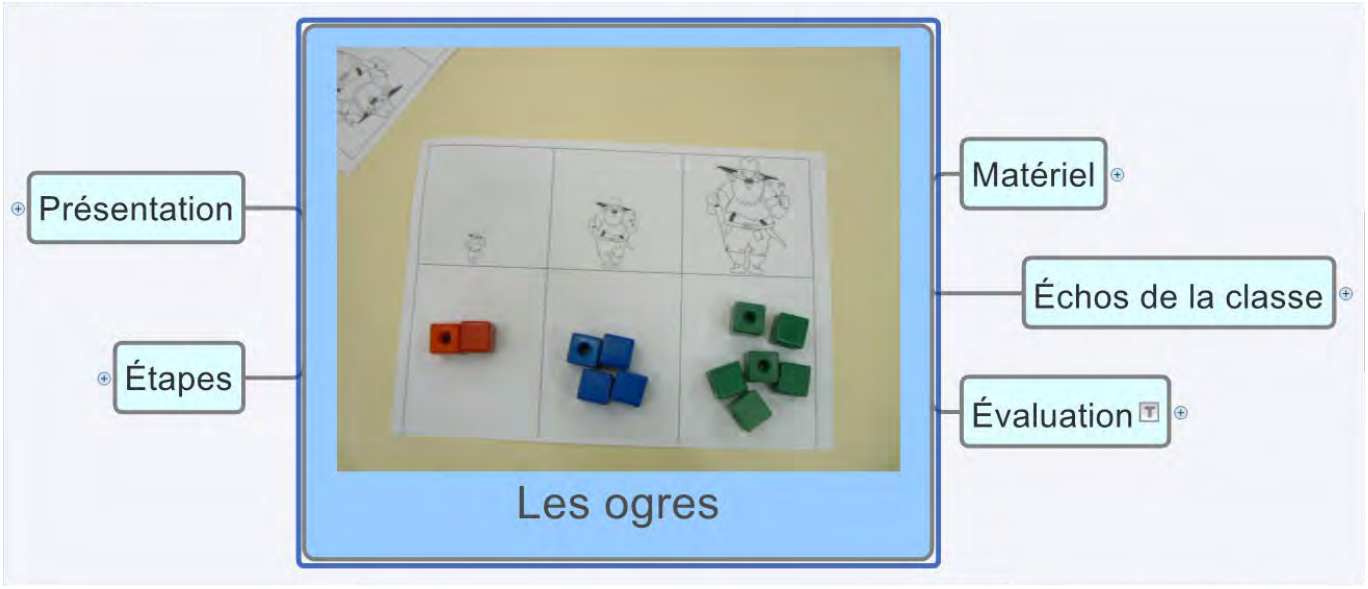


Figure 4. Carte mentale de la situation « Les ogres »

Le déploiement de chacune des branches permet ensuite d'accéder à l'ensemble des documents utiles pour appréhender la séance et la mette en œuvre dans une classe : présentation globale de la situation puis étape par étape par des textes et des illustrations extraites de la mise en œuvre dans des classes, matériel pour la classe sous forme de fichier pdf à imprimer, films permettant de voir comment la situation peut vivre dans une classe, documents pour évaluer les apprentissages réalisés au cours de la séquence.

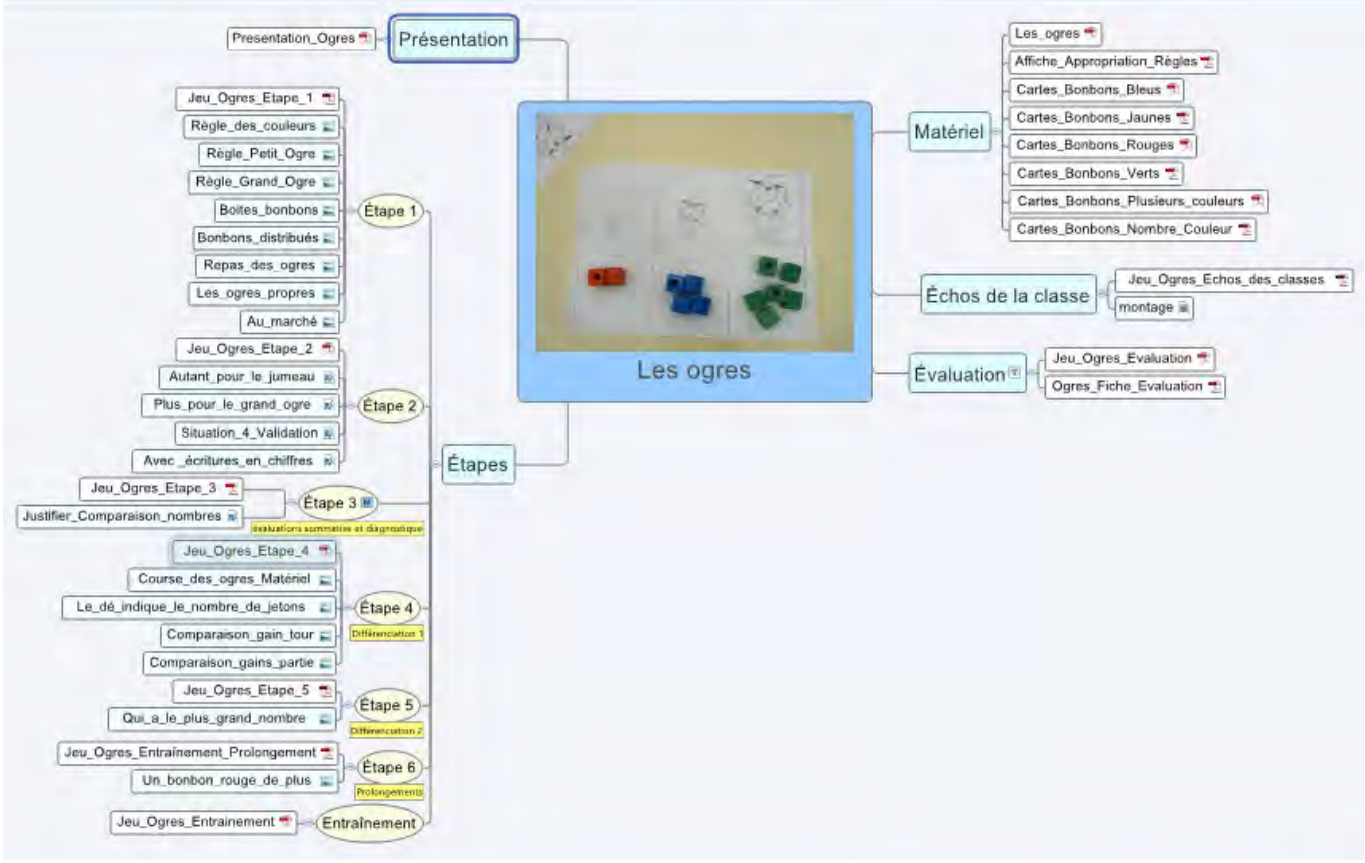


Figure 5. Déploiement des branches de la carte mentale de la situation « Les ogres »

Pour une description plus fine des documents présentant chaque situation d'apprentissage, nous renvoyions à l'article de ces actes qui rend compte de l'atelier A14 dans lequel les participants ont pu explorer une partie des ressources de cette mallette.

La partie gauche de la carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » porte un regard plus transversal sur les situations d'apprentissage du nombre en MS et GS de l'école maternelle. Nous essayé de présenter quelques exemples de situations mettant en jeu certaines formes d'interdisciplinarité pouvant aller jusqu'à l'intégration d'apprentissages mathématiques dans une pédagogie de projet : utilisation d'albums de littérature jeunesse pour l'apprentissage du nombre, situation d'apprentissage mathématique prenant appui sur une séquence d'EPS, projet de fabrication d'un jeu de cartes, … Certaines des situations proposées dans ces branches peuvent se retrouver dans la partie droite.

D'autre part, nous avons souhaité aborder de façon spécifique la question de l'évaluation des compétences sur le nombre à l'école maternelle. Cette partie de la ressource s'appuie d'une part sur une analyse des évaluations en fin de GS, d'autre part sur des évaluations diagnostiques des compétences sur le nombre à la fois en début et en fin d'année de GS (voir DVD IUFM Midi-Pyrénées). Nous insistons beaucoup sur l'importance d'un repérage des compétences par l'observation des élèves au fil des activités afin d'éviter une multiplication des évaluations par un travail écrit sur fiches en contradiction avec les apprentissages reliés à la manipulation tels qu'ils sont développés dans cette ressource. Dans cet esprit plusieurs situations de travail sur le nombre sont proposées comme des supports pour permettre à l'enseignant le repérage des compétences de ses élèves.

Enfin signalons que la dimension jeu a été fortement développée dans les situations retenues dans cette ressource ; nous avons intégré dans la carte mentale de certaines situations des textes permettant de mieux appréhender la forme des jeux favorables à des apprentissages mathématiques – en particulier les aménagements didactiques nécessaires pour qu'un jeu de société deviennent un jeu pour apprendre.

1.2 La mallette maternelle : Logiciels pour le nombre à la maternelle

Une partie du travail mené par le CREAD dans le cadre du projet « mallette maternelle » a consisté à concevoir deux logiciels[7] mathématiques utilisables dès la moyenne section de maternelle pour le logiciel *Voitures et garages* (noté *V G* par la suite) et dès la grande section de maternelle pour le *logiciel Le train des lapins* (noté *TDL* par la suite). Travaillant depuis plusieurs années sur la question de l'intégration des nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques à l'école (essentiellement à partir du début du cycle 3), le choix de proposer des logiciels pour la maternelle est né de la volonté d'apporter de nouvelles réponses à un questionnement récurrent des professeurs des écoles en formation initiale ou continue sur un « soi-disant » manque de ressources informatiques pour l'enseignement des mathématiques en maternelle. En tant que formateurs, nous proposions déjà des logiciels libres pour la maternelle, notamment ceux que l'on peut trouver sur le site de Thérèse Eveillard[8], sur le site du Terrier[9] (notamment *A nous les nombres*) ou ceux proposés par l'équipe de Stanislas Dehaene[10] (*La course aux nombres* et *L'attrape nombre*). Cependant, malgré les qualités de ces logiciels, les professeurs mentionnaient généralement diverses difficultés les freinant pour intégrer régulièrement ces logiciels dans leurs pratiques. Il s'agit essentiellement de difficultés techniques d'installation des logiciels (dans le cas d'*A nous les nombres* plus particulièrement), de difficultés prévues pour la gestion de la classe si un logiciel est utilisé, de difficultés à insérer l'utilisation d'un logiciel dans leur progression, de difficultés liées au manque de matériels informatiques dans leur classe ou leur école, etc. Ces difficultés font écho aux cinq dimensions relatives aux pratiques d'un professeur identifiées par Ruthven (2010) et permettant d'analyser l'intégration d'une ressource numérique dans les pratiques d'un professeur. Ces cinq dimensions sont les suivantes :

1. l'environnement matériel (disposition de la salle, de l'école, matériel informatique disponible etc.) ;
2. le système de ressources ;
3. le format d'activité : il s'agit du format d'activité habituel du professeur, qui a des routines pour la présentation d'une activité, l'organisation du travail de groupe, etc. ;
4. l'économie temporelle : ce qui concerne l'avancée du temps didactique ;
5. le script curriculaire : il s'agit d'un ensemble de connaissances professionnelles du professeur, développé au fil de sa carrière, pour l'enseignement de contenus semblables, à des niveaux donnés.

Les logiciels *V G* et *TDL* ont été conçus en relation avec ces cinq dimensions, avec une volonté de faciliter au mieux leur intégration dans les pratiques des professeurs. Au niveau de l'environnement matériel, les logiciels sont utilisables dès que l'on dispose d'un poste informatique dans une salle de classe, même sans moyen de projection ou de connexion internet. Par ailleurs, les logiciels ne sont pas sonorisés pour ne pas perturber le reste des élève dans le cas d'une utilisation sur des postes installés dans la classe. Au niveau de l'économie temporelle et du système de ressources, nous avons choisi de produire des logiciels reprenant des situations de référence en papier/crayon qui existent dans la culture commune des formateurs et de nombreux professeurs (*Voitures et Garages* est une variation de la situation des voyageurs d'ERMEL reprise dans la carte mentale de la COPIRELEM, et le *Train des Lapins* est une variation de la situation du train des signes de l'IREM de Bordeaux). Ces logiciels sont associés à du matériel concret manipulables par les élèves ainsi qu'à des ressources pour les professeurs et pour la classe montrant des possibilités d'articulation du travail sur ordinateur et du travail en papier/crayon. Au niveau du format d'activité, nous proposons une ressource détaillant différentes modalités de mise en œuvre des situations selon le type de matériel informatique disponible mais également selon l'habitude de travail des professeurs de maternelle (travail en atelier, travail avec une situation auto-validante pour favoriser l'apprentissage de l'autonomie, travail dans le cadre d'une différenciation, etc.)

[7] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=607 (consulté le 12 décembre 2014)

[8] http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/ (consulté le 12 décembre 2014)

[9] http://www.abuledu.org/leterrier/accueil (consulté le 12 décembre)

[10] http://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php et http://www.attrapenombres.com/an/home.php (consulté le 12 décembre 2014)

Le contenu des ressources est également élaboré en prenant appui sur d'autres résultats de recherche. Les logiciels conçus par le groupe proposent tous une personnalisation du parcours des élèves et un accès à leurs résultats, donnent la possibilité de faire de nombreux essais, valident les réponses des élèves et permettent aux enseignants d'articuler le logiciel avec du matériel pédagogique associé. Bueno-Ravel et Gueudet (2009) ont montré que ces éléments favorisaient l'intégration d'un logiciel dans les pratiques effectives des enseignants.

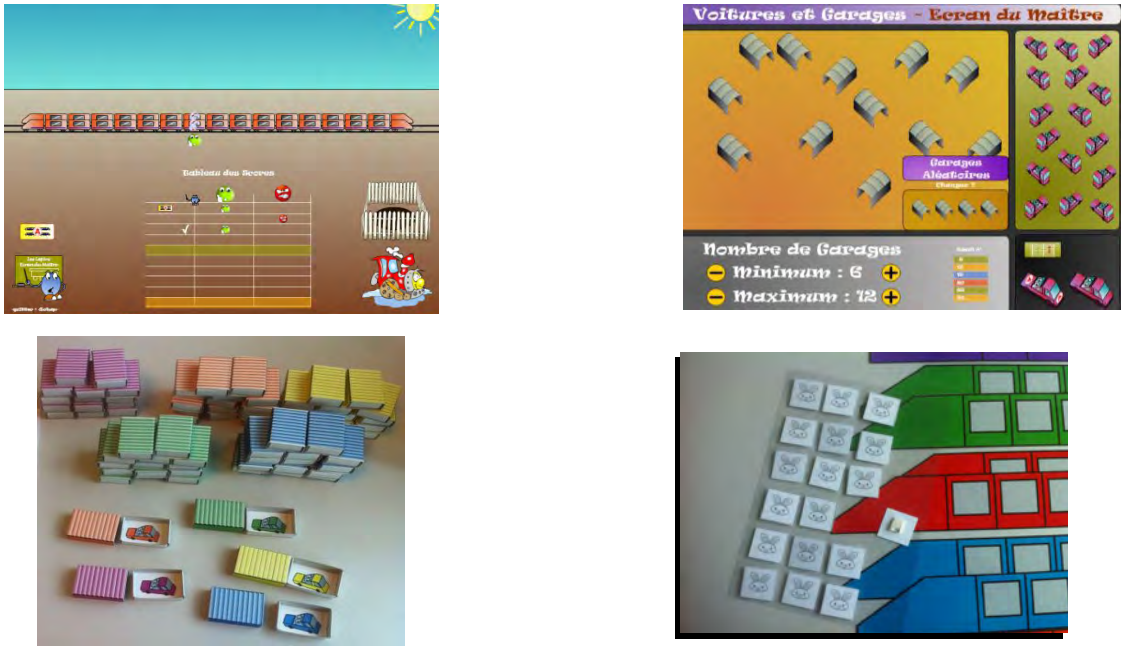


Figure 6. Extraits de ressources produites par le groupe MARENE : des logiciels paramétrables par l'enseignant (en haut à gauche), permettant à l'élève de faire de multiples essais (en haut à droite), associé à du matériel manipulable (en bas).

L'usage de ces ressources par les enseignants participant au groupe Marene a été suivi et analysé (Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard, 2014 ; Besnier et Bueno-Ravel, 2014 ; Besnier, Bueno-Ravel, Gueudet et Poisard, à paraître) pour étudier la question de l'appropriation des ressources produites ainsi que le développement professionnel des professeurs. Les premiers résultats montrent que l'intégration de ces logiciels est possible en conditions réelles de classe (un seul poste dans une classe, classe de maternelle multi-niveau, etc.) et font apparaître que les usages des logiciels faits par les professeurs suivis ont pour particularité de développer la différenciation dans leur pratique de classe et mettent l'accent sur la verbalisation par les élèves de leur activité mathématique. Les études qualitatives se poursuivent pour identifier les liens éventuels entre l'appropriation et la modification par des professeurs des ressources fournies par le groupe Marene et le développement professionnel de ces derniers qui utilisent ces ressources.

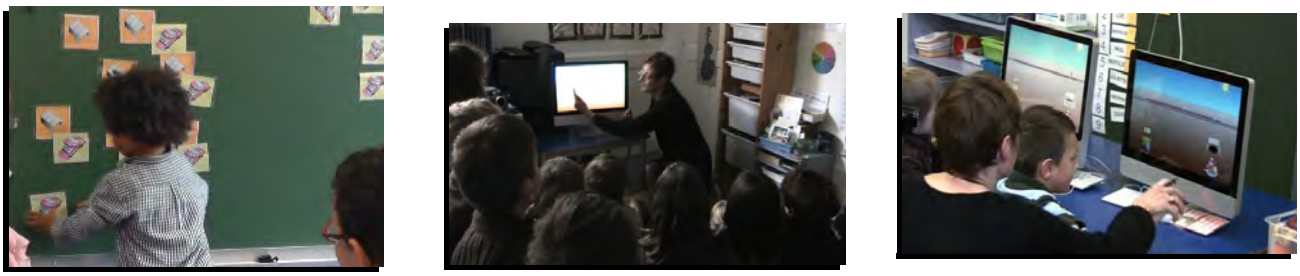


Figure 7. Exemples d'usages en classe des logiciels : articulation avec le matériel au tableau pour

permettre la verbalisation en grand groupe (à gauche) ; présentation du logiciel sur un seul poste (au centre) ; exemple de différenciation, la professeur aidant un élève pendant que celui de gauche travaille en autonomie (à droite).

1.3 La mallette maternelle : Le boulier chinois en GS

Nous présentons la partie de la mallette maternelle qui concerne le boulier chinois en grande section de maternelle (notée GS par la suite). Cette partie de la mallette résulte du travail du groupe de recherche Marene[11]. Les membres de ce groupe étudient de manière générale le boulier chinois à l'école en le considérant comme une ressource supplémentaire pour la construction du nombre, la numération et les opérations. Nous précisons que lorsque nous évoquons le boulier chinois, il s'agit du boulier chinois dans sa version matérielle (figure 1) et/ou dans une version virtuelle (figure 2).

Figure 8 :boulier chinois ou suan-pan

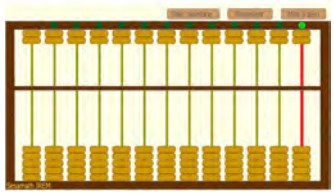


Figure 9 : Boulier chinois virtuel développé par l'association Sésamath et l'IREM de Lille.

Avant de décrire le contenu de la mallette nous allons, dans un premier temps, donner les règles d'utilisation du boulier chinois puis nous décrirons des objectifs d'apprentissage en GS en soulignant deux points importants.

Donnons tout d'abord les règles d'utilisation de ce boulier : il est composé de treize tiges, chacune correspondant à un rang de notre numération positionnelle, et d'une barre centrale que nous nommons « barre de lecture » (Poisard, Bueno-Ravel, Gueudet, 2011). Sur chaque tige cinq boules, appelées unaires (chacune vaut un), sont situées sous la barre de lecture et deux boules, appelées quinaires (chacune vaut cinq), sont situées au dessus. Pour inscrire un nombre, il faut ramener les boules vers la barre de lecture centrale du boulier ; on dit qu'on les « active ». Le boulier dans la version virtuelle choisie ici (figure 2), dispose en plus de fonctions et de caractéristiques spécifiques : la tige choisie pour les unités est rouge ; un clic sur l'icône « mise à zéro » désactive toutes les boules ; un clic sur « voir nombre » permet d'afficher l'écriture chiffrée du nombre inscrit sur le boulier et enfin un clic sur « placement » entraîne l'affichage de l'inscription économique du nombre, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de boules possible.

Indiquons maintenant les apprentissages mathématiques possibles en GS avec le boulier. De manière générale, l'utilisation du boulier favorise la construction du nombre en GS. L'usage du boulier permet en outre, de donner du sens au nombre, d'apprendre à différencier valeur et quantité et de décomposer des nombres.

Prenons l'exemple de l'inscription de huit sur un boulier chinois. Pour inscrire huit sur le boulier, les élèves peuvent, par exemple, le décomposer en cinq et trois. Ils doivent ensuite savoir qu'une quinaire vaut cinq bien que cette boule soit semblable aux unaires. Il s'agit pour les élèves de distinguer la valeur d'une boule de la quantité de boules activées. Ils apprennent ainsi à coder le nombre huit sur le boulier. Le boulier permet donc un autre codage des nombres qui est complémentaire d'autres codages connus

[11]MAllette de REssources pour le Nombre à l'École, sous-groupe « Boulier chinois à l'école » : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611 (consulté le 12 décembre 2014)

des élèves : représentations par constellations, sur les doigts, écriture en chiffres, écriture en lettres, etc... (figure 3). Nous considérons que connaître différents codages d'un nombre et faire des liens entre ceux-ci permet aux élèves de donner plus de sens au nombre.

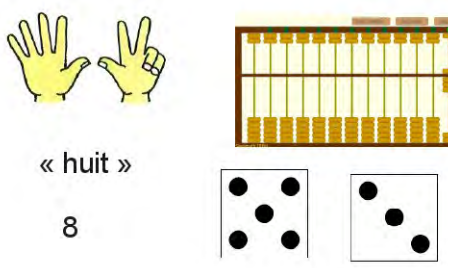


Figure 10 : Différents codages de huit

Pour que ces apprentissages soient possibles, nous soulignons deux points importants :

- Premièrement, une articulation entre l'usage du boulier matériel et du boulier virtuel lors de séances en classe permet aux élèves de s'approprier l'objet et de mieux comprendre ses règles d'utilisation. Le boulier dans sa version virtuelle, facilite le travail des élèves et de l'enseignant dans la classe. En effet, il permet une appropriation plus rapide des fonctionnalités du boulier. En particulier, la fonction « voir nombre » permet aux élèves d'effectuer des essais, de tâtonner en s'appuyant sur l'écriture chiffrée des nombres. Le boulier virtuel permet aussi une auto-validation des inscriptions et des lectures. Les élèves peuvent ainsi travailler en autonomie. Enfin, le boulier virtuel, lorsqu'il est utilisé avec un vidéo-projecteur ou un tableau numérique interactif, facilite les mises en commun collectives. Cela étant, les élèves ont aussi besoin de manipuler l'objet réel pour se l'approprier. C'est pourquoi il nous semble judicieux de proposer d'utiliser les deux types de boulier.
- Deuxièmement, une articulation avec d'autres ressources pour construire le nombre est nécessaire. En effet, le boulier peut s'intégrer dans la classe comme d'autres ressources telles que la bande numérique par exemple mais ne se substitue pas à elles. Il devient un moyen supplémentaire de construire le nombre et enrichit les ressources disponibles pour l'élève.

Ces remarques permettent en partie de comprendre les choix faits concernant les ressources présentes dans la mallette. Nous présentons maintenant ces ressources en les regroupant en trois catégories :

- **Des ressources pour la classe :** il s'agit d'une séquence intitulée « le boulier chinois en GS » et de ressources matérielles et virtuelles utilisables en classe pour mettre en œuvre cette séquence.

La séquence porte sur la « construction du nombre en GS » avec l'étude du boulier chinois et se veut complémentaire d'autres situations de classe sur le thème de la construction du nombre. L'objectif général de cette séquence est d'étudier différents codages du nombre et d'amener les élèves à faire des liens entre ces différents codages pour construire le sens du nombre.

Un cadre du boulier sans boules représentées est disponible et peut être imprimé en grand format. Cela permet de mettre en œuvre la séquence lorsqu'il n'est pas possible de projeter l'écran du logiciel au tableau. Cet outil permet de mettre en commun les réponses des élèves en utilisant par exemple, des aimants pour représenter les boules activées.

Des fiches comportant des cadres de bouliers sans boules représentées sont présentes, elles permettent à l'enseignant qui met en œuvre la séquence de créer ses propres exercices.

Le boulier virtuel créé par Sésamath ainsi qu'une fiche d'exercices en ligne paramétrables par le professeur (boulier j3p) sont disponibles.

- **Des ressources pour les élèves :** elles sont constituées d'exemples de fiches élèves pour inscrire et lire des nombres sur le boulier, d'un dictionnaire des nombres de 0 à 10 et d'un livre du boulier de 0 à 15.

Les fiches élèves donnent des exemples d'exercices à donner aux élèves lors des séances avec le boulier chinois. Il s'agit pour les élèves soit de lire un nombre sur un boulier représenté puis d'écrire le nombre correspondant (écriture en chiffres) soit de lire un nombre écrit en chiffres et de dessiner sur la fiche les boules activées sur le boulier.

Le livre du boulier de 0 à 15 montre les inscriptions de ces nombres sur le boulier. Par exemple, sur la page du deux se trouvent l'écriture chiffrée « 2 », le mot nombre « deux » et le codage de deux sur le boulier virtuel. Lorsque plusieurs inscriptions d'un nombre sont possibles sur le boulier, plusieurs pages sont présentes, c'est le cas pour cinq par exemple. Ce livre peut être utilisé comme la mémoire des tâches effectuées sur le boulier. Il peut être utilisé individuellement ou collectivement, les pages peuvent aussi être affichées au tableau au fur et à mesure de la découverte de nouvelles inscriptions sur le boulier.

Enfin, le dictionnaire des nombres de 0 à 10 se présente sous la forme d'un tableau dans lequel chaque ligne correspond à un nombre. Pour chaque nombre son écriture chiffrée, le mot-nombre associé, la constellation du dé ainsi que la collection de doigts correspondantes sont représentées. Le boulier apparaît donc comme un autre codage des nombres. Ce dictionnaire peut être utilisé tel quel ou peut venir enrichir la bande numérique déjà présente dans une classe.

- **Des ressources pour le professeur :** elles ont été crées pour permettre à un enseignant qui souhaite mettre en œuvre une séquence avec le boulier chinois dans sa classe de découvrir seul les règles d'utilisation du boulier. Elles sont constituées d'un tutoriel vidéo, d'un livret pour le professeur intitulé « pour aller plus loin à propos du boulier chinois » et d'une fiche « vocabulaire ».

Le tutoriel vidéo présente les règles d'utilisation du boulier et donne des exemples d'inscriptions et de lectures de nombres sur le boulier.

Le livret apporte des compléments au professeur en donnant des prolongements possibles pour utiliser le boulier au delà de la GS. Il présente un mode d'emploi du boulier, indique le vocabulaire utilisé, précise les apprentissages possibles au delà de la GS et inclut des remarques pour la mise en place en classe.

Enfin, la fiche « vocabulaire » reprend un paragraphe du livret de professeur dans le but de préciser cette question du vocabulaire employé par le professeur et par les élèves quand ils utilisent un boulier chinois. Cette question est importante pour la verbalisation des apprentissages.

Les ressources incluses dans la partie boulier chinois en GS de la mallette maternelle sont donc nombreuses car elles ont pour but de permettre à un enseignant de GS de s'approprier le boulier puis de disposer d'outils et de documents lui permettant de mettre en œuvre une séquence. Nous précisons qu'il faut en plus disposer de bouliers matériels puisque nous avons insisté sur la nécessité d'articuler l'usage du boulier matériel et l'usage du boulier virtuel. De plus, il nous semble nécessaire d'accompagner les enseignants qui souhaitent utiliser le boulier en GS dans le cadre de formation.

Enfin, il est important préciser qu'utiliser le boulier en GS est une première étape, il s'agit d'une base pour les niveaux suivants. C'est pourquoi, l'un des objectifs du travail en cours dans le groupe de recherche Marene est de produire des ressources pour le cycle 2 et de les rendre disponibles en ligne[12].

2 La mallette cycle 2 : La pascaline

Une machine mathématique pour l'école élémentaire est présente dans la mallette cycle 2 : la pascaline. Elle est proposée dans la mallette sous deux versions : une version manipulable et une version informatisée (la e-pascaline).

[12] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=201 (consulté le 12 décembre 2014)

Figure 11 : La pascaline

Figure 12 : La e-pascaline utilisée ici sur une tablette

Les objectifs de l'utilisation de la pascaline ou de la e-pascaline à l'école sont de travailler sur :

- l'écriture décimale de position des nombres ;
- les notions d'unité, dizaine, centaine et l'échange de 10 unités contre une dizaine ;
- les opérations de calcul.

Pour plus de détails sur les activités proposées articulant travail sur la pascaline et travail sur la e-pascaline, il est possible de lire de texte de l'atelier 23[13] proposé dans ce DVD (Riou-Azou et Soury-Lavergne (à paraître)) et de consulter une description de la « mallette cycle 2 : pascaline » disponible en ligne à l'adresse suivante :

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/mallette/mallette-lyon/presentation_mallette_cp_ce1.pdf

III - PERSPECTIVE : LE PROJET MALLETTE ET LES RECHERCHES ASSOCIÉES

Les mallettes sont maintenant disponibles pour la plupart librement en ligne pour les professeurs et les formateurs. Elles commencent à être diffusées en dehors du cercle des équipes ayant participé à leur conception, que cela soit en formation initiale ou en formation continue.

Cependant, les recherches menées sur l'usage de ces ressources par des professeurs (notamment dans le cadre du groupe MARENE) nous ont conduit à proposer des modules de formation M@gistère pour soutenir l'appropriation des ressources par les enseignants. Ces modules seront disponibles à la rentrée 2015 sur la plate-forme M@gistère de la DGESCO.

Il serait intéressant de poursuivre des recherches sur l'appropriation des ressources des mallettes par des professeurs n'ayant pas pris part aux équipes de conception, sur les apprentissages des élèves en lien notamment avec l'articulation entre différents types d'artefacts (tangibles et informatisés), etc.

[13]Atelier 23 : Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BERGEAUT, J.F., LAURENÇOT-SORGIUS, I. & VAUTRIN, M. (2008), *Autour du repérage des compétences dans des domaines mathématiques en cycle 1 et 2 : évolution des compétences numériques en GS*, DVD et livret d'accompagnement, IUFM Midi-Pyrénées.

BESNIER, S. & BUENO-RAVEL, L. (2014) Usage des technologies en mathématiques à l'école maternelle : le travail documentaire des enseignants, *Review of Science, Mathematics and ICT Education,* **8**(1), 63-80.

BESNIER, S., BUENO-RAVEL, L., GUEUDET, G. & POISARD, C. (A paraître) Conception et diffusion de ressources pour la classe issues de la recherche. L'exemple des apprentissages numériques à l'école, *Actes de la XVIIe école d'été de didactique des mathématiques, Nantes, 19-26 Août 2013.*

BESNIER, S., EYSSERIC, P. & LE MÉHAUTÉ, T. (A paraître) Mallette de ressources mathématiques pour l'école maternelle (MS-GS) - Atelier A14, *Actes du 41ème colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 18-20 Juin 2014.*

BRIAND et al. (2004), Apprentissages mathématiques en maternelle : situations et analyses, CD Rom, Hatier.

BUENO-RAVEL, L. & GUEUDET, G. (2009) Online resources in mathematics: teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computer and Mathematic Learning,* **14/1**, 1-20.

CHARNAY et al. (1990), Apprentissages numériques en grande section de maternelle, ERMEL, Hatier.

EYSSERIC, P. (2014) Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques,* **517**, 48-50.

GUEUDET, G., BUENO-RAVEL, L. & POISARD, C. (2014) Teaching mathematics with technology at kindergarten: resources and orchestrations. In CLARK-WILSON, A., ROBUTTI, O., SINCLAIR, N. (Eds.) *The mathematics teacher in the digital era,* (pp. 213-240). New York: Springer.

POISARD, C., BUENO-RAVEL, L. & GUEUDET, G. (2011) Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*. **31**(2), 151-189.

RIOU-AZOU, G. (2014) Apports du boulier chinois en grande section de maternelle. *MathémaTICE,* **40**.

RIOU-AZOU, G. & SOURY-LAVERGNE, S. (A paraître) Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline, *Actes du 41ème colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 18-20 Juin 2014.*

RUTHVEN, K. (2010) Constituer les outils et les supports numériques en ressources pour la classe, in GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (Eds) *Ressources vives, la documentation des professeurs en mathématiques*. (pp. 183-199). PUR, Rennes et INRP.

EVOLUTION ANNUELLE DE LA PLACE DES ENSEIGNEMENTS MATHEMATIQUES DANS LE CURRICULUM QUOTIDIEN AU COURS PREPARATOIRE

Aline BLANCHOUIN
ESPÉ de l'académie de Créteil, UPEC (Paris XII),
Experice (Paris XIII)
aline.blanchouin@u-pec.fr

Résumé
Nous nous intéressons à la place quotidienne réelle accordée à l'enseignement des mathématiques au CP. Nous mobilisons des données construites à partir d'une recherche collaborative[1] avec six professeurs des écoles (PE) de Seine Saint Denis (académie de Créteil) au cours de l'année scolaire 2011-2012.
Le cadre théorique de la clinique de l'activité (Clot 2008) nous sert à investiguer la définition du sens et de l'efficience que les enseignants polyvalents ont de leur activité d'enseignement alors que l'empan temporel d'une journée de classe est de six heures. Certains concepts de la didactique comparée et de sociologie sont mobilisés pour traiter les observations de classe tandis les trois logiques d'action de Vinatier (2013), nous servent à interpréter ce qui est effectivement programmé par les enseignants en prenant en compte leur point de vue à partir d'entretiens.
L'exploitation du matériau que constituent les plages de mathématiques observées nous conduit à présenter les caractéristiques générales de la sous programmation constatée de cette discipline au cours de l'ensemble de l'année scolaire et à en avancer des éléments compréhensifs. C'est ainsi que nous concluons sur l'importance de prendre en compte l'existence de la double préoccupation qu'ont les professeurs des écoles relative aux apprentissages de leurs élèves, d'une part, de la lecture et, d'autre part, de la forme scolaire qui distingue l'école élémentaire de l'école maternelle.

I - INTRODUCTION

Pour Clot (2008), le pouvoir d'agir d'un professionnel est fondé sur l'inter fécondation entre, d'une part, la définition des enjeux de son activité (le sens) et, d'autre part, du rapport entre ce qu'il y engage en termes de ressources (cognitive, émotionnelle, sociale, matérielle, temporelle…) et ce qu'il perçoit des résultats de son action (efficience). Ses ressources puisent à une quadruple source, personnelle et triplement sociale : impersonnelle (les prescriptions institutionnelles mais aussi de la sphère de formation), inter personnelle (relations dans la communauté de pratiques) et enfin trans-personnelle (les règles issues de l'histoire du métier). Nous parlons « d'intercalaire générique » pour désigner le fait que la ressource trans-personnelle agit comme un philtre ou encore comme ressource intégrative des trois autres.

C'est dans cette perspective que nous nous intéressons à l'évolution sur l'année des programmations mathématiques réelles de six professeurs des écoles (PE par la suite), aux trajectoires professionnelles plurielles (expérience dans le métier et dans l'enseignement du CP ; habitude à s'analyser pour communiquer-Maître formateur/PE-).

Dans une première partie, nous précisons le positionnement théorique adopté et la méthodologie de recueil de données. **La seconde partie** propose un état des lieux de la place des mathématiques au quotidien en la situant par rapport aux autres enseignements. **La dernière partie** est l'occasion

[1] Il s'agit d'une recherche menée dans le cadre d'une thèse dont le titre est *La journée de classe de l'enseignant polyvalent du primaire : étude sur une année scolaire du cours d'action quotidien en Cours Préparatoire,* Université Paris XIII, soutenue le 20.01.2015.

d'explorer ce qui fonde le pouvoir d'agir du PE « lorsqu'il fait des mathématiques » à partir des trois des six enseignants enquêtés. En guise de conclusion, nous proposons de prendre en compte pour investiguer les mathématiques au CP, l'existence de deux motifs d'agir « enseigner au CP » partagés par l'ensemble des PE exerçant à ce niveau de classe.

II - CADRES THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

1 Positionnement de l'objet de notre étude et méthodologie principale

Tout d'abord, pour caractériser le face à face en classe de l'enseignant avec ses élèves, nous retenons que :

- l'avancée du scénario didactique est le fruit d'une co-activité « enseignant-élèves ». Du point de vue des acteurs, l'intrigue didactique se déroule entre contrainte et contingence. Ainsi, la situation d'enseignement-apprentissage est caractérisée comme intersubjective et définie par des rapports de communication entre l'enseignant, le groupe classe, chaque élève ;
- le dilemme « faire classe-faire apprendre » ou encore maintenir « une vigilance didactique-maintenir la paix scolaire » fonde l'action de tout enseignant, et ce sur l'empan temporel de toute la journée. Autrement dit, ceci est vrai lors des séances mais aussi lors de tous les autres moments que les praticiens nomment « transitions » voire « interstitiels ».

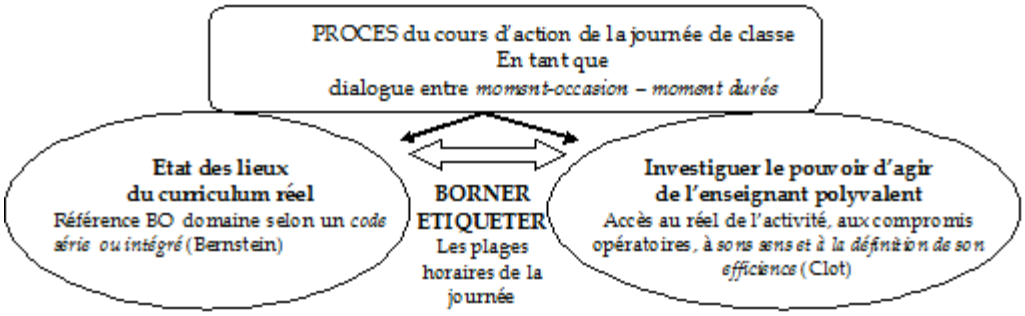
Nous les qualifions de « proto didactiques » en référence à Marchive (2003) lorsqu'il parle des rituels d'entrée en classe. Ainsi, en plus de « leur fonction sociale (régulation de la communication inter individuelle) ou instrumentale (obtention de l'ordre et de la discipline) », ces moments « sont une des conditions de l'ordre didactique, c'est-à-dire du fonctionnement des situations d'enseignement… ils constituent les formes rudimentaires et primitives sur lesquelles s'édifieront les règles spécifiques des différents contrats didactiques » (Marchive, 2003, p. 25).

Ces choix sont fondés sur une approche processuelle des 6 heures quotidiennes d'école par opposition à une conception provisionnelle du temps de classe. Ici, en référence à la pensée chinoise (Jullien, 2001), l'activité réalisée est appréhendée dans sa double dynamique, opportuniste et stratégique (moment-occasion) et de continuité-changement (moment-durée). C'est pourquoi nous parlons du procès de la journée.

L'objet de notre recherche est double, se nouant autour du repérage (découpage) et de la qualification (étiquetage) des plages horaires du curriculum journée en confrontant ce qui a été observé (et discuté avec les enseignants) à la grille horaire des programmes. Il consiste :

- d'une part, à faire un état des lieux des *enseignements réellement programmés*. Ici nous convoquons l'opposition faite par Bernstein (1975) entre curricula procédant d'un *code série* (marqué par la succession) *et intégré ;*
- d'autre part, à accéder au réel de l'activité afin d'interroger les ressorts du *pouvoir d'agir*. Ici, nous nous référons à Clot (2008, p. 18) : « le développement du pouvoir d'agir a une histoire « entre *sens et efficience* qui ne tient pas en place » (…). Le premier, fruit de l'échange est *source d'énergie*. La seconde, sortie de la technique ou offerte par elle, est *source d'économie*. On peut sans doute parler d'alternance fonctionnelle puisque le développement du sens appelle celui de l'efficience et inversement ». Ainsi, « l'efficacité dynamique du bien faire » a « une double origine, une double direction et se fait en alternant ces deux penchants que sont le sens et l'efficience ».

Le schéma ci-dessous résume les deux facettes de notre travail de recherche :



Le cadre de la clinique de l'activité a servi à concevoir et à animer un collectif de six enseignants de CP (annexe 1) lors de l'année scolaire 2011-2012.

Nous avons au cours de sept périodes de l'année (annexe 1), observé la journée de classe en continu des PE et organisé trois strates d'entretiens de secondarisation, c'est-à-dire de mise à distance par les professionnels conçus à partir des traces de l'activité réalisée (photo, extrait vidéo, déroulé effectif de la journée, tableaux des volumes horaires des différentes disciplines) et conduit de façon semi directive. Ils s'inspirent des auto-confrontations simples et croisées (Clot 2008), aussi bien dans leur conduite (contractualisation des objets de discussion) que dans leur enjeu. C'est ainsi qu'est provoquée une activité discursive redoublant l'activité réalisée pour avoir accès « au réel de l'activité », c'est-à-dire tout ce qui a été mis de côté, empêché mais aussi ce qui a été fait pour ne pas faire ce qui était à faire… Plus généralement, tout ce qui déborde de l'activité effective.

Lors de chacune des trois situations dialogiques (individuelle avec le chercheur le jour de classe, en triade avec un pair puis en collectif avec tous les PE), les PE sont conjointement engagés à :

- discuter les choix de découpage et d'étiquetage retenus par le chercheur pour faire le script de la journée ;
- investiguer le sens et l'efficience de leur activité, ses empêchements, ses renoncements, ses satisfactions.

Au total, trente-six journées de classe ont été observées ; elles ont été l'occasion de commentaires et de controverses lors de près de 80 heures d'entretien.

2 Outils conceptuels d'appui : didactique professionnelle et des mathématiques

Les **scripts journée** sont écrits à l'instar d'une séance, à partir de phases définies par le couplage « actions de l'enseignant et des élèves - enjeu pour le scénario didactique » en référence à la théorie des situations de Brousseau.

Pour situer « le moment de classe » dans la journée, l'étiqueter par rapport aux savoirs en jeu, et regarder le jeu des « places » entre enseignant et élèves dans l'avancement du cours d'action, nous retenons les **trois descripteurs** de l'action didactique (Sensevy et al., 2007) que sont respectivement la chronogénèse, la mésogénèse et la topogénèse.

Le modèle d'analyse des situations d'enseignement-apprentissage de Vinatier (2013) est lui utilisé pour interpréter « les schèmes interactionnels des enseignants face à leurs élèves » à partir de trois **enjeux** (ou logiques d'action) « qui s'inscrivent dans un milieu où l'enseignant doit, pour se faire reconnaître et progresser dans sa carrière, gérer des relations avec les parents d'élèves, ses collègues, sa hiérarchie » (p. 36) sont présents sous forme de dilemmes plus ou moins confortables à gérer.

Les enjeux sont :

a. **Intersubjectifs.** Les relations entre personne sont regardées à partir des deux dimensions du concept de face (Gofmann) : le « territoire symbolique et/ou matériel » (définition de « sa bulle » et du « pouvoir ») et « l'image de soi » (l'éthos dans des actes langagiers de conversations relevant de la préservation-mise en danger de l'autre –de soi). Ces enjeux intéressent le registre de la qualité des relations entre les acteurs, le climat de classe.

b. **Épistémiques**, de transmission de connaissances (logique du savoir et apprentissages visés). Ces enjeux affèrent au cheminement du savoir.

c. **Pragmatiques,** de régulation du pilotage de l'action dans ses dimensions spatiaux-temporelles et humaines (temps, tâches, outils de travail…). Ces enjeux intéressent plus particulièrement le registre des enchaînements, des débuts et des clôtures (épisode, séance, demie-journée, journée…).

3 Du matériau aux données

Nous interrogeons les écarts entre programmations prescrite (cf le référentiel construit en annexe 2), auto prescrite (identifiée via la page de cahier journal rédigée en amont de la journée et complétée parfois par des fiches de préparations) et réelle (repérée par l'observation et l'entretien individuel) en situant chaque plage horaire dans l'emboîtement des temporalités de la journée, de la semaine d'une période de l'année scolaire. Ceci nous conduit à une description du curriculum à l'échelle de la journée.

Les observations sont reprises pour écrire le script de la journée effective ; les plages horaires sont repérées en référence à un domaine disciplinaire (plages didactiques) ou non (plages proto didactiques).

Au sein des plages didactiques (d), avec Garnier (2003), nous distinguons deux ensembles relativement à leur poids socio institutionnel et à l'importance avec laquelle l'enseignant les délègue aux partenaires de l'action que sont les intervenants extérieurs et ses collègues. Il s'agit d'une part des disciplines du noyau central (d1) - le français et les mathématiques- et d'autre part des disciplines périphériques (**d2**) – langue vivante, découverte du monde, anglais, arts visuels, musique et Education Physique et Sportive.

Au sein des plages proto didactiques (p), nous distinguons celles dites de transition dans l'espace-temps de la classe, ***les plages proto didactiques d'encadrement*** ***(pE),*** des déplacements entre la classe et la cour (récréations, arrivée et sortie d'école, pause méridienne), *les plages proto didactiques d'entrée et sortie* ***(pe/s).***

Les scripts sont mobilisés pour renseigner les indicateurs suivants, pour chaque plage horaire :

- **Sa durée et sa représentativité dans le curriculum** de l'espace/temps de travail (classe, préau, bibliothèque, gymnase …) soit, la journée de 6 heures amputée de la durée des déplacements en dehors de cet espace-temps (**6h**-pe/s).
- **Son emplacement** dans la journée.
- **Les échos de contenu** avec d'autres plages.
- **Les rapports de communication** entre enseignant et élèves. Plus précisément, « le lieu », la « place », l'endroit où psychologiquement, l'élève éprouve la sensation de jouer dans l'accomplissement de la tâche un « rôle bien à lui » (Reuter 2013, p.217).
    - au grain de la journée à partir des régulations de l'emploi du temps en cours de ½ journée et lors de la pause méridienne.
    - au grain de la plage horaire à partir des postures de l'enseignant et de celles des élèves (Bucheton 2009) qui intéresse le registre des rapports de communication dans la classe.

Le tableau ci-dessous résume **l'ensemble des indicateurs utilisés** pour constituer les corpus de données à partir du codage des 36 journées de classe observées.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Didactique 1 (d1)
Noyau central</td><td colspan="5">Didactique 2 (d2)
Disciplines périphérique</td><td colspan="2">Proto didactiques
Transitionnelles (p)</td></tr>
<tr><td></td><td>Noyau</td><td>Fr</td><td>Math</td><td>Av</td><td>Mu</td><td>LV</td><td>DDM</td><td>EPS</td><td>pE</td><td>pe/s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mésogénèse et chronogénèse</td><td colspan="8">-Bornage-Etiquetage : définition ; durées-poids par rapport au BO.
-Ecart « prévu » - « réalisé »</td><td colspan="2">Mise à jour du curriculum caché « journée »</td></tr>
<tr><td colspan="10">Répartition sur la journée (M/ AM voire quartiles)</td></tr>
<tr><td colspan="10">Echo entre « plages horaires »</td></tr>
<tr><td colspan="3">d2 et pE</td><td colspan="5">avec d1</td><td colspan="2">d1 et d2</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Topogénèse</td><td colspan="10">Participation des élèves : emploi du temps ; projet ; tâche ; fonctionnement quotidien…</td></tr>
</table>

III - LES MATHEMATIQUES DANS LA JOURNEE DE CLASSE : ETUDE DES 6 PE

1 Le curriculum d'une journée au CP

La durée annuelle moyenne des enseignements effectifs relevant des domaines disciplinaires du BO est de 4h17, **soit un peu plus de 71%** des 6 heures de la journée d'école. En miroir, **l'ensemble des plages proto didactiques** en constituent **un peu moins d'un tiers** (28,5% soit 1h43).

En fait, l'espace /temps de « travail scolaire (**d** + **pE**) » constitue, au niveau annuel, **85%** des 6h d'école : la grille horaire institutionnelle des programmes 2008 s'actualise donc sur un empan temporel quotidien de **5h05**.

L'étude des variations par période montre qu'en début d'année (avant les vacances de Toussaint), **la durée des plages didactiques** est plus basse représentant un peu moins de 66% et qu'au contraire, elle est plus haute tout au long des 2ème (70,8%) et 3ème trimestres (75% soit les ¾ des 6h quotidiennes). En miroir, les durées moyennes de l'ensemble des plages proto didactiques de début de 1er trimestre (autour de 2h) sont, au fil de l'année, constamment plus faibles selon **deux paliers successifs de diminution** : ponctuel, en fin de premier trimestre (1h45) et définitif, en début de second semestre (1h30).

L'évolution des caractéristiques du seul espace/temps de travail scolaire (d+pE) est marquée par :

- d'une part, **l'empan temporel** est en tout début d'année inférieur à **4h** ; en fin de 1er trimestre de **4h15**; et au cours du second semestre, autour de **4h30** (***soit + 30'***).
- d'autre part, **le poids moyen annuel des moments de transition en classe** (**pE**) de **15,76%** (48') diminue au cours du premier trimestre. Entre septembre et janvier, la baisse est de 8 points de représentativité dans le curriculum journée (-20'). Cette diminution bénéficie aux disciplines périphériques (**d2)** à part en mars (en faveur du noyau, d1).

1.1 Les rapports annuels entre les différentes plages didactiques (d1 et d2)

À l'échelle d'analyse de l'année, cohabitent d'une part, une sous **programmation horaire** de **d1** faible (3h16), quatre fois moindre que celle de **d2** (1h01). Ainsi la sur représentativité de **d1** par rapport à **d2** est de 13,8 points malgré une durée moyenne annuelle déficitaire de 30'.

À l'échelle d'analyse de la période, les rapports de représentativité au sein du curriculum entre **d1** et **d2** se situent tout au long de l'année au-dessus du prescrit (62,5% pour d1 contre 37,5% pour d2) mais ils sont

au fil des trimestres, de moins en moins en faveur de **d1**. D'environ **81,7%,** avant Toussaint, le rapport fond jusqu'en juin de 10 points (**71%**) même si mars rompt ponctuellement cette dynamique (le rapport retrouvant ses valeurs de début d'année).

1.2 Les rapports entre le français et les mathématiques, au sein du noyau central

Plus précisément, au sein du noyau central (**d1**), *la faible sous programmation annuelle* cache des réalités différentes pour chacune des deux disciplines : si nous enregistrons une quasi conformité de la programmation français (2h17 pour 2h30 attendues), le déficit est marqué en mathématiques (58' contre 1h15 attendu). C'est ainsi que la programmation annuelle du noyau central est à 76,3% composée du français contre 23,7% de mathématiques. C'est au-dessus du rapport préconisé par le BO de 62,5% de français contre 37,5% de mathématiques.

À l'échelle de la période, le français au sein du noyau est sur représenté par rapport aux mathématiques lors des deux premiers trimestres tout en diminuant progressivement, excepté mars. Les durées moyennes par périodes sont alors pour le français déficitaires de 7' à 12' (4,7% à 8% de l'attendu) et pour les mathématiques de 29'à 18' (30,5% à 19% de l'attendu).

Au 3ème trimestre, les mathématiques s'avèrent par rapport au français surprogrammées. C'est en juin que cela est le plus manifeste avec +6,7 pts en faveur des mathématiques avec une durée moyenne conforme à l'attendu pour la seule fois de l'année.

2 Cartographie annuelle : rapports de durées au sein du curriculum journée

Alors que l'empan temporel de l'espace/temps « de travail scolaire » augmente de 10' au cours de l'année et que la durée des plages proto didactiques d'encadrement diminue de 20', les mathématiques progressivement sont présentes à hauteur de l'attendu institutionnel.

À l'opposé, le français au 3ème trimestre est sous-programmé par rapport au prescrit de 20% tandis que les disciplines périphériques continuent à être davantage présentes dans la dynamique de fin de 1er trimestre, restant fortement déficitaires (un peu moins de 50% de l'attendu du BO).

La cartographie ci-dessous fait apparaître par période (P1 signifie la première période du travail collaboratif de septembre) ayant eu la valeur de l'écart entre le prescrit et le réalisé en termes de sous programmation (le réalisé est inférieur à l'attendu) ou de sur programmation (réalité inverse).

1er Trimestre 5/09-16/12		2ème Trimestre 3/01-13/04		3ème Trimestre 30/04-4/07	
06 septembre -Toussaint		*10 novembre -Noel*	*Janvier -Mars*		*Mai -Juin*
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**

++++ →

(p)	plus **de 2h**	(p) **1h45**	(p) stabilisé **1h30** avec (P6 1h20)

pE	plus **d'1h**	**moins 50'**	autour de **40'** (P6 45')
pe/s	plus **d'1h**	**55'**	autour de **50'** (P6 46')

Fr	**sous**R de 4,7%	**sous**R légèrement (de 8%) de façon stable		**surR**	**sous**R autour de 20%
M	**sousR** de 40%	**sousR** de 27% progressive			**ok**
d2	**sous**R de 65%	**sous**R de 72%	**sous**R (p/r P1) un peu plus de 50%	**sous**R =P1	**sous**R p/r à P1 (P6) à un peu moins de 50%

(d)	moins de **4h**	(d) **4h15** +15'	(d) autour de **4h30** +15' (P6 4h40)

→ ++++

Légende : sous-représenté (**sous**R) ; surreprésenté (**sur**R) ; représentativité conforme au prescrit (Ok)

3 Caractéristiques générales des mathématiques au CP

La durée moyenne annuelle par jour est de **58'** contre 1h15 prescrite. Les mathématiques sont donc annuellement programmées à **78%** de l'attendu institutionnel. Ceci correspond **à un poids** sur l'ensemble de la journée de **16,3%, ou sur le seul espace / temps de travail scolaire** (6h-pe/s) de **19,3%.** Avec ce dernier référentiel temporel, le déficit de programmation par rapport à la prescription (20,8%) est faible (1,5 point).

L'évolution horaire sur l'année, a contrario de celle du français, procède d'une hausse à partir d'une sous programmation en septembre (46') de 40% par rapport aux 1h15 attendues Précisément :

- dès la suite du 1er trimestre, la durée moyenne quotidienne gagne 9' (55') ;
- à partir de janvier, elle augmente de façon faible mais continue (une heure en mars) ;
- enfin, en juin, elle atteint l'attendu institutionnel avec un gain de 15' par rapport à mars.

En fait, cette augmentation ne reflète pas **la logique annuelle d'auto prescription des PE**. Effectivement, les mathématiques ne sont pas davantage prévues en fin d'année. Elles y sont anticipées à moins de 25% à 30% du prescrit a contrario de janvier (1h16), et moindrement qu'en septembre (-10%). Nous le voyons **les choix d'ajustements curriculaires lors de la journée d'école défavorables aux mathématiques en septembre leur deviennent favorables de façon marquante en toute fin d'année**.

Dès lors *l'écart entre le prévu et le réalisé sur l'année* est inférieur en septembre et janvier (-20') et inversement, supérieur en juin (+20'). Notons que sur les quatre autres périodes, il est peu marquant (-4' à +4').

Les plages horaires dévolues aux mathématiques sont présentes annuellement à **70,7% le matin,** selon des moyennes pour le **matin** de **41'24** contre **17'10** pour **l'après midi** (soit +34'). Au cours de l'année, l'écart entre les deux demi-journées tend à être le plus prononcé au 1er trimestre et le moins au second semestre (mars et juin). En fait, les pratiques des six PE sont contrastées. La répartition journée est :

- **stable** au cours de l'année chez les **trois PE les plus expérimentés au CP.**

  Pour deux d'entre elles, en faveur du *matin* (la PEMF **Ca** et la PE ayant une expérience de 6 ans dans le métier et de 4 au CP, **P**) et pour la troisième, selon un *équilibre entre les deux-demie journées* (**S** la plus expérimentée dans le métier et au CP**).**

- **variable** au cours de l'année pour les trois autres PE, dont les **deux PE les moins expérimentés** (**R et E**) et **la seconde PEMF** (**Cé**).

  Pour Cé : le fruit d'un questionnement professionnel sur le rythme de la journée l'a conduit à faire des essais d'emploi du temps sur les deux jours où elle a en charge les élèves. C'est ainsi que ne faisant que des mathématiques le matin en septembre, elle n'en fait plus que l'après-midi en juin suivant une règle personnelle forgée en cours d'année.

  Pour R : la tendance générale est au matin. En effet, la journée de septembre est « accidentelle » : les mathématiques de l'après-midi étaient prévues le matin. Il les relaye en après-midi, après une matinée où il ne cesse de prendre du retard sur son programme du jour. Lors des entretiens, il dit qu'à ce moment de l'année, il « sacrifie les mathématiques et se rattrapera plus tard », d'autant plus qu'il ne bénéficie hebdomadairement qu'entre Toussaint et Noël du maître E (co-interventions autour des aspects phonologiques de l'apprentissage de la lecture).

Enfin, de façon générale, en ce qui concerne **les domaines et les contenus,** les trois quarts des plages relèvent du premier domaine, **« nombres et calculs ».** Ce domaine (n°1) apparait être investi chaque journée par tous les PE (sauf **R**, biais d'enquête).

L'emparement de la prescription *« d'un entraînement quotidien* **au calcul mental** *(qui) permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés »* (BO 2008, p. 18) n'est plus manifeste à partir de janvier, il se fait sous forme :

- de séance décrochée à la séance de mathématiques du jour (**S, E, Ca**) ;
- lors de la séance de mathématiques quotidienne (**Cé**) ;
- lors du travail sur le cahier du jour (**P**, **S** en fin d'année) relatif en plus du calcul mental, aux exercices d'écriture en français (entraînement au geste graphique).

Les domaines 2 (géométrie) et 3 (grandeurs et mesures) représentent un tiers des enseignements. C'est ainsi que pour le quatrième domaine « **Organisation et Gestion des données** », nous n'avons pas observé de séances lui étant strictement réservées. D'ailleurs, aucune page de cahier journal n'y fait référence.

4 Cinq configurations de plages d'enseignements des mathématiques

Nous avons repéré **quatre** configurations de plages horaires en plus de la **configuration classique voire canonique**[2] d'une séance insérée dans une séquence d'apprentissage (qui concerne les domaines 1,2 et 3).

[2] D'évaluation, découverte, consolidation, réinvestissement… Dénominations en référence aux attentes de la sphère de la formation (intervenants ESPÉ et CPC).

La catégorisation mobilisée s'appuie sur l'opposition que fait Reuter (2007) entre « pratiques à vivre pour les élèves et des séances formelles »[3] .

Configurations repérées	Illustrations de plages observées	Enjeu principal
Séance classique	CM, domaine 1 Domaines 1-2-3 (absence domaine 4) *(Eval, découverte, entraînement)*	**Epistémique** *depuis une entrée principalement disciplinaire*
Séance « projet » *(marquée par l'opportunité)*	**Séance ponctuelle « mathématiques » :** Cé (rallye mathématiques) **Séance conçue « non mathématiques » :** R (projet année circons-national (argonimaux) : quadrillage / DDM) ; fin d'année : conclure le projet « correspondance » : Cé et Ca (CO)	**Double enjeu épistémique et pragmatique** : *gagner du temps sur le programme à faire*
Enseignement incarné (pratique à vivre)[4] *(marquée par l'opportunité)*	**1ère enclave du matin, autour des appels** -Ca : au 3ème T = problèmes additifs et concepts d'équivalence de quantité -Cé : déléguation appel **Séance plage d2 :** Cé (tracés après AV) **Au cours de la journée :** S (manipulation toute la journée de l'horloge)	
Séance « jeux »	**Jeux de société uniquement mathématiques** (Cé échecs) **Jeux de société Fr/mathématiques** (Cé, P, E voire R)	**Enjeu pragmatique** de pilotage temporel **et intersubjectif** de respiration : *la place du jeu*
Entraînement autonome	**-Plages instituées Fr/Mathématiques travail autonome, en ateliers :** E et P **-Fin de séance** : sous forme de coloriages magiques. Plus exceptionnellement, jeux construits (R, Cé)	**Triple enjeu épistémique, pragmatique et inter relationnel** : *gérer les différences de vitesses de travail pour garder le contrôle sur le groupe classe*

IV - LE CURRICULUM « MATHEMATIQUES » AU CP SUR L'ANNEE SCOLAIRE : ETUDE DE CAS

1 Variations inter individuelles de la place des mathématiques dans l'année

Annuellement, la place des mathématiques dans le curriculum du « temps de classe (6h-pe/s) » est légèrement majorée chez **E et Cé** et minorée chez **S et Ca**. Elle est en deçà de 5 points chez **R et P**. La trajectoire professionnelle n'apparaît pas prépondérante.

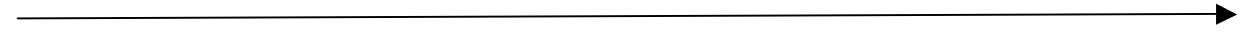
[3] Reuter (2007, p. 67) en évoquant l'Education civique qu'elle est d'autant moins identifiée (disciplinairement) « qu'une partie de ses composantes (vie de la classe, la citoyenneté scolaire…) ne fait pas l'objet d'un enseignement formel, classique mais **est incarné sous formes de pratiques à vivre** ». Le dilemme est alors de bénéficier du statut de curriculum caché » et en même temps de privilégier une secondarisation à l'action de « faire ».

[4] Reuter (2007, p. 67) évoquant l'Education civique qui est d'autant moins identifiée (disciplinairement) « qu'une partie de ses composantes (vie de la classe, la citoyenneté scolaire…) ne fait pas l'objet d'un enseignement formel, classique mais **est incarné sous formes de pratiques à vivre** ». Le dilemme est alors entre repérage (quant aux contenus, finalités, enjeux) d'un apprendre (voire un enseigner) et adhésion (motivation, enrôlement) des acteurs.

Ceci correspond à *des sous programmations horaires* pour tous, sauf **Cé** qui atteint les 1h15 prescrites. Ainsi, **P et R** font des mathématiques en en amputant l'horaire attendu à hauteur de 37% (soit plus du tiers), tandis que pour **S**, la *sous programmation* est d'un quart des 1h15 et qu'elle est de l'ordre de 15% pour **E et Ca.**

Ces deux dernières PE présentent, *au cours de l'année*, les variations les moins fortes. Leurs durées quotidiennes ne descendent jamais en dessous de 45' et sont le plus souvent d'au moins 1h. Ajoutons que l**es écarts annuels moyens** entre l'auto prescrit et le réalisé sont significatifs chez tous sauf **E.** Ils expriment un déficit annuel par rapport au prévu pour **P et Ca** ou une plus-value pour la seule **Cé.** Quant à **R,** les écarts conséquents et alternativement positifs comme négatifs s'annulent sur l'année**.**

Ci-dessous, une schématisation des profils de chacun :



----- ++++

Prévu	**S** 50'	**R** 51'25	**P** 1h01'15	**Cé** 1h02'30	**E** 1h08'30	**Ca** 1h13
Ecart Prescrit (BO) /Réalisé	*seul 3ème T* **-6'**	**-4'**	**-15'**	**+11'**	**-3'** *(sans P7)*	**-10'**

Réalisé	**R**	**P**	**S**	**Ca**	**E**	**Cé**
durée	**47'**	**46'**	**56'**	**1h02**	**1h06**	**1h14**
représentativité	**15,47%**	**15,36%**	**19,02%**	**19,34%**	**22,7%**	**25,5%**

Remarque à propos de la représentativité : le pourcentage indique la valeur de la place des mathématiques dans le curriculum réel quotidien sur l'année (moyenne annuelle)

Enfin, au cours de l'année, **la tendance générale d'une programmation mathématique** progressivement plus importante au fil de l'année n'est repérable strictement chez aucun PE, même si chez **Cé, P** et moindrement **Ca** existe une dynamique d'augmentation à partir de septembre.

2 La place des mathématiques dans le curriculum réel de 3 PE

En fonction de l'importance accordée aux mathématiques annuellement dans le curriculum, nous avons retenu parmi les 6 enseignants (cf le continuum ci-dessus), celui qui en fait le moins (**R, le plus jeune dans le métier**), celle qui en fait le plus (**Cé expérimentée, anciennement maître E et PEMF**) et une de celle qui se situe entre eux deux, (**Ca une des plus expérimentée au CP et PEMF**).

Nous nous appuyons sur les données du tableau ci-dessous qui présente pour chacun par période la durée des mathématiques enseignées lors de la journée observée et la présence à laquelle cela correspond dans le curriculum réel de l'espace/temps de « travail scolaire » (6h-pe/s) par rapport aux autres domaines.

d1 *m : 19,32 %*	**R**	**Cé**	**Ca**
P1 46'	*25'*	*44'*	*55'*
15,57%	**8,1%**	**15,5%**	**17,8%**
P2 55'	*57'*	*1h10*	
18,73 %	**19,3%**	**24,1%**	
P3 55'	*50'*	*1h08*	*1h07*
17,88 %	**16,7%**	**22,5%**	**20,6%**
P4 57'	*25'*	*37'*	*1h*
18,56 %	**8,2%**	**11,3%**	**18,8%**
P5 1h01'	*46'*	*1h26 + 44'/2*	*1h05*
19,77 %	**15%**	**28,3% (+14,5)**	**20,1%**
P6 1h03'	*1h13*		
20,2 %	**23,1%**		
P7 1h15'	*55'*	*1h53*	*1h04*
24,5 %	**17,9%**	**37%**	**19,4%**

2.1 Les mathématiques chez R, PE 2ème CP et d'année d'enseignement (T2)

Rapides précisions contextuelles

La classe de **R** comporte un nombre d'élèves qui fluctue en cours d'année (au plus fort 28 et au plus faible 24) dans une école Zep située aux pieds de cités. Il y est depuis l'an passé, sa première année d'enseignement. En mathématiques, il travaille avec *Vivre les maths* et conçoit les évaluations en fin de période avec sa collègue de CP qui a une dizaine d'année d'ancienneté dans le niveau. Il cherche à compléter les propositions du manuel lors d'un début de séquence à partir d'une situation de « manipulation ». En fait, il prend des libertés dans l'usage du fichier (ordre des enseignements ; recours aux exercices pour gérer les vitesses de travail).

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Annuellement, avec **P** (4ème CP et 6ème année), il est celui qui fait le moins de mathématiques (47') et qui lui accorde le moins de place dans la journée (autour de 15,5%). La programmation horaire est donc autour de 62% pour une représentativité au sein du curriculum journée de 5,5 points inférieures à l'attendu du BO. **Au cours de l'année**, nous repérons deux journées atypiquement basses (25', moins de 10% du curriculum journée) : septembre (il sacrifie les mathématiques pour faire tout « son français ») et janvier (les deux évaluations sont plus rapides que prévue).

Ajoutons que l'écart entre prévu et réalisé enregistre des variations d'une journée à l'autre en ce qui concerne sa nature (en faveur ou non du réalisé) et de sa durée. Ainsi, l'écart moyen annuel qui est nul, **ne signifie pas au quotidien une adéquation entre l'anticipé et le réalisé.** Notons que le prévu est toujours en deçà de la prescription même au plus haut en juin (1h05 soit 86% de l'attendu) et qu'il est variable (45' à 1h).

En fait, l'année de **R** est marquée par ***son inspection*** (T2), ce qui redouble sa focalisation sur l'enseignement de la lecture puis de la production d'écrit (à partir de mars), alors même que l'expérience de l'année précédente lui a procuré des insatisfactions. C'est ainsi qu'il recherche lors des entretiens plus particulièrement à échanger sur les séances de français et qu'il place des évaluations mathématiques lors de notre venue, à partir de janvier (soit quatre fois sur sept). Ajoutons à cela le partenariat avec le maître E en novembre-décembre pour des séances de phonologie, contraignant l'emploi du temps hebdomadaire (deux enclaves placées) et le rythme d'avancée dans l'apprentissage des sons.

Pour comprendre sa programmation mathématiques, en plus de cette focale mise sur le français, deux autres facteurs sont à signaler relatifs à des activités mathématiques non répertoriées : son inscription à un ***projet national*** (partenariat CNRS-EN) proposé par sa conseillère pédagogique autour du suivi du déplacement de manchots équipés de balises Argos. Il voit naturellement une filiation avec le travail de vocabulaire de positionnement au programme de mathématiques et décide de le traiter dans le cadre de la ***découverte du monde***. Le deuxième élément à noter est l'inscription à son emploi du temps au fil de l'année (avec une amplification en fin d'année), d'une enclave « jeux » le vendredi après midi, s'inspirant des discussions avec **Cé**. En fait, cela fait écho avec une représentation de l'enseignement ludique et à l'importance qu'il attribue pour apprendre à la « manipulation ». D'ailleurs, en novembre, il conçoit une activité préalable aux exercices du fichier pour commencer la « longueur ».

2.2 Les mathématiques chez Ca, nouvellement PEMF, 8ème CP et 14ème année d'enseignement

Rapides précisions contextuelles

La classe de **Ca** comporte entre 21 à 22 élèves dans une école d'application située dans une zone pavillonnaire, accueillant une forte population d'élèves habitant dans une même résidence de fonctionnaires (gendarmerie). Elle arrive dans cette école après avoir toujours enseigné en Zep. C'est un choix contraint car, venant d'obtenir le CAFIPEMF[5] , la règle dans le département est d'enseigner dans une école d'application. Elle découvre donc de nouveaux collègues (pas de partenariat), un nouveau fonctionnement d'école (l'horaire des sonneries ; une classe de plain-pied sur la cour) et un public élèves très « scolaire » qu'elle n'a jamais connu. Elle est d'ailleurs également surprise par leurs performances scolaires. En tant que PEMF, elle prend en charge deux jours par semaine la classe (comme **Cé**) la conduisant à n'avoir à enseigner en mathématiques que les domaines calcul et nombre et les grandeurs.

Elle travaille depuis des années avec *Cap Maths* (Hatier) et ses kits « matériel » sont confectionnés et répertoriés par unité d'enseignement. Elle présente une grande maîtrise dans les routines de pilotage in situ de ce matériel (quand distribuer ? ; dans quel ordre ? ; quelle sollicitation des élèves ?) qu'elle transmet à sa collègue pour assurer la continuité des apprentissages.

Elle a choisi cette année de ne pas prendre le fichier pour les élèves car, jusqu'à présent, elle n'arrivait « au bout » ce qui exigeait des justifications aux parents.

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Ca présente les traits de la pratique la plus stabilisée autour de l'enseignement des mathématiques qui pèse dans le curriculum journée un peu moins des 20,8% attendus (19,3%). La durée moyenne annuelle de programmation est de 1h03 soit autour de 82% de l'attendu.

Au cours de l'année, la programmation réalisée admet peu de fluctuations. Les plages mathématiques sont prévues et effectivement réalisées exclusivement le matin.

Le déficit annuel entre ce qu'elle prévoit et fait est d'une dizaine de minute. Ce résultat est essentiellement dû à deux facteurs :

[5] Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maitre Formateur

- l'écart de la journée de septembre (-26,7% soit -22') alors que **Ca** a changé d'école et qu'elle est surprise par les compétences et performances de ses élèves ;
- l'écart de juin où elle sur évalue le passage des évaluations (1h50).

En effet, la programmation horaire quotidienne prévue est la plus stable des PE au cours de l'année, se situant autour de 87% (1h05) de l'attendu (à part en juin). C'est qu'au cours de l'année, **Ca** ne supprime jamais une plage, ni même n'en réduit la durée fortement.

Ajoutons une singularité de **Ca** : la présence de contenus « mathématiques » lors de plages proto didactique d'encadrement autour de l'appel (en mars et juin).

2.3 Les mathématiques chez Cé, PEMF depuis 2 ans, 3ème CP et 14ème année d'enseignement

Rapides précisions contextuelles

La classe de **Cé** comporte entre 16 et 19 élèves (au tout début) dans une école d'application, classée Zep. Elle accueille une Assistante de Vie Scolaire le matin pour la suppléer dans l'accompagnement d'une élève. En tant que PEMF, elle prend en charge deux jours par semaine la classe (comme **Ca**), la conduisant à n'avoir à enseigner en mathématiques que les domaines calcul et nombre et la géométrie. Elle n'a pas repris le fichier Cap Maths pour ses élèves cette année et a choisi d'introduire un cahier (grand format) de mathématiques. Elle s'inspire du manuel qu'elle croise avec un autre (« jouer avec les mathématiques ») pour concevoir sa programmation et ses progressions. Elle travaille en collaboration avec son collègue de CP également maître formateur.

De plus, **Cé** a un rapport « d'autorisation à la prescription » que son emploi du temps « officiel » atteste, ne comportant aucune enclave d'Instruction Civique et Morale (ICM) et affichant des enclaves non disciplinaires (jeux : français et mathématiques). En fait, en tant qu'ancienne maître E, tout doit concourir à motiver et à favoriser les apprentissages du noyau dur (français et mathématiques) ; ainsi instrumentalise-t-elle des formats de séance (journal des apprentissages, attention et concentration) et les jeux (de société et des dérivés construits) pour enrôler les élèves.

Enfin, rappelons sa recherche au cours de l'année d'une enclave plus favorable aux mathématiques que celle de la deuxième partie de matinée après la séance principale de lecture. C'est ainsi qu'en mars et juin, elle conduit une séance (domaine 1) d'une heure après la récréation de l'après-midi à partir de quatre phases alternant modalité de travail (individuel, collectif), type d'entrée et outils de travail (exercice sur le cahier ; jeu oral ; question / réponse sur ardoise).

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Annuellement, elle est la seule à avoir une programmation horaire conforme à l'attendu (BO) et est celle qui accorde le plus de place aux mathématiques dans le curriculum de l'espace-temps de travail (25,5%).

Elle atteint l'attendu des **20,8**% dès octobre ; en mars et juin les mathématiques représentent plus **du tiers** des enseignements quotidiens. Cette dynamique annuelle d'augmentation est rompu lors de la journée de janvier alors qu'elle accuse un déficit horaire de 56% par rapport à ce qu'elle avait prévu (37' contre 1h25) : en effet, la participation au défi mathématiques pour la première fois avec sa classe et de celle de son collègue, la conduit à « prévoir large » en augmentant de près de 30' la durée habituelle des mathématiques, ajoutant une plage l'après-midi. Or, le défi ne dure que l'unique plage du matin, et moins longtemps qu'anticipé.

La programmation mathématiques de **Cé** se caractérise également par le fait qu'elle procède d'un écart faible à l'auto prescrit de toutes ses plages (séances) et que sur l'année, le prévu est même plus bas que le réalisé. Ce phénomène se cristallise en deuxième partie d'année (mars et juin) autour de l'étiquetage « mathématiques » *a posteriori* (contractualisation PE-chercheur) des plages signalées échecs et jeux dans le cahier journal à l'origine du doublement de la durée prévu de 55'. Ce sont d'ailleurs les journées de mars et de juin qui positionnent la programmation mathématiques de **Cé** comme la plus forte et la seule conforme à l'attendu institutionnel. Les échecs ou les « jeux, de société ou construits pour des séances de

découverte » de début d'après-midi complètent les enseignements de cette discipline sous une forme ludique, et non affichée comme tel aux élèves.

En fait, nous retrouvons cette entrée par le jeu et par des modalités de travail en petits groupes dans les séances mathématiques elles-mêmes.

3 Les ressources au cœur de la dynamique de la programmation des mathématiques au CP

Ce qui définit la dyade « sens -efficience » de l'enseignant polyvalent pour le registre singulier de son activité qu'est l'enseignement des mathématiques, est à l'aune de nos résultats, un jeu **de sept ressources principales** en plus de celle qu'a été le collectif de travail lui-même.

- L'emparement de ***la prescription de l'enseignement du français***. Il exprime particulièrement au CP la gestion de la **pression** (sociale, des parents, de l'institution, des pairs et des élèves) autour de la ***réussite à enseigner la lecture.***
- Concomitant, la ***conscience disciplinaire[6] du français***, et particulièrement le caractère transdisciplinaire de ses apprentissages et une conception intégrée de l'apprentissage de la lecture autour du dire-lire-écrire.
- ***La conscience disciplinaire des mathématiques***, et particulièrement : l'entrée par le jeu ; les fonctions du matériel pour apprendre/ pour enrôler (motiver) ; le sens recherché pour des élèves de cet âge à appréhender certaines notions.
- ***Le rapport aux programmes du BO de 2008*** à travers d'une part la marge de manœuvre (horaire et étiquetage disciplinaire) que s'autorise le PE pour *formaliser son emploi du temps hebdomadaire* et d'autre part, *son usage effectif* entre ajustement ou strict respect.
- ***Les documents sources*** (manuel, guide du maître…) **de conception** de l'enseignement (familiarité ; positionnement de concepteur ou d'exécuteur ; contenu même de la ressource dont l'existence ou non d'un kit matériel).
- ***Les outils des élèves*** qui sont manipulés au quotidien (conséquences sur le pilotage et le repérage de la discipline par les élèves).

En fonction des PE, jouent trois autres ressources :

- ***le collectif*** de l'école (collègue de CP) pour la conception et l'évaluation de contenus et l'équipe de circonscription (CPC) pour des entrées « originales » dans le programme de maths (Argonimaux ; rallye ; échecs) ;
- ***le type de pilotage*** du cours d'action de la journée, davantage planificateur ou régulateur (ajustement à soi, aux élèves, aux événements de l'école) ;
- la convocation ***de présupposés ou connaissances de la maternelle*** pouvant inspirer une modalité de travail en « ateliers » ou fondant une définition des pré- acquis des élèves en mathématiques.

Enfin, nous devons citer une dernière ressource introduite par notre méthodologie d'enquête qui a offert aux PE près de 80 heures d'échanges. Ce **collectif de travail** a eu une double conséquence :

---

[6] Pour Reuter (2007) le terme désigne la manière dont « les acteurs sociaux (re)construisent les disciplines scolaires ». Mettre en œuvre ce concept, c'est s'atteler à débusquer et expliciter les formes de (re)constructions (des disciplines scolaires). Le concept vise à outiller (p. 62-63) une approche descriptive « des formes de conscience, appréhendées au travers de 3 composantes (finalité, contenu, repérage), de leurs relations et de leur structuration en une totalité » et une approche « descriptive et évaluative des « niveaux ou degrés » de clarté ou de pertinence de cette (re)construction ». En fait, en introduisant ce concept, Reuter désire rompre avec les termes de représentations et de rapport à (employés sans précaution méthodologique ni théorique souvent) et insister sur l'idée de construction, posant « qu'une discipline n'existe pas indépendamment de ses espaces d'actualisation » (p. 63).

- *lors de l'année scolaire* : pour **Cé,** en terme de prise de conscience de la complexité des apprentissages numériques ; pour **S,** de prise de conscience de la complexité des tâches proposées par le manuel et de **Ca,** de nécessité d'approfondir davantage l'analyse des obstacles des élèves ; **E,** de fonctions de monstration de l'enseignant et de la manipulation du matériel ;
- quant à **R**, c'est davantage en termes de rééquilibrage de programmation avec le français. Notons qu'**E** et lui participeront les deux années suivantes à une recherche collaborative concernant les apprentissages en numération au CP, acceptant de laisser leur manuel et que **S** changera de manuel (elle délaisse *Diagonale* avec lequel elle travaille depuis toujours pour *Cap Maths,* le manuel de référence de **Ca** et indirectement de **Cé**).

Ces ressources du métier sont au cœur de la place accordée quotidiennement au cours de l'année aux mathématiques par l'enseignant polyvalent. Pour autant, elles ne sont pas mobilisées par tous. De plus, elles s'inter fécondent de façon singulière, définissant ainsi les enjeux épistémiques, inter subjectifs et pragmatiques du PE, ainsi que le jeu de tensions qui les anime.

V - CONCLUSION : UN INTERCALAIRE GENERIQUE « ENSEIGNER AU CP »

Nous dirons que la situation d'enseignement/apprentissage au CP est saisie par les professionnels, quelle que soit leur expérience selon **deux règles du métier** qui gouvernent l'ensemble de ses choix curriculaires quotidiens et que l'avancée dans l'année scolaire fait évoluer :

- **La première** a trait aux apprentissages disciplinaires « français ».

  Il s'agit « d'apprendre à lire à tous ses élèves » puis à partir de janvier de « chercher à faire autre chose que du français et des mathématiques » tout en bouclant le programme de mathématiques que le PE se redéfini ou non. En effet, ici, l'adhésion à l'idée de cycle (et donc qu'en CE1 ils verront ce qui n'a pas été fait) et la dynamique collective locale jouent pleinement, à côté de l'autorisation ou non d'un écart avec les progressions proposées par le BO (rapport à la prescription primaire) que s'accorde le PE.

  La conséquence est un compromis opératoire lors de l'ajustement en situation, entre « faire tout ce qui est prévu » et « aller au bout des objectifs du jour en français ». S'il conduit à « sacrifier les mathématiques » en tout début d'année, il joue en fin d'année nettement en faveur de cette discipline.

- **La seconde** relève des compétences 6 et 7 du socle commun (2006) et de l'acculturation aux évolutions de la forme scolaire entre « maternelle » et « élémentaire » d'une part, et aux habitudes plus personnelles de l'enseignant d'autre part.

  Il s'agit là de rendre autonomes les élèves pour se mettre au travail puis dès novembre « y rester seuls » afin de gérer l'hétérogénéité en lecture, plus ponctuellement, les vitesses de travail différentes dans les séances mathématiques (et de découverte du monde). En effet, le style de pilotage de l'enseignant est souvent serré, accompagnant « pas à pas » l'avancée du scénario didactique. Les caractéristiques de la population élèves semblent influer davantage à partir du second semestre. Joue également pour les mathématiques, le choix ou non d'introduire de la manipulation, et donc d'avoir à gérer préparation en amont puis lors de la séance, distribution, rangement et attention à la nature de la manipulation pendant l'activité et les phases orales collectives.

L'enseignement des mathématiques dès lors est sous le sceau de cette double règle qui ne se traduit pas de la même façon en fonction de la trajectoire de socialisation professionnelle (vivier d'expériences de classe : types et années d'expériences ; rencontres professionnelles : pairs, formateurs…), du cursus scolaire-universitaire et de la trajectoire biographique.

Il semblerait pour autant que l'inexpérience au CP favorise une sur programmation « français », le doute et le stress de ne pas remplir sa mission s'avérant plus prégnante chez lui. Ceci peut être accentué pour :

- l'enseignant débutant par la peur du jugement de l'institution voire à de ses pairs,
- l'enseignant plus chevronné qui change d'école (ou/et de circonscription) ou « se sait inspectable ».

Enfin le contexte école joue également dans l'adressage plus ou moins fort effectué envers les parents et la population élèves.

A contrario, ce qui semble favoriser une programmation plus conforme : l'existence d'un kit matériel (fabriqué lors des années précédentes ou fourni avec le manuel) ; une conscience disciplinaire mathématiques basée sur le jeu d'une part et d'autre part sur une pratique régulière en situation d'entraînement ou d'imprégnation. Ceci renvoie à ce que nous nommons la conscience de tissages entre disciplines mais aussi aux caractéristiques de l'ajustement lors du face à face avec les élèves, à ce qui est vécu en fonction du projet mais aussi de ce qui émerge dans l'action de l'activité conjointe PE-élèves. C'est-à-dire du sens du moment opportun.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) : L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **Vol.27, n°2**, 221-252.

BAILLAT G., ESPINOZA O., VINCENT J. (2001) : *De la polyvalence formelle à la polyvalence réelle : une enquête nationale sur les pratiques professionnelles des enseignants du premier*. Revue Française de Pédagogie, **n°134**, INRP

BERNSTEIN B. (1975) : *Langage et classes sociales codes sociologiques et contrôle social*. Editions de Minuit, pp263-305.

BUCHETON D. (Dir.) (2009) : *l'agir enseignant : une question d'ajustement*. Octares

CHOPIN MP. (2007) : *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques.* Thèse d'état Bordeaux 2, 2007.

CLOT Y. (2008) : *Travail et pouvoir d'agir*. Le travail humain. Puf

GARNIER P. (2003) : *Faire la classe à plusieurs. Maîtres et partenariats à l'école élémentaire*. Pur

JULLIEN F. (2001) : *du « temps » Eléments d'une philosophie du vivre*. Grasset

MARCHIVE A. (2003) : *Ethnographie d'une rentrée en classe de cours préparatoire : comment s'instaurent les règles de la vie scolaire ?*. Revue Française de Pédagogie, **n°142**.

REUTER Y. (2007) : La conscience disciplinaire présentation d'un concept. *Education et didactique*, **vol1-n°2**, 57-71. http://educationdidactique.revues.org/175

VINATIER I. (2013) : Le travail de l'enseignant. Une approche par la didactique professionnelle. De Boeck

VII - ANNEXE 1 : LES SIX ENSEIGNANTS DE CP ET LES SEPT PERIODES DE L'ANNEE

Les 6 PE

Six professeurs des écoles enseignant en CP, dans des établissements sensibles de communes différentes de Seine saint Denis ont donc été contactés en amont de la rentrée 2011.

Une charte a permis de contractualiser les enjeux du travail, la fréquence et la nature de celui-ci.

La population retenue procède de la volonté de constituer un groupe hétérogène afin d'alimenter de la controverse. Trois critères ont été croisés : l'ancienneté dans l'exercice du métier d'enseignant ; l'ancienneté dans l'enseignement du CP ; l'habitude à parler de sa pratique et à l'analyser (critère relatif au statut d'enseignant ou d'enseignant - formateur : PEMF).

Voici le collectif constitué définitivement autour du 1er septembre 2011 avec l'arrivée d'**E** :

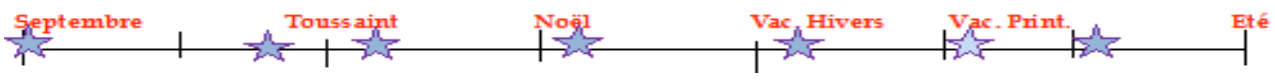
Circonscription	1	2	3	4	5	6
Spécificité école	Zep	Non classée	Ecole éclair	Zep	Zep	Ecole ++

PE	P	S	E	R (Homme)	Cé	Ca
Statut	PE (T6)	PE très expérimentée	PE (T4)	T2 débutant	MF ½ tps	MF 1/2 tps
Ancienneté Niveau CP au 1er sept 2011	4ème année	10 ans	2ème année	2ème année	3ème année	8ème année (dont en plus des années CP/CE1)
Ancienneté PE au 1er sept 2011	Début de 6ème année	35ème année	Début de 4ème année	Début de 2ème année	Environ 15ème année dont 3 en tant que MF et une partie maître E	Environ 14ème année dont la 1ère en tant que MF
Prise de contact Chercheur-Enseignant	27.05.2011 11h40-12h10 à son école	01.06.2011 14h30-15h30 à son école	08.09.2011 17h30 à son école	Au téléphone le 22 juin (30') après s'être croisé à son école	De visu depuis le projet de thèse et pré enquête 2009 + série mail 22-25 juin	De visu en fin d'année + mail
Relations avec le Chercheur	Aucune collaboration précédente. Contactées par le biais des PE de leur école respective (puis appel téléphonique).		Id. Contacté grâce à la CPC de la circonscription	Id. Contacté grâce à la CPC l'ayant suivi en T1	Collaboration dans le cadre de la préparation au Cafipemf. Contactées par la chercheuse. **Nb :** travail avec Cé dans le cadre des PES	

Les 7 périodes de travail de l'année scolaire 2011-2012

Elles ont été co-définies par le chercheur et les PE à la suite d'un entretien en juin 2011 en amont de la rentrée scolaire. Le choix procède de la formulation des enseignants de deux moments critiques dans l'année, scandant le premier semestre : autour des vacances de Toussaint et janvier.
La collaboration de chacune des sept périodes s'est étendue sur environ un mois :

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
8 sept-5 oct	13 oct-9 nov	17nov. -14 déc.	16 janv - 11 fév.	8 mars-11avril	4-12 mai	1juin -4 juillet



VIII - ANNEXE 2 : RELECTURE DE LA GRILLE HORAIRE DES PROGRAMMES 2008 POUR DES REFERENCES QUOTIDIENNES

Les « programmes nationaux de l'école primaire et ses grilles horaires » du BO n°3 du 19 juin 2008 (p7) définissent pour chaque domaine d'enseignement les connaissances et compétences à atteindre dans le cadre des cycles ; ils indiquent les repères annuels pour organiser la progressivité des apprentissages en français et mathématiques » (p10 lors du préambule).

Nous les retenons comme premier outil pour enquêter sur le curriculum réel du cours d'action de six heures de « classe » selon une approche ergonomique.

Pour disposer d'un référentiel journée du curriculum, nous avons complété le tableau ci-dessous des volumes horaires CP-CE1 des quatre journées de 6h (24h) des enseignements en groupe classe (p. 7) :

- d'une part, nous y avons adjoint *la représentativité* de chacun des « domaines disciplinaires » (calculs de pourcentages) ;
- d'autre part, nous avons extrapolé un *référentiel-journée*. En effet, les préconisations sont effectuées à l'échelle de la semaine (pour le français et les mathématiques) et de l'année pour le reste des domaines disciplinaires.

<table>
<tr><th>Domaines Disciplinaires</th><th>Durée annuelle
annualisés (a)</th><th colspan="2">Représentativité
Place accordée en % dans la journée</th><th>Empan hebdomadaire</th><th colspan="2">Empan journée
(calculs Chercheur)</th></tr>
<tr><td>Français (d1)</td><td>360h</td><td rowspan="2">62,5%</td><td>41,7 %</td><td>10h</td><td colspan="2">2h30</td></tr>
<tr><td>Mathématiques (d1)</td><td>180h</td><td>20,8 %</td><td>5h</td><td colspan="2">1h15</td></tr>
<tr><td>Education Physique et Sportive (EPS) (d2)</td><td>108h</td><td rowspan="4">37,5%</td><td>34%</td><td rowspan="4">9h</td><td rowspan="4">2h 15</td><td>46’</td></tr>
<tr><td>Langue Vivante (d2)</td><td>54h (a)</td><td>16%</td><td>22’</td></tr>
<tr><td>Pratiques artistiques et histoire des arts (d2)</td><td>81h (a)</td><td>25%</td><td>33’30</td></tr>
<tr><td>Découverte du monde (d2)</td><td>81h (a)</td><td>25%</td><td>33’30</td></tr>
<tr><td>Remarques</td><td>36 semaines</td><td colspan="2"></td><td>24h</td><td colspan="2">6h</td></tr>
</table>

Nb : nous nommons plages didactiques (**d**) les séances d'enseignement/apprentissage conçues en référence aux domaines disciplinaires. Plus particulièrement, avec Garnier (2003), nous distinguons les disciplines du noyau central (d1) - le français et les mathématiques- des disciplines périphériques (**d2**) –toutes les autres-.

QUOI DE NEUF DANS LA NUMERATION AU CP ? LE DENOMBREMENT EN QUESTION

Eric MOUNIER
Formateur et enseignant-chercheur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)
LDAR (Paris 7)
eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
Formateur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé
Nadine Grapin, Eric Mounier, Nathalie Pfaff et Elsa Prigent forment une équipe d'enseignants et de formateurs engagés dans la recherche qui a étudié une ressource testée depuis 2009 dans une, deux, dix puis cette année douze classes de CP. Les résultats présentés ici sont extraits de ce travail plus général.

Mounier (2010) étudie les signes de la comptine numérique et ceux des écritures chiffrées, dissociant ainsi deux systèmes de numération. De nouveaux outils théoriques s'en dégagent pour analyser certaines tâches numériques effectuées par les élèves, en particulier ceux du Cours Préparatoire (CP, 1e année de primaire, élèves âgés de 6-7 ans) lorsque du sens est donné aux chiffres, place et valeur. Dans cette communication nous questionnons ce que peuvent apporter des tests menés à grande échelle concernant plus spécifiquement la tâche de dénombrement dans laquelle on demande d'écrire « avec des chiffres » le cardinal d'une collection d'objets présents.
Nous exposons les résultats déduits de tests que nous avons menés. Le premier résultat concerne le rôle de l'énumération dans la réussite des élèves. Le second celui de la dizaine : nous interrogeons d'une part sa disponibilité et son utilité pour accomplir la tâche et d'autre part ce que son emploi révèle ou non des connaissances des élèves sur la numération écrite chiffrée.
Cette communication est aussi l'occasion de présenter les grands traits de la ressource construite pour la classe qui emprunte un itinéraire cognitif d'enseignement dit de « distinction » puisque l'écriture chiffrée y est construite initialement sans recours à la numération parlée, contrairement à ce qui est proposé actuellement dans les manuels scolaires.

Nous remercions tous les enseignants qui ont travaillé avec nous, ainsi que leurs élèves, sans lesquels ce travail n'aurait pu voir le jour.

I - LE DENOMBREMENT DANS LES EVALUATIONS DES CONNAISSANCES DES ELEVES DE CYCLE 2 EN NUMERATION

1 Les évaluations existantes

Il y a beaucoup de travaux de recherche autour des premiers apprentissages de la numération[1]. Pourtant, à notre connaissance, en France, mis à part l'évaluation nationale annuelle dont nous allons parler, il n'existe pas d'évaluation sur un grand échantillon d'élèves concernant leur compréhension de la numération de position en fin de CP ou en fin de CE1. Par exemple, Collet (2003) a testé 121 élèves belges de 2e et 3e année (CE1 et CE2, élèves âgés de 7 à 9 ans) mais la scolarité et le système de numération oral sont différents en France.

[1] Dans ce premier paragraphe, nous utilisons le mot numération dans son acception courante, regroupant les deux systèmes de numération utilisés couramment : le système écrit positionnel des écritures chiffrées et celui oral de la comptine numérique en langue vernaculaire.

Au Cours Préparatoire (CP, élèves âgés de 6, 7 ans), année durant laquelle du sens est donné à la position des chiffres dans l'écriture chiffrée des nombres, le programme 2008 libelle les connaissances sur le nombre en termes de compétences :

- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.
- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (« table d'addition »).
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.
- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

Au Cours Elémentaire 1e année (CE1) :

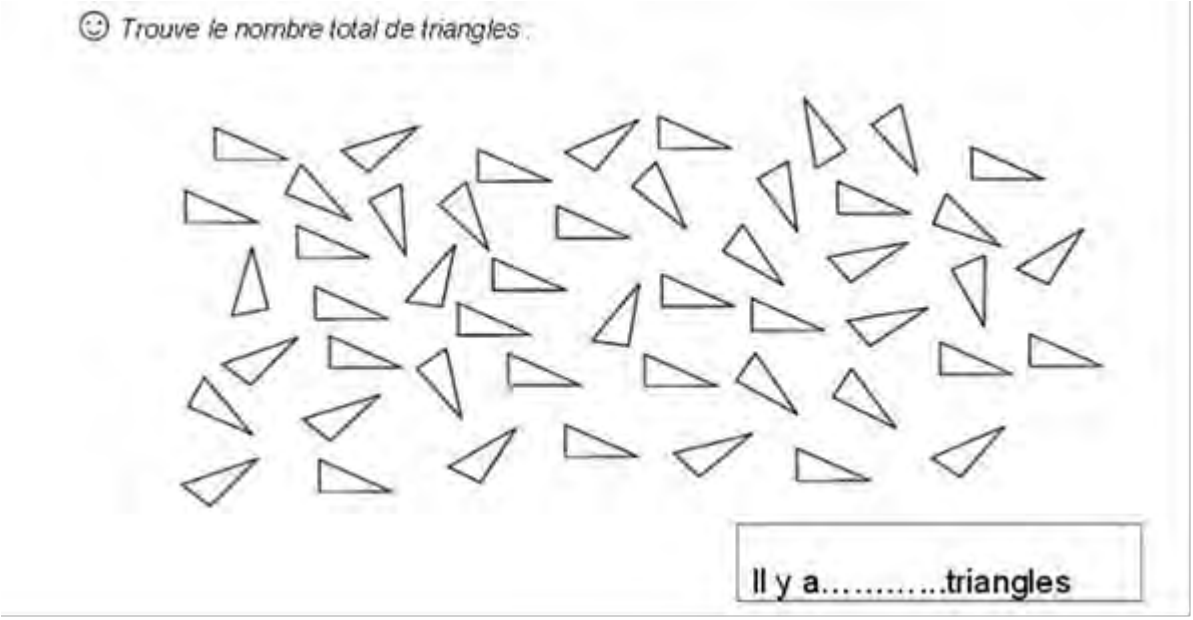
- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.
- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.
- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.

Une évaluation nationale est proposée tous les ans aux élèves de fin de CE1. Nous avons classé les items de ces évaluations de 2009 à 2013 en utilisant le document institutionnel « Le nombre au cycle 2 » (Le Poche, 2010, p. 50) qui précise chacune des compétences du programme via différents objectifs à atteindre au CE1.

Items	*Numéro des items*	**Nombre**
Savoir associer désignations orales et écrites des nombres : - de 1 à 69 en utilisant les repères mémorisés « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », « soixante » ; - de 70 à 99 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale ; - de 100 à 999 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale.	*Ex 1 2009* *Ex 1 2010* *Ex 1 2011* *Ex 1 2012* *Ex 1 2103*	**5**
Savoir dénombrer une quantité d'objets pour produire une désignation écrite ou orale en les regroupant d'abord par paquets de dix objets, puis par paquets de dix paquets de dix – les paquets de cent – puis en dénombrant le nombre de paquets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre d'objets isolés.		**0**
- Savoir que dans une écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une quantité, le chiffre de gauche indique le nombre de groupements par cent, le second le nombre de groupements par dix et le dernier le nombre d'objets isolés. - Savoir que dans l'écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une valeur, la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture du nombre et introduire les mots « centaine », « dizaine » et « unité » pour parler de la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture des nombres (maîtriser les décompositions canoniques).		**0**
Savoir écrire le successeur de toute désignation écrite d'un nombre à 3 chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 8 2012*	**1**
Savoir comparer pour les ranger deux nombres de trois chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 3 2009 -2010* *Ex 5 2009* *Ex 3 et 22 2011* *Ex 3 2012*	**7**

	Ex 3 2013	
Savoir encadrer entre des centaines un nombre de trois chiffres, savoir encadrer entre des dizaines un nombre de trois chiffres et en déduire un placement sur un segment gradué de 10 en 10 en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 13 2010* *Ex 23 2011* *Ex 21 2012* *Ex 8 et 17 2013*	**5**
Savoir écrire une suite écrite de mots–nombres ou d'écritures chiffrées ou dire une suite de mots–nombres prononcés en fonction d'une règle donnée en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération ou sur la connaissance de la numération orale.	*Ex 3 2009* *Ex 12 2010* *Ex 16 2011* *Ex 15 2012* *Ex 5 2013*	**5**

Nous constatons que n'est ainsi classifié aucun exercice sur la compréhension de la numération de position des nombres à 2 chiffres en lien direct avec une tâche de dénombrement. Cependant un exercice, un seul en quatre ans, porte sur la compréhension du nombre en tant que quantité, c'est l'exercice 6 de 2009 :



Les résultats à cet exercice interpellent : 60% de réussite. Cette réussite ne repose pas uniquement sur le dénombrement mais aussi sur la reconnaissance des triangles. Déjà à ce titre il ne peut pas être représentatif de toutes les connaissances en jeu dans une tâche de dénombrement. De plus, le résultat seul n'indique pas la procédure, procédure qui peut engager par exemple un dénombrement de un en un ou des groupements de 10. Que peut nous apprendre les tâches de dénombrement sur les connaissances des élèves concernant la numération écrite de position, objet d'apprentissage au CP ?

2 Analyse *a priori* de la tâche de dénombrement de l'évaluation nationale

L'exercice précédent fait intervenir un certain nombre de variables : forme, disposition, nombre et variété des objets ainsi que leur caractère manipulable ou non. Les valeurs de trois de celles-ci – les objets à dénombrer sont non manipulables, ils sont disposés sans ordre apparent et relativement proches sur un quart de feuille rectangulaire 15 x 7 cm, leur nombre est fixé à 52 – influent sur les procédures d'énumération[2] envisageables pour des élèves de cycle 2 (élèves de 5 à 8 ans). Pour effectuer la suite de notre analyse des stratégies nous nous référons à la distinction sémiotique de deux systèmes de

[2] L'énumération est la connaissance mobilisée pour passer en revue tous les objets d'une collection un seule fois (Briand et al., 1999-2000). Couplée avec l'emploi de la comptine numérique, cette procédure de dénombrement est le comptage (Mounier, 2012).

numération, l'un oral, l'autre écrit chiffré (Mounier, 2010 ; Mounier, 2012 ; Mounier & Pfaff, 2012). Ce qui nous conduit à distinguer quatre procédures.

Procédure 1 : Interprétation ordinale de la numération orale sans ou avec repérants[3]

Pas de groupements matérialisés, énumération un à un et utilisation de la comptine, pour tous les objets, puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.
1a : énumération en numérotant (ici de 1 à 52)
1b : énumération avec marques (objets barrés, pointés, reliés, …)
1c : énumération sans marque

Procédure 2 : Interprétation ordinale de la numération orale avec repérants ou interprétation additive

Des groupements en dizaines sont matérialisés, c'est la comptine des dizaines qui est utilisée, dix, vingt, trente, etc., puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.
2a : groupements en numérotant de 1 à 10
2b : groupements avec marques (objets barrés, pointés, reliés, …)
2c : groupements sans marque

Procédure 3 : Interprétation multiplicative de la numération orale

Pour obtenir le nom du nombre, des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés un à un (un, deux, trois, …), idem pour ceux qui ne sont pas groupés ; l'écriture chiffrée est obtenue à partir du nom du nombre (cinq dizaines et deux se dit « cinquante-deux » qui s'écrit « 52 »).
3a, 3b, 3c : idem précédemment

Procédure 4 : Interprétation de référence de l'écriture chiffrée

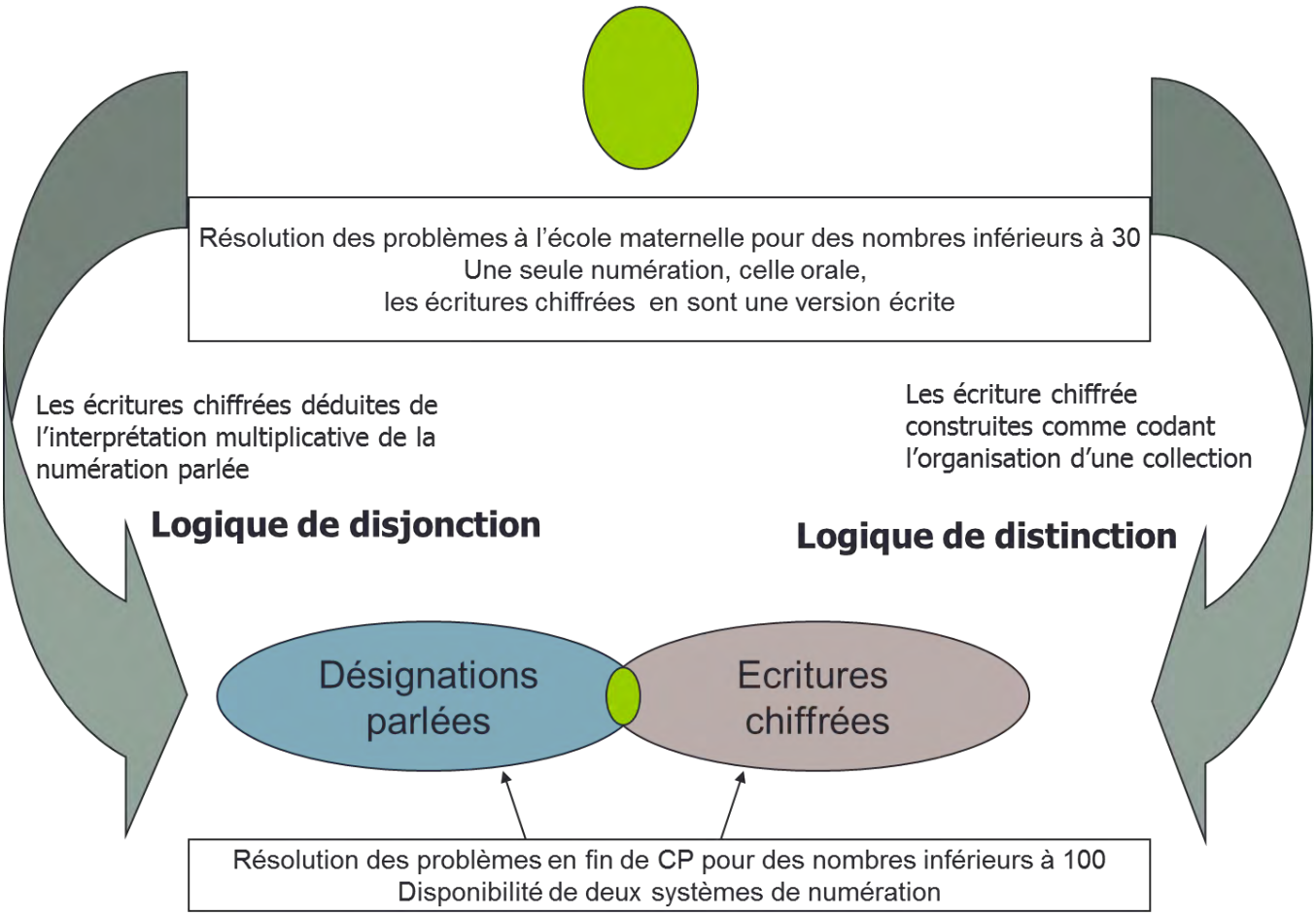
Des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés de un en un (un, deux, trois, …), leur nombre est retranscrit directement par un chiffre ; idem pour les objets qui ne sont pas groupés. Si l'oral « cinquante-deux » est prononcé ou pensé, il vient de la lecture de « 52 » et ne sert pas à réaliser la tâche.
4a, 4b, 4c : idem précédemment

Contrairement à la 4e, dans les trois premières procédures l'écriture chiffrée est obtenue à partir nom du nombre (en français).

3 Sur l'enseignement de la numération en France

Ces différentes procédures interviennent lors de l'enseignement de la numération au CP pour les nombres inférieurs à cent, mais pas toujours de la même façon. Deux grands itinéraires cognitifs d'enseignement peuvent être définis (Mounier, 2010).

[3] Les repérants sont les mots qui structurent la comptine orale tels que dix, vingt, trente, etc.



Le premier itinéraire, la logique de disjonction, consiste à expliciter les écritures chiffrées à partir de la numération orale. Par exemple il va s'agir d'expliquer pourquoi « trente-deux » s'écrit « 32 » avec des chiffres. Dans le deuxième, la logique de distinction, l'écriture chiffrée est vue directement comme un système de codage de l'organisation d'une collection en dizaines et unités. Ensuite des liens sont étudiés entre ce système positionnel et le nom des nombres. Ce deuxième itinéraire rend disponible plus tôt dans les apprentissages la procédure 4. Le premier itinéraire n'engage pas nécessairement un apprentissage de cette procédure 4, pourtant identifiée comme utilisant les ressources propres au système de numération que constituent les écritures chiffrées. Par ailleurs le deuxième itinéraire n'est pas proposé dans les manuels scolaires de CP (Mounier, 2010). Cette analyse montre l'influence potentielle, à un niveau très général, de l'enseignement reçu sur les procédures favorisées, en particulier concernant l'emploi de la dizaine.

4 Problématique

La question générale que nous nous posons concerne l'accès aux connaissances sur le nombre des élèves de fin de CP. Nous nous demandons ce que peut nous apprendre la tâche de dénombrement consistant à indiquer le cardinal d'une collection par une écriture chiffrée. L'analyse *a priori* nous a montré qu'une réussite à une telle tâche pouvait relever d'utilisations différentes de la dizaine, voire du non emploi de celle-ci, et révéler des difficultés dans l'énumération. L'analyse de l'enseignement montre par ailleurs qu'une des procédures, celle ne mettant pas en jeu la traduction du nom du nombre, n'est pas favorisée par les ressources actuellement disponibles en France. Il s'agit donc d'explorer ce que cette tâche peut dire des connaissances des élèves en tenant compte de l'enseignement reçu à un niveau très général, celui des itinéraires cognitifs. Ajoutons ici qu'à notre connaissance les analyses usuellement proposées dans les recherches ou la littérature pédagogique ne distinguent pas fréquemment explicitement les procédures 2 et 3 de la procédure 4, cette dernière mettant pourtant directement en jeu les possibilités

sémiotiques du système des écritures chiffrées. Le cadre théorique que nous proposons d'utiliser permet donc d'apporter un regard nouveau.

Pour avoir des éléments de réponse à cette problématique nous avons effectué deux tests en nous concentrant sur certaines valeurs des variables de la tâche de dénombrement.

II - LES TESTS

Nous présentons ici deux tests qui nous permettent d'ébaucher des questions et hypothèses.

1 Un premier test portant sur 260 élèves

1.1 Présentation

Ce premier test concerne 260 élèves de début de CE1 (première semaine de l'année). Le nombre important d'élèves, venant de 18 classes et 6 établissements différents, permet d'atténuer un effet lié aux conditions spécifiques d'enseignement et d'apprentissage d'une classe. Par ailleurs nous voulons savoir comment la dizaine peut être utilisée (ou non) par les élèves. Nous avons alors testé deux populations. La moitié de l'effectif environ (9 classes, 132 élèves sur les 260) a suivi l'itinéraire cognitif classiquement proposé par les manuels scolaires en France, celui de disjonction des numérations. Les autres élèves (128 provenant de 9 classes) ont suivi un itinéraire de distinction. Pour proposer ce second itinéraire, nous avons utilisé la ressource nommée Champion des Nombres (CDN) que nous avons élaborée à partir d'une ingénierie envisagée dans la thèse de Mounier (2010) qui a été introduite et développée en classe ordinaire sur plusieurs années, constituant ainsi une ingénierie dite de deuxième génération (Perrin-Glorian, 2011). Les grandes lignes de cette ressource sont décrites dans l'annexe 1. Ceci nous permet d'avoir une population homogène quant à l'enseignement reçu concernant le lien de la dizaine avec l'écriture chiffrée.

Ce premier test comprend 3 exercices (voir annexe 2) dont nous étudions les résultats en utilisant l'analyse *a priori* précédente. Les élèves ont à leur disposition un crayon à papier et une gomme : ils peuvent laisser des traces, faire des essais. Le premier exercice teste leur capacité à traduire en chiffres le nom du nombre prononcé à l'oral, ce qui est en partie en jeu dans les procédures 1 à 3. Dans le deuxième exercice on demande d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds (53) dessinés sur une feuille sans organisation. Il est proche de celui proposé aux évaluations nationales de 2009. Cependant ici nous avons recueilli les productions et donc nous pouvons voir les traces d'énumération et de groupements (des dizaines). Le troisième et dernier exercice est identique au 2e, mais cette fois-ci il s'agit de 75 carrés organisé en 5 carrés seuls et 7 rangées de chacune dix carrés (les élèves sont informés que chaque rangée comporte dix carrés). Il nous permet de savoir ceux qui mobilisent la dizaine dans une situation qui le requiert : le temps est en effet limité, les élèves n'ont pas le temps d'utiliser la procédure 1, le comptage un à un de tous les éléments la collection.

1.2 Résultats et premières analyses

Exercice 1 : écrire avec des chiffres le nom des nombres

Le nom des nombres qui posent des difficultés sont ceux après soixante-dix ; les autres sont très bien réussis, au-delà de 93% pour huit, treize, vingt-six et cinquante-trois. Le tableau suivant précise les effectifs des réponses exactes.

	cinquante-trois	soixante quinze	quatre-vingt-treize
Total des 260 élèves	248 (95 %)	201 (77 %)	185 (71%)
Non CDN, 132 élèves	123 (93%)	96 (73%)	88 (67%)
CDN, 128 élèves	125 (98%)	105 (82%)	97 (76%)

On voit un faible écart de réussite entre les deux groupes qui montre que les élèves CDN savent écrire les nombres avec des chiffres à partir de leur nom même si le lien entre écriture chiffrée et le nom des nombres est peut être travaillé plus tardivement dans l'année par rapport aux autres méthodes. Ce lien est quand même travaillé régulièrement à partir de la période 3 (sur 5 périodes d'environ 7 semaines). Presque tous les élèves savent écrire cinquante-trois en chiffres, le nombre en jeu dans l'exercice suivant du test (dénombrer 53 ronds).

Exercice 2 : dénombrer 53 ronds non organisés (écriture chiffrée demandée)

Réponse	53	52	54	51	55	Pas de réponse	Autres réponses
Total des 260 élèves	118 45%	17 7%	15 6%	10 4%	2 1%	17 7%	81 31%
Non CDN (132)	59 45%	9 7%	5 4%	4 3%	0 0%	10 8%	45 34%
CDN (128)	59 46%	8 6%	10 8%	2 2%	2 2%	7 5%	40 31%

Il n'y a pas d'écart de réussite entre CDN et non CDN mais moins de la moitié des élèves réussissent cet exercice. Ce résultat est cohérent avec les 60% de réussite à l'exercice de dénombrement des triangles de l'évaluation nationale 2009 pour des élèves de fin de CE1 : sur une année on passe de 45% à 60 %.

La différence entre CDN et non CDN est significative sur l'emploi de la dizaine dans les procédures utilisées. Ici nous considérons que les élèves tentent de faire des dizaines lorsque nous relevons des groupements matérialisés comportant 9, 10, ou 11 objets.

Réponse	Présence dizaines	Réussite si dizaine	Non présence dizaines	Réussite si non dizaines
Total des 260 élèves	108 41%	55/108 (51%)	152 59%	63/152 (41%)
Non CDN, 132 élèves	31 23%	18/31 (58%)	101 77%	41/101 (41%)
CDN, 128 élèves	77 60%	37/77 (48%)	51 40%	22/51 (43%)

60% des élèves CDN effectuent des groupements par dix alors que c'est le cas pour seulement 23% des élèves non CDN. Par contre, ils ne réussissent guère mieux en effectuant des groupements. De manière générale, l'emploi de la dizaine n'assure pas une réussite supérieure. Une difficulté commune concerne l'énumération comme le montre le tableau suivant.

Réponse	Traces d'énumération	Réussite		Pas de traces d'énumération	Réussite
Total des 260 élèves	164 63%	84/164 (51%)		96 37%	34/96 (35%)
Non CDN, 132 élèves	90 68%	46/90 (51%)		42 32%	13/42 (31%)
CDN, 128 élèves	74 58%	38/74 (51%)		54 42%	21/54 (39%)

Dans ce tableau nous n'avons pas comptabilisé les productions avec des groupements sans traces d'énumération, ce qui représente 47 élèves sur les 132 de CDN et 22 sur les 128 de non CDN. Les traces d'énumération considérées ici sont le numérotage ou le marquage des ronds un à un, que ce soit pour constituer des groupements ou non. Globalement, nous avons remarqué l'importance des erreurs d'énumération, CDN ou non CDN. Plus d'un tiers des élèves ne laisse pas de traces. En examinant les traces laissées nous constatons en outre que même ceux qui font des marques ont des difficultés à énumérer tous les éléments : certains sont oubliés, que ce soit avec ou sans groupement. Ainsi, le dénombrement semble poser des difficultés moins par une incompréhension d'une procédure à mettre en œuvre que par des erreurs de comptage dues à l'énumération : mauvais comptage des groupements, oubli de compter certaines unités, groupements effectués ne comportant pas toujours 10 ronds mais 8, 9 ou 11. La connaissance de la comptine numérique et celle de la coordination avec l'énumération semblent jouer un rôle moins important. Un facteur significatif de réussite proviendrait donc d'une énumération exacte, que ce soit avec des dizaines ou non. Le gain de performance sur l'année de CE1, 45% de réussite à notre test de début d'année et 60% au test national de fin d'année, proviendrait-il de manière significative de l'amélioration des compétences en énumération en cours d'année ?

Exercice 3 : dénombrer 75 carrés organisés avec 7 dizaines visibles et 5 « tout seuls » visibles

Réponse	75	73 ou 74	65	Pas de réponse	Autres réponses
Total des 260 élèves	114 44%	8 3%	5 2%	87 33%	46 18%
Non CDN, 132 élèves	48 36%	1 1%	4 3%	51 39%	28 21%
CDN, 128 élèves	66 52%	4 3%	1 1%	36 39%	21 16%

Les nombreuses non réponses sont imputables au fait que les élèves qui dénombraient tous les carrés de un en un n'ont pas eu le temps de terminer (le temps imparti étant de moins d'une minute). Un écart de réussite entre CDN et non CDN est perceptible mais on peut constater une certaine faiblesse de réussite pour un tel exercice mettant en jeu les compétences attendues en fin de CP : à peine la moitié pour les CDN et un peu plus d'un tiers pour les non CDN. Pourtant la tâche de l'exercice 2 nécessite de les employer pour réussir, contrairement à celle précédente.

Croisement des exercices 2 et 3

L'analyse des productions à l'exercice 2 et plus encore au 3 nous montre une utilisation plus fréquente des dizaines pour les élèves CDN, résultat qui était envisageable avec cette ressource puisque c'est son axe majeur. Cela questionne les autres ressources utilisées par les non CDN, mais notre protocole ne permet pas d'aller plus loin. Cependant, comme nous l'avons signalé, les élèves CDN n'ont pas

significativement une plus grande réussite à l'exercice 2. En outre, l'emploi de dizaines à l'exercice 2 n'entraîne pas automatiquement une réussite à l'exercice 3.

	Présence dizaines ex 2	Réussite ex 3 si dizaines ex 2	Non présence dizaines ex 2	Réussite ex 3 si non dizaines ex 2
Total des 260 élèves	108 *41%*	59/108 *(55%)*	152 59%	55/152 *(36%)*
Non CDN, 132 élèves	31 *23%*	15/31 *(48%)*	101 *77%*	33/101 *(33%)*
CDN, 128 élèves	77 *60%*	44/77 *(57%)*	51 *40%*	22/51 *(43%)*

On aurait pu s'attendre à ce que les élèves mobilisant la dizaine quand ce n'est pas indispensable (exercice 2) pensent à mobiliser celle-ci quand c'est nécessaire (exercice 3) : ce n'est pas significativement le cas puisqu'ils ne sont que 55% dans cette situation. Dans ce cas, la mobilisation de la dizaine dans le 3e exercice est néanmoins plus importante que pour les élèves qui n'ont pas mobilisé la dizaine dans l'exercice 2 (36% dans ce dernier cas). Les résultats sont un peu meilleurs dans le groupe CDN mais ne changent pas ce constat.

Ces résultats questionnent l'interprétation de ce type de tests quant aux connaissances des élèves sur le nombre. La réussite ne semble pas indiquer un niveau de conceptualisation facilement identifiable. Pour aller plus loin, nous avons observé de plus près les procédures des élèves dans des tâches similaires.

2 Un deuxième test portant sur 155 élèves

2.1 Présentation

Dans les deux dernières tâches du test précédent, les collections ne sont pas manipulables et nous n'observons pas les procédures des élèves. Il n'est donc pas possible de distinguer les élèves ayant utilisé les procédures 2, 3 ou 4. Pourtant celles-ci renvoient à une utilisation différente de la dizaine en lien avec le nom du nombre ou/et son écriture chiffrée. C'est pourquoi nous avons fait un second test dans lequel nous proposons trois autres exercices à 155 élèves ayant tous suivis le même itinéraire cognitif d'enseignement à travers CDN. Ce groupe CDN qui comprend les mêmes 128 élèves précédent plus d'autres qui n'ont pas pu être testé dans le premier test, nous apparait plus intéressant à étudier pour mieux comprendre les questions soulevées par le 1e test, en particulier relatives à l'utilisation de la dizaine puisqu'ils ont suivi un itinéraire dans lequel la dizaine est utilisée d'emblée pour introduire les écritures chiffrées, sans passer par le nom des nombres. Par ailleurs, nous avons limité un éventuel effet de contrat dans lequel les élèves seraient habitués à réaliser les tâches proposées selon une procédure attendue par le professeur. Nous avons donc proposées des tâches dans un contexte problématique et non plus sous forme de tâches simples et isolées rencontrées usuellement en classe. En outre chaque élève est testé de manière individuelle par le chercheur. Il nous a aussi semblé important de proposer des objets manipulables afin en particulier que la dizaine puisse être mieux identifiable que dans l'exercice 2 du test précédent : des barres dizaines sont constituées de cubes sécables déjà vues en classe et il est prévu pour chaque élève un nouveau temps d'appropriation de ce matériel. Nous cherchons ici des résultats qualitatifs sur l'emploi de la dizaine.

Le 1e exercice, l'exercice A, permet de vérifier les connaissances des élèves quant à la lecture et l'écriture des nombres. Les 2e et 3e exercices sont insérés dans une même tâche inspirée de la « situation fondamentale du nombre » de Brousseau (voir par exemple Margolinas & Wozniak, 2012). L'élève peut manipuler une réserve de cubes emboîtables constituée de barres sécables de dix cubes déjà assemblés et de cubes « seuls ». A un autre endroit on lui présente une collection de carrés non organisés dessinés sur une feuille (voir annexe 2). On demande à l'élève d'aller chercher en un seul voyage le nombre de cubes

nécessaire pour mettre un cube par carré. On fournit une barquette pour le transport. A son retour il vérifie sa réponse en posant les cubes sur les carrés. L'élève a réussi si un cube est sur chaque carré et s'il ne reste rien dans sa barquette : il ne peut défaire les cubes assemblés que dans ce moment de vérification et non au moment où ils les prennent. Pour s'assurer de la compréhension de la tâche on lui propose tout d'abord une collection de 3 carrés puis s'il échoue de 4 carrés. Ensuite commence le test avec une collection de 52 carrés. Avant d'aller chercher les cubes, on impose à l'élève d'écrire sur un morceau de papier le nombre qu'il lui faut. Nous appelons exercice B cette tâche de dénombrement de carrés dessinés qui est similaire à l'exercice 2 du test précédent. Nous appelons exercice C la tâche suivante constituant à prélever dans sa barquette le nombre de cubes à l'aide du morceau de papier sur lequel est écrit en chiffre le nombre obtenu précédemment. Cet exercice C s'apparente à la tâche réciproque de l'exercice 3 du 1e test et nous permet de voir de quelle manière les élèves mobilisent la dizaine dans une situation qui favorise sa convocation, sans que cela soit absolument nécessaire. On observe la procédure utilisée pour les deux exercices.

2.2 Résultats et premières analyses

Exercice A : écrire et lire les nombres

Les résultats à l'exercice A sont similaires à l'exercice 1 précédent et montrent que les élèves savent bien lire et écrire les nombres proposés (correspondance écriture chiffrée/nom du nombre), moins en ce qui concerne les nombre au-delà de 70. Ceci n'empêche donc pas la mobilisation des procédures 1 à 3 pour la suite du test lorsqu'il y a 52 carrés à dénombrer.

Exercices B et C : dénombrer des carrés sur une feuille, écrire le nombre, aller chercher la quantité correspondante de cubes (disponibles sous forme de dizaines et de cubes isolés)

Nous livrons les résultats des exercices B et C sous la forme d'un tableau.

		Exercice B : écrire 52 pour dénombrer les carrés					
		Procédure 1	Procédure 2	Procédure 3	Procédure 4	Autre	**Total ex. C**
Ex. C Prendre … cubes	Procédure 1	44	1	0	2	3	50
	Procédure 2	24[4]	10	1	1	0	36
	Procédure 3	4	1	0	0	0	5
	Procédure 4	26	1	0	22	1	50
	Autres	8	0	0	6	0	14
	Total exercice B	106	13	1	31	4	155

Pour l'exercice B, 106 élèves, les 2/3, n'utilisent pas de groupement pour dénombrer, alors que 60% les utilisaient dans le test précédent, et ceci pour une tâche similaire. Pour expliquer cette différence, nous avançons l'hypothèse qu'il existe effectivement un effet de contrat lié à la proposition d'une tâche isolée couramment travaillée en classe dans un même contexte de passation (exercice 2 précédent proposé en classe, même s'il ne s'agissait pas de la classe de CP). En outre ceci renforce l'idée déjà ébauchée à la suite des résultats précédents que l'utilisation de groupements n'est pas perçue par les élèves de cet âge comme élément facilitateur de la tâche de dénombrement d'une collection d'objets (ici entre cinquante et soixante). Leurs connaissances du rôle de la dizaine sont-elles insuffisantes pour être mobilisables pour la tâche de dénombrement de l'exercice B ou la réussite de cette tâche ne requiert-elle pas la mobilisation de telles connaissances ?

[4] Lecture de cette case du tableau : 24 élèves ont utilisé la procédure 1 pour faire l'exercice B suivie de la procédure 2 pour l'exercice C.

Concernant l'exercice B, ils sont 91 sur 155 (58%) à mobiliser la dizaine dans une tâche dont la réussite est largement facilitée par un tel emploi. Ce résultat est à rapprocher des 52% de l'exercice 3 précédent.

Observons maintenant l'évolution des procédures entre les deux exercices proposant deux tâches liées.

Environ la moitié des élèves conservent la même procédure pour résoudre les deux exercices.

***Le profil 1 : 1* (44 élèves, 28%) :** Procédure 1 (un, deux, etc.) → Procédure 1 (un, deux, etc.)
Dans les tâches effectuées, les élèves comptent un par un, même si le milieu matériel favorise l'utilisation de la dizaine. L'interprétation ordinale est convoquée que ce soit avec repérant ou non, et ceci sans utilisation du fait qu'entre deux repérants (dix à vingt, vingt à trente, etc.) il y a une dizaine.

***Le profil 2 : 2* (10 élèves, 6%) :** Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.) → Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.)
Dans les tâches effectuées, les élèves convoquent de la dizaine via la numération parlée, sans mettre en jeu le nombre de dizaines. La structuration de la numération parlée de dix en dix est perçue sans que le nombre de dizaines indiqué par le nom du nombre le soit nécessairement.

***Le profil 4 : 4* (22 élèves, 14%) :** Procédure 4 (codage de l'organisation des carrés à l'aide de deux chiffres ordonnés) → Procédure 4 (le chiffre « 5 » de l'écriture « 52 » indique que le nombre de dizaines). La place et le sens des chiffres sont utilisés pour résoudre les tâches proposées.

L'autre moitié des élèves change de procédure :
***Les profils 1 : 2, 3, 4* (54 élèves, 35%) :** Procédure 1 → Procédure 2, 3 ou 4.

Dans les tâches proposées, les élèves passent du comptage un par un (interprétation ordinale) à la prise en compte de la dizaine quand le milieu matériel s'y prête (exercice C).

Ces profils identifiés *a posteriori* sont liés à l'itinéraire cognitif proposé via la ressource dans la mesure où les effectifs relevés dépendent de celui-ci. Si on observait des élèves n'ayant pas suivi la ressource CDN, on peut penser que d'autres profils *a posteriori* pourraient être relevés, en particulier liés à la procédure 3 dans laquelle le nombre de dizaines est perçu via le nom du nombre (aucun élève ne relève ici du profil **3 : 3**). La ressource CDN ne favorise pas cette procédure puisqu'elle propose un itinéraire cognitif de distinction et non disjonction. Mais la tâche est aussi à questionner. Rien ne permet de dire que les profils ci-dessus sont des catégories qui partitionnent les élèves. L'appartenance à un profil peut changer suivant les tâches proposées et les connaissances des élèves vont évoluer au fur et à mesure des apprentissages. Pour autant, l'analyse effectuée permet de percevoir des conceptions qui peuvent s'avérer intéressantes à considérer en particulier si des difficultés d'apprentissages sont constatées. Ainsi, certains élèves perçoivent le nombre essentiellement de manière ordinale (à travers le comptage), même quand la tâche proposée rend cette utilisation peu efficace pour sa résolution (exercice C). Les autres mobilisent la dizaine pour l'exercice C et certains aussi pour le B (seuls 3 élèves sur 155 mobilisent la dizaine dans l'exercice B sans le faire dans le C). Cependant, cette mobilisation s'opère de manière différente à la fois dans la perception ou non du nombre de dizaines et dans son lien avec le système de numération, comme l'illustre le tableau suivant.

	Via le nom du nombre		Via l'écriture chiffrée
	Procédure 2 (dix, vingt, trente, …)	**Procédure 3 (5 dizaines dans cinquante-deux)**	**Procédure 4 (5 dizaines dans 52)**
Dénombrer 52 carrés non organisés (écrire la quantité)	**8%**	**0,6%**	**20%**
Prendre … cubes (autant de cubes que de carrés précédents)	**23%**	**3%**	**32%**
	Pas d'utilisation ostensible du nombre de dizaines	Utilisation ostensible du nombre de dizaines	

Des élèves utilisent la dizaine à travers la comptine des dizaines, la procédure 2. Ce type de procédure peut être efficace dans un certain nombre de tâches proposées aux élèves de CP, mais cela n'atteste pas qu'ils perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre. D'autres encore perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son nom, la procédure 3. Le lien avec l'écriture chiffrée n'est cependant pas forcément immédiat. Réciproquement, certains élèves perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son écriture chiffrée, la procédure 4. Le lien avec le nom du nombre n'est ici pas forcément immédiat.

III - CONCLUSIONS

Concernant la tâche de dénombrement telle que proposée par l'évaluation nationale de 2009, nous avons montré que l'énumération a une influence notable sur sa réussite. Ainsi, en ne considérant que le taux de réussite, le test national nous apparaît comme un test des connaissances sur l'énumération dans le sens où ce sont des échecs dans l'énumération qui contribuent notablement aux résultats. Par ailleurs, la réussite n'indique pas si la dizaine est convoquée. Le groupement en dizaine, qui semble la procédure attendue si on se réfère aux documents institutionnels, n'est d'ailleurs pas le gage d'un meilleur succès pour les élèves de cet âge. Un élève peut ne pas utiliser la dizaine dans ce type de test en étant pour autant capable de le faire dans des exercices qui la requièrent. Nous l'avons relevé dans le changement de procédures entre les exercices 2 et 3 du premier test. Un autre facteur intervient en outre sur cette mobilisation : ce sont certaines conditions de passation – hors ou dans la classe ; en présence de l'enseignant ou non – ou relevant du contexte dans lequel est proposée l'exercice – tâche isolée ou problématisée. C'est ce que nous avons inféré de la différence d'emploi de la dizaine entre l'exercice 2 du 1e test (60% convoquent la dizaine) et l'exercice B du 2e (seulement 33%). En conclusion, même les informations supplémentaires provenant de l'analyse des traces des productions des élèves, en particulier concernant la mobilisation ou non de la dizaine, ne nous permettent pas de rendre compte du niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves concernant la numération.

Un exercice tel que l'exercice 3 du premier test pourrait révéler si les élèves emploient la dizaine, cette fois-ci dans une tâche qui la requiert. Notre analyse théorique nous alerte cependant sur le fait que cette dernière pouvait être utilisée de manière très différente, en particulier sans que la connaissance du nombre de dizaines ne soit nécessaire à l'obtention d'une réponse exacte (procédure 2). La réussite à un tel exercice ne permet donc pas de mettre en évidence certaines des connaissances essentielles à la compréhension du système positionnel des écritures chiffrées.

Dans le 2e test, nous avons exploré plus attentivement une population d'élèves ayant tous suivi un enseignement dans lequel l'écriture chiffrée a été introduite directement comme codage d'une collection d'objets organisée en dizaines. Dans un premier temps, nous avons confirmé les résultats précédents concernant la tâche de dénombrement telle que proposée à l'évaluation nationale. En particulier, dans ce contexte de passation hors la classe avec des tâches problématisées, non seulement il y a encore plus d'élèves qui ne convoquent pas la dizaine mais 35% d'entre eux le font pourtant ensuite dans l'exercice

C dans lequel la dizaine facilitait beaucoup sa réalisation. Dans un second temps nous avons élaboré des profils d'élèves révélant non seulement l'emploi ou non de la dizaine dans les deux tâches liées du test, mais aussi et surtout la façon dont elle est employée. Parmi les 54 élèves qui utilisent la dizaine dans l'exercice B, proche de l'item de l'évaluation nationale, les 24 élèves empruntant la procédure 2, c'est-à-dire 44% des 54, n'ont pas besoin de savoir le nombre de dizaines pour donner l'écriture chiffrée indiquant la quantité d'objets à dénombrer. En ce qui concerne l'exercice C, ils sont 36 dans ce cas parmi les 91 qui utilisent la dizaine, c'est-à-dire 40%. Les résultats montrent donc que pour un nombre important d'élèves les chiffres ne désignent pas nécessairement un nombre de dizaines et d'unités. Les écritures chiffrées sont perçus avant tout comme une traduction écrite des mots de la langue, comme les lettres ou les syllabes le sont. Cette proportion est relativement importante, d'autant qu'elle a été obtenue sur une population dont l'itinéraire cognitif introduisait l'écriture chiffrée directement comme codage d'une organisation. Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène est au moins aussi important pour l'ensemble des élèves en France puisqu'ils suivent l'autre itinéraire cognitif via les manuels scolaires, l'itinéraire qui présente l'écriture chiffrée comme une traduction écrite du nom des nombres.

Les résultats obtenus sont à affiner. Par exemple les effectifs des profils relevés sont susceptibles de différer selon que les élèves aient suivis un itinéraire cognitif ou un autre. Les recherches menées dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) nous permettent de nous alerter sur d'autres facteurs à prendre en compte. Ainsi pour une même ressource, un même manuel, les résultats peuvent être relativement différents selon la classe. En quoi les connaissances des élèves, les conditions d'exercice du métier ou ce qui relève de la composante personnelle de l'enseignant influent-ils ? Par ailleurs les tâches proposées ici ne suffisent pas à fournir un état des lieux sur la conceptualisation des élèves concernant le nombre, en particulier du fait qu'elles ne relèvent que de certaines classes de problèmes du champ conceptuel de ce dernier (Vergnaud, 1991 ; voir aussi Fénichel & Pfaff, 2004-2005). Ceci indique des directions pour poursuivre le travail.

Au-delà de ces limites et perspectives, les conclusions de notre recherche apportent un éclairage sur les conceptions des élèves quant à la numération via la tâche de dénombrement, en particulier dans le lien entre la dizaine et la numération écrite chiffrée. Ceci donne des pistes pour comprendre les difficultés de certains élèves dans certains exercices mettant en jeu les nombres, par exemple dans les opérations, qu'elles soient posées donc utilisant la signification des chiffres ou effectuées mentalement avec les mots de la numération orale.

BIBLIOGRAPHIE

BRIAND, J., LACAVE-LUCIANI, M-J., HARVOUËT, M., BEDERE, D., & GOUA DE BAIX, V. (1999-2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, *66*, 7-22.

COLLET, M. (2003). Le développement du système en base dix chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire, *Education et francophonie*, *XXXI:2*, 218-241.

FENICHEL, M., & PFAFF, N. (2004-2005). *Donner du sens aux Mathématiques* (2 tomes). Paris : Bordas.

LE POCHE, G. (2010). Débuter la numération, In *Le nombre au cycle 2,* Durpaire J.-L. et Mégard M. (dir.), Poitiers (Futuroscope) : Scérén CNDP, 39-50.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

MOUNIER, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP : vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7). Repéré à http://tel.archives-ouvertes.fr/

MOUNIER, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17*, 27-58.
Repéré à http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/index.html.

MOUNIER, E., & PFAFF, N. (2012). Quoi de neuf dans la numération au CP ?, In Actes du XXXVIIe Colloque COPIRELEM, *Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants*, 22-24 juin 2011, IREM de Dijon, France.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (2011). L'ingénierie à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (2/3)*, 133-170.

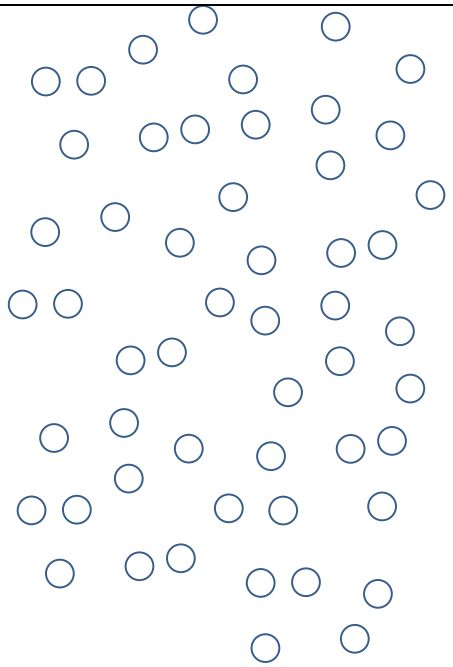
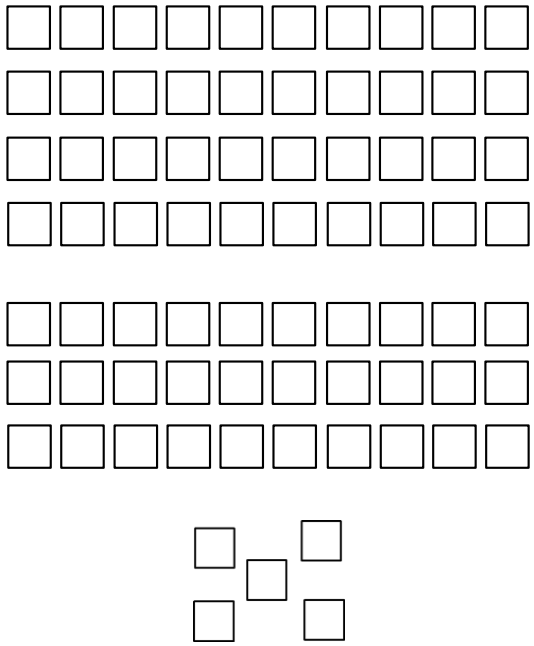
ANNEXE 1 : LA RESSOURCE CHAMPION DES NOMBRES (CDN)

En 2012-2013, l'enseignant dispose, pour les périodes 1 et 2, d'un recueil développant une séquence thématique hebdomadaire, avec une description de la séance à mener chaque jour. Ce dispositif a été étendu à toute l'année en 2013-2014. Les situations didactiques dans lesquelles de nouvelles notions apparaissent se veulent des situations problèmes au sens pris par Pfaff et Fénichel (2004-2005). L'itinéraire d'enseignement cognitif proposé est celui de distinction des numérations. Les écritures chiffrées sont introduites via la comparaison de collections qu'il va s'agir d'organiser pour réussir ces comparaisons (étapes 1, 2 et 3). Ces organisations sont ensuite codées (étapes 4 et 5). Ceci conduit en particulier les élèves à savoir indiquer le cardinal d'une collection avec des écritures chiffrées directement pour tous les nombres inférieurs à 100. La comptine numérique est, elle, introduite progressivement en s'appuyant sur les repérants. Dès que le système des écritures chiffrées est élaboré, des liens explicites sont faits entre les deux numérations pour les nombres dont les noms sont connus. La distinction entre les deux numérations est reprise pour les opérations : les opérations posées sont dites opérations « avec les chiffres », le calcul mental est dit « avec le nom des nombres ». Voici un tableau indiquant la programmation de la progression.

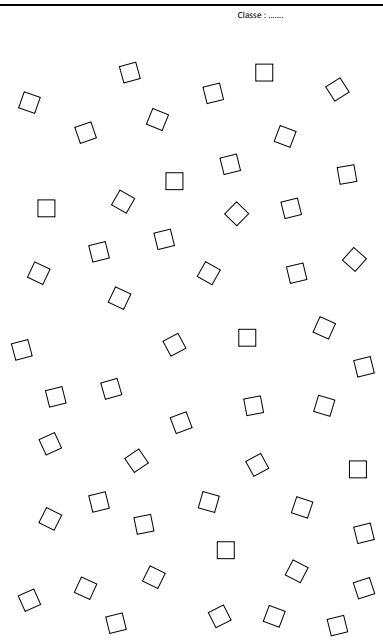
<table>
<tr><th></th><th colspan="3">PERIODE 1</th><th colspan="4">PERIODE 2</th><th>PERIODES 3 A 5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">NUMERATION ECRITE CHIFREE
(via des problèmes)</td><td colspan="3">CHAMPION DES NOMBRES ≤ 100</td><td>PAUSE</td><td colspan="2">CHAMPION DE L'ECRITURE ≤ 100</td><td rowspan="2">Addition posée
Liens entre les 2 numérations
PROBLEMES NUMERIQUES utilisant les 2 numérations</td></tr>
<tr><td>ETAPE 1 (SEPTEMBRE)
Grouper pour réussir</td><td>ETAPE 2 (SEPTEMBRE OCTOBRE)
Un même type de groupement</td><td>ETAPE 3 (1) (OCTOBRE)
Le groupement par dix</td><td>ETAPE 3 (2) (NOVEMBRE)
Le groupement par dix</td><td>CONSOLIDATION (NOVEMBRE)
Organiser/désorganiser Utilisation de groupements : « autant que »</td><td>ETAPE 4 (DECEMBRE)
L'utilité de l'écriture : différentes possibilités</td><td>ETAPE 5 (DECEMBRE)
L'écriture employée dans le monde entier</td></tr>
<tr><td>NUMERATION PARLEE
(via des problèmes)</td><td colspan="3">COMPTINE JUSQU'A VINGT
TABLES JUSQU'À DIX</td><td colspan="4">COMPTINE JUSQU'A TRENTE
TABLES JUSQU'À DIX</td><td>Comptine jusqu'à cent ;
tables ;
Calcul mental</td></tr>
</table>

ANNEXE 2 : LES TESTS

1 Le premier test

Exercice 2 (feuille A4)	Exercice 3 (feuille A4)
On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds.	On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de carrés. On lui indique que chaque rangée comporte exactement dix carrés et que l'exercice se fait en temps limité, moins d'une minute.
	

2 Le second test

Exercice B (feuille A4)	Exercice C
On demande à l'élève d'écrire sur une feuille le nombre de carrés (écriture chiffrée) afin de savoir le nombre qu'il faut pour réussir l'exercice C.	Des cubes sont disposés dans un endroit non visible du lieu où se trouve la feuille avec des carrés de l'exercice B. Les carrés sont disponibles en barres dizaines et en unités (matériel manipulé et testé auparavant avec chaque élève) : 8 barres dizaines et 9 cubes seuls. On a demandé à l'élève de compter les cubes seuls et de constater qu'on ne peut former une nouvelle dizaine. On demande à l'élève d'apporter dans une barquette le nombre de cubes nécessaires, ni plus ni moins, afin que sur chaque carré de la feuille précédente il y ait un cube. Il dispose du nombre écrit avec des chiffres obtenu auparavant (exercice B). Les barres dizaines sont sécables en dix cubes mais ne doivent être dissociées que lors de la vérification. La barquette ne contient donc que des barres dizaines et des cubes seuls (9 au maximum).
	

QUELS CRITERES DE VALIDITE, QUELLE APPROPRIATION PAR LES ENSEIGNANTS DE RESSOURCES ISSUES DE RECHERCHES EN DIDACTIQUE ?

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL - IFé
LDAR – ESPE Académie de Versailles - UCP
jacques.douaire@u-cergy.fr

Fabien EMPRIN
Équipe ERMEL - IFé
CEREP - Université Reims Champagne Ardennes - ESPE
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Sous quelles conditions l'appropriation par les enseignants des ressources produites par des recherches en didactique des mathématiques peut-elle conduire à une modification stable des pratiques professionnelles ? Cette communication, vise à contribuer à une réflexion sur le statut, pour les enseignants et les formateurs, de ressources issues ou inspirées par des recherches dans le champ de la didactique, à partir de l'expérience des recherches conduites par l'équipe ERMEL. Cette communication a aussi pour but de proposer des perspectives de travail pour un atelier en 2015.

I - POSER LES BASES DU QUESTIONNEMENT

Cette communication a pour but d'initier un travail collectif, en nous appuyant sur l'expérience de nos propres recherches et des ressources, questionnant les apports des recherches en didactique dans les processus de documentation professionnelle visant une transformation des pratiques. Trois axes sont concernés dans notre communication :

1. L'évolution des pratiques

   Au travers des ressources, quelles compétences professionnelles peuvent être développées et conduire à une modification stable des pratiques ? Nous prenons l'exemple des ressources produites par l'équipe ERMEL pour développer des outils d'analyse.

2. La formation

   En quoi les ressources produites peuvent-elle être des points d'appui pour la formation initiale et continue des enseignants ?

   Au moment où les M2 assureront un demi-service d'enseignement, l'articulation entre une formation universitaire s'appuyant sur une activité de recherche et une imprégnation de pratiques véhiculées dans les écoles présente un défi majeur. Quelles réponses peuvent apporter à la formation les ressources issues de travaux de recherche?

   Pour la formation initiale des enseignants, la réforme de la formation, dite de la masterisation, a positionné l'initiation à la recherche comme un passage obligé pour devenir enseignant. En effet le mémoire fait partie des caractéristiques des masters alors qu'un mémoire professionnel était demandé dans le cadre de la formation PE2. La réforme en cours continue dans cette voie tout en apportant des modulations. Concernant le mémoire de Master, la recommandation n°6 du comité de suivi de la réforme de la formation des enseignants du 30 mai 2014 précise :

   « Évaluer le mémoire, afin de mesurer le degré de professionnalité de l'étudiant alternant et sa capacité à mobiliser les savoirs disciplinaires et scientifiques, en relation avec la finalité pédagogique et les pratiques professionnelles. »

3. L'articulation recherche – ressources

A quelles conditions, une réflexion portée par les formateurs (chercheurs ou non) peut-elle construire des liens entre recherches en didactiques et ressources pour les enseignants ?
Pour aborder ces trois questions nous devons faire le choix d'un cadre d'analyse qui nous permette de regarder les pratiques enseignantes dans leur globalité, c'est à dire de la préparation de la séance à la mise en œuvre en classe.

II - DE LA RECHERCHE A LA PRODUCTION DE RESSOURCES : UN CADRE D'ANALYSE

Pour illustrer la complexité du problème, nous présentons ci-dessous un schéma qui présente les deux strates structurant le déroulement de nos recherches (schéma 1) : la première strate est celle de la situation d'apprentissage (centrée sur l'élève est les processus d'apprentissage), la deuxième est celle de la situation d'enseignement centrée sur l'enseignant et ses choix pédagogiques et didactique (une troisième strate, non représentée ici, serait celle de la situation de formation centrée sur le formateur).

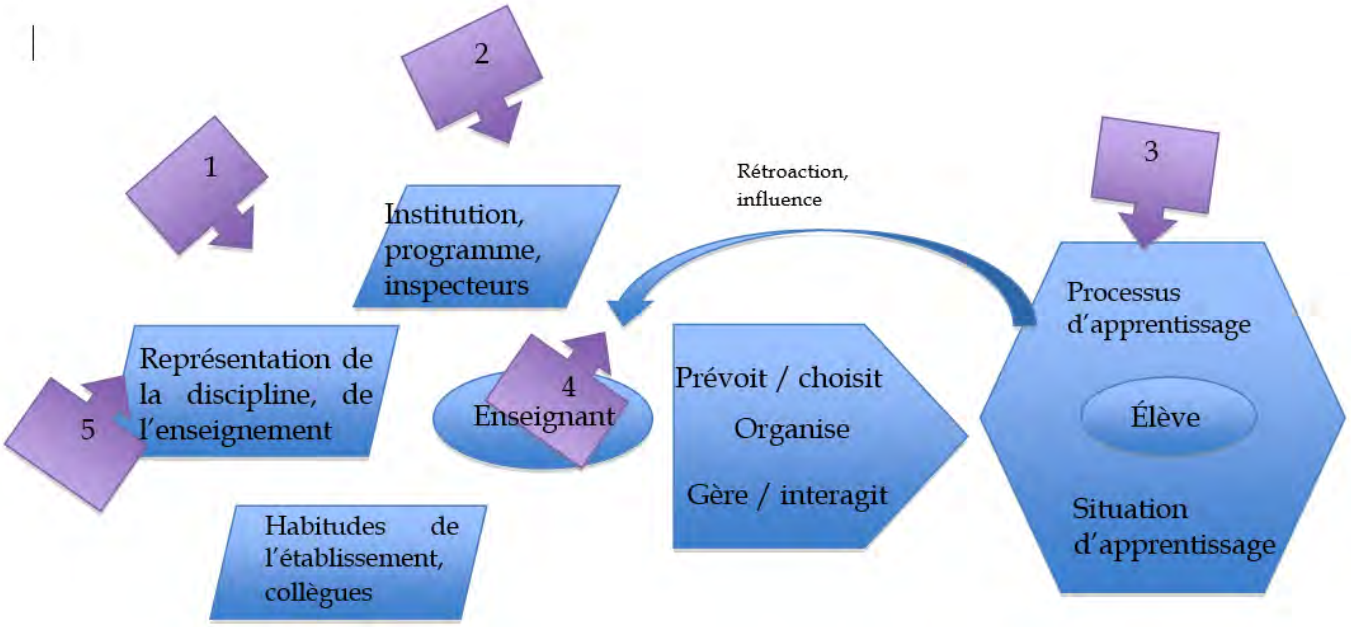


Schéma 1. *Représentation de la situation d'enseignement*

De par sa focalisation sur les processus d'apprentissage, la première strate est accessible en utilisant les cadres théoriques développés par la didactique des mathématiques ou la psychologie cognitive en fonction du point de vue adopté.

Les processus d'apprentissage dépendent des choix didactiques et pédagogiques de l'enseignant qui prévoit organise et gère cette situation. Ce travail de l'enseignant constitue donc une deuxième strate englobant la première et qui peut être analysée avec des cadres théoriques spécifiques : par exemple celui de la double approche (Robert et Rogalski, 1998) mais d'autre cadres sont disponibles comme la clinique de l'activité (Clot, 2008), la didactique professionnelle (Mayen 2007 ; Pastré 1999)... Notre choix de la double approche, pour cette communication est déterminé par le fait qu'elle prend en compte les mathématiques qui sont données à voir aux élèves (approche didactique) et l'activité de l'enseignant dans sa globalité (approche ergonomique).

Les pratiques professionnelles, au sens de la double approche, peuvent être recomposées à partir de cinq composantes : cognitive et médiative qui permettent d'analyser le savoir en jeu et les interactions enseignant – élèves et institutionnelle, sociale, personnelle qui permettent d'analyser certains déterminants des pratiques comme les habitudes professionnelles, les programmes …

Où peuvent intervenir les recherches qui produisent des ressources dans ce schéma ? Nous illustrons chacun des aspects en prenant l'exemple des ressources produites par notre équipe. Nous avons placé

des marqueurs sur chacun des aspects dans le schéma 1. Nous illustrons ces différents points à partir de nos recherches en identifiant les questions que nous nous posons.

1. Les ressources peuvent modifier les représentations des enseignants sur leur discipline, les démarches d'enseignement. Que ce soient des lectures plus ou moins théoriques, des vidéos, des dispositifs vus en formation, des conférences, l'expérience de l'enseignant qui teste ce qu'il a vu ou lu, parfois une combinaison de ces éléments.
   Dans le cas des ressources ERMEL, chaque ouvrage est précédé de « parties théoriques » et de « chapeaux par thème ». Ces parties visent à éclairer les enseignants sur les choix qui ont été opérés. Les parties théoriques constituent également des apports de connaissances théoriques, épistémologiques, didactiques…pour les enseignants et les formateurs. Ces connaissances et la démarche globale de l'ingénierie c'est à dire l'approche de l'enseignement des mathématiques par la résolution de problème doit /peut amener les enseignants qui la pratiquent à modifier leur vision de la discipline. Plusieurs questions peuvent se poser : Pourquoi est-ce qu'un enseignant prendrait le temps de lire ces parties ? Quels sont les éléments déclencheurs : formation, situations vues, situation testée, envie de changement, problème rencontré, avis d'un pair… ? Ensuite, une fois que la lecture est enclenchée, quels sont les éléments qui peuvent être facteurs d'évolution : l'étayage théorique, la méthodologie, des illustrations vidéo… ?
2. Elles peuvent être considérées comme une obligation institutionnelle. Certaines démarches sont explicitement citées dans les programmes ou sont sous-jacentes. Quand le formateur est aussi l'évaluateur, la démarche prônée par le formateur peut apparaître comme une contrainte institutionnelle.
   Les travaux issus de recherches peuvent être, en fonction des programmes, plus ou moins éloignés de la demande institutionnelle. Il n'en reste pas moins qu'ils peuvent être repris par des représentants de l'institution comme c'est le cas pour les travaux de l'équipe ERMEL par exemple dans le site de la circonscription de Dijon – Avallon (http://circo89-avallon.ac-dijon.fr/IMG/pdf/la_construction_du_nombre_au_cycle_2.pdf). Dans ce cas, il y a une forme de recommandation institutionnelle. Le poids de la contrainte institutionnelle sur les choix de l'enseignant serait à étudier de façon plus approfondie mais nos études sur les pratiques utilisant les outils numériques nous montrent (Emprin, 2007) qu'au moins dans ce cadre, les programmes et les dispositifs nationaux (B2I par exemple) ne sont pas déterminants dans les choix de l'enseignant.
3. Les productions de ressources fournissent des situations d'apprentissage, décrites plus ou moins exhaustivement que l'enseignant adapte plus ou moins.
   Dans les ouvrages produits par ERMEL, la description des processus d'apprentissage visés est explicitée dans le chapeau du thème et dans les parties théoriques. Les étapes de la situation d'apprentissage, notamment les phases sont également précisées. L'enseignant qui met en œuvre les situations a donc à sa disposition les connaissances nécessaires pour comprendre ce qui est en jeu dans la situation d'apprentissage qu'il mène. Ceci étant, mettre à disposition ne veut pas dire permettre de s'approprier. La question de l'accessibilité des contenus didactiques dans ce type d'ouvrage ainsi que, en quelque sorte, les prérequis nécessaires pour pouvoir profiter des contenus proposés est importante à poser.
4. Ces descriptions de situations fournissent également de façon plus ou moins exhaustive des éléments de pilotage, de gestion de classe ou des résultats d'expérimentations qui peuvent prendre le statut de rétroactions. Les descriptions des situations concernent les déroulements, les interactions enseignant – élèves et anticipent les procédures des élèves. Néanmoins, différents éléments sont plus ou moins parcellaires ou sous-entendus. La question du niveau de description des gestes professionnels se pose : faut-il une description exhaustive qui risque d'être modélisante ou trop fermée et empêcher l'appropriation, des indications générales qui risquent d'être inutiles si l'enseignant ne parvient pas à gérer la situation d'apprentissage ?
5. Autour de ressources peuvent se constituer des communautés de pratiques, éventuellement facilitées par les usages numériques actuels (Georget, 2009). Ces communautés peuvent être plus ou moins virtuelles. Le choix d'un type d'ouvrage ou d'une « méthode » peut se faire par équipe de cycle, dans

ce cas les enseignants sont liés par ce choix. Cela peut générer des échanges entre eux, des collaborations (échange de matériel, préparations communes)… Il serait donc intéressant de questionner les déterminants et les conséquences de ces choix : Est-ce que choisir les ouvrages d'une même collection permet de travailler ensemble et de donner de la cohérence aux apprentissages ou au contraire un moyen de se dispenser d'échanger sur le fond puisque la continuité est assurée par les ouvrages utilisés ? Les forums d'entraides, les sites d'enseignants peuvent également contribuer à la création d'une communauté qui partagerait des pratiques, sans être lié à la localisation des personnes. La question à laquelle nous devons maintenant répondre est : à quelles conditions cette influence peut-elle réellement exister ? Nos recherches, notre méthodologie et les critères de validité relatifs à nos ressources sont antérieurs à la production des cadres théoriques cités, toutefois ceux-ci devraient pouvoir fournir des outils pour comparer différentes ressources produites au sein de la communauté.

III - DE LA RECHERCHE A LA PRODUCTION DE RESSOURCES : LES RECHERCHES DE L'EQUIPE ERMEL

Chaque recherche de l'équipe ERMEL a pour origine un état des pratiques enseignantes. Prenant en charge l'intégralité des contenus d'enseignement dans un champ donné, numérique ou géométrique, les ressources produites à l'issue de la recherche visent une modification des pratiques qui ne se limite pas à une amélioration ponctuelle de l'apprentissage d'une notion.

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment d'outils numériques.

Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. Les étapes de la recherche comportent (Douaire, Emprin, 2012) :

1. L'identification de besoins sociaux ou scientifiques
2. Une analyse du savoir (problèmes, propriétés, représentations, preuves…), ainsi que des connaissances que les élèves ont pu développer
3. La formulation d'hypothèses sur les apprentissages et l'enseignement
4. L'organisation de l'étude des différentes notions
5. L'élaboration de situations didactiques, leur expérimentation dans plusieurs académies et la remise en cause éventuelle des hypothèses et des choix

   Ces composantes sont en interaction : l'identification des connaissances initiales et des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
6. La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues
7. L'étude des conditions de l'appropriation de ces dispositifs

Nous illustrons les deux premiers points en nous appuyant sur nos recherches précédentes et actuelles.

1. L'identification des besoins

   Par exemple dans notre projet de recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3, nous avions formulé des constats : l'enseignement était souvent réduit à celui du vocabulaire et des tracés (peu de problèmes étant proposés en géométrie) et explicité la nécessité d'une articulation avec l'acquisition antérieure de connaissances spatiales et avec la construction progressive d'une géométrie déductive au collège. Cela nous a conduits à répondre notamment aux questions : quelles relations entre les apprentissages spatiaux et géométriques ? Quels problèmes poser ?

Dans notre recherche actuelle sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2, nous avons à prendre en compte les pratiques spécifiques en GS (projets pluridisciplinaires, jeux…) et les besoins spécifiques à ce niveau : des enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel disponible… Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expérience.

2. Une analyse du savoir

L'importance des apports des savoirs mathématiques, psychologiques ou didactiques sont différents pour nos recherches. Prenons trois exemples : les recherches sur les apprentissages numériques en élémentaire, la recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3 et celle en cours sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2.

Pour les recherches sur les apprentissages numériques et la résolution de problèmes au cycle 2 : nous pouvions, au milieu des années 80, nous appuyer sur de nombreux travaux de psychologie qui décrivaient les compétences et les connaissances des élèves dans les premiers apprentissages numériques. L'ouvrage postérieur de Fayol «L'enfant et le nombre » (1990) en présente d'ailleurs une synthèse. De façon analogue, la théorie des champs conceptuels et les structures additives de Vergnaud (1990) fournissaient un cadre. Par ailleurs, la théorie des situations didactiques nous donnait des outils pour construire des situations. Une partie de notre travail a consisté à expérimenter une continuité entre ces apprentissages sur les trois années du cycle, au moyen de progressions dont nous avons expérimenté la robustesse, et une cohérence dans les gestes professionnels de l'enseignant (par exemple gestion des mises en commun, mise en œuvre de choix de différenciation…).

La situation a été assez différente pour notre recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3. Si des travaux de didactiques apportaient un éclairage sur des objets particuliers de savoir, et plus encore ceux de Berthelot et Salin (1992) qui analysent la nature des différents types de géométrie et posent la question de leur articulation dans l'enseignement. Toutefois le champ conceptuel n'était pas aussi structuré que dans le numérique et en particulier sur l'articulation entre les apprentissages portant sur les objets géométriques et ceux sur les relations géométrique. De plus, des questions essentielles comme l'évolution des significations spatiales et des procédures concernant de nombreuses notions (par exemple le parallélisme) étaient aussi à élaborer. Cette recherche a donc dû prendre en charge de façon accrue la production de savoir sur les apprentissages et l'enseignement dans ce domaine et, ensuite, bien entendu faire des choix de progression ou de situation.

Dans notre recherche actuelle, cette production de connaissances sur les apprentissages spatiaux au cycle 2 est d'autant plus nécessaire que les travaux en didactique et en psychologie sont nettement plus rares, notamment les relations entre les expériences spatiales des élèves et les apprentissages géométriques.

Nous pensons que pour permettre le développement de l'activité mathématique de l'élève, condition d'un apprentissage, il est nécessaire de contribuer à rendre les enseignants du premier degré plus autonomes dans leurs choix. C'est pour cette raison, que dans nos ouvrages, et aussi lors de leur utilisation en formation, il nous paraît essentiel de distinguer d'une part les apports mathématiques, historiques, épistémologiques, ou portant sur les apprentissages (issus de travaux de psychologie ou de didactique), et d'autre part nos choix sur tel ou tel enseignement qui sont des propositions cohérentes et expérimentées sans prétendre être des paradigmes scientifiques.

En quoi nos ressources peuvent entrainer une évolution des pratiques ? La validité de nos propositions d'enseignement, qui constituent souvent une ressource pour les formateurs, ne s'appuie pas sur la simple application de résultats issus de théories didactiques.

Elle nous apparaît due à la cohérence de nos choix entre les différents domaines traités (rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages, analyse et prise en compte des connaissances initiales des élèves, …) et, surtout, à la robustesse des situations proposées. En effet, les procédures et résultats

qui seront produits par les élèves dans une classe particulière font bien partie de ceux décrits dans l'analyse de la situation, ce qui permet au maître de pouvoir anticiper ses décisions. Cette robustesse est liée à notre méthode de recherche : l'expérimentation de chaque situation dans une vingtaine de classes de plusieurs académies et de milieux sociaux différents s'est effectuée durant plusieurs années. En fonction des résultats, des situations ont pu être abandonnées ou modifiées. Quelquefois l'approche même d'une notion a pu être remise en cause et repensée. La nécessité de résultats concordants a été un critère pour retenir des situations. Grâce à cette méthodologie de travail, les apprentissages des élèves correspondent donc en général à ceux attendus.

De plus, si le descriptif de nos situations suggère une organisation pédagogique (type de travail : en groupe ou individuel…), les retours des enseignants montrent que cette organisation est adaptable sans porter préjudice à l'organisation didactique de la séquence.

Les transformations crées par ces ressources ne se limitent pas à un changement de type de séquence ou de progression, mais visent à modifier la conception de l'enseignement des mathématiques et à éclairer l'enseignant sur les choix didactiques favorisant l'activité mathématique de l'élève.

En effet pour que les maîtres puissent mettre en œuvre les situations, il est nécessaire qu'ils en perçoivent les enjeux, que ceux-ci soient généraux et relèvent par exemple de la conception des apprentissages et de l'enseignement (rôle de la résolution de problèmes, prise en compte des connaissances et des procédures des élèves, dévolution aux élèves de la validation,…), ou plus spécifiques à un champ concerné. Des notions issues de théories didactiques comme le contrat didactique, la dévolution, la validation, les variables didactiques constituent alors des outils conceptuels pour conduire les séquences.

IV - LIENS RESSOURCES, RECHERCHES ET FORMATION

1 Une analyse des obstacles à la diffusion des résultats de recherche

Depuis les années 90, la didactique des mathématiques s'est intéressée à la question des pratiques enseignantes (Margolinas (1992), Robert (1999)) et même des pratiques de formation (Abboud-Blanchard (1994), Emprin (2007)). Ces travaux ont permis de mettre en évidence la complexité de ce champ ainsi que des résultats locaux, comme par exemple ceux de Robert (2003) pour les enseignants de mathématiques de collège et lycées :

« un certain nombre d'obstacles à cette adoption effective, au niveau des pratiques, de résultats de didactique des mathématiques, notamment de séquences d'enseignement :

– l'échelle des recherches – trop peu de séances concernées par des propositions effectives sur une même année scolaire ;

– le travail de mise au point de l'enseignant avant les séances, souvent important, avec des décalages éventuels par rapport aux programmes et beaucoup d'implicites à décoder (sur l'esprit et non la lettre des séances) ;

– le changement de contrat avec les élèves trop important par rapport aux habitudes, qui nécessite d'être mis en place pendant un certain temps ;

– le temps « perdu » pendant les séances (il y a souvent un important travail autonome des élèves) ;

– la tension nécessaire à la gestion des séances – les élèves peuvent résister au travail demandé par l'enseignant, ils peuvent aussi avoir du mal à passer d'un travail autonome aux corrections ;

– la difficulté de savoir si l'essentiel de ce qui était visé par le concepteur est « passé » ;

– la difficulté d'évaluer les résultats des séances sur les élèves…

Cela nous a amenée à réfléchir aux pratiques des enseignants en préalable à la conception de formations. »

Toutefois, même si on considère que ces difficultés identifiées chez des enseignants du secondaire, spécialiste d'une discipline, sont en partie transférables à des enseignants polyvalents du primaire, nous remarquons que les caractéristiques citées précédemment de nos ressources nous ont permis dès la publication d'ERMEL CP (1990) et dans les ouvrages suivants de prendre en charge ces questions et de

traiter en amont cet ensemble de difficultés (ensemble des contenus pris en charge, description précise des séances, cohérence du contrat,…). Cela suppose aussi que l'enseignant donne toute son importance, dans ses analyses à l'activité mathématique réelle de l'élève.

Le concept de professionnalisation apporte un éclairage nous permettant de comprendre comment les enseignants évoluent et construisent leur identité professionnelle.

2 Le concept de professionnalisation

Plusieurs chercheurs proposent des cadres d'analyse du concept de professionnalisation.

Wittorski (2008) explique le succès du thème de la professionnalisation dans la recherche par la nécessité accrue actuellement «de finaliser davantage les apprentissages par rapport aux situations de travail, d'articuler plus étroitement travail et formation, de développer des expertises multiples » (p. 15).

Kaddouri (2005) propose de distinguer les processus de professionnalisation aux niveaux :

- individuel (porté par l'individu avec ou sans accord de l'individu)
- collectif (groupe professionnel qui développe des stratégies de reconnaissance de la profession)
- institutionnel (l'intériorisation des normes et des valeurs de l'institution)

Cette distinction nous semble adaptée pour porter notre réflexion d'autant que l'auteur précise que *« reste posée la question du rapport entre ces différents projets, plus précisément entre projet institutionnel, d'un côté, et projet personnel et/ou collectif de l'autre. Leur complémentarité ainsi que leur décalage ne vont pas sans générer des tensions dans les rapports de l'individu aux responsables de son organisation » (Kaddouri, 2005, p.147).*

La communauté des chercheurs et des formateurs pourrait être considérée comme porteuse de projets de professionnalisation des enseignants qui ne pourraient évidemment pas être considérés comme strictement institutionnels. En ce sens notre questionnement porte sur la nature de ces projets de professionnalisation et sur la difficulté de faire coïncider les trois niveaux de projets.

3 Les voies de professionnalisation pour lire les formes de formation et les pratiques de recherche

Wittorski (2009) propose une grille de lecture des voies de professionnalisation proposées par les organisations. Cette grille d'analyse nous permet de lire, les pratiques de formation et dans le tableau suivant de les relier avec les cultures de travail et de recherche.

Voies de la profession-nalisation	Logique de l'action 1	Logique de la réflexion et de l'action 2	Logique de la réflexion sur l'action 3	Logique de la réflexion pour l'action 4	Logique de la traduction culturelle par rapport à l'action 5	Logique de l'intégration assimilation 6
Nature du processus de développement professionnel mis en œuvre par l'individu	Situation connue présentant un caractère de nouveauté qui conduit à une adaptation dans l'action des process d'action habituellement mis en œuvre.	Situation inédite mettant en échec les façons de faire habituelles et conduisant à une itération entre la recherche d'informations et leur utilisation pour agir.	Situation de formalisation (orale ou écrite) de ses propres pratiques par une réflexion rétrospective sur l'action.	Situation de formalisation de pratiques nouvelles par une réflexion anticipatrice de changement sur l'action.	Situation de transmission de connaissances, de co-construction de pratiques nouvelles et de modification des façons habituelles de voir la situation par l'intervention d'un tiers.	Situation d'apprentissage de savoirs théoriques ou d'action nouveaux.
Exemples de situations de profession-nalisation	Au travail, en formation ou dans la vie courante : ajuster son process d'action au cours de sa mise en œuvre (sans avoir à y réfléchir).	Au travail, en formation ou dans la vie courante : réaliser une tâche inédite seul ou à plusieurs.	Au travail ou dans la vie courante : participer à un groupe d'analyse de pratiques, prendre un temps de réflexion sur son action.	Au travail ou dans la vie courante : participer à un cercle de qualité, réfléchir à un nouveau process d'action.	Au travail ou dans la vie courante : intervention d'un tiers pour nous aider à traiter une situation.	Au travail ou dans la vie courante : lire un ouvrage donnant des indications utiles pour agir (plus tard).

Tableau 1. *Tableau schématisant les 6 voies de professionnalisation présentées*

Voies de la professionnalisation	Logique de l'action	Logique de l'intégration assimilation	Logique de la réflexion et de l'action	Logique de la traduction culturelle par rapport à l'action	Logiques de la réflexion sur et pour l'action
Cultures de formation (et figures sociales[3] d'acteurs)	**Culture de l'apprentissage sur le tas** « se former par le faire » *Figure du collègue*	**Culture de l'enseignement** (Formation magistrale) « se former par l'acquisition de savoirs » *Figure de l'enseignant*	**Culture de la formation** (Formation alternée) « se former par l'accès à des savoirs et leur mise en œuvre » *Figure du formateur*	**Culture de l'accompagnement** (Tutorat/ coaching) « se former en situation grâce à un tiers » *Figure du tuteur*	**Culture de l'analyse de pratiques** « se former par l'analyse de son action » *Figure de l'animateur*
Cultures de travail	Organisation prescriptive évitant l'imprévu (taylorisme), prescrivant spécialisation et routine *Organisation du travail « à effet formateur »*		Organisation faiblement prescriptive déléguant au sujet la gestion de l'imprévu (situations nouvelles) *Organisation du travail qualifiante*	Organisation favorisant le coaching (salariés et tiers consultant) *organisation du travail qualifiante*	Organisation instituant des moments de formalisation des pratiques (cercles de qualité) *organisation du travail qualifiante, apprenante*
Cultures de recherche		Paradigme de la recherche classique	Paradigme de la recherche-action	Paradigme de la recherche inter, pluri ou trans-disciplinaire	Etude de l'épistémologie et des paradigmes de recherche

3 « *Figure sociale* » *d'acteur signifie le rôle ou la fonction dominante représentée par le tiers présent dans le dispositif proposé.*

Tableau 2. *Cultures de travail, de formation, de recherche et voies de professionnalisation*

Utiliser ces grilles permet de relier les différents processus de professionnalisation :

« Ce choix traduit notre conviction que la compréhension de la professionnalisation passe par l'étude combinée de l'offre (côté organisation) et de la dynamique de développement professionnel (côté individu). Elle permet ensuite de penser ensemble, et non de façon dissociée, la professionnalisation des individus, des activités et des organisations. » (Wittorski, 2009)

Le cadre de la professionnalisation nous fournit donc à la fois un cadre nouveau d'analyse des difficultés d'appropriation des produits de la recherche mais également des hypothèses concernant les conditions de cette appropriation.

4 Une illustration

Dans les référentiels de compétence des enseignants de 2010 et de 2013 on peut trouver des références à l'appropriation des produits de la recherche.

Dans le référentiel de 2010 : « *se former et innover* »

Le professeur connaît l'état de la recherche :

- *dans sa discipline ;*
- *dans le domaine de la didactique, de la pédagogie et de la transmission de savoirs (processus d'apprentissage, didactique des disciplines, utilisation des technologies de l'information et de la communication, etc.).*
- *Le professeur est capable de tirer parti des apports de la recherche et des innovations pédagogiques pour actualiser ses connaissances et les exploiter dans sa pratique quotidienne.*

Dans le référentiel de 2013 :

- *Connaître les processus et les mécanismes d'apprentissage, en prenant en compte les apports de la recherche.*
- *Se tenir informé des acquis de la recherche afin de pouvoir s'engager dans des projets et des démarches d'innovation pédagogique visant à l'amélioration des pratiques.*
- *Ils prennent en compte les concepts fondamentaux relatifs au développement de l'enfant et de l'adolescent et aux mécanismes d'apprentissage, ainsi que les résultats de la recherche dans ces domaines.*

Les deux descriptions des compétences attendues par l'institution renvoient à la logique de « l'intégration » : « actualiser ses connaissances », « connaître les processus d'apprentissage », « se tenir informé des acquis de la recherche » et à la logique de la « formation et de l'action » : « actualiser ses

connaissances et les exploiter dans sa pratique » « prennent en compte » « visant à amélioration des pratiques ».

Cette analyse renvoie au « paradigme de la recherche classique » c'est à dire recherche visant une production de connaissances et nécessairement coupée des problématiques de formation.

Les problématiques que nous abordons dans cet article et qui guident également une partie de notre travail d'équipe de recherche semblent donc en décalage avec la visée de l'institution.

La réforme de la formation mise en place à la rentrée 2014, instaurant une alternance en master 2 dans les masters MEEF (Métier de l'enseignement, de l'éducation et de la Formation) semble quant à elle renvoyer à une formation qui mêle les cinq types de formation. Nous pouvons identifier d'ores et déjà plusieurs difficultés : celle de la juxtaposition des différentes logiques et de leur compatibilité, la nécessité de développer plusieurs cultures de recherche qui ne sont peut-être pas existante ou également développées, les difficultés de mise en cohérence entre la logique de formation et les autres contraintes institutionnelles comme le référentiel de compétence ou les concours de recrutement.

Ainsi nous voyons que le cadre de la professionnalisation nous permet effectivement de mettre en évidence des difficultés.

V - EN CONCLUSION, QUELLES PERSPECTIVES ?

Notre projet initial était de susciter, au sein de la communauté des formateurs, une réflexion sur la contribution pour les enseignants et les formateurs, de ressources issues ou inspirées par des recherches dans le champ de la didactique, en particulier sur l'analyse de leurs usages et de leurs effets sur les pratiques, et plus précisément sous quelles conditions cet usage peut contribuer à une modification stable des pratiques ? Ce qui conduit aussi à s'interroger sur les liens entre recherche et production de ressources.

Cette communication nous a permis aussi de présenter des cadres théoriques aidant à mieux comprendre les sources des difficultés d'appropriation des ressources par les enseignants : dues, à la nature des recherches elles-mêmes, aux ressources produites, à la nature du travail de l'enseignant, à ses intention de professionnalisation et à la compatibilité entre les niveaux auxquels ses situent les différents processus , aux prescriptions de l'institution …

Pour aller plus loin dans ce questionnement il nous faut collectivement préciser ce qui est réellement visé en termes d'évolution des enseignants et donc définir des critères. Nous proposons de premiers critères intuitifs pour caractériser les enjeux de la production de ressource :

- entrainer des changements stables de pratiques.
- analyser les changements transférables à d'autres champs d'enseignement. Une hypothèse serait, par exemple que, quand un enseignant s'approprie des démarches de différenciation en utilisant la recherche qui a abouti à l'ouvrage « Chacun, tous, différemment » (équipe de didactique des mathématiques de l'INRP, 1995), il peut les utiliser dans d'autres champs que celui des mathématiques (il ne peut pas faire autrement que d'utiliser...)

Nous avons envisagé différentes apports pouvant aider à cette réflexion :

- Pour l'axe 1 : En plus des cadres que nous venons de présenter et qui devraient être approfondis, il serait possible de regarder les apports de travaux étrangers : PCK (Pedagogical Content Knowledge) aux USA (Rowan et Al., 2001), Four parameters (Monaghan, 2003) pour expliciter des critères communs sur l'évolution des pratiques.
- Pour l'axe 2 : une mutualisation des usages et des pratiques de formations : par exemple quel mémoire de Master MEEF ? et d'autres dispositifs (Neop@ss action …).
- Pour l'axe 3 : une mutualisation d'autres équipes de recherche travaillent sur la production de ressources.

Comme nous l'avons annoncé, nous préparons actuellement un atelier pour le prochain colloque COPIRELEM, privilégiant une réflexion sur les axes 1 et 3.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ABBOUD-BLANCHARD M. (1994) *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise*, Thèse de doctorat, Université Paris VII

BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de l'Université de Bordeaux 1. LADIST

DOUAIRE J., EMPRIN, F. & RAJAIN C. (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. *Repères IREM* n° 77.

DOUAIRE J. & EMPRIN F. (2012) Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants, *Actes du XXXVIIIe colloque de la COPIRELEM* Dijon

EMPRIN F. (2007) Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique, Thèse de didactique des disciplines, Université Paris VII – Denis Diderot

ÉQUIPE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DE L'INRP (1995) Chacun, tous… différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages, *rencontre pédagogique*, n°34, INRP, Paris

ÉQUIPE ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, (Hatier ed)

KADDOURI M. (2005) Professionnalisation et dynamiques identitaires. In Maryvonne Sorel et Richard Wittorski, la professionnalisation en actes et en question, pp. 145-157. Paris : l'Harmattan.

MARGOLINAS C. (1992) Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 12, n°1, pp. 113-158.

ROBERT A. (1999) Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia 15*

ROBERT A. (2003) De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée), *Didaskalia*, n° 22, p. 99-116.

ROWAN B. et al. (2001) Measuring teachers' pedagogical content knowledge in surveys: An exploratory study. Consortium for Policy Research in Education.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 10.2, 133-170.

WITTORSKI R. (2008) La professionnalisation : note de synthèse, Savoirs, 17, 11-39.

WITTORSKI R. (2009) A propos de la professionnalisation, in JM Barbier, E Bourgeois, G Chapelle et JC Ruano-Borbalan (éd. 2009) Encyclopédie de l'éducation et de la formation (p. 781-793). Paris : PUF.