

Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques pour des élèves en difficulté

COPIRELEM, sous un projet de Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Rennes.1996.

Ce texte a été édité en plaquette en septembre 1996 et diffusé par la Direction des Écoles du Ministère de l'Éducation Nationale dans toutes les Inspections Académiques avec ce même titre et sous la rubrique Accompagnement des Programmes de Mathématiques.

Il essaie de caractériser les élèves en difficulté à l'école primaire et d'analyser des réponses habituelles de professeurs des écoles à ces difficultés. Il propose deux exemples de situations pour l'apprentissage mathématique de ces élèves.

A. INTRODUCTION

Cette contribution s'appuie sur les résultats de recherches sur l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté de l'école primaire effectuées par D. Butlen et M. Pezard [5], par M.J. Perrin-Glorian [14, 15, 16].

Tout enseignement se proposant de lutter contre l'échec scolaire doit proposer aux élèves des situations d'apprentissage prenant en compte les caractéristiques spécifiques d'un public en difficulté.

Dans un premier temps, nous essayons de décrire quelques traits caractéristiques des élèves en difficulté, et nous dégageons certaines pratiques professionnelles d'enseignants s'adressant à une classe comprenant beaucoup d'élèves en échec.

Nous nous appuyons sur cette analyse pour décrire dans un second temps un dispositif de remédiation. Nous proposons ensuite des éléments de réponse aux questions suivantes :

1. Comment, à partir de la production régulière d'écrits collectifs résumant ce qui a été appris pendant une période donnée, aider les élèves à formuler, décontextualiser et plus généralement retenir les notions fréquentées en classe ? Comment des situations "de rappel" peuvent-elles contribuer à cela ?

Apprentissage et difficultés

Comment utiliser ces phases de rappel pour dépasser la simple description et le stade de l'action et apprendre aux élèves à anticiper sur les apprentissages scolaires ?

2. Comment aider les élèves à résoudre un problème complexe, en leur apportant des aides limitées, sans réduire la tâche à une simple exécution de règles et sans limiter le sens mathématique de la situation ?

B. ENFANTS EN DIFFICULTÉ. PREMIERE ANALYSE

1. Comment se manifestent les difficultés des élèves de l'école élémentaire ?

Nous nous appuyons sur deux articles : "Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté - *PME* 1992, M.J Perrin" et "Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté, *Repères-IREM* n°3, Topiques-Editions (1991), M.J. Perrin-Glorian et D. Butlen".

Voici plusieurs caractéristiques d'un élève en difficulté en mathématique, qui ne se retrouvent pas forcément toutes chez le même élève ; cependant, on constate souvent un effet d'accumulation à long terme.

Difficulté à capitaliser le savoir

Les élèves en difficulté ont du mal à retenir le cours, à mémoriser vocabulaire et propriétés. L'apprentissage par cœur n'apporte pas de solution ; on a pu constater, en sixième par exemple, que des élèves connaissent parfaitement deux définitions de la médiatrice d'un segment mais ne savent en utiliser aucune pour résoudre un exercice.

Manque de confiance dans les connaissances anciennes

L'absence de connaissances antérieures solides auxquelles se référer empêche chez ces élèves une organisation et une intégration des savoirs nouveaux : pour certains enfants, rien n'est sûr, tout peut toujours être remis en question, puisqu'ils ont l'habitude de se tromper.

Carence dans les représentations mentales et absence de projet implicite de réinvestissement

Il y a souvent, chez les élèves en difficulté, un divorce entre les situations d'action qui devaient servir à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation⁽²⁾ qui est faite ensuite par le maître.

Par exemple, pour introduire la notion de fraction, il est usuel d'amener les élèves à partager, par pliage ou report, des segments en parties égales ; les élèves en difficulté ne retiennent de cette séance que l'activité manipulatoire alors que d'autres y voient en plus l'illustration d'une définition de la fraction. Pour ces derniers, la notion de fraction prend du sens.

Au cours de l'action, dans les premières situations qui permettent d'aborder une notion nouvelle, on ne voit pas beaucoup de différences entre les élèves "ordinaires" et ceux qui sont en difficulté. En revanche, la différence entre ces deux types d'élèves s'accroît très vite dès qu'ils ont à réutiliser les connaissances nouvelles dans d'autres situations. Le savoir institutionnalisé par le maître, même dans le cas où il est mémorisé, semble coupé des situations d'action qui lui ont donné naissance et ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Les élèves qui ne rencontrent pas ce type de difficulté ont conscience que, dès le début de l'activité, ce qu'ils vont faire pourra être réutilisé dans d'autres situations, autrement dit dans un autre contexte. Ils se créent des représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments à l'occasion d'autres problèmes. Ceci leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée.

Pour d'autres enfants, ce "transfert" ne se fait pas à l'occasion d'autres problèmes ; il ne peut pas se faire car ils ne résolvent le problème que dans les termes où il est posé, sans idée de généralisation. Cela empêche la capitalisation et la mémorisation des connaissances. Ainsi, pour eux, chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, ils n'en reconnaissent que le contexte : "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles... "

⁽²⁾ Institutionnalisation : phase de la séance où le maître extrait, souligne, pointe l'important mathématique ou méthodologique.

Apprentissage et difficultés

Absence d'identification de l'enjeu des situations d'enseignement

L'élève en difficulté identifie mal les enjeux d'apprentissage ; il ne résout pas toujours le même problème que ses pairs, ni le problème que le maître pense avoir posé. L'élève en reste souvent au niveau de l'action et ne peut faire le lien avec d'autres expériences et d'autres apprentissages.

Lassitude et manque d'investissement

Ce manque d'investissement se fait en particulier sentir dans les contrôles écrits et dans le travail à la maison où un certain nombre d'élèves n'aborde pas une partie des questions. Ceci est sans doute à mettre en relation avec un certain manque de méthodes et un défaut de confiance dans la réussite.

En classe, certains élèves peuvent se lasser très vite d'une situation. Il est de ce fait très difficile de mener à terme son exploitation de la situation et de tirer les bénéfices de la recherche amorcée.

Certaines situations, lorsqu'elles sont perçues par les élèves comme nouvelles, les "accrochent" particulièrement. Ces situations restent alors plus facilement dans la mémoire des élèves et peuvent jouer le rôle de situations de référence.

Manque de méthodes

Les élèves ne savent pas comment aborder un problème. Le plus souvent, ils essaient de se souvenir du cours mais par contre, ils ne savent pas comment l'utiliser. Ils semblent manquer de situations complexes de référence, ce qui les amène à se précipiter sur la recherche d'une opération à effectuer ou d'une règle à appliquer. De plus, ils ne prennent souvent en compte qu'une partie de l'information et ont du mal à l'organiser pour se faire une représentation du problème.

Le manque de méthodes et d'investissement rend plus difficile le travail à la maison (par exemple lors de l'apprentissage des tables de multiplication).

Difficulté de socialisation et recherche d'une relation privilégiée avec l'adulte

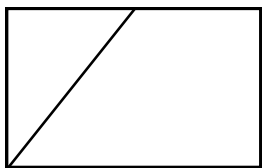
Le travail de groupe et les phases collectives sont très difficiles à gérer parce que les élèves, comme ils le reconnaissent eux-mêmes lors d'entretiens individuels, ont des difficultés pour communiquer : ils ont du mal à s'exprimer, n'en ont pas toujours envie, ils sont incapables d'écouter leurs camarades et de respecter des règles élémentaires de prise de parole. Ils recherchent une relation privilégiée avec l'adulte.

Certaines activités permettent toutefois de favoriser le travail en groupe. Par exemple, celles qui utilisent l'informatique rendent la collaboration entre élèves nécessaire : les conditions matérielles sont particulières et le professeur n'est plus alors l'interlocuteur privilégié. En revanche, le travail sur ordinateur rend quasiment impossible les phases collectives car les élèves acceptent mal d'interrompre le travail en groupe : la machine joue un rôle "attracteur" et ils travaillent à des rythmes différents. Le bilan doit donc être fait dans une séance ultérieure.

Recherche d'algorithmes

Les élèves cherchent à utiliser le plus possible des algorithmes qui constituent des économies de pensée. Dès le début de l'apprentissage d'une notion, ils se construisent des règles de fonctionnement qui, souvent, ne prennent en compte qu'une partie de l'information et qui ont des domaines de validité très restreints, voire nuls. Par exemple, au moment de l'apprentissage des fractions, dès la première séance, l'écriture fractionnaire a été liée à une action de report de longueur : $1/3$ est la mesure de la longueur qui se reporte 3 fois dans l'unité. Les élèves retiennent le report mais non le rôle de l'unité.

Ainsi, alors qu'il s'agissait d'évaluer des portions de feuille de papier par rapport à la feuille entière, trois groupes d'élèves qui avaient évalué 2 pièces dont la réunion faisait une demi-feuille (figure ci-dessous), ont bien évalué le triangle en disant qu'il se reportait 4 fois dans la demi feuille mais ont estimé à tort que le trapèze valait $1/3$ car le triangle se reportait 3 fois dans le trapèze.



Cela pose le problème de l'équilibre à adopter lors des bilans. S'il n'y a pas d'institutionnalisation à l'issue d'une phase de recherche, les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci. Mais, dès qu'il y a institutionnalisation, une règle, éventuellement erronée, s'installe ; cette règle

Apprentissage et difficultés

est souvent utilisée ensuite sans référence au sens. Le maître se trouve alors contraint de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui fragilise davantage les apprentissages.

Difficultés à changer de point de vue

Une notion abordée dans un contexte est difficile à réutiliser dans un autre contexte. Par exemple, des élèves capables de résoudre des problèmes de proportionnalité dans un cadre numérique se retrouvent démunis devant un problème d'agrandissement de figures. Ils sont souvent incapables de percevoir le caractère commun à ces deux problèmes.

Problème d'expression et de lecture

À l'oral comme à l'écrit, les élèves en difficulté ne réussissent pas à faire des phrases simples ayant un sens, ni à utiliser correctement le vocabulaire. Leur expression est presque toujours partielle et imprécise : "la médiatrice, c'est la perpendiculaire" ; pour construire la médiatrice d'un segment, "on met le compas au milieu". Ils ne se dégagent pas de leurs actions.

En outre, la plupart rencontrent de grandes difficultés pour décoder, seuls, un texte de problème et prendre en compte la totalité de l'information.

Les problèmes de langage, d'expression et de lecture, sont ainsi à l'origine de difficultés mathématiques, qui sont au moins de trois ordres différents : la prise d'information, la conceptualisation, la production.

Les situations du quotidien, parfois considérées comme plus "motivantes"

Ces situations avec lesquelles les élèves ont une certaine familiarité, font souvent appel à des modes de raisonnement non conformes à ceux que l'on attend dans un cours de mathématiques. Il peut ainsi s'installer un véritable malentendu et une communication absurde entre le professeur et certains élèves. Par ailleurs, certains élèves refusent l'intrusion de la vie courante dans le cadre scolaire car cela leur rappelle trop leur vie quotidienne. L'expérience des élèves dans la vie quotidienne peut être utilisée à condition de poser aux enfants de véritables problèmes.

Représentation de soi de l'élève

Leur situation d'échec à l'école contribue à donner aux élèves en grande difficulté une image dévalorisée d'eux-mêmes. Cette image et la représentation qu'ils se font de leur place par rapport aux autres élèves de la classe ont des répercussions

sur toute leur vie scolaire, y compris la difficulté à accepter certaines formes de travail (en groupes notamment).

2. Comment l'enseignant répond-il aux contraintes liées à une classe comportant de nombreux élèves en difficulté ?

L'enseignant est souvent impliqué dans un cercle vicieux : celui de la simplification des situations et de la "négociation à la baisse" des consignes (voir [14]).

Face à un élève qui :

- ne projette pas en terme d'apprentissage l'activité proposée,
- n'arrive pas à prendre en compte tous les cadres intervenant dans une situation,
- ne réinvestit pas dans une situation où se conjuguent ancien et nouveau savoir (la situation étant trop vite usée)
- ne perçoit pas le problème dans sa globalité,
- manque de méthode pour assumer seul, la résolution globale du problème,
- recherche des règles simples lui permettant de fournir une réponse quelconque,

l'enseignant est amené à :

- simplifier le problème posé, souvent à la demande de l'élève ou bien par souci d'anticiper un risque d'échec (donc d'abandon),
- poser des questions intermédiaires dont la réponse ne demande pas une prise en charge du problème général,
- proposer des algorithmes simples de résolution, des règles ou des opérations,
- concentrer son discours sur l'apprentissage de résultats du cours ou de savoir-faire algorithmisés
- réduire les situations à des répétitions d'autres situations non menées à terme, ou à des activités algorithmisées.

L'enseignant entre alors dans un cercle vicieux qui amène un appauvrissement des apprentissages et un renforcement des difficultés : l'élève se représente plus difficilement le problème, n'assume pas la responsabilité de la recherche, est réduit à un rôle d'exécutant....

L'enseignant a, de plus, tendance à se limiter à un domaine, le plus souvent numérique, rendant ainsi encore plus difficile les changements de point de vue ; il juge alors plus sage "*de faire le moins de mélanges possibles pour ne pas compliquer davantage les choses pour l'élève*".

3. Les idées retenues pour une remédiation

Une remédiation doit s'appuyer sur divers modes d'intervention et ne pas se limiter au niveau individuel. Elle doit être intégrée à l'apprentissage en cours ; une dialectique du réinvestissement et de la réussite doit s'instaurer entre les apprentissages collectifs et le "rattrapage" individuel ou par petits groupes.

Elle doit se construire autour de situations suffisamment complexes (pour donner du sens aux notions), mais pas trop difficiles, pour ne pas démobiliser les élèves. Il est également nécessaire de s'appuyer sur les acquis des élèves et de les mettre en valeur.

La remédiation doit commencer suffisamment tôt dans l'année car elle nécessite la mise en place de méthodes de travail différentes.

Elle ne se limite pas aux seuls apprentissages mathématiques mais doit viser à la réduction des difficultés exposées dans le premier paragraphe.

Nous allons maintenant développer deux exemples de situations qui s'inscrivent dans un processus plus complet de remédiation (au sens de nouvelle médiation au savoir) : ils s'inscrivent dans un dispositif diversifié tant au niveau des contenus (mathématiques, méta-mathématiques, méta-cognitifs) que des modes de gestion (aide individuelle, travail en petits groupes homogènes, travail en groupes hétérogènes, travail en groupe classe...)

C. UNE PREMIERE SITUATION

Construction d'une mémoire collective et écrite

1. Présentation de l'activité

Nous décrivons ici un processus mis en oeuvre de mars à juin 1991, dans une classe de CE2 d'un quartier défavorisé de Seine et Marne ([5]).

Chaque semaine, deux élèves sont chargés de rédiger et d'écrire sur le cahier "mémoire de la classe", un résumé de cinq à dix lignes sur ce qui a été appris pendant la semaine en mathématiques. Ce texte est soumis à la critique de la classe qui peut l'amender et le préciser. La nouvelle version, rédigée collectivement, est adoptée et devient le texte de la classe.

Dans le débat collectif, la parole est donnée essentiellement aux élèves chargés de la rédaction. Le maître s'attache à valoriser leur production, mais aussi à solliciter le reste de la classe afin de l'enrichir.

La gestion du débat doit être souple. Le maître sollicite les élèves mais ce sont eux, collectivement, qui définissent les notions à retenir et les corrections à effectuer. Le texte final est celui des élèves, ce n'est pas la synthèse du

professeur. Bien sûr, le maître attire l'attention des élèves sur les erreurs mathématiques éventuelles et donne aux élèves les moyens de les corriger collectivement.

La gestion du débat doit tenir compte de la personnalité propre de chaque élève. Mis à part les cas de "blocage", le maître ne doit pas donner la parole systématiquement aux "bons" élèves. Il peut s'appuyer, pour alimenter le débat, sur des élèves de niveau moyen ou faible, susceptibles de prendre aisément la parole et de faire des propositions constructives, voire contradictoires. Il doit, simultanément, solliciter les élèves faibles.

Au besoin, il prend ponctuellement en charge la mise au point de certaines formulations mais s'interdit toute intervention portant sur le sens, le contenu, la nature des propositions. Il anime le débat mais ne prend pas position.

2. Objectifs de la situation

La situation ayant pour but de construire une mémoire collective et écrite du travail de la classe est une situation "de rappel". Elle a un triple but : diagnostic, apprentissage et régulation.

Diagnostic : le maître peut ainsi connaître ce que les élèves retiennent des activités de mathématiques faites en classe, ce qui est important pour eux, et l'état de leurs conceptions. La régularité de ces séances permet de reconstruire l'histoire de l'appropriation des notions enseignées : il est ainsi possible de recueillir des indices sur le niveau de disponibilité de ces connaissances chez les élèves.

Apprentissage, institutionnalisation : les séances de mémoire collective où les élèves doivent produire un écrit collectif permettent d'aider :

- à la dépersonnalisation du savoir en suscitant une rédaction collective (le savoir n'est plus du seul ressort du maître),
- à la décontextualisation du savoir, en suscitant une formulation tendant à exclure tout exemple particulier qui n'a pas un caractère générique
- à la construction et à l'appropriation des notions et méthodes étudiées
- à l'utilisation ultérieure de ces nouvelles notions, ainsi décontextualisées.

Régulation : le maître peut utiliser cette mémoire collective écrite, pour orienter son travail, revenir sur certaines notions, certains épisodes et ainsi enrichir son enseignement.

Grâce à des feed-back sur les situations d'apprentissage, leurs conditions, leurs contraintes et leurs objectifs, les élèves sont amenés à mieux comprendre les paroles du professeur lors des phases de bilan et à mesurer après coup, les enjeux didactiques (l'importance de ce qui a été appris, l'utilisation possible dans

Apprentissage et difficultés

d'autres problèmes, dans d'autres domaines) ; prenant conscience des enjeux didactiques des situations proposées, ils deviennent progressivement capables d'anticiper à propos des apprentissages visés par les nouvelles situations.

3. Quelques éléments chronologiques sur ces séances de rappel

Séances 1 et 2 : Rappel oral sur ce qui a été fait depuis le début de l'année :

Les élèves citent essentiellement des thèmes numériques et, en géométrie, les représentations figuratives ou conventionnelles. Ils ne parlent pas en terme d'apprentissage ("*j'ai appris ... telle notion...*"), ni a fortiori en termes de concepts. Ils décrivent les séances antérieures en termes d'action : par exemple, pour la pesée d'un objet (apprentissage en cours) : "*on pose sur la balance...., il y a équilibre quand la flèche c'est au milieu,...*"

La séance suivante est du même type.

Séances 3 et 4 :

Le texte initial écrit par les deux élèves responsables est le suivant :

"Nous avons travaillé sur les balances. Il peut avoir des masses de 1 kg, 500 g 200 g 100 g 50 g 20 g 10 g 5 g 2 g et 1 g. Le lièvre pèse 1 kg 500, je mets une masse de 1 kg et une autre de 500 g."

Le maître demande : "*vous avez fait autre chose ?*"

Les élèves tentent d'évoquer un travail sur les opérateurs multiplicatifs.

Nous constatons, au départ, une incapacité à formuler ce qui a été fait : "*on a fait un tableau...*"

A la question du maître : "*à quoi ça sert ?*", ils répondent "*ça sert à trouver des multiples*". Les élèves décrivent les connaissances qui ont effectivement fonctionné dans l'activité. Une réflexion collective plus approfondie sur la notion de multiple, amène certains élèves à dépasser le stade de l'exemple, pour tenter une définition d'un multiple d'un nombre : "*un multiple c'est le total de trois contre un autre nombre*".

A la séance suivante, à la question du maître : "*comment reconnaître un multiple de sept ?*", des élèves répondent :

- "*il est dans la table de sept.*"

- "*on a multiplié un nombre par sept*"

C'est là un exemple de prise de conscience par les élèves, a posteriori, du savoir réellement en jeu. Ce savoir peut alors être institutionnalisé pour certains élèves.

Cette séance constitue pour nous une initialisation d'un projet d'éducation : il s'agit d'apprendre à l'élève à penser "*qu'est-ce que j'ai appris*" et non plus "*qu'est-ce que j'ai fait ?*".

A ce stade, ce sont les meilleurs élèves qui font le cheminement, mais on peut faire l'hypothèse que cela profite aux autres élèves et que cela entraîne une dynamique dans la classe.

Séances 5 et 6 : Les enfants se rappellent avoir travaillé sur les quadrilatères et en donnent spontanément une "définition". Par contre, dans un premier temps, ils décrivent en terme d'action le travail sur les angles droits ("*j'ai posé l'équerre*"). Une discussion collective entre élèves, en réponse à une demande insistante de nouvelle formulation de la part du maître, les amène à passer de la phrase "*on a regardé avec une équerre s'il y avait des angles droits*" à la phrase "*on a appris à reconnaître les angles droits avec l'équerre et à tracer un angle droit avec la règle et avec l'équerre*".

De même, à la séance suivante, les élèves se rappellent "*avoir mesuré les longueurs et les largeurs*", mais ils ne savent plus du tout pourquoi !

Il a fallu une nouvelle intervention du maître précisant le but de cette activité pour que le texte adopté par toute la classe soit : "*Dans un rectangle, il y a quatre angles droits, on a mesuré les longueurs et les largeurs ; on a observé que les côtés opposés du rectangle avaient la même longueur*".

Ces séances permettent à la classe de construire la mémoire collective des activités effectuées en terme d'apprentissage. Nous constatons que le contrat se transforme peu à peu mais qu'il est parfois nécessaire que le maître précise les finalités des activités en terme d'apprentissage.

Les séances suivantes font toutes référence à un travail sur la division.

Nous notons les premiers effets de ce nouveau contrat. Les élèves, dans un premier temps de rappel, après une séance de résolution de problème de division, citent un tableau permettant de trouver le quotient par encadrement et écart au but. C'est un exemple de mélange de projet d'apprentissage et de description de la résolution d'un problème par un algorithme formel. Lors d'un deuxième rappel, tout de suite, les élèves décrivent l'activité faite en classe en terme d'apprentissage : "*nous avons travaillé sur la division*" alors que l'activité consistait seulement en l'utilisation d'un matériel multi-base permettant de simuler un partage de centaines, dizaines et unités et que le maître n'avait pas mentionné ce mot. Les deux élèves chargés de la rédaction initiale ont consulté leur manuel à la page de l'exercice et retenu le titre de la séquence pour décrire l'activité.

4. Conclusion

Analysons les effets de cette activité.

- Du côté de l'élève

Apprentissage et difficultés

- Ces feed-back périodiques et étiquetés en tant que tels, permettent à la classe, collectivement, de décrire les activités effectuées en terme d'apprentissage.
- Ils permettent à certains élèves, de dépasser le stade de la description de l'action pour comprendre, **après coup**, le but de l'activité. On peut donc espérer que lors de cette nouvelle institutionnalisation, le savoir en jeu ne sera pas aussi séparé de l'action que précédemment. Cela peut initialiser l'attitude consistant, pour l'élève, **à anticiper dès la présentation d'une activité, sur l'institutionnalisation à venir**. Nous pensons de ce fait avoir une action sur le projet d'apprentissage de l'élève et sur le contrat didactique en vigueur dans la classe.
- Nous avons déjà signalé les difficultés de socialisation des élèves, en particulier leurs réticences à travailler en groupe. Ce type d'activité semble avoir des incidences sur ces comportements, en effet :
 - les deux élèves chargés de rédiger le texte sont responsables devant la classe,
 - lors des discussions, la classe entière et les élèves en difficulté en particulier, bénéficient de l'apport des bons élèves qui interviennent surtout quand il s'agit de faire progresser la formulation.

- Du côté du maître

- Cela lui permet de hiérarchiser les institutionnalisations : les formulations sont de plus en plus décontextualisées.
- A la demande des élèves le maître est amené à clarifier ses objectifs et à les expliciter. Le contrat est ainsi lui aussi plus explicite.
- C'est un outil de diagnostic qui contribue à une meilleure régulation de la classe.

D. UNE DEUXIEME SITUATION

Comment aider les élèves en difficulté lors de la résolution d'un problème sans réduire la construction du sens des notions mathématiques ?

Nous allons montrer sur deux exemples comment le maître peut apporter des aides aux élèves lors de la résolution de problèmes numériques sans pour autant rendre le problème trop simple.

1 Le jeu de l'autobus en CE2

Le problème est le suivant : "dans un autobus, il y a n voyageurs. À un arrêt, il en "monte" a et en "descend" b . Combien y a-t-il de voyageurs quand l'autobus repart ?"

Les valeurs de n , a et b sont fixées par le maître. Il peut inverser les termes monter et descendre et choisir b plus grand que a .

Il existe deux types de procédures pour résoudre un problème de ce type :

- une procédure E portant sur les états : elle revient à considérer un état initial **E1** (n personnes), à lui appliquer une transformation **T1** (ajouter a), à en déduire un état intermédiaire **E2** ($n + a = n'$ voyageurs), à appliquer à **E2** la transformation **T2** (retrancher b) et en déduire un état final **E3** :

$$n'' = (n + a) - b = n' - b$$

- une procédure T portant sur les transformations : elle revient à considérer un état initial **E1** (n voyageurs), à calculer une transformation **T3** obtenue par composition des transformations **T1** et **T2** ($a - b$), à appliquer cette transformation **T3** à **E1** afin d'en déduire l'état final **E2** : $n'' = n + (a - b)$.

Les travaux de G. Vergnaud [18] montrent que ces procédures correspondent chez les élèves, à des étapes cognitives différentes. Pouvoir mettre en oeuvre ces deux types de procédures est la preuve d'une certaine maîtrise des structures additives. Certains élèves en difficulté du cycle 3 n'arrivent pas à mettre en oeuvre la procédure de composition de transformations (la procédure T). Cela les conduit à l'échec, quand les opérations font intervenir des "grands" nombres ou quand il y a des retenues.

Pour faire acquérir durablement ce type de procédure, on peut envisager de jouer à la fois sur les variables numériques intervenant dans l'énoncé et sur la forme de travail.

Dans un premier temps, le maître propose de résoudre ce problème mentalement. Il fait varier n entre 20 et 40 et a et b entre 2 et 10.

Il propose plusieurs exercices de ce type, plusieurs jours de suite. Dans chaque cas, il demande aux élèves d'explicitier leurs procédures de résolution.

Quand les opérations à effectuer mentalement comportent des "passages à la dizaine" comme par exemple pour $25 + 8 - 4$, certains élèves composent les transformations en jeu. Bien que cette procédure soit explicitée, les autres élèves ne la réinvestissent pas dans les calculs ultérieurs.

Après s'être assuré que les élèves sont familiarisés avec le problème et qu'ils réussissent fréquemment dans ce domaine numérique, le maître va proposer le même exercice à résoudre mentalement mais avec d'autres valeurs numériques. Il choisira toujours n entre 20 et 50 mais fera varier a

Apprentissage et difficultés

et **b** entre 10 et 20 avec $|a-b| < 10$ (par exemple $25 + 19 - 16$ se calcule plus économiquement en faisant $25 + 3$, qu'en faisant $44 - 16$).

La difficulté à effectuer mentalement un calcul de ce type va amener les élèves, éventuellement sur la base d'un premier échec, à prendre conscience de l'économie réalisée lorsqu'ils composent les transformations. Cette prise de conscience est durable. En général, les élèves, par la suite choisiront, en fonction des données numériques, la procédure la plus économique.

De nombreuses expérimentations montrent que l'exposé seul de la seconde procédure, même longuement expliquée par le maître, n'est pas suffisant pour que les élèves en difficulté se l'approprient. **Il est indispensable de prouver à ces élèves que l'effort effectué dans le cas de la mise en oeuvre de la seconde procédure est payant car il peut dispenser de calculs difficiles.**

Pour cela, **un saut qualitatif portant sur les valeurs numériques intervenant dans le problème est indispensable.** De même, une résolution mentale est nécessaire, car par écrit, les élèves peuvent toujours se ramener à l'algorithme standard de l'addition et ne pas rencontrer de difficulté en se laissant conduire par l'énoncé.

2 Comment aider les élèves de CM2 à résoudre un problème de dénombrement complexe ?

Le problème suivant est très mal réussi par des élèves de CM2 et de sixième.

MENU

1 entrée au choix

- Carotte à l'orange-
- Sardine
- Pizza
- Pamplémousse
- Friand au fromage
- Potage
- Céleri rémoulade
- Salade composée
- Oeufs durs, mayonnaise
- Betteraves et maïs
- Endives en salade
- Quiche

1 plat au choix

- Ravioli gratinés
- Poulet rôti, haricots beurre
- Steak haché, coquillettes
- Grillade de porc haricots breton
- Hachis parmentier
- Blanquette de veau riz créole

1 dessert au choix

- Mousse au chocolat
- Pommes au four
- Compote
- Lait gélifié
- Pêches au sirop
- Flan
- Ananas

Combien peut-on composer de menus différents comprenant une entrée, un plat et un dessert ?

Les élèves résolvent, en général, ce problème en recherchant de façon exhaustive les différentes solutions. Cette méthode les conduit en général à l'échec car le nombre de menus $12 \times 6 \times 7 = 504$ ne le permet pas.

A cause de l'impossibilité de dresser exhaustivement la liste des solutions, peu d'élèves perçoivent la structure multiplicative du problème.

Comment amener les élèves à savoir résoudre ce type de problème de dénombrement ?

Plusieurs scénarii sont possibles (voir [9]). Nous allons en exposer un qui semble avoir fait ses preuves. Il s'oppose au schéma de progression généralement mis en oeuvre à l'école élémentaire qui consiste, dans un premier temps à poser ce même exercice mais pour deux types de plats seulement et aux 3 à 5 choix possibles pour chaque plat.

Les élèves de CM2 ont déjà rencontré ce type d'exercice simplifié plusieurs fois dans leur scolarité. Une analyse des manuels de l'école élémentaire montre que ce problème de dénombrement est presque toujours présenté aux élèves dans le cas de deux ensembles dont le nombre d'éléments est très faible. Les élèves peuvent alors le résoudre **en recherchant toutes les solutions**, et le représenter, souvent avec l'aide du maître, par un arbre ou un tableau cartésien. Si le maître peut s'appuyer sur ces représentations pour montrer que le résultat peut se calculer à l'aide d'une multiplication, celle-ci ne s'impose pas aux élèves car ils ont, le plus souvent, fait autrement.

Ce type de présentation ne permet pas une réelle appropriation de la structure multiplicative en cause. Dans le cas plus complexe qui nous intéresse, les élèves ne mobilisent pas leurs connaissances sur la multiplication et essaient, en vain, de résoudre le problème par dénombrement de toutes les solutions. L'échec important rencontré montre que **le schéma apparemment séduisant allant du "simple" au "complexe" ne permet pas de surmonter des difficultés.**

Nous proposons donc un **autre dispositif** basé sur le schéma "complexe-simple-complexe".

Première étape :

Le maître propose aux élèves de résoudre le problème dans le cas complexe exposé ci-dessus : trois ensembles dont le nombre d'éléments est compris entre 6 et 12, par exemple.

Les élèves, dans un premier temps, échouent car les procédures mises en oeuvre ne permettent pas un dénombrement facile. Devant cet échec et après explicitation des difficultés rencontrées, le maître peut proposer aux élèves de représenter le problème à l'aide d'un schéma. Cette proposition ne suffit pas en général à faire apparaître la structure multiplicative du problème, même quand les représentations en arbre sont familières aux élèves.

Apprentissage et difficultés

Deuxième étape

Le maître peut alors proposer deux types de simplifications :

- réduire le nombre d'ensembles en proposant par exemple de calculer dans un premier temps le nombre de menus différents que l'on peut composer avec tous des "carottes râpées" comme entrée, puis d'en déduire le nombre total de menus,
- réduire le nombre de choix de chaque plat, mais conserver trois types de plats.

Troisième étape

Le maître propose de résoudre ensuite le problème dans le cas complexe en utilisant les résultats ou démarches de la seconde étape.

Il est souvent nécessaire :

- d'explicitier plusieurs boucles du type "complexe-simple-complexe" afin de permettre aux élèves rencontrant des difficultés de maîtriser l'un de ces chemins,
- de traiter plusieurs problèmes de ce type avec des habillages différents.

Dans tous les cas, la maîtrise des différents modes de traitement de problème de dénombrement de ce type demande un temps d'apprentissage long et la mise en oeuvre de nombreux schémas de progression s'appuyant sur une dialectique entre le simple et le complexe. Mais il paraît indispensable **d'initialiser la réflexion dans le cas complexe** afin de mettre en échec les procédures primitives de recherche qui vont occulter la structure multiplicative du problème.

Cet exemple, comme le précédent, nous semble révélateur de la nécessité de mettre en oeuvre des **scénarii originaux** de séances de résolution de problèmes. Ils montrent également qu'il est possible de construire des **situations suffisamment complexes** pour que les élèves puissent acquérir les concepts en jeu **sans trop grande perte de sens**, mais **comportant des aides** leur permettant de surmonter leurs difficultés en abandonnant certaines procédures "primitives" inadaptées au problème au profit de procédures économiques mais plus difficiles, voire impossibles, à élaborer dans des cas trop simples.

E. CONCLUSION

Nous avons détaillé dans les seconde et troisième parties de ce texte, deux exemples de situations pouvant être mises en oeuvre par les maîtres de l'école élémentaire.

La première situation est une situation à la frontière entre les mathématiques et l'expression écrite en général, entre les mathématiques et le discours sur les mathématiques.

Elle est l'occasion de rappels indispensables pour les élèves en difficulté en mathématiques. Leur faible capacité d'anticipation sur les apprentissages, leur difficulté à dépasser le stade de l'action, à mesurer l'importance de certaines actions, à extraire de leur contexte les apprentissages du moment, à généraliser

les expériences vécues rendent nécessaires le détour par une phase de formulation collective et concise des notions fréquentées.

Les élèves pourront ainsi passer de la description du "qu'est-ce que j'ai fait" à la description du "qu'est-ce que j'ai appris".

Les exemples de scénarii de séances de résolution de problèmes ont pour but d'illustrer comment l'enseignant peut **briser le cercle vicieux de non apprentissage** décrit dans la première partie du texte.

Ce sont dans tous les cas des exemples de nouvelles médiations au savoir, de chemins vers la connaissance adaptés aux difficultés des élèves, mais gardant comme but de surmonter ces difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris
- [2] BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°11-2.
- [3] BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire*. Presses Universitaires de France, Paris.
- [4] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherche en Didactique des mathématiques* n°12.2.3
- [5] BUTLEN D. PEZARD M. Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée, *Grand N* n° 50 p29-58, IREM de Grenoble.
- [6] CHARLOT B. ; BAUTIER E ; ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs*. A. Colin.

Apprentissage et difficultés

- [7] CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire* n°39 p21-39.
- [8] CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur l'échec scolaire*. Publication de l'IREM de Marseille n°13.
- [9] COPIRELEM Actes du stage national d'Angers organisé par la COPIRELEM - mars 1996 - *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques* - tome 5 - IREM de Paris VII
- [10] HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p5-12 INRP Paris.
- [11] INRP (1986) *En mathématiques peut mieux faire*, Rencontres pédagogiques n°12, INRP Paris..
- [12] LAUTREY J. (1980) *Classes sociales, milieu familial, intelligence*. Paris, PUF.
- [13] PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'échec scolaire* Librairie Droz Genève
- [14] PERRIN-GLORIAN M.J (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM et 6ème*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, février 1992
- [15] PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir d'un enseignement des mathématiques dans les classes faibles. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol. 13 n°1/2. Ed. La Pensée Sauvage Grenoble.
- [16] PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Élèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères-IREM* n°3 p97-139. Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.
- [17] ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier DIDIREM* n°3 et 4, IREM de Paris VII.

[18] VERGNAUD (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne.