L'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole : Où est le Problème ?

à L'I.U.F.M d'Auch

3 4 5 Juin 2009

ATELIERS

Atelier A1

COMMENT FAVORISER LE DÉVELOPPEMENT DU RAISONNEMENT STATISTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE ?

Alain Kuzniak
PU, IUFM Orléans-Tours, LDAR Paris-Diderot

Catherine Taveau
IUFM de Paris, IREM Paris 7

Résumé
L'éducation statistique du citoyen est de plus en plus une priorité des systèmes d'enseignement des pays développés. Dans de nombreux pays, un enseignement des statistiques est proposé aux élèves de l'école primaire. En France, cet enseignement est encore balbutiant et mal défini.
L'atelier proposé vise à réfléchir sur ce que pourrait être un enseignement favorisant le développement du raisonnement statistique chez les élèves. Cette réflexion est menée d'une part en comparant les standards nationaux américains (NCTM) et les programmes français, et d'autre part en analysant deux activités à mener en formation.

1 POURQUOI CET ATELIER HIC ET HUNC ?

Le raisonnement statistique ne fait pas l'objet d'un enseignement à l'école primaire dans le cadre des programmes actuellement en vigueur en France de ce fait la France apparaît en retrait par rapport aux autres pays qui ont inclus une première sensibilisation à la statistique dès le début de la scolarité obligatoire. Quand il existe, à partir du collège mais surtout au lycée, cet enseignement est généralement assuré par des professeurs de mathématiques qui, de par leur cursus, ne sont, semble-t-il pas trop à l'aise avec cette discipline dont ils ignorent souvent les bases et presque toujours l'épistémologie qui est en soi bien différente des mathématiques. Il nous semble important d'éviter de mettre en place des activités renforçant des idées erronées sur la nature de la pensée statistique qui doit incorporer l'idée d'incertitude et de raisonnement de type inductif. Cet atelier visait donc à faire réfléchir sur des pistes de formation favorisant l'appropriation de la démarche statistique en anticipant sa prochaine intégration dans le curriculum de l'école primaire.

2 LES SAVOIRS DÉVELOPPÉS ET ÉVALUÉS EN STATISTIQUES DANS DIFFÉRENTS SYSTÈMES ÉDUCATIFS.

Un certain nombre de documents ont été fournis aux participants de l'atelier pour discuter de l'orientation de l'enseignement sur les statistiques en France et dans d'autres pays notamment anglo-saxon (voir Annexes) :

- deux articles issus de l'évaluation PISA sur l'incertitude et accompagnés des compétences attendues ;
- une présentation des standards dit NCTM et présentés par l'association des professeurs de mathématiques aux Etats-Unis d'Amérique.;
- les programmes français de collège concernant la gestion de données .

Les participants étaient invités à caractériser l'approche française de l'enseignement des statistiques en la mettant en regard avec celle apparaissant dans le monde anglo-saxon.

Un rapide consensus s'est dégagé sur un certain nombre de points.

À l'école primaire :

- il s'agit principalement de lire et d'interpréter des données déjà organisées ;
- de trier et d'organiser ces données en produisant des graphiques ou des tableaux ;
- ces activités sont volontairement rattachées aux mathématiques avec la notion de proportionnalité.

Il n'y a pas de proposition de production d'enquêtes ni de récolte de données ni a fortiori de discussion sur ces données.

Au collège :

Les probabilités n'apparaissent que très tardivement (en 3^{e} et seulement depuis 2008/2009) et il s'agit essentiellement d'effectuer des calculs sur des données en petit nombre sans passer à un réel travail statistique.

Au regard de cette approche tardive et technique des statistiques, les programmes et les objectifs avancés par les anglo-saxons (notamment dans les standards du NCTM) insistent sur l'importance des démarches d'investigation et sur la qualité de l'interprétation des données. Les principes de base de cet enseignement vont être dégagés dans les parties qui suivent.

3 QUELQUES PRINCIPES DE BASE POUR ENSEIGNER LES STATISTIQUES

Dans les études internationales comme celles lancées par la Commission internationale sur l'enseignement des mathématiques, un certain nombre de distinctions sont faites notamment pour bien marquer la différence entre *pensée mathématique* et *pensée statistique*. Puis dans le cadre des statistiques, une gradation est faite entre un premier niveau de maîtrise portant sur les principes de base et un niveau d'expertise qui permet de savoir les limites et les conditions d'usages des différents concepts. Ce dernier niveau concerne davantage le statisticien professionnel alors que le premier s'adresse à tout citoyen. Tout l'enjeu est évidemment de savoir les limites de ce savoir de base. Ceci étant dit, un certain nombre d'orientations ont pu être dégagées pour l'enseignement de cette base statistique et semblent faire l'objet d'un large accord dans les pays engagés depuis longtemps dans l'enseignement des statistiques.

1- Développer un enseignement de type « main à la pâte ». Il s'agit de raisonner sur de vraies données fournies en quantité importante en faisant notamment appel aux bases de données des grands organismes nationaux de statistiques. Ainsi Statistique Canada (organisme national de statistique canadien) emploie à plein temps un certain nombre de statisticiens professionnels dont le travail consiste à aider les professeurs et les élèves dans leur découverte des statistiques.
2- Privilégier le raisonnement sur le calcul. Cette fois, il s'agit d'assumer une rupture avec les mathématiques : la statistique existe quand l'interprétation commence et que le calcul s'arrête. L'idée est d'utiliser un maximum d'outils pour gérer le calcul et de délester ainsi l'élève de cette tâche technique. Dans le même temps, l'accent est mis sur le développement du discours interprétatif qu'il soit écrit ou oral.
3- Utiliser des logiciels d'aide à l'interprétation. Dans ce cas, il s'agit de faciliter l'organisation des données pour décider et cet usage ne doit pas être confondu avec la simulation. Les notions statistiques aident à l'interprétation de représentations qui permettent d'organiser les données d'où l'usage récent des diagrammes à moustache.
4- Changer les modalités d'évaluation. Cette dernière soit s'appuyer sur des enquêtes et des analyses de documents. La présentation de la problématique et des résultats obtenus est essentielle.
5- Du côté des professeurs. Dans le cas des professeurs de mathématiques, il est certain qu'il doit y avoir une double rupture à la fois épistémologique (relative à la pensée statistique) et aussi didactique avec un travail dévolu davantage aux élèves avec un usage différent des logiciels.

Cette orientation de l'enseignement doit permettre de dépasser un certain nombre d'obstacles qui ont été relevés lors de recherches effectuées sur le développement de la pensée statistique. Dans leur ouvrage de synthèse Ben Zvi et Garfield (2008) dégagent ces obstacles.

La représentativité. Les individus ont tendance à penser que quelque soit sa taille, un échantillon donné est d'autant plus probable qu'il contient les mêmes proportions que la population globale. Ainsi, pour les individus si un caractère possède une fréquence de 0.7, ils s'attendent à ce que les échantillons de cette population aient exactement la fréquence en question que la taille de l'échantillon soit 10, 100 ou 1000.

L'occurrence d'un certain événement comme un dû. Dans ce cas, il y a l'idée que les événements du passé affectent un événement futur. Ce phénomène s'observe lorsque que dans le cas d'une pièce équilibrée, il y a eu plusieurs sorties de la même face. Une autre interprétation possible de ce phénomène est celui de la dualité de la probabilité dans un contexte de prise de décision (Carranza et Kuzniak, 2006,2008). Dans ce cadre, les auteurs distinguent l'approche bayesienne qui s'appuie sur les connaissances que le sujet a des expériences et qui lui permet de décider même sur peu de cas, de l'approche fréquentiste qui mesure des phénomènes aléatoires reproductibles un nombre indéfini de fois.

S'appuyer sur le contingent plutôt que sur la statistique. Ainsi, l'on décidera de l'importance d'un phénomène comme celui du chômage ou d'une maladie non pas en fonction des données statistiques disponibles mais en fonction de son apparition dans son propre environnement. Ce sont d'abord, les cas qu'on peut évoquer qui déterminent le sentiment de fréquence ou non d'un phénomène. On retrouve ici la tension plaisamment évoquée par la phrase suivante « Quand les statistiques te disent qu'un français mange du poulet une fois par semaine, alors que tu n'en manges jamais, ne pense pas que les statistiques ont tort mais plutôt qu'un autre français en mange deux fois par semaine ».

Confusion due à l'accumulation d'événements corrélés. Ben Zvi et Garfield donnent l'exemple où des données pouvant avoir un lien sémantique ont été fournies aux étudiants.

« Gaëlle est une jeune femme brillante qui a fait des études de philosophie sur la question des inégalités en fonction du genre. Des deux affirmations suivantes qu'elle est la plus probable :

i. Elle est chargée de la direction d'une agence bancaire.

ii. Elle est chargée de la direction d'une agence bancaire et elle s'investit beaucoup pour la cause des femmes. »

Dans ce cas, pour conclure, ces derniers s'appuient davantage sur les connaissances données sur Gaelle que sur le raisonnement déductif et ils donnent majoritairement comme réponse la réponse ii alors que d'un point de vue déductif la première affirmation est impliquée par la seconde donc plus probable.

D'autres obstacles sont plus liés aux compétences mathématiques dans le domaine des proportions notamment et aussi du calcul sur les nombres. Il y a aussi bien sûr tous les obstacles liées aux probabilités et à la notion de corrélation et de causalité. Pour terminer, signalons aussi cet obstacle lié encore une fois au fait que les individus utilisent les statistiques de manière pragmatiques dans la vie quotidienne. Ainsi, le fait de savoir que la météo annonce qu'il y a 20% de chance qu'il pleuve est interprété comme le fait qu'il ne va pas pleuvoir.

4 INFORMATIQUE ET STATISTIQUES : LE LOGICIEL TINKERPLOT.

Tinkerplot est un logiciel qui permet de travailler les statistiques avec l'orientation pédagogique qui vient d'être présentée précédemment. C'est un logiciel qui effectue tous les calculs et permet ainsi de s'attarder sur la résolution de problèmes en utilisant les outils des statistiques.
Tinkerplot n'est pas seulement un logiciel de calcul mais un ensemble de ressources pédagogiques pour développer le raisonnement statistique à partir de l'école primaire.
Lors de l'atelier, nous avons présenté aux participants une situation empruntée à cet ensemble de ressources et nous leur avons demandé de résoudre le problème portant sur des données concernant des chats (voir Annexes). Nous incitons le lecteur à découvrir par lui-même ce logiciel développé par le MIT (Massachusetts Institute of Technology) et dont la traduction en français bénéficie d'un contrat exclusif avec l'état de l'Ontario pour sa partie francophone. Son utilisation avec la version anglaise est assez aisée dès que la traduction de la barre d'outil est faite.

5 LA SITUATION DES SMARTIES.

L'objectif de cette phase était de présenter une activité de formation que nous avons menée avec les PLC2 et les PE. Il s'agissait de faire percevoir la richesse d'un matériau de la vie quotidienne pour aborder la notion de pensée statistique.
En faisant vivre la situation aux participants, nous souhaitions faciliter leur appropriation de la situation afin de pouvoir en discuter la pertinence en formation.

Description de la situation

> « Par groupe de 3, vous disposerez chacun d'une boîte de smarties. Vous pouvez ouvrir la boîte mais évidemment ne rien manger avant la fin de l'atelier.
> La consigne est la suivante : élaborer un ensemble de questions auxquelles vous essayerez de trouver une solution, à partir du matériel que nous venons de vous distribuer. »

Notre objectif étant de faire travailler aux stagiaires la compétence du NTCM : *Proposer et justifier des conclusions et des prévisions basées sur les données et concevoir des études pour poursuivre l'étude des conclusions et des prévisions.*

Nous avons ensuite fait part de notre expérience en formation des PLC2 en détaillant nos objectifs lors d'un module intitulé « statistiques et probabilités ».
Dans ce cas, il s'agissait de:

- faire vivre une situation qui déstabilise certaines représentations de l'enseignement des statistiques au collège et en seconde (au collège, c'est ne faire que des calculs et en 2nd c'est d'utiliser immédiatement la simulation) ;
- montrer que la conclusion d'une situation mathématique est différente de la conclusion d'une situation statistique car on est ici dans le domaine de l'incertitude ;
- proposer une approche statistique de la fluctuation des échantillonnages pour la classe de 2nd avant de passer par une approche par la simulation qui repose essentiellement sur les lois de probabilités.

Voici un choix de questions élaborées par les PLC2. On notera l'influence du programme et aussi le peu d'importance laissée à la pensée statistique dans ces questions qui privilégient une approche par les probabilités et par des tâches de constructions de graphiques qui permettent à ce niveau de répondre aux questions posées.

Y a-t-il le même nombre de smarties par boîte ?
Quelle est la couleur de smarties la plus fréquente ? la moins fréquente ?
Les différentes couleurs des smarties sont-elles équiréparties dans une boîte ? dans 3 boîtes ?
Les boîtes de smarties sont-elles remplies couleur par couleur ou les smarties sont tous mélangés avant leur mise en boîte?
Si on tire un smarties dans une boîte, quelle est la probabilité d'obtenir un smarties d'une couleur donnée.
On considère deux boîtes de smarties, la configuration de chacune est connue. On tire un smarties d'une boîte pour le mettre dans la seconde puis on tire un smarties de la seconde pour le mettre dans la première. Quelle est la probabilité pour que les boîtes soient dans leur configuration initiale après ces échanges?
Quelle est l'étendue des fréquences des couleurs sur une boîte ? sur trois boîtes ? sur un paquet ?
Y-a-t-il équirépartition des couleurs des smarties ou non?

Par la suite, nous n'avons traité avec les stagiaires que la question de l'équirépartition.

La même situation a été proposée à des PE2 en utilisant la même mise en œuvre. Nous n'avons pas obtenu les mêmes questions. Nous souhaitions ainsi comparer leurs productions avec celles des PLC2.

Voici le type de questions élaborées par les PE2 où apparaissent deux types de préoccupations, les unes ont trait aux statistiques mais les autres, au moins aussi fréquentes, essayent de se rattacher aux programmes de l'enseignement élémentaire et font la part belle aux grandeurs et à la géométrie.

Questions statistiques :

Comment sont réparties les couleurs des smarties ?
Existe-t-il des boîtes de smarties où toutes les couleurs ne sont pas représentées ?
Quelle est la probabilité de trouver une boîte monochrome ?
Est-ce qu'il y a toujours le même nombre de smarties dans une boîte ?
Est-ce que tous les smarties ont le même poids ?
Pour 40 smarties, quelle est la probabilité d'avoir seulement des roses ?
Quel est le nombre maximum de smarties qu'il peut y avoir dans une boîte ?
Est-ce que le remplissage des boîtes répond à une loi de répartition des couleurs ?

Question géométriques

Quelle est la surface d'une boîte de smarties ?
Combien de smarties peuvent entrer au maximum dans une boîte sans la déchirer ?
Combien faut-il de smarties pour remplir un aquarium de 10 litres ?
Comment fabriquer une boîte de smarties ?
Sachant que j'ai le carton pour fabriquer une boîte de smarties, me faudra-t-il 3 fois plus de carton pour mettre tous les smarties (ceux des 3 boites) ?
Quelle forme géométrique peut-on faire avec les 3 boîtes ?

Quelles formes géométriques peut-on faire avec tous les smarties sortis de leur boîte ?
Combien faut-il de boîtes pour recouvrir une feuille A4, sans règle graduée, et en utilisant à chaque fois une des faces de la boîte ?
Combien doit-on empiler de boîtes de smarties au minimum pour atteindre le plafond ?

6 PERSPECTIVES

L'atelier s'est terminé par une rapide prospective de ce qui pourrait être fait à l'avenir. Les participants de l'atelier s'accordent sur l'importance d'une approche de la statistique précoce mais leur venue à cet atelier supposait déjà un intérêt pour ce thème. Le souhait est alors exprimé de tenter de mettre en place ce type d'enseignement en classe, de manière expérimentale. Une affaire à suivre qui laisse augurer d'autres ateliers de ce type dans un futur pas trop lointain du moins nous l'espérons.

7 BIBLIOGRAPHIE

Garfield J. et Ben-Zvi D. (2008) Developing Students' Statistical Reasoning. Springer.

Carranza P. et Kuzniak A. (2006) Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au Lycée en France, Actes du Colloque EMF.

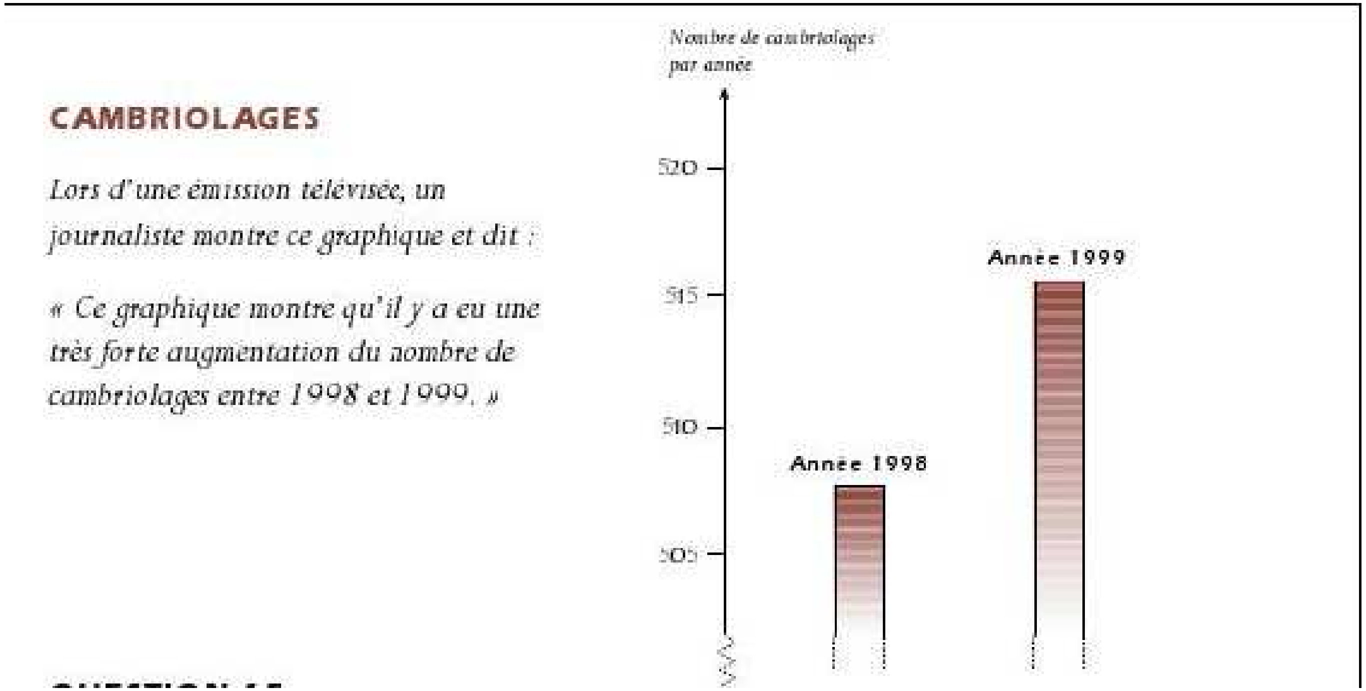
Carranza P. et Kuzniak A. (2008). Duality of Probability and statistics teaching in French education ICME Study on Statistics. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Les évaluations PISA

L’incertitude est un des thèmes essentiels de la culture mathématiques qui est évalué lors des tests PISA.
La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Parmi les quatre thèmes abordés par PISA (espaces et formes, variations, quantité, incertitude), l’incertitude est décrite comme un concept qui a trait aux relations et aux phénomènes de statistiques et de probabilités qui jouent un rôle de plus en plus important dans la société de l'information. Les branches des mathématiques qui étudient ces thèmes sont les statistiques et les probabilités.

Voici un des exercices posés dans PISA 2003



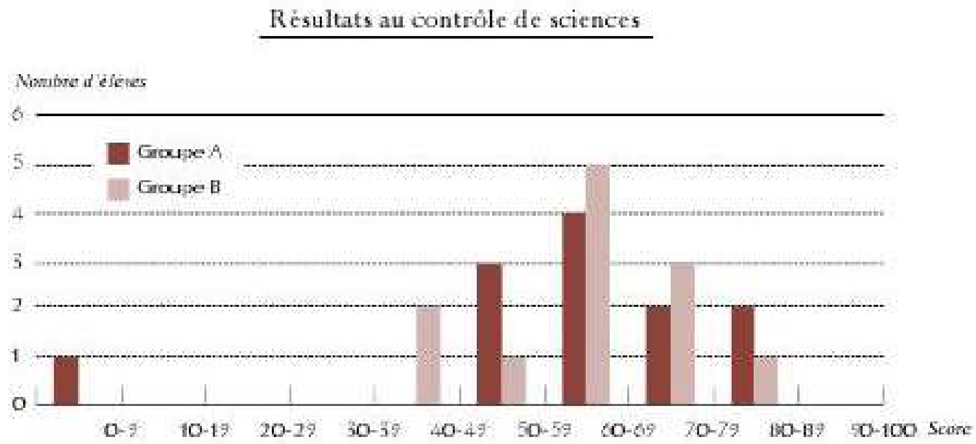
Question 15
Considérez-vous que l’affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifiez votre réponse par une explication.

Voici un second exercice proposé dans PISA 2003

RÉSULTATS À UN CONTRÔLE

Le graphique ci-dessous montre les résultats à un contrôle de sciences obtenus par deux groupes d'élèves, désignés par « Groupe A » et « Groupe B ».

La note moyenne pour le Groupe A est de 62,0 et de 64,5 pour le Groupe B. Les élèves réussissent ce contrôle lorsque leur note est de 50 points ou davantage.



Question

Sur la base de ce graphique, le professeur conclut que le Groupe B a mieux réussi ce contrôle que le Groupe A. Les élèves du Groupe A ne sont pas d'accord avec le professeur. Ils essaient de le convaincre que le Groupe B n'a pas nécessairement mieux réussi. En vous servant du graphique, donnez un argument mathématique que les élèves du Groupe A pourraient utiliser.

Les standards pour l'analyse de données et les probabilités
(traduction des standards du NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)

Programmes du prekindergarten (maternelle) jusqu'à la classe 12(*4ème*) pour rendre tous les élèves capables de:	Du prekindergarten jusqu'à la classe 2 (*CE1*), tous les élèves doivent être capables de:	Dans les niveaux 3(*CE2*) à 5(*CM2*) tous les élèves doivent être capables de:	Dans les niveaux 6(*6ème*) à 8(*4ème*) tous les élèves doivent être capables de:
-Formuler des questions qui peuvent être traitées avec des données et recueillir, organiser et afficher les données pertinentes pour y répondre.	-Poser des questions et recueillir des données sur eux-mêmes et leur environnement; -Trier et classer des objets selon leurs attributs et organiser les données sur ces objets; -Représenter des données en utilisant des objets, des images et des graphiques.	-Concevoir des enquêtes pour répondre à une question et examiner comment les méthodes de collecte de données influent sur la nature de l'ensemble de données; -Recueillir des données en utilisant des observations, des enquêtes et des expériences; -Représenter des données à l'aide de tableaux et de graphiques tels que la *line plots*, histogrammes et *line graphs*; -Reconnaître les différences dans la représentation quantitative et qualitative.	-Formuler des questions, concevoir des études et recueillir des données sur une caractéristique partagée par deux populations ou sur des caractéristiques différentes dans une population; -Sélectionner, créer et utiliser des représentations graphiques appropriées de données.
-Choisir et utiliser des méthodes statistiques appropriées pour analyser les données.	-Décrire une partie des données et les données toutes entières pour déterminer ce que qu'elles montrent.	-Décrire la forme et les caractéristiques importantes d'un ensemble de données et de comparer ces ensembles de données, en mettant l'accent sur la manière dont les données sont distribuées; -Utiliser des mesures du centre, en se concentrant sur la médiane, et comprendre ce que chacune indique ou non sur l'ensemble de données; -Comparer différentes représentations des mêmes données et évaluer dans quelle mesure chaque représentation montre des aspects importants sur les données.	-Trouver, utiliser et interpréter les mesures de centre et de dispersion y compris la moyenne et l'étendue interquartile ; -Discuter et comprendre la correspondance entre les ensembles de données et leur représentation graphique, notamment les histogrammes.

-Effectuer et évaluer des inférences et des prévisions basées sur des données..	-Discuter des événements liés à leur propre expérience comme probable ou improbable.	-Proposer et justifier des conclusions et des prévisions basées sur les données et concevoir des études pour poursuivre l'étude des conclusions et des prévisions.	-Utiliser des observations sur les différences entre deux ou plusieurs échantillons pour faire des conjectures sur les populations dont les échantillons ont été prélevés; -Faire des conjectures sur les relations possibles entre les deux caractéristiques d'un échantillon, sur la base des nuages de points des données et sur les lignes de meilleures approximations ; -Utiliser des hypothèses pour formuler de nouvelles questions et planifier de nouvelles études pour y répondre.
-Comprendre et appliquer les concepts de base sur la notion de probabilité.		-Décrire les événements comme probables ou improbables et de discuter de la probabilité en utilisant des termes tels que certain, également probable et impossible; -Prévoir la probabilité d'apparition dans des expériences simples et tester les prévisions; -Comprendre que la mesure de la probabilité d'un événement peut être représenté par un nombre de 0 à 1.	-Comprendre et utiliser la terminologie appropriée pour décrire des évènements complémentaires ou incompatibles; -Utiliser la proportionnalité et une compréhension élémentaire de la probabilité pour émettre et tester des conjectures sur les résultats d'expériences et de simulations; -Calculer des probabilités pour de simples événements composés, en utilisant des méthodes comme des listes organisées, des arbres ou des modèles d'aires.

Programmes français concernant l'enseignement des mathématiques

Programmes de l'école primaire (2002)

Exploitation des données numériques (document d'application)

À travers la résolution de problèmes appropriés, les élèves différencient progressivement les situations qui relèvent de la proportionnalité de celles qui n'en relèvent pas et les résolvent en utilisant des raisonnements personnels adéquats. Il s'agit d'une première approche de cette notion qui ne fait, au cycle 3, l'objet d'aucune étude systématique, celle-ci relevant du collège.
Les élèves sont également confrontés à la lecture, à l'interprétation et à l'utilisation de divers modes de représentation des données : diagrammes, graphiques, tableaux. L'analyse critique de l'information mise en

Organisation et représentation de données numériques

Compétences	Commentaires
– **Organiser des séries de données numériques (listes, tableaux…).** – **Lire, interpréter et construire quelques représentations : diagrammes, graphiques.**	Les situations qui conduisent à utiliser diverses représentations d'un ensemble de données (tableaux, graphiques, diagrammes) s'appuient sur des données effectives : enquêtes, mesurages en physique ou en biologie (exemple de l'évolution de la taille d'un enfant, d'un animal ou d'une plante), documents en géographie… Dans un premier temps, les élèves sont mis en situation de lecture et d'interprétation de ces différents types de présentation des données, puis, dans des cas simples, en situation de production (voir rubrique « Proportionnalité »). Les situations de construction de diagrammes ou graphiques se limitent à des cas simples ou ayant recours à l'outil informatique (une première initiation au tableur peut être envisagée). Quelques exemples de phénomènes aléatoires peuvent être proposés dans la perspective de faire apparaître des régularités (par exemple, lancers d'une pièce ou d'un dé, lancers de deux dés dont on fait la somme).

évidence par de tels supports contribue à l'éducation civique des élèves.

Programmes de l'école primaire au cycle 3 (2008)

4. Organisation et gestion de données

Les capacités d'organisation et de gestion des données se développent par la résolution de problèmes de la vie courante ou tirés d'autres enseignements. Il s'agit d'apprendre progressivement à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux, des graphiques et à les analyser.
La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures en particulier celle dite de la « règle de trois ») sont utilisées.

DEUXIEME PALIER POUR LA MAITRISE DU SOCLE COMMUN : COMPETENCES ATTENDUES A LA FIN DU CM2

Compétence 3 : *LES PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES ET LA CULTURE SCIENTIFIQUE ET TECHNOLOGIQUE*

A) Les principaux éléments de mathématiques
L'élève est capable de :

…………
- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, “règle de trois”, figures géométriques, schémas ;
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

B) La culture scientifique et technologique

L'élève est capable de :
- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner ;
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter ;
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;
………..

Programmes de mathématiques pour le collège (2008) (introduction p.2)

L'organisation et la gestion des données sont indispensables pour comprendre un monde contemporain dans lequel l'information chiffrée est omniprésente, et pour y vivre. Il faut d'abord apprendre à lire et interpréter des tableaux, schémas, diagrammes, à réaliser ce qu'est un événement aléatoire. Puis apprendre à passer d'un mode de représentation à l'autre, à choisir le mode le plus adéquat pour organiser et gérer des données. Émerge ainsi la proportionnalité et les propriétés de linéarité qui lui sont associées. En demandant de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique, sur les risques d'erreur d'interprétation et sur leurs conséquences possibles, y compris dans la vie courante, cette partie des mathématiques contribue à former de jeunes adultes capables de comprendre les enjeux et débats de la société où ils vivent.
Enfin, en tant que discipline d'expression, les mathématiques participent à la *maîtrise de la langue*, tant à l'écrit – rédaction, emploi et construction de figures, de schémas, de graphiques – qu'à l'oral, en particulier par le débat mathématique et la pratique de l'argumentation.

Thème de convergence

THÈME 1 : IMPORTANCE DU MODE DE PENSÉE STATISTIQUE DANS LE REGARD SCIENTIFIQUE SUR LE MONDE

L'aléatoire est présent dans de très nombreux domaines de la vie courante, privée et publique : analyse médicale qui confronte les résultats à des valeurs normales, bulletin météorologique qui mentionne des écarts par rapport aux normales saisonnières et dont les prévisions sont accompagnées d'un indice de confiance, contrôle de qualité d'un objet technique, sondage d'opinion…
Or le domaine de l'aléatoire et les démarches d'observations sont intimement liés à la pensée statistique. Il s'avère donc nécessaire, dès le collège, de former les élèves à la pensée statistique dans le regard scientifique qu'ils portent sur le monde, et de doter les élèves d'un langage et de concepts communs pour traiter l'information apportée dans chaque discipline.

Objectifs

Au collège, seule la statistique exploratoire est abordée et l'aspect descriptif constitue l'essentiel de l'apprentissage. Trois types d'outils peuvent être distingués :
- les outils de synthèse des observations : tableaux, effectifs, regroupement en classe, pourcentages, fréquence, effectifs cumulés, fréquences cumulées,
- les outils de représentation : diagrammes à barres, diagrammes circulaires ou semi-circulaires, histogrammes, graphiques divers,
- les outils de caractérisation numériques d'une série statistique : caractéristiques de position (moyenne, médiane), caractéristiques de dispersion (étendue, quartiles).

Contenus

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les élèves s'initient aux rudiments de la statistique descriptive : concepts de position et de dispersion, outils de calcul (moyennes, pourcentages…) et de représentation (histogrammes, diagrammes, graphiques) et apprennent le vocabulaire afférent. Ainsi sont mis en place les premiers éléments qui vont permettre aux élèves de réfléchir et de s'exprimer à propos de situations incertaines ou de phénomènes variables, d'intégrer le langage graphique et les données quantitatives au langage usuel et d'apprendre à regarder des données à une plus grande échelle. L'utilisation de tableurs grapheurs donne la possibilité de traiter de situations réelles, présentant un grand nombre de données et de les étudier, chaque fois que c'est possible, en liaison avec l'enseignement de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre et de technologie, dont les apports au mode de pensée statistique sont multiples et complémentaires.
Le recueil de données en grand nombre et la variabilité de la mesure sont deux modes d'utilisation des outils de statistique descriptive qui peuvent être particulièrement mis en valeur.

Le recueil de données en grand nombre lors de la réalisation d'expériences et leur traitement

Les élèves sont amenés à récolter des données acquises à partir des manipulations ou des productions effectuées par des binômes ou des groupes ; la globalisation de ces données au niveau d'une classe conduit déjà les élèves à dépasser un premier niveau d'information individuelle.
Mais ces données recueillies à l'échelle de la classe ne suffisent pas pour passer au stade de la généralisation et il est nécessaire de confronter ces résultats à d'autres réalisés en plus grand nombre, pour valider l'hypothèse qui sous-tend l'observation ou l'expérience réalisée.
Tout particulièrement dans le domaine des sciences de la vie, de nombreux objets d'étude favorisent cette forme de mise en œuvre d'un mode de pensée statistique : la répartition des êtres vivants et les caractéristiques du milieu, la durée moyenne des règles et la période moyenne de l'ovulation, les anomalies chromosomiques … Les résultats statistiques permettent d'élaborer des hypothèses sur une relation entre deux faits d'observation et d'en tirer une conclusion pour pouvoir effectuer une prévision sur des risques encourus, par exemple en ce qui concerne la santé.

Le problème de la variabilité de la mesure

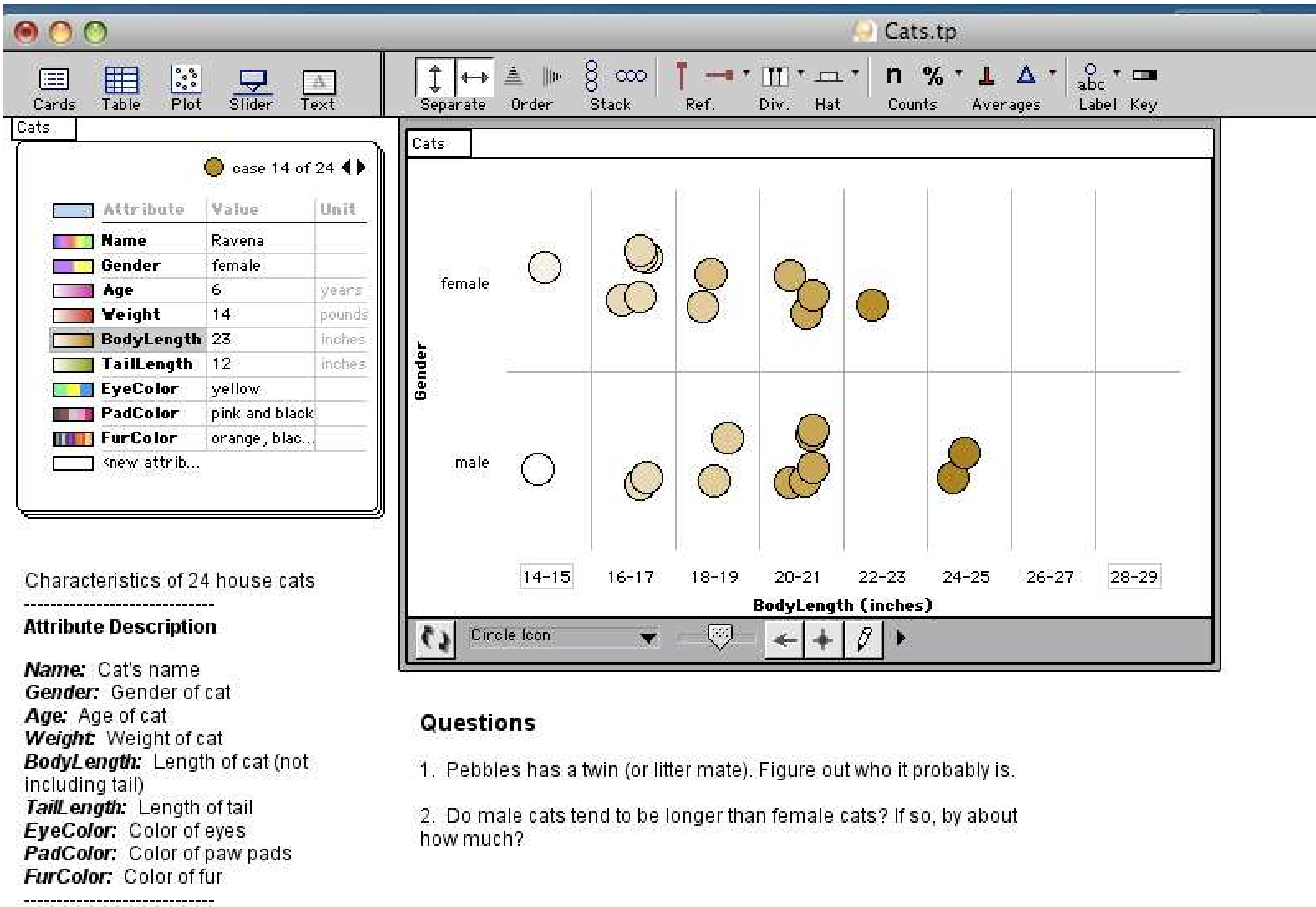
De nombreuses activités dans les disciplines expérimentales (physique-chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie), basées sur des mesures, doivent intégrer la notion d'*incertitude* dans l'acte de mesurer et développer l'analyse des séries de mesures. Lors de manipulations, les élèves constatent que certaines grandeurs sont définies avec une certaine imprécision, que d'autres peuvent légèrement varier en fonction de paramètres physiques non maîtrisés.
Plusieurs mesures indépendantes d'une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la *dispersion naturelle des mesures*.
Sans pour autant aborder les justifications théoriques réservées au niveau du lycée, il est indispensable de faire constater cette dispersion d'une série de mesures et d'estimer, en règle générale, la grandeur à mesurer par la moyenne de cette série.

3. Organisation des contenus

Les quatre parties des programmes des classes du collège s'organisent autour des objectifs suivants :
• **organisation et gestion de données, fonctions**

- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
- approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
- s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
- acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité.

Présentation de l'activité de résolution de problème à partir des données sur une collection de chats, en utilisant le logiciel TinkerPlot



Ici l'organisation des données proposée par le logiciel permet d'essayer de répondre à la question n°2 : *Les chats mâles ont-ils tendance à être plus longs que les chattes? Si oui, de combien environ?*

Atelier A2

TRANSPOSER EN FORMATION DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION AU COURS ÉLÉMENTAIRE.

Chambris Christine,
IUFM de l'académie de Versailles, Université de Cergy-Pontoise
Laboratoire de didactique André Revuz (Didirem – LDSP), Université Paris 7
cchambris@free.fr

Résumé
L'atelier s'est donné comme objectifs principaux de diffuser les résultats d'une recherche auprès des formateurs et de réfléchir à la pertinence de leur utilisation dans la formation des enseignants.
Dans un premier temps, en utilisant les résultats issus de la recherche, l'article rappelle le rôle de la « numération en unités » dans l'étude de la numération décimale de position : stable avant la réforme des années 70, quasi inexistant dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel jusqu'à nos jours.
Pour montrer la place actuelle de la « numération en unités », l'auteure s'appuie sur l'étude de deux extraits de manuels scolaires de CE2 (« Le Nouvel Objectif Calcul » de 95 et « Le Cap Math » de 2007) : dans ces deux ouvrages, la place de la « numération en unités » est minimisée par rapport à l'utilisation des écritures chiffrées des puissances de dix qui en quelque sorte la remplace.
L'auteure montre également que dans les ouvrages récents, la « relation entre les unités » est peu présente et en particulier que les tâches de conversion ont pratiquement disparues pour être remplacées par celles de type « nombre de, chiffre des » de plus en plus diversifiées.
Dans un second temps, l'article aborde les problèmes de la formation, de façon beaucoup plus empirique.
Il énumère les tâches proposées aux différents publics pour étudier l'utilisation de la « numération en unités » et la compréhension des « relations entre unités ».
Le retour sur une formation continuée montre la difficulté de faire pénétrer la dimension « relation entre unités » dans la pratique des enseignants du fait que celle-ci, difficile, n'est pas forcément nécessaire pour réussir les tâches habituellement proposées.
Les apports des participants à l'atelier sont rapidement évoqués pour souligner l'intérêt, porté par certains, à l'aspect « échanges » à travers la monnaie. L'auteure tient à préciser que la dialectique « groupement/échange » ne date que de la réforme et permettait alors d'accompagner les manipulations des différents matériels introduits.

1 PROBLÉMATIQUE

Nous avons conduit une recherche sur l'enseignement de la numération de position des entiers en France, au cours élémentaire, au 20e siècle (Chambris 2008 2009). Dans ce cadre, nous avons établi des résultats relatifs aux évolutions de cet enseignement pendant un siècle. Pour de multiples raisons, la période de la réforme des mathématiques modernes[1] apparaît cruciale dans ces évolutions. Nous parlerons d'ailleurs globalement de l'enseignement d'*hier* (ou *ancien*) pour désigner la période antérieure à la réforme, qui n'est pourtant probablement pas si uniforme.
En quoi l'enseignement de la numération hier est-il différent de celui d'aujourd'hui ? Ces différences se limitent-elles à des modifications dans la conception sous-jacente de l'apprentissage (de façon caricaturale, passage d'une conception transmissive à constructive) ? Peut-on repérer des « objets »

[1] Dans la suite du texte, nous parlerons de « la réforme ».

d'enseignement anciens qui ont disparu mais qui semblent pertinent pour l'enseignement actuel ? Le cas échéant, comment les enseignants actuels peuvent-ils se les approprier, les intégrer dans leur enseignement ? Comment les former ?
L'objet de l'atelier est donc d'une part de diffuser les résultats de notre recherche auprès des formateurs, d'autre part de réfléchir à leur diffusion et à la pertinence de leur utilisation auprès des enseignants en formation, voire des formateurs.

2 DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION DES ENTIERS

Nous avons étudié l'évolution de l'enseignement de la numération de position des entiers en France au 20e siècle. Notre corpus de données était constitué d'une part de manuels scolaires du 20e siècle (1900 à 2004) (à ces manuels scolaires, nous avons ajouté l'extrait du traité de Reynaud relatif à la numération) (Bezout & Reynaud 1821, traité de Reynaud, §2) ; d'autre part de productions d'élèves de CM2 (en 2006).
Nous avons utilisé le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992). En particulier dans ce texte, nous nous référons explicitement à trois des quatre composantes d'une praxéologie (moyen de décrire une pratique). Dans une praxéologie, on a un *type de tâches*, c'est à dire un ensemble de tâches problématiques qui se ressemblent (en un certains sens). Ce type de tâches peut être traité par un moyen : la *technique*. Il s'agit de répondre à la question : comment fait-on pour traiter les tâches ? Le moyen (la technique) peut être justifié par une *technologie*, répondant donc à la question : pourquoi la technique fonctionne-t-elle ?
Nous présentons ci-après quelques uns de nos résultats. Nous commençons par deux éléments relatifs à la numération avant la réforme : d'une part un objet banal mais essentiel que nous avons appelé la *numération en unités*, d'autre part la théorie de la numération de position telle qu'on peut la trouver avant la réforme et les discours justificatifs, associés à cette théorie, mis à disposition des élèves pour traiter différentes tâches. Nous mettons ensuite ces éléments en correspondance avec l'enseignement actuel. Nous nous intéressons enfin à un objet qui semble fragilisé aujourd'hui : les relations entre les unités.

2.1 À propos de la numération avant la réforme et du rôle de la numération en unités

2.1.1 Un système pour désigner les nombres : la numération en unités

« La numération en unités » est donc un système particulier pour désigner les nombres. Il s'agit de les désigner en utilisant les mots « unités », « dizaines », « centaines », c'est-à-dire les noms des unités de la numération. Ainsi, parlera-t-on du nombre « six centaines trois unités ». Nous ne distinguons pas le fait d'écrire en lettres ou en chiffres le six et le trois. Ce système de désignation a différentes propriétés : il permet notamment de régulariser la numération orale. Ainsi, « trente » devient « 3 dizaines » (et « soixante-dix », « 7 dizaines »). Il n'est pas univoque, en ce sens qu'un nombre donné a plusieurs désignations dans la numération en unités : « 56 centaines » et « 5 milliers 6 centaines » désignent le même nombre. Il est également plus « souple » que la numération orale. Cette souplesse est probablement liée au fait qu'il n'est pas univoque. Ainsi, « dix cents » n'existe pas en numération orale. Quand on compte de cent en cent, après neuf cents, il y a mille, alors qu'en numération en unités, après « 9 centaines », il peut y avoir « 1 millier » et aussi « 10 centaines ». Ce peu de souplesse de la numération orale n'est pas spécifique de la langue française dans laquelle on utilise des mots différents, « cent » et « centaine », pour désigner respectivement le nombre à l'oral et le nom de l'unité. En anglais où on utilise le même mot « hundred », « ten hundreds » ne relève pas de la numération orale (on dit « one thousand ») mais bien de la numération en unités.

2.1.2 La théorie classique : deux parties imbriquées et complémentaires

Que ce soit dans le traité de Reynaud (Op. cité)[2] ou dans les manuels scolaires antérieurs à 1945, l'étude de la numération de position des entiers semble très stable. Nous identifions deux parties qui ont des dimensions mathématiques différentes dans l'exposé de la numération tel qu'il apparaît dans nos documents.

La première partie constitue un algorithme pour construire la suite des nombres. Elle utilise la numération en unités. On construit les nombres en organisant une collection. On trouve d'abord le discours suivant : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même donne un nombre nommé *deux* (…) » On poursuit ainsi en ajoutant « une unité » à chaque nombre obtenu jusqu'au nombre « dix ». Ensuite, « la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dixaine[3] ». On poursuit en indiquant qu'on compte par dizaines comme on a compté par unités. Cela signifie qu'on compte une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, jusqu'à dix dizaines. À ce moment-là, on a donc construit les nombres de un à dix ainsi que les dix premières dizaines entières. La suite du discours consiste alors à combler les « trous » entre deux dizaines, en ajoutant les nombres de un à neuf. On a donc construit les nombres jusqu'à neuf dizaines neuf unités (et dix dizaines).

On poursuit en fabriquant une nouvelle unité : la centaine qui est à la fois dix dizaines et 9 dizaines 9 unités auxquelles on a ajouté 1 unité. Et on reprend le processus : on compte par centaines comme on compte par unités et dizaines. C'est-à-dire qu'on compte une centaine, deux centaines, jusqu'à dix centaines. On a alors construit les nombres de un à cent et les dix premières centaines entières. Le processus engagé pour les dizaines est poursuivi au niveau des centaines puisqu'on comble les « trous » entre deux centaines en ajoutant les 99 premiers nombres. Par exemple, entre trois et quatre centaines, on a : trois centaines et une unité, trois centaines et deux unités, …, trois centaines et une dizaine, trois centaines une dizaine et une unité, …. C'est-à-dire qu'entre deux centaines, on ajoute les nombres déjà construits. On poursuit ensuite le processus avec les milliers, etc.

Voici maintenant la deuxième partie de la théorie. À la construction algorithmique de l'ensemble des entiers s'ajoute l'élaboration de deux correspondances : l'une entre numération en unités et numération orale, l'autre entre numération en unités et numération de position.

La première consiste en une traduction terme à terme de la numération en unités vers la numération orale : 5 centaines se dit « cinq cents », 3 dizaines se dit « trente » donc 5 centaines 3 dizaines se dit « cinq cent trente ».

La deuxième consiste en l'énoncé d'une correspondance entre les unités de la numération et la place des chiffres dans la numération de position : « On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite ».

Nous voyons donc la première partie de la théorie de la numération comme une construction de la suite des nombres avec la numération en unités qui utilise deux types de discours fondamentaux :

- Relations entre unités (R) : 1 millier = dix centaines
- Comptage des unités (C) : On compte par centaines comme on a compté par unités.

Les deux autres discours (P et O) relient la numération de position et la numération orale à la numération en unités. Cette dernière apparaît alors comme un pivot.

Numération positionnelle 530

Numération orale cinq cents trente

Numération en unités 5c 3d

Position (P) : Dans l'écriture d'un nombre, le chiffre des centaines occupe la troisième place à partir de la droite

Oral (O) : 5 centaines se dit cinq cents, 3 dizaines se dit trente. 5 centaines 3 dizaines se dit cinq cents trente.

---

[2] Les citations de ce paragraphe en sont extraites.

[3] Orthographe d'époque.

Soulignons que contrairement aux numérations positionnelle et orale, la numération en unités n'est probablement pas une pratique sociale.

2.2 Éléments sur l'enseignement de la numération de position aujourd'hui

Nous avons dit que le moment de la réforme est crucial pour comprendre la situation actuelle qui est en fait le produit d'évolutions continues depuis 40 ans. Pourtant, nous ne donnons pas d'indications précises sur ce qui s'est passé au moment de la réforme. En effet, si la mise à jour de ces éléments est déterminante sur le plan de la méthodologie de notre recherche, elle ne nous semble pas indispensable pour réfléchir à la formation des enseignants actuels.

2.2.1 La place des unités de la numération aujourd'hui, les ECPD

Pour montrer la place des unités de la numération aujourd'hui, nous proposons des extraits de manuels scolaires récents. Il s'agit du Nouvel Objectif Calcul CE2 (1995) et de Cap Maths[4] CE2 (2007).
Dans Le Nouvel Objectif Calcul CE2, nous nous intéressons à la deuxième leçon de numération de l'année (étape 4), elle est intitulée « Numération : groupements » (pp.14-15). Nous observons que la double page destinée aux élèves ne mentionne pas les unités de la numération. À la place, on a : la numération orale, cent et dix, et ce que nous avons appelé les *écritures chiffrées des puissances de dix 1, 10, 100, 1000* (ECPD). Le livre du maître (pp.27-30) (Annexe 1) est « conforme » au livre de l'élève puisqu'il ne mentionne pas davantage les unités de la numération (plus exactement, ces unités y sont utilisées à quelques reprises dans les locutions du type *compléter à la centaine supérieure*).
On observe à l'étape 4, le rôle des ECPD. En particulier, le calcul en ligne 100 +100 + 100 + 100 + 100 +100 +100 + 100 + 100 + 100 = 1000 remplace le discours classique (R) : « 10 centaines = 1 millier » et l'addition *implicitement* posée (ce qui permet à chaque chiffre de conserver sa place), 1000+1000+500 = 2500, remplace le discours classique (P) : « le chiffre des centaines (resp. des milliers) occupe la 3e (resp. la 4e) position ».
Signalons que les unités de la numération et les relations entre ces unités apparaissent dans l'aide mémoire de la leçon (p.174). Ajoutons que la première leçon de numération de l'année (étape 2) « Numération : dénombrement » ne fait pas davantage référence aux unités de la numération (à l'exception d'une mention dans le livre du maître pour désigner les chiffres du nombre comme aide dans une tâche relative au repérage d'une règle dans une suite d'écritures chiffrées). Ces unités apparaissent (dans le livre du maître) dans la troisième leçon de numération intitulée « Numération : échanges » (étape 5) dont l'objectif est « grouper et échanger selon la règle « dix contre un », pour comprendre la numération écrite ». Le contexte est celui du boulier où « dix unités [s'« échangent »] contre une dizaine (de la 1re à la 2e tige), 10 dizaines contre 1 centaine (de la 2e tige à la 3e tige) [...] ». Dans un exercice de la leçon, des échanges de monnaie apparaissent. Les unités de la numération désignent des positions et aussi des « valeurs » qui s'échangent.
Dans le manuel Cap Maths (2007) (Annexe 2), la première leçon (Unité 7 Séance 1) sur les nombres de 4 chiffres est consacrée au nombre mille. La relation 1 millier = 10 centaines n'y apparaît pas explicitement, le mot millier n'est ni dans le livre de l'élève, ni dans celui du maître.
On observe que les ECPD et la numération orale sont présentes contrairement aux unités de la numération et, même si ce qui permet de justifier que $1000 = 100 \times 10$ reste ambigu, la seule justification explicitement proposée est la « règle des zéros ». Nous considérons qu'elle remplace le discours classique (R). Signalons que le discours (R) apparaît dans le dico maths, Tempier (2009, p.57) conclut « nous n'avons pas trouvé non plus de référence à ces équivalences [les discours (R)] dans le manuel ou le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire. ».
La leçon suivante (Unité 7 Séance 2) est consacrée aux nombres supérieurs à 1000. Elle met en place des techniques pour obtenir une écriture chiffrée à partir de sommes proposées en ECPD :

---

[4] Pour cette étude, nous nous référons à Tempier (2009).

« au début les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + … (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4×10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000. On laissera se développer ces différentes pratiques, et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre ». (Cap Maths CE2 2007, livre du maître, p.150).

Tempier (2009, p.56) indique « Cette fois, l'ostensif « numération en unités » apparaît comme un objet de savoir qui permet de nommer les rangs, mais les décompositions » et « recompositions » sont associées aux ECPD et aux ECPDG [ECPD généralisées] ». Ce sont donc des règles de calcul qui permettent de justifier les écritures chiffrées et non des discours de type (P).

D'après notre étude, ces deux exemples sont révélateurs aux évolutions récentes de la place accordée aux unités de la numération : une quasi disparition des unités de la numération dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel depuis. Cette disparition étant plus nette dans les relations entre les unités que dans la désignation des positions des chiffres, on parle donc souvent du chiffre des centaines sans avoir indiqué qu'une centaine, c'est dix dizaines.

Ces deux exemples montrent que la numération en unités est remplacée, en un certain sens, par les ECPD. Elle avait quasiment disparu et réapparaît avec une fonction différente, pour seconder les ECPD.

2.2.2 Des limites des ECPD

Sur le plan mathématique, les ECPD sont équivalentes aux unités de la numération. Cependant, du point de l'enseignement primaire, des limites apparaissent en particulier lorsqu'il s'agit de justifier certaines techniques. En effet, les ECPD font apparaître des besoins importants en terme de formalisme et de propriétés des opérations. Justifier une retenue dans une addition demande l'utilisation de parenthèses, de factorisations ; de même pour la « règle des zéros » (multiplication d'un nombre d'au moins deux chiffres non nuls par une puissance de dix). La justification de l'algorithme de l'écriture chiffrée avec les ECPD nécessite l'écriture de plusieurs lignes de calcul dont on peut affirmer qu'elles ne sont pas accessibles à la fin du cycle 3. Avec les unités de la numération, un enchaînement de discours permet de justifier toutes ces techniques avec très peu de formalisme.

2.3 Les relations entre les unités

Serfati (2005) écrit à propos de l'interprétation d'un nombre écrit 24579 « comme neuf unités à quoi s'ajouteront sept dizaines, etc. deux dizaines de milliers enfin. Si immédiate qu'elle nous paraisse aujourd'hui, cette interprétation aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant ». Nous nous intéressons maintenant spécifiquement à la décimalité, à savoir donc, le fait que les unités successives de la numération sont liées par une relation de dizaine. À son propos, notre étude de manuels anciens nous a permis d'identifier un type de tâches : les conversions. Il n'existe quasiment plus aujourd'hui en numération, nous y reviendrons.

2.3.1 La structuration du type de tâches classique : les conversions

Pour présenter le type de tâches « conversions », nous nous limitons à une relation entre unités de la numération, nous étudions les tâches autour du discours technologique : un millier c'est dix centaines. Il s'agit donc de convertir des centaines en milliers (ou l'inverse).

Une synthèse de l'étude des manuels anciens nous permet de caractériser une progression dans le type de tâches au fur et à mesure des leçons de numération (et de système métrique) pour l'ordre donné (ici, les milliers) :

- dans la leçon « le millier » : par exemple, « combien faut-il ajouter de centaines à 200 pour faire un millier ? ». Il s'agit de travailler la relation de millier à centaines (ou de millier à dizaines) à un premier niveau de complexité : 10 pour 1 ou 100 ou 1 ;

- dans la leçon « les milliers » : par exemple, « combien 3 milliers font-ils de centaines ? ». Il s'agit de travailler la relation à un deuxième niveau de complexité : autour des relations du type X0 pour X ou X00 pour X.
- dans la leçon « entre deux milliers » : par exemple, « combien y a-t-il de milliers dans 35 centaines ? » (la réponse est 3 milliers 5 centaines ; la technique que nous avons reconstituée consiste à découper la tâche et à utiliser la leçon précédente : « 35 centaines » se décompose en 30 centaines et 5 centaines, qui font 3 milliers et 5 centaines). Il s'agit donc d'un troisième niveau de complexité qui porte simultanément sur plusieurs chiffres significatifs.
- enfin dans l'étude du système métrique : par exemple avec la leçon « le kilomètre », « écrire en hectomètres 3 km 5 hm ». On retrouve la complexité précédente avec un changement de grandeur manifesté par les unités métriques qui indiquent des « milliers » (kilo) et des « centaines » (hecto).
À cette progression dans les difficultés liées strictement à la numération s'ajoutent des variations dans les contextes et les ostensifs (systèmes de désignation). Il ne s'agit pas forcément d'une véritable progression, mais d'éléments qui permettent d'utiliser une même connaissance dans différents contextes. Nous avons retenu les éléments suivants qui nous semblent significatifs :
- Combien de centaines dans 3 milliers ? (décontextualisé, numération en unités)
- Combien d'enveloppes font 30 paquets de cent enveloppes ? (contexte évoqué, numérations de position et orale)
- Au cours d'une promenade, compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (contexte matériel, numération métrique) ;
- Avec 1 kg de graines de betterave, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? (contexte évoqué, numérations métrique et de position).

2.3.2 Propriété de la troncature

Nous appelons propriété de la troncature, la propriété de la numération de position que nous formulons à l'aide d'un exemple : « le nombre de centaines » s'obtient en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines (inclus).
On ne peut d'ailleurs exclure que cet énoncé soit parfois entendu comme une *définition* du « nombre de centaines ». Plus précisément, on pourrait définir comme suit « le nombre de centaines d'un nombre N » : c'est le nombre obtenu en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines dans le nombre N (chiffre des centaines compris). Énoncé ainsi, le « nombre de centaines » est un objet lié à l'écriture positionnelle décimale et non aux relations entre les unités de la numération.

2.3.3 La faiblesse de la relation entre unités aujourd'hui, le « nombre de »

Parouty (2005) étudie les compétences des élèves actuels du cycle 3 en numération. Elle propose notamment aux élèves (CE2) de traiter la tâche suivante : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » La réussite est de 10%.
Nous avons confirmé ou précisé ces résultats dans (Chambris 2008) avec les tâches (et les réussites) suivantes en fin de CM2 :
- Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? (R = 20%, réponse 85 ou 86 = 39%)
- Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ? (R = 32%)
Ces éléments nous amènent à faire l'hypothèse d'une faiblesse des élèves dans la connaissance des relations entre unités de la numération. Par suite, nous avons voulu mieux comprendre la situation de l'étude de ces relations aujourd'hui.
Comme les unités de la numération sont peu présentes dans les manuels récents, *a fortiori* les relations entre ces unités ne sont pas toujours explicitées dans ces manuels. Elles sont donc absentes de certains manuels actuels du CE1 ou du CE2.
Dans les manuels actuels, nous n'avons pas trouvé de conversion formulée avec les unités (bien que la formulation ne soit pas véritablement celle d'une conversion, nous signalons une exception avec Cap

Maths CE2 2007 et les nombres de 3 chiffres). Il peut y avoir des tâches qui leur ressemblent, elles sont de deux ordres. Il peut s'agir de :
- faire fonctionner la propriété de la troncature, avec le « nombre de »,
- problèmes concrets d'échanges entre billets de 10 et 100 par exemple (très rares).
Ces relations semblent revenir progressivement après une quasi-élimination dans les années 70-80. Toutefois, elles apparaissent en général avec le « nombre de », qui a parfois l'air d'être le représentant exclusif de ces relations.
Tempier (2009) a étudié les pratiques de deux enseignants de CE2 en numération. Il observe que l'aspect décimal de la numération n'est quasiment pas traité par eux. Bien qu'il faille rester prudent sur la représentativité des enseignants étudiés, ces résultats auraient tendance à confirmer que notre étude de manuels postérieurs à la réforme est révélatrice de ce que font les enseignants actuels dans leur classe.

2.3.4 Le « nombre de » aujourd'hui : structuration

Nous nous intéressons aux évolutions des tâches autour du « nombre de ». Avant la réforme, le « couple », « nombre de / chiffre des », n'existe pas. On peut demander dans un exercice quel est le nombre de dizaines dans un nombre de la même façon qu'on demande dans un autre exercice combien de dizaines il faut pour faire le nombre. De même, on demande quel est le chiffre des dizaines comme on peut demander ailleurs quelles sont les plus hautes unités d'un nombre de 4 chiffres ou combien il faut écrire de zéros à droite du chiffre 4 pour que celui-ci représente des dizaines, des mille, des centaines.
En revanche, au début des années 70, on trouve le couple cité précédemment. L'introduction du mot NUMERATION dans MOTS III (APMEP 1976, pp. 2-3) se termine par des « questions d'auto-contrôle » (pour que les lecteurs auto-évaluent leurs connaissances). Parmi elles :

> Voici l'écriture 345 (en base dix). Quel est le chiffre des dizaines ? Quel est le nombre de dizaines du naturel ainsi représenté ?

La réponse est proposée quelques lignes plus loin :

> Chiffre des dizaines : 4. Nombre de dizaines : 34 (trente quatre). La question « Combien d'unités dans 345 ? » est ambiguë ; on devrait répondre : « trois cent quarante cinq » et non pas « Cinq ». (Le nombre des unités est trois cent quarante cinq ; le chiffre des unités est 5).

L'opposition « chiffre des / nombre de » apparaît donc ici comme un moyen de supprimer une ambiguïté, crime de la pire espèce en mathématiques modernes. En réalité, de 1970 à 1995, même le « nombre de » est rare (absent dans certains manuels, existant seulement en « calcul mental » ou dans des « mots croisés » dans d'autres). Les exercices sont stéréotypés puisque si l'on veut voir un type de tâches autour du « nombre de », il semble qu'on puisse dire que ce type de tâches est réduit couple de tâches « nombre de / chiffre des » qui se constitue alors en une sorte de dialectique. Dans certains manuels, on voit à cette époque se développer des discours sur le fait qu'un nombre s'écrit avec des chiffres sur le nombre de ces chiffres : par exemple le nombre 456 s'écrit avec 3 chiffres qui sont 4, 5 et 6. Nous n'excluons pas que l'idée qu'« un nombre, c'est quand il y a plusieurs chiffres » se soit consolidée à cette époque. Cette idée constitue un moyen didactique presque totalement efficace pour *distinguer* « chiffre » et « nombre » dans la dialectique annoncée.
À partir de 1995, dans la 2e édition d'ERMEL, les tâches autour du « nombre de » semblent se diversifier. Les exercices « élèves » du sujet 0 du ministère pour le « nouveau » CRPE (annexe 3) constituent un exemple dans lequel la technique de la « troncature » est mobilisée de façon de plus ou moins approfondie selon les exercices.
D'autres exercices demandent une adaptation de cette technique. Ils ne sont pas très répandus dans les manuels mais semblent être néanmoins de plus en plus fréquents : par exemple « Calcule : 3 centaines 21 dizaines » (Euro maths CE2, Hatier 2004).
Nous interprétons les transformations autour du « nombre de » comme une reconnaissance implicite de la nécessité de faire vivre les relations entre les unités, en numération. Dans quelle mesure ces transformations sont-elles adaptées aux besoins de l'enseignement ?

3 PREMIERS ÉLÉMENTS SUR LA FORMATION

Nous entamons maintenant une discussion sur la formation. Sur le plan méthodologique, précisons que si les résultats relatifs aux manuels scolaires ont été établis dans le cadre d'une recherche, il n'en va pas de même de ce qui concerne la formation. Il s'agit d'une démarche beaucoup plus empirique qui tente de s'appuyer, entre autres, sur nos résultats de recherche.
Dans ce paragraphe nous commençons par évoquer des éléments relatifs à la formation des PE1. Cette réflexion sur les PE1 nous permet de repérer certains raisonnements « d'élèves » et des résistances mais aussi des possibilités d'agir que nous utilisons ensuite comme des balises pour étendre à d'autres contextes de formation.

3.1 En préparation au concours PE

Dans le cadre de la préparation au CRPE, les étudiants sont amenés à étudier la numération de position tant sur le plan théorique que didactique. Sur le plan théorique, une partie du travail consiste à leur enseigner des rudiments sur les « bases », un autre volet consiste à les outiller pour traiter algébriquement des problèmes « théoriques », le plus souvent en base dix. Pour ce qui concerne les bases, outre la nécessité d'apprendre à traiter des tâches spécifiques pour le concours, un autre objectif est d'utiliser les bases pour permettre aux étudiants de prendre un peu de distance par rapport à la base dix. Sur le plan didactique, les étudiants peuvent être amenés à analyser des productions d'élèves ou des documents relatifs à l'enseignement actuel de la numération en base dix.

3.1.1 « Volet » théorique

Pour le travail en bases que nous introduisons souvent avec la situation « des moutons » d'Odette Bassis (1991) nous faisons produire aux étudiants des codes de plus en plus sophistiqués pour désigner le cardinal d'une collection (de moutons) *quand on ne sait pas compter au delà de quatre*. Les étapes sont généralement : écrire la quantité avec des mots, avec des dessins sans mots, avec seulement des chiffres. L'écriture avec les mots amène à se mettre d'accord sur une désignation verbale des différents groupements, par exemple : troupeau (pour un groupe de 4 moutons), bergerie (pour un groupe de 4 troupeaux), surperbergerie (pour un groupe de 4 bergeries). Si le contexte n'est pas celui des ovins, on peut dire : paquet, superpaquet, maxipaquet, etc.
Nous proposons aussi aux PE1 d'effectuer des conversions. Le dispositif que nous avons utilisé à plusieurs reprises relève de l'interrogation rapide (ardoise ou réponse à indiquer sur une petite feuille préparée à l'avance), par exemple « Combien 30 dizaines font-elles de centaines ? » (cf. annexe 6 pour d'autres exemples)
Nous indiquons maintenant des observations récurrentes et des éléments d'évolution du dispositif au fil du temps :
- difficulté de certains étudiants à proposer une réponse à la question, comme si elle ne leur « parlait » pas, comme si elle ne voulait rien dire ;
- une mise en commun rend en général les étudiants capables de répondre à la question.
Nous avons ensuite fait évoluer le dispositif de façon à expliciter les procédures de traitement de cette tâche. Il apparaît que dans leur immense majorité les étudiants mettent en place deux stratégies pour la traiter : une stratégie de type « troncature », ils disent qu'ils visualisent le tableau de numération dans leur tête ; une stratégie de type « multiplication + troncature », 30×10=300 (j'ajoute un zéro), puis troncature ou oral (3 cents, c'est 3 centaines). Il n'est pas rare que, dans un groupe de 30 étudiants, aucun étudiant ne propose de faire référence à la relation 10 dizaines = 1 centaine pour traiter la question. Nous avons tenté d'enseigner aux étudiants la technique classique : 30 dizaines, c'est 3 fois plus que 10 dizaines. Dix dizaines, c'est une centaine donc 30 dizaines, c'est 3 centaines. Il nous semble que beaucoup d'étudiants résistent.
Pour renforcer le lien avec les bases, nous avons souhaité faire évoluer notre dispositif. Le travail en bases n'est en effet pas propice aux conversions : « combien y a-t-il de groupes de quatre dans $(3213)_4$? ». En base 4, la réponse est 321 (elle peut s'obtenir directement en tronquant). Contrairement

aux conversions en base dix, cette connaissance ne nous semble pas prioritaire pour la formation des PE1. Par ailleurs, souvent des étudiants disent qu'ils ne voient pas le lien entre les bases et ce qu'ils savent sur les écritures chiffrées. Nous avons alors aménagé le dispositif de la façon suivante :
- travail en base quatre : les groupements ont des noms (cf. supra) et introduction de l'écriture positionnelle chiffrée ;
- questions sur les relations entre unités de la base 4, mais en base dix. Par exemple, combien de superbergeries avec 16 troupeaux ? etc. Les étudiants n'utilisent pas les propriétés positionnelles pour traiter la question mais les relations entre les groupements ;
- c'est seulement après qu'on les interroge sur la conversion « combien 30 dizaines font-elles de centaines » ?

Quand on le leur suggère, les étudiants font le rapprochement avec le travail fait en bases et il leur semble acceptable de faire référence aux relations entre les unités pour traiter cette dernière tâche. Ils semblent donc renoncer, provisoirement (ce qui est notre but), à la propriété de la troncature. Finalement, le détour par les relations entre unités, en bases, semble permettre une déconstruction de la technique de la troncature en base dix.

Nous réinvestissons aussi la numération en unités dans la relation : $(abc)_{\text{dix}} = 100\,a + 10\,b + c$. Sans que nous ayons réussi à percevoir ce qui pose problème avec elle, nombre d'étudiants ne parviennent absolument pas à se l'approprier. Nous avons utilisé le passage par les unités de la numération puis les conversions :

$(abc)_{\text{dix}} = a$ centaines b dizaines c unités puis convertir en unités « simples » cette expression. Ce qui donne : $(abc)_{\text{dix}} = a \times 100 + b \times 10 + c$ unités.

Certains étudiants sont manifestement sensibles à cette médiation par les unités de la numération.

3.1.2 « Volet » didactique

Sur le plan de la préparation didactique au concours, la situation est pour nous plus délicate. Nous utilisons essentiellement des documents institutionnels, en voici deux. Le premier (Annexe 3) est un extrait d'un « sujet 0 » proposé par le ministère en 2006 (rénovation du concours) ; le second (Annexe 4) date de 2000, c'est une analyse de travaux d'élèves donnée dans l'académie d'Aix-Marseille, nous lui adjoignons un extrait du corrigé proposé par les annales de la COPIRELEM.

Une analyse des exercices du sujet 0 proposés montre que l'ensemble (exercices proposés aux élèves, questions aux candidats) peut être traité en faisant uniquement référence à ce que nous avons appelé propriété de la troncature. Ces exercices et les questions ne sollicitent pas explicitement les relations entre unités.

Nous prenons maintenant l'analyse de travaux d'élèves. Dans la praxéologie classique, les décompositions d'Isabelle ou Claire n'apparaissent pas comme un progrès par rapport à celle de Mickaël. Comme le prouve la praxéologie classique, les ECPD ne sont pas un ostensif nécessaire à l'apprentissage de la numération de position. Il est fort probable que si on ne les enseigne pas aux élèves, ces décompositions n'apparaissent pas. Ces analyses de travaux d'élèves sont susceptibles de constituer un obstacle à la formation à la numération en unités des enseignants débutants.

La question de la place institutionnelle accordée aux ECPD est évidemment centrale du point de vue de la formation à l'enseignement de la numération. Elle est notamment sensible dans la préparation au concours où il s'agit notamment d'apprendre à se conformer aux instructions officielles.

3.2 Des questions pour la transposition en formation

Que faire de ces éléments pour la formation ?

3.2.1 Que faire en PE1 ?

Nous avons vu que les « bases » ne permettent pas *a priori* de revisiter la question des relations entre unités de la numération (pas plus pour les élèves de primaire en 1970 que pour les PE1 des années 2000). Toutefois, certains dispositifs utilisant les bases et les relations entre unités peuvent sans doute y contribuer.

Par ailleurs, le moment de préparation au concours n'est probablement pas un bon moment pour introduire des pratiques qui ne sont pas préconisées par l'institution ! Toutefois, existe-t-il un *bon* moment pour ce faire ?

3.2.2 Les relations entre unités et le « nombre de »

Nous pensons que la résistance des étudiants à faire fonctionner les relations entre unités de la numération pour traiter les conversions mérite d'être remarquée. Il nous semble indispensable de renforcer la maîtrise de ces relations chez les élèves et l'aspect « décimal » de la numération dans l'enseignement.
Les éléments que nous avons sur les connaissances des élèves actuels nous laissent penser que la maîtrise des relations entre unités est complexe. Nous faisons l'hypothèse qu'elle constitue une dimension délicate, difficile, de l'apprentissage de la numération. Nous voyons dans la structuration ancienne du type de tâches « conversions » une organisation temporelle adaptée pour travailler cette complexité et il n'est pas sûr que les évolutions récentes autour du « nombre de » soient pertinentes de ce point de vue. En effet, il nous semble que tant qu'on peut utiliser la propriété de la troncature, on ne travaille pas la spécificité de chacune des relations (relation de dizaine entre millier et centaine, de centaine entre millier et dizaine, etc.). Pour nous, un objectif serait d'importer d'autres techniques que celles de la troncature pour traiter ces tâches.
Par ailleurs, les tâches du type « nombre de » ont pour caractéristique de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en un « nombre » (ou l'inverse) ; les relations entre unités sont plus générales, il s'agit de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en « certaines quantités d'unités d'un ou plusieurs autres types ».
Aussi, en l'absence d'une progression récente convaincante, nous souhaitons privilégier la progression classique qui repose sur les relations en jeu et leur nombre.

3.2.3 Thèmes et variations

Nous commençons par présenter les objets qu'il nous semble nécessaire de valoriser en formation, nous en indiquons des raisons.
La priorité nous semble être la restauration des relations entre les unités (aspect décimal de la numération). L'état de ces relations qui se dissolvent au mieux dans le calcul nous semble particulièrement critique. Il ne nous semble pas abusif d'attribuer tout ou partie des difficultés des élèves repérées par Parouty (2005) à la méconnaissance de ces relations par les élèves. Pour les raisons que nous avons déjà indiquées, le moyen que nous privilégions pour les restaurer est la « réhabilitation » des conversions.
Par suite, il semble nécessaire de revaloriser la numération en unités. Sans elle, il n'y a pas vraiment de conversion possible et l'étude de la numération risque de se réduire à une suite de calculs sur lesquels il est extrêmement difficile de mettre des mots.
Une dernière dimension consiste à réintroduire les explications « classiques » qui impliquent la numération en unités pour les différents types de tâches. Il nous semble en effet que la diversité des contextes dans lesquels la numération en unités est utilisée permet de renforcer son implantation, notamment pour les conversions.
Finalement, tout en prenant en compte les évolutions de l'enseignement des mathématiques en primaire depuis 40 ans, un de nos objectifs en formation consiste à vouloir introduire dans les pratiques des enseignants un certain nombre d'objets anciens qui n'existent plus dans l'enseignement actuel, ces objets nous semblant être pertinents pour une meilleure connaissance de la numération.

4 FORMATION PROFESSIONNELLE : TÂCHES, RÉACTIONS ET RÉSISTANCES

Après les formations en PE1, nous nous proposons maintenant d'évoquer plusieurs situations de formation professionnelles de professeurs d'écoles que nous avons mises en oeuvre. Si ces formations ont des fondements théoriques communs, elles sont cependant pensées en fonction des publics auxquels elles sont destinées : formation initiale en alternance (PE2), néo-titulaires 1ère année (NT1), formation continue (FC). Le but est de montrer à la fois des tâches proposées, des réactions et, le cas échéant, des résistances ou des obstacles que nous avons rencontrés.

4.1 Tâches proposées

Il s'agit donc d'une part de travailler au niveau des explications (technologique) pour renforcer la numération en unités qui est bien davantage présente dans les explications que dans les tâches existant « dans la société » ; d'autre part de proposer des tâches, notamment pour travailler les relations entre unités.

4.1.1 Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

Nous avons utilisé à plusieurs reprises un même dispositif. Nous proposons aux enseignants plusieurs tâches sur le même modèle. Ceci nous permet à la fois d'accéder (un peu) aux pratiques des enseignants et, peut-être, d'agir sur elles. Nous leur demandons de dire quelles explications ils donneraient à leurs élèves pour traiter certaines tâches de numération. Les tâches proposées sont très standard (Annexe 5).
Notre étude de manuels nous incite à faire l'hypothèse que les explications proposées devraient être variées car significatives du moment où les enseignants se sont formés. Par ailleurs, il est bien possible que des enseignants soient démunis pour donner des explications relatives à certaines tâches. Nous donnons quelques exemples de réponses.
Nous avons rencontré des collègues enseignants qui ont affirmé qu'en formation (probablement vers les années 70-80), on leur avait « interdit » d'utiliser ce que nous appelons la numération en unités. Majoritairement, pour *expliquer* le « nombre de », les collègues disent qu'ils « coupent » le nombre dans le tableau de numération. Pour expliquer la retenue dans l'addition, beaucoup d'arguments reposent sur l'utilisation d'un papier quadrillé qui permet de « justifier » d'écrire un seul chiffre par colonne.
Précisons que nous avons repris ce dispositif pour l'atelier de la COPIRELEM. Nous n'avons pas recueilli la diversité observée en formation. Par ailleurs, pour certaines explications, la numération en unités est peut-être bien davantage utilisée par les formateurs que par les enseignants. En revanche, les ECPD semblent être bien davantage utilisées par les enseignants que par les formateurs.
Les réactions des formés aux explications par la numération en unités sont diverses. En effet, ils disposent souvent d'explications, véhiculées par les livres. Par exemple, 100 est plus grand que 90 car « 100 est plus long que 90 »[5]. Avec la numération en unités, on peut : lire 100 comme une centaine, 90 comme 9 dizaines, utiliser la relation entre unités (une centaine, c'est dix dizaines), puis conclure en comparant neuf et dix dizaines. Le gain n'est pas évident *a priori*.
Il semble toutefois que l'évocation des techniques qu'il faudra mettre en place avec les décimaux peut faire évoluer certaines résistances. En effet, beaucoup de ce qui repose sur l'algorithme de l'écriture chiffrée sera mis en défaut avec les décimaux. Si cet argument semble avoir fonctionné auprès de NT1, des PE2 ont semblé plus réticents arguant du fait que « quand nous sommes au CE1 ou au CE2, le CM1 ou le CM2…. C'est loin ! »

4.1.2 Des conversions

Nous proposons aussi aux enseignants des tâches qu'ils pourraient proposer à leurs élèves. Nous leur demandons alors de façon systématique ce qu'on apprend avec ces tâches. Dans ce cadre, nous proposons des conversions. (Annexe 6)
Nous avons introduit du matériel multibase pour travailler les conversions. Nous présentons d'abord les différents groupements et les relations entre les objets. Nous utilisons ensuite une représentation en perspective du matériel imprimée sur un format A4 (Annexe 7). Chaque formé dispose d'un feutre effaçable et d'une pochette plastique transparente pour glisser la feuille A4.
Nous proposons alors par exemple d'entourer une « quantité » dictée : « entourer 41 dizaines (de cubes) ». Signalons que cette tâche n'est pas réussie par tous les PE2.

---

[5] Cette justification est souvent appuyée par des arguments relatifs à l'algorithme de l'écriture chiffrée.

Nous avons mis en place un petit dispositif matériel avec une règle du jeu : on dispose d'étiquettes « unités » comportant les noms des unités de la numération et d'étiquettes « jetons » comportant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Le matériel à disposition (absence du 0, en particulier) induit assez naturellement une règle du jeu : une unité de la numération est précédée d'un seul chiffre. Les formulations telles que : 4 dizaines 5 unités (ou 5 unités 4 dizaines) sont autorisées mais pas 45 unités.
On peut par exemple demander d'indiquer combien de cubes sont entourés lorsque par exemple, 10 barres de dix, 13, 30, puis 35 sont entourées ce qui donne respectivement 1 centaine, 1 centaine 3 dizaines, 3 centaines, puis 3 centaines 5 dizaines.
Nous avons proposé cette tâche pour le cycle 2 avec deux types de nombres : ceux de la forme X0 dizaines et 1X dizaines. On entoure par exemple 30 (respectivement 16) barres de dix cubes et on demande combien de dizaines de cubes, puis combien de centaines de cubes sont entourées. Elle a été très diversement appréciée, certains collègues disant qu'il s'agit d'un travail pour le cycle 3. En revanche, d'autres ont suggéré pour favoriser l'entrée dans la tâche (CP) d'entourer par exemple 2 barres de dix et 10 cubes isolés. On peut alors demander combien de dizaines de cubes sont entourées. Le fait de réserver cette tâche pour le cycle 3 nous semble problématique : quand et comment travaille-t-on la relation entre dizaine et centaine au cycle 2 ?
Nous avons souvent proposé une adaptation de la tâche « les pirates » (Parouty 2005) : « Dans mon jardin j'ai enterré des pièces d'or. Je veux les transporter ailleurs avec ma brouette. Je peux en prendre 100 000 à chaque tour. J'ai enterré 60 148 020 pièces. Combien de tours de brouette dois-je faire au minimum pour tout transporter ? » On rencontre toujours des étudiants ou stagiaires en plus ou moins grand nombre qui indiquent qu'il faut faire 61 ou 62 voyages. C'est une tâche de type « nombre de » et comme nous l'avons signalé précédemment, les tâches de conversions nous semblent à privilégier dans un premier temps. Toutefois, cette tâche peut être l'occasion de faire une synthèse dans laquelle on fait fonctionner le même type de propriété sur chaque chiffre.

4.1.3 Autres tâches faisant appel à la numération en unités

En utilisant le matériel « jetons » et « unités », nous proposons aussi des tâches qui ne font pas nécessairement fonctionner les relations entre unités mais les relations entre numération orale et numération en unités. Il peut s'agir :
- d'entourer une quantité de cubes donnée en numération orale (trois mille huit cent sept cubes),
- d'écrire avec les étiquettes « jetons » et « unités » un « grand nombre » donné oralement,

Nous demandons aussi d'effectuer des tâches de dénombrement sans qu'il y ait de mise en relation des unités (par exemple, un nombre de cubes est donné en chiffres et il faut entourer les cubes ou l'inverse).
Enfin nous faisons travailler la technique opératoire de l'addition. Pour permettre un détour et éviter tout recours aux écritures chiffrées, nous dictons deux nombres (numération orale) qu'il faut « faire » avec les étiquettes « jetons » et « unités » (nous avons utilisé « cent quatre vingt mille sept cent quatre vingt treize » et « vingt mille quatre cent soixante »). Il faut ensuite les additionner en manipulant les étiquettes. La retenue du rang des dizaines ne pose pas de problème. Ce sont les 11 (ou 12) centaines qui occasionnent les difficultés. Lorsque nous avons proposée cette tâche en formation initiale ou continue, il y a toujours eu des enseignants (ou étudiants) pour faire porter la retenue sur les dizaines de milliers, première unité présente dans les nombres après les centaines. Ils ne voient pas qu'il faudrait introduire une nouvelle étiquette « unités », celle des « milliers ».
Nous considérons que cette tâche est un moyen de consolider la technique opératoire de l'addition et la numération des entiers au CM. Elle est diversement accueillie par les enseignants, certains (peut-être ceux qui ont échoué) estiment qu'il n'est pas nécessaire d'essayer déstabiliser les connaissances des élèves.

4.2 Variations dans les mises en œuvre

Selon les publics ou le contexte de la formation nous n'avons pas toujours organisé les séances de la même façon.

Avec des PE2, nous avons souvent proposé un très petit nombre de tâches : notamment, « Entourer 41 dizaines », « Comment expliquer que 100 est plus grand que 90 ? » Nous avons aussi présenté explicitement le type de tâches conversions qui n'est pas forcément bien distingué du « dénombrement ». En revanche, en formation continue, nous avons plutôt tendance à visiter un grand nombre de tâches et d'explications.

4.3 Retour sur une formation continue

Bien que nous n'ayons pas mis en place de dispositif d'évaluation de nos formations, nous avons eu l'occasion d'avoir un retour sur les effets de l'une d'elles.

4.3.1 Bilan

Nous avons eu accès en fin d'année scolaire aux évaluations mises en place, après leur séquence d'enseignement sur la numération, par une partie des enseignants ayant suivi la formation en début d'année scolaire. Il ressort que si les enseignants ont introduit du dénombrement de multibase – cas simple, sans nécessité de mettre en relation les unités –, l'aspect « relations entre unités » apparaît dans le meilleur des cas sous la forme « nombre de » et n'apparaît pas dans plusieurs des évaluations auxquelles nous avons eu accès…

4.3.2 Proposition de l'atelier

Au cours de l'atelier, ce dernier point a été évoqué. La dimension « relation entre unités » (aspect décimal de la numération) est apparue essentielle à la plupart des participants. Nous avons réfléchi à un moyen de faire « pénétrer » cette dimension dans les pratiques. Il a été proposé d'introduire une tâche dans les formations : « à quoi servent les relations entre unités ? », « pour quelles tâches sont-elles utiles ? »
Les enseignants disent que les relations entre unités, c'est « difficile ». Il nous faut signaler qu'une des raisons des résistances des enseignants nous semble être le fait que la numération en unités n'est pas une pratique sociale. Nous pensons qu'ils ne voient pas alors nécessairement l'utilité de l'enseigner aux élèves. Dans les dispositifs que nous avons proposés, la numération en unités est nécessaire au niveau des « justifications » et mais elle n'est pas forcément nécessaire pour « réussir » les tâches, c'est-à-dire pour les techniques.

4.4 Pour poursuivre, apports de l'atelier de la COPIRELEM

L'utilisation de la monnaie est revenue à plusieurs reprises lors de l'atelier comme un prolongement nécessaire. Par exemple « valoriser l'aspect échange, avec la monnaie ». À ce propos, nous voulons souligner deux éléments.
Notre recherche sur les manuels scolaires nous a permis d'identifier que la dialectique « groupement / échange » est une invention de la réforme. Elle n'existe pas avant. Au moment de la réforme elle permet d'accompagner les diverses manipulations avec les différents types de matériels introduits à l'époque pour faire « manipuler les élèves ».
Avant la réforme, on peut travailler avec la monnaie. Cette grandeur apparaît alors comme une grandeur parmi d'autres : la longueur (on travaille alors souvent le décamètre comme dizaine de mètres, etc.), la capacité, etc. On peut alors évoquer les questions des échanges, comme spécifiques à la monnaie, à cette grandeur. Nous avons identifié deux cadres dans lesquels les « échanges » interviennent : quand il faut faire des sommes inférieures à dix, il s'agit d'apprendre la valeur des pièces et certaines équivalences. Un autre contexte est celui des échanges de matériel : on échange 4 chemises à 35 francs contre… Il s'agit de problèmes portant sur les quatre opérations.
Il est clair qu'on peut travailler la numération avec la monnaie, c'est alors la grandeur « valeur » qui est en jeu. Néanmoins, les questions de conservation nous semblent devoir être travaillées avant celles liées à la numération. Cette question de conservation apparaît d'ailleurs aussi, mais plus discrètement, dans les manipulations liées au multibase : elles sont accessibles à partir du moment où les élèves sont

convaincus qu'il y a autant de cubes dans une barre de dix que dans dix cubes et dans la réversibilité de la transformation, que le fait de grouper les cubes ne modifie pas leur quantité.
Enfin, pour la formation d'adultes analphabètes qui ont une grande pratique de la monnaie, cette pratique pourrait servir d'appui pour construire des connaissances plus « théoriques » en lien avec la numération en unités.

5 CONCLUSION, QUESTIONS OUVERTES

La numération de position a beaucoup évolué depuis 40 ans. L'étude de la situation actuelle montre des faiblesses qui se manifestent clairement au niveau de l'aspect « décimal ». Notre recherche nous donne des pistes pour agir en formation. Nous avons envisagé des modifications assez globales : en particulier au niveau des « explications ».
Un problème qui se pose à nous est celui du « relais ». Nous l'avons évoqué avec la formation à la didactique de nos PE1. Plus généralement, quelle est la pertinence d'une formation de 3 à 6 heures sur un objet aussi gros que la numération de position ? Peut-on former sur ce thème des professeurs, notamment débutants mais pas seulement, alors qu'il n'existe pas de document institutionnel pouvant relayer le discours véhiculé dans la formation ?
En effet, dans quelle mesure, un enseignant peut-il modifier sa pratique en y introduisant des « objets » pour lesquels les relais sont quasiment inexistants tant sur le plan institutionnel – pas d'accompagnement par les programmes des modifications suggérées par exemple –, que sur le plan matériel – absence de supports pour l'enseignement notamment –.
N'y aurait-il pas alors quelque danger à déstabiliser les pratiques d'enseignants. Il est clair que des enseignants, qui souhaitent bien faire, peuvent lorsqu'ils rentrent de formation ne plus oser faire ce qu'ils faisaient avant d'y aller sans savoir véritablement quoi faire à la place. Dans ces conditions, le remède peut être pire que le mal.
Peut-être faut-il chercher à agir beaucoup plus localement que nous ne l'avons fait.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

APMEP (1976) ; *Mots. T. 3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques* ; Num. 015 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

Bassis O. (1991) ; *Mathématiques : quand les enfants prennent le pouvoir, des démarches d'auto-socio-construction pour l'Ecole*, G.F.E.N.

Bezout, Reynaud (1821) ; *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud.* ; consulté sur Internet le 21/12/2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Chambris C. (2008) ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse de doctorat ; Université Paris-Diderot (Paris 7) http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chambris C. (2009) ; Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2e et 3e années de primaire) ; *Actes du colloque Didirem.*

Chevallard Y. (1992) ; Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique ; *Recherches en didactique des mathématiques* ; 12/1 ; 73-111

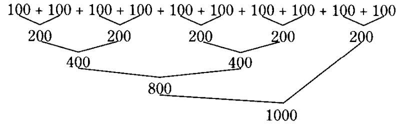
Parouty V. (2005) ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres* ; IREM de Toulouse

Serfati M. (2005) ; *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, éditions Pétra.

Tempier F. (2009) ; *L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants*, Cahiers de Didirem, n°60, IREM Paris 7

Annexe 1 : extrait du manuel Le nouvel objectif calcul CE2 (Hatier 1995) – livre du maître – pp.28-29 (extrait)

Travailler l'échange « 10 gabarits de 100 carreaux, c'est 1 000 carreaux » en faisant un arbre de calcul ou une addition en ligne.



Conclure : « 10 fois 100, c'est 1 000. »
Un gabarit C peut être réalisé en scotchant 10 gabarits B pour obtenir le gabarit 1 000.
Les enfants sont toujours surpris par le nombre important de carreaux obtenus.
25 gabarits de 100, c'est :
10 gabarits de 100 ——► 1 0 0 0
10 gabarits de 100 ——► 1 0 0 0
5 gabarits de 100 ——► 5 0 0
25 gabarits de 100, c'est : 2 5 0 0 carreaux
Cette activité permet le passage au millier pour lequel certains enfants éprouvent encore des difficultés.

Conclure avec les enfants
Les groupements d'objets par 10, 100, 1 000 facilitent le dénombrement : ils évitent de compter un par un et conduisent à un résultat qui donne directement l'écriture du nombre.

EXERCICE 1

Réinvestir les acquis de la découverte.

- Lecture de la consigne et des informations données par l'exercice

Mettre des gabarits à la disposition des enfants en difficulté.
Conseiller aux enfants de rechercher tout d'abord l'écriture additive avant de donner le nombre de carreaux.
Exemple : 4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 c'est : 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 400 + 80 = 480

- Travail individuel
- Correction collective

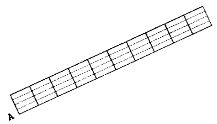
Utiliser le matériel si nécessaire ou les écritures additives.
Certains enfants peuvent proposer des écritures multiplicatives du type (4 x 100) + (8 x 10). Insister sur l'aspect efficace de telles écritures.

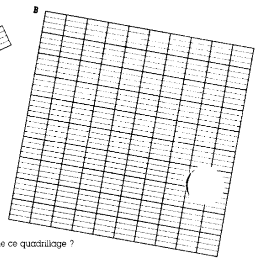
Numération : groupements

4 Numération : groupements

Privilégier les groupements par dix ou par cent pour dénombrer.

Découverte





1. Réalise ces 2 gabarits (A et B) avec du papier quadrillé de même format. Recherche le nombre de carreaux du gabarit A, puis du gabarit B.

2. Avec trois camarades de ta classe réunissez vos gabarits A et B pour réaliser un quadrillage. Quel est le nombre de carreaux de ce quadrillage ?

3. Si douze élèves de la classe réunissent leurs gabarits, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage obtenu ?

4. Si tous les élèves de la classe réunissent les gabarits A, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage ?

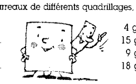
5. Et si vous réunissez tous les gabarits B ?

AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 174

Exercices et problèmes

Pour compter les carreaux de différents quadrillages, on a utilisé les gabarits suivants :

8 gabarits de 10 = ...
7 gabarits de 100 = ...
12 gabarits de 10 = ...
14 gabarits de 100 = ...



4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 = ...
15 gabarits de 100 et 3 gabarits de 10 = ...
9 gabarits de 100 et 12 gabarits de 10 = ...
18 gabarits de 100 et 11 gabarits de 10 = ...

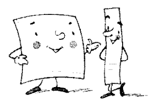
Quel est le nombre de carreaux de chaque quadrillage ?

14

Numération : groupements

CALCUL RÉFLÉCHI
Jeu du Furet de 100 en 100, en croissant, en décroissant. Compléments aux dizaines.

Utilise les gabarits A et B de la *découverte* pour rechercher le nombre de carreaux d'une double page de ton cahier.



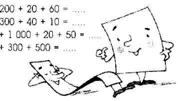
Complète les égalités :

60 + ... = 100
30 + ... = 100
50 + ... = 100

200 + ... = 1 000
500 + ... = 1 000
100 + ... = 1 000

Calcule les sommes :

500 + 200 + 20 + 60 = ...
300 + 300 + 40 + 10 = ...
2 000 + 1 000 + 20 + 50 = ...
1 000 + 300 + 500 = ...



5 Regroupe les nombres pour calculer le plus rapidement possible.

300 + 30 + 600 = 30 + 900 = 930

600 + 8 + 20 + 200 + 20 = ...
7 + 50 + 3 + 20 + 500 = ...
1 000 + 60 + 2 000 + 40 = ...
300 + 9 + 200 + 3 000 = ...

Écris une décomposition des nombres suivants :

712 ; 1 527 ; 980 ; 2 095 ; 5 137 ; 4 978

Puis range-les dans l'ordre décroissant.

Complète les décompositions :

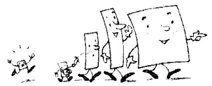
4 842 = 4 000 + ... + 40 + ...
2 064 = 60 + ... + 4
3 940 = 40 + 3 000 + ...

Compare les nombres (= , < , >).

4 081	1 048	1 807	1 708
2 164	4 612	681	816
975	759	1 207	2 107

9 Écris ces nombres dans l'ordre croissant :

3 142 ; 2 413 ; 3 412 ; 2 314 ; 1 342 ; 3 124 ; 2 143 ; 1 234 ; 3 214.



10 Observe la règle et continue :

63 ; 68 ; 73 ; 78 ; ......
41 ; 241 ; 441 ; ......
136 ; 156 ; 176 ; ......
314 ; 364 ; 414 ; 464 ; ......

CALCUL RAPIDE

Complète les égalités

200 + 100 + 300 = ...
500 + 200 + 50 = ...
20 + 60 + 30 = ...
80 + 20 + 50 = ...
300 + 300 + 600 = ...
500 + 500 + 500 = ...

15

- Travail individuel

Cette activité demande des qualités d'organisation et d'adresse manuelle car il est nécessaire de placer des repères qui matérialisent les différents déplacements des gabarits. Le nombre des carreaux de la double page sera noté sous forme additive correspondant aux déplacements successifs des gabarits puis sous la forme canonique.

- Correction individuelle

Mettre du matériel de numération ou des gabarits à la disposition des enfants qui en auraient besoin.

- Correction individuelle

EXERCICE 4 du livre *(3 du fichier)*

Grouper pour calculer.

Annexe 2 : extrait du livre du maître du manuel Cap Maths CE2 (Hatier 2007)

Unité 7, Séance 1

APPRENTISSAGE

Le nombre mille

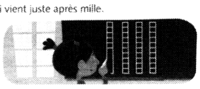
– Connaître le nombre 1 000 et ses relations avec d'autres nombres.

Chercher **manuel p. 62 questions 1 à 5**

Les élèves répondent à différentes questions qui permettent d'envisager l'écriture en chiffres de mille et ses relations avec d'autres nombres, notamment avec 10 et 100 et avec 25, 50, 250 et 500.

Chercher Mille

1. Écris mille en chiffres.
2. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste avant mille.
3. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste après mille.
4. Maïa dessine des colonnes de dix carrés. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?



5. Sur une grande feuille, trace avec un camarade une ligne brisée de mille millimètres.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

1 Mille, son écriture, ses « voisins »

• Demander aux élèves une réponse individuelle et rapide aux **questions 1, 2 et 3**.

• Recenser et faire valider les réponses. Il y a plusieurs manières de trouver les nombres qui précèdent et suivent 1 000 :
– en observant la numérotation des pages d'un livre de plus de 1 000 pages (un dictionnaire par exemple) ;
– en utilisant deux compteurs en carton, mis bout à bout, et en prolongeant aux nombres de 4 chiffres le fonctionnement connu pour les nombres de 3 chiffres ;
– en retranchant ou en ajoutant 1 au nombre 1 000, avec une calculette.

Comme le nombre 100, **le nombre 1 000** joue un rôle important dans la compréhension du système de numération écrite (découpage en classes de trois chiffres), ainsi que dans celle du système de désignation orale où mille joue un rôle clef. Plusieurs « petites » activités permettent ici une première familiarisation avec le nombre 1 000, avant d'entreprendre une étude plus structurée du système d'écriture des nombres « de plus de 3 chiffres ».

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

2 Mille petits carrés

• Demander une réponse, par deux, à la **question 4**.

• Après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :
– 1 000 = 10 × 100 (il faut dessiner 100 rangées de 10 carrés), avec éventuellement utilisation de la règle des 0 ;
– comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100…

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

3 Une ligne de mille millimètres

• Demander une réponse, par deux, à la **question 5**.

• Recenser les procédures. Certaines peuvent être laborieuses comme par exemple le dénombrement des millimètres du double décimètre avec report ; d'autres peuvent utiliser ce qui a été travaillé précédemment, comme par exemple les équivalences entre 1 cm et 10 mm et entre 1 m et 100 cm.

On laissera chaque groupe d'élèves choisir sa procédure, sans provoquer de mise en commun trop rapide.

Les erreurs peuvent provenir d'une mauvaise utilisation des équivalences entre unités. Le retour à leur signification sur le double décimètre peut aider certains élèves.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 62 exercices 6 à 10**

Exercices

6. Dans une école, lorsque tous les enfants lèvent tous leurs doigts, cela fait mille doigts levés. Combien y a-t-il d'enfants dans l'école ?
7. Un siècle, c'est 100 ans. Combien faut-il de siècles pour faire un millénaire ?
8. Dans mille :
a. combien de fois y a-t-il 200 ?
b. combien de fois y a-t-il 50 ?
c. combien de fois y a-t-il 25 ?
9. Combien faut-il de boîtes pour emballer mille chaussures ?
10. Trouve les calculs qui ont pour résultat le nombre mille. Avec les lettres de ces cases, écris un mot que tu connais.

A 50 x 4	C 100 x 6	M 500 x 2	L 4 x 250
T 250 x 2	E 100 x 10	V 300 x 3	I 5 x 200
B 25 x 20	E 200 x 4	N 10 x 10	P 100 x 0
O 20 x 30	F 25 x 4	L 25 x 40	R 40 x 20

Les élèves traitent certains de ces exercices, soit librement selon le temps dont ils disposent, soit en fonction des indications de l'enseignant.

Exercice 6 Il peut être rapproché de la question 4 et revient à se demander combien il y a de fois 10 dans 1 000.

Exercice 7 Résoudre cet exercice revient à se demander combien il y a de fois 100 dans 1 000 ?

Exercice 8 Certaines procédures peuvent s'appuyer sur des relations connues, comme le fait que 25, 50 et 200 sont respectivement le quart, la moitié et le double de 100.

Exercice 9 On peut faire préciser que, dans chaque boîte, il y a 2 chaussures.

Exercice 10 Le mot « mille » peut être écrit avec les lettres sélectionnées mises en ordre.

APPRENTISSAGE

Nombres supérieurs à 1 000 (1)

– Comprendre les écritures de nombres au-delà de 1 000 et pouvoir les comparer.
– Exprimer ces nombres à l'aide de décompositions du type : 2 540 = 2 × 1 000 + 5 × 100 + 4 × 10.

Chercher **manuel p. 63 question 1 et règle du jeu**

Les élèves doivent essayer de marquer le maximum de points en choisissant un nombre de cartes, fixé par un jet de dé, parmi des cartes rapportant 1 point, 10 points, 100 points, 1 000 points, 10 000 points.

Chercher Au-delà de 1 000

1. Fais une première partie du jeu avec 2 ou 3 de tes camarades. Vous pourrez ensuite faire d'autres parties.

Le plus grand total
3 ou 4 joueurs

Matériel
- 1 paquet de 15 cartes de 1 point
- 1 paquet de 15 cartes de 10 points
- 1 paquet de 15 cartes de 100 points
- 1 paquet de 15 cartes de 1 000 points
- 1 paquet de 15 cartes de 10 000 points
- un dé
- une feuille de jeu par joueur

Jouer
Une partie se joue en 4 tours.
À tour de rôle, les joueurs lancent le dé et prennent dans un paquet autant de cartes qu'il y a de points sur le dé.
Attention, il faut prendre les cartes dans le même paquet.
Le joueur conserve les cartes et complète sa feuille de jeu.

Le gagnant est celui qui a le plus grand total de points.

COLLECTIF / ORAL

2 Mise en commun

• À partir de feuilles de jeu d'une même équipe, dont certaines peuvent comporter des erreurs dans l'évaluation du total des points, faire expliciter :

– **les procédés de calcul des points** en les mettant en relation : la valeur de 4 cartes de 1 000 peut être obtenu à l'aide de 4 × 1 000 = 4 000 ou de 1 000 + 1 000 + 1 000 + 1 000 = 4 000, ou encore en considérant que c'est 4 milliers ;

– **les procédés de comparaison des scores**, ce qui peut déboucher sur un rangement de tous les nombres apparus dans la classe : les règles de comparaison déjà énoncées précédemment devraient être mobilisées, en référence à la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres (selon leur position) ;

– **les erreurs :** oubli du fait que la valeur de la carte est prise autant de fois qu'il y a de points sur le dé, erreurs dans les types de calcul ou dans les calculs eux-mêmes, confusion entre nombre de points total sur les 4 dés « gagnés » et valeur des cartes gagnées…

ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

1 Phase de jeu : première partie

• Demander aux élèves de prendre connaissance de la **question 1** et de la **règle du jeu**.

• Faire reformuler la règle en même temps qu'est mis en place un début de partie avec trois élèves qui remplissent chacun leur feuille de jeu, mais sans aller jusqu'au calcul des points (deux tours par exemple), en précisant bien les éléments de la règle :
– si le dé jeté par le joueur marque 4, celui-ci peut prendre 4 cartes d'une même sorte (il doit donc trouver un paquet dans lequel il y a encore 4 cartes, par exemple 4 cartes marquées « 1 000 points ») ;
– il garde les cartes et remplit alors sa feuille de jeu en inscrivant 4 dans la colonne « dé » et « 1 000 » dans la colonne « carte » ;
– à la fin de la partie, il faudra calculer ce que représente toutes les cartes gagnées, soit à l'aide des cartes, soit à l'aide de la feuille de jeu.

• Demander à chaque équipe de jouer une partie complète en n'oubliant pas de remplir la feuille de jeu. Pendant cette phase, n'intervenir que pour aider dans le déroulement du jeu.

Au cours de cette activité, les élèves vont se familiariser avec les écritures chiffrées de nombres supérieurs à 1 000 et être amenés à les comparer. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur leur connaissance des nombres de 3 chiffres, en prolongeant à ces nouveaux nombres.

Dans un premier temps, pour familiariser les élèves avec le jeu, on peut n'utiliser que les cartons 1, 10, 100 et 1 000 pour rester dans un domaine déjà connu des élèves.

COLLECTIF ET ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

3 Synthèse sur les nombres > 1 000

• La synthèse peut prendre la forme d'un tableau de numération proposé par l'enseignant (il est peu probable qu'il soit suggéré par un élève) :

– Écriture

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	**0**	**5**	**2**	**6**

Ce nombre s'écrit **40 526** (l'espace est destiné à repérer plus facilement le rang de chaque chiffre).
Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités.
Il se décompose en 4 × 10 000 + 5 × 100 + 2 × 10 + 6
ou sous forme d'addition du type :
10 000 + 10 000 + 10 000 + 10 000 + 100 + 100 + ...,
ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

– Lecture

40 526 se lit : **quarante mille cinq cent vingt-six.**
Les tranches de 3 chiffres à partir de la droite sont une aide pour la lecture.

– Comparaison

Il faut regarder le nombre de chiffres et, s'il est identique, s'intéresser aux chiffres de plus grande valeur, en partant de la gauche.

• Les élèves sont en particulier invités à consulter leur dico-maths pour y trouver, avec l'aide de l'enseignant, comment s'écrivent, se lisent et se comparent les nombres supérieurs à 1 000.

• À partir de là, de nouvelles parties sont jouées, avec une autre mise en commun (si nécessaire) ou, plutôt, une incitation à s'auto-contrôler dans chaque groupe, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.

Au début, les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + ... (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4 × 10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000.

On laissera se développer ces différentes pratiques et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 63 exercices 2, 3 et 4**

Exercices — DICO-MATHS p. 4 Décomposer les nombres

2 Voici les feuilles de jeu de Tim et Maïa.
Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	dé	carte
1er tour	2	1 000
2e tour	4	10
3e tour	1	10 000
4e tour	6	1

Maïa	dé	carte
1er tour	3	100
2e tour	6	1 000
3e tour	5	1
4e tour	6	10

3 Anaïs a marqué 54 023 points.
Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?

4 Léo a déjà 40 047 points.
Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

UNITÉ 7

Exercice 2 Il est très proche de l'activité rencontrée au cours du jeu. Au moment de la correction, le tableau de numération peut être un support utile à condition de ne pas être systématisé.

Exercice 3 C'est la tâche inverse, il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser.

Exercice 4 Il suffit de remarquer que seul le chiffre des milliers est modifié.

Réponse : Il doit donc gagner 3 cartes « 1 000 ».

Annexe 3 : Extrait du sujet 0 proposé par le ministère en 2006

Cette question prend appui sur les documents proposés en annexe 1 (exercices proposés à des élèves de cycle 3)

a) Les exercices proposés à l'annexe 1 se présentent sous différentes formes et sont de complexité variable, mais ils sollicitent tous une même connaissance mathématique. Laquelle ?

b) Ranger les exercices par ordre de difficulté croissante. Justifier ce choix.

c) Indiquer trois caractéristiques de l'exercice 4 qui justifient l'intérêt de le proposer à des élèves du cycle 3.

<u>Annexe 1</u>

Exercice 1 : • **Observe l'exemple et complète de même.**

8 621 : 2 est le chiffre des dizaines,
862 est le nombre de dizaines.

7 214 : …… est le chiffre des centaines,
…… est le nombre de centaines.

5 068 : …… est le chiffre des unités,
…… est le nombre d'unités.

8 621 : …… est le chiffre des dizaines,
…… est le nombre de dizaines.

Exercice 2 : • **Retrouve les chiffres masqués.**

3 ■ 8 : le chiffre des dizaines est plus grand que celui des unités.

■ 2 5 : il y a 32 dizaines dans ce nombre.

■ 3 ■ : le chiffre des unités est double de celui des dizaines ;
le chiffre des centaines est égal à la somme des deux autres chiffres.

■ ■ ■ : il y a 23 dizaines dans ce nombre ;
le chiffre des unités est égal à la somme des deux autres chiffres.

Exercice 3 : • Mon nombre de milliers est 572. Mon chiffre des centaines est le même que celui des dizaines de mille et mon chiffre des dizaines est le même que celui des milliers. Mon chiffre des unités est égal au chiffre des centaines de mille plus 1.

Je suis ______

• Mon nombre de milliers est 86. Si on m'ajoute 1, mon chiffre des milliers augmente de 1.

Je suis ______

• Je suis un nombre compris entre un millier et un million.
Mon nombre de chiffres est impair et je suis écrit avec les chiffres 4 et 9.
Si l'on m'ajoute 1, tous mes chiffres changent.

Je suis ______

Exercice 4 : Voici des nombres :

50 267	6 074	20 681	48 607
40 596	1 740 325	740 634	
40 000	320 978	206 000	740 000
520 630	7 206 158	697	20600

Recopie les nombres qui ont :

- 6 pour chiffre des centaines : ______
- 206 pour nombre de centaines : ______
- 0 pour chiffre des milliers : ______
- 40 pour nombre de milliers : ______
- 740 pour nombre de milliers : ______

Annexe 4 : éléments relatifs au sujet du CERPE dans l'Académie d'Aix-Marseille en 2000

Extrait du sujet

Dans cet exercice, vous trouverez en annexe les productions de 9 élèves de CE2[6], en réponse au problème suivant proposé avant tout travail sur la division.

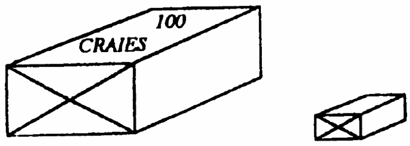
Un fabricant vend des craies par étuis de 10 et par boîtes de 100. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons.

Calcule combien d'étuis et combien de boîtes il doit préparer pour chaque client.

- M. Aubin: 800 craies - M. Créon: 254 craies

- M. Elias: 78 craies - M. Béal: 430 craies

- M. Durand: 60 craies - M. Fustie : 305 craies



1) Quelle compétence, en termes de connaissance des nombres, est mise en jeu ?

2) Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée, tout en faisant très brièvement les remarques importantes sur chaque production.

3) Six enfants ont trouvé la bonne réponse. Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte, en montrant brièvement l'évolution de chaque procédé par rapport au précédent.

<table>
<tr>
<td>M Aubin 8 boites
M Elias 7 étuis et 1 étui =
M Durand 6 étuis
M Créon 2 boites et 6 étuis
M Béal 4 boites et 3 étuis
M Fustier 3 boites et 1 étuis
Mickaël</td>
<td>Alice
c d u
8 0 0 — 8 boites
7 8 — 8 étuis
6 0 — 6 étuis
2 5 4 — 2 boites et 6 étuis
4 3 0 — 4 boites et 3 étuis
3 0 5 — 3 boites et 1 étui</td>
</tr>
<tr>
<td>Isabelle
Mr Aubin 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 8 boites
Mr Elia 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8 8 étuis
Mr Durand 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 6 étuis
Mr Crian 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 2 boites et 6 étuis
Mr Béal 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 4 boites et 3 étuis
Mr Eustier 100 + 100 + 100 + 5 3 boites et 1 étuis</td>
<td>8 × 100 = 800 8 boites
7 × 100 = 70 + 8 8 étuis
6 × 10~~0~~ = 60 6 étuis
2 × 100 = 200 + 5 × 10 = 250 + 4 12 boites et 5 étuis et 1 étui
4 × 100 = 400 + 3 × 10 4 boites et 3 étuis
3 × 100 = 300 + 5 3 boites et 1 étui
Claire</td>
</tr>
</table>

---

[6] Nous avons uniquement reproduit (et dans un ordre différent pour des questions de mise en page) les 6 productions qui sont utiles pour la troisième question. Comme on le voit dans l'extrait du corrigé, elles sont représentatives des procédures utilisées qui font l'objet de la deuxième question.

mr Aulin 800=8 boites mr Elias 78=7 étuis et 8 craies danc 8 étuis mr Durand 60=6 étuis mr Créan =254=2 boites 5 étuis et 4 crais danc 2 boites et 0 étuis mr Béal = 430=4 boites et 3étuis mr Fustier 305 =3 boites et ~~8~~ 1 étuis. odile	Mr Aubin 800 = 8c 8 boites Mr Elias 78 = 7d 8u 7 étuis et 1 étui = 8 Mr Durand 60 = 6d 6 étuis Mr Créon 254 = 2c 5d 4u 2 boites 5 étuis et 1 étui Mr Béal 430 = 4c et 3d 4 boites et 3 ~~dizaines~~ étuis. Mr Fustier 305 = 3c et 5u 3 boites et 1 étui Alain

Extraits du corrigé proposé par la COPIRELEM (pp.138–140)

2) Classement des productions en fonction des procédures :

Catégorie n°1 : **Les élèves qui utilisent une schématisation : Benoît et Mickaël.**

Ces deux élèves utilisent une représentation figurative liée au matériel de numération; ils représentent ainsi une décomposition canonique additive (suivant les puissances de dix) des nombres :

| représente 1; ▯ représente 10 et ☐ représente 100.

On peut penser que ces décompositions ont été obtenues par comptage sur les puissances de 10.

Catégorie n°2 : **Les élèves qui utilisent des décompositions additives ou "hybrides"** (faisant intervenir l'addition et la multiplication) **suivant les puissances de 10.**

Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de la valeur positionnelle des chiffres; mais nous faisons ici l'hypothèse que les élèves de cette catégorie ont retrouvé ces décompositions par calcul ou comptage de 100 en 100, puis de 10 en 10 avec ajout final des unités quand elles existent.

On peut distinguer deux sous-catégories :

- Isabelle, Élise et Charles qui produisent des décompositions additives des nombres (additions réitérées de 100 puis de 10);
- Claire qui produit une décomposition hybride faisant intervenir l'addition et la multiplication.

Catégorie n°3 : **Les élèves qui utilisent directement la valeur positionnelle des chiffres : Alice, Alain et Odile.**

On peut éventuellement distinguer Odile d'Alain et d'Alice qui explicitent la décomposition en centaines , dizaines et unités.

(…)

3) Rangement des productions de la plus élémentaire à la plus experte :

Pour effectuer ce rangement on peut prendre pour critères **le degré d'abstraction** (de conceptualisation) et **le principe d'économie** (écritures plus courtes, gain de temps,…) :

• Mickaël : schématisation par juxtaposition de symboles qui évoquent le matériel de numération.

• Isabelle : les symboles sont remplacés par les écritures chiffrées 100 et 10; le signe + remplace la juxtaposition;

• Claire : les sommes réitérées sont remplacées par des écritures multiplicatives (écritures plus économiques).

• Alice : elle explicite la valeur positionnelle des chiffres dans un tableau; il n'y a plus comptage ou calcul pour trouver la décomposition.

• Alain : il procède de la même façon mais sans tableau.

• Odile : elle conclut sans s'aider d'écritures du type c/d/u.

Il faut relativiser le jugement porté ci-dessus sur le caractère plus ou moins expert des productions :

• la schématisation utilisée par Mickaël est très élaborée et il est difficile de se prononcer quant à l'économie entre les productions de Mickaël et Isabelle.

• les procédures d'Alain, Alice et Odile sont assez voisines; elles ne diffèrent que par les explications et justifications apportées à la technique mise en oeuvre.

• les deux groupes à distinguer en vue d'une exploitation pédagogique de cette analyse sont le groupe de Mickaël, Isabelle et Claire et celui d'Alain, Alice et Odile : ces derniers extraient l'information contenue dans l'écriture des nombres ; les autres la retrouvent par comptage et/ou calcul.

Des réponses qui seraient :

1- Mickaël 2- Isabelle 3- Claire 4- Odile 5- Alain 6- Alice	1-Mickaël 2-Isabelle 3-Claire 4-Odile, Alain, Alice sur le même plan

sont tout à fait acceptables.

Annexe 5 : Tâche proposée en formation : « Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour… ? »

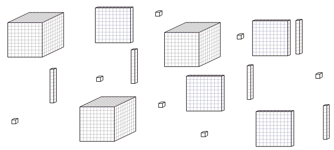
Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 c'est 3 milliers 4 centaines et 6 unités

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 7

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

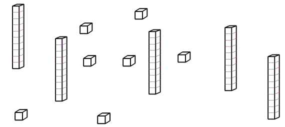
- il y a 3457 cubes sur la feuille



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 8

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- il y a 57 cubes sur la feuille
- (il y a cinquante sept cubes sur la feuille)



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 9

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- trois mille quatre cent cinquante six s'écrit 3456

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 10

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 m c'est 3 km 4 hm 6 m

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 11

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- qu'est-ce que mille ?
- qu'est-ce que 1000 ?
- qu'est-ce qu'un millier ?
- qu'est-ce qu'un million ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 12

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- Pourquoi 1000 est-il plus grand que 900 ?
- Pourquoi 56*10=560 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 13

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- compter
  - de cent en cent à partir de 3850 ?
  - de un en un à partir de 48 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 14

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- la retenue :

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ 2371 \\ +\ \ 456 \\ \hline 2827 \end{array}$$

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 15

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- le « nombre de centaines » de 8543 est 85

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 16

La numération en unités pour les différentes explications

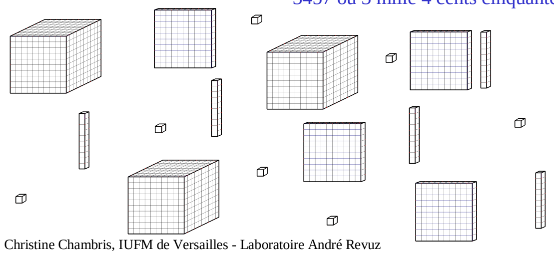
Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

C : « on compte par centaines, comme on compte par unités »

3 milliers 4 centaines 5 dizaines 7 unités

P : « le chiffre des milliers occupe la 4e position… » ou O : « 4 milliers se dit quatre mille ».

3457 ou 3 mille 4 cents cinquante sept



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 25

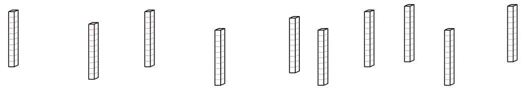
La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

- Combien y a-t-il de dizaines de cubes ? (C)

  Combien y a-t-il de centaines de cubes ?* (R1)

R1 : « Dix dizaines font une centaine »



*Quel est le nombre de centaines de cubes ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 22

La numération en unités pour les différentes explications

La possibilité d'expliquer la suite des nombres, les retenues, etc. avec des mots…

À partir de 3 milliers 8 centaines 5 dizaines, compter de centaine en centaine :

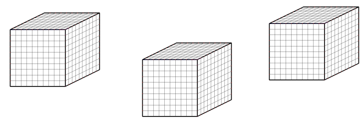
- 3m 8c 5d et 1 centaine — On compte par centaines… C
- 3m 9c 5d

- 3m 9c 5d et 1 centaine — On compte par centaines… C
- 3m 10c 5d — Dix centaines font un millier. R
- 3m 1m 5d — On compte par milliers… C
- 4m 5d

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 26

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »



- Combien y a-t-il de milliers ? (C)

  de centaines ? (R2) R2 : « Dix centaines font un millier »

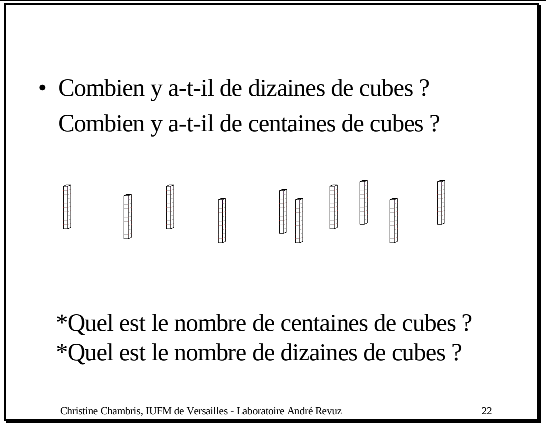
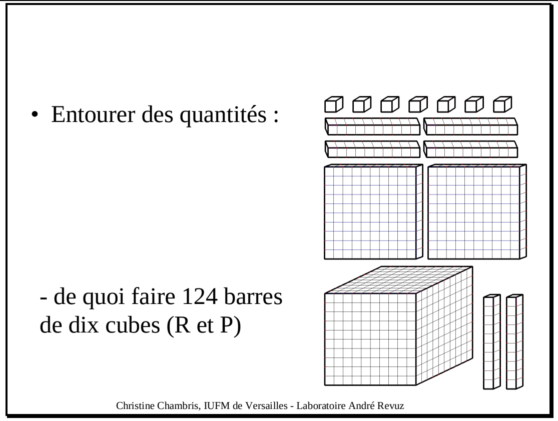
- Combien y a-t-il de dizaines ? (C puis R2 puis R1) ou (C puis R')

R1 : « Dix dizaines font une centaine »

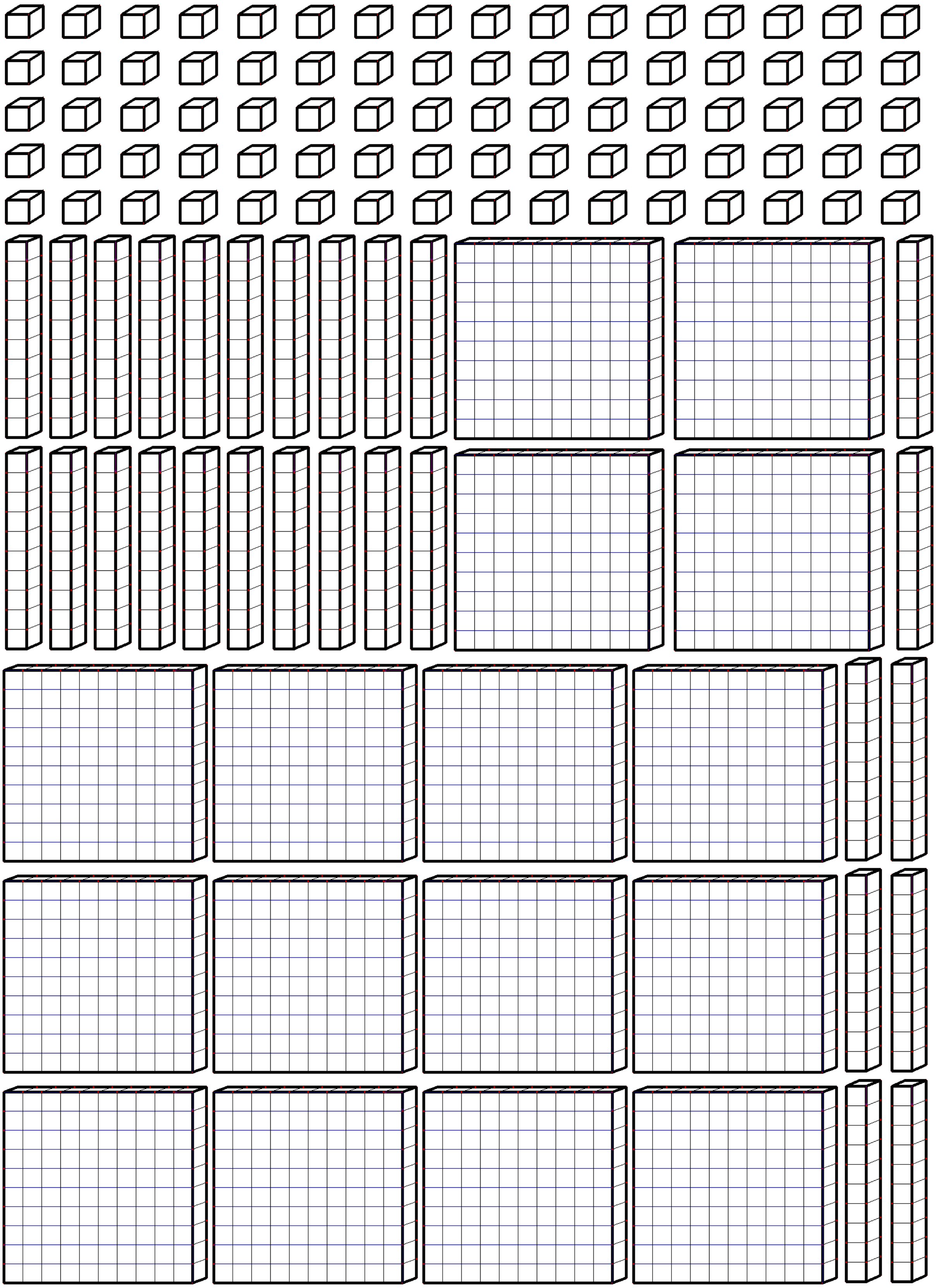
ou R' : « Cent dizaines font un millier »

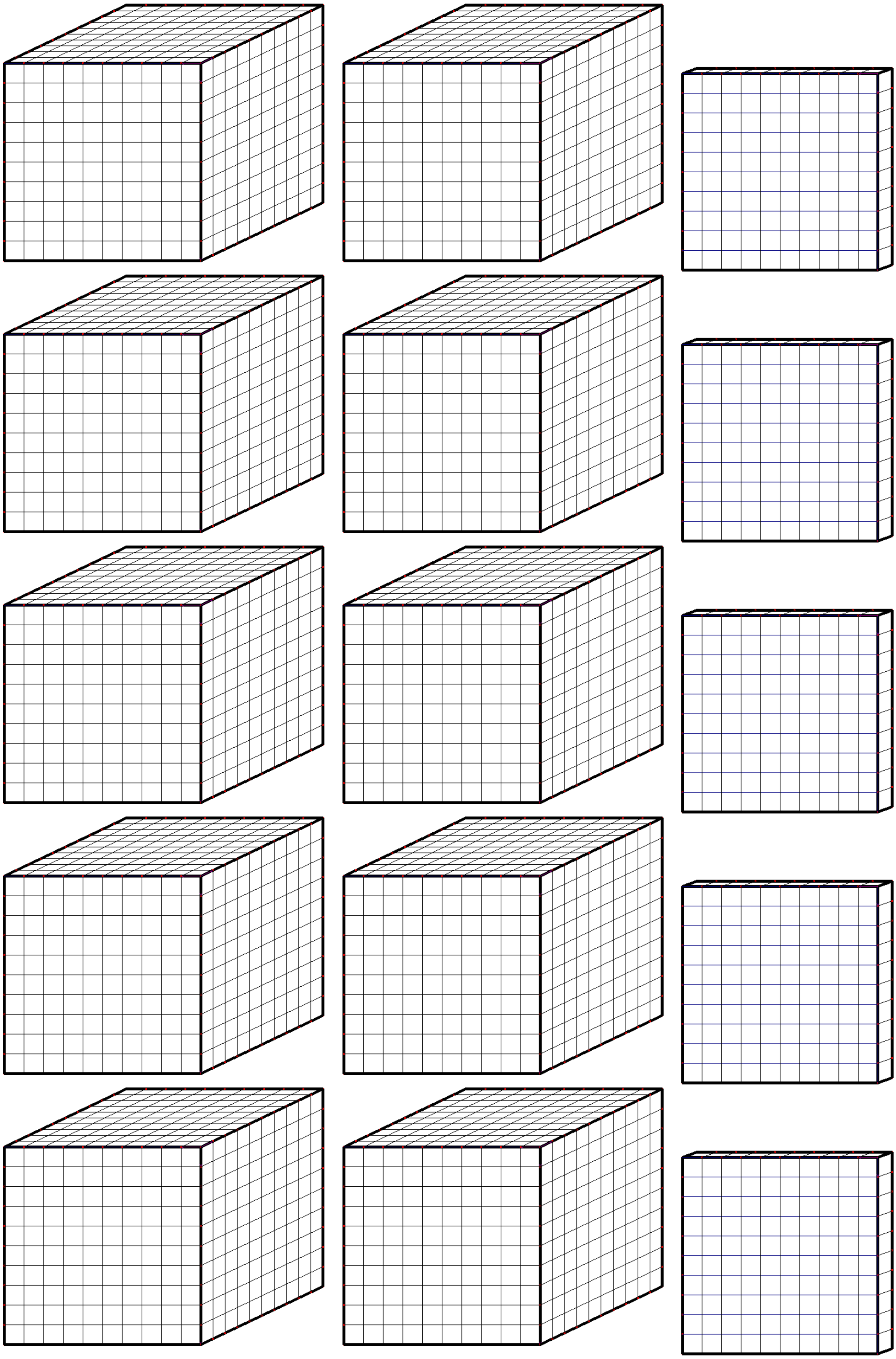
Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 23

Annexe 6 : Tâche proposée en formation : quelques conversions…

<table>
<tr>
<td>Entourer 41 dizaines de cubes.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?</td>
<td>Combien y a-t-il de centaines dans 4 milliers ?</td>
<td>Combien y a-t-il de dizaines dans 1 millier ?</td>
</tr>
<tr>
<td>Combien 56 centaines font-elles de dizaines ?</td>
<td>Combien y a-t-il de dizaines dans 4532 ?</td>
<td>Combien y a-t-il de milliers dans un million ?</td>
</tr>
</table>

Annexe 7
Support utilisé en formation (imprimer les deux feuilles A4 en réduction sur un format A4)





Atelier A3

L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE : ANALYSE D'UNE PROGRESSION CENTRÉE SUR LES PROBLÈMES SPATIO-GÉOMÉTRIQUES ET LEURS REPRÉSENTATIONS

Isabelle Bloch
IUFM d'Aquitaine
isabelle.bloch@aquitaine.iufm.fr

Charlotte Osel
Laboratoire DAESL
cosel@hotmail.fr

Résumé :
Dans une première partie, nous avons exposé notre cadre théorique de recherche afin de présenter aux participants nos questionnements. En effet, de nombreux travaux ont interrogé le domaine géométrique ou le passage du spatio-graphique au géométrique mais peu ont envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Dès lors, l'objet de l'atelier était de sensibiliser les participants aux enjeux de la constitution de ces références. A cette fin, nous avons présenté un début de progression expérimentée dans une classe de CM1. Les participants à l'atelier ont ensuite eu à travailler sur des enchaînements de situations, dans lesquels ils ont dû mettre en évidence le rôle des représentations (schémas relatifs aux différentes situations sur l'alignement, le cercle,…) et leur progression possible.

1 MODALITÉS DE FONCTIONNEMENT DE L'ATELIER

Nous nous sommes appuyées sur des situations expérimentées en classe de CM1 : ces situations étaient reprises de celles décrites par M. Artigue et J. Robinet (Artigue et Robinet, 1982), G. Combier et A. Pressiat (Combier et Pressiat, 2003), I. Bloch et M-H. Salin (Bloch et Salin, 2004) et M-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin, 1992). Les participants ont eu à effectuer une analyse *a priori* des situations et à envisager les modalités de leur mise en place avec des élèves de cycle 3, afin de définir ce que pouvait être un répertoire de représentations et de préciser son fonctionnement.
Tout au long du déroulement de l'atelier, nous avons exposé des exemples de comportements observés dans les classes afin de dégager les différentes stratégies adoptées par les élèves dans la résolution des problèmes des situations expérimentées. De plus, la présentation de séquences vidéo a permis de montrer aux participants les liens qui existent entre les différentes situations de la progression. Ainsi, nous avons pu envisager un questionnement sur le rôle des représentations dans l'enseignement de la géométrie et leur progression possible.

2 INTRODUCTION

L'objet de cet atelier est de s'interroger sur les difficultés liées à la géométrie et à la structuration de l'espace dans l'enseignement primaire. Nous partons de constats institutionnels : à l'école primaire, l'enseignement de la géométrie est un problème reconnu comme difficile. Les stratégies d'évitement des professeurs en témoignent : la géométrie reste en effet souvent comme mission pour les décharges de direction ou les stagiaires, voire complètement délaissée par les enseignants. En témoigne aussi la non-stabilisation des activités proposées par les manuels, activités qui vont du plus évident au inutilement complexe. Le statut des validations en géométrie au primaire est également flou, ce qui conduit à une fluctuation importante dans le niveau d'expertise demandé.

De plus, les programmes insistent sur l'amélioration de la vision de l'espace (repérage, orientation), sur la familiarisation avec quelques figures planes et quelques solides ; il s'agirait aussi du passage progressif d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Au cycle III, les connaissances géométriques sont supposées s'articuler autour des quatre activités : reconnaître, décrire, construire, nommer et reproduire, qui sont présentées dans les Instructions Officielles du deuxième palier pour la maîtrise du socle commun comme des outils pour les apprentissages géométriques (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008).

Ces constats nous ont amenées à nous interroger dans un premier temps sur la problématique d'enseigner la géométrie et la « structuration de l'espace ». Nous avons cherché des travaux de didactique concernant l'enseignement de la géométrie et de l'espace à l'école primaire et au collège. Les recherches des vingt dernières années ont connu plusieurs étapes, avec une focalisation plus récente et plus réduite sur les spécificités de ce domaine à l'école primaire. En effet, la majorité des recherches sur l'enseignement de la géométrie concernent le collège, les figures, la démonstration en géométrie, les logiciels de géométrie dynamique, les difficultés des élèves avec le passage à la géométrie « théorique ». Ces travaux ont interrogé le domaine spatial et géométrique. Ainsi S. Gobert (Gobert, 2007) s'est interrogée sur le passage du *spatio-graphique* au géométrique : elle a étudié les conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, en tentant de dégager des conditions de lecture des dessins utilisés et de formulation des énoncés de problèmes. Elle a ainsi défini ce qu'est le contexte spatio-graphique pour la construction de problèmes de géométrie : c'est l'environnement des dessins, figures… qui permettent de se représenter le problème et de le traiter. Ceci permet de distinguer entre information géométriquement signifiante et propriété géométrique dans une représentation. Dès lors, « les connaissances fondamentales de l'usage des dessins et les différents contrats de lecture peuvent être explicités » (Gobert, 2007, p 55).

Par ailleurs, Offre, Perrin & Verbaere (2007) ont travaillé sur l'usage des instruments, lequel est une condition, au niveau du primaire et du début du secondaire, de la construction de figures permettant ultérieurement la conjecture de propriétés géométriques.

Cependant, à notre connaissance, il n'a été que peu envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Peu de recherches incluent le questionnement suivant : comment se constituent les références spatiales ? Ceci nous a amenées à nous demander ce que pouvait être une « bonne situation de constitution de ces références spatiales ». Que doit-elle prendre en compte ? Nous nous interrogeons aussi sur ce qui peut résulter des modes d'enseignement de la géométrie lorsque les élèves abordent le collège. Est-ce que le problème de la constitution des références spatiales est résolu lorsque le lien doit être fait avec la géométrie plus théorique ?

Tenter d'éclaircir les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie et de la structuration de l'espace nous a conduit à examiner les questions suivantes :

- A l'école, des objectifs liés à la maîtrise des relations spatiales sont-ils formulés explicitement d'un point de vue institutionnel ?
- Comment pourrait-on formuler ces objectifs, et quelles situations permettraient de les mettre en œuvre ?
- Comment peut-on organiser la découverte de l'espace, l'usage des instruments, et les « énoncés géométriques » pour qu'une progression soit préservée ? En effet, nous avons le sentiment que souvent l'enseignement propose des activités « décousues » et non liées les unes aux autres. Donc nous nous posons également la question du ou des liens dans l'activité et entre les activités ; nous entendons donc proposer des progressions, et les analyser.

- Comment faire en sorte que les élèves puissent considérer les dessins et les représentations plus ou moins symboliques comme des outils du *répertoire de représentation* (Gibel, 2009 ; voir I.5.) qui répondent à des situations (géométriques ou non) ?
- Comment organiser les ruptures nécessaires afin qu'elles soient négociées par l'enseignant et ne soient pas laissées à la seule charge des élèves ?
Dès lors, il s'agit de s'interroger sur la constitution progressive de la géométrie comme outil de maîtrise des relations spatiales, et sur le passage de l'expérience spatiale au fait de pouvoir penser et représenter cette expérience dans un cadre et avec des outils géométriques.

2.1 Les cadres théoriques : la théorie de la schématisation de Gonseth et la théorie des situations didactiques

Dans notre recherche, nous utilisons de manière conjuguée la théorie des situations didactiques et la théorie de la schématisation, respectivement d'un point de vue global pour l'élaboration d'ingénierie et pour l'analyse de situations, et d'un point de vue local pour l'analyse des représentations et de la schématisation.

2.1.1 Quelques définitions selon Gonseth

En ce qui concerne la constitution de la géométrie, de nombreux travaux de recherche portant sur l'évolution des rapports entre géométrie et réalité font référence aux textes de F. Gonseth (Gonseth, 1945-1955). Gonseth étudie la constitution de la géométrie à partir de la réalité et non son enseignement. Il considère que la géométrie « peut être référée à l'espace réel, dans une dimension intuitive ; ou à ce même espace, dans une perspective expérimentale ; ou à une théorie de ces relations, dans un système théorique géométrique » (Gonseth, 1949). Pour Gonseth, l'intuition est la forme *a priori* de la connaissance de l'espace (qui fonctionne sur le mode de l'évidence, dit Gonseth) ; l'expérience s'appuie sur la perception et l'usage des instruments, et le pôle théorique formalise les relations entre les objets.
Selon Gonseth, ces trois aspects de la géométrie (aspects théorique, expérimental et intuitif) ne se disjoignent pas d'eux-mêmes. Ils ne sont pas hiérarchisés car ils fonctionnent en inter-relation, quoique sur des modes différents. L'évidence issue de l'intuition, les renseignements donnés par l'expérimentation, et la déduction issue d'un raisonnement dans un cadre théorique interagissent dans une dialectique[1]. Gonseth ne hiérarchise pas l'intuitif, l'expérimental et le théorique dans la connaissance : ils sont affectés des mêmes valeurs de vérité, mais pas dans le même horizon de réalité (voir ci-dessous).
Le passage de l'intuitif à l'expérimental et au théorique ne peut toutefois s'expliquer que par la médiation de ce que Gonseth appelle un schéma. Selon lui, (Gonseth, 1955, Tome 4), « le travail sur le réel spatial est rendu possible par l'intermédiaire de la schématisation » : un schéma est lui-même « constitué de correspondances symboliques conservant certaines des caractéristiques réelles des objets ».

2.1.2 Les cinq propriétés du schéma

Gonseth tente de cerner la notion de schéma au travers de « la fable de la boule dans la forêt » (voir ci-dessous) et en dégage cinq propriétés :
- certains signes du schéma correspondent à des objets concrets ;
- ces symboles peuvent être eux-mêmes des objets concrets, plus faciles à manipuler ;
- des relations entre les symboles (existantes, ou décidées) répondent à des relations à désigner, distinguer entre les objets réels (pensée et signe étant indissociables) ;
- certaines opérations sont exécutables sur le schéma en tenant compte de sa nature propre (schéma verbal, ou dessin) et sont en correspondance avec certaines opérations réalisables dans la réalité ;
- le schéma est révisable.

[1] Pour un résumé moins succinct des théories de Gonseth, on peut consulter Bloch & Pressiat, 2009

2.1.3 Le schéma et la connaissance

Pour Gonseth, le schéma représente la réalité, certes partiellement et de façon codifiée, mais il vaut pour ce qu'il est : il est authentique et n'est ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure, il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. On peut rapprocher cette déclaration de celle du sémioticien C-S. Peirce qui dit que le signe n'est pas la marque de ce que l'on connaît mais l'action par laquelle on connaît (Peirce, in Tiercelin 1993).
Le schéma est déterminé par ses constituants propres : sa signification extérieure n'est pas une réalité en soi mais un *horizon de réalité*, c'est-à-dire qu'il a vocation à être interprété dans un système déterminé (intuition, expérience, ou géométrie). Il n'est pas à prendre pour lui-même mais pour la signification qu'il porte ; l'existence même du schéma réorganise la vision de la réalité. La signification du schéma est donc extérieure à ce même schéma et définit un travail possible sur le réel, c'est cela que Gonseth appelle un horizon de réalité. Cet horizon de réalité est porteur de connaissances que ne possédait pas la situation première ; le schéma définit par là même un horizon de connaissances.
Ces considérations peuvent déjà nous interroger sur la nécessité où serait l'enseignement de l'espace et de la géométrie d'organiser cette étape de pensée. Cette phase de constitution et d'interprétation d'un schéma n'est pas travaillée du tout à l'école ou au collège où, par exemple, on fournit souvent directement aux élèves une figure déjà bien tracée. De plus, nous ne considérons pas que le schéma ait une composante géométrique prédéterminée. Il permet de travailler non sur le problème physique mais sur un premier horizon de réalité qu'il importe de définir et de connaître. Ce passage du problème physique à un schéma qui le représente est exemplifié par Gonseth par la « fable de la boule dans la forêt » où une boule se trouve au milieu d'une forêt irrégulièrement plantée d'arbres nombreux et plus ou moins serrés. La tâche donnée est de rouler la boule jusqu'à la lisière de la clairière où se trouve la forêt (Gonseth, 1945-1955, p 271).
Un exemple de ce type de travail, transposé dans une classe, est le problème de « la chèvre et du poteau », problème donné en classe de 5ème :

> « On considère un bâtiment rectangulaire, une chèvre est attachée à un point d'un côté. Suivant la longueur L de la corde, quelle surface peut-elle brouter ? »

L'objectif est d'introduire la surface du disque. Si L est inférieur à la distance du point d'attache au coin le plus proche, la solution est un demi-disque ; sinon, il faut ajouter un quart de disque… ou plus. Les élèves ont le matériel (carton, punaises, ficelle) et expérimentent avant de pouvoir calculer. La situation doit conduire à identifier les éléments pertinents dans le schéma de la surface d'une fraction de disque : son rayon, la valeur de la fraction, un moyen calculatoire de mettre ces deux caractéristiques en relation.
Un schéma n'est pas forcément une *figure* : c'est l'horizon de réalité choisi qui détermine son rapport plus ou moins proche avec le cadre géométrique. Dans Bloch & Pressiat (2009), on trouve des exemples de schémas spontanés produits en classe par des élèves suivant un horizon dynamique ou artistique, lesquels schémas ne peuvent être replacés dans une perspective – un horizon – géométrique. C'est le milieu de la situation qui permettra, ou non, d'inscrire le travail des élèves dans un horizon géométrique où l'on s'acheminera vers l'idée de figure.

2.1.4 La structuration du milieu dans la Théorie des Situations Didactiques

Nous souhaitons construire une progression de situations permettant d'élargir les connaissances des élèves. Rappelons que Berthelot et Salin (1992) ont mis en évidence l'intérêt du méso-espace pour la construction et l'utilisation de connaissances géométriques. Au départ, ils ont précisé ce qui différencie les différentes 'tailles' de l'espace : le micro espace étant constitué de la feuille de papier et des objets manipulables, le macro espace des espaces extérieurs où l'on ne peut pas agir par recoupement de points de vue (ville, campagne…), le méso espace correspond à l'école, la cour de récréation… tout espace où l'on peut manipuler des outils de dimension raisonnable, comme un décamètre. Le méso espace est celui qui permet la mise en œuvre d'une démarche de *modélisation,* c'est-à-dire d'application de connaissances géométriques à l'espace à des fins d'anticipation (cf. Berthelot et Salin, 1993-1994 ; Bloch et Salin, 2004).
Nous faisons l'hypothèse qu'une étape de constitution des références spatiales est nécessaire à l'entrée dans des situations de modélisation dans le méso-espace. Cette première étape serait celle de la constitution du milieu objectif (milieu de recherche), niveau du schéma de la structuration du milieu tel

qu'initié par Brousseau, complété par Margolinas (Margolinas, 1994) et modifié par Bloch (Bloch, 2002). En effet, les observations de situations de classe en géométrie, en cycle3 de l'école primaire, montrent le manque fréquent de ce milieu objectif. Son absence empêche les élèves de puiser dans une réserve d'expériences pour anticiper les figures attendues et donc de pouvoir argumenter sur les solutions géométriques attendues (Osel, 2007). Dans notre analyse, les schématisations peuvent tenir lieu d'éléments constitutifs d'un milieu objectif.
Rappelons que dans la structuration du milieu, le milieu objectif a une dimension heuristique – c'est un milieu d'essais/erreurs - ; le milieu de référence est celui où l'on valide les productions de l'étape précédente (mise en commun) ; enfin le niveau didactique correspond à un milieu d'enseignement, celui où l'on institutionnalise les connaissances et savoirs élaborés. Ceci se résume dans le schéma suivant :

M0 : **M- d'apprentissage :** **institutionnalisation**	**E0 :** **Elève**	**P0 : Professeur enseignant**
M-1 : M-de référence : **formulation validation**	E-1 : E- apprenant	P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures
M-2 : M-objectif : **action**	E-2 : E-agissant	P -2 P-observateur, dévolueur
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif	

Le milieu matériel est celui qui est préparé par le professeur, mais il n'acquiert de signification pour l'élève que dans la phase d'action, lorsque ce dernier peut tester des procédures. Un milieu matériel est toujours constitué d'objets (matériels ou déjà symboliques, cela dépend du niveau d'enseignement où opère la situation) familiers aux élèves, de façon à ce que ceux-ci puissent s'en saisir et engager des actions.

2.2 Expérimentation d'une progression

Nous proposons donc des situations pour introduire l'étape de schématisation, en examinant avec quels moyens et pour quels bénéfices. Dès lors, nous nous demandons :
- Comment élaborer des ingénieries telles que les schémas apparaissent comme des outils en réponse aux situations proposées ?
- Comment travailler les situations de schématisation avec les élèves ? Et quelles schématisations ?

2.2.1 La place de la schématisation par rapport aux recherches existantes

Les travaux de recherche récents traitent de la constitution de la géométrie (GI, GII, GIII) (Houdement & Kuzniak, 2006), mais ne se sont pas focalisés sur cette étape de schématisation. Par ailleurs, Berthelot et Salin (1992) et Gobert (2001) ont évoqué la schématisation, notamment dans la description du milieu des situations méso spatiales, mais ne l'ont pas étudiée pour elle-même. Le manuel ERMEL de géométrie pour le Cycle 3 passe d'ailleurs très vite sur les représentations spontanées des élèves (si même il les évoque) et insiste bien sur les *figures géométriques* à obtenir dans la résolution des problèmes, et ceci, même s'il propose nombre de situations extrêmement riches du point de vue spatial. Une des raisons en est, à notre avis, la difficulté de gérer en classe des situations dont le professeur verrait mal l'issue en termes de savoir.
Notre hypothèse est que cette étape de schématisation est escamotée dans l'enseignement. Elle semble nécessaire dans les prémisses de l'enseignement et elle participe de la constitution d'un milieu objectif spatial et donc du répertoire de représentation des objets géométriques (répertoire que nous définissons ci-dessous). Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence (milieu de validation). Par ailleurs, nous faisons une constatation simple : il est difficile, pour des élèves, de

décrypter des schémas et des figures alors qu'ils n'ont jamais été amenés à en faire eux-mêmes, ou alors des figures directement géométriques imposées. Nous pouvons nous référer à ce sujet au texte de Bloch et Pressiat (2009) avec des exemples de schématisations « inattendues » dans la situation de la porte qui se ferme.

2.2.2 Définition du répertoire de représentation

Un répertoire de représentation est, par définition, un ensemble de *moyens* connus ou donnés pour effectuer la tâche prévue dans la situation. Il sera constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y mettons également les outils et leur usage ; on peut y mettre également les éléments langagiers permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.
Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation :

- la composante liée au répertoire antérieur (les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures) ;
- la composante liée au nouveau répertoire de la situation.

Une question ouverte qui nous intéresse au plus haut point est de nous demander quel est le *système générateur* du répertoire de la situation proposée, lequel va permettre de construire de nouvelles représentations à partir des éléments de représentation déjà connus (Gibel, 2009).
L'élaboration du répertoire constitue à terme une base pour la géométrie visée. Son évolution est ce qui va permettre, au final, de passer des schémas à des propriétés et à des raisonnements géométriques. Les schémas seront décryptés en classe, analysés du point de vue de la réponse au problème posé ; un schéma générique adapté pourra alors être proposé. Ceci constitue une étape cruciale vers un travail géométrique.
Donc, si l'on résume drastiquement les questions auxquelles nous cherchons à apporter une réponse :
- Comment élaborer une progression prenant en considération les connaissances spatiales (antérieures et nouvellement construites), dont les objets soient apparents pour les professeurs et donc rendent tenable le contrat didactique ?
- Comment effectuer ensuite la transition vers un milieu de référence débouchant sur des savoirs théoriques ?

2.2.3 Mise en place d'une progression

Deux raisons essentielles nous ont amenées à choisir cette progression :
- ces situations sont relativement faciles à mettre en œuvre et permettent de travailler dans le micro et le méso espace ;
- les notions de distance, de cercle, s'y imbriquent de façon satisfaisante, donc ces situations permettent aux élèves de créer des liens entre la « technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et la méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges.
Ajoutons que les situations proposées dans les manuels sur le cercle ne sont pas toujours très convaincantes : elles utilisent le compas de façon exclusive et prématurée à notre sens.
Nos situations permettent également de manipuler des outils (ficelles, bandelettes de longueur donnée, règles, compas) et de verbaliser ou d'envoyer des messages.

Nous avons repris des situations déjà expérimentées (voir fiches descriptives des situations en annexe) :
- ***La situation du cercle (cf. Artigue et Robinet, 1982 ; Combier et Pressiat, 2003) :*** La situation a été donnée en CM1 (9 ans) : « tracer le plus de points à une distance donnée d'un point tracé : a) sur une feuille de papier ; b) au sol dans la cour ».
Il faut remarquer que pour un mathématicien raisonnablement « expert » la consigne donnée dans la situation du cercle est déjà une définition du cercle ; mais ceci ne paraît pas comme un savoir ou une connaissance chez tous les élèves et, on constate qu'ils cherchent tous pour résoudre le problème posé. De plus, cette situation n'est pas mise en place pour donner une définition canonique du cercle mais pour permettre aux élèves de se créer leur répertoire de représentation au sujet des « points à même

distance », d'effectuer des liens entre les situations, et afin de leur proposer un type de raisonnement sur l'objet trouvé en fonction d'une consigne qu'ils ne décodent pas de façon évidente, via la situation.
- ***La situation du triangle (cf. Berthelot et Salin, 1992) :*** « Former un triangle par assemblage de trois segments de longueurs données sur une feuille de papier avec validation au tableau ».
Cette situation permet d'interroger la pertinence des situations micro/méso espaces. Dans un premier temps, le changement d'espace permet aux élèves de se constituer des représentations différentes en fonction de l'espace dans lequel ils travaillent. En ce qui concerne la situation sur les triangles, le passage au tableau incluant une validation avec les baguettes en bois permet l'émergence d'une autre stratégie de résolution en lien avec la situation des cercles. Un autre type de méso espace avait été choisi mais n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier. La situation des triangles avait été prévue dans la cour afin de créer d'autres liens avec la situation des cercles en utilisant des cordes à la place des baguettes de bois.
- ***Les situations des losanges (cf. Berthelot et Salin, 1992) (non présentée à l'atelier)****:* Dans une première séance, il s'agit d'« envoyer un message écrit (sans dessin ni figure) à l'autre groupe de son équipe contenant tous les renseignements nécessaires pour que celui-ci puisse réaliser la figure sans la voir. La figure doit être superposable à la figure initiale ». Dans une seconde séance, il est procédé à une analyse détaillée des messages.
Cette progression permet aux les élèves :
1) d'expérimenter des tracés du cercle, avec ficelle puis éventuellement avec compas, et de relier les deux conceptions (points à même distance du centre, 'rond' tracé au compas) ;
2) de réinvestir les problèmes de distance dans la situation des triangles ; éventuellement de faire le lien avec le cercle/le compas ;
3) d'analyser une figure plus complexe (losange) et de la référer aux triangles déjà vus.

2.3 Constitution du répertoire de représentation

Dans la constitution du milieu de la situation expérimentée, la schématisation a pris des formes variées, plus ou moins exploitables directement dans une perspective géométrique.
Dans un premier temps, nous exposons les différentes stratégies adoptées par les élèves dans les situations du cercle et du triangle. Ensuite, nous montrons les liens créés par les élèves via les situations tout au long de la progression, afin de déterminer ce qui peut constituer un répertoire de représentation.

2.3.1 Les stratégies des élèves et la constitution du répertoire de représentation

La situation du cercle
Dans le *micro-espace*, trois stratégies ont été recensées :
- Tracé au compas, puis marquage des points sur le cercle tracé au compas. Vérification de la distance avec la bandelette du centre aux points tracés sur le cercle point par point.
- Tracé avec la bandelette en partant du centre.
- Tracé d'un segment parallèle au segment donné et tracé d'un maximum de points sur le segment parallèle tracé avec la bandelette.

Dans le *méso-espace (la cour de récréation)*, cinq stratégies ont été recensées :
- Tourner avec la corde fixée au point tracé dans la cour et tentative d'utilisation de la règle et des fiches (peut-être comme avec la bandelette en classe).
- Tracé avec la corde bien tendue.
- Tracé point par point, du point tracé dans la cour à la distance de la corde puis tracé du cercle sur les points déjà tracés.
- Tracé du cercle et des points par-dessus (un maximum de points). Chaque élève du groupe trace un maximum de points de son côté.
- Tracé du cercle avec des pointillés et vérification avec la règle de la distance tracée avec la corde. Deux méthodes utilisées : certains élèves vérifient avec la règle point par point et d'autres vérifient avec la corde.

La situation du triangle
Dans le *micro-espace*, quatre stratégies ont été recensées :

- Essais à différents endroits de la feuille et non en se servant de l'essai précédent. L'élève relie les trois segments et se rend compte que le troisième segment n'est pas de même mesure.
- Addition de la mesure de tous les segments et division de la somme en trois pour obtenir trois segments de même longueur (méthode utilisée par un seul élève).
- Tracé en se servant de deux instruments pour « croiser » deux segments. Tâtonnement avec les deux instruments.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents.

Dans le *méso-espace (au tableau)*, deux stratégies ont été recensées :

- Tracé en se servant de la règle et de l'équerre. L'élève trace un premier segment horizontal puis met un des instruments à chacune des extrémités. Il croise la règle et l'équerre par tâtonnement jusqu'à obtenir les bonnes longueurs des deux autres segments par coïncidence. Il doit gérer deux paramètres, deux dimensions d'espace qui influent ensemble.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents. Apparition d'un arc de cercle.

Nous pensons qu'un changement de repère aurait pu être effectué dans la cour afin de réactiver les représentations développées lors de la situation sur le cercle. Nous aurions pu donner des cordes aux élèves en guise de règle. Cette situation avait été prévue dans la progression mais pour des raisons logistiques liées à l'école, cette séance n'avait pas pu être menée.

2.3.2 Les liens entre les situations expérimentées

Pour la situation du cercle, les deux méthodes (« point par point » et « tracé de la ligne ») vont permettre de créer des liens en ce qui concerne le report de longueur et la conservation de la distance. Pour les élèves, « *la corde elle garde toujours la même distance* », « *ça fait comme un compas* […] *la corde* », « *un compas géant* », « *c'est pas un compas, c'est un rayon* », « *c'est pareil, pourquoi ?* », « *le rayon est aussi à la même distance* ».

Dans la situation du triangle, la validation avec les baguettes en bois va permettre d'amener les élèves à adopter une autre méthode de construction avec l'utilisation du compas et de la triangulation. Un élève réactive ses représentations de la situation sur le cercle. Selon lui, il faut « *tracer deux cercles qui se croisent pour obtenir un point* ». Il prend la longueur des segments comme rayon. Il fait allusion aux tracés des cercles dans la cour avec les cordes.
Un autre lien est effectué dans la situation du triangle avec la situation suivante sur les losanges (qui n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier par manque de temps). En effet, lorsqu'un élève explique sa méthode avec l'utilisation du compas, il trace deux points symétriques de part et d'autre du premier segment horizontal tracé au tableau. Il identifie la figure obtenue comme étant un losange ; or celle-ci était un cerf -volant. Ce faisant, cet élève élargit son propre répertoire de représentation et également celui de ses camarades de classe : il y a en effet identification du cerf-volant. Cette allusion au losange resservira néanmoins dans la situation de communication prévue. La construction de triangles pourra être réinvestie dans la construction du losange (décomposition du losange et reproduction par triangulation). On observe alors une progression de situations : les situations sur le cercle sont réinvesties dans la situation de construction du triangle, qui elle-même servira dans la situation sur les losanges.

2.3.3 Stratégies et liens : constitution du répertoire de représentation

Nous présentons quelques questions que les élèves se sont posées dans les différentes situations et les moyens mis en œuvre, associés à la constitution du répertoire de représentation.

***Dans la situation du cercle** :*
Les questions que les élèves ont pu se poser sont celles de l'identification d'un ensemble de points à une même distance d'un autre, celles du report de longueur (comment et avec quel(s) outil(s) conserver la

mémoire de la distance ?) et celles de la matérialisation des points (un point n'est pas encore pour eux un élément « non visible » d'une ligne). De plus, pour résoudre le problème demandé, les élèves ont remarqué qu'ils pouvaient utiliser la ficelle proposée comme un « compas géant » dans un espace à trois dimensions.

Dans la situation du triangle :
La question principale que les élèves ont pu se poser est celle du report de longueur : comment et avec quel(s) outil(s) conserver la longueur d'un segment et ajuster les segments entre eux ?
En lien avec la situation du cercle, les élèves ont utilisé le compas en référence à ce qu'ils nomment le « compas géant » pour répondre à leurs questionnements. Ceci leur permet de matérialiser ce que peut être un point (intersection de deux cercles) et de se rendre compte qu'ils peuvent obtenir un deuxième point symétrique du premier par rapport à la base du triangle. Ainsi, lors de la verbalisation d'un programme de construction du triangle quelconque et lors de l'obtention de deux triangles symétriques, un lien est effectué avec la situation sur les losanges. D'autre part, la matérialisation du point comme intersection de deux arcs de cercles a été effectuée par glissements successifs des segments.
Enfin, les élèves ont également fait allusion à la notion de rayon lors de l'utilisation des baguettes en bois matérialisant les segments du triangle lors de la phase de validation.

Dans la notion de répertoire nous pouvons distinguer la nature des éléments mis en jeu : actions, traces, symboles… Ces éléments, plus ou moins sophistiqués et d'un symbolisme plus ou moins achevé, montrent que les élèves ont accès à des niveaux différents de conceptualisation, et que tous ne sont pas prêts à passer au caractère générique de l'objet géométrique.
Cette observation des stratégies et des liens nous donne à penser que l'on peut parfois être amené, dans l'enseignement 'ordinaire', à sauter des stades nécessaires. Les élèves ne sont manifestement pas tous prêts à concevoir des représentations « canoniques » du cercle par exemple. En ce sens, la plupart des situations proposées en primaire, qui insistent sur les représentations mathématiques auxquelles le professeur va aboutir, nous paraissent prématurées, comme nous le disions pour l'ouvrage ERMEL Géométrie.
Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence. Par exemple, lors de la situation des triangles, un élève vient au tableau exposer sa démarche en nommant ce qu'il définit comme « la technique du compas » comme sa méthode de référence utilisée et élaborée lors de la situation sur le cercle. Cette « technique » est celle de la triangulation en utilisant le compas comme outil.
La prise en considération de la schématisation permet par ailleurs un développement des ostensifs propre à ce niveau de milieu dans les situations : la production d'une multitude de représentations non canoniques permet aux élèves de chercher avec leurs propres moyens. A l'école primaire, il n'est sans doute pas nécessaire de chercher à aller systématiquement plus loin, même si certains élèves en sont manifestement capables.

3 CONCLUSION

Un de nos objectifs de recherche était de mettre en évidence le rôle des représentations et leur progression possible. Ceci a bien été observé lors de la mise en place de la progression car les élèves ont pu créer des liens entre les différentes situations proposées (« technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges). Un second objectif était de définir ce que peut être un répertoire de représentation et d'en préciser sa fonction. Ce répertoire se confectionne au niveau du milieu objectif (milieu de recherche) et au niveau du milieu de référence (milieu de validation). Il se constitue à travers les expériences pour anticiper les figures attendues et pour argumenter sur les solutions géométriques possibles. Il constituera une base pour la géométrie déductive à un moment donné de la scolarité. Ainsi, les élèves se familiarisent avec un certain nombre de représentations qu'ils vont être amenés à manipuler.

D'après les premiers éléments d'analyse de la progression mise en place, nous pensons que la phase de schématisation nous permet d'établir des constats, d'analyser les signes dans les schémas produits par les élèves, afin de proposer une démarche constructive de connaissances et de savoirs. De plus, nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de la schématisation dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire permet aux élèves de proposer des raisonnements basés sur leur schéma. Il est alors possible de voir émerger, dans la situation, un raisonnement sur un objet géométrique : par exemple sur le cercle, sur le nombre de points d'intersection de deux cercles, etc … comme nous avons pu le montrer dans les vidéos.
Enfin nous pensons nécessaire que les élèves s'entraînent à faire des schémas et à les décoder, afin de disposer d'expériences leur permettant plus tard d'interpréter les figures géométriques. Sur cette question de l'expérience en mathématiques, on relira avec profit Briand (2007).

4 BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., ROBINET (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *RDM* **3 (1),** 5-60, La Pensée Sauvage, Grenoble.
BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire*, Université Bordeaux I.
BERTHELOT R., SALIN M.H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**.
BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 125-139, Dorier et al., La Pensée Sauvage, Grenoble.
BLOCH I. & PRESSIAT A. (2009) L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances, *Nouvelles Perspectives en Didactique des Mathématiques*, p. 51-73, La Pensée Sauvage, Grenoble.
BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Espace et géométrie : géométrie dans le méso-espace à l'école élémentaire et au début du collège. *Actes du XXXème colloque COPIRELEM*, IREM Paris 7.
BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. *Petit x*, **75**.
BROUSSEAU G. (1983) Etude de questions d'enseignement, un exemple de géométrie, *Séminaire des mathématiques et de l'informatique IMAG*, Université de Grenoble.
COMBIER G., PRESSIAT A. (2003) Apprentissages géométriques au début du Collège, *INRP*, *Actes du colloque inter-IREM 1er cycle de Montpellier*, Quelles géométries au collège ? “Geste physique, geste virtuel, geste mental”, IREM de Montpellier.
ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Paris : Hatier.
GIBEL P. (2009) Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation adidactique à l'école primaire, *Actes du colloque EMF*, Dakar.
GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire* Thèse, Université Paris 7.
GOBERT S. (2007) Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, *Petit x*, **74**.
GONSETH, F. (1945 à 1955) *La géométrie et le problème de l'espace.* Neuchâtel : Editions du Griffon. (Tome IV : La synthèse dialectique)
HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. **11**, Strasbourg.
MARGOLINAS C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire didactique et technique, n°158*, Université J. Fourier, Grenoble.
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2008) *Programmes et Instructions Officielles*, www.eduscol.education.gouv.fr
OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J., VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM 2. *Petit x*, **72**.
OSEL C. (2007) *Le problème de la constitution des références spatiales par le biais des schématisations*, Mémoire de Master, Université Bordeaux2.
TIERCELIN C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce.* Nîmes : Jacqueline Chambon

SITUATION 1 : LES CERCLES

Cette situation est expérimentée dans une école primaire à Lourdes (65) en CM1 le jeudi 12 mars 2009. Nous reprenons les travaux de M. Artigue et Robinet (Artigue et Robinet, 1982).
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.
Nous donnons une définition des différents espaces dans lesquels se produisent les situations proposées (Brousseau, 1983) :
-le *micro-espace* : c'est l'espace des petits objets que l'on peut déplacer, manipuler. On peut les percevoir de façon exhaustive. Le sujet est à l'extérieur de cet espace.
-le *méso-espace* : c'est l'espace des objets fixes qui ont une taille entre 0,5 et 50 fois la taille de l'enfant. Ces objets peuvent être vus globalement, pratiquement de façon simultanée. Le sujet fait partie de cet espace. C'est par exemple l'espace de la classe, de la cour de récréation,…
-le *macro-espace* : c'est celui de l'espace urbain. Le sujet ne peut en avoir que des visions locales, la vision globale ne peut être qu'une construction intellectuelle. Le sujet est à l'intérieur de cet espace.

<u>Objectif général</u> : Installer le cercle comme lieu des points situés à une distance donnée d'un point fixé.
<u>Objectif secondaire</u> : Installer la propriété caractéristique d'un point du cercle. Préserver la mémoire de la longueur.
<u>Descriptif de la séance</u> : Dans un premier temps, les élèves vont agir dans le micro espace. En classe, ils auront à leur disposition une feuille de papier A3 sur laquelle figurent un rectangle représentant la cour de récréation, un segment et un point. Ils devront schématiser l'ensemble des points situés à la même distance du point tracé. La distance à ce point est matérialisée par le segment. La vérification s'effectuera avec une bande cartonnée à la dimension du segment.

Ensuite, dans le méso-espace de la cour, par groupes de 5-6, les élèves devront trouver à nouveau cet ensemble de points. Ils disposeront de cordes de longueurs et de couleurs différentes, d'une règle de 1 mètre et de craies de couleur (pour éviter les reproductions d'un groupe à l'autre et permettre une différenciation avec les couleurs pour la vérification). La vérification s'effectuera avec une corde sur laquelle il y aura des marques des différentes couleurs correspondant aux différentes longueurs.

<u>Consigne du micro-espace</u> : « Sur cette feuille, la cour est dessinée. Dans la cour, il y a une corde et un point. Vous devez tracer le plus possible de points à la même distance du point tracé sur la feuille. Le segment dessiné représente la corde dont vous disposerez lorsque vous irez travailler dans la cour. Vous pourrez vérifier si tous les points que vous avez tracés sont à la bonne distance avec cette bande cartonnée qui est à la dimension de la corde. Je vous donnerai la bande lorsque vous estimerez avoir résolu le problème ».
<u>Matériel du micro-espace</u> : Feuilles A3 avec la cour représentée, Bande cartonnée à dimension du segment de la feuille A3. Les élèves disposent de règle graduée, équerre et de compas.
<u>Consigne du méso-espace</u> : « A présent, vous êtes dans la cour. Vous allez devoir tracer sur le sol le plus possible de points situés à la même distance du point qui est déjà tracé par terre. Vous avez à votre disposition des craies, une corde par groupe et une règle de 1 mètre. Vous pourrez vérifier si vos points sont à la bonne distance avec la corde qui a des traits de différentes couleurs mais seulement une fois que vous serez certains d'avoir résolu le problème. Chaque groupe aura une couleur attitrée, la corde et la craie de couleurs associées. ».
<u>Matériel du méso-espace</u> : 4 cordes de couleurs et de longueurs différentes (L>1m), 4 règles de 1 mètre non graduées, des craies de couleurs, une corde avec des traits de différentes couleurs tracés sur celle-ci. Ces traits matérialisent les 4 longueurs des cordes de couleur dont les élèves disposent. Cette corde est pour la maîtresse à fin d'effectuer les vérifications. Le fait que la professeur utilise la même corde pour vérifier permet de mieux mettre en évidence la similitude des tâches des quatre groupes.

Etape de justification : Sur une feuille, demander à chaque groupe ce qui leur permet de dire que leur méthode est bonne. Puis, leur demander ce qu'ils pourraient dire de tous les points à égale distance du point tracé au sol.

SITUATION 2 : LES TRIANGLES

Cette situation est expérimentée à l'école primaire du Lapacca à Lourdes (65) en CM1. Nous reprenons les travaux du COREM, école Michelet de M.H.Salin.
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.

Objectifs généraux :
- Construire un triangle à partir de segments donnés et à partir d'un message écrit par un camarade.
- Prendre conscience que le compas est l'instrument de conservation et report d'une longueur.
- Formuler et communiquer sa démarche de construction.

Compétences :
- Construire quelques figures.
- Utiliser des outils usuels tels que papier calque, règle, compas, etc… pour construire une figure plane.

Descriptif de la séance : Les élèves vont agir pendant toute la séance dans le micro espace et seuls. La mise en commun s'effectuera dans le méso espace au tableau en groupe classe.
Dans un premier temps, les élèves ont à leur disposition une feuille A4 sur laquelle sont tracés 3 segments de différentes longueurs et de différentes couleurs (le plus long est en vert, le plus court en bleu et le troisième en rouge). Ils sont en oblique sur la feuille les uns en dessous des autres. Le plus long a une mesure supérieure à 21 cm (largeur d'une feuille A4).
Les élèves pourront construire 4 triangles différents dont les mesures sont les suivantes :
Triangle A: 25 cm, 16 cm, 12 cm
Triangle B: 23 cm, 18 cm, 10 cm
Triangle C: 24 cm, 17 cm, 11 cm
Triangle D: 27 cm, 15 cm, 13 cm

Variables : les longueurs des segments, la feuille de papier, les instruments.
Matériel : Feuilles A4 avec les segments de couleur tracés, feuille A4 pour la construction, stylos feutres bleu, vert, rouge, baguettes en bois pour la validation lors de la mise en commun, craies de couleur, compas, règle, équerre, crayon de papier, gomme.
Consigne du micro-espace : « Chacun d'entre vous va recevoir une feuille blanche sur laquelle sont dessinés trois segments (vous n'aurez pas les mêmes segments) et une feuille blanche pour établir la construction. Vous allez travailler seul. ».
Montrer le matériel en même temps.
« Vous allez devoir construire un triangle par assemblage des trois segments dessinés. Vous devez travailler au feutre et utiliser les mêmes couleurs que sur les segments modèles. Lorsque vous avez terminé, vous m'appelez pour vérifier. Vous avez 10 minutes » (numéroter les essais sur la feuille).
Consigne du méso-espace : Les trois segments sont tracés sur le côté du tableau. Les élèves qui ont tâtonné passent au tableau pour expliquer leur démarche.
Nous gardons le même segment pour base. Avoir beaucoup d'essais sur une même base, sur un même segment afin qu'un arc de cercle se dessine.
Faire décomposer les élèves qui font des économies. Par exemple, la base et un segment sont donnés. L'élève ne trace pas le troisième segment avec la règle et voit que cela ne coïncide pas. Lui demander de tracer le segment pour que tout le monde puisse voir que le triangle ne peut pas se former puisque les deux extrémités des segments ne coïncident pas. Ainsi, apparaissent les essais successifs pour chaque segment.

Devant plusieurs essais pour un segment, demander aux élèves s'ils n'auraient pas pu positionner les points des extrémités du segment sans utiliser la règle (utilisation du compas).

Montrer la simulation au tableau avec les baguettes de couleur en les déplaçant sur les différents essais en gardant une extrémité fixée à un des sommets de la base afin que les élèves puissent constater le déplacement du segment et plus particulièrement de l'extrémité non fixe mais aussi la conservation de la mesure du segment.

Étape de justification : Dans le micro espace avec les triangles dessinés sur papier calque. Et dans le méso espace avec les baguettes de bois représentant les segments au tableau.

Atelier A5

FORMATION CONTINUE EN GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 : UNE ENTRÉE PAR LES PROBLÈMES. PRÉSENTATION DU TRAVAIL DU GROUPE IREM ÉCOLE COLLÈGE DE LYON.

Annette Braconne-Michoux
Formatrice IUFM Lyon, site de Saint Etienne, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
annette.braconne-michoux@iufm.univ-lyon1.fr

Hélène Zucchetta
Formatrice IUFM Lyon, site du Rhône, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
h.zucchetta@free.fr

Résumé
Le groupe IREM de Lyon présente un atelier proposant des activités géométriques à analyser afin de les adapter pour la formation continue et pour des élèves en classe de cycle 3 – 6ème. Il s'agit de problèmes de reproduction de figures géométriques complexes. Pour chacune des figures (présentées en annexe) une analyse de la figure et des variables didactiques de la situation sont exposées. Une des figures est ensuite utilisée pour exemplifier certains points théoriques de Duval et Godin concernant les différentes appréhensions d'une figure (perceptive, séquentielle, opératoire et discursive) et la décomposition d'une figure complexe en unités figurales élémentaires.
Suit une rapide présentation des travaux du groupe puis un scénario de stage de formation est développé de manière détaillée. Dans un premier temps des problèmes de description de figures sont proposés avec pour objectifs ::1-décrire pour reconnaître (jeu du portrait), 2-décrire pour faire. Dans un second temps, des problèmes de reproduction sont à résoudre.
Une synthèse des différents types de problèmes géométriques est proposée (en annexe).
Une mise au point sur l'institutionnalisation, conceptuelle et méthodologique, nécessaire pour conclure ces activités clôt cette présentation.

1 INTRODUCTION

Dans cet atelier, nous nous proposions de mettre les participants en situation de recherche de problèmes de géométrie et ensuite de présenter le Groupe école collège de l'IREM de Lyon, sur la géométrie en cycle 3. Parmi les entrées possibles des formations que nous avons conçues, le choix s'est porté ici sur les problèmes comme outil de formation des enseignants pour une mise en questionnement des pratiques. Nous présenterons et analyserons les problèmes de construction proposés aux participants de l'atelier, puis nous exposerons un exemple de déroulement d'une formation.

Dans le cadre de cet atelier nous avions l'intention de questionner cette pratique (utilisée en formation continue), proche de l'homologie c'est-à-dire de discuter comment le transfert de la démarche telle que vécue dans l'atelier peut se faire dans un contexte de formation continue puis dans la pratique quotidienne de la classe. Ce questionnement porte sur les points suivants :

- dans quelles conditions ce transfert peut-il se faire : adaptation des contenus, des consignes, de l'organisation dans la classe ? etc.
- quels documents, quelles références théoriques faut-il apporter lors d'une formation continue ?

Dans un deuxième temps nous avons évoqué le CD-Rom en cours d'élaboration, où seront regroupés plusieurs scénarios de formation continue, conçus pour s'adapter à différents publics.

2 PRÉSENTATION DE L'ATELIER

2.1 Problèmes de géométrie

Dans un premier temps, nous avons demandé aux participants de l'atelier de construire et d'analyser des figures avec le matériel de géométrie (annexe n°1). Certaines figures ont été choisies car elles posent des problèmes de construction ; elles abordent différents concepts : alignement, cercle, milieu … Nous utilisons ces figures en stage de formation continue dans une activité d'analyse des changements dans les procédures des élèves (voir § 5 : Description d'un scénario de stage). Les participants avaient à produire une affiche pour répondre à la consigne donnée : *Analysez ces activités proposées : quels enjeux, quels intérêts, quels apports du point de vue géométrique, du point de vue de la formation y trouvez-vous ?*
Dans un deuxième temps, nous avons présenté quelques éléments théoriques sur l'appréhension des figures.

2.1.1 Présentation des problèmes proposés

Toutes les situations amènent à analyser la figure et à repérer les éléments qui ont permis sa construction (il est parfois nécessaire de remettre les traits de construction qui auraient été effacés).
Les thèmes abordés dans la reproduction des figures sont les suivants :

Figure 1 a) : alignements.
Figure 1 b) : symétries ou propriétés des quadrilatères particuliers.
Figures 2 a) et b) : cercles et arcs de cercles et leurs centres.
Figure 3 a) : angles (même si on peut commencer la construction par le tracé d'une diagonale et le repérage d'un milieu).
Figures 3 b) : arcs de cercles dans carré.
Figure 3 c) : propriétés des quadrilatères particuliers (carré dans un carré).

Dans le cadre de l'atelier, pour chaque reproduction de figure, les questions posées ont été :

- reproduisez la figure : y a-t-il plusieurs démarches possibles ?
- comment peut-on modifier la consigne pour que la reproduction soit plus facile ? plus difficile ?
- comment peut-on la proposer en formation, compte tenu des différents publics concernés : formation continue d'enseignants du primaire ou du secondaire ? stages de T1 ou de T2 ?
- dans quelles conditions (taille du modèle, consigne orale ou écrite, taille de la reproduction) la reproduction d'une telle figure est-elle intéressante pour un niveau de classe donné ?

2.1.2 Variables didactiques et analyse des problèmes

Avec des élèves, les figures à reproduire sont données en taille supérieure pour permettre une meilleure prise d'informations. Il faut aussi autoriser les élèves à tracer sur la figure modèle (ce qui peut être interdit quand la figure est sur un livre).

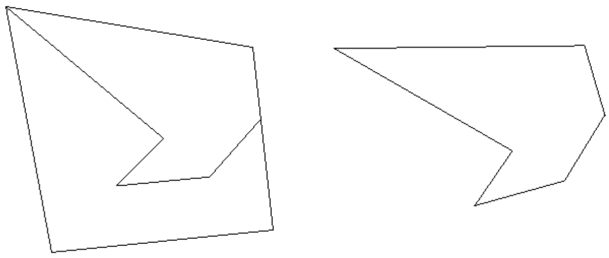
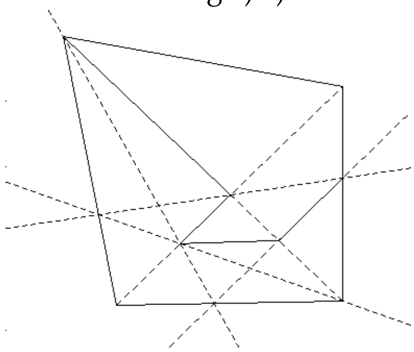


Fig.1) a)

La figure 1) a) est une figure à compléter avec uniquement une règle graduée. La situation est inspirée de l'analyse présentée par Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace (2007) mais la configuration initiale a été modifiée.



Pour autant elle repose toujours sur la reconnaissance de différents alignements : certains traits sont à prolonger mais d'autres alignements sont à repérer par la connaissance de trois points. La validation peut être faite grâce à deux alignements supplémentaires. Ces mêmes alignements permettent aussi de terminer la construction par deux méthodes différentes.
Dans le cas de cette figure, les alignements de points ne présentent pas tous les mêmes difficultés selon qu'il s'agit de prolonger un trait existant ou de créer une droite passant par deux points. Plusieurs démarches sont possibles dans la mesure où certains alignements sont indépendants les uns des autres.
La figure à compléter est légèrement tournée par rapport à l'original pour éviter des procédures s'appuyant sur une reconnaissance de parallélisme (faite en glissant éventuellement la règle).
On aborde le concept de points et celui de droites : un point est obtenu comme intersection de droites, et une droite est soit vue comme prolongement d'un « trait » tracé, soit définie par deux points (aspect plus difficile pour les élèves).

La figure 1) b) est à compléter à partir d'un losange. Cette figure est composée de trois losanges[1] tels que : les (droites) diagonales sont alignées ; les points d'intersection des diagonales de chaque losange confondus ; les diagonales du petit losange sont les demi-diagonales du grand losange ; le losange « moyen » a deux sommets communs avec le petit losange et deux autres sommets communs avec le grand losange.
Elle nécessite donc la reconnaissance des deux diagonales des losanges.

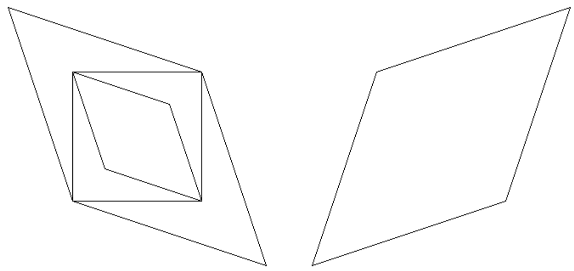


Fig. 1) b)

Dans le cas de cette figure, les variables didactiques sont la taille de la figure demandée (identique ou non au modèle), l'orientation de la figure finale par rapport à la figure initiale, le fait que le losange proposé est le « grand » losange ou le « petit » losange du dessin initial, voire le moyen et les instruments autorisés (règle graduée ou non, compas, équerre). Dans le cas d'une reproduction à l'identique, il peut suffire de reporter les mesures au compas ou à la règle sans prendre en compte les propriétés géométriques de la figure initiale. Dans le cas d'une reproduction à une taille différente, les procédures pourront changer en fonction des instruments autorisés mais les

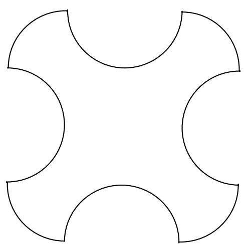


Fig. 2) a)

[1] Dans le fichier photocopiable de CAP Maths CM1, le losange moyen est un carré car le grand losange (comme le petit) a une petite diagonale de longueur moitié de la grande.

propriétés géométriques de la figure initiale devront être identifiées : diagonales perpendiculaires et, quand elles sont de même support, elles sont de longueur double l'une par rapport à l'autre. Enfin donner comme élément de départ ce qui sera le « petit losange » a tendance à être plus difficile pour les élèves que de construire à l'intérieur du « grand losange » puisque, justement ils doivent faire des tracés qui « sortent de la figure ».

Dans les deux figures 2) a) et 2) b), la principale difficulté réside dans le repérage des centres des cercles ou des arcs de cercle. L'expérience auprès de nos élèves a montré qu'une observation globale et donc trop rapide peut inciter à voir un cercle au lieu de quatre petits arcs de cercle dans la 1ère figure et une rosace à six branches dans la deuxième. Les procédures utilisées par les élèves pour construire chacune de ces deux figures sont nombreuses et s'appuient sur des propriétés géométriques différentes (symétries, positions des centres des cercles, rayons des cercles, etc.). Cette variété peut amener à faire une mise en commun et permettre à ceux qui n'ont pas trouvé d'essayer une méthode présentée par leurs camarades.
La figure 2 a) sera étudiée de façon détaillée dans le paragraphe suivant à propos des apports théoriques qui peuvent être donnés à ce sujet.

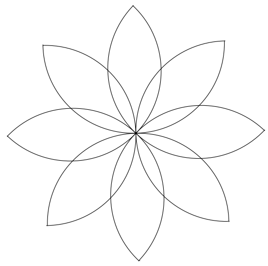


Fig. 2) b)

Là aussi, les deux figures peuvent être reproduites à l'identique ou à une taille différente ; les procédures de construction sont de toutes façon très nombreuses. Dans les deux cas, il faut autoriser les élèves à compléter la figure-modèle pour y prendre des informations qui détermineront la procédure.

Les figures 3) a), b) et c) sont à compléter à partir d'un élément agrandi de la figure. Les constructions de ces figures nécessitent l'utilisation de propriétés conservées dans l'agrandissement : alignements, milieux et angles.

L'intérêt de la figure 3) a) réside dans le fait que seules les mesures d'angles sont conservées. En effet, on peut commencer la construction de la figure en repérant qu'une partie d'une diagonale a été dessinée mais; le triangle de gauche n'est pas isocèle, le sommet de l'autre triangle n'est ni au tiers ni au quart de la longueur, le milieu de la longueur du rectangle qui est aussi un sommet de ce triangle ne permet pas à lui seul de poursuivre la construction ; etc. La reproduction de la figure nécessite donc le report d'au moins un angle pour fixer un des segments obliques qui n'est pas une diagonale du rectangle. Tous les instruments sont autorisés. Un papier calque de taille très réduite peut être distribué. La taille du rectangle à l'intérieur duquel s'inscrit la construction est alors de moindre importance (il suffit que les proportions soient conservées pour l'agrandissement).

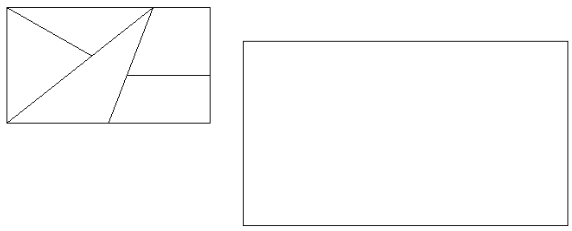


Fig. 3) a)

La difficulté dans la reproduction de la figure 3) b) réside dans le fait que le centre du carré sert ensuite comme point de repère des extrémités des rayons des huitièmes de cercles dont les centres sont les sommets du carré. Là encore il faut autoriser les élèves à compléter la figure initiale pour identifier le rôle du centre du carré.

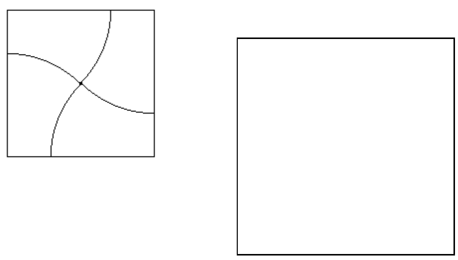


Fig. 3) b)

La figure 3) c) présente les mêmes conditions de reproduction que la figure 1) b) : le carré proposé peut être le « carré intérieur » de la figure initiale auquel cas la construction se fera autour de cette figure, soit le carré proposé est le « carré extérieur » de la figure initiale et la construction se poursuit à l'intérieur de cette figure. Dans ce dernier cas, la difficulté de reproduction réside dans le repérage des milieux des côtés sur le modèle et la construction des côtés du carré intérieur par intersection des segments joignant les milieux des côtés aux sommets du carré. Au contraire si le carré proposé doit devenir le carré intérieur, on obtient les sommets du carré extérieur en prolongeant les côtés du carré existant et en reportant la longueur de ses côtés.

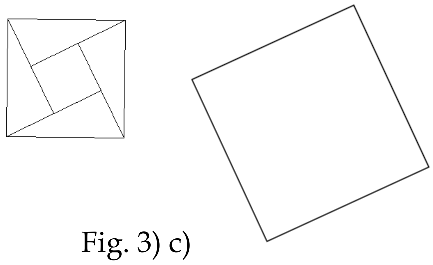


Fig. 3) c)

Comme dans le cas de la figure 1) b) les variables didactiques sont liées à la taille de la reproduction demandée (à l'identique ou d'une taille différente), l'orientation de la reproduction par rapport à la figure initiale. Selon que le carré proposé au début de la reproduction est le carré intérieur ou extérieur de la figure initiale, les procédures seront différentes. Si les figures 1) b), 3) b) et 3) c) sont reproduites à l'identique, le repérage des points importants pour la construction peut se faire uniquement par mesurage sans repérer un point comme étant le milieu d'un segment, ou comme le centre d'un carré. Le passage aux propriétés des figures devient nécessaire avec l'agrandissement de celles-ci.

2.2 Apports théoriques qui peuvent être travaillés avec ces problèmes

La mise en œuvre des situations de reproduction ou de construction de figures est l'occasion de réactiver certaines références théoriques reprises de Duval (1994 ; 1995) et de Duval et Godin (2005), en particulier les différentes appréhensions d'une figure géométrique et la décomposition d'une figure géométrique en ses unités constitutives.

L'illustration de chacune de ces références a été faite à partir de la reproduction d'une seule figure :

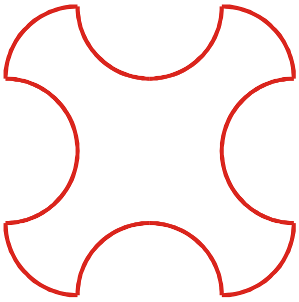


Fig. 1

2.2.1 Différentes appréhensions d'une figure

Appréhension perceptive :

> « Ce qu'une figure montre au premier coup d'œil. Nous pouvons ensuite y discriminer des sous-figures qui ne coïncident pas nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure. »
> (Duval 1994)

Dans le cas présent, l'appréhension perceptive peut suggérer que les quarts de cercle sont sur un même cercle qui a pour centre le centre de la figure. Les centres des demi-cercles sont sur ce même cercle. Sur un modèle suffisamment petit, l'usage du compas pourra confirmer cette perception (fig.2).

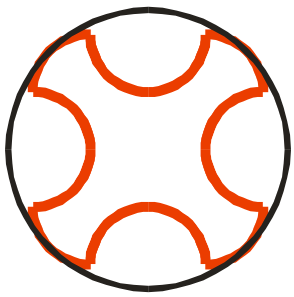


Fig. 2

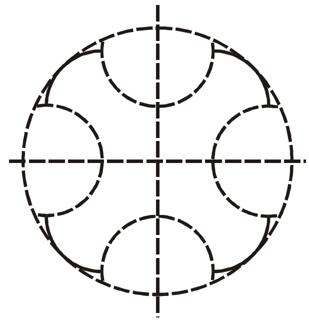


Fig. 3

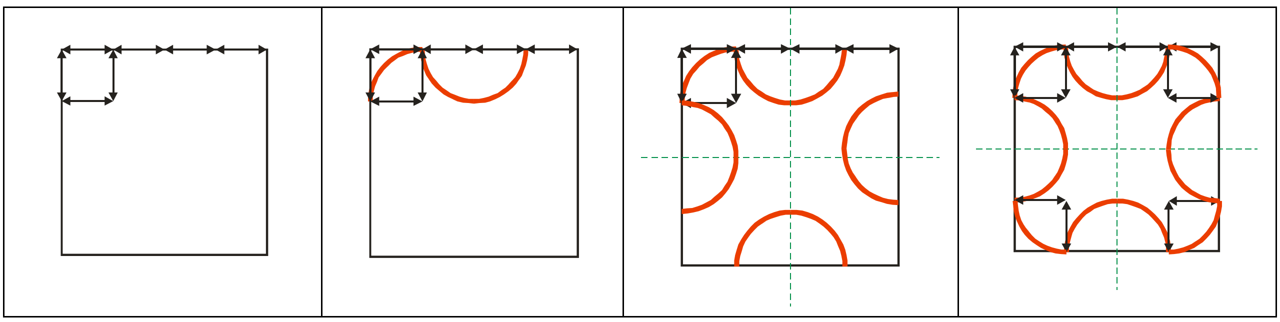
La perception de la symétrie centrale ou des axes de symétrie pourra aussi engendrer des hypothèses de construction erronées (fig.3).

Appréhension séquentielle :

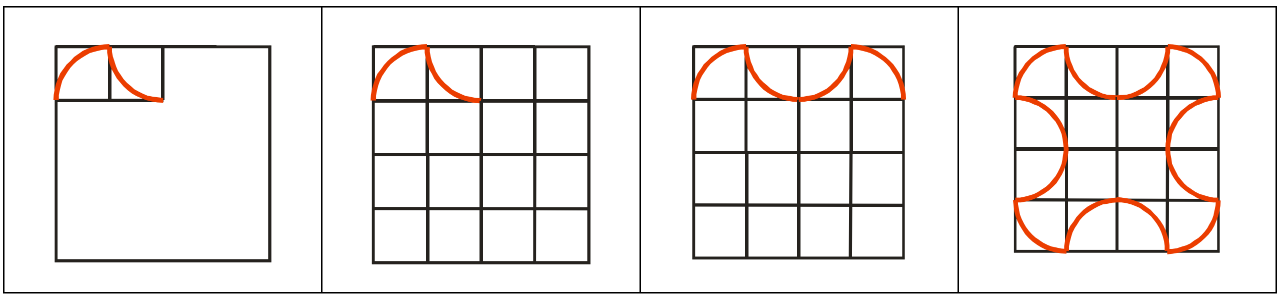
> « Elle concerne l'ordre de construction d'une figure, cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés. (…) D'où un traitement spécifique commandé par cette exigence : pour réussir la construction il faut respecter les associations initiales entre propriétés mathématiques et possibilités techniques de l'instrument ».
> (Duval 1994)

Dans le cas étudié ici, plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves d'une même classe. C'est donc là un objet de discussion et d'échange entre pairs.

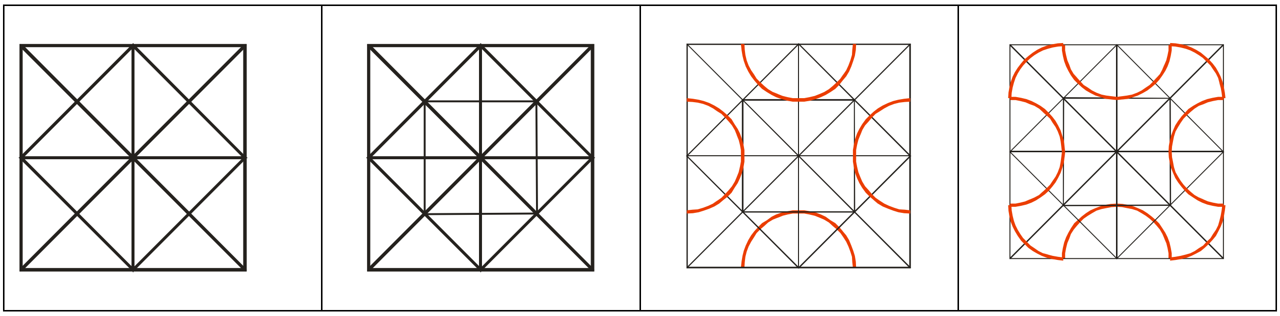
1ère construction :



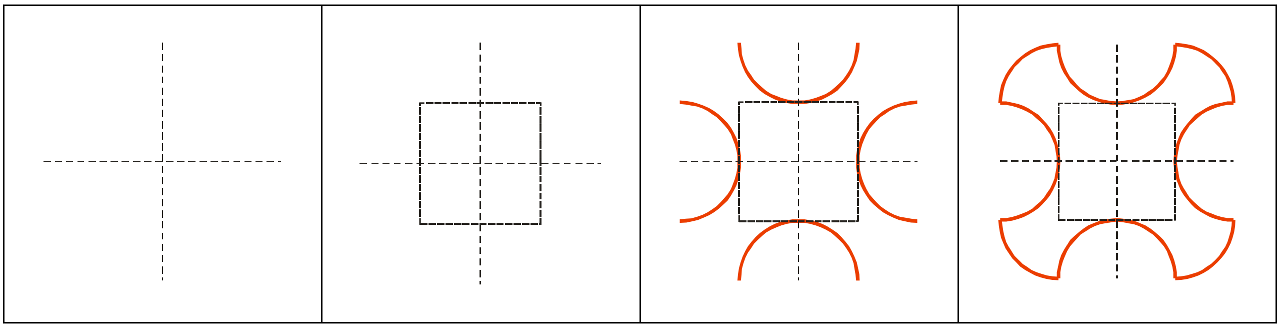
2ème construction :



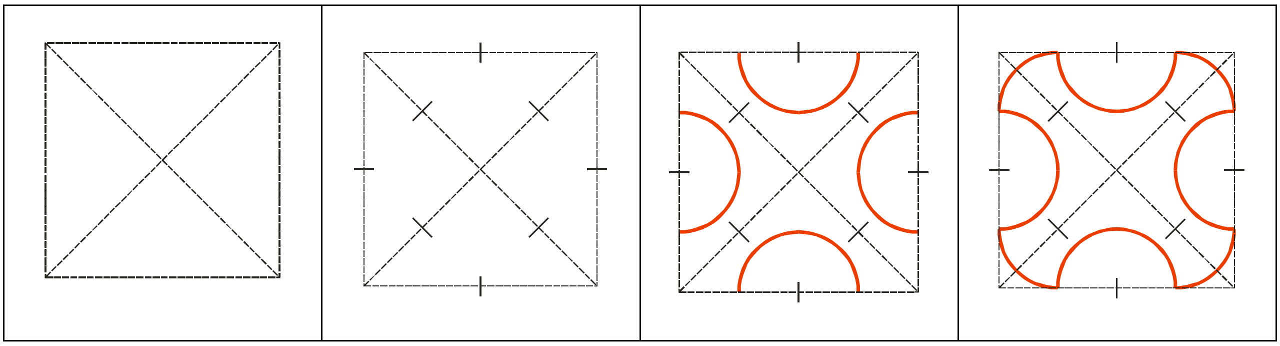
3ème construction



4ème construction

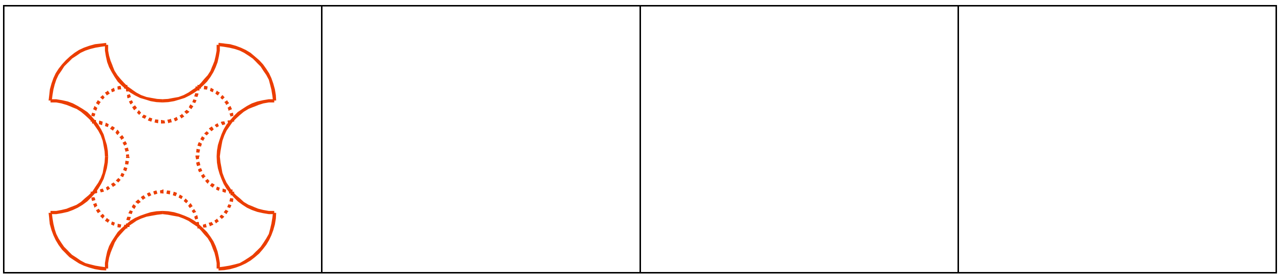


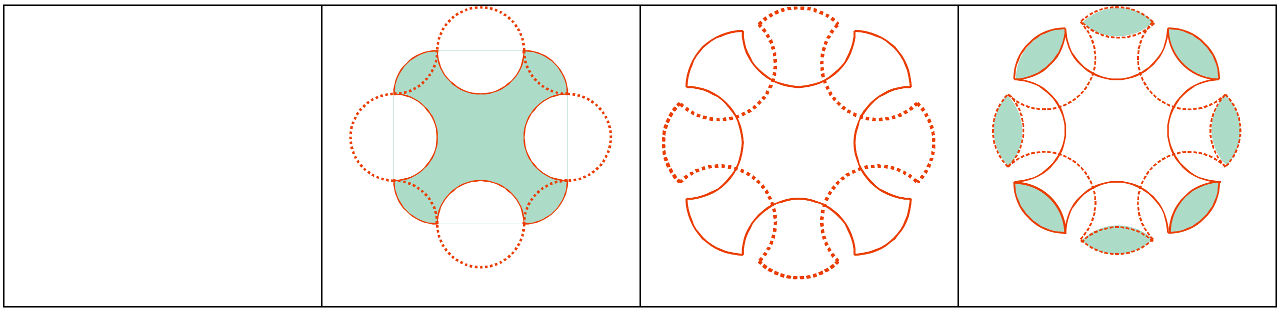
5ème construction



Appréhension opératoire :

> « C'est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures : modifications méréologiques, modifications optiques, modifications positionnelles. »
> (Duval 1994)





L'appréhension opératoire de la figure initiale permet de la reconnaître dans ces nouvelles figures, elle permet aussi de voir que la figure initiale est composée de sous-figures qui se répètent par l'effet de plusieurs symétries

Appréhension discursive :

> « C'est une explication des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explication est de nature déductive. »
> (Duval 1994)

1ère description : « *Cette figure est composée de quatre quarts de cercle et de quatre demi-cercles de même rayon. Les centres des demi-cercles sont les sommets d'un carré ; les centres des quarts de cercles sont les milieux des côtés du carré. Le rayon des demis ou quarts de cercles est le quart de la diagonale* ».

2ème description : « *Cette figure est incluse dans un carré, les milieux des côtés sont les centres de 4 demi cercles ayant comme rayon le quart du côté, les quarts de cercles complétant la figure ont le même rayon et pour centres les milieux des demi-diagonales du carré* ».

2.2.2 Décomposition d'une figure en unités figurales élémentaires.

Duval (1995) précise que pour qu'il y ait figure il faut qu'il y ait une « tache visible » ou encore « *l'implantation* d'une tache visible ».

> Cette « *implantation* » est susceptible de plusieurs variations visuelles qui peuvent être regroupées en deux grands types :
> - le type des variations liées au nombre de dimensions : 0 (un point), 1 (une ligne) et 2 (une zone),
> - le type de variations qualitatives : variations de forme (ligne droite ou ligne courbe ; contour ouvert ou fermé d'une zone), variation de taille, d'orientation (par rapport au plan fronto-parallèle), variation de grain, de couleur, etc.
> Ces distinctions permettent de définir les éléments constitutifs d'une figure, toute figure apparaissant alors comme une *combinaison de valeurs pour chacune des variables visuelles de ces deux types,* ***dimensionnel*** *et* ***qualitatif***. A partir de là il est facile de déterminer les éléments qui vont fonctionner comme des unités de base représentatives, c'est-à-dire des unités figurales élémentaires. (pp. 175-176)

Les unités figurales élémentaires de dimension 1 sont donc les lignes droites (droites, demi-droites, segments) les lignes courbes (arcs de cercle). Parmi les unités figurales élémentaires de dimension 2 on trouve les formes rectilignes ouvertes (angles, l'intersection de deux droites,…), les formes rectilignes fermées (triangles, quadrilatères, …), les formes courbées ouvertes (courbe avec point de rebroussement, intersection de deux courbes,…) les formes courbées fermées (cercles, ovales ;…).

Selon Duval (1995), toute figure est une combinaison d'unités figurales élémentaires. Ainsi le carré que l'on peut percevoir comme une unité figurale de dimension 2 est aussi la combinaison de 4 unités figurales élémentaires : ses côtés. Or pour reproduire ou construire une figure, l'élève doit décomposer celle-ci en unités figurales élémentaires, souvent de dimensions différentes et établir des relations entre ces différentes unités. C'est là que l'on peut trouver une explication de la difficulté des élèves dans la reproduction de figures : « *Les élèves évitent au maximum de transformer une unité figurale de dimension 2 en une configuration d'unités figurales de dimension 1 ou 0.* » (p.180)

Dans le cas de la reproduction de la figure précédente (figure fermée de dimension 2), l'élève doit identifier les quarts de cercle et les demi-cercles en tant que tels c'est-à-dire la décomposer en 8 éléments de dimension 1 avant de commencer son travail, quelle que soit sa procédure. Il doit ensuite établir les relations existant entre ces différents éléments. Percevoir certaines relations ne garantit pas la réussite dans la reproduction de la figure (cf. appréhension perceptive). L'expérience a montré que dans le cas particulier de la reproduction de cette figure, non seulement sa décomposition en unités figurales élémentaires est difficile mais la relation entre ces différentes unités est un autre obstacle à surmonter. En effet, les élèves ont rapidement identifié que la figure se composait de quatre demi-cercles mais l'identification des quarts de cercles en tant que forme a été plus difficile (qualification de l'unité figurale de dimension 1) et la recherche de la position des centres de ces quarts de cercle (relation entre les unités figurales élémentaires) a été encore plus difficile : les élèves hésitant souvent à tester leurs hypothèses sur le modèle avant d'agir sur leur production ; la taille de la figure initiale étant alors très importante.

Dans le cadre de l'atelier, les figures initiales étaient de petites tailles, la relation entre les unités figurales élémentaires n'a pas été facile à identifier ; si la taille de la figure avait été plus grande, les tests faits par les participants auraient été plus efficaces.
Toutes les figures que nous avons proposées (voir annexe 1) peuvent être analysées de la même manière, que ce soit en termes d'appréhensions d'une figure ou de décompositions en unités figurales élémentaires.

3 PRÉSENTATION DU GROUPE ÉCOLE COLLÈGE DE L'IREM DE LYON

Le groupe IREM « école - collège » de Lyon a été créé à l'initiative de l'IREM et des IPR de maths de l'Académie de Lyon pour construire et assurer des stages en direction de publics variés : des IEN et conseillers pédagogiques, des enseignants en primaire et des professeurs de mathématiques en collège…
Ce groupe conçoit des formations sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ou à la liaison avec le collège et peut répondre à des demandes spécifiques aussi bien à destination des enseignants qu'à des formateurs des écoles et des collèges ainsi qu'à des conseillers pédagogiques de circonscription. Il est composé de professeurs de collège, de formateurs du primaire (conseillers pédagogiques et animateurs maths sciences) et de professeurs d'IUFM, des trois départements de l'académie.

Le cahier des charges de l'Inspection (et du Rectorat) fixe le cadre comme l'indique l'extrait suivant : « Il y aura donc lieu de prévoir des formations pouvant, à partir d'une structure de base, s'adapter aux différents publics et aux demandes des interlocuteurs, de plus modulables dans le temps, d'une demi-journée à quatre jours. ». Puis il se poursuit avec des indications sur les contenus qui doivent faire l'objet de formations.
Cinq ans plus tard, parmi les thèmes travaillés (Proportionnalité, Calcul mental, Fractions et décimaux, Géométrie plane, Grandeurs et mesures, Numération, Le nombre en maternelle, Géométrie dans l'espace, Langage et maths, Différenciation …), nous en sommes à reprendre deux thèmes : « Géométrie plane » et « Le nombre en maternelle » en vue de pouvoir les communiquer sous forme de CD-Rom ou de brochure. Différents scénarios seront proposés en modules de 3h, 6h ou plus suivant les objectifs de la formation. Lors de l'atelier, nous avons montré brièvement un ou deux déroulements de stage. Nous détaillons un module dans un stage de géométrie dans la suite de l'article.

4 DESCRIPTION D'UN SCÉNARIO DE STAGE

Le groupe « école-collège » de l'IREM de Lyon a conçu plusieurs modules sur le thème de la géométrie. Suivant la demande de stage, nous adaptons un ou plusieurs de ces modules. L'un d'entre eux propose une entrée par les paradigmes géométriques tels que définis par Houdement & Kuzniak (2003) et Parzysz (2003). La consigne donnée aux stagiaires est d'analyser des réponses d'élèves du CE2 à la 5ème sur trois exercices de géométrie. Deux autres modules abordent l'un l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique et l'autre la résolution de problèmes en géométrie nécessitant des raisonnements. Nous avons conçu aussi des modules sur le thème de la géométrie dans l'espace et celui des grandeurs et mesures.

Nous décrivons ici le scénario autour des problèmes de géométrie et plus particulièrement sur ceux de reproduction de figures.

- Dans un premier temps, il peut être proposé un travail sur les problèmes de description de figures avec deux activités :

 - **Activité 1** : Décrire pour reconnaître

Un stagiaire choisit une figure de la fiche 110 Cap Maths CM1 (annexe 1 ; 4°)) avec le jeu du portrait (« qui est-ce ? »). Les autres stagiaires jouent le rôle des élèves : ils essaient de retrouver la figure choisie par le stagiaire en posant des questions auxquelles le stagiaire ne répond que par « oui » ou « non ». Ils peuvent avoir la fiche à disposition ou non. Une discussion s'en suit sur ce qu'on travaille, sur les aides possibles comme donner une liste de vocabulaire dans laquelle l'élève peut piocher…
Le choix de la figure à deviner ne doit pas être fait au hasard : il faut pouvoir discriminer les figures les unes des autres mais pas trop vite. La question de la gestion en classe peut être posée (Qui parle, combien parlent ? …)

 - **Activité 2** : Décrire pour faire faire

Trois figures composées d'un carré et deux demi-cercles (ayant comme diamètre un côté du carré) positionnés de différentes façons sont distribuées aux stagiaires. Ils doivent la décrire par écrit de façon qu'un autre stagiaire puisse refaire la figure à partir du texte qu'il recevra. Le choix est fait pour que la position des demi-cercles par rapport au côté soit un caractère discriminant. Une discussion sur les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'écriture de tels messages est amorcée et des pistes d'aide sont données.

- Dans un deuxième temps, nous donnons des figures à reproduire à l'identique (un exemple en annexe 3) comme si les stagiaires étaient des élèves (situation d'homologie). Nous estimons que l'action de reproduction amène les stagiaires à analyser les figures et qu'elle est nécessaire pour imaginer les procédures et difficultés des élèves, ce qui fait l'objet de la consigne suivante : « Vous avez essayé de faire les exercices de cette fiche. Pour chacun d'eux, indiquez si vous les donneriez dans vos classes, à quel niveau, avec quel objectif, pour quelles raisons ? »

L'annexe 2 est un exemple de déroulement de stage tel que nous nous le communiquons au sein du groupe : matériel pour l'animateur et les stagiaires ; durée et objectifs de l'activité ; consignes, synthèse à mettre en place. Des liens hypertextes[2] renvoient à d'autres fichiers. C'est ainsi que l'on trouvera en annexe 3 un exemple de figures et en annexe 4 une synthèse sur les différents types de problèmes en géométrie et sur une démarche d'apprentissage.

Replacer la reproduction de figures dans le cadre de la classe pose la question de l'objectif précis de ce type d'activités et éventuellement d'une idée de progression. La confrontation des différentes

---

2 Les liens hypertextes ne sont pas actifs dans cet article, ils ne le seront que dans la brochure et le CD-Rom en cours de production à l'IREM de Lyon.

procédures amène les stagiaires à appréhender une figure sous différents aspects. Souvent ceux-ci se positionnent selon les difficultés qu'ils ont rencontrées au cours de leur recherche de l'exercice pour décider du niveau de classe où peuvent être proposées ces figures, d'où leur rejet pour certaines d'entre elles. Nous visons ici la notion de problème en géométrie avec une nécessité de confrontation entre élèves et un objectif spécifique (recherche de traits de construction, concept de cercle par la connaissance du centre et du rayon …). La pratique dans nos classes de 6ème, en début d'année, nous permet d'expliciter un déroulement possible sur une séance entière et de donner des réponses d'élèves. Par exemple, pour la figure analysée ci-dessus, un de nos élèves de 6ème ne voyait la figure que globalement comme un trait courbe continu se refermant sur lui-même et des arcs de cercles ayant le même rayon, il avait fait une figure en jugeant à vue des centres des cercles. Dans le débat sur les constructions pour argumenter sur le fait que les quarts de cercles n'appartiennent pas au même cercle, un autre élève avait dit que « cela tourne pareil mais ça ne se rejoint pas et donc ce n'est pas le même cercle » pour dire qu'il y a bien le même rayon mais pas le même centre. Les différentes conceptions du cercle peuvent être évoquées en apports théoriques.
L'activité 2 propose des variations dans la présentation des figures à reproduire (nous jouons sur les variables didactiques comme des figures à compléter à l'identique ou agrandies, avec une même orientation ou non les contraintes sur les instruments de géométrie autorisés…) et la consigne est d'analyser ces changements du point de vue des procédures et de l'apprentissage des élèves. Les exemples proposés dans nos stages correspondent aux figures reproduites à l'identique dans la première partie et lors de l'atelier nous avons fait analyser aux participants pour certains d'entre eux. Par exemple, la figure 3) a) ayant été reproduite à l'identique (des reports de mesures suffisent), nous proposons d'analyser le changement provoqué par l'agrandissement.

Une synthèse est faite sur les différents types de problèmes de géométrie (annexe 4 distribuée aux stagiaires), ainsi que parfois sur les différentes phases (action, formulation, validation, institutionnalisation) adaptées à des exemples de géométrie (Brousseau, 1983).
L'institutionnalisation est souvent une phase qui est négligée par les enseignants en géométrie. La validation de la reproduction de figures se limite souvent au contrôle à l'aide d'un papier calque ou par un énoncé des étapes de construction repris par l'enseignant lui-même. La question de l'institutionnalisation est en particulier très intéressante dans le cas des figures à compléter seulement par alignements car elle contribue à la construction du concept de droite et de point chez les élèves. On pourra mettre en avant :

- Un point est défini par l'intersection de deux droites (ou de deux lignes si on travaille avec des arcs de cercles) ;
- Par deux points distincts, il passe une droite et une seule ;
- Des points alignés sont des points sur une même droite ;
- On peut toujours prolonger un segment, le segment ayant pour support une droite…

Une institutionnalisation sur des points méthodologiques a aussi sa place dans la classe. Par exemple : « Pour reproduire la figure, je dois repérer les éléments qui la composent (demi-cercles, quarts de cercles, symétries, milieux, alignements…) et pour cela je peux tracer sur le modèle des traits de construction qui auraient été effacés. »

5 CONCLUSION

L'objectif de cet atelier était de mettre les participants en situation de stagiaires éventuels, tels que nous le pratiquons dans l'académie de Lyon, mais aussi d'apporter aux formateurs une proposition d'entrée en géométrie par les problèmes dans le cadre des stages de formation initiale ou continue. Commencer un stage en demandant aux stagiaires de reproduire des figures est une mise en situation de formation continue de type « homologie » dans laquelle il nous semble fondamental que l'activité proposée soit aussi porteuse de questionnements sur les actions et les concepts travaillés. C'est ainsi que l'activité proposée aux participants de l'atelier était une adaptation spécifique permettant à la fois la mise en

situation de type « homologie » et autorisant les « pas de côté » nécessaires à l'analyse des variables didactiques ainsi qu'à la reproductibilité du module de formation.
Les participants ont convenu que le choix des figures posant « problème » est déterminant : elles ne doivent être ni trop évidentes ni trop complexes ce qui engendrerait une perte de temps. Les objets géométriques sur lesquels les reproductions de figures s'appuient doivent être aussi suffisamment variés pour que des stratégies de répétition soient mises en défaut. Les participants ont aussi réalisé l'utilité et la nécessité d'utiliser les instruments de géométrie (certains n'avaient plus utilisé de compas depuis longtemps …) afin d'apprendre aux élèves à réaliser des constructions soignées.

Compte tenu de la multiplicité des configurations proposées, les échanges ont été nombreux dans les groupes mais la synthèse a été brève.
La 1ère figure a été source de toutes les questions qui peuvent être posées lors d'un stage de formation continue en géométrie dans la mesure où l'alignement est rarement évoqué tant en stage qu'en situation de classe :

- contrat : respect et compréhension des consignes (a-t-on le droit de mesurer, d'utiliser le compas, de tracer des perpendiculaires ou des parallèles sont des questions qui apparaissent), matériel utilisé, contraintes, …
- concept de droite et de point (point obtenu par intersection de deux droites, droite vue comme prolongement d'un trait ou définie par deux points ce qui s'est révélé plus difficile)
- validation (autre alignement existant validant la construction qui apparaît par confrontation entre participants) …

Tous les participants ont convenu de l'importance à accorder aux ancrages théoriques associés au sujet du stage, comme ici les constructions géométriques, y compris dans le contexte d'un stage de formation continue. Durant l'atelier, nous n'avons évoqué que les différentes appréhensions d'une figure selon Duval mais les paradigmes géométriques selon Houdement et Kuzniak auraient eu toute leur place.
En formation continue, ces références théoriques permettent d'expliquer des choix, d'éclairer les stagiaires et peut-être de faire bouger leur pratique. Dans les questionnaires d'évaluation de fin de stage, les activités sont plébiscitées, les apports théoriques sont souvent jugés intéressants mais il est important que ceux-ci soient à la portée des stagiaires et puissent vraiment leur être utiles dans leur pratique de classe en leur permettant d'analyser d'autres figures de façon autonome. Les discussions autour des variables didactiques montrent, en général, que les stagiaires en formation continue envisagent difficilement des variations possibles sur les figures. La réflexion sur les effets de ces variations dans les changements de procédures des élèves amène les stagiaires à envisager un travail sur les propriétés à travers les constructions sans attendre la démonstration. A contrario, les participants à l'atelier ont spontanément identifié l'importance du jeu sur les variables didactiques.
Dans la dernière partie de l'atelier nous avons présenté le travail du groupe école-collège de l'IREM de Lyon et nous avons pu constater qu'il y a effectivement une demande de communication de maquettes détaillées de stages pouvant s'adapter à différents publics. Nous avons fait part des préoccupations du groupe qui sont de rendre lisible notre travail, de le diffuser en direction de nouveaux formateurs. La question de l'intégration d'éléments de théorie de la didactique et celle de la forme de la diffusion (CD-Rom et/ou présentation papier) et des droits d'auteurs ont été posées.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1994): *L'enseignement de la géométrie à l'Ecole primaire,* Grand N n°53; pp. 39-56; IREM de Grenoble

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1995): *Un enseignement des angles au cycle 3*, Grand N

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (2001): *L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive?* Petit *x* ; n° 56 ; IREM de Grenoble

BROUSSEAU, G. (1983) : *Études de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie ;* IMAG n°45 ; Grenoble

CHARNAY, R.; COMBIER, G. & DUSSUC, M. - P. (2003) : *Cap maths CM1, Manuel, Guide des activités et Fiches photocopiables ;* Hatier

Commission Inter-IREM Premier Cycle (1998) : *Des mathématiques en sixième*

Commission Inter IREM Premier Cycle, COPIRELEM, (2001) : *Articulation école-collège : Des activités géométriques*, IREM de Lyon

DUVAL, R. (1994) : *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n°17

DUVAL, R. (1995) : *Semiosis et pensée humaine* ; éditions Peter Lang ; pp. 173-207

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005) : *Les changements de regard nécessaires sur les figures*, Grand N ; n°76 ; pp. 7 - 27

HOUDEMENT, C & KUZNIAK, A. (2003) : *Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie*, Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum, tome 2 ; pp. 95- 106

KESKESSA, B. ; PERRIN-GLORIAN, M.J. & DELPLACE, J.R. (2007), *Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie*, Grand N ; n° 79 ; pp 33 à 60

PARZYSZ, B. (2003) : *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum, tome 2 ; pp. 107-125

PELTIER, M.L. (2003) : « *La fleur*» *et « le napperon* » ; Carnets de route de la COPIRELEM. Tome 2 ; pp. 183 - 190

ROYE et al. (2000) : *Travaux géométriques : Apprendre à résoudre des problèmes ; cycle 3*, IREM de Lille, CRDP Nord - Pas de Calais SCÉREN

7 ANNEXES

7.1 Annexe 1

COPIRELEM AUCH juin 2009
<u>Consigne</u> : Réalisez les constructions.
Nous proposons ces figures à reproduire dans le contexte des modules de formation continue
Analysez ces activités proposées : quels enjeux, quels intérêts, quels apports du point de vue géométrique, du point de vue de la formation y trouvez-vous ? Vous devez produire une affiche.

1°) a) En utilisant uniquement la règle non graduée, compléter la figure 2 pour obtenir la figure 1.

Figure 1

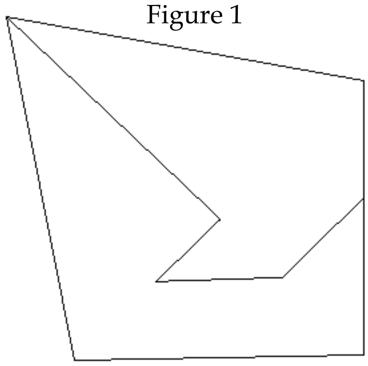
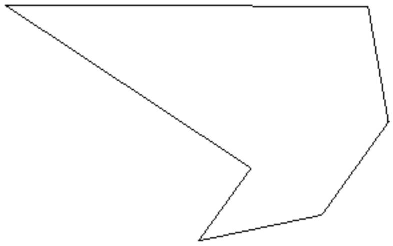


Figure 2



b) Compléter la figure 2, elle doit être identique à la figure 1.

Figure 1

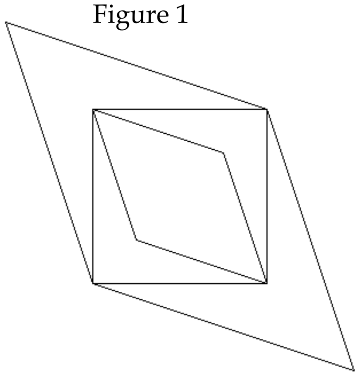
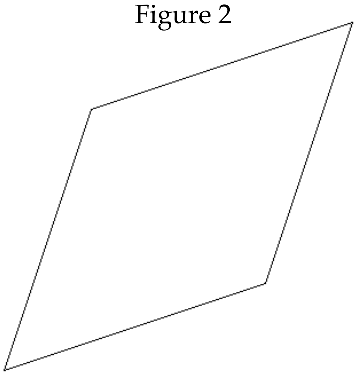


Figure 2



2°) Reproduire les figures ci-dessous.

Figure a)

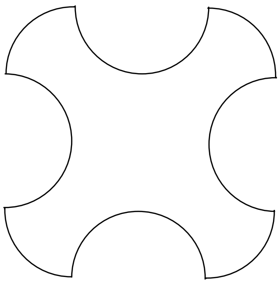
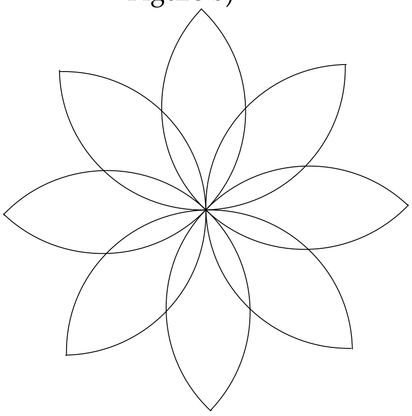
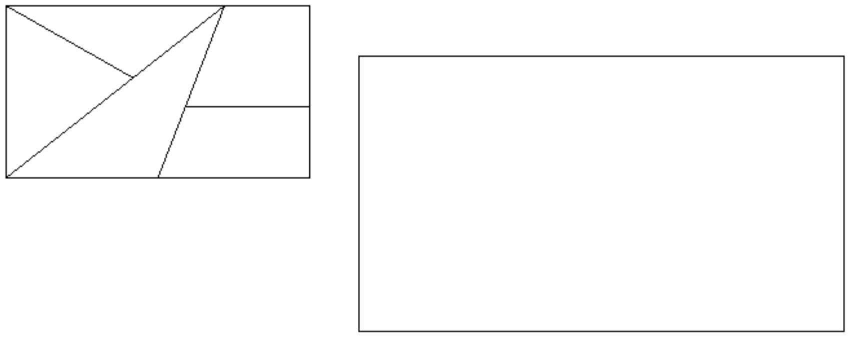


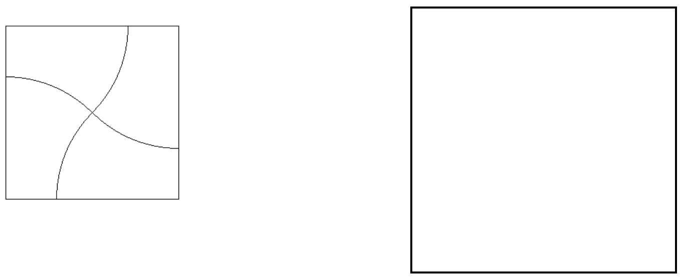
Figure b)



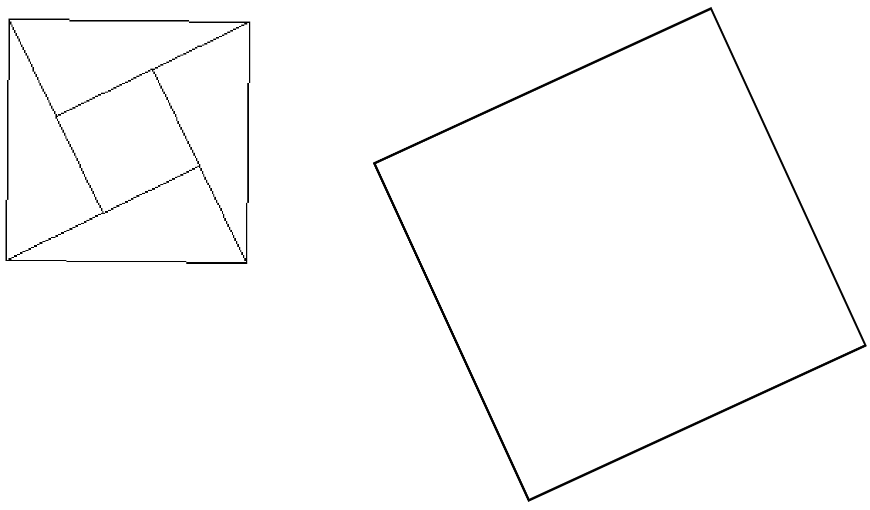
3°) a) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du rectangle.



b) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du carré.

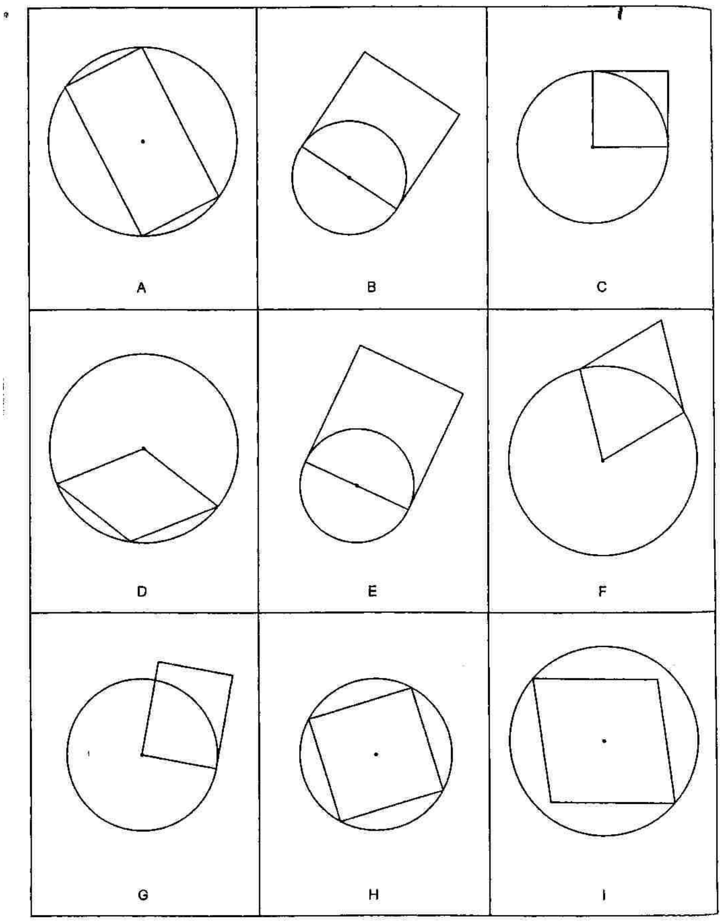


c) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du grand carré (extérieur).

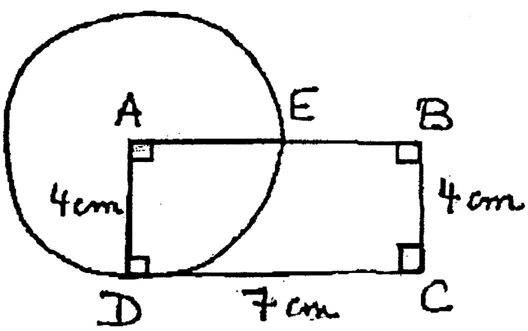


Ces figures sont extraites de CAP CM1, suivi scientifique 6ème, Objectif Calcul CM1…

4°) **CAP Maths CM1 fiche 110 matériels photocopiables**
Les élèves (éventuellement par binômes) reçoivent une de ces figures (pas la même pour tous).
La consigne est donnée en deux temps :
1er temps : « Rédige un message pour permettre à un autre élève de reconnaître la figure.»
2è temps après échanges des messages : « Avec le message que tu as reçu, retrouve la figure parmi celles de la fiche.»



5°) **a)** Le schéma ci-dessous est réalisé à main levée. Il n'est pas en vraie grandeur. Mais les dimensions indiquées sont celles de la figure en vraie grandeur.

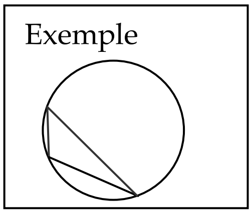


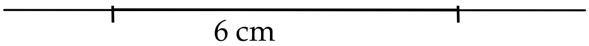
Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

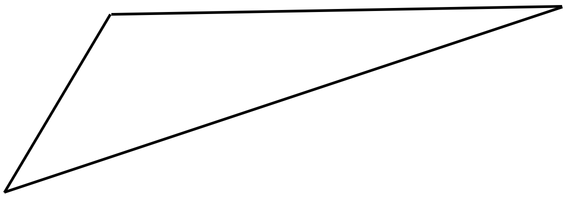
b) D'après Maths et clic 6ème Bordas

Tracer une droite d. Tracer deux points B et C n'appartenant pas à d et situés de chaque côté de d. Placer un point A sur la droite d pour que le triangle ABC soit isocèle en A.

c) On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle.
Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait **6 cm de rayon**.
A toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.







7.2 Annexe 2

Les liens hypertextes ne seront actifs que dans la brochure en cours de production à L'IREM de Lyon.

Stage 2009 :
Stage Géométrie au début du collège.
2ème jour
1°Demi-journée

Donner la fiche avec différents problèmes de construction, la consigne étant simplement de faire les constructions (on peut donner la veille sur un stage de deux jours)
jour 1\PbsConstruction.doc (photocopies à donner) voir annexe 3

DES PROBLEMES DE GEOMETRIE (9 h -10h45),
Activité 1 : DES PROBLEMES DE TRACE

***Objectif* :**
Montrer qu'un même type d'activité peut permettre de viser différents buts

Consigne : « Vous avez essayé de faire les exercices de cette fiche, Pour chacun d'eux, indiquez si vous les donneriez dans vos classes, à quel niveau, avec quel objectif, pour quelles raisons ? »

Travail par groupes avec retour par un rapporteur. Mise en commun : chaque groupe propose pour un exercice, les autres complètent (on peut aussi faire faire des affiches pour avoir tout en même temps)
jour 2\Analyse succincte des problèmes de construction.doc

Synthèse rapide
Ce n'est pas le type de tâche qui définit le problème mais c'est l'objectif visé qui définit quel problème choisir dans le type de tâche.
Pour les élèves, il est important d'autoriser les tracés sur la figure à reproduire, ce qui est impossible sur un manuel. Quelle synthèse en classe ?

Activité 2 : DES PROBLEMES MODIFIÉS

***Objectif* :**
Montrer comment à partir d'un problème donné, le professeur peut jouer sur les variables didactiques pour faire évoluer les procédures des élèves pour favoriser un apprentissage.
Consigne : « Voici 4 nouveaux exercices, qu'ont-ils de différent par rapport aux précédents ? Qu'est-ce que cela modifie dans les procédures des élèves, et pour l'apprentissage….»
jour 2\ElevePBsConstruction.doc ; (photocopies à donner)

Synthèse
Pour un objectif d'apprentissage donné, l'enseignant peut construire des problèmes géométriques où la notion visée est utile pour résoudre le problème, il suffit souvent pour cela de faire évoluer les énoncés de problèmes type en jouant sur les variables didactiques (choix de la figure, du support, des contraintes, agrandissement….)
C'est un apprentissage des techniques ou des savoirs à partir de la résolution de problèmes.
A l'école primaire et au collège, les programmes précisent que les notions s'introduisent et peuvent s'apprendre à partir de la résolution de problèmes. jour 2\problèmes.ppt ;
jour 2\Brousseau.doc ; jour 2\géométriecycle 3pbsMPDussuc.doc (photocopies à distribuer) voir annexe 4

PAUSE (10 h 45- 11h)

DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION SUR TICE (11 h-12h),

Objectifs **:**

- ***Réfléchir sur les apports éventuels de la géométrie dynamique dans les problèmes de reproduction ou de construction et comment jouer sur cette variable didactique pour favoriser l'apprentissage.***

Consigne : « Voici différents exercices de reproduction ou de construction. Pour chacun d'entre eux imaginer les procédures que les élèves peuvent mettre en place soit sur papier soit avec un logiciel de géométrie dynamique. Les proposeriez- vous à vos élèves ? avec quel support ? Pour quelles raisons ?

jour 2\des problèmes à classer.doc (photocopies à donner) (fichier Cabri)

Mise en commun, débat

Synthèse

L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de :

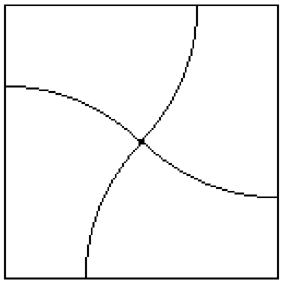
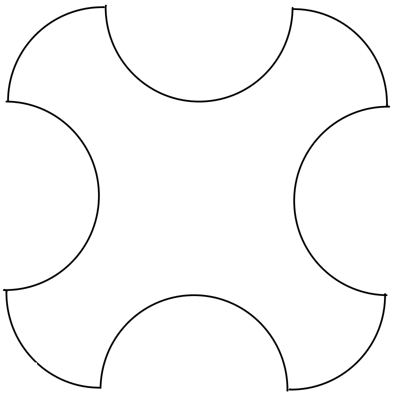
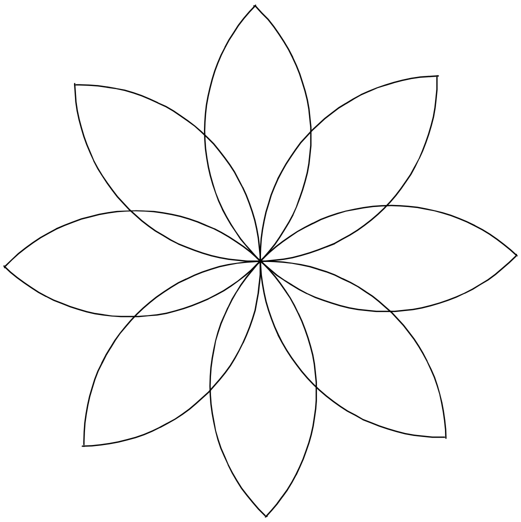
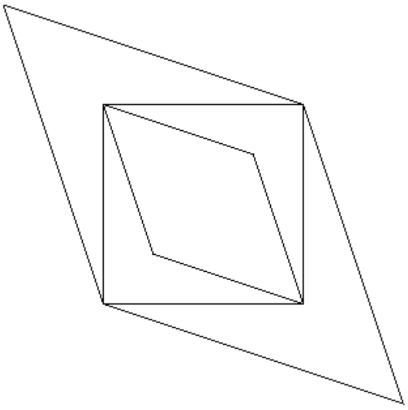
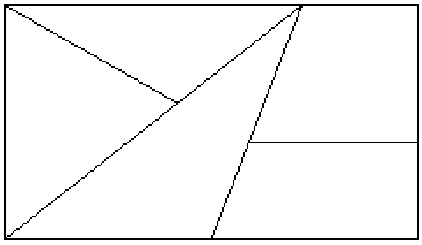
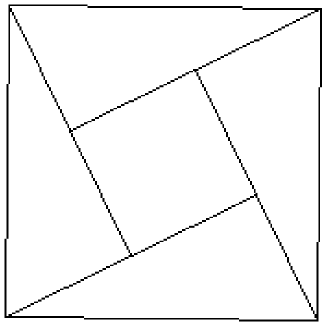
- S'affranchir des difficultés de maniement des outils classiques (soin et précision de tracé)
- De fournir des moyens d'auto validation en bougeant un point de la figure.
- De mettre en œuvre des procédures (de résolution de problèmes) qui ne sont pas accessibles sinon et donc de leur donner du sens. (en particulier les transformations)

Mais la mise en œuvre de ces séances suppose des échanges de procédures et sont conditionnés par une certaine maitrise de l'outil par les élèves.

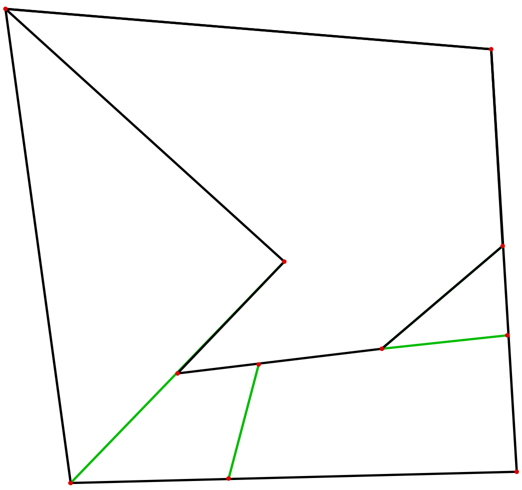
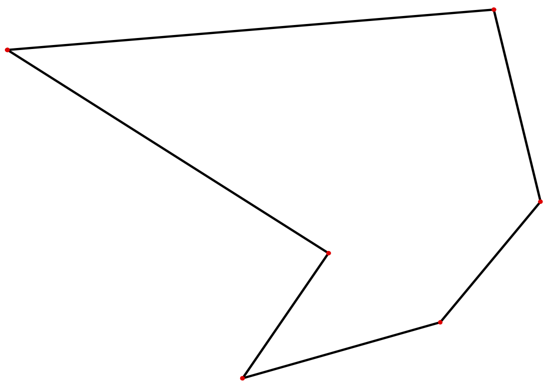
7.3 Annexe 3

Problèmes de construction

1°) Reproduis à l'identique les figures ci-dessous, tu vérifieras avec un papier calque.

Compléter, à partir du modèle, la figure incomplète, en utilisant la règle non graduée seulement.

7.4 Annexe 4

Des problèmes pour enseigner la géométrie en cycle 3

On retrouve les caractéristiques des situations problèmes :

1. L'élève a un problème à résoudre (dans l'espace qui nous entoure, sur la feuille de papier…)
2. Les connaissances ou les compétences visées sont nécessaires à la résolution du problème
3. L'activité de l'élève est finalisée par un but, l'élève peut vérifier lui-même si le but est atteint ou non (validation), la comparaison entre sa production et le but à atteindre est un moment essentiel
4. L'élève peut faire des essais, des erreurs qui sont considérées comme des étapes de l'apprentissage
5. Les échanges entre élèves sont favorisés.

Suite à ces situations, il faut bien sûr ménager des temps de réinvestissement et d'entrainement.

Les principaux problèmes sont :	Exemples
des problèmes de localisation	communication de la position d'un point sur un quadrillage, sur une feuille blanche, le receveur doit placer au même endroit sur un support identique
des problèmes d'identification	jeu du portrait sur des triangles, des quadrilatères, des polyèdres... demande d'informations au maître ou à un autre élève pour reconnaître un objet parmi un lot d'objets de la même famille, seulement reconnaissance pour faire fonctionner des propriétés ou construction à l'identique, travail collectif, une question après l'autre ou recensement de toutes les questions orales ou écrites.
des problèmes de description	reconnaître un objet parmi d'autres programme de construction
des problèmes de reproduction à l'identique ou d'agrandissement-réduction	il faut contraindre l'élève à abandonner une démarche du type : tracé à la règle/validation à vue/essai et réajustement ; il est important de bien choisir le modèle, le matériel utilisé (papier et instruments…), l'orientation du modèle dans la feuille, la donnée ou non d'un 1er élément (un côté a déjà été tracé), la taille du modèle, nombre de modèles et éloignement... L'organisation de la séance est très importante.
des problèmes de construction	A partir d'une description, construire un objet qui est absent (avec un programme de construction ou à partir des caractéristiques de l'objet carré de diagonale 6cm) construction avec des contraintes : compléter le patron d'un solide
des problèmes de représentation,	représentation plane d'un objet de l'espace, en « perspective » ou en patron
des problèmes de mesurage	mesurer un côté d'un triangle coupé par changement d'échelle par exemple
d'autres problèmes : « chercher tous les … »	chercher tous les patrons d'un cube, tous les pentaminos, tous les tétracubes, tous les triangles à construire sur un planche à 9 clous, tous les rectangles dans un quadrillage de 5×3…

Construction d'une progression par rapport à une notion
On peut mettre en progression des situations visant l'apprentissage d'une notion géométrique en combinant les différents types de problèmes. Pour « angle droit » par exemple :

1. Un classement de figures planes peut nécessiter le recours à cette notion pour différencier carrés et losanges presque carrés, l'équerre (ou le gabarit d'angle droit) sera utilisée
2. Un jeu de portrait sur un lot de quadrilatères permet d'expliciter les propriétés des carrés, rectangles, losanges
3. Une reproduction ou une construction à terminer permet de rendre opératoire les propriétés exprimées et d'utiliser l'équerre comme instrument de construction
4. Un jeu de message émetteur-récepteur pour reproduire une figure simple comportant des angles droits obligera à l'utilisation d'un vocabulaire adéquat, à l'explicitation des procédures de construction.

D'après Marie Paule Dussuc IUFM Bourg en Bresse, H. Zucchetta

Atelier A6

MODÉLISATION ET ÉCRITS RÉFLEXIFS : DES OUTILS POUR APPRENDRE ? RÉFLEXIONS À PARTIR D'UNE EXPÉRIMENTATION EN CM2

Jean-Claude Rauscher
MCF, ER de l'IUFM d'Alsace , IREM de Strasbourg et ACODIS

Robert Adjiage
MCF, IUFM-UDS, LISEC EA 2310 (ACODIS)

Tatiana Beliaeva
MCF, IUFM-UDS, IRMA-UMR 7501 et ACODIS
jc.rauscher@wanadoo.fr

Résumé
Nous avons proposé aux participants de cet atelier de réfléchir avec nous au potentiel et aux limites d'une ingénierie didactique mise à l'épreuve dans un CM2 de ZEP de la banlieue strasbourgeoise. Cette ingénierie porte sur une tâche de modélisation étayée par la production et l'utilisation par les élèves d'écrits réflexifs. Notre hypothèse majeure est que la notion de modèle et de modélisation est didactiquement pertinente à ce stade de la scolarité.
Ce qui suppose que :
- ce n'est pas une modélisation « au rabais » ;
- une séquence de modélisation a des effets spécifiques et repérables sur la construction, la déconstruction et la réorganisation de savoirs des élèves.

Les travaux dans l'atelier ont, d'une part, porté sur l'analyse a priori du problème proposé aux élèves et de ses potentialités, et, d'autre part, sur l'analyse de progressions d'élèves observées dans le cadre de l'expérimentation à partir de leurs écrits.
Nous rendrons ici compte des principales présentations, analyses et discussions qui ont émaillé son déroulement.

1 PRESENTATION DE L'ATELIER ET DE SON COMPTE-RENDU

1.1 La finalité de l'atelier

Dans le cadre de notre groupe de recherche Acodis[1], nous avons élaboré et mis à l'épreuve une ingénierie didactique portant sur une tâche de modélisation dans un CM2 de ZEP de la banlieue strasbourgeoise. L'hypothèse majeure de notre ingénierie est que la notion de modèle et de modélisation est didactiquement pertinente à ce stade de la scolarité, c'est-à-dire que ce n'est pas une modélisation « au rabais » et qu'une séquence de modélisation a des effets spécifiques et repérables sur la construction, la déconstruction et la réorganisation de savoirs des élèves. De plus, nous faisons l'hypothèse que le recours à des écrits « réflexifs » (Rauscher, 2006 a&b) : écrire pour expliciter ou programmer son travail, écrire sur les écrits de ses pairs en les commentant, reprendre et/ou finaliser la rédaction d'une solution du problème, favoriserait leur travail de modélisation. Pour mettre ces hypothèses à l'épreuve, nous avons observé une séquence de classe au cours de laquelle les élèves ont été invités à résoudre le problème du « géant » qui sera présenté plus loin.

---

[1] Apprentissages en Contexte didactiques. *Membres* : Robert Adjiage, Tatiana Beliaeva, Marie-José Rémigy, Jean-Claude Rauscher, Virginie Deloustal, Nicolas Séchaud.

La séquence, menée par Nicolas Séchaud (PEMF) dans sa classe en mai et juin 2008, se compose de six séances plus une séance « décrochée » consacrée à des compléments sur le quotient « décimal » de deux entiers. Avec l'équipe de recherche, Nicolas Séchaud a participé à l'élaboration et à la régulation du scénario d'enseignement. Au cours de l'année 2009, notre équipe de recherche a commencé à analyser le corpus d'observations recueilli (notes d'observations prises au cours des séances, analyses par le professeur de sa conduite de classe et des adaptations et infléchissements qu'il proposait, écrits des élèves…).
L'atelier dont nous faisons ici le compte-rendu avait pour perspective de présenter notre recherche en cours et nos premières constatations, mais surtout de partager nos réflexions avec les participants sur la pertinence et les limites d'un tel projet d'enseignement.

1.2 Le canevas de l'atelier

Les participants ont été invités à travailler tantôt individuellement, tantôt en petits groupes. Ils ont successivement été amenés à analyser :

- la tâche de résolution du problème du géant,
- la faisabilité et les enjeux didactiques de cette tâche,
- des écrits de résolution produits par des élèves lors de l'expérimentation, en termes d'évolution des procédures et des apprentissages.

De leur côté, les animateurs sont intervenus notamment pour :

- préciser leur propre analyse de la tâche de résolution du problème du géant,
- préciser leur outil d'analyse des écrits de résolution et son application aux productions des élèves concernés,
- synthétiser les productions des participants,
- animer la discussion autour de la validation de l'hypothèse de l'ingénierie.

Nous allons rendre compte des présentations et des réflexions menées dans le cadre de cet atelier en deux parties principales. La première (paragraphe 2) sera consacrée à la présentation et à la résolution du problème et à l'analyse a priori de ses potentialités et de ses limites dans la perspective d'un processus de modélisation[2]. Dans la deuxième partie (paragraphe 3), nous aborderons l'analyse de progressions d'élèves observées dans le cadre de l'expérimentation à partir de leurs écrits, non sans avoir préalablement donné des précisions sur le dispositif d'enseignement et sur l'origine des écrits soumis à examen dans le cadre de l'atelier.

2 LE PROBLÈME DU GÉANT : PRESENTATION ET ANALYSES A PRIORI

2.1 Présentation et analyse du problème

2.1.1 Un problème de Fermi

La photographie suivante est copiée de http://www.problempictures.co.uk/, avec l'aimable autorisation des auteurs.

[2] Pour la lisibilité du compte-rendu, nous avons dérogé à l'ordre chronologique du déroulement de l'atelier. En effet, l'analyse de la tâche n'a été présentée aux participants qu'après que ces derniers eurent eux-mêmes été invités à résoudre le problème.

Voici l'énoncé distribué aux élèves dès la première séance : *Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant ?*

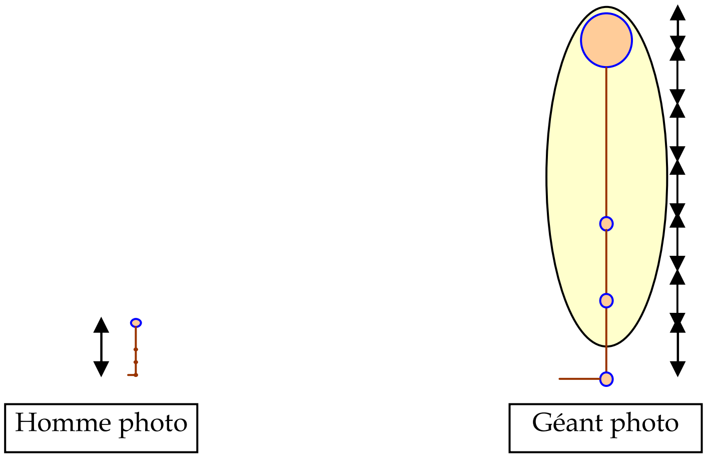
Ce problème est un problème dit de Fermi (Peter-Koop, 2004, p. 457)[3]. En voici les principales caractéristiques :

- aucun nombre n'est fourni dans l'énoncé ;
- résoudre ce problème nécessite de faire des hypothèses : taille d'un des hommes de la photo, proportions du géant, taille d'un pied d'homme… ;
- le problème est ouvert : la réponse dépend des hypothèses et de la précision des mesures éventuellement prises (mesure directe de la stature de l'homme, de la semelle du géant…) sur la photo ;
- personne ne connaît la « bonne » réponse, ni les élèves, ni le maître, ni les chercheurs ;
- la réponse ne peut être fournie qu'au moyen d'une estimation, par exemple sous la forme d'une fourchette.

2.1.2 L'analyse de la tâche

Nous avons, depuis deux ans, proposé de résoudre ce problème à des formateurs IUFM de toutes disciplines, des professeurs de mathématiques et des écoles, stagiaires ou en service, des élèves de cycle 3 dont ceux de la classe observée, des collégiens, des citoyens « lambda »… Trois grands types de stratégies sont apparus.

Stratégie 1.

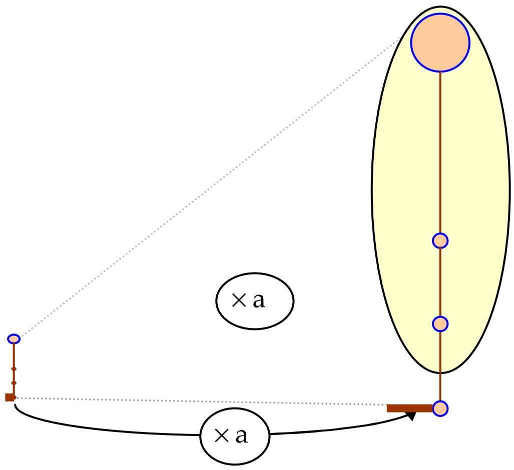


Pour mesurer la stature du géant, on a besoin d'un élément de la photo qui servira d'étalon, par exemple un des deux hommes (stature le plus souvent estimée à 1,80 m). Combien de fois peut-on reporter cet homme sur toute la hauteur du géant (supposé « raide sous la toise ») ? Comme on ne peut pas répondre directement à cette question, vu qu'une partie du géant est cachée, on doit se contenter de la seule information disponible, à savoir que l'homme arrive approximativement à hauteur du mi-mollet du géant. Estimer le rapport géant / homme revient donc à estimer le rapport du mi-mollet au corps entier. A ce stade du raisonnement, il devient nécessaire de faire une hypothèse d'homogénéité, explicitement ou implicitement : ce rapport est constant quel que soit l'individu, adulte ou enfant (soi-même, un camarade…), géant ou pas, soit, exprimé en termes mathématiques : « quels que soient les individus i et j considérés, il existe une dilatation qui fait passer de l'un à l'autre ». Il reste alors à multiplier la stature réelle de l'homme par ce rapport, (en général compris entre 6 et 7), pour obtenir un encadrement de la taille du géant. Une partie de la complexité (les différences de proportions interindividuelles) est ainsi

[3] Fermi posait à ses étudiants des problèmes qui ne pouvaient être résolus qu'aux termes d'une estimation raisonnable comme : « *Combien y a-t-il d'accordeurs de pianos à Chicago ?* »

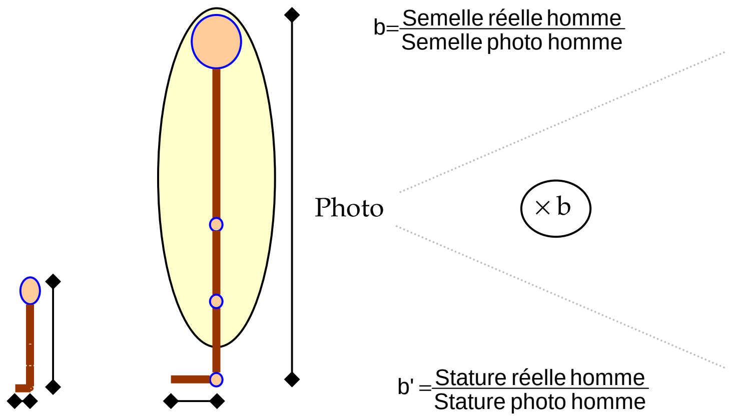
négligée, mais c'est la seule façon de proposer une réponse raisonnable. Cette stratégie a largement la faveur des élèves et des non-spécialistes de mathématiques.

Stratégie 2.



Cette stratégie repose aussi sur l'hypothèse d'homogénéité évoquée ci-dessus. Pour trouver une approximation du coefficient de dilatation de l'homme au géant, il suffit d'évaluer, par exemple par mesurage direct sur la photo, le rapport de deux segments homologues (le plus souvent le rapport des semelles ou des cous-de-pied). Il suffit alors d'appliquer ce coefficient de dilatation à la stature réelle estimée de l'homme pour obtenir une approximation de la stature réelle du géant. Cette stratégie est celle qui a la faveur des spécialistes en mathématiques, mais elle a aussi été observée auprès de « bons » élèves.

Stratégie 3.



Comme les précédentes, cette stratégie repose sur l'existence d'une dilatation de l'homme au géant, mais au lieu de calculer le rapport de dilatation (coefficient fonctionnel), elle passe par la conservation du rapport interne de deux segments du corps, le plus souvent le rapport stature / semelle. En s'appuyant sur la photo, il est possible d'évaluer ce rapport pour un des hommes d'une part, la longueur de la semelle du géant d'autre part et d'en déduire par un calcul de quatrième proportionnelle une approximation de la stature du géant-photo. Pour estimer la stature du géant réel il suffit de trouver une valeur possible pour le coefficient de la dilatation qui fait passer de la photo au réel en calculant le rapport de deux segments homologues, par exemple un des rapports b ou b' de la figure ci-dessus… et de gérer les conflits fort instructifs qui s'ensuivent lorsque des élèves constatent que b et b' diffèrent légèrement.
Cette stratégie, plus rare que les précédentes, a été observée chez des professeurs des écoles et des élèves.
Toutes les stratégies utilisées passent par la construction d'un corps humain standardisé dans ses proportions, soit d'un modèle des proportions du corps humain. Elles reposent sur trois ruptures de contrat importantes : accepter qu'une hypothèse d'homogénéité des individus soit nécessaire bien que fausse en toute rigueur (les contre-exemples abondent dans l'environnement des enfants) ; accepter

qu'une réponse puisse être un intervalle ; entrer dans une pensée relative, c'est-à-dire une pensée qui prenne en compte les proportions et non les dimensions absolues. Ce dernier point est illustré par la remarque d'un élève B. de la classe : « *Ce qui m'a surpris, oui tout ce qui m'a surpris, c'est que le prof m'a dit que N. mesure ma taille, j'étais choqué quand j'ai pris ça* ». Il faut dire que B. est le plus grand de la classe et N. la plus petite. Bien sûr, le maître n'a jamais dit que B. et N. avaient la même taille, mais que, une partie du géant étant cachée, on était amené à « *faire l'hypothèse raisonnable que le géant est fait comme nous, et donc qu'il est légitime d'évaluer le rapport Géant / botte en reportant les parties du corps correspondantes sur soi-même, qu'on soit B. ou N.* ». Pour B., les tailles absolues font obstacle à la nécessité de prendre en compte des rapports.
Remarquons pour finir qu'il existe deux procédures pour estimer la valeur des rapports nécessaires à la résolution du problème : sans numériser les grandeurs concernées, par exemple en reportant sur son propre corps ou celui d'un camarade un objet tiers de la longueur de son mi-mollet ; en numérisant a priori les grandeurs concernées : par exemple pour un enfant de cycle 3, en mesurant son mi-mollet (disons 25 cm) et sa stature (disons 160 cm), puis en effectuant le quotient de ce dernier nombre par le premier. Cette dernière procédure peut se substituer à la première mais peut aussi la suivre (pour affiner, contrôler…). Sa mobilisation au cycle 3 risque d'être entravée par trois types d'obstacles : obstacle entier / décimal (existence d'un nombre - ici 6,4 - tel que : $25 \times \ldots = 160$) ; obstacle de l'interprétation de la partie décimale comme multiplicateur (25×6 est bien compris, mais quid de $25 \times 0{,}4$?) ; obstacle de la division euclidienne : $160 = 25 \times 6 + 10$ (les élèves comprennent que la réponse passe par « 160 divisé par 25 », mais seule la division euclidienne leur est disponible et ils sont embarrassés par le reste).

2.2 Les productions des participants et la discussion avec les animateurs

Dans la première partie de l'atelier, les participants ont été invités à résoudre ce problème puis à répondre individuellement aux questions suivantes : « *Est-il souhaitable de proposer ce problème à des élèves ? Si non pourquoi ? Si oui à quel(s) niveau(x) et dans quel(s) but(s)* ? ». Pour la mise en commun, il a été demandé de se regrouper par binômes, de discuter à l'intérieur de chaque binôme des réponses fournies par chacun avant de présenter à tout le groupe une synthèse de cette concertation.

2.2.1 La résolution du problème

Connaissant et ayant analysé les différentes façons dont divers publics ont résolu ce problème, nous étions ici curieux de savoir comment ce public de formateurs et de chercheurs de la COPIRELEM aborderait le problème à son tour dans le cadre de cet atelier. En fait, dans ce domaine, on a pu constater une assez grande homogénéité entre les participants. Voici les principales caractéristiques de leurs démarches de résolution.

Tous relèvent la nécessité de faire des hypothèses :

- le géant est un homme agrandi, ce qui permet de postuler la constance du rapport des semelles ou des cous-de-pied du géant et d'un des hommes visiteurs ;
- il est indifférent de prendre en compte des semelles de botte ou de chaussure (tennis) pour évaluer le rapport des plantes de pied ;
- la taille d'un des hommes de la photo est comprise entre 1,75 m et 1,80 m.

Ils relèvent aussi la nécessité de recourir à des approximations dues au mesurage des longueurs mobilisées (longueur de la semelle ou du cou-de-pied de l'homme ou du géant), aux erreurs de perspective ou encore à l'inaccessibilité de détails comme le bout de la botte… et en déduisent que la réponse ne peut être qu'approximative.
Une participante répond : « Je ne sais pas » (sous-entendu : en l'absence de précisions sur la plausibilité des hypothèses et des mesures, je ne peux pas répondre), mais accepte de fournir une procédure de résolution tout en précisant que le problème est ainsi idéalisé, donc différent de la réalité.

Fait à remarquer, toutes les procédures de résolution s'appuient sur le calcul du coefficient de la dilatation conjecturée d'un des hommes de la photo au géant. Elles s'apparentent donc unanimement à la deuxième des trois stratégies que nous avons précédemment présentées.

2.2.2 L'évaluation de la situation

En ce qui concerne l'évaluation a priori de la faisabilité et de l'intérêt de proposer une telle situation à des élèves de fin de cycle 3, les réponses des participants furent moins unanimes.
Deux arguments « pour » et deux arguments « contre » étaient demandés. En faveur du « pour », on relève :

- recours au modèle de la proportionnalité dans une situation qui a du sens pour les élèves (notamment, relève une des participantes, car ce sont surtout des grandeurs, et pas seulement des nombres, qui sont impliquées) ;
- nécessité de prendre des initiatives : faire des hypothèses, entreprendre des mesures ou des reports ;
- nécessité de discuter ces hypothèses, ces résultats de mesurage et leurs éventuelles contradictions expérimentales, de revenir sur les erreurs de mesurage ;
- déterminer une longueur inaccessible ;
- situation demandant de réinvestir différentes notions comme la mesure, les ordres de grandeur, certains calculs, la proportionnalité.

Les arguments « contre » sont les suivants :

- les approximations peuvent mener à des résultats contradictoires et/ou abusifs ;
- difficultés à anticiper la taille du géant ce qui réduit les possibilités de contrôle des résultats ;
- obligation de formuler des hypothèses abusives (« sommes-nous tous faits 'pareil' » ?) ;
- rôle des connaissances du monde mis en relation avec la conférence de Stéphane Bonnéry du 3 juin au même colloque ;
- quasi-impossibilité (sauf à se déplacer dans le parc d'attraction concerné) d'une validation par des rétroactions du milieu ou d'une communauté scientifique indiscutable.

2.2.3 La discussion avec les animateurs

On trouve dans les arguments « pour » bon nombre de réponses aux arguments « contre ». Modéliser peut amener à négliger certaines informations (difficiles ou impossibles à obtenir) : « *…un modèle est un moyen, pour un actant donné, de traiter un problème donné par l'usage d'un répertoire de connaissances "restreint". L'actant met en présence sciemment un "univers représenté" et un "univers représentant"* » parce que « *le problème posé dans l'univers représenté n'y est pas résoluble.* » (Brousseau, 2003a, p. 13). L'important est que les approximations et les hypothèses soient explicitées et contrôlées, que l'utilisateur soit conscient que les résultats dépendent de ces hypothèses et approximations et qu'il se tienne prêt à renoncer ou à dépasser le modèle si une des hypothèses ou approximations se révélait intenable, soit par invalidation directe, soit parce qu'on a atteint la limite de validité du modèle.
Trois arguments défendus par les animateurs émergent de la discussion :

- La question de la taille de ce géant peut être posée par un observateur, adulte ou enfant, de la photo. Le problème n'est donc pas artificiel. Accepter de chercher une réponse à cette question, en prenant soin de respecter toutes les précautions exposées ci-dessus, nous semble participer à la valorisation des mathématiques.
- Le modèle construit est consistant dans ce sens où cette construction est extensible à nombre de problèmes de calcul de longueurs inaccessibles.
- Résoudre ce problème peut participer à la construction de connaissances du monde. Pensons à la réflexion de B. qui témoigne en creux de la nécessité dans laquelle se trouve cet élève d'entrer dans le monde des proportions en renonçant à une vision absolue des grandeurs. Cette situation nous semble donc respecter la « condition » de Dhombres (2003, p. 11) : « *"Les historiettes" utiles pour l'enseignement des mathématiques... ne doivent pas conduire à oublier qu'il y a création par reconnaissance d'une inadéquation au modèle précédent.* ».

Le problème de la validation est plus délicat. Il aurait sans doute été plus judicieux d'insister auprès des élèves sur le caractère prédictif de leurs réponses. Cette prédiction pourrait certes être confrontée à une mesure directe de la taille du géant (par exemple via le site Internet du parc d'attraction). Mais ce n'est pas une nécessité car nous pensons avec Duval (2005, pp. 15-16) qu'il y a trois types de preuve : par nécessité interne à des opérations discursives de la pensée (fortement présent mais non exclusif dans notre ingénierie) ; au moyen d'un dispositif expérimental ; par nécessité socio-normative (ces deux derniers types de preuve semblant avoir les faveurs d'une des participantes de l'atelier).

3 ANALYSE DE PROGRESSIONS D'ELEVES A PARTIR DE LEURS ECRITS

3.1 Des précisions sur l'utilisation de l'écriture dans le dispositif d'enseignement et sur la nature des écrits à examiner par les participants

Tout au long de la séquence, les élèves ont été sollicités pour écrire, partager et exploiter des textes pour résoudre le problème.

Pour donner une idée des activités de réflexion proposées aux élèves et basées sur leurs écrits, nous donnerons l'exemple du travail demandé aux élèves le 30 mai à partir d'une sélection de textes produits dans la première séance (23 mai). A la fin de cette séance, les élèves avaient à répondre aux questions suivantes : *« Quel est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire ça ? »*. Pour la séance du 30 mai, nous avions sélectionné sept textes que le lecteur trouvera en annexe 1A, qui reflétaient la diversité d'approche initiale du problème par les élèves. Les élèves avaient à lire ces textes et à choisir individuellement une réponse qui ne leur paraissait pas claire et de dire pourquoi, de choisir une réponse qui leur permettait d'avancer dans la résolution du problème et de dire pourquoi et enfin de désigner une réponse qui leur paraissait fausse ou inutile et de dire pourquoi.

Dans l'annexe 1B le lecteur trouvera les choix justifiés d'une élève, Sophie. Ils montrent une idée qui l'intrigue (le rapport 9 dans le texte 2), une idée qu'elle retient (la considération de la partie invisible du géant sur la photo à partir du texte 5) et aussi sa conception erronée de la réponse à obtenir (texte 3 qu'elle rejette car elle n'accepte pas l'idée d'une taille approchée).

Dans le document annexe 1C, un tableau permettra au lecteur de prendre connaissance plus globalement du nombre et de la place des différents écrits demandés aux élèves au cours de la séquence.

Le recours à ce travail d'écriture visait deux effets :
- initier, partager, sélectionner des idées quant à la résolution du problème. Les écrits produits et exploités ont ici les fonctions de communication et de mémoire au service de l'heuristique ;
- développer et approfondir ces idées par les fonctions d'objectivation et de traitement qu'offre le travail de production et de reprise des écrits.

Les écrits produits par les élèves étaient donc d'une part, envisagés classiquement en tant que productions utilisables pour servir de matériau aux échanges et aux débats oraux dans la classe ou d'outils de mémoire à consulter. Mais l'activité d'expression écrite exige aussi une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit par rapport à ce dont il peut avoir conscience en s'en tenant à la seule communication orale (Vygotski, 1934/1997). Sous ce point de vue, l'écriture comme activité spécifique d'expression était envisagée ici comme un moment essentiel dans le processus de modélisation qui amène les élèves à résoudre le problème.

L'examen des textes successifs, produits par les élèves, nous donne des indications sur la progression de ces derniers dans leur travail de résolution et le processus de modélisation qu'ils ont plus ou moins développé.

Pour partager ce travail d'analyse des progressions des élèves, nous avons proposé aux participants les écrits de quatre élèves, Christina, Anna, Dimitri et Sarah, correspondant plus précisément aux évolutions de la rédaction d'une solution du problème. Ces quatre élèves ont été choisis par les animateurs parce qu'ils représentaient bien a priori la diversité des progressions repérables dans la classe. Pour chacun de ces élèves, les participants avaient à leur disposition quatre écrits successifs correspondants au texte initial du 23/05/08 (première séance), aux deux textes intermédiaires du 06/06/08 et du 09/06/08, et enfin au texte final du 17/06/08.
Dans le cadre de l'atelier, très concrètement, chaque groupe de participants avait à étudier les parcours de deux des quatre élèves retenus en termes d'évolution des procédures et des apprentissages. Nous avons présenté ensuite l'outil d'analyse que nous avions, de notre côté, conçu pour analyser les textes, puis notre propre analyse des textes des quatre élèves.

Pour faciliter la lecture du texte présent, nous allons encore une fois modifier l'ordre chronologique du déroulement de l'atelier et commencer par présenter cet outil à partir d'un exemple. Nous appliquerons ensuite ce dernier aux textes des quatre élèves choisis et ajouterons chaque fois les éléments d'analyse apportés, de leur côté, par les participants de l'atelier.

3.2 Présentation de notre outil d'analyse

Dans le cadre de notre expérience, nous avions à notre disposition les textes des vingt-et-un élèves de la classe. Nous avons conçu et développé un outil pour les analyser et rendre compte des différences entre élèves et de leurs progressions. Cet outil a été développé à partir des raisonnements que les élèves ont majoritairement produits au long de la séquence et tout particulièrement dans la dernière séance où les productions étaient les plus complètes.

Nous présentons cet outil dans le tableau suivant dont le pivot est la deuxième colonne avec le développement des argumentations les plus complètes rencontrées.

Au pied du Géant : outil pour analyser les raisonnements

	Raisonnement possible (celui qui est en général mis en avant par la dernière séance)	**En conséquence repérage d'éléments du raisonnement indiqués ou non**
Projet de report d'un étalon	1. *Pour avoir une estimation de la taille de la statue il faudrait savoir combien de fois je peux mettre la taille d'un homme dans la statue du géant.*	évocation du rapport homme/géant
	2. *Un homme de la photo a une taille d'à peu près 1,80 m.*	évocation d'une estimation de la taille d'un homme
	3. *Or sur la photo l'homme arrive à peu près à la mi-jambe du géant (il faudrait donc savoir combien de demi-jambes je peux reporter sur la statue du géant).*	évocation du rapport homme/segment de la jambe du géant
Modélisation du corps du géant par celui d'un élève	4. *On fait l'hypothèse qu'un géant est fait à peu près comme un élève*	évocation de la justification de l'identification d'un géant à un élève
	5. *Je prends donc un élève pour représenter le géant*	évocation de élève = géant
	6. *Comme l'homme arrive au mi-mollet du géant, je prends un objet qui correspond à peu près à une demi-jambe d'un élève*	évocation de objet = homme
	7. *Puis je regarde combien de fois je peux reporter cet objet sur l'élève*	évocation du rapport objet/élève
Calcul et estimation du résultat	8. *Calcul orienté vers la production d'un résultat pour la taille du géant et explicitation de ce résultat*	calcul final
	9. *Je fournis la réponse sous forme d'une estimation*	évocation de l'approximation
Schéma corps	10. Mobilisation d'une évocation du schéma corporel : *jusqu'à la mi-jambe du géant ça fait … jusqu'à la taille ça fait le double et jusqu'à la tête, ça fait encore le double…*	évocation d'un rapport d'une partie du corps au corps

Commentaires complémentaires : il y a deux types de stratégies :

1. Celles mobilisant explicitement la modélisation du corps du géant par un corps d'élève : « On fait comme si on était le géant ». Cette stratégie débouche sur des manipulations de report d'un segment du corps (de l'élève) sur toute sa taille (Combien de fois mon mi-mollet dans toute ma hauteur ?). C'est la stratégie 1 décrite en 2.1.2.
2. Celles qui ne mobilisent qu'une intériorisation du schéma corporel qui amène à accepter, sans reports sur son corps, que des rapports simples existent dans tout corps humain et notamment dans le corps du géant : « *Deux fois le mi-mollet ça fait le genou, deux fois le genou ça fait une jambe, deux fois une jambe ça fait le corps entier* ». Comme la stratégie 1 de 2.1.2, cette stratégie vise à mesurer la taille du géant au moyen de l'étalon « homme » ; elle s'en différencie par les moyens d'obtenir le rapport entre la longueur à mesurer et l'étalon choisi.

La stratégie 2 a été observée lors de la première séance. Elle requiert les arguments 1, 2, 3 (projet de report d'un étalon), 10, 8 et 9 (justification par le schéma corporel et calcul d'une fourchette pour le résultat).

La stratégie 1 a été observée après la première séance. Elle requiert les arguments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 (projet de report d'un étalon, nécessité de modéliser le corps du géant par celui d'un élève pour calculer le rapport géant/homme, calcul d'une fourchette pour le résultat).
Dans le codage des raisonnements élèves, nous codons gris ou noir les « non », bleu les « oui » ou « implicite ». Nous colorons en couleur pâle (gris ou bleu clair) le codage des arguments non requis pour un raisonnement donné ; nous colorons en couleur soutenue (noir ou bleu foncé) le codage des arguments requis.
La valeur d'un raisonnement augmente donc avec le bleu soutenu et diminue avec le noir soutenu.
Remarque : Parfois nous sommes amenés à signaler une présence « implicite » d'un élément du raisonnement lorsque la logique du texte permet de l'induire.

3.3 Analyse des progressions de Christina, Anna, Dimitri et Sarah

Le lecteur trouvera en annexe, pour chaque élève, les quatre textes qui font l'objet de la présente analyse.
Avec Christina et Anna, nous aurons des exemples représentatifs d'évolutions contrastées. Christina, comme beaucoup d'élèves de la classe, intègre progressivement et efficacement les composantes d'un raisonnement complet. Ce n'est pas le cas de quelques autres élèves comme Anna qui finit néanmoins par en saisir quelques éléments disparates.
Avec Dimitri et Sarah, nous avons des exemples d'évolutions plus singulières. Ces deux élèves utilisent d'emblée et de façon pertinente la notion de proportionnalité. Dimitri persistera dans cette perspective et l'intégrera dans le raisonnement majoritairement partagé dans la classe. Sarah en revanche, après un bon départ, semblera contrariée dans sa progression en essayant d'intégrer des éléments de raisonnement extérieurs à sa perspective initiale.
Mais, quelle que soit la stratégie envisagée par les élèves pour résoudre le problème, une difficulté était de se donner des données ou estimations numériques de départ (taille d'un des hommes de la photo) sur lesquelles baser leur raisonnement. Lors de la première séance, ils étaient désarçonnés par ce problème sans nombres…

3.3.1 Le cas de Christina

Notre analyse résumée dans un tableau :

Christina	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo[4]. du rapport homme/géant	Non	**Non**	**Oui**	**Non**
évo. taille d'un personnage	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la comp homme/ segment géant	Non	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo just. de l'id. géant élève	Non	**Non**	**Non**	**Implicite**
évo. de élève = géant	Non	**Non**	**Oui**	**Implicite**
évo. de objet = homme	Non	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	Non	**Oui**	**Oui**	**Oui**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. rapport partie du corps au corps	**Oui**	Non	Non	Non

Commentaires :

Lors de la première séance (23/05/08), comme beaucoup d'élèves, Christina commence par mesurer une grandeur sur la photo distribuée. En l'occurrence elle mesure « *la taille de la jambe* » (9,7 cm).

[4] Pour des raisons de place, nous avons abrégé « évocation » en « évo »

Mais que faire ensuite avec cette donnée obtenue avec la règle sur la photo ? Comment faire le lien avec l'univers réel de ce parc d'attractions ? Comme beaucoup d'élèves, Christina transforme pour cela les cm, correspondant à l'univers de la photo, en m, une unité qui semble certainement à ses yeux mieux correspondre à la réalité du parc. A ce stade, aucun recours à un élément tiers au géant n'est donc à noter.
A partir de là, comme plusieurs élèves, elle utilise cette mesure pour trouver une estimation de la taille du géant en rapportant la mesure d'une partie du corps à tout le corps, ici par doublages additifs répétés justifiés par la référence à un schéma corporel qu'on peut juger pertinent.

A priori et curieusement, lors de la deuxième séance (06/06/08), Christina, dans ce qu'elle écrit, ignore la photo. Elle ne considère que le rapport entre un tube de colle et elle-même *(« je mesure 18 colles »)*. Que représente ce tube de colle ? Elle n'en dit rien. De même qu'elle ne justifie pas le fait qu'elle prend sa taille *(« et en m, 1,65 m »)* comme référence pour appliquer le rapport entre elle et le tube de colle. Il faut dire que c'est dans cette séance que l'idée qu'on pourrait se référer au rapport entre un personnage de la photo et le géant, et sa transposition dans un rapport objet/élève, a été diffusée en classe (à partir du recensement par les élèves d'idées utiles pour la résolution apparaissant dans les sept écrits sélectionnés par le maître issus de la séance du 23/05/09 annexe 1A). Visiblement Christina s'en saisit en partie mais ne restitue pas encore dans son écrit l'articulation entre la photo et la référence au réel de la classe pour justifier ce transfert.

En revanche, dans les deux derniers de ses écrits (09/06/09 et 17/06/08), Christina explicite les éléments importants d'un raisonnement complet qui l'amène à une estimation cohérente de la taille du géant avec l'hypothèse que le géant est fait comme un élève *(« géant, nous »).*

Nous voyons, à travers cette analyse, que Christina a réussi progressivement à intégrer des éléments pertinents pour développer un raisonnement cohérent et quasi complet. Cette constatation rejoint d'ailleurs le sentiment qu'elle exprime après le 17 juin à propos de cette séquence : *« Cela m'a surpris de savoir que les hommes à côté servaient à quelque chose. J'ai appris des choses car ça m'a appris comment mesurer le géant quand on ne voit pas le reste du corps ».*

3.3.2 Le cas d'Anna

Notre analyse résumée dans un tableau :

Anna	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la. taille d'un personnage	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la comp. homme/segment géant	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo just. de l'id. géant élève	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de élève=géant	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de objet=homme	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	Non	**Non**	**Non**	**Implicite**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. rap. partie du corps au corps	**Non*.**	Non	Non	Non

Commentaires :

Au départ, dans le texte du 23/05/08 tout comme Christina, Anna semble mesurer certaines longueurs de la photo *(« moitié de la jambe : 9,5 cm »)*. Utilisation du double décimètre pour mesurer par exemple le

pied et la jambe. Point commun aussi avec Christina, elle passe de l'univers de la photo à l'univers réel du parc d'attractions en remplaçant les centimètres par des mètres !
Mais comment obtient-elle la longueur des éléments qui ne figurent pas sur la photo *(« bras droit : 9 cm »* ? En étant optimiste on peut imaginer que c'est par estimation par rapport aux autres parties du corps et y voir la mobilisation d'un schéma corporel implicite. Mais on peut aussi en douter car, contrairement à Christina, le traitement qu'elle applique aux données ainsi récoltées ne semble pas relever d'un schéma pertinent pour estimer la taille du géant puisqu'elle additionne les mesures des différents membres (pieds, jambes, bras).

Dans le texte du 06/06/08, seule la partie encadrée semble faire référence à sa procédure initiale. Mais cette fois c'est une multiplication des différentes parties du corps qui est évoquée sans qu'on n'en sache guère plus. Par ailleurs, cet écrit semble déconnecté de la recherche d'une procédure de calcul de la taille du géant. En fait, Anna semble reprendre à son compte une question posée par le maître au cours de cette séance : y a-t-il une variation des mesures de grandeurs en fonction de l'unité choisie ?

Dans le texte du 09/06/08, Anna fait un calcul qui applique un rapport 6 à 1,80 *pour « trouver la taille du géant »* mais sans aucune justification sur l'origine de ce rapport. Anna est donc bien loin de produire les bribes d'un raisonnement. Une hypothèse : 1,80 et 6 sont des données numériques retenues dans les débats en classe tout comme la procédure multiplicative évoquée dans l'encadré.

En revanche, beaucoup d'éléments d'un raisonnement potentiellement complet apparaissent. Anna semble en train de rassembler les pièces du puzzle dont elle a saisi des bribes. Mais il manque encore des articulations essentielles comme, par exemple, la comparaison des personnages et de la botte sur la photo.

Au cours de la séquence, Anna semble donc avoir saisi des bribes utiles pour développer un raisonnement complet, mais elle n'en est pas encore au point d'ordonner et de relier ces éléments. Cette analyse rejoint le sentiment qu'elle exprime, plus sévèrement que nous serions tenté de le faire, en disant : *« je n'ai rien appris car je n'ai pas tellement compris pourquoi on devrait faire plusieurs étapes et pas compris toutes les étapes ».*

3.3.3 Le cas de Dimitri

Notre analyse résumée dans un tableau :

Dimitri	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	**Oui**	**Oui**	**Implicite**	**Oui**
évo. de la. taille d'un personnage	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. de la comp. homme/segment géant	**Non**	**Oui**	**Implicite**	**Implicite**
évo just. de l'id. géant élève	**Non**	**Oui**	**Non**	**Non**
évo. de élève = géant	**Non**	**Oui**	**Implicite**	**Oui**
évo. de objet = homme	**Non**	Non	**Oui**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	**Non**	Non	**Oui**	**Oui**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Oui**	**Oui**	**Non**	**Non**
évo. rap. partie du corps au corps	Non	**Oui**	Non	Non

Commentaires :

Dans le premier écrit, Dimitri semble être à la recherche d'un rapport de proportionnalité par procédures multiplicatives successives : il multiplie d'abord par 1,5 puis le résultat par 2 et dans la suite il applique un rapport 3,5. Il met en rapport deux mesures prises sur la photo : les personnages sur la photo (7,05 cm) et le “pied du géant” (15,05 cm). Il applique ensuite le rapport 3,5 à la taille réelle estimée du personnage de la photo pour trouver la taille du géant. Il semble donc que Dimitri ait l’idée globale qu’il convient de trouver un coefficient d’agrandissement entre les personnages et le géant, mais qu’il ne sache pas comment trouver ce rapport.

Pour la deuxième séance, Dimitri a découvert le moyen de trouver le rapport entre la taille d’un personnage et la taille du géant, en se référant à un croquis représentant un homme quelconque, et en s’appuyant sur le fait qu’un personnage de la photo arrive à peu près au milieu du mollet du géant. De ce fait, il n’a pas besoin de recourir à un objet réel représentant le mi-mollet pour chercher le report sur un élève réel, ce qui ne l’empêche pas de le citer. On peut noter qu’il semble compter la semelle dans la taille du géant (sur la pointe des pieds ?).

Dans le texte du 09/06/08, Dimitri suit la procédure qui s’est répandue dans la classe, à savoir prendre un objet qui arrive au mi-mollet d’un élève et voir combien de fois on peut reporter cet objet dans l’élève. Mais il n’explicite pas les éléments qui permettent de justifier cette procédure. Ce n’est peut-être pas étonnant car il l’a fait dans le texte précédent et estime certainement qu’il n’a plus besoin de le refaire.

Dans l’écrit final, Dimitri indique tous les éléments nécessaires pour justifier sa procédure. Seul reste implicite le fait que le personnage de la photo arrive au mi-mollet. Réussite quelque part paradoxale car Dimitri « flotte » encore un peu dans les invariants : « *Le reste du géant sera certainement faux, car un géant est un homme agrandi* » ; « *7 fois ou 6 fois pour les petits* » (schéma en bas à droite).

3.3.4 Le cas de Sarah

Notre analyse résumée dans un tableau :

Sarah	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	**implicite**	**Non**	**Non**	**implicite**
évo. de la. taille d’un personnage	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. de la comp. homme-botte	**implicite**	**Non**	**Non**	**Oui**
évo just. de l’id. géant élève	**Non**	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de élève = géant	**Non**	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de objet = homme	**Non**	**Non**	**Oui**	**Non**
évo. du rapport objet/élève	**Non**	**Non**	**Non**	**Non**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo. rap. partie du corps au corps	**Oui**	**Non**	**Non**	**Non**

Commentaires :

Contrairement à la plupart des élèves de la classe, dans son premier écrit (23/05/08), Sarah présente un projet de résolution très acceptable, même si peu d’arguments sont explicités ou justifiés. Le « environ » (feuille réponse) semble bien dire qu’elle fait une hypothèse de taille moyenne pour un homme. Sa procédure est additive : Sarah découpe le schéma corporel en segments valant une ou deux fois son étalon de 1,77 m (la taille de quelqu’un dans sa famille ?). Ses calculs sont justes et le résultat est très proche de ce que donne la procédure finale retenue par la classe à la fin de la séquence.

Dans le deuxième écrit, Sarah régresse considérablement. Elle prend la taille moyenne de l’homme retenue par la classe (1,80 m) et fait l’hypothèse que le géant fait 10 fois plus, sans aucune justification du coefficient. Dans une « étude » de cette hypothèse, elle considère simultanément la taille de sa voisine (1,60 m) et la taille d’un homme (1,80 m) et, sans le justifier, conclut que le géant « *droit* » mesure 18 m et que « *plié* » il mesure 16 m. On retrouve donc ici la question de la notion « taille du géant » soulevée par

les participants de l'atelier. On ne connaît pas la vraie raison de cette régression, cependant on peut émettre deux hypothèses.
Premièrement, il est probable qu'ayant obtenu une solution correcte (mais non validée par le maître ou les observateurs), elle ne sait plus quoi faire et essaye d'attraper les éléments de propositions qui émergent lors de la discussion en classe. La deuxième hypothèse est fondée sur l'observation de la classe, et non sur ses écrits. Visiblement, entre les deux séances, le père de Sarah a essayé de lui expliquer une solution basée sur une bonne connaissance des proportions du corps humain (avec « l'homme de Vitruve »[5], d'après ses gestes) ce qui l'a visiblement perturbée.

Le troisième écrit est encore plus bref que le deuxième. Rien n'est expliqué, ni la taille de l'homme (moyen ? sur la photo ? autre ?), ni les multiplicateurs 6 et 7. On doit cependant remarquer qu'elle donne le résultat sous forme d'un intervalle. Sarah semble ne pas voir l'intérêt de ce que la classe est en train de faire, elle a l'air d'être lasse du problème («Nous avons repris le problème »).

L'écrit final semble expliquer une bonne démarche, même si toutes les justifications nécessaires ne sont pas présentes. On peut noter un grand souci d'explication avéré par la présence des dessins et schémas.

En conclusion, aucun argument ne permet de dire que Sarah a bien construit un « Model of », celui de l'élève pour le géant. Elle trouve une réponse acceptable au problème du géant par des procédés qui pourraient être corrects. Mais en l'absence d'une explicitation suffisante de ses arguments, rien n'indique si sa solution est plus le produit d'une remémoration de gestes acquis pendant la phase de recherche que d'enchaînements maîtrisés.

3.3.5 Eléments d'analyse et de discussions apportés par les participants à propos des textes des élèves

Une remarque préalable : faire une analyse approfondie de ces textes dans le cadre d'un atelier en temps si limité, relevait d'une gageure ! Il faut déjà beaucoup de temps pour prendre connaissance des huit textes (quatre par élève). En particulier, certains participants n'ont souvent eu le temps d'aborder que les textes d'un seul des deux élèves. De plus, et de façon délibérée de notre part, ils ne disposaient pas, à ce moment-là, de la grille de lecture que nous n'avons présentée qu'après. Dans ce contexte difficile, les participants ont néanmoins retrouvé bon nombre d'éléments de notre propre analyse sur lesquels nous ne reviendrons donc pas. Mais sur certains points, les échanges ont apporté des points de vue et des discussions bien intéressants que nous allons essayer de restituer.

Par rapport à Christina et Anna :

- Les participants font remarquer que Christina semble déchirée entre l'utilisation d'un rapport interne à l'individu (textes du 23/05/08 et du 17/06/08) et le recours à des rapports externes (textes du 06/06/08 et du 09/06/08). Dans le texte du 06/06/08, l'égalité des rapports externes « tube de colle/taille élève » et « taille élève/taille géant » est fausse. Mais l'égalité des rapports externes utilisée dans le texte du 09/06/08 (« demi-mollet/taille élève » = « demi-mollet/taille géant » via l'égalité « demi-mollet du géant » = « taille homme ») est correcte.
- On souligne aussi l'instabilité de cette découverte et de la modélisation en cours, car le texte du 17/06/08 semble erroné. Pour notre part, nous avons en effet noté que quelques éléments du raisonnement figurant dans le texte précédent ont disparu. En particulier, on pourrait imaginer qu'un maillon essentiel du raisonnement manque vraiment avec l'ambiguïté : « on prend un objet qui fait la taille du mi-mollet de l'homme sur la photo » sans référence au-mi-mollet d'un élève. Mais à notre avis, l'examen de l'écrit précédent (09/06/08) permet une interprétation plus optimiste qui considère que l'élément manquant est implicite. Le raisonnement aurait été

[5] Croquis *Étude des proportions du corps humain selon Vitruve* réalisé par Léonard de Vinci. On trouvera une reproduction de ce célèbre croquis à : http://fr.wikipedia.org/wiki/Homme_de_Vitruve

intériorisé et Christina n'en restitue plus tous les éléments. Ou bien aussi ce manque peut s'expliquer par un changement de destination de l'écrit : aux yeux de Christina, il s'agit peut-être d'expliquer à une autre classe « comment on fait » et non pas de « justifier ». Nous laissons au lecteur le soin, s'il le veut bien, de se faire lui aussi une opinion au sujet de cette discussion et de cette interprétation.

- En ce qui concerne une comparaison entre Christina et Anna, les participants soulignent le passage commun des centimètres aux mètres pour passer de la photo à la réalité du parc. Pour l'une des participantes, il s'agit de la preuve du « déficit de connaissances du monde ». D'autres soulignent qu'il s'agit là du seul aspect de la proportionnalité qui semble apparaître dans un premier temps pour ces élèves. Cette remarque est nuancée par d'autres participants qui font remarquer qu'on peut aussi relever de la proportionnalité dans les représentations physiques du corps même si elles sont plus ou moins cohérentes d'un élève à l'autre : Christina faisant un report correct entre une partie du corps du géant à la totalité du géant ce qui n'est pas le cas d'Anna.

Par rapport à Dimitri et Sarah :

Sarah et Dimitri sont tous les deux des élèves qui réussissent bien en mathématiques. Leur premier écrit présente des éléments très pertinents (Sarah a une procédure tout à fait acceptable, même si additive, et Dimitri est le seul de la classe à avoir identifié le problème comme relevant de proportionnalité), mais ces deux élèves évoluent de manière très différente tout au long de la séquence, comme le montrent les deux grilles d'analyse. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles nous avons proposé les travaux de ces deux élèves aux participants de l'atelier, et c'est ce qui, probablement, leur a posé problème. Aucun groupe de participants concernés n'a pu analyser la production de Dimitri et très peu de choses ont été dites sur Sarah. Tous les participants qui ont parlé de la production de Sarah ont remarqué surtout la procédure acceptable dans le premier écrit et la présence des deux réponses et de l'intervalle des possibilités.

4 UN BILAN DE L'ATELIER

La situation du « Géant » est riche et complexe. C'est une situation qui est en rupture avec ce qui se pratique habituellement dans les classes. Elle s'appuie sur un problème de Fermi : pas de nombre dans l'énoncé, problème ouvert, nécessitant de faire des hypothèses et de les valider. Enfin, elle est ancrée dans le réel.
Notre analyse des écrits des élèves a révélé la façon dont ces derniers se sont emparés de ce problème : compréhension, en tous cas pour nombre d'entre eux, de la nécessité de développer et d'utiliser un modèle des proportions du corps humain, compréhension de l'importance de la production d'un raisonnement argumenté et articulé.
Dans cet atelier, nous avons eu l'occasion de partager cette analyse avec les participants, mais aussi de relever leurs interrogations et leurs différents points de vue sur l'intérêt et les difficultés didactiques de cette situation. Cela n'est pas sans rejoindre les réflexions et débats institutionnels, nationaux et internationaux, sur les problèmes issus du monde réel, en particulier en ce qui concerne la question de la validation.

5 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADJIAGE R. & CABASSUT R. (2008). La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement, *actes du 34ème Colloque de la COPIRELEM* 11-13 juin 2007, Troyes.

ADJIAGE R. (2005), Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg. Vol. 10*, pp. 95-129.
ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 65*, pp. 149-175.
BLUM W. (2002), ICMI Study 14 : Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 51, N° 1-2, pp. 149-171. *http://www.springerlink.com/content/p1l244802942w921*
BROUSSEAU G. (2003a), Quels types de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ? In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 13-17). Paris.
BROUSSEAU G. (2003b), Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique. In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 25-27). Paris.
BUCHETON D. & CHABANNE J-C. (2002), Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire ; l'écrit et l'oral réflexifs. Paris : PUF Education et Formation.
COMENIUS-LEMA (2006), Learning and Education in and through Modelling and Application http://www.lema-project.org
DHOMBRES J. (2003), Modèles, modélisations et mathématisations, en vue d'activités IREMs. In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 8-12). Paris.
DUVAL R. (2005). Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle, *actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, pp. 7-38, 3-4 mai 2005, Montréal.
http://www.math.uqam.ca/~tanguay_d/Pdf%20des%20articles/Actes_GDM_2005.pdf
DUVAL R. (1998), Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In actes du colloque : *« Produire et lire des textes de démonstration », 23-24 janvier 1998* (pp. 79-98). Rennes 1 : laboratoire de didactique des mathématiques.
PETER-KOOP, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' Interactive Modelling processes. In I. Putt, R. Faragher and M. McLean (eds.), Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville, (pp. 454-461). Sydney : MERGA.
http://www.merga.net.au/documents/RP542004.pdf
RAUSCHER J-C. (2006a), Écrire en mathématiques pour situer et négocier les écarts. Un outil d'évaluation partagé. In Hélot et al. (ed), *Écarts de langue, écarts de culture : à l'École de l'autre* (pp.87-102). Frankfurt am Main : Peter Lang.
RAUSCHER J-C. (2006b), L'écriture réflexive au centre de l'activité mathématique dans la résolution de problèmes de proportions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg. V*olume 11, (pp 75-102).
VYGOTSKI L. (1934/1997), Pensée et langage, *La Dispute, Paris.*

6 ANNEXES

Annexe 1A : sélection des textes du 23 mai à examiner par les élèves dans la séance du 30 mai

Elève 1 (vendredi 23 mai)

Je pense que le géant mesure 100 m de long car j'ai fait 12 fois 8 = 100
J'ai trouvé ces mesures en mesurant la longueur et la largeur et j'ai fait ×

Elève 2 (vendredi 23 mai)

A mon avis la taille du géant est de 144 m. Moi j'ai dit qu'il fallait faire 9 × 1,60 car
1,60 est la taille d'un homme et 9 ça veut dire 9 hommes.

Elève 3 (vendredi 23 mai)

A mon avis la taille du géant serait 26 m. En fait j'ai vu sur la photo qu'il y avait des hommes et un pied de géant alors déjà je sais que la taille d'un homme ça peut être entre 1 m 90 et 1 m 80. Donc le pied déjà, sa taille ça doit être 1 m 90 environ et après pour la taille du géant peut être ça serait 26 m environ.

Elève 4 (vendredi 23 mai)

La taille du géant fait à peu près 5,4 hm (500 m) car la taille d'un homme mesure environ 1,80 m puis je multiplie par 3,5

$$180 \xrightarrow{\times ?} 500$$

$180\times\boxed{2}=360\times\boxed{1,5}=540$

2+1,5=3,5

Elève 5 (vendredi 23 mai)

Les deux homes mesurent à peu près 1 m 80 ou 1 m 70. La chaussure mesure 2 m à peu près 2 mètres. Le géant mesure 6 mètres quand je fais 2 × 3 = 6 mètres.
2 car la chaussure mesure 2 mètres à peu près et qu'il manque 3 parties du corps : tête, jambes, ventre.

Elève 6 (vendredi 23 mai)

1) La taille du géant est de 10,43 m environ
2) Car quand on prend la taille de l'homme, on fait plusieurs fois sa taille et sa jambe fait deux fois la taille de l'homme sur le document et ainsi de suite jusqu'à ce que je trouve la taille du géant.

Elève 7 (vendredi 23 mai)

La taille de ce géant est 150 m. Moi j'ai mesuré tous le grande jambe et j'ai trouvé 15 cm et je les mis de 150 m.

Annexe 1B : les choix de Sophie lors de la séance du 30 mai

Choisis une réponse qui ne te paraît pas claire ? Pourquoi ?

La réponse 2 ne me paraît pas claire. Car je ne comprend pas d'où sort 9 hommes pourquoi pas 10 hommes?

Choisis une réponse qui te permet d'avancer dans la résolution du problème ? Pourquoi ?

La réponse 5 me paraît juste. Car les 3 parties manquantes seront utiles pour pouvoir s'avoir la taille du géants.

Choisis une réponse qui te paraît fausse ou inutile pour avancer dans la résolution du problème ? Pourquoi ?

La réponse ~~X~~ 3 me paraîte inutile. Car la personne qui a trouver se résultat a donner la taille environ, mais il nous faut la taille exacte.

Annexe 1C : les différentes phases du travail des élèves et les écrits demandés

23 mai **au pied du géant : début**	Première approche : *« Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire ça ? »*
27 mai	Elaboration par groupe d'un intervalle de plausibilité et débat en classe à ce sujet
30 mai	Analyse de 7 réponses d'élèves produites lors de la première séance en vue de *« découvrir des idées qui permettent d'avancer dans la résolution du problème »* puis production par groupes d'un programme d'actions à développer pour résoudre le problème
6 juin	Calcul de la taille du géant à la suite d'un débat basé sur l'analyse de quelques textes du 23 mai avec réactions correspondantes
9 juin	Questionnement dynamique dans la classe à partir de la lecture d'un document faisant état d'observations et de questions (globales) du maître sur leurs résolutions précédentes.
17 juin **au pied du géant : fin**	Analyse individuelle de 4 résolutions du 9 juin puis rédaction de la résolution dans la perspective d'une transmission à une autre classe
Une semaine après	**Questionnaire bilan** : Surprises ? Difficultés ? Expérience à refaire ? Apprentissages réalisés ?

Annexe 2 : Les 4 textes de Christina

Texte initial 23/05/08

Le géant (1)

1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

A mon avis le géant mesure ~~29,1m~~ 39,1m car déjà la taille de la jambe mesure 9,7m (9,7m) donc j'ai fait 9,7m + 9,7m = 19,4m et sa fait une jambe entier j'ai fait 19,4 + 19,4 = 39,1m et sa fait un corpention

Deuxième texte 06/06/08

Je fais environ 18 colle, et je mesure 1,65m

Le géant mesure : 21,70m car moi je mesure 18 colle et en m 1,65m donc j'ai ~~21~~ 1,65 × 18 = 21,7cm est, tu utiliser le m et la colle.

Troisième texte 09/06/08

Il faut dabord voir la photo est voir jusqu'à ou vont les homme sur la jambe du géant est ~~se~~ va jusqu'au mollet donc on imagine ~~que~~ qu'on ~~est~~ les géant est on prend un objet qui va ~~jusqu~~ jusqu'à la moitie du mollet puis apres qu'on ~~est~~ a est choisie un ~~au~~ objet jusqu'au demi mollet on regarde combien de fois il rentre dans le géant (nous) est sa donne pour tout le monde environ 6 et 7.

reponse du problème : 6x 1,80 = 10,80 m

le géants fait : 10,80 m

Texte final 17/06/08

On regarde la photo est on regarde jusqu'à ou les homme vont et sa va jusqu mi-mollet est les homme font appeper 1,80 m et on imagine qu'on est le géant et ~~on regarde~~ on prend un objet qui fait la taille ~~est va~~ qui ~~jusqu'au mi~~ ~~de l'homme sur la photo est on regarde combien de fois sa rentre~~ du mi-mollet (de l'homme sur la photo) est on regarde ~~jusqu'à~~ ~~at sa~~ combien de fois sa rentre et pour tous le monde c'est soit 6 ou 7 fois est on fais le calcul pour cella qui font 6 fois le mi-mollet c'est : 6x1,80 = 10,80 est il fait 10,80 ou celle qui font 7 fois le mi-mollet c'est = 7x1,80 = 12,60 est sa fais 12,60.

Annexe 3 : Les 4 textes d'Anna

Texte initial 23/05/08

j'ai fait le calcul de chaque partit du corp.

```
 4
  9,5
+ 9,5
+ 9,7
+ 9,7
+ 9,0
+ 9,0
+ 0,8
+ 0,8
------
 72,2 m
```

moitie de la jambes : 9,5 cm
Pieds : 8cm
moitié de la jambes : 9,5cm
autre Pieds : 8cm
autre moitié de la jambes : 9,7
autre moitié de la jambes : 9,7
bras droits : 9,0
bras droits : 9,0

la taille du geants est de 72,2 m.
j'ai fait le calcul d'est partis du corps.

Deuxième texte 06/06/08

ce que je vais faire :

je vais prendre differentes chose ex, l'equerre, une colle, un effaceur et je vais voir si ça fait la même mesure et je vais comparer.

une règle : 4
colle : 15,00
equerre : 8
grande règle :

je pense que le géant mesure 16 m car j'ai mesuré chaque partit du corp et j'ai multiplier.

Naïma

une règle : 5
colle : 15,30.
equerre : 8
grande règle.

j'ai fait avec naïma on a fait avec l'equerre, la règle et la colle. A j'ai comparer et comme elle est plus grande que moi se n'est pas pareille.
je prend de la colle et je mesure chaque partit du corp.

Troisième texte 09/06/08

Lundi, 9 juin 2008.

Ma Méthode

je fais 6 x 1,80 = 10,80 j'ai fait 6 x 1,80 pour trouver la taille du geant. j'ai utiliser la moitié de la jambe et il faut 6 fois la moitié de la jambe.

Texte final 17/06/08

pour trouver la solution on à repris les réponse des autre pour voir si il y avait tout ce qu'il faut. on a fait des calcul on a pris des élève de la classe puis on à pris un objet pour faire les homme on a fait des dessin des explication pour trouver la taille du geant (il faut prendre un objet puis le faire jusque qu'on arrive à la tête. il faut 6 ou 7 fois l'objet pour arrivé a la tête et pour trouver la taille. ex il y avait des homme à côté du pied du geant on les à utiliser pour trouver la taille du geant. un homme mesure a peu près 1,80 m on prend 1,80 et combien de fois on a pris l'objet pour arrivé a la tête.

1,80 x 6 = 10,80.

Annexe 4 : Les 4 textes de Dimitri

Texte initial 23/05/08

Le pied du géant mesure : 15,05 cm =
L'homme mesure = 7,01 cm =

La proportion : 7,01 / 15,05

701 x 2 = 1402
1402 x 1,5 =

1402
x 15
7010
+ 14020
21030

1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

La taille du géant fait environ 5,4 m (500 m) car la taille d'un homme mesure environ 1 m 80 puis je multiplie par 3,5.

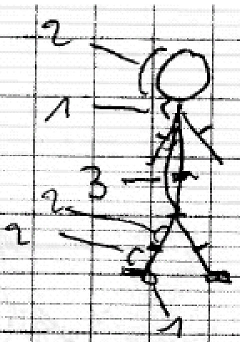
180 / 500

180 x 2 = 360 x 1,5 = 540
2 + 1,5 = 3,5
~~36 x 5 = 1800~~

360
x 15
1800
+ 3600
5400

5 | 0 | 0

Deuxième texte 06/06/08



2 + 2 + 2 + 1 + 3 + 1 = 11 hommes, il faut.

J'ai pris un dessin au hassard car de toute façon ça revient au même, puis je pense prendre n'importe qu'elle homme pour essayer de voir combien ont peut en mètre.

1,80 x 11 = 19,80 m

hommes 11x

la taille d'un adulte normal

le géant mesure 19,80 m

Troisième texte 09/06/08

la taille de l'homme

7 × 1 m 80 = 12,60 m

le nombre de X qui y a d'homme.

la taille du géant

Moi j'avais une bande qui m'arrivait à mi mollet (mi jambe) puis j'ai vu que je pouvais faire 7 × l'homme sur moi.

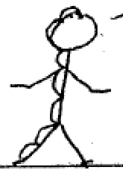
Texte final 17/06/08

Moi, je dois d'abord trouver la taille moyen de l'homme (adulte) = 1,80 m, puis je cherche un outil de mesure qui est égale jusqu'à notre mi-mollet* et j'essaie de rentrer mon outil de mesure sur moi jusqu'à la tête car je représente le géant si je m'imagine le reste du géant se sera sertainement faux parce que un géant est un homme aggrandit. Ensuit j'ai trouvé que je peut mettre 6 ou 7 fois l'outil de mesure (l'homme) sur moi.

1,80 m × 6 = 10,80 m

1,80 × 7 = 12,60 m

La taille du géant est entre 10,80 m et 12,60 m.



* Elle va représenter un homme.

1m77 + 1m77

3m54 genoux

3m54 × 2 =

3,54 × 2,00 = 7,08

7,08

7,08 + 1,77 = 8,85

8,85 ventre

8,85 + 1m77 =

10,62 cou

10,62 + 1,77 =

12,39 bouche

12,39 + 1,77 =

14,16 cheveux

Annexe 5 : Les 4 textes de Sarah

Texte initial 23/05/08

Le géant (1)

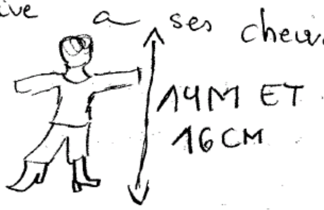
1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

La taille du géant est de 14m,16 cm

Ce qui me permet de dire ça c'est on calcul environs la taille d'un homme est de 1m77 puis on calcule

jusqu'a on arrive a ses cheveux.

ont fait plus 1m77 (+)



Deuxième texte 06/06/08

Hyphtèse : Je pense que la taille
du geant est de 18 m
car un homme mesure 1,80 m
nous multiplions par 10 sa fait 18m.

etude : j'ai mesurer ma Mylène elle mesure
1,60 m un homme fait 1,80m
je le mesurer ×10 = 18,0m
si il est a la diagonal on le rapetisser
sa fait 20 m si il est plier il
fait 16 m

Troisième texte 09/06/08

Nous avons repris le problème on a trouver le
~~(pris)~~ (le) mis mollet .

L'objet : l'homme 1,80.

calcule :

1,80 × 6 = 10,80
1,80 × 7 = 12,60

Le géant mesure entre 10,80 et 12,60.

Texte final 17/06/09

Par pouvoir comencer il faut regarder la photo. Vous prenner l'homme sur le trotoire puis vous regarder il va à son mit mollet* (ceou) puis ont le reporte normalement sa rentre 6 à 7 fois dans notre corps. Si un homme de taille moyenne mesure 1,80 m. On fait un calcule:

1,80 × 6 = 10,80.

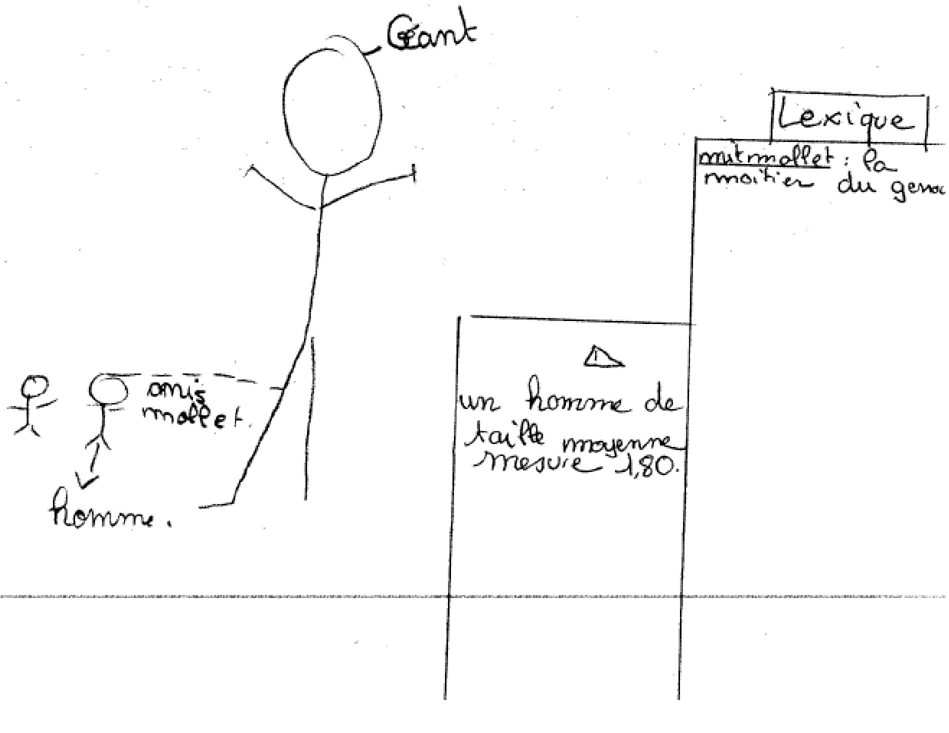
1,80 × 7 = 12,60.

taille de l'homme

combien sa rentre de fois.

Reponse : Le géant mesure entre 10m,80 et 12,60.

schemas:



Atelier B1

PLACE DES REPRODUCTIONS ET DES CONSTRUCTUCTIONS DANS LES APPRENTISSAGES GÉOMETRIQUES

Annie NOIRFALISE
IREM de Clermont Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Yves MATHERON
UMR-P3- ADEF, INRP, Aix-Marseille Université
yves.matheron@inrp.fr

Résumé
L'atelier s'attache à faire analyser des pratiques géométriques de l'école primaire en utilisant la notion d'organisation praxéologique (tâche, technique, technologie, théorie) issue de la théorie anthropologique du didactique (élaborée par Yves Chevallard).
Après une analyse collective d'exemples, des activités de reproduction de figures, de construction et de reconnaissance de figures sont proposées aux participants. Pour chaque activité, il est demandé de mettre en évidence les techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée, d'identifier les éléments technologiques et théoriques qui justifient ces techniques et de repérer les implicites utilisés.
Seul le travail des participants sur les deux premières activités de reproduction de figures donne lieu à un compte-rendu.
Pour les activités de construction et de reconnaissance de figures, les auteurs fournissent leurs propres commentaires. Les énoncés des activités soumises aux participants sont fournis.

1 APPORTS PRÉALABLES

1.1 Espace sensible / espace géométrique

Dans une première approche nous avons distingué :

- d'une part l'**espace sensible**, espace contenant des objets qui nous sont accessibles par le biais des sens (vue, toucher, odorat, etc.) et grâce à notre motricité,
- d'autre part l'**espace géométrique**, résultat d'un effort de théorisation et qui rend raison de l'espace sensible,

« […] la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc., de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en en monde physique ». « La physique en effet décrit un univers où il est question de “ masses ”, de “ forces ”, de “ quantités de mouvement ”, etc. : toutes choses étrangères à la perception non physicienne de l'espace sensible ». (Chevallard et Jullien, 1991, p. 52)

Dans le monde sensible, pour accomplir des tâches, on recourt à des techniques visuelles, tactiles, olfactives, motrices. Dans le monde géométrique, les tâches relèvent de la manipulation d'énoncés suivant les techniques de la démonstration à l'intérieur d'une théorie.

L'espace géométrique, comme l'espace physique, est un monde construit par les hommes à partir de l'espace sensible, ayant sa propre cohérence interne, et permettant de ***produire des***

connaissances sur l'espace sensible : pas plus que la masse, le point n'appartient à l'espace sensible.
L'existence d'un espace géométrique est avant tout le fruit d'un travail de ***modélisation mathématique de l'espace sensible,*** c'est aussi par un travail de modélisation que l'on produit des connaissances sur l'espace sensible dans l'espace géométrique.

La distinction faite précédemment entre l'espace sensible et l'espace géométrique doit être affinée pour analyser les activités participant à la construction de savoirs géométriques. En effet, même si les objets sur lesquels on s'interroge sont matériels, les techniques que l'on utilise peuvent être partiellement géométriques.
M.-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin 1992) distinguent trois types de techniques : celles relevant des « problématiques géométrique, pratique, et de modélisation ». Toutefois les choses nous paraissent plus complexes et comme dans tout travail de modélisation au service de l'étude d'une question dans un champ donné, un va et vient entre ce champ et la théorie fera partie intégrante de l'étude. Nous souhaitions, à travers des exemples, attirer l'attention des participants sur cette complexité. De plus si actuellement, à l'école primaire, l'étude de l'espace géométrique doit passer par l'interaction avec l'espace sensible[1], celle-ci n'implique pas nécessairement la mobilisation, et encore moins l'acquisition de connaissances de type géométrique.
Au cours de cet atelier, à travers l'analyse de différentes activités, la proposition a été faite aux participants de réfléchir aux rencontres géométriques que les élèves peuvent faire à l'occasion de ces activités.

1.2 Cadre théorique pour l'analyse des activités

Les participants à l'atelier ont été invités à analyser les activités proposées à l'aide des outils fournis par la théorie anthropologique du didactique[2]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet atelier, nous n'avons utilisé qu'un nombre très restreint des éléments théoriques qui la constituent. En début d'atelier un rappel rapide a été fait sur la définition d'une organisation praxéologique ponctuelle en termes de type de tâches, technique, technologie et théorie.

2 DESCRIPTION DE L'ATELIER

2.1 Travail prévu a priori

Nous avions prévu de faire travailler les participants à l'analyse d'activités de reproduction, de reconnaissance et de construction de figures. De façon plus ou moins approfondie, ce contrat a été rempli.
Nous souhaitions aussi leur proposer de réfléchir et débattre sur « le soin des reproductions géométriques ». En effet nous pensions attirer l'attention des participants sur la ou les fonctionnalités de la qualité d'exécution d'un dessin. Dans le mouvement de « va et vient entre l'espace sensible et l'espace

---

[1] « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* », B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.

[2] Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard Y. (1998 & 1999), Matheron Y., Noirfalise R. & Combelles C. (2006), Noirfalise A. & Matheron Y. (2009)). On trouvera une présentation succincte des éléments théoriques nécessaires à la compréhension de notre contribution dans l'introduction d'un article des mêmes auteurs, intitulé « *Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques* », publié dans la revue Grand N n° 82, ou dans leur communication au XXXV[e] colloque de la COPIRELEM, Bordeaux-Bombannes, juin 2008.

géométrique », que nous avons évoqué plus haut et que nous exemplifierons plus loin, le dessin géométrique doit être clairement porteur des informations utiles à l'étude que l'on mène, dans le cadre où on la mène. Les conventions de représentation et de lecture dépendent des institutions dans lesquelles on travaille : par exemple, elles ne sont pas les mêmes en dessin d'architecture, en dessin industriel, en géométrie descriptive, ...
Nous avons manqué de temps pour aborder ce dernier point durant l'atelier.

2.2 Activités de reproduction de figures

2.2.1 Deux exemples, traités collectivement pour percevoir la complexité

Ces activités ont été traitées sous forme d'échanges avec les participants à l'atelier.

✓ **Premier exemple :**

Considérons une figure représentant sur une feuille de papier une pyramide en plastique, de forme un tétraèdre ; cette figure, comme la pyramide elle-même, est un objet matériel. Néanmoins pour passer de l'un à l'autre, on ne reste pas dans le monde sensible. La représentation graphique de la construction dans le système scolaire suppose déjà la modélisation de certains éléments constituant la pyramide : les sommets et les arêtes par exemple, sont modélisés par des points et des segments. La modélisation à laquelle on se livre crée de nouveaux objets liés entre eux par des propriétés géométriques qui, à leur tour, vont guider le tracé et lui donner du sens. Une analyse géométrique de « l'objet matériel pyramide » et un travail dans le monde géométrique sont indispensables pour construire un autre objet matériel, « une pyramide géométrique » ; c'est-à-dire quatre points non coplanaires de l'espace, dans le cas où cette pyramide est un tétraèdre. La figure que l'on a sous les yeux en est une représentation graphique. Ce dernier objet matériel porte la trace de sa construction en tant que représentation du modèle géométrique de l'objet de l'espace sensible qu'il modélise. Ainsi, si la pyramide est un petit jouet en plastique mou, que ses faces sont de ce fait légèrement déformées, la figure ne saurait les représenter puisqu'elle représente non l'objet de l'espace sensible mais l'objet géométrique pour lequel les faces sont nécessairement planes. De même, si les arêtes du jouet possèdent une légère « épaisseur », celle-ci ne peut exister en tant que telle dans la figure, puisqu'elle représente l'objet géométrique dont les arêtes sont des segments ; donc qui sont sans « épaisseur ».

✓ **Deuxième exemple :**

Supposons que l'on veuille remplacer des vitres dont l'encadrement donne à voir des trous du type suivant :

Pour passer commande au vitrier, qui ne se déplace pas, on peut utiliser une des deux techniques, suivantes, parmi d'autres :
- Première technique τ_1 : on peut, en appliquant un papier calque sur chaque hublot, tracer des patrons de chaque vitre, les découper et les apporter au vitrier. La motricité, le contrôle des gestes par la vue, voire le toucher, sont sollicités pour mettre en œuvre au mieux cette technique.
- Deuxième technique τ_2 : on peut « analyser les propriétés de chaque trou ». Faire l'hypothèse que le premier est un losange, le vérifier en mesurant les quatre côtés, puis se tenir le « discours » suivant : « je sais, en géométrie, que deux losanges ayant leur côtés égaux ne sont pas nécessairement

superposables (en géométrie on dirait isométriques), mais que deux losanges ayant par exemple leurs côtés égaux et une diagonale égale sont superposables, je vais donc mesurer la longueur du côté et la distance entre deux sommets opposés du hublot et les communiquer au vitrier. » Pour le second trou, on peut faire l'hypothèse à la vue que c'est un cercle. Mais pour donner des informations numériques au vitrier, il faudra utiliser un petit travail de modélisation afin de déterminer le centre et le diamètre : tracer deux cordes non parallèles et les médiatrices de celles-ci.

En première approche, la première technique ne relève que du monde sensible et aucune incursion n'est faite dans le monde géométrique. La seconde technique implique un va-et-vient entre le monde sensible et le monde géométrique. Dans un premier temps nous pouvons décrire la technique de la façon suivante :

Monde sensible	***Modélisation***	***Monde géométrique***
Le ***hublot*** est observé		
	L'hypothèse est faite que c'est un ***losange***	
		Etude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques***
On mesure un côté du hublot et la distance entre deux sommets opposés, afin que le vitrier fasse un objet exactement ***superposable*** au trou.		

Cet exemple montre, de façon modeste, comment le monde géométrique permet « ***de produire des connaissances pour agir dans l'espace sensible* »*.**
Ces connaissances permettent ***de penser, d'élaborer et de décrire la technique*** τ_2 pour accomplir la ***tâche*** évoquée précédemment.
Si on modélise cette activité : « passer commande au vitrier » dans le cadre de la ***théorie anthropologique du didactique***[3], c'est donc au niveau ***technologique*** que les connaissances géométriques sont sollicitées.

Toutefois les éléments technologiques associés aux techniques τ_1 et τ_2 évoquées précédemment peuvent être de nature très différente:

[3] Pour une présentation de la notion d'organisation praxéologique on pourra se référer à un des textes suivants :
CHEVALLARD Y. (1999).
CHEVALLARD Y. (1998).
MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), pp 30-47.
MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) pp. 91-113.
NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (sept. 2009).

- En ce qui concerne la première technique, τ_1, la conservation de la forme du patron dans le transport, élément fondamental pour justifier la pertinence de la technique, est rarement verbalisée à l'école primaire, on fait comme si « ça allait de soi ». Or, bien sûr, c'est un élément technologique qui relève de l'expérience sensible, perceptive, et qui devient « invisible » car naturalisé par son usage quotidien : on a, en tant qu'adultes et à de nombreuses reprises, pu constater expérimentalement cette conservation… « par isométrie », dirions-nous en mathématiques. Toute personne qui la nierait devrait s'affronter à la désapprobation des autres, majoritaires. Est-elle si naturelle pour des élèves ?

- En ce qui concerne la seconde technique, τ_2, la description précédente fait apparaître deux phases.
La première est repérée par la phrase : « l'hypothèse est faite que c'est un losange ». Cette reconnaissance est-elle due à une grande familiarité avec cette configuration, permettant de la reconnaître, de façon perceptive, « au premier regard », ou cette phase suppose-t-elle un vrai raisonnement hypothético-déductif, du type « si ce trou a la forme d'un losange alors les côtés sont de même mesure, je vérifie s'il en est ainsi pour pouvoir poursuivre » ? Autrement dit, un raisonnement par analyse, ou condition nécessaire (« si c'est un losange, alors nécessairement il possède telle propriété… vérifions si c'est le cas »), qui s'appuie sur l'expérience : celle que l'on a des losanges, celle qu'on peut mener sur celui-ci.
La deuxième phase est repérée par la phrase : « étude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques*** » ou synthèse (« pour que ce soit un losange, il suffit que… ; vérifions si c'est bien le cas ») qui s'appuie elle aussi sur les mêmes types d'expériences. Cette assertion suppose que l'on ait à sa disposition de telles conditions ou que l'on soit en mesure de les élaborer : par exemple par les techniques du monde géométrique ou des techniques expérimentales. Suivant le cadre de travail, c'est-à-dire l'institution dans laquelle on se situe, effectivement ou en pensée, la nature des justifications de la manière de faire ne sera pas la même[4].
S'il s'agit d'un hublot de forme rectangulaire, à l'école primaire par exemple, on peut penser que la familiarité avec cette configuration est suffisamment grande pour que la reconnaissance se fasse de façon perceptive, sans être interrogée. On donnera sans doute au vitrier la longueur et la largeur de ce rectangle mesurées sur le trou, sans se poser la question de savoir si c'est suffisant pour qu'il puisse produire une vitre exactement superposable au trou ; un travail dans le monde géométrique permettrait de trancher en la matière, lequel n'est pas possible à l'école élémentaire ; l'artisan, d'expérience dans ses pratiques professionnelles, saura que ces informations lui suffisent pour produire exactement ce qu'il faut. Ne serait-il pas souhaitable d'attirer l'attention des élèves sur le fait que ces informations seraient insuffisantes dans le cas d'un parallélogramme non rectangle ?

2.2.2 Une série de quatre activités étudiées par les participants

Organisation du travail

Les participants ont été invités à analyser des activités de reproduction de figures dont on trouvera la description ci-dessous. Le travail a été mené en groupes de deux à quatre personnes, à partir de la consigne suivante :
« Pour chaque activité de reproduction de figures :
- décrire l'organisation praxéologique correspondante, *essentiellement imaginer des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée et les éléments technologiques et théoriques rendant celles-ci intelligibles et permettant de les justifier*
- préciser les propriétés que l'on rend visibles, les manières de faire que l'on considère comme allant de soi, et échappant à une justification géométrique.
- de façon incidente, s'interroger sur ce qui justifie ces choix »

[4] « *Comme tous les autres éléments constitutifs des praxéologies, les technologies migrent dans l'espace social par* transposition *d'institution à institution : toute technologie, toute technique ou toute théorie a donc pour premier mérite d'exister en un cadre institutionnel donné »*, citation extraite de Y. Chevallard (2002), page 5.

On trouvera en annexe 4. 1, une reproduction du support de travail utilisé. Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.
A partir de ce même support on envisage quatre situations différentes :

1re situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, du papier calque à la dimension du cadre où sont tracées les trois fusées, une feuille avec, déjà tracé, un cadre analogue, et on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre.

2e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, le formographe, une feuille avec déjà tracé un cadre analogue à celui qui entoure les trois fusées, on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre. Le formographe est un matériel livré avec le livret élève de la collection. Il s'agit d'un rectangle de plastique semi-rigide dans lequel des formes géométriques sont évidées, dont celles qui constituent les éléments des trois fusées en dimensions réelles.

3e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille de papier quadrillé, une règle graduée, on leur demande de reproduire le dessin.

4e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille blanche, une règle non graduée, un compas et un gabarit d'angle droit, on leur demande de reproduire le dessin.

Echanges avec les participants
Dans le temps imparti à l'atelier, seul le travail accompli sur les deux premières activités a pu être restitué au groupe. On trouvera en annexe une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux quatre activités proposées.
Au cours de cette restitution, de nombreuses questions ont émergé, que les notes prises par les rapporteurs[5] nous permettent d'évoquer ci-dessous.
A propos de la première activité, les techniques envisagées par les différents groupes diffèrent peu de celle décrite en annexe. Les participants voient dans cette activité un entraînement à une activité motrice de précision, contrôlée par la vision, demandant une attention soutenue importante, compte tenu du nombre de figures à reproduire. Le problème de la validation a été posé : comment l'élève ou le maître sait-il que la tâche est accomplie correctement ? On peut envisager un modèle sur une feuille transparente pour comparer. Mais alors quelles différences va-t-on prendre en compte ? Ceci soulève, d'une part, le problème de la signification des expressions telles que « ***tracer avec soin et précision*** »[6], que l'on trouve dans le programme de 2008 : par exemple, dans le cas de cette activité qui n'est pas finalisée au sein de laquelle rien, en dehors de ce que décide le maître, ne justifie que telle ou telle différence avec le modèle, invalide la façon dont la tâche a été accomplie. Par ailleurs, le repérage des différences renvoie au repérage des différents représentants que l'on utilise en géométrie comme signe des objets du monde géométrique intervenant au niveau théorique[7] : par exemple, dans le dessin à reproduire, une partie de la figure est visuellement perçue rectiligne entre les deux sommets d'un triangle (ou deux points tracés sur la feuille distribuée aux élèves), et à ce titre il représente un segment (objet géométrique), d'extrémités les deux sommets d'un triangle (objet géométrique) ; un tracé non « intentionnellement rectiligne », ne coïncidant par exemple pas avec le bord d'une règle, ne peut être admis comme représentant le même objet géométrique que celui que l'on veut reproduire. Sans expliciter le va-et-vient que nous venons d'évoquer entre le monde sensible et le monde théorique, tout en restant dans un monde empirique, la verbalisation des raisons de l'adéquation ou de la non adéquation d'un tracé est l'occasion de mettre en évidence des outils et des pratiques attachés à un objet

---

[5] Que Bruno Canivenc et Christine Niel soient ici remerciés pour les notes très claires, prises en cours d'atelier, qu'ils ont bien voulu nous laisser.
[6] B. O. hors série n° 3 du 19 juin 2008, page 20.
[7] Nous revenons sur ce point dans le paragraphe suivant, en italique.

géométrique qui, lui, n'est jamais rencontré. C'est un des points que nous souhaitions soumettre au débat dans cet atelier.

Pour préciser ce qui précède, pour faire des mathématiques on utilise des outils : des instruments règles, équerres, etc.), des signes (écritures, tracés, dessins, figures, tableaux, graphiques, etc.). Chacun de ces objets matériels est considéré comme un représentant d'un objet de la théorie qu'il est réputé représenter : C (O, r) représente un cercle, de même qu'un graphisme du type : O. Ces outils sont porteurs de certaines informations pouvant être établies dans la théorie et/ou perçues expérimentalement : par exemple l'écriture (AB) renvoie au fait expérimental, maintes fois constaté par les élèves à l'aide d'une règle, que deux points distincts définissent une droite et une seule ; résultat qu'on prend généralement comme axiome pour des pratiques relevant de la géométrie (théorique) affine euclidienne. La certitude de ce résultat expérimental permet de nommer sans ambiguïté la droite. Dans le cas du trait tracé à la règle et au crayon, il s'agit de pratiques consistant à définir une droite à partir d'un point en lequel on pose la règle et d'une direction, celle prise par la règle.
Les résultats démontrés dans la théorie d'une part, perçus en expérimentant avec les représentants d'autre part, s'enrichissent mutuellement : le cercle, C (O, r), par exemple, peut être perçu comme trace laissée sur la feuille par le crayon situé à une extrémité des branches d'un compas écartées de la distance r, l'autre extrémité étant en O, ou dans la théorie comme lieu des points du plan distant de r d'un point donné O ; l'expérience renseigne par exemple sur ce qui se passe pour les points communs à deux cercles $C(O, r)$ et $C(O', r')$ si $OO' < r + r'$, ce que l'on cherchera à démontrer dans la théorie, et/ou inversement ce que l'on peut obtenir sur le papier connaissant le résultat théorique.
On peut faire l'hypothèse que le travail dans les différents systèmes matériels évoqués précédemment, et la familiarisation avec ce que véhiculent les signes utilisés pour désigner des objets géométriques représentés – C (O, r) ou (AB) pour ne citer que les deux exemples utilisés dans ce texte –, encore absents à l'école primaire, participent à l'entrée des élèves, au Collège, dans un nouveau contrat : pratique démonstrative à l'aide d'énoncés de propriétés admises comme légitimes[8].

2.3 Activité de reconnaissance et activité de construction de figures

2.3.1 Travail prévu

Nous avions prévu de poursuivre le travail de l'atelier par l'analyse d'une situation de construction d'une figure géométrique puis par l'analyse d'une situation de reconnaissance d'une figure géométrique. Compte tenu de la richesse des échanges précédemment évoqués, et faute de temps, nous n'avons pas abordé cette partie avec les participants. On trouvera en annexe les supports à partir desquels l'analyse devait être proposée, et une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux deux activités envisagées a priori. Cette description nous semble utile pour comprendre les commentaires qui suivent. Les consignes de travail prévues étaient les mêmes que celles de l'activité décrite ci-dessus.

A partir de ces deux activités nous souhaitions engager une réflexion sur plusieurs points.

2.3.2 A propos de l'activité de construction

Des propriétés géométriques de la figure à construire doivent nécessairement être utilisées pour élaborer une technique de construction ; quelquefois même, il est nécessaire de verbaliser pour justifier la technique de construction utilisée. Celles que l'on doit considérer comme acquises dans le matériau initialement proposé doivent être lues sur la figure sans qu'aucun codage ou texte ne les mentionne : par exemple que M est le milieu de [AB], que $AQOM$ est un rectangle, que O est le milieu de [BD] et Q le milieu de [AD]...,

---

[8] Pour approfondir le rôle du travail dans un dispositif dont le support est matériel pour un travail ultérieur dans un dispositif dont le support est langagier, on pourra se référer à Noirfalise R. (1993), Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol 13/3, pp. 229-256.

Afin d'élaborer une technique de construction, il sera nécessaire de prendre en compte, au préalable, certaines des propriétés géométriques que la figure à obtenir devra nécessairement vérifier, en les choisissant de façon à permettre une construction avec les instruments de dessin imposés. Une question importante surgit alors : quelle visibilité donne-t-on à cette ***phase d'analyse*** ? Peut-on imaginer que cette étude soit conduite à partir d'une figure du rectangle à obtenir faite à main levée, intégrant les éléments donnés au départ et leurs propriétés ?
Une autre question, tout aussi importante, en résulte : comment s'assurer que la figure obtenue soit effectivement la représentation d'un rectangle, (***phase de synthèse***), puisqu'à ce niveau les élèves n'ont pas à leur disposition de ***propriétés caractéristiques*** ?

2.3.3 A propos de l'activité de reconnaissance de figures

A ce niveau, si on lui demande comment il reconnaît qu'une figure est ou n'est pas un rectangle, l'élève sait qu'il ne peut pas répondre « parce que ça se voit », et qu'il devra faire appel aux propriétés géométriques du rectangle. La question se pose alors de savoir quel ensemble de propriétés doivent être vérifiées (respectivement infirmées) pour être sûr que la figure est (respectivement n'est pas) un rectangle. Dans les réponses de l'élève A on perçoit la mobilisation de quelques propriétés largement insuffisantes, (côtés parallèles ou une certaine « régularité ») pour justifier sa réponse. Les réponses de l'élève C montrent l'efficacité de la définition du rectangle : « quadrilatère ayant quatre angles droits », pour justifier que les figures A et C ne sont pas des rectangles. Pour la figure B on note la redondance des propriétés choisies pour justifier que c'est un rectangle ; mais quel ensemble de propriétés parmi toutes celles que l'on connaît, à ce niveau, suffit-il de mobiliser pour justifier que c'est un rectangle ?
Les réponses données par les élèves témoignent de leur manque d'aisance dans la description géométrique des figures proposées, ce qui conduit à se demander comment redonner au vocabulaire attendu sa fonctionnalité.

3 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT R. et SALIN M. H., (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. et SALIN M. H. (2001) : Le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. Analyse critique de démarches préconisées actuellement dans les instructions officielles et dans les manuels. Quelques propositions alternatives à étudier, in *Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental*, Actes du colloque inter-IREM 1er cycle juin 2001, éditeur IREM de Montpellier.

CHEVALLARD Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in Actes de l'Université d'été de La Rochelle, pp. 89- 118, édition coordonnée par Noirfalise R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M., (1991), *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège*, Petit *x* n° 27.

MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x n° 70*, Université Joseph Fourier et IREM de Grenoble.

NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (2009) : *Enseigner les mathématiques à l'école primaire, Les quatre opérations sur les nombres entiers* (tome 1) et *Géométrie, grandeurs et mesures*, (tome 2), Paris, Vuibert.

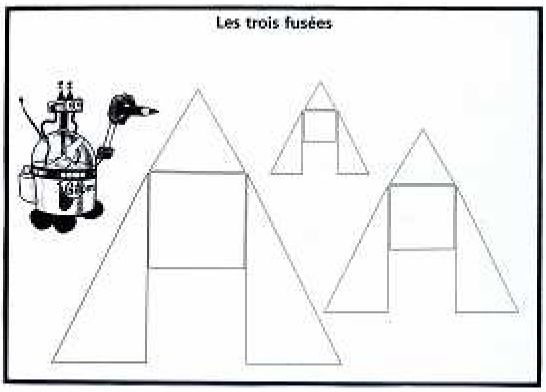
NOIRFALISE R. (1993) : Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 13 n°3, édition La Pensée Sauvage.

4 ANNEXES

4.1 Supports utilisés

4.1.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.

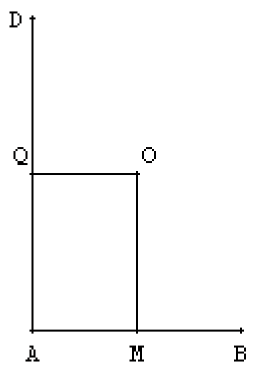


4.1.2 Pour l'activité de construction de figure

Cette situation est extraite de « Travaux Géométriques. Apprendre par la résolution de problèmes, cycle 3 », (CRDP du Nord Pas de Calais, 2000).
Il s'agit de compléter une figure pour obtenir un rectangle $ABCD$ de centre O (on considère implicitement que M est le milieu de $[AB]$ et que $AQOM$ est un rectangle).
Une des deux mises en œuvre réalisées en CM2 est la suivante :

Consigne :

Complète la figure ci-dessous pour obtenir un ***rectangle*** de centre O.
Tu ne peux utiliser que la règle non graduée et le compas

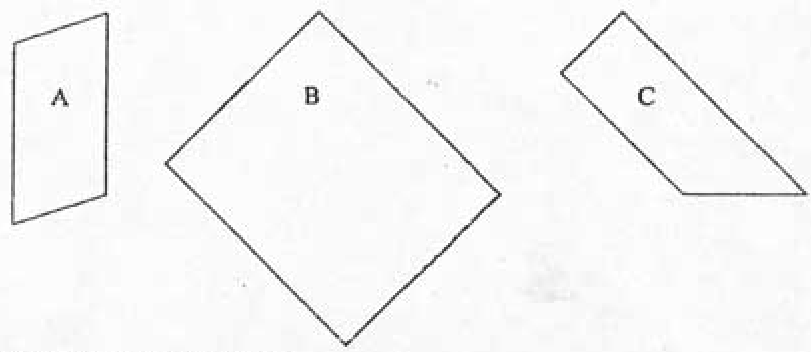


4.1.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit d'un exercice proposé en début de la classe de 6e, et les productions de deux élèves.
Pour cet exercice, les élèves avaient à leur disposition une règle graduée, une équerre et un compas.

Texte de l'exercice

Voici trois figures.



Remplis le tableau ci-dessous.

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	
B	OUI NON	
C	OUI NON	

Productions d'élèves

Annexe 1b

ELEVE A

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	C'est un rectangle parce que les cotés sont droites.
B	OUI NON	Parce que il y a 4 sommet et 4 côtés.
C	OUI NON	Parce qu'il y a 1 côtés qu'il est pas comme les autres.

Annexe 1c

ELEVE C

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	car il n'a pas d'angles droits
B	OUI NON	Oui car il a deux parallèles de 4,2 cm et deux autres de 3,1 cm et il a 4 angles droits
C	OUI NON	car il a que deux angles droits.

4.2 Techniques possibles et éléments technologiques correspondant pour ces activités

4.2.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Pour accomplir la tâche attendue, la technique qu'un élève peut mettre en œuvre sera différente dans chacune des situations évoquées précédemment. Nous précisons ci-dessous des techniques possibles.

1re activité : les élèves font coïncider le cadre du papier calque et du modèle. Avec leur crayon, ils repassent sur les tracés des trois fusées. Ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient ils pourront replacer le calque sur le modèle pour compléter. Ils retournent le calque et noircissent l'envers des tracés effectués, le retournent une seconde fois et font coïncider le cadre du papier calque et de la feuille blanche, puis repassent sur leurs premiers tracés. Dans ce cas encore, ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient, ils pourront replacer le calque sur la feuille pour compléter.
Ce type de techniques suppose une activité psychomotrice contrôlée par la vision : adaptation du geste pour suivre un trait déjà tracé et pour ne pas percer le calque, contrôle visuel de la mise en coïncidence

de deux tracés. La situation permet de rester dans le monde sensible. Elle suppose aussi que l'on sache que la figure est invariante lorsqu'on la décalque, puis qu'on la déplace sur un papier calque ; autrement dit, qu'il y a conservation des longueurs, des angles, des aires… Et plus sûrement, au niveau du CP, conservation de « la forme », sans plus de précision sur ce dernier terme. Ce qui renvoie aux ***propriétés « métriques »*** d'une certaine géométrie « théorique » qui demeure évidemment implicite.

2e activité : les élèves décomposent chaque fusée en quatre morceaux. Ils font correspondre un trou du formographe avec chacun des morceaux. Ils peuvent pour cela faire coïncider les parties évidées du formographe avec les différentes parties de chacune des trois fusées, et ensuite tracer sur la feuille, dans le cadre déjà tracé, les différentes parties de chaque fusée. Ils peuvent par exemple commencer par la pièce la plus à gauche et avancer dans le tracé du dessin en évoluant de gauche à droite ; selon le sens de la lecture qu'ils ont déjà rencontré.
Cette technique suppose la prise en compte de ***propriétés « topologiques »*** (morceaux de fusée reconnues par leur frontière, dedans, dehors, frontières qui se touchent, morceaux qui sont d'intersection vide ou non, ...), de ***propriétés « projectives »*** (tel morceau est aligné avec tel autre, est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...) Dans ce cas encore, ces propriétés sont implicites, contenues dans la conception du formographe, et les propriétés « métriques » ou « angulaires » de chaque figure sont prises en charge par les éléments du formographe qui permet de les transporter. Une lecture partiellement modélisée de la figure est effectuée : au-delà du fait que l'on a affaire à des contours fermés, la reconnaissance des formes reste de l'ordre de la perception visuelle (« ça coïncide » ou non avec des patrons), et leur position relative utilise le vocabulaire des géométries topologiques et projectives.

3e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Les lignes du quadrillage seront sans doute utilisées pour débuter le tracé de la base du pied de gauche de la grosse fusée, le côté vertical sera tracé en utilisant les lignes du quadrillage. Les élèves devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce...
Cette technique suppose la prise en compte de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés, le support quadrillé prenant en charge le tracé des angles droits).

4e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Ils peuvent commencer par le tracé de la base du pied gauche de la grosse fusée, qui sera sans doute choisi approximativement horizontal. Pour tracer le trait vertical, le recours au gabarit d'angle droit sera nécessaire. Ils devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce ; poursuivre ainsi pour les différentes fusées.
Cette technique suppose, même si elle semble transparente, invisible à l'observateur, la lecture, sur le modèle, de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés). Dans ce cas, le support ne prend pas en charge le tracé des angles droits : l'hypothèse que l'angle de la ligne horizontale et de la ligne verticale est droit pourrait être vérifiée en appliquant un gabarit d'angle droit sur le modèle, mais il sera sans doute simplement vu en s'appuyant sur la familiarité avec ce type d'objets. La reconnaissance étant établie de façon perceptive, on en déduit que le gabarit permettra de tracer un

angle superposable au modèle. Il y a là un début de modélisation : on remplace l'objet matériel à reproduire par un autre objet matériel réputé représenter, dans la communauté où on travaille, un objet géométrique nommé. L'opération est de même nature que celle qui consiste, dans le domaine numérique, à énumérer le début de la suite numérique en correspondance terme à terme avec les objets d'une collection, et à utiliser ce même début de suite numérique pour créer une collection dont on sait qu'elle aura le même nombre d'éléments que la première. Le dernier nombre que l'on atteint représente le cardinal des deux collections, c'est à travers ce type d'activités, rendant fonctionnel le nombre pour travailler avec une caractéristique commune à toutes les collections équipotentes, que la notion de cardinal se construit.

4.2.2 Pour l'activité de construction de figure

Première technique :
Avec la règle on « prolonge » le segment [*AO*] au-delà de *O* et, sur cette droite, on reporte au compas un segment [*OC*] de longueur *AO*. On joint alors *C* et *D* d'une part, et *B* et *C* d'autre part, pour terminer le tracé du rectangle ainsi obtenu. On a utilisé la propriété, ou encore le résultat technologique, qui énonce que si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu (parallélogramme) et s'il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Deuxième technique :
La pointe du compas en *D* et l'écartement égal à *AB*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $B\widehat{A}D$; la pointe du compas en *B* et l'écartement égal à *AD*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $B\widehat{A}D$; ces deux arcs se coupent en *C*, et avec la règle on termine la construction du rectangle.
On a utilisé le théorème qui énonce qu'un quadrilatère non croisé qui a ses côtés opposés égaux deux à deux est un parallélogramme et que si, de plus, il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Troisième technique :
On « prolonge » les demi-droites [*MO*) et [*QO*) au-delà de *O* et avec le compas on y place respectivement les points *M'* et *Q'* tels que $OM' = OM$ et $OQ' = OQ$. Les droites (*BQ'*) et (*DM'*) se coupent en *C*.
On a utilisé principalement le théorème qui énonce que si un quadrilatère a les médiatrices de ses côtés pour axes de symétrie, alors c'est un rectangle. D'autres théorèmes sont utilisés, de manière implicite, par exemple celui qui énonce que deux perpendiculaires à deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires entre elles, qui justifie par exemple que $(QO) \perp (AD)$ et que $(DM') \perp (AD)$, etc.

4.2.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit de reconnaître si une figure est un rectangle. Ce type de tâches peut être accompli à l'aide de différentes techniques telles que celles mentionnées dans le programme :

- reconnaître *de manière perceptive* une figure plane. « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* » [9]
- ou « *Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre.* », en CE2, et « *Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas.* », en CM1.[10]

Ces extraits des programmes du cycle des approfondissements mentionnent deux techniques différentes pour accomplir la tâche demandée. La première, qui n'est plus considérée comme suffisante en cours de cycle, suppose que l'on sache reconnaître la forme – carré, losange ou cercle – de façon globale, un peu

[9] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.
[10] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page39.

comme on reconnaît son voisin !… C'est-à-dire sans décomposer les éléments qui la constituent, sans modéliser ces éléments par des objets géométriques et sans étudier les propriétés géométriques de ces objets pris individuellement ou entre eux, donc sans recourir à une observation plus ou moins instrumentée qui permettrait de vérifier les inférences faites sur la nature de l'objet concret que l'on a sous les yeux. La seconde technique, qui autorise des gestes de ce type, est évidemment celle qui est attendue à ce niveau.

Atelier B2

SITUATIONS ET ASSORTIMENTS D'EXERCICES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AUX ELEVES DE 5ÈME ET 6ÈME SEGPA

Marie-Hélène Salin
Université Bordeaux 2 LACES Equipe DAESL
mh.salin@sfr.fr

Résumé
Depuis quelques années, je travaille avec un enseignant de SEGPA, J.Y. Jongboët, pour préparer des suites de séances de mathématiques, relatives à un thème précis, comportant des « situations de recherche » de préférence issues de manuels du primaire, dans lesquelles les élèves puissent rentrer facilement et les plus simples possibles à gérer par l'enseignant, et des situations plus classiques, permettant la mise en fonctionnement répétée, sous forme d'exercices, des connaissances mises en œuvre dans les situations de type précédent, en vue de l'appropriation progressive de ces connaissances. L'atelier a comporté une première partie présentant les raisons de ce travail et deux exemples de «situations de recherche » sur lesquelles nous travaillons. Dans une deuxième partie, les participants ont été sollicités pour s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées dans les situations présentées.

1 PREMIERE PARTIE

Assurant pendant de longues années, la formation des enseignants préparant l'option F de ce qui s'appelle maintenant le CAPASH, je m'étais rendu compte de l'absence de documents (manuels, livres pour les professeurs) les aidant dans leur enseignement. Mon projet de début de retraite était donc d'élaborer des documents utiles aux enseignants de SEGPA, tenant compte de mes acquis de chercheur en didactique des mathématiques, mais sans engager une recherche aux normes universitaires. Pour réaliser ce projet, il me fallait commencer par trouver des enseignants acceptant de mettre à l'épreuve certaines de mes propositions ainsi que ma présence dans leurs classes. Cela n'a pas été très facile et je remercie D. Houdart et J.Y. Jongboët qui ont bien voulu s'engager dans cette démarche.
L'objectif de l'atelier était double : décrire une démarche d'enseignement des mathématiques pour les classes de 6ème et 5ème de SEGPA et inciter des collègues à s'investir sur ce créneau.

1.1 Le contexte de l'enseignement des mathématiques en SEGPA

Dans un tiers environ des collèges, une SEGPA accueille les élèves, qui : « à l'issue de la scolarité élémentaire, cumulent des retards importants dans les apprentissages scolaires et des perturbations de l'efficience intellectuelle, sans toutefois présenter un retard mental. Les SEGPA ont pour objectif de permettre à ces élèves d'accéder, à l'issue de la formation en collège, à une formation professionnelle qualifiante».

L'enseignement dispensé se veut le plus proche possible de celui destiné aux autres élèves de collège : « Les finalités qui y sont poursuivies sont celles des enseignements du collège même si les programmes n'y sont pas applicables à l'identique » et plus précisément : « La classe de 6ème a pour objectif de permettre à l'élève accueilli en SEGPA de s'approprier ou se réapproprier des savoirs en re-dynamisant les apprentissages. Pour ce faire, et avec toute la souplesse requise dans une démarche d'adaptation, les

enseignants organisent leur action à partir des programmes de la classe de 6ème du collège en prenant en compte les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves » (Circulaire juin 98).
Ces directives ont eu un effet bénéfique sur les attentes des enseignants vis-à-vis de leurs élèves et sur les plans d'étude, plus exigeants qu'auparavant. Mais, il y a une facette négative : il se développe dans ces classes un enseignement dont les contenus et les formes peuvent sembler proches de ceux en vigueur dans les classes ordinaires, conformément aux instructions, alors que deux caractéristiques des populations concernées (élèves et professeurs) les différencient :

- les niveaux en mathématiques des élèves, à l'entrée en 6ème, s'étendent entre celui visé à la fin du cycle 2 (et encore !) et celui de la deuxième année du cycle 3.
- les enseignants de SEGPA sont des enseignants du premier degré, dont la plupart n'ont pas de formation mathématique, même s'ils font l'essentiel de leur service dans cet enseignement.

Le divorce entre le niveau de connaissances des élèves et les objectifs assignés aux professeurs, en conduit beaucoup à privilégier un enseignement très formel, où les élèves peuvent obtenir des réussites, alors qu'ils sont incapables d'associer des connaissances aux techniques qu'on leur enseigne.

Ainsi, dans un manuel[1] de 6ème spécialement destiné à ces élèves (annexe 1), la première leçon sur les nombres décimaux comporte un premier encadré qui énumère sur quoi porte l'apprentissage des décimaux :

« Je vais apprendre à :
- identifier la partie entière et la partie décimale d'un nombre,
- identifier le chiffre des dixièmes, des centièmes, des millièmes…,
- écrire un nombre décimal compris entre deux nombres »

et propose un découpage en « technique » : l'usage du tableau de numération, et « sens » ainsi précisé : « il existe une infinité de nombres entre deux entiers ; la partie décimale permet de les exprimer ». L'enseignement consiste donc à fournir aux élèves une suite d'algorithmes leur permettant de développer quelques connaissances sur les décimaux (voir les exercices en annexe 2) mais en aucun cas, de comprendre à quels problèmes répondent ces nombres, ni comment ils sont construits.
Voici, en contrepoint, les réponses de groupes de deux élèves de 5ème dans une activité permettant de prendre des informations sur le sens que les élèves donnent aux nombres décimaux : il s'agit pour chaque groupe, d'indiquer à l'enseignant la longueur d'une bande de carton à l'aide d'une unité de papier (pliable), pour que ce dernier puisse découper une bande de même longueur que celle dont dispose le groupe.

Après un certain nombre d'échanges avec le professeur, non concluants pour la plupart, la mise en commun finale fait apparaître trois types de messages :

« 2 u et un petit bout d'unité » (2 groupes)
« 2,0 u, 2,2 u ou 2,3 u ou 2,5 u » (6 groupes) mais aucun élève ne sait montrer à la professeure comment construire un segment de cette longueur,
« 2 u + ¼ u », (2 groupes, un peu aidés par l'enseignant quant à la formulation du message) qui a permis de construire une bande de la bonne taille.

Ainsi, plus de la moitié des groupes pensent bien à utiliser un nombre décimal pour indiquer une longueur comprise entre 2 entiers mais aucun ne sait attribuer un sens précis au chiffre de la partie décimale. Personne n'a parlé de dixième, la partie décimale correspond sans doute à « un petit bout en plus ».
Ces résultats sont représentatifs de l'état de savoir des élèves de SEGPA : ils disposent de connaissances « culturelles » dont ne disposent pas les élèves plus jeunes qui rencontrent pour la première fois ces notions mais ces connaissances ne sont pas efficientes.

[1] Augendre J. et Serresèque T. (2002) *Maths 6ème*. Paris : Delagrave

On ne peut évoquer le contexte de l'enseignement en SEGPA sans aborder la question du « climat de classe ». Les problèmes sociaux de beaucoup d'élèves, les difficultés psychologiques de certains d'entre eux, contribuent à rendre difficile, et souvent imprévisible, la gestion des rapports entre les différents éléments de la classe, professeur et/ou élèves. Ces difficultés s'ajoutent à celles que rencontre le professeur d'un point de vue proprement didactique. Ceci peut expliquer pourquoi les enseignants avec lesquels j'ai travaillé choisissent un enseignement collectif (le même sujet pour tous au même moment) avec des temps de soutien différenciés quand ils en ont la possibilité. Je pense que ce choix est celui de la majorité des enseignants de SEGPA en ce qui concerne les mathématiques.

En conclusion, on peut formuler ainsi le problème didactique majeur auquel sont confrontés les enseignants : Comment travailler un domaine des mathématiques qui a déjà été enseigné, sans que les élèves aient l'impression de rabâcher, et en visant un double objectif : leur permettre de donner du sens aux concepts en jeu et les guider jusqu'à la maîtrise d'outils décontextualisés ?

1.2 Lignes directrices pour un enseignement des mathématiques en SEGPA

Les propositions faites aux enseignants s'appuient sur la théorie des situations didactiques en essayant de mettre en œuvre ses développements récents, en particulier sur les champs ouverts par la thèse de F. Genestoux.

1.2.1 Rappel : les étapes d'un processus d'enseignement

Tout processus d'enseignement d'une notion mathématique (dans le cadre de la théorie des situations didactiques) comporte une suite de « moments forts », correspondant aux situations–clés adidactiques. En général, l'entrée dans la situation « n » suppose des connaissances construites dans des situations antérieures. Ces connaissances doivent être suffisamment maîtrisées par les élèves, même si elles n'ont pas besoin de l'être complètement parce que, à terme, elles vont être remplacées par d'autres, plus simples, plus efficaces, etc. Des situations didactiques que j'appelle intermédiaires, qui permettent de retravailler certaines de ces connaissances « naissantes » sont nécessaires[2].

1.2.2 Quelques « principes » pour une adaptation aux classes de 6ème-5ème SEGPA

1) Il est nécessaire, et possible sous certaines conditions, de confronter les élèves de SEGPA à des situations, « à dimension adidactique[3] », dans lesquelles ils aient la possibilité de saisir l'enjeu des apprentissages en terme de prise de pouvoir sur le milieu, c'est-à-dire au cours desquelles ils aient la possibilité d'éprouver l'efficacité des connaissances dont ils disposent déjà ou des notions qui leur sont enseignées. Comment choisir un milieu pertinent ? Il est nécessaire de respecter la condition exigeante suivante : « *le savoir visé doit être représenté convenablement par les situations choisies* ». Ainsi, par exemple, l'entrée dans les décimaux par les problèmes de monnaie, très fréquente dans ces classes, n'est pas adéquate. J'ai choisi d'introduire les décimaux comme moyen d'exprimer une mesure sous la forme de la somme d'un nombre entier d'unités et d'une fraction décimale d'unité inférieure à 1, pour 2 raisons :
- C'est une démarche compatible avec les connaissances dont les élèves avaient fait preuve lors de la situation évoquée ci-dessus. Mais il ne s'agit pas de leur expliquer ensuite très vite que « quand ils proposent 2,2 u pour une longueur, cela veut dire qu'on a découpé l'unité en dix parties égales et qu'on en prend deux morceaux » ! Ce qui est visé est de permettre, par un processus d'enseignement s'étalant sur plusieurs séances, de découvrir le sens de cette écriture et de pouvoir l'utiliser convenablement[4].

---

[2] Voir des exemples dans Brousseau G. et N. (1987) Rationnels et décimaux

[3] Voir Mercier (1995), L'emploi de l'expression « à dimension adidactique » est justifié dans Salin (2006).

[4] Je me suis appuyée sur l'introduction des fractions de CAP MATHS CM1

- D'autre part, commencer par travailler sur des fractions non décimales permet de revenir sur le sens de moitié, demi, tiers, « ième » et de ne pas isoler les fractions décimales des autres fractions. Des situations intermédiaires plus classiques, s'appuyant sur des exercices calibrés, sont nécessaires pour la mise en fonctionnement de ces connaissances, en vue de leur appropriation progressive et de leur institutionnalisation. En SEGPA, plus encore que dans l'enseignement ordinaire, ce travail, qui contribue à la transformation des connaissances en savoirs, est essentiel mais la conception en est difficile, car il faut trouver un équilibre entre le sous et le sur-apprentissage.
Ces deux types de situations doivent être gérables à un coût pas trop élevé par les professeurs, sinon ils renoncent à les utiliser.

1.3 Quelles situations « à dimension adidactique »?

1.3.1 Les situations de « prévision »

Le problème posé concerne un milieu matériel effectif, sur lequel un « acteur » doit opérer. Il s'agit de prévoir le résultat de cette action, à partir d'un certain nombre d'informations données ou prises préalablement et non de lire le résultat, une fois l'action effectuée.
La vérification du résultat de la prévision est un moteur pour le retour sur la démarche qui a servi à la prévision.

Un exemple
Matériel : 2 bandes de longueur 7/10 u et 5/10 u ; une règle graduée en dixièmes.
Le professeur a préparé les 2 bandes qu'il montre rapidement, en indiquant leurs longueurs au tableau. Il rappelle ce que veut dire « mettre bout à bout », et le réalise derrière le tableau. Les élèves doivent prévoir la longueur totale [et découper une bande de cette longueur][5].Une fois les prévisions effectuées et, dans la mesure du possible, justifiées, la vérification effective donne l'occasion aux élèves, pour ceux qui ont réussi, d'augmenter leur confiance dans leurs raisonnements, pour ceux qui n'ont pas réussi, de revenir, avec l'aide de l'enseignant le plus souvent, sur le sens des écritures proposées et leurs transformations possibles, en l'occurrence pourquoi la longueur de la bande ne peut pas être 12/20 u (réponse fournie le plus fréquemment).

1.3.2 Les situations « retournées » (Bloch 2004)

Dans une situation d'apprentissage par adaptation, le milieu doit être facteur de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève. Ceci peut être mis en œuvre à travers des modifications des tâches usuelles qui correspondent à un *retournement de la situation.* La situation est organisée de façon à ce que l'élève se trouve forcé à questionner les liens existants entre un milieu matériel sur lequel réaliser une action, et un résultat à obtenir.

Un exemple[6]
Pour la première séance sur les fractions, nous avions prévu de reprendre la mesure de la longueur d'une bande par report de l'unité (tous les élèves se sont accordés sur 3u après une mise au point sur le soin à apporter au report), puis en utilisant une échelle graduée mais non numérotée. L'enseignante a ensuite demandé de numéroter les traits intermédiaires de l'échelle pour qu'on puisse mesurer très rapidement la bande : 11 élèves sur 14 ont commencé par 1 ! Quelle n'a pas été leur surprise de découvrir que la longueur de leur bande fournie par l'échelle était alors de 4 unités ! La discussion qui a suivi a permis d'expliquer le phénomène, de mettre en relation la solution avec l'attention à la position du zéro, pourtant rappelée constamment par l'enseignante dans les activités antérieures de mesurage. Il

[5] Le professeur peut ou non laisser le découpage sous la responsabilité des élèves.
[6] dont la simplicité montre l'étendue du travail à mener !

semble que ce mini-événement ait produit une espèce de choc puisque dans les exercices à faire à la maison, reprenant cet item, il y a eu très peu d'erreurs.
Si ce type de situation dite « retournée » n'est pas absent de l'enseignement destiné aux classes ordinaires, il est peu fréquent, alors que nous faisons l'hypothèse qu'il permet au professeur de diversifier les situations à proposer aux élèves pour les aider à se placer dans une position réflexive par rapport au savoir en jeu.

1.3.3 Remarques à propos de ces situations

De nombreuses questions se posent, qui n'ont pas été développées au cours de l'atelier, mais dont certaines sont abordées dans Salin (2006). Je n'explicite ici que celles liées à ce qui suit.
- Suffit-il de proposer une seule fois ces situations, en faisant le pari que la plupart des élèves auront saisi le lien entre le problème posé et la solution ébauchée par l'un d'entre eux ou proposée par l'enseignant ? La réponse est évidemment négative, il est donc nécessaire de confronter les élèves plusieurs fois au même problème, en modifiant certaines variables.
- Mais aussitôt, se pose la question : comment alléger le dispositif matériel pour rendre l'enseignement compatible avec les contraintes de ces classes ?

1.4 La construction de situations « intermédiaires »

Ces situations sont construites autour de séries d'exercices, de manière à fonctionner comme le font le plus souvent les enseignants de ces classes. Ces exercices sont cherchés individuellement, éventuellement avec l'aide du professeur, puis corrigés ensuite au tableau, suivant un mode assez strict. C'est à cette occasion que le professeur aide à repérer les erreurs, insiste sur ce qui est important, etc.
La validation effective est réalisée au tableau tant qu'elle s'avère nécessaire. Une difficulté importante est de déterminer à quel moment les élèves n'ont plus besoin de vérification effective parce qu'ils disposent de critères de validité (Margolinas 1993) efficaces et donc combien de fois le même type de situation doit leur être proposé, et avec quelles variations sur les valeurs des variables. Dans les faits, il est nécessaire d'accepter une assez grande hétérogénéité des résultats des élèves et donc d'avancer dans le travail même si certains n'ont pas encore bien réussi.

C'est la « qualité » de ces exercices qui rend ce travail plus ou moins fructueux. Encore faut-il pouvoir définir des critères pour la qualifier. Les travaux de F. Genestoux (2000) qui, dans le cadre de la théorie des situations, a consacré une partie de sa thèse à l'étude de l'enseignement des savoirs destinés à être sus par cœur, comme la table de multiplication, paraissent susceptibles d'être étendus à l'étude d'apprentissages longs, se développant par étapes.

1.4.1 Assortiment didactique

La notion d'« assortiment didactique », qui modélise les séries d'exercices, en permet l'étude a priori. Un assortiment didactique est « une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique » dont on peut étudier les variables didactiques.
F. Genestoux distingue différents types d'assortiments suivant leurs finalités : pour apprendre du nouveau, pour l'entraînement du « déjà appris », pour l'évaluation. Ces trois types d'assortiments sont nécessaires pour les élèves de SEGPA, mais le travail en cours présenté ici ne porte que sur les assortiments « pour apprendre du nouveau ».

1.4.2 Caractères des assortiments pour apprendre du nouveau : (Genestoux APM)…)

- Forte redondance ;
- Pas trop de nouveauté à la fois ;

- Pas de standardisation précoce d'écriture ou de présentation. C'est la vigilance cognitive de l'élève qui doit être sollicitée ;
- Un plongement du nouveau dans du déjà connu (non problématique).

« En effet, si l'élève rencontre les nouvelles connaissances trop rarement par rapport à celles qu'il connaît déjà, il n'apprend pas. S'il les rencontre trop fréquemment (et donc si les occasions de les rattacher à ce qu'il connaît déjà se raréfient), il apprend mais ne saura pas réorganiser ses anciennes connaissances. Les apprentissages seront morcelés, indépendants et difficilement réinvestis. D'autre part, pour construire du nouveau, il faut le faire fonctionner sur du déjà familier ».

1.5 Quelques remarques en guise de conclusion

1.5.1 Concernant les élèves

Mes observations hebdomadaires m'incitent à penser que la voie que nous explorons peut permettre des avancées pour les élèves, concernant leurs connaissances et leurs rapports aux mathématiques.
- Chaque nouvelle situation leur demande un temps d'adaptation important, mais nous n'observons pas les phénomènes de découragement et de rejet, fréquents dans ces classes.
- Les « situations intermédiaires » sont particulièrement nécessaires pour que les élèves s'engagent dans l'élaboration de critères de validité pertinents.

1.5.2 Concernant les demandes du professeur

Avec le temps, la demande de l'enseignant porte de manière pressante sur la programmation en 6ème et 5ème concernant l'organisation des thèmes et leur répartition au long des deux années de 6ème et 5ème. Et je ne suis pas assurée de mes réponses. Tous les thèmes à travailler ont déjà été rencontrés par les élèves mais la plupart des connaissances ne sont pas maîtrisées. Aussi, il n'est pas concevable de vouloir toutes les retravailler de manière systématique, d'autant plus qu'il y a un effet de ras-le-bol des élèves. Le choix et l'organisation des thèmes sont plus liés aux intérêts des élèves qu'à un programme ou même qu'à la détermination de leurs besoins puisque ceux-ci sont énormes. Ainsi, en première année de SEGPA, le travail sur la durée et la lecture de l'heure, celui sur les mesures de longueur (sans les décimaux mais avec retour sur les unités, les ordres de grandeur) puis sur les mesures de poids (avec des balances Roberval) sont l'occasion de revenir aussi sur la numération décimale et d'introduire des contextes matériels, qui pourront peut-être permettre aux élèves de mieux entrer dans les contextes évoqués dans les problèmes. Ces derniers, dont les élèves ont une vision très négative, sont peu travaillés en 6ème. Les fractions ne sont abordées qu'en 5ème, un minimum de maîtrise de la numération de position et de la droite numérique étant nécessaire. Toutes ces décisions auraient besoin de s'appuyer sur des travaux précis portant sur les dépendances entre connaissances, travaux initiés depuis très longtemps par Guy Brousseau mais trop ponctuels.
Une seconde demande de l'enseignant porte sur de l'aide pour élaborer des projets. Nous avons passé beaucoup de temps l'année dernière à réfléchir au type de travail à mettre en œuvre pour la réalisation collective par la classe (en vue d'une exposition de fin d'année), d'une maquette du bâtiment principal du collège.

1.5.3 Concernant les limites de ce travail

Elles sont la conséquence d'une situation de bricolage méthodologique : je n'ai pas les moyens (ni la motivation) de recueillir les données nécessaires à un minimum de validation de la démarche présentée. Je ne peux que me fier aux observations que je réalise chaque semaine.

2 DEUXIEME PARTIE

Etant donné le peu de temps disponible, le thème travaillé a porté sur les fractions, thème abordé dans l'exposé. Il s'agit de redonner du sens et d'aider à la structuration de connaissances déjà rencontrées par certains élèves mais dont ils maîtrisent très peu l'utilisation dans des situations autres que purement formelles.
Pour les participants à l'atelier, l'objectif était de s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées une première fois dans une situation « à dimension adidactique ».Après une présentation rapide des deux premières séances du thème « fractions », plusieurs groupes ont été constitués avec comme consigne : « Comment retravailler les connaissances rencontrées dans cette leçon, sous la forme d'une suite d'exercices, sans introduire de franchement nouveau, mais sans que ce soit répétitif ? ».

Une mise en commun rapide a permis de pointer les difficultés de ce travail, en particulier celle relative à la difficulté de différencier le « nouveau » du « pas nouveau ».

Ce compte-rendu comprend la fiche didactique de la deuxième séquence sur les fractions, la liste des propositions des collègues, des commentaires et quelques exercices proposés effectivement aux élèves.

3 RÉFÉRENCES CITÉES

BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M.H., Clanché P. & Sarrazy B. (Eds) *Sur la théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage
BROUSSEAU, G. & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* Talence : IREM de Bordeaux.
GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques In Dorier J. L. (Ed). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématique.* (CD-rom Thème2-TD2) Grenoble : La Pensée Sauvage.Editions
MERCIER A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas (ed), *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions
SALIN Marie-Hélène (2007) Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire in Bednarz, N., Mary, C. (dir.) (2007) "*L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*". Actes du colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP

4 ANNEXES

Annexe 1

Fiches de préparation des deux premières séances sur les fractions

SEGPA 5ème Fractions Extrait de la séance 1
Objectifs de la séance :

- revenir rapidement sur le mesurage des longueurs, et le vocabulaire associé : unité, report
- coder par des entiers une échelle fournie aux élèves, l'utiliser pour mesurer des longueurs de bandes et des segments
- poser le problème de la mesure d'un segment dont la longueur n'est pas égale à un nombre entier d'unités (la question est posée à la fin de la phase 3. Il s'agit seulement de conclure sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un nombre entier).

Phase 3

Vous allez maintenant utiliser votre instrument pour mesurer des segments, tracés sur cette feuille et en tracer vous-même deux de la longueur indiquée

Correction rapide : pour les longueurs à mesurer, par mise en commun ; pour les segments à tracer à l'aide d'un calque sur lequel sont tracés les segments, réalisée par le professeur.

Pas d'erreurs notoires, la correction se fait rapidement

Que se passe-t-il pour les 2 derniers, KL et MN ? Examen des réponses proposées par les élèves.

J'ai noté à la volée : 5 et demi, ou 5, 2 ou 5,5

Conclusion : *la prochaine fois, c'est sur cette question-là que l'on va travailler : comment indiquer des longueurs plus petites que l'unité ?*

SEGPA 5ème Fractions Séance 2
Communiquer une longueur avec pliage de l'unité[7]
Objectifs :
- reposer le problème de la désignation d'une longueur qui n'est pas égale à un nombre entier d'unités (ou le poser s'il n'a pas été abordé à la séance 1)
- introduire les fractions d'unités : ½ u, ¼ u et ¾ u et l'écriture 2 u+ ½ u, etc…
- relations entre ¼ u + ¼ u, ½ u et 2/4 u

Matériel :
- des bandes de carton ayant comme longueur 2 v + ¼ v, 3 v + ½ v et v + ¾ v
- des unités papier (facilement pliables), (longueur v : 6 cm)
- « l'instrument » pour unité de 6 cm, sur transparent
- une fiche d'exercices

Déroulement
Phase 1 : Essai de formulation par quelques élèves de ce qui a été fait à la séance précédente et correction des exercices. […]
Phase 2 : Examen des réponses pour KL et MN, longueurs des segments de la séance 1. Formuler le problème, relever les réponses, montrer que tout le monde n'est pas d'accord, et introduire la suite en disant : « je ne vais pas vous dire qui a tort, qui a raison, mais nous allons faire la chose suivante : je vais vous donner par groupes de 2 une bande et vous allez m'indiquer sa longueur sur ce papier, comme si vous étiez mes clients et moi, le marchand de bandes (évoquer peut-être les magasins de bricolage). Ensuite, devant vous, je prendrai vos indications et j'essaierai de découper une bande de la même longueur que la vôtre. Pour cela, je vous donne la nouvelle unité, une bande graduée avec cette nouvelle unité, et la bande dont vous devez me donner la longueur. L'unité que je vous donne est en papier, vous pouvez la plier mais pas la découper. Nous verrons quelles sont les indications qui permettent de découper ma bande pour qu'elle soit de la même longueur que la votre. »
Phase 3 : Le professeur distribue le matériel à chaque groupe de deux.

Temps de recherche (5 min) puis temps collectif
Le professeur définit les règles du jeu : le groupe dont on examine les indications au début ne dit rien. Il regarde ce que fait et dit le professeur au tableau. Le groupe s'explique ensuite, s'il le demande.
Propositions possibles et arguments :
- 2v et cette longueur (représentée sur le papier, par exemple un petit segment) : renvoyer à l'usage social des mesures et au fait qu'il faut trouver un moyen utilisant des nombres.
- 2v et demi ou 2 et la moitié : Le professeur plie suivant les indications, cela ne va pas.
- 2v et un petit bout : Le professeur prend un petit bout différent du ¼
- 2,2v ou même 2,5v : comment est-ce que je fais pour mesurer ? avec cette unité, je n'ai pas de règle.
- 2v et quelque chose qui exprime qu'on plie en 2 et encore en 2, ou un quart, si cela apparaît : réalisation de la bande et réussite. Si aucun groupe ne l'a proposé, c'est le professeur qui le propose comme une solution au problème posé.

Moment d'introduction de l'écriture ¼ v, mise en relation avec d'autres rencontres avec ¼ si déjà faites.
La longueur de la bande est 2v + ¼ v . Commentaire sur l'écriture : pourquoi utilise-t-on le signe + ?
Phase 4 : Retour aux segments KL et MN : quelle est leur longueur (avec l'unité u) ?
On peut penser que certains vont hésiter pour 1/2. Les trois écritures peuvent être proposées pour KL : 4u + ¼ u + ¼ u ou 4 u + ½ u ou 4u + 2/4 u.
Faire écrire l'égalité : ¼ u + ¼ u = ½ u = 2/4 u

[7] Les résultats de cette séance sont évoqués dans la partie I

Annexe 2

Propositions des collègues pour une suite à cette séance (en supposant que la séance se soit relativement bien déroulée, c'est-à-dire que le professeur ait pu aller jusqu'aux conclusions énoncées) :

Groupe 1 : Créer une banque d'exercices systématiques jouant seulement sur la relation « segment, écritures de la mesure de ce segment », et ce, dans les deux sens en donnant tantôt l'un tantôt l'autre et en demandant la production du deuxième terme. Le groupe a élaboré un « outil », sous forme d'un tableau articulant différentes possibilités :

Ce qui est donné	*Ce qui est à produire*
bande	Ecriture de la longueur (langage naturel ou symbolique)
Ecriture de la longueur	Bande
Une bande et plusieurs écritures	Retrouver la ou les bonnes écritures
Une écriture	Une autre écriture de la même longueur
….	

Pour les deux derniers exemples, la mise à disposition ou non d'une échelle constitue une variable didactique.

Groupe 2 : Ensemble de propositions plus proches du travail de la séance 2 :
- reprendre le problème de la séance 2 avec une bande plus petite que l'unité, une autre plus grande ;
- faire des pièges : arriver à 16/4 u et 16 + ¼ ;
- Mettre en place un répertoire aidant les élèves à structurer leurs connaissances : répertoire d'écritures différentes possibles, nécessaire pour arriver ensuite aux équivalences ;
- Introduction de 1/8 u ;
- Construction d'instruments gradués.

Groupe 3 : Travail sur la mesure d'une bande plus petite que la bande unité, pour arriver à la notion de 1/10 u
D'abord avec une bande moitié de la bande unité, (évaluation par pliage), puis d'une bande quart de la bande unité (deuxième pliage). Usage des égalités : ½ u + ½ u = u
Puis introduction du 1/10 et de l'égalité : 1/10 u + … + 1/10 u = u
Enfin, mesurage d'une bande très longue comme 2u + 7/10 u. Ecritures différentes avec les bandes sous-unités précédentes.
Remarques sur ces propositions :
Dans un exercice artificiel comme celui proposé aux collègues, il est difficile de se limiter à des propositions pour une seule séance. Même si celles ci-dessus vont un peu au delà de ce qu'il est possible de faire dans une séance intermédiaire, les groupes ont suggéré des activités donnant l'occasion aux élèves de faire fonctionner sous leur propre responsabilité les connaissances rencontrées dans la séance, sans que le milieu soit modifié, ce qui n'avait pas été le cas l'année précédente où j'avais proposé le même travail.

Annexe 3

L'annexe 3 donne une idée des exercices proposés effectivement dans la séance suivante, chaque exercice est un prototype d'une série dont le titre indique la caractéristique.

Série 1 : refaire plusieurs fois l'activité, objet de la séance 2, comme par exemple :

1) Indique à ton voisin la longueur du segment MN avec l'unité u.

M N

2) Trace sur (D) un segment PQ de la longueur indiquée par ton voisin.
(D)

Comparez vos segments en vous aidant de la bande beige *(une bande sur laquelle les élèves peuvent repérer la longueur des segments)*

Série 2 : introduire un petit peu de nouveau

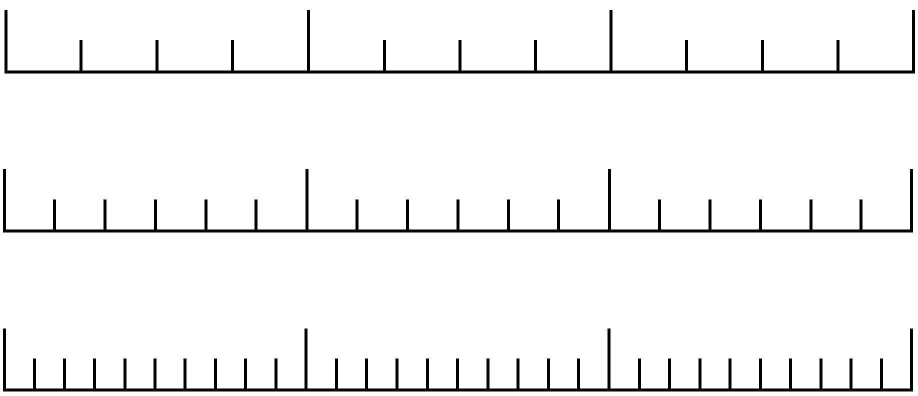
3) Plie ton unité en 2 puis encore en 2 et encore une fois en 2. Quelle est la longueur de la petite bande que tu obtiens ?

4) Comment construire un segment qui mesure 3/8 u ? Traces-en un.

Série 3 : il faut décider ![8]

Matériel :
Un matériel nouveau est proposé : des règles graduées avec des fractions de l'unité, pour pouvoir mesurer les longueurs de segments de manière rapide.

3 règles de découpages différents dont une règle décimale



Exercices :

[8] Les longueurs des segments sont exactes pour au moins une des règles, ce qui bien sûr, est artificiel !

Choisis la bonne règle pour mesurer la longueur de ces trois segments

AB =

CD =

EF =

Atelier B3

L'ANALYSE A PRIORI : UN OUTIL POUR LA FORMATION D'ENSEIGNANTS (EXEMPLE D'UN JEU ISSU DES MANUELS SUISSES ROMANDS DE PREMIERE ANNEE PRIMAIRE).

Jean-Luc DORIER
Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Education
Université de Genève
Equipe DiMaGe
Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Résumé
Le but de cet atelier est de montrer comment l'outil de l'analyse a priori tel qu'il a été développé par G. Brousseau (1998) dans la Théorie des Situations peut être utilisé en formation d'enseignants.
Après avoir rapidement présenté l'analyse a priori, l'auteur en développe l'intérêt en tant qu'aide à une prise de recul pour aborder des situations de classe. Ses propos sont ensuite illustrés par l'analyse d'une activité, le « dé basculé » proposée aux enfants de la Suisse Romande en première année primaire. Six variables didactiques sont dégagées et interrogées en regard des procédures et stratégies possibles, qui conduisent à identifier des conditions favorables de mise œuvre. La mise à jour de ces variables permet également à l'auteur de situer l'activité dans un ensemble plus large d'activités possibles.

1 INTRODUCTION

Le but que je poursuis dans cet atelier est de montrer comment l'outil de l'analyse a priori tel qu'il a été développé par G. BROUSSEAU (1998) dans la Théorie des Situations peut être utilisé en formation d'enseignants afin de permettre un travail de préparation d'activités existantes de façon distanciée.
Dans cet atelier, j'ai tout d'abord présenté aux participants quelques éléments de rappel sur ce qu'est l'analyse a priori en soulignant ce qui me semblait le plus important pour la formation. Je reprends ces éléments, dans la section 2 de cet article, en les enrichissant et les recentrant sur les questions débattues par les participants de l'atelier.
Dans un deuxième temps, j'ai présenté une activité sur l'addition issue des moyens d'enseignement suisses romands[1] pour la première année primaire sous la forme d'un jeu de dé. J'ai présenté cette activité ainsi que le contexte de la Suisse Romande et quelques considérations sur les jeux, que je ne reprendrai pas ici[2].
J'ai ensuite proposé aux participants de faire une analyse a priori d'une situation plus générale (décrite par moi) en montrant comment cette activité en était un cas particulier (comme la course à 20) pour un certain choix de valeurs des variables didactiques dégagées. Les participants devaient également dégager les objectifs d'apprentissage atteignables et les comparer à ceux affichés dans les moyens suisses romands d'où cette activité a été tirée.
Après avoir échangé sur les productions des participants et sur mes propres analyses, nous avons visionné quelques extraits d'une expérimentation menée à Genève avec une classe ordinaire de première année primaire sur l'activité du « dé basculé » afin de voir l'intérêt d'une telle analyse.
Nous avons conclu par un rapide débat sur les apports possibles en formation.

[1] En Suisse romande, les enseignants de mathématiques disposent d'un ensemble de sources officielles que l'on désigne sous le terme de « moyens », voir explications plus bas.
[2] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition, Grand N, 82, 69-89.

2 QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ANALYSE A PRIORI

Je ne reprendrai pas ici de façon systématique ce qu'est une analyse a priori renvoyant aux travaux de BROUSSEAU (1998), synthétisés dans une approche « abordable » dans BESSOT (2003). Je voudrais plutôt rappeler quelques points qui me semblent essentiels pour un usage en formation, visant à outiller des enseignants pour qu'ils abordent des activités de classe avec le recul suffisant pour une gestion la plus optimale possible. J'essaierai aussi de mettre à jour certains quiproquos assez répandus sur ce qu'est une analyse a priori (sans accent sur le « a » latin !).

2.1 Quelques précisions

Tout d'abord, il faut ici repréciser que « a priori » ne signifie pas « avant dans le temps », en tout cas par rapport à une réalisation en classe de l'activité. S'il y a bien une idée d'antériorité, elle se situe dans le processus dialectique de l'analyse.
Il s'agit en fait de définir un cadre (a priori) qui permet de penser l'activité dans sa généralité et d'offrir une sorte de grille d'analyse, permettant de mieux comprendre le travail des élèves (voire de l'enseignant). L'analyse a priori vise à donner des explications rationnelles aux comportements des élèves en termes de choix et de stratégies. Dans ce sens, tout ne peut pas toujours être anticipé, c'est pourquoi une première réalisation avec de « vrais » élèves amène souvent à rectifier certains points (parfois fondamentaux).
L'essentiel est qu'à partir de l'analyse a priori (en partie construite après une ou plusieurs pré-expérimentations), tout ce qui sera observé prenne sens en termes de comportement cognitif des élèves. L'analyse a posteriori est alors une lecture des observables à la lumière de la grille fournie par l'analyse a priori.
Il ne faut donc pas voir l'analyse a priori comme un produit fini qu'un bon chercheur se devrait de fournir après de longues heures de réflexion dans son bureau, mais comme un élément d'un processus d'élaboration d'une compréhension des enjeux d'apprentissage d'une situation.
Il existe donc un processus dialectique entre analyse a priori et observations, qui est au cœur de la spécificité du rôle de l'expérimentation dans la théorie des situations. C'est une des originalités de la Théorie des Situations par rapport à la plupart des approches théoriques sur l'enseignement des mathématiques[3]. Dans ce sens, la démarche de l'analyse a priori, surtout si on la pense comme un outil pour l'enseignant, correspond à une posture nécessitant de faire un pas de côté, de prendre un peu de distance par rapport à la réalité de la classe, mais aussi et surtout par rapport au savoir mathématique en jeu.

2.2 Analyse a priori et procédures d'élèves

On limite souvent l'analyse a priori à sa fonction de prédiction des procédures des élèves, mais en fait, la question qui est au cœur de l'analyse a priori est : « *avec tout ce que mes élèves savent et ce qu'ils ont à disposition* – le milieu – *comment la question que je leur pose ou le problème que je leur soumets peut-il prendre sens* – problème de dévolution – *et que doivent-ils apprendre de nouveau pour arriver à le résoudre ?* ». La question du sens est donc centrale ! Il ne s'agit pas seulement de trouver une activité qui permette aux élèves de faire des choses seuls, mais encore faut-il que ce qu'ils fassent leur apprenne des mathématiques !
L'analyse a priori offre un modèle explicatif du comportement des élèves en termes d'apprentissage et pose la question du sens de leur actions par rapport à un savoir visé. Il est donc important de bien distinguer dans l'analyse a priori cette dimension théorique qui permet de distinguer le contingent du nécessaire.

[3] On pourra à ce sujet consulter le cours de A. BESSOT à la 15e école d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue à Clermont Ferrand du 16 au 23 août 2009 et dont les actes devraient paraître en octobre 2010 à la Pensée Sauvage Editions.

Par exemple, cette distinction joue sur la différence entre procédure et stratégie. Une procédure se situe au niveau des observables et comporte donc de la contingence, c'est ce que fait un « vrai élève » avec ses contradictions et ses hésitations (sa psychologie propre). Une stratégie se situe au niveau d'un élève théorique, générique et s'explique entièrement en termes de connaissance.
C'est pourquoi l'analyse a priori discute des stratégies qui seront le modèle explicatif des procédures observées lors de l'expérimentation. Tout le jeu de l'analyse a posteriori consiste alors à expliquer les procédures à la lumière des stratégies.

2.3 Analyse a priori et variables

Un point essentiel de l'analyse a priori consiste à faire apparaître les choix qui sont faits en creux quand on propose une activité à des élèves. En effet, toute activité de classe comporte une part importante de choix qui sont faits plus ou moins délibérément, voire consciemment, par l'enseignant (ou les manuels avant eux). Ces choix ne sont pas coupables, ils sont inévitables, mais ils sont faits contre d'autres (possibles mais non retenus). Le propre de l'analyse a priori est de mettre à jour certains (on ne peut jamais tout embrasser) de ces choix, les autres alternatives et leurs conséquences en termes d'objectifs de savoir et de possibilité d'acquisition de connaissances. C'est ce qui est au coeur de la détermination des variables didactiques.
Rappelons que l'explicitation de variables didactiques est un moyen de mettre à jour les choix qui peuvent être faits par l'enseignant (ou le manuel) dans la conception d'une activité de classe. Un enseignant ne peut par exemple pas changer l'âge de ses élèves, ce n'est donc pas une variable didactique, mais il peut choisir de les faire travailler individuellement ou en petits groupes, gérer les temps de mise en commun… ce sont des variables didactiques qui portent sur la gestion didactique. Il peut aussi choisir les valeurs numériques qui interviennent dans l'activité ou le nombre de données, etc.
A chaque variable didactique dégagée est associé un ensemble de valeurs. La pertinence de ces différentes valeurs s'évalue à l'aune de ce qu'elles modifient dans la hiérarchie des stratégies possibles pour résoudre la tâche. Cette hiérarchie porte sur l'accessibilité, le coût ou la validité des stratégies. C'est bien ce qui fait le caractère didactique d'une variable et de l'ensemble des valeurs qui lui est associé.
Ainsi, quand on réalise une analyse a priori, il existe une dialectique constante entre la mise en évidence des variables, les groupes de valeurs pertinentes et l'ensemble des stratégies possibles avec une discussion sur leur accessibilité, leur coût et leur validité par rapport à la tâche proposée. Cette dialectique qui se construit au fur et à mesure est souvent difficile (voire impossible) à rendre dans la rédaction finale d'une analyse a priori, qui en écrase nécessairement le côté dynamique. C'est pourquoi un atelier comme celui proposé ici est important, pour permettre de rendre compte du processus d'élaboration essentiel dans une démarche formative.
Dès qu'une variable est dégagée, l'activité analysée rentre dans un ensemble plus large d'activités dont elle est un cas particulier correspondant à un choix de valeur de chacune des variables dégagées.
C'est ainsi que l'on peut prendre de la distance par rapport à l'activité proposée en prenant conscience des choix opérés et de leurs implications tant sur la signification du savoir visé que sur les stratégies accessibles, leur coût et leur validité. Du point de vue théorique, on peut dire que l'activité est une instanciation d'une situation. Une situation est un objet du modèle, donc de la théorie.

2.4 La théorie des situations

La Théorie des Situations propose une modélisation de l'action de l'élève où celui-ci interagit avec un milieu a-didactique : l'enseignant propose une situation didactique qui permet de dévoluer aux élèves une situation a-didactique, lui permettant s'il résout la tâche d'accéder à une nouvelle connaissance, sans que sa réponse ne relève d'une injonction didactique. L'élève fait ce qu'il fait pour des raisons strictement de l'ordre du savoir mathématique, pas pour faire plaisir à son enseignant, ni pour lui obéir.
Je me contenterai ici de cette description sommaire du modèle théorique renvoyant aux publications citées plus haut pour plus de détails. Je voudrais cependant préciser un point qui me semble important et qui est souvent mal compris en formation. En effet, on dit que le milieu avec lequel l'élève interagit

doit être antagoniste pour assurer le caractère a-didactique. Ce terme d'antagoniste montre bien que ce n'est pas à l'enseignant de donner les moyens d'accéder à la bonne réponse (injonction didactique ou effet Topaze), mais que c'est un peu plus subtil. Le milieu lui-même doit résister, c'est-à-dire qu'il ne doit pas permettre à l'élève de trouver la bonne réponse en évitant d'apprendre ce qui est visé. Je prendrai un exemple pour mieux me faire comprendre.

2.5 L'exemple des « boîtes d'allumettes »

BRIAND et al. (1999-2000) ont mis au point une situation pour faire travailler l'énumération aux élèves de maternelle connue sous le nom des « boîtes d'allumettes ». Rapidement pour les lecteurs qui ne connaîtraient pas, l'énumération est tout ce qui ne relève pas du numérique en jeu dans une activité de dénombrement. C'est ce que qui est nécessaire pour organiser une collection dont on doit compter les éléments. La situation des boîtes d'allumettes permet de travailler l'énumération avec de jeunes enfants sans qu'il y ait à compter.

On donne aux élèves des boîtes d'allumettes vides percées sur les deux côtés et un récipient avec plusieurs allumettes. L'élève doit mettre dans chaque boîte, sans l'ouvrir, une allumette et une seule, quand il déclare avoir fini, la maîtresse ouvre les boîtes, s'il y a bien effectivement une et une seule allumette dans chacune, il a gagné, sinon il a perdu (validation par rétroaction du milieu).

Ce qui est visé ici c'est que l'élève apprenne à organiser la collection des boîtes de façon à savoir celles qui sont remplies et celles qui sont encore à remplir.

Bien entendu, on doit organiser un milieu de façon à ce que la mémorisation simple soit mise en défaut. Ceci conduit au niveau des choix de valeurs de certaines variables par exemple à mettre suffisamment de boîtes, à les prendre ou les rendre identiques (masquer les dessins éventuels), etc.

Mais il y a aussi une variable importante dont les différentes valeurs vont influer sur l'aspect antagoniste du milieu et qui vont rendre inaccessibles certaines stratégies (fortuites) que l'on veut éviter. Cette variable porte sur la *disposition* des boîtes sur la table où se réalise la tâche.

En effet, si les boîtes sont à l'autre bout de la table par rapport à l'enfant et qu'il peut les atteindre en étendant le bras, et que l'espace devant lui est libre (c'est une valeur de la variable « disposition des boîtes sur la table ») pour remplir les boîtes, il y a de fortes chances que l'élève étire le bras, prenne une boîte, mette une allumette dedans et ensuite repose la boîte devant lui (parce que c'est plus simple) et ainsi de suite. Ainsi l'élève va réussir, mais rien n'assure qu'il ait pris conscience de la nécessité d'organiser sa collection en deux tas (boîtes pleines, boîtes vides) ; il le fait « naturellement » parce que le milieu le suggère. On est ici typiquement dans un cas où un choix de valeur pour une variable didactique ne permet pas d'installer un milieu suffisamment antagoniste pour écarter une stratégie gagnante, mais non porteuse de la connaissance visée. Ce serait la même chose si on mettait les boîtes en tas les unes sur les autres.

Ici un choix adapté consiste à mettre les boîtes proches de l'élève réparties sans alignement et de façon à ne pas laisser d'espace vide où l'enfant pourrait poser les boîtes pleines sans que ce soit un choix délibéré. Ce n'est que par ce choix de valeur de la variable sur la disposition des boîtes que l'on s'assure d'un milieu suffisamment antagoniste pour que la stratégie gagnante soit à coup sûr porteuse de la connaissance visée, autrement dit nécessite que l'élève prenne conscience de la nécessité de mettre à part les boîtes déjà remplies.

Ces quelques rappels étant faits, je vais passer à l'analyse d'une activité issue des moyens d'enseignement de première année primaire de Suisse Romande, mais avant tout je présente dans la section suivante quelques particularités du contexte de la Suisse Romande.

3 PRÉSENTATION DU CONTEXTE DE LA SUISSE ROMANDE

En Suisse Romande, depuis la période des mathématiques modernes (1972), les enseignants du primaire disposent de « moyens d'enseignement » officiels et communs à tous les cantons francophones de Suisse[4]. Avec les plans d'études, ils déterminent la seule source officielle pour organiser l'enseignement des mathématiques. Ils peuvent être éventuellement complétés par quelques documents cantonaux issus de diverses instances officielles dépendant plus ou moins directement des *Départements de l'Instruction Publique*, qui peuvent apporter quelques éclairages complémentaires. La dernière édition de ces moyens COROME[5] a été publiée entre 1997 et 2002.
Pour les degrés 1P-4P (4 premières années de l'enseignement primaire, élèves de 6 à 10 ans), les moyens comprennent :

- un fichier, avec en plus en 3/4P un livre de l'élève par degré ;
- un fichier du maître par degré ;
- un classeur de commentaires didactiques (commun pour les 4 degrés).

Enfin, un fichier de formes prédécoupées (par élève), et divers matériels pédagogiques à disposition pour chaque classe viennent compléter le tout.
Ainsi ces « moyens d'enseignement » ne sauraient se réduire à un manuel au sens où on l'entend en France par exemple.
Sur la forme, les moyens COROME ont été conçus de sorte à ne pas enfermer les enseignants dans une progression déterminée ou des choix exclusifs sur l'organisation des apprentissages, comme le soulignent les auteurs dans l'introduction des commentaires didactiques :
Parmi les soutiens offerts au maître pour le seconder dans sa tâche, les moyens d'enseignement occupent une place importante. Ce ne sont néanmoins que des aides parmi d'autres, pour atteindre les objectifs déterminés par les programmes officiels. Ce serait accorder trop de poids au document écrit et sous-estimer la responsabilité et les compétences professionnelles du maître que de les confondre avec des directives légales, voire une doctrine imposée. On considère d'ailleurs ces moyens comme des « ouvrages ressources ». (GAGNEBIN et al. 1998, 10).

Les fichiers et livres de l'élève se présentent ainsi comme une succession d'activités réparties dans 6 à 8 modules correspondant au découpage du plan d'études. Le fichier du maître présente une introduction pour chaque module visant à en définir les objectifs et reprend chaque fiche et exercice des documents élèves avec quelques commentaires sur l'organisation, les objectifs, les stratégies possibles des élèves et des prolongements envisageables. Les activités à l'intérieur d'un même module ne sont pas hiérarchisées et c'est à l'enseignant d'organiser sa progression. Aucun élément de « cours » n'est donné. Il est donc clair qu'une part importante du travail de préparation est laissée entièrement à l'initiative et à la charge des enseignants[6].
Par ailleurs, les moyens mis en place à partir de 1998 s'inscrivent dans le paradigme de la résolution de problèmes[7], et surtout dans les petits degrés, une part importante des activités se présente sous la forme de jeux.
Dans son enquête sur le rapport des enseignants de Suisse romande aux innovations, TIECHE-CHRISTINAT (2001) relève que les jeux sont souvent retenus en fonction du plaisir (supposé) qu'ils provoquent en classe, mais que les contenus mathématiques qu'ils permettent d'aborder ne sont pas

[4] Ce qui ne veut pas dire nécessairement que l'enseignement des mathématiques est identique dans tous les cantons. L'enseignement restant entièrement une prérogative des gouvernements cantonaux, des distinctions plus ou moins fortes peuvent exister, sur les volumes horaires, les découpages en cycles, ou les choix de contenus, etc…

[5] COmmission ROmande – Moyens d'Enseignement et d'apprentissage, désignée par des instances officielles inter-cantonales.

[6] Plusieurs enquêtes et travaux de recherche ont analysé le rapport des enseignants primaires aux moyens et la façon dont ils se les approprient. Notre équipe DiMaGe est en train de travailler à un projet dans ce sens.

[7] Les travaux de l'équipe ERMEL ont été une source d'inspiration importante dans la rédaction de ces moyens.

centraux. On sait par ailleurs, que tous les enfants n'apprécient pas les jeux qu'on leur impose en classe de mathématiques et que leurs aspects ludiques sont diversement perçus. La situation est donc périlleuse et il n'est pas acquis qu'un jeu soit toujours le meilleur moyen d'arriver à faire apprendre dans une ambiance ludique.
Il n'est pas inutile de rappeler un des principes fondateurs de la théorie des situations :
On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre des problèmes n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc.
Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés. (BROUSSEAU 1986, 35) ou (BROUSSEAU 1998, 49).

Lors d'une journée d'étude[8], des acteurs du système éducatif suisse romand et des invités étrangers se sont intéressés à plusieurs activités présentes dans les moyens qui se présentent sous forme de jeu.
Dans leur conclusion, les auteurs soulignent que les études dans ce sens sont à poursuivre. Dans un article publié dans Grand N[9], nous avons tenté de répondre modestement à cette invite, en présentant une réflexion sur une activité de première année primaire, le « Dé basculé », qui se présente sous la forme d'un jeu de dé à deux joueurs. Cette activité ne fait pas partie de celles qui ont été discutées dans le document précédent.
J'ai proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse a priori de cette activité.

4 ANALYSE A PRIORI DU DÉ BASCULE

4.1 Présentation

Cette activité est proposée en première année primaire dans le module 3 « *Des problèmes pour connaître l'addition* », dans l'introduction duquel elle est présentée comme se rapportant à la rubrique « *Additionner et soustraire en situation* » et plus précisément à l'objectif « *Obtenir 20 en additionnant plusieurs nombres* ». C'est d'ailleurs la seule activité qui corresponde à cet objectif précis alors qu'il n'est jamais fait état d'additions dépassant 20 dans toute la rubrique.
Voici la fiche du maître (celle de l'élève ne contient sur une feuille A4 que le texte de la consigne en plus gros caractères et un dessin de dés, laissant ainsi la place éventuellement pour écrire sans que ce soit explicitement demandé) :

[8] À l'initiative de l'Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP), cette journée s'est tenue à Neuchâtel le 30 novembre 2001. Les actes de cette journée (JAQUET & TIECHE-CHRISTINAT, 2002) rendent comptent de l'ensemble de ces travaux.
[9] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008)

Le dé basculé

Description

Nombre d'élèves : 2

Matériel

- fichier de l'élève p. 53
- un dé

Règles

Un élève lance le dé et annonce le nombre de points obtenus.

L'autre bascule le dé sur l'une des quatre faces latérales et additionne les points de la face du dessus au premier nombre annoncé. Le jeu continue ainsi, chacun, à tour de rôle, basculant le dé et additionnant les points de la face supérieure.

Le premier qui atteint 20 gagne la partie.

Gestion

Prolongements

- Partir du nombre 20 pour atteindre 0.
- Celui qui dépasse 20 gagne la partie.
- ...

4.2 Analyse a priori

Une analyse a priori consiste à faire entrer une activité dans une ensemble plus vaste de situations, dont elle est un cas particulier pour un certain choix de valeurs des variables didactiques. Dans ce sens, j'ai proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse de la situation plus générale que l'on peut présenter sous la forme d'un jeu à deux joueurs :

À tour de rôle, chaque joueur choisit ou tire au hasard (ça peut dépendre des coups) un nombre parmi un certain ensemble E_i (i étant le numéro du coup qui est joué) que l'on additionne au total du coup précédent. Le joueur qui atteint ou dépasse une valeur N fixée au départ a gagné.

Comme l'activité du dé basculé, une course à N est un cas particulier de cette situation pour un certain choix de valeurs des variables didactiques de cette situation.
La tâche proposée aux participants était la suivante :

Dégager les variables didactiques de cette situation en discutant des valeurs possibles de ces variables et de leur influence sur la hiérarchie des stratégies et du savoir visé.
On examinera à la lumière de cette analyse les enjeux possibles en termes d'acquisition de connaissances de l'activité du dé basculé.

Je ne peux rendre compte ici du détail des débats, je me contenterai donc de donner les principaux résultats[10].

4.2.1 Variables didactiques

On peut dégager six variables didactiques.
- Tout d'abord deux variables générales sur les règles du jeu :
Vdép : elle prend deux valeurs « oui » ou « non », selon que l'on accepte ou non de dépasser la valeur

[10] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) pour plus de détails.

cible. Dans le premier cas, le gagnant est le premier joueur qui a réussi à atteindre ou dépasser N. Sinon, on considère que l'on ne peut jamais dépasser N, et que le gagnant est celui qui atteint exactement N. Dans ce dernier cas, certaines parties peuvent éventuellement ne pas permettre de déterminer de gagnant (je reviendrai sur ce point).
VN : c'est la valeur que l'on donne à N, le nombre à atteindre.
- Puis deux variables qui peuvent changer de valeur à chaque coup :
VHasard : elle prend deux valeurs « oui » ou « non », selon que le nombre qu'on ajoute est tiré au hasard ou choisi par le joueur.
VE$_i$: c'est l'ensemble des nombres où l'on tire au hasard ou choisit au coup i. Notons que cet ensemble peut dépendre éventuellement de l'issue du coup (i-1), comme cela est proposé dans l'activité du « Dé basculé », puisque si un joueur vient de choisir (ou tirer au hasard) le 3 par exemple, ni le 3, ni le 4 sont possibles au coup suivant (puisque la somme des points sur deux faces opposées d'un dé fait toujours 7).
Ces quatre variables ainsi que la règle qui détermine comment on décide des valeurs des deux dernières à chaque coup constituent les règles du jeu.
- Il reste encore deux variables plus circonstancielles :
La première, **VMat**, porte plus sur les aspects matériels du jeu, selon que les nombres sont figurés sur des cartes, sur des dés, par des jetons, etc… ou encore seulement écrits en chiffres ou énoncés à l'oral.
Et enfin, la variable **VEcrit** selon que les joueurs ont la possibilité de noter les sommes obtenues et de faire les calculs par écrit, ou qu'au contraire, ils doivent mémoriser la somme et faire tous les calculs mentalement. On a vu que la valeur de cette variable n'était pas fixée dans l'activité du « Dé basculé », elle est laissée au libre-arbitre de l'enseignant.
Cette liste de variables n'est sûrement pas exhaustive et comprend une part d'arbitraire, de même que mon choix d'énoncé d'une situation générale a déjà bloqué certains choix possibles, comme le nombre de joueurs par exemple. L'important est ici de faire apparaître cette activité comme un cas particulier d'un ensemble de situations plus générales, il pourrait y avoir plusieurs pistes. Celle que je propose s'appuie sur une analyse du contexte scolaire auquel on s'intéresse et des observations. Je vais à présent justifier nos choix en montrant comment ils éclairent l'analyse de l'activité.

4.2.2 Connaissances en jeu, savoirs visés et stratégies

Je vais distinguer deux niveaux d'analyse. Le premier concerne les stratégies locales qui permettent aux joueurs de réaliser l'addition à chaque étape, alors que le deuxième concerne le niveau plus global du jeu, et donc les stratégies de choix du nombre à chaque étape.

4 Réaliser l'addition

La valeur de VN détermine le plus grand nombre accessible dans le champ des additions. Au niveau de la première année primaire, le choix de 20 semble raisonnable.
L'ensemble E$_i$, détermine les nombres à ajouter. En première année primaire, beaucoup d'élèves ont encore recours à un sur-comptage sur les doigts, le répertoire additif est en découverte et peu de sommes sont apprises par cœur. Il n'est donc guère possible de dépasser 5 ou 6.
La valeur de VEcrit est ici fondamentale, puisqu'elle détermine si les élèves vont ou non pouvoir s'appuyer sur l'écrit. Si on n'autorise pas l'écrit, les élèves vont devoir non seulement mémoriser la somme à chaque étape, mais aussi devoir faire appel à du calcul mental (réfléchi ou par cœur), en s'appuyant éventuellement sur une procédure de sur-comptage sur les doigts ou sur un appui du matériel (voir la valeur de VMat). Au contraire autoriser l'écrit peut alourdir le jeu et rendre l'activité plus scolaire.
La valeur de VMat a une assez grande importance quant aux stratégies pour réaliser les additions. Des dés[11], des cartes avec des constellations, des jetons, … vont favoriser des procédures de sur-comptage un à un. Au contraire, si le matériel à disposition ne donne qu'une représentation chiffrée ou orale du nombre, les procédures de mémorisation du répertoire additif ou de calcul réfléchi seront plus

[11] On n'envisagera ici que les dés « classiques » avec des points sur les faces, mais on pourrait utiliser des dés qui ont des écritures en chiffres.

favorisées. Dans tous les cas, cependant, les élèves pourront soit trouver le résultat immédiatement ou par une procédure de calcul réfléchi, soit utiliser le matériel à disposition ou à défaut leurs doigts pour sur-compter. En première année primaire, cette dernière stratégie est encore utilisée par beaucoup d'élèves surtout en début d'année, même si un des objectifs d'apprentissage à ce niveau est de progressivement la remplacer par la mémorisation du répertoire additif et la mise en place de procédures de calcul réfléchi. Le fait que les valeurs des E_i changent à chaque coup ne change rien sur les stratégies pour réaliser la somme ou sur la mémorisation de celle-ci.
Les valeurs des variables qui correspondent à l'activité du « Dé basculé » sont donc conformes à ce que l'on peut attendre et exiger d'un élève de 6 ans, au moins en fin d'année. Les connaissances en jeu sur les additions sont ici explicitement sollicitées comme un moyen pour que le jeu puisse avoir lieu. Il n'y a donc rien d'a-didactique sur l'addition, c'est bien une activité de réinvestissement.
Si un élève se trompe dans son addition, seul l'autre élève peut être amené à le corriger ou l'enseignant s'il suit la partie. Dans ce sens, la rétroaction du milieu est assez pauvre sur l'addition.
Deux élèves en désaccord sur le résultat de la somme peuvent s'appuyer sur le dé pour vérifier la somme par sur-comptage. Par contre deux élèves peuvent se mettre d'accord sur un résultat faux et, si l'enseignant n'est pas là pour vérifier, continuer la partie comme si de rien n'était.
Il paraît donc clair que cette activité ne peut se concevoir avec profit que dans le cas où les élèves maîtrisent suffisamment les additions de nombres inférieurs à 6, jusqu'à 20. Un des objectifs qu'elle peut alors remplir est d'entraîner les élèves à celles-ci en leur permettant de les vérifier, voire de les réaliser par sur-comptage sur les points des faces du dé. Dans ce sens, cette activité ne force en rien des procédures de calcul réfléchi ou d'appel au répertoire mémorisé. Par contre, elle permet éventuellement, par la répétition des parties, de familiariser les élèves avec des sommes, en vue de leur mémorisation.
Remarquons que d'autres jeux pourraient plus utilement entraîner les élèves à faire des additions. Par exemple, un jeu de cartes comportant sur une face une addition, dont l'élève doit annoncer le résultat. Il retourne la carte qui donne ce résultat et la garde s'il a trouvé le bon nombre. Le « Dé basculé » n'est pas une activité dont le but pourrait se réduire à entraîner les élèves aux additions. On verra que d'un point de vue plus global, il peut permettre de développer d'autres connaissances.

4 Stratégies de choix des nombres

Le deuxième niveau porte sur l'enjeu du jeu, qui consiste à atteindre 20 le premier (on n'envisagera pas d'autres valeurs cibles dans cet article). Les valeurs des variables VHasard, VE_i et Vdép sont ici déterminantes.
Si VHasard = « non », VE_i = {1,2} et Vdép = « non », on retrouve la course à 20. Il existe dans ce cas une stratégie gagnante, dont la découverte peut être un enjeu d'apprentissage selon des conditions que je ne rappelle pas ici[12].
Si par contre VHasard = « oui » à tous les coups, on a affaire à un jeu de hasard pur, qui n'appelle aucune recherche de stratégie. Une telle activité n'aurait alors d'autre intérêt que de servir à entraîner les élèves à faire des additions, sans aucun enjeu stratégique, ni milieu approprié pour les rétroactions. Notons que même si VHasard ne vaut quasiment jamais « oui » (comme dans le cas du « Dé basculé »), il n'est pas certain que les élèves perçoivent tout de suite qu'ils peuvent jouer autrement qu'au hasard. De plus, l'usage d'un dé, souvent associé au hasard peut renforcer cette tendance. Il y a donc nécessité d'une dévolution[13] de la possibilité d'établir des stratégies pour gagner ou du moins augmenter ses chances de gagner.
Il est impossible ici d'examiner toutes les possibilités de choix de valeurs de la variable VE_i. Les deux exemples ci-dessus représentent en quelque sorte deux extrêmes entre lesquelles le choix des possibles est très large. Le « Dé basculé » est une de ces possibilités entre deux.

---

[12] Voir BROUSSEAU (1998, 25-44)

[13] La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité), du résultat qu'il doit chercher.

On s'intéressera ici seulement au cas où Vdép = « non », l'autre cas (suggéré comme prolongement dans la fiche des moyens COROME), est en fait plus simple du point de vue stratégique.
Dans le cas du « Dé basculé », le jeu peut être complexe, d'autant que certaines parties peuvent se bloquer comme lorsqu'un élève atteint le 19 en ayant basculé un 1 ou 6 ! En se plaçant seulement dans la fin de la partie (somme supérieure ou égale à 14) on voit déjà qu'il n'est pas toujours simple d'adopter une stratégie gagnante, qu'il faut anticiper toutes les possibilités sur au moins les trois coups à venir pour les éviter ! Il est clair que c'est hors de portée d'un élève de 6 ans. Contrairement à un jeu comme la course à 20, le jeu du « Dé basculé » ne permet pas de dégager une stratégie gagnante à tous les coups. Un expert très entraîné pourrait au mieux retenir ou anticiper sur plusieurs coups et éviter quelques pièges ou tenter de se mettre sur une position gagnante à tous les coups vers la fin de la partie, mais il est impossible de s'assurer de la victoire dès le départ.
Examinons maintenant, ce qui reste à portée d'un élève de 6 ans.

4.3 Stratégies en première année primaire

Le hasard décide du premier coup. Même si c'est le 6 qui sort, on est encore loin de 20 et les issues semblent encore bien incertaines. Une première stratégie « prudente » peut consister à retarder au plus l'approche du 20 et donc à jouer systématiquement le plus petit nombre (1, ou 2, si le 1 n'est pas accessible). Au contraire le goût du risque ou l'envie de gagner peut conduire à s'approcher le plus vite possible de 20 et jouer donc systématiquement 6 ou 5. Enfin, l'éloignement du but peut conduire à jouer au hasard.
Dans les premiers coups, l'anticipation a peu de chance d'apparaître. C'est quand on approche de 20 que l'anticipation de la somme obtenue, voire du coup suivant peut apparaître. Néanmoins, cette anticipation risque de ne pas être le fait de la majorité des élèves en première année primaire.
Comme je l'ai dit plus haut, le fait de jouer avec un dé peut fortement induire l'idée de hasard pur. Dans ce cas, les parties risquent de défiler sans aucune anticipation.
La motivation à gagner devrait quand même conduire les élèves progressivement (si ce n'est dès les premières parties) à anticiper à l'approche de 20, les effets de leur choix au moins sur la somme obtenue et sur le coup suivant. Anticiper sur la somme consiste à faire une addition, c'est jouer avant de jouer… Les élèves peuvent donc sur-compter sur les faces latérales du dé en le tournant sur les quatre côtés, ou en se penchant sur la table. Il faut ensuite en tirer les conséquences. Si 20 est accessible, c'est tout à fait à la portée d'un élève de 6 ans, sinon, comme on l'a vu plus haut, ce peut être rapidement complexe.
Une condition indispensable à une anticipation efficace est de pouvoir savoir combien il reste pour atteindre 20, ce qui revient à effectuer une addition à trou. Dans ce cas, on peut dire que ce jeu est un moyen de pousser à faire une addition à trou pour trouver le complément à 20. Dans ce sens, le jeu peut permettre de bonnes conditions pour construire des connaissances locales, comme la liste des nombres qui permettent d'atteindre 20 en additionnant au plus 6 et tous les compléments qui vont avec.

4.4 Conclusions

Le « Dé basculé » permet aux élèves de s'entraîner à ajouter à des nombres inférieurs ou égaux à 20, des nombres inférieurs ou égaux à 6. Ces calculs se font mentalement (par mémorisation du répertoire ou calcul réfléchi) ou en sur-comptant sur les doigts ou sur les points représentés sur les faces du dé. Cette dernière technique est favorisée, on ne pousse donc pas les élèves à retenir des sommes par cœur, ou à utiliser du calcul réfléchi.
La seule rétroaction vient du contrôle de l'adversaire ou du maître s'il est là. En cas de conflit, la possibilité du sur-comptage à l'aide des points sur la face du dé peut être une aide. Cette activité ne peut donc se concevoir qu'avec des élèves ayant bien acquis la technique du sur-comptage pour ce type d'addition. Elle permet alors un entraînement et éventuellement une familiarisation avec des sommes à connaître par cœur, mais elle n'offre que peu de rétroaction et pousse à des stratégies que l'on vise plutôt à dépasser en fin de première année primaire.

Aucune stratégie gagnante dès le début du jeu n'est accessible. Les premiers choix ne peuvent être guidés que par des stratégies subjectives ou par le hasard. Ceci, renforcé par la présence d'un dé, peut conduire les élèves à ne pas chercher à construire de stratégie et à jouer au hasard. Des stratégies guidées par l'anticipation ne peuvent surgir que vers la fin de la partie. Elles peuvent permettre de pousser les élèves à construire des connaissances sur les compléments à 20 à partir de 14 et de façon plus générale à anticiper des sommes ou faire des additions à trou en favorisant les techniques de sur-comptage.
Si les élèves s'investissent dans le jeu et concentrent leurs efforts pour gagner, en anticipant leurs actions et le jeu de l'adversaire, ils risquent de buter sur la difficulté de la tâche et de se décourager. La conséquence peut alors être de ne s'en remettre qu'au hasard et d'accepter la fatalité du sort. Au niveau des apprentissages, il ne reste alors que la possibilité de s'entraîner à des additions en renforçant la technique de sur-comptage sur les faces du dé. En outre, le jeu sera dans ce cas peu motivant.
L'atelier s'est terminé en montrant quelques extraits d'une expérimentation de cette activité réalisée dans une classe de première année primaire dans le canton de Genève, sans intervenir auprès de l'enseignante, et de l'observation de deux binômes d'élèves de cette même classe quelques jours après la séance. L'analyse de cette vidéo où l'enseignante a une difficulté de gestion de sa classe montre qu'une analyse a priori préalable aurait peut-être pu éviter une part des problèmes qui se sont posés.
Enfin, nous avons échangé sur l'intérêt de l'analyse a priori en formation d'enseignant. L'exemple analysé montre bien qu'une telle approche est un moyen d'éviter les écueils de ce genre d'activité sous forme de jeu qui peut facilement se transformer en un jeu sans enjeu et sans apprentissage. La question reste d'ailleurs entière de savoir si cette activité peut permettre quelque apprentissage. Il faut en tout cas l'adapter, nous proposons quelques pistes dans ce sens à la fin de notre article de Grand N[14].
Tout ce qui a été dit et fait lors de l'atelier ne peut être retranscrit dans ce court compte-rendu . J'ai plutôt choisi ici de développer l'aspect analyse a priori en retranscrivant divers éléments qui ont été discutés lors de l'atelier avec les participants.

[14] Une bonne part est développée dans DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008).

5 BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A. (2003) Une introduction à la théorie des situations didactiques, *Cahier du Laboratoire Leibniz 91*, Grenoble : Laboratoire Leibniz.
http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier91/ResumCahier91.html

BESSOT A. (à paraître) L'ingénierie didactique au coeur de la Théorie des Situations, *In C. Margolinas (Ed.) Actes de la 15e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIAND J., LACAVE-LUCIANI M.-J., HARVOUËT M., BEDERE D., GOUA DE BAIX V. (1999-2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, **66**, 7-22. Rééd. 1999-2000, Grand N Spécial Maternelle, Approche du Nombre T.1, 123-128.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **7(2)**, 33-115.

DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition, *Grand N,* **82**, 69-89.

GAGNEBAIN A., GUIGNARD N., JAQUET F. (1998) *Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : COROME.

JAQUET F., TIECHE CHRISTINAT C. (eds) (2002) L'apport des jeux à la construction des connaissances mathématiques, *Actes de la journée d'étude du 30 novembre 2001*, Neuchâtel : IRDP.

TIECHE-CHRISTINAT C. (2001) L'innovation en mathématiques et ses priorités : le regard des enseignants de Suisse Romande, *Math-Ecole,* **196**, 13-16.

Atelier B4

ENSEIGNER LE ZÉRO. OÙ EST LE PROBLÈME ?

Serge PETIT
Formateur en mathématiques
Université de Strasbourg, IUFM d'Alsace, EA 1339
serge.petit@unistra.fr

Annie CAMENISCH
Maitre de Conférences en Sciences du langage
Université de Strasbourg, IUFM d'Alsace, EA 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Résumé
Cet atelier porte sur l'enseignement du nombre *zéro* à l'école primaire. Il interroge sur les liens éventuellement établis entre des usages courants du *zéro* dans la langue et l'enseignement explicite du *zéro* en mathématiques en cours préparatoire. Il s'appuie pour cela notamment sur des manuels de cours préparatoire et des albums à compter.
Le contenu de ce compte-rendu est celui d'un atelier interactif. Il retrace le travail effectué par les stagiaires et pointe certaines interrogations qui ont été soulevées lors de l'atelier.

L'atelier s'est déroulé en quatre temps ainsi marqués :

1) expressions premières des représentations des stagiaires à propos du *zéro*,
2) échanges portant sur les expressions du *zéro* dans la langue, le *zéro* sous des aspects linguistiques,
3) échanges portant sur la place du *zéro* dans l'enseignement des mathématiques au début des apprentissages,
4) échanges portant sur la place du *zéro* dans la littérature.

Il s'est terminé par quelques questions que peut poser l'apprentissage du *zéro*.

1 ZÉRO, UN SÉMANTISME TRÈS VARIÉ

1.1 Le zéro pour les participants

Chaque participant a été invité à compléter sur un transparent la phrase :
« Pour moi, zéro c'est : _____ » [voir en encadré les réponses des participants].
Puis, collectivement, les participants ont formulé des hypothèses sur la nature des représentations du zéro sous-jacentes afin de classer les différentes réponses. On a pu ainsi observer les classes suivantes où les représentations sous-jacentes du zéro ont été repérées :

- Zéro comme cardinal de l'ensemble vide
  - le cardinal de l'ensemble vide
- Un repère
  - le premier repère de la règle
- Un nombre
  - le nombre d'écriture 0
  - un nombre (un chiffre)

Pour moi, zéro c'est :

5 le premier repère de la règle
6 le cardinal de l'ensemble vide
7 le nombre d'écriture 0
8 3 – 3, a – a
9 0 x b = 0 pour tout b
10 pas grand chose
11 un chiffre, qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
12 le plus petit des entiers naturels
13 pour aller à 10
14 l'élément neutre de l'addition
15 un nombre, un chiffre
16 un problème ! (je ne sais plus qui il est…)
17 l'absence

- le plus petit des entiers naturels
  - un chiffre qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
  - l'élément neutre pour l'addition
  - l'élément absorbant de la multiplication
  - 0 x b = 0 pour tout b
- Un chiffre
  - un chiffre qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
  - pour aller à 10 (?)
  - (un nombre) un chiffre
- Un ensemble d'écritures (?)
  - 3 – 3, a – a
- Autres représentations
  - l'absence (sans préciser de quoi…)
  - un problème ! (je ne sais plus qui il est)
  - pas grand chose

Toutes ces représentations des adultes apparaissent très tôt à l'école. Sont-elles enseignées ? Si oui, comment ? Quelles sont les significations de l'*absence*, *du problème,* de *pas grand chose* ?
Mais zéro est aussi fréquenté au quotidien et apparaît dans bien des expressions du langage courant ou se trouve inscrit sur des objets régulièrement vus ou utilisés.

1.2 Le zéro dans la langue

1.2.1 Classement en fonction du sens de zéro

Les participants ont été invités ensuite à trouver quel pouvait être le sens de zéro ou 0 dans quelques expressions ou supports qui leur ont été distribués et à classer ces expressions dans les catégories trouvées précédemment.

Expressions distribuées :

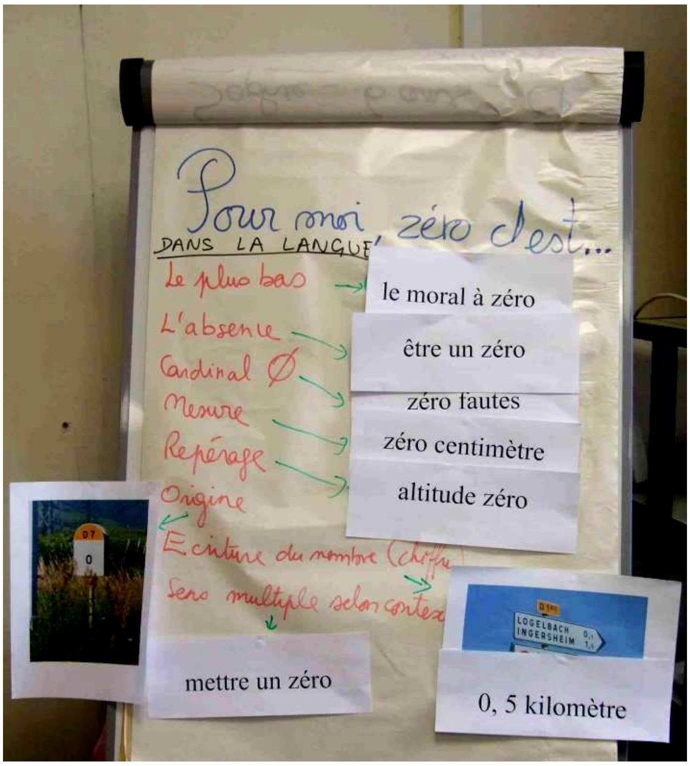
1- le moral à zéro
2- être un zéro
3- zéro faute(s)
4- zéro centimètre
5- altitude zéro
6- mettre un zéro
7- avoir la boule à zéro
8- zéro de conduite
9- une boisson Zéro
10- repartir à zéro
11- remettre les compteurs à zéro
12- les avoir à zéro
13- 0 degré
14- le degré zéro de la pensée
15- le zéro absolu
16- le fromage blanc à 0 %

Objets distribués ou représentés :

17- le 0 de la borne kilométrique (photo)
18- 0,5 kilomètre sur un panneau indicateur (photo)
19- extrait de journal avec un match nul : 0-0
20- un thermomètre
21- une règle graduée
22- un ruban mesureur (en mètre d'un côté, en pouces de l'autre)

Ces expressions ont été classées puis structurées en fonction de différents sens de zéro, avec un exemple particulièrement représentatif [voir photo] :

1. Le plus bas : le moral à zéro
2. L'absence : être un zéro
3. Le cardinal de l'ensemble vide : zéro faute
4. Une mesure : zéro centimètre
5. Un repérage : altitude zéro
6. Une origine : le 0 de la borne kilométrique
7. L'écriture d'un nombre : 0,5 kilomètre sur un panneau indicateur
8. Un sens multiple selon les contextes : mettre un zéro



Certaines expressions, interprétées de manières différentes, ont conduit à des débats entre les stagiaires. Ainsi :

avoir le moral à zéro est interprété comme avoir le moral le plus bas possible, ceci est-il à mettre en relation avec "zéro est le plus petit entier naturel" ? L'analogie avec une graduation ne conviendrait pas puisque des températures négatives existent. Mais cette analogie pourrait convenir dans une échelle qui repérerait le moral (sorte d'échelle de Beaufort).

être un zéro semble devoir rejoindre l'absence et pourtant, quand on est un zéro, on est bien quelque part, mais peut-être inexistant pour une certaine activité.

zéro faute rejoint bien évidemment zéro comme cardinal de l'ensemble vide, mais peut aussi être considéré comme le résultat d'une mesure. Rejoindrait-il alors *zéro degré* ?

zéro centimètre est considéré comme le résultat d'une mesure. Il pourrait se distinguer de celui de l'ensemble vide car il utilise un instrument de mesure et appartient au domaine des mesures physiques. Mais il lui est semblable aussi si l'on considère la mesure cardinale (davantage dans le domaine des mathématiques que dans celui de la physique). Dire que le cardinal d'un ensemble est *zéro* est aussi effectuer une mesure.

zéro degré ou plus généralement la notion de *zéro* dans le domaine du repérage des températures est très arbitraire puisque dans l'échelle Celsius, il correspond au phénomène physique de l'eau qui se transforme en glace sous certaines conditions de pressions, dans l'échelle Kelvin, il correspond à l'absence de vibration des molécules et dans l'échelle Fahrenheit, il correspond à la température la plus basse que Fahrenheit ait mesurée pendant un hiver particulièrement rigoureux à Dantzig.

zéro est considéré comme une origine d'une graduation quand il apparaît sur la borne routière, mais il peut tout autant, sur la même borne, indiquer la distance par rapport au point même où est située la borne et devenir le résultat d'une mesure de longueur.

altitude zéro, là, zéro est considéré comme faisant partie d'une échelle de repérage, encore une fois, arbitraire.

0,5 km, 0 est ici considéré comme un chiffre dans l'écriture d'un nombre.

mettre un zéro est une expression dans laquelle zéro peut avoir des sens multiples dépendant de la situation d'énonciation.

Les débats ont clairement mis en évidence qu'il n'est pas toujours aisé d'analyser le sens de *zéro* ou de *0* dans des expressions courantes.

En conclusion de cette partie, on peut considérer, à partir des exemples mis à disposition, que *zéro* ou *0*, s'inscrit dans une des classes suivantes (ou peut s'y ramener) :

- Le cardinal de l'ensemble vide
- L'origine d'une graduation
- Le résultat d'une mesure
- Le résultat d'un repérage
- Signifier une borne inférieure (*le plus bas possible*)
- Signifier l'absence (ce sens est-il à relier à celui du cardinal de l'ensemble vide ?)
- Un chiffre (mais qui signifie l'absence ?)

Ce travail sur la polysémie du zéro, ainsi mise en relief, peut être complété par une analyse lexicale du mot, portant par exemple sur les sens référencés par différents dictionnaires, sur les différents synonymes ou termes équivalents dans la langue, sur son étymologie (*sefer*, signifiant *néant, vide, etc.*), voire encore sur la classe grammaticale du mot.

1.2.2 Classement en fonction de la nature grammaticale de zéro

Si le mot *zéro* est d'abord considéré comme un **nom masculin**, il peut cependant appartenir, en fonction de son emploi, à plusieurs classes grammaticales.
Il est un **nom** lorsqu'il présente les caractéristiques syntaxiques de tout nom, telles qu'elles sont définies dans un ouvrage de grammaire :

> « On appelle **noms** les mots :
> - qui peuvent être précédés d'un déterminant ;
> - qui possèdent un genre inhérent ;
> - qui constituent le noyau d'un groupe nominal. » [Pellat, 2009]

Lorsque zéro est précédé d'un déterminant (le ou un), il est donc facilement reconnu comme un nom, comme dans les expressions suivantes :

- le zéro absolu
- mettre un zéro
- être un zéro
- un zéro de conduite

Il est aussi utilisé comme nom dans des locutions où il est employé seul après la préposition *à* :

- le moral à zéro
- avoir la boule à zéro
- repartir à zéro
- les avoir à zéro
- remettre les compteurs à zéro

Zéro appartient cependant à la classe des **déterminants numéraux**, lorsqu'il répond à une autre définition :

> « Constituant obligatoire du groupe nominal, le déterminant précède un nom et il est placé en tête du groupe nominal. Il ne peut être employé seul. » [Pellat, 2009]

Zéro est donc un déterminant lorsqu'il est placé devant un nom. Il détermine alors une quantité, ou une mesure, comme tout déterminant numéral :

- zéro faute(s)
- zéro centimètre
- 0 degré

Un troisième emploi de *Zéro* demande une analyse plus approfondie afin de déterminer la classe grammaticale. Dans les emplois suivants, l'usage du mot ne répond à aucune des caractéristiques clairement définies précédemment :

- une boisson Zéro
- l'altitude zéro
- le degré zéro de la pensée

Le mot *zéro* apparaît dans ces cas dans un emploi facultatif avec un autre nom. En effet, il est possible d'effacer le zéro sans pour autant altérer le groupe nominal d'un point de vue syntaxique : une boisson, une altitude, un degré. Cependant si on interprète le sens du zéro, on peut constater que dans les deux premiers exemples, il s'agit d'une expression elliptique. Ainsi, « une boisson Zéro » est une boisson à « zéro calorie » et « l'altitude zéro » est une altitude de « zéro mètre ». Dans ces deux expressions, zéro renvoie donc à un déterminant.

Cependant dans « le degré zéro de la pensée », le mot zéro est apposé au nom « degré » et son sens est équivalent à « nul ». On retrouve cet usage dans des expressions comme « la tolérance zéro, la croissance zéro, le taux zéro, etc. ». Il peut alors être interprété grammaticalement comme un complément du nom ou comme un adjectif épithète.

Ce travail sur la nature grammaticale de zéro permet de croiser les considérations sur le sens de zéro et sur son emploi dans la langue.

2 ZÉRO, QUELLES APPROCHES DANS LES CLASSES ?

2.1 Les ouvrages de CP

Des ouvrages de CP ont été distribués aux participants. Chacun devait repérer la première occurrence du zéro dans l'ouvrage, en repérer le sens, et surtout analyser la manière dont le zéro a été introduit. Chacun repérera aussi l'existence d'un travail spécifique sur le zéro et l'analysera.
Le transparent reproduit ci-contre (aux blancs près) a été distribué aux participants.

Titre : Éditeur : Année : Première apparition du zéro ou du 0 page : Sous quelle forme ? Dans quel sens ? Comment ce zéro ou 0 est-il introduit ? Y-a-t-il un travail spécifique sur le zéro ou 0 ? Oui Non Si oui, à quelle page ? Sera commenté par vous à l'oral.

Transparents distribués aux participants

2.1.1 Résultats des observations

Nous recopions dans le tableau ci-dessous les contenus des transparents tels qu'ils ont été remplis par les participants.

Références des ouvrages de CP	Première apparition du zéro et de quelle manière		Travail spécifique sur le zéro
Optimath, Hachette, 1998.	p.30-31 Forme : 2 + 0 Sens : cardinal de l'ensemble vide	Ajouter zéro à un nombre : 3 + 0 = …	NON
Maths tout terrain, Bordas, 2007.	p.16, leçon 6 Forme : file numérique décroissante. Sens : absence (ensemble vide)	Le zéro est associé à une collection n'ayant aucun élément.	NON
Vivre les maths, Nathan, 2002.	p.3 Forme : dans 10, dans une comptine. p.5 Forme : 0 Sens : cardinal de l'ensemble vide, absence	Association à une collection vide : « Barre ce qui est en trop »	NON
Clé des maths, Belin, 2008.	p.1 Forme : dans la file numérique Sens : origine, chiffre de l'écriture de 10	Montré dans l'écriture des files numériques (écriture en vert ou dernier nombre de la file)	p.23 : élément neutre de l'addition
J'apprends les maths, Retz, 2008.	p.25 Forme : titre (introduction du nombre 0) Sens : cardinal de l'ensemble vide	Quantité : 0 noisette Addition : élément neutre	p.25
Plic, Ploc, Hachette, 2002.	Séance 1 Forme : chiffre Sens : reconnaître les chiffres	Distinction entre chiffre et lettres	p.12 en tant que nombre
Maths +¸Sed, 2006.	p.18 Forme : 0 Sens : écriture (apprendre à écrire 0)	1) 0 introduit dans la notation 10, seulement écrit en chiffres, jamais en lettres (successeur de 9) 2) toutes les bandes numériques commencent à 1 - pour expliquer 11, 12 ; 11 = 10 + 1 ; 12 = 10 + 2	NON
CAP maths, Hatier, 2009.	p.5 Forme : 10 Sens : dix, successeur de neuf	Passage à la dizaine sur la file numérique	p.38 2 + 0 = 4 – 4 =
Nouvel objectif calcul, Hatier, 1997.	p.13 Forme : écriture de 10 Sens : chiffre	Niveau zéro	
Collection Thévenet, Bordas, 2008	p.8 Écriture du nombre 10	p.24 leçon sur le nombre 0 → nombre d'éléments d'une caisse vide → écriture en chiffres et en lettres	OUI
Diagonale, Nathan, 2006.	p.17 Forme : domino double 0 Sens : absence de point	p.18 exercice pour compléter un tableau avec l'écriture littérale et le chiffre.	

Les **premières occurrences de *zéro*** sont distribuées de la manière suivante (les couleurs permettent de repérer le sens principal de zéro dans les manuels) :

Cardinal de l'ensemble vide	Dans l'écriture de 10 sans travail préalable	Introduit comme chiffre, sans donner de sens	Élément neutre pour l'addition
Quatre fois	Cinq fois	Deux fois	

Cependant on peut constater que l'**introduction du *zéro*** suit une autre distribution :

Cardinal de l'ensemble vide	Dans l'écriture de 10 sans travail préalable	Introduit comme chiffre, sans donner de sens	Élément neutre pour l'addition
Trois fois	Trois fois	Deux fois	Deux fois

Une fois *zéro* apparaît dans le sens d'un niveau *zéro*.

2.1.2 Conclusions

Une quasi absence d'enseignement du zéro
La première constatation est l'absence de travail spécifique sur le *zéro* dans les ouvrages du Cours Préparatoire. Zéro serait-il si insignifiant qu'il n'ait pas besoin d'être travaillé ? Ceci semble déjà aller à l'encontre des différents sens repérés précédemment et dont certains font même partie d'expressions courantes.

Zéro comme cardinal de l'ensemble vide
Même quand zéro est présenté comme cardinal de l'ensemble vide, il n'est pas introduit dans l'écriture de 10 dans ce sens. Ce sens, qui pourrait être le nombre d'unités libres dans l'écriture d'un nombre. Ce lien n'est jamais établi. Par contre, le risque est grand, de considérer qu'il n'y a pas d'unité dans 120 ou dans 90… par confusion entre chiffre des unités et nombre d'unités libres.
Le lien n'est souvent pas établi non plus entre *zéro* comme cardinal de l'ensemble vide et *zéro* comme élément neutre pour l'addition. Ce nombre est en effet quelquefois fréquenté uniquement dans l'écriture du 10 comme suivant de 9 (machine type compteur), puis apparaît, comme par magie, comme élément neutre de l'addition.
L'automatisme de l'écriture des nombres dans le système de numération semble prédominer sur l'enseignement d'un ou de plusieurs sens de *zéro* et surtout sur l'enseignement des liens qui peuvent exister entre plusieurs aspects de *zéro*.

On pourrait penser que si *zéro* n'est pas enseigné de manière explicite, comme un nombre qui est devenu un nombre naturel, après avoir traduit *l'absence*, c'est qu'il est bien connu des élèves avant et qu'il aurait donc été construit dès l'école maternelle.

2.2 Les albums à compter

Les albums, souvent utilisés à l'école maternelle et au cours préparatoire, pourraient nous renseigner sur cette question.
Les animateurs ont donc distribué un album numérique (plus communément appelé album à compter) à chaque participant en leur demandant d'analyser la manière dont *zéro* était présent ou présenté dans ces albums.

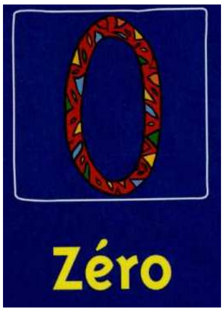
On constate plusieurs approches qui montrent une grande variété d'aspects du *zéro* présents dans les albums :

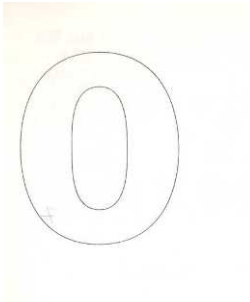
Zéro, comme suite naturelle du 9

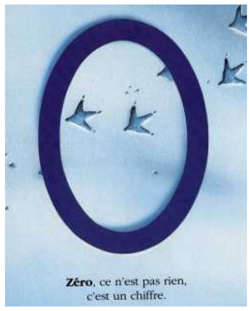
Zéro apparaît alors généralement dans une suite croissante qui commence bien souvent à 1 pour se terminer à 10. Le danger relevé est de faire apparaître cette écriture 10, comme un nouveau symbole dont aucun des chiffres n'a de valeur particulière. Les écritures romaines et chinoises ou égyptiennes avaient d'ailleurs un symbole particulier pour désigner ce 10 (X chez les romains, + dans l'écriture chinoise, etc.) .

0 comme chiffre

On présente des chiffres, sortes de lettres qui serviront à écrire les nombres. 0 est un de ceux-là. Son sens est alors évité. Voir par exemple les images ci-contre.



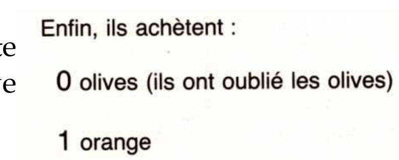


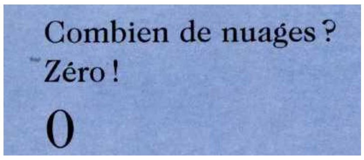


0 comme cardinal de l'ensemble vide

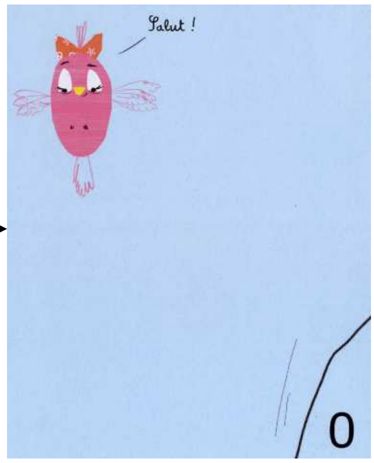
Ils ont acheté 0 olives. L'expression est certes non usuelle, mais présente *zéro* comme désignant le cardinal de l'ensemble vide. On le retrouve aussi dans :

Combien de nuages dans le ciel ? Zéro. Suivi de *0*.





Dans les deux extraits ci-dessous, on ne peut savoir si *zéro* est présenté comme cardinal de l'ensemble vide (ensemble des oiseaux restant sur le fil après qu'il eût été coupé par la coquine) ou résultat de l'opération 9 – 9.

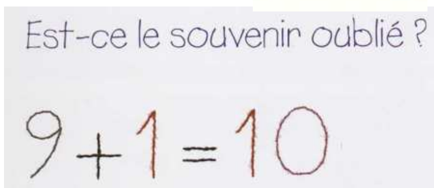


0 comme mesure d'une température ou repère sur une graduation

Voir images ci-contre. On peut remarquer que l'écriture de 10 est présente simultanément sur le thermomètre et que dans l'autre album, *zéro* est écrit en lettres.

0 dans l'écriture de 10

Comme le nombre suivant 9 (sous la forme 9+1, démarche proche de l'axiomatique de Peano, mais en oubliant de présenter le *plus petit des entiers naturels*, 0. Celui-ci ayant été présenté au départ comme *un souvenir* ! En fait sa présentation est une sorte de dessin de 0



dans un tableau. Il pourrait y avoir doute sur le sens de zéro qui, ici, n'est pas présenté comme un nombre.
Voir ci-contre :

… avec une malheureuse tentative d'explicitation graphique

Dans le dessin ci-contre on peut se demander si l'auteur n'indique pas que 1 signifie bien une unité et 0 semble alors signifier neuf ! Deux indices : dans le zéro se trouvent neuf objets, repris en-dessous et sous le 1 se trouve un objet. En tout, dix objets. L'interprétation est vraisemblablement fausse, mais l'illustration n'en reste pas moins ambiguë.

Zéro pour traduire le résultat d'un match (d'un match nul !)
Quel est le sens donné à 0 dans ce cas ?

Viennent ensuite les clowns ridicules.
Ils font un concours de bulles :
0-0, c'est un match nul.

Zéro comme ultime mot d'une suite ordonnée

Cinq, quatre, trois, deux, un, zéro ! Partez !

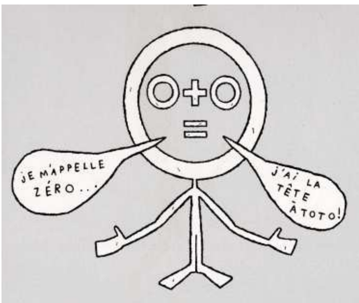
La suite ordonnée est décroissante si l'on pense que les référents sont des nombres, elle ne l'est pas si on considère les mots et leur ordre alphabétique, ni si l'on considère l'ordre dans lequel elle est énoncée puisque le mot *zéro* arrive en fin d'énonciation, juste avant l'ordre de départ. Cette suite de mots a-t-elle dans ce cas un sens mathématique ? Ce n'est pas certain, toute autre suite de mots qui serait par convention utilisée dans ce cas conviendrait aussi (mirabelle, cerise, pomme, pêche, poire, partez !). Quel est alors le sens donné à *zéro* dans ce cas, si ce n'est le mot limite, qui déclenche un phénomène, en général un départ.

Zéro dans des numéros

Il s'agit ici d'utiliser les écritures chiffrées pour identifier des éléments, comme certains constructeurs le font avec certaines voitures. Zéro dans ce cas, n'a pas d'existence autonome.

Ton grand frère, lui, préfère le foot.
Il admire l'attaquant qui porte le numéro 10

Zéro est même présenté comme un personnage



Cette grande diversité des aspects du *zéro* présentés dans les albums et fréquentés de fait par les élèves fait-elle l'objet d'un apprentissage ? Ce n'est pas certain.
Le groupe s'est donc interrogé sur quelques approches possibles de ce nombre au niveau du cycle 1 et en Cours Préparatoire.

3 QUELQUES PISTES POUR ENSEIGNER LE ZÉRO

3.1 Continuité linguistique

Toutes les « comptines descendantes » comportant la suppression d'un élément d'une collection à chaque étape permettent d'atteindre le *zéro*. La continuité linguistique permet d'introduire ce nombre comme répondant à une question du type *Combien de… ?* ou à une autre structure linguistique comme *il reste* ______.

Par exemple :

Le lapin et les carottes

Lapinou a *trois* carottes, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Deux.

Lapinou a *deux* carottes, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Une.

Lapinou a *une* carotte, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Zéro.

Feuilles d'automne

Trois feuilles sur la branche,
le vent souffle
il reste *deux* feuilles sur la branche

Deux feuilles sur la branche,
le vent souffle
il reste *une* feuille sur la branche

Une feuille sur la branche,
le vent souffle
il reste *zéro* feuille sur la branche

Le *zéro* ainsi introduit peut alors aisément être mis en relation avec le cardinal de l'ensemble vide.

Note : seules les structures ont été évoquées lors de l'atelier, leur mise en forme ci-dessus provient des auteurs du compte-rendu, à titre d'illustration.

3.2 Expression d'un cardinal dans le cas d'une résolution de problème

Il s'agit ici de tous les problèmes additifs dans lesquels on enlève d'un seul coup la totalité des éléments d'une collection, illustré – peut-être - précédemment par la jeune fille oiseau qui coupe le fil sur lequel se trouvent neuf prétendants.
Il s'agit d'exprimer la solution de tels problèmes.

Par exemple :
Luc a sept pommes dans son panier, il en donne deux à son frère Nathan. Combien lui en reste-t-il ?
Réponse : Il lui en reste *cinq*.

Luc a trois pommes dans son panier, il en donne trois à sa sœur Héloïse. Combien lui en reste-t-il ?
Réponse : Il lui en reste *zéro*.

La question commençant par combien implique une réponse par un déterminant numéral. Le seul possible pour le deuxième énoncé est bien *zéro*, que l'on peut alors mettre en relation naturelle avec le cardinal de l'ensemble vide.

4 CONCLUSION

Zéro, si polysémique, tant dans le domaine des mathématiques que dans celui de la langue n'est que rarement enseigné, sauf comme chiffre. Il apparaît cependant dans des sens variés dans les ouvrages de mathématiques du CP ou dans des albums à compter.

Une telle fréquentation de *zéro* suffit-elle à assurer la construction des différents sens rencontrés ? Sinon, quel enseignement mener à propos de ce nombre ?

5 BIBLIOGRAPHIE

5.1 Références

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, Atelier « Utiliser des albums numériques pour enseigner les mathématiques à l'école », In 35e *Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, COPIRELEM, IUFM de Bordeaux : 2009.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Enseigner ou introduire le zéro ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) n° 483, 2009, p.549-556.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Les mathématiques et l'apprentissage du pluriel des noms au cycle 2 ». In Pellat, J.-C., Brissaud, C. et Jaffré J.-P. (dir.), *L'orthographe aujourd'hui : regards croisés*, Limoges, Éditions Lambert Lucas, 2008.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Nombre et marques du pluriel ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) n°476, 2008, p.282-288.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Des albums pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) , n°471, 2007, p.574-579.

PELLAT Jean-Christophe (dir.), BEZU Pascale, CAMENISCH Annie, DELHAY Corinne, MEYER Jean-Paul, PETIT Serge, SCHMOLL Laurence, *Quelle grammaire enseigner ?* Hatier (Enseigner à l'école primaire), 2009.

5.2 Manuels scolaires

CAP maths, Hatier, 2009.
Clé des maths, Belin, 2008.
Collection Thévenet, Bordas, 2008
Diagonale, Nathan, 2006.
J'apprends les maths, Retz, 2008.
Maths +¸ SED, 2006.
Maths tout terrain, Bordas, 2007.
Nouvel objectif calcul, Hatier, 1997.
Optimath, Hachette, 1998.
Plic, Ploc, Hachette, 2002.
Vivre les maths, Nathan, 2002.

5.3 Albums

ALFAENGER Peter K., *Apprivoise les nombres,* Epigone, 1991.
ANGELINI Catherine, LEFEBVRE Gabriel, *Le livre des Chiffres et des Nombres,* La Renaissance du livre, 2003.
ANNO Mitsumasa, *Dix petits amis déménagent*, L'école des loisirs, 1982.
BALLART Elisabet, CAPDEVILA Roger, *J'apprends à compter*, Casterman, 1992.
BUKIET Suzanne, ANGELI May *Les bons comptes font les bons amis* de, Editions de l'observatoire, 1987.
CAUWET Nouchka, *Compter le monde – La naissance des nombres*, Editions Bélize, 2008.
DELAFOSSE Claude et GRANT Donald, *Compter*, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.
DELEDICQ André et Jean-Christophe, *Le monde des chiffres,* Circonflexe, 1997.
DORIN Perrine, *Salut !* Editions du Rouergue, 2008.
EKELAND Ivar, *Le chat au pays des nombres*, Le Pommier, 2006
KOECHLIN Lionel, *Grigri compte*, Hatier, 1991.
KOECHLIN Lionel, *Un et ses amis*, Mango, 1995.
MASSIN, *Jouons avec les chiffres*, illustré par Les chats pelés, Seuil Jeunesse, 1993.
PACOVSKA Kveta, *Jamais Deux sans Trois,* Seuil Jeunesse, 1996.
RAND Ann et Paul, *Petit 1*, Circonflexe, 1992.
ROSANO Laura, *Au Fil des nombres,* Bilboquet (l'art en page), 2002.
ROSENSTHIEL Agnès, *Chiffres en friche*, Larousse, 1979.

Atelier B5

UN MEME PROBLÈME, UNE DIVERSITÉ DE PROCÉDURES DE RÉSOLUTION : COMMENT LES ANALYSER ?

Lucia Grugnetti
Unité de recherche en didactique des mathématiques,
Université de Parma (Italie)
lucia.grugnetti@unipr.it

François Jaquet
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP, Suisse)
francois.jaquet@aliceadsl.fr

Philippe Skilbecq
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,
Nivelles (Belgique)
philippes@crem.be

Résumé
Cet article est le compte-rendu d'un atelier proposé lors du colloque COPIRELEM de Auch en juin 2009. Les auteurs présentent le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) qui s'adresse à des classes d'élèves de 8 à 15 ans. Au-delà de l'organisation elle-même du concours, le RMT est l'occasion d'un travail de nombreuses équipes : en amont pour choisir les problèmes (analyse a priori) et a posteriori à partir des productions des élèves, en particulier sur les différentes procédures suivies. Un des objectifs est aussi d'insérer ces problèmes dans l'enseignement lui-même. En parallèle, en formation initiale des futurs instituteurs, certains problèmes sont utilisés comme support de travail sur les notions mathématiques en jeu, les procédures, les erreurs, les obstacles, les variables et vers la création de nouveaux problèmes. Plusieurs de ces problèmes sont ensuite présentés et analysés dans ce cadre de formation.

1 INTRODUCTION

Le *Rallye mathématique transalpin* (*RMT*) est un concours de mathématique organisé depuis plus de 10 ans dans plusieurs pays européens. Chaque année, plusieurs centaines de copies d'élèves ayant résolu les mêmes problèmes sont collectées. Leur analyse est riche d'enseignement, tant pour les enseignants en fonction que pour les futurs enseignants et les chercheurs en didactique des mathématiques. Dans cet article, nous examinons des copies rendues par des groupes d'élèves (niveaux CE2, CM1 et CM2) sélectionnées pour leur intérêt. Nous distinguons les différentes procédures de résolution et les niveaux de construction des concepts mathématiques intervenant dans la résolution du problème. Ce travail s'effectue notamment à partir des erreurs rencontrées, des représentations et des justifications apportées. Pour certains problèmes, les données recueillies auprès de l'ensemble des classes sur les problèmes analysés sont également présentées. Tout au long de cet article, des propositions de travail avec de futurs enseignants (instituteurs ou professeurs de mathématiques) sont également énoncées.

2 LE RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Le *RMT* est organisé par l'*Association Rallye Mathématique Transalpin* (*ARMT*). Ce concours de mathématique s'adresse à des classes entières du CE2 à la 2e année du lycée [1](élèves de 8 à 15 ans). Il est proposé dans cinq pays européens : Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique. Durant l'année scolaire 2008-2009, plus de 3000 classes y ont participé.

2.1 Les objectifs du RMT

Le *RMT* propose aux élèves de faire des mathématiques en résolvant des problèmes, d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées, de développer leurs capacités à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve et de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, le *RMT* permet d'observer des élèves en activité de résolution de problème (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes durant les épreuves qualificatives), d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe, d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants, et de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Outre le concours, le *RMT* est aussi un outil intéressant et efficace pour nourrir une réflexion en didactique des mathématiques et pour les formations initiale et continue des maîtres. Cette deuxième perspective du *RMT* est rendue possible parce qu'outre l'énoncé de la ou des solutions, il est demandé aux élèves de justifier leur réponse ou d'expliquer leur démarche. À partir de ces récits explicatifs ou justificatifs, une analyse des réponses et des stratégies est possible, de même que la mise en évidence d'obstacles à la résolution d'un problème, à la mobilisation et à l'utilisation d'un objet mathématique ou à la compréhension de celui-ci.

2.2 Des possibilités d'exploitation

Pour chaque épreuve du *RMT* (3 par an), entre 20 et 25 problèmes sont mis au point par l'ensemble des sections[2] de l'*ARMT*, soit près de 70 problèmes par an. Pour chacun d'eux, une analyse *a priori* permet de déterminer leur intérêt pour le concours et de régler les variables pour qu'ils soient les mieux adaptés aux classes auxquelles ils sont destinés.

Outre les analyses *a priori*, les sections ou les groupes de travail[3] sur les concepts mathématiques mènent aussi des analyses de certains problèmes après les passations des épreuves dans les classes. Ces analyses

[1] Le RMT s'organise en catégories, de la catégorie 3 à la catégorie 10. La catégorie 3 correspond à la troisième année d'étude primaire (CE2) ; la catégorie 4 correspond à la 4e année d'étude primaire (CM1) ; ainsi de suite jusqu'à la catégorie 10 (2e année du lycée).

[2] L'ARMT compte actuellement 23 sections réparties dans les cinq pays européens participant au RMT. Une section peut représenter soit une région (Bourg-en-Bresse, Lyon, Franche-Comté sont les trois sections françaises), soit un pays (Luxembourg et Belgique), soit encore un type d'enseignement (les lycées agricoles français). Chaque section organise le RMT à son niveau en collaboration avec l'association internationale.

[3] Les groupes de travail sur les concepts rassemblent des membres francophones et italophones des 23 sections. Ces groupes ont pour objectifs d'analyser les problèmes du RMT dans la double perspective d'en proposer de nouveaux et d'étudier le potentiel de chaque problème pour une utilisation en classe dans le cadre de l'enseignement d'un concept. Les groupes de travail sont au nombre de sept : géométrie plane, géométrie dans l'espace, chiffre et nombre, équation, proportionnalité, fonction, algèbre.

sont réalisées souvent à partir d'une analyse des résultats globalisés sur l'ensemble des sections pour chacun des problèmes. Cela est possible grâce à la collecte des résultats via le site Internet de l'*ARMT*.

Cependant, les analyses *a posteriori* ne se limitent pas à l'analyse de ces résultats. La lecture des copies des élèves renvoyées après chaque épreuve et leur analyse constituent le véritable travail. C'est à ce niveau que l'on peut observer les procédures utilisées par les élèves et tenter de les comprendre, de les rattacher à des conceptions. C'est aussi à ce niveau que l'on peut relever les erreurs, tenter de les comprendre et de les interpréter en termes d'obstacles à la résolution du problème, et au-delà émettre des hypothèses en termes d'obstacles à l'apprentissage de notions mathématiques.

Ces obstacles peuvent avoir des origines bien différentes : ontogénique, épistémologique, didactique,… Parfois, l'analyse *a posteriori* montre que ce sont les variables du problème qui sont pour l'essentiel à l'origine des difficultés des élèves. Un travail sur ces variables mène alors à la conception de nouveaux problèmes. Ceux-ci sont ensuite utilisés dans les classes et les copies des élèves sont à nouveau analysés, tant pour observer des modifications au niveau des résultats qu'au niveau des procédures investies. L'impact de la modification des variables peut alors être mis en évidence. Au-delà, c'est l'importance des variables didactiques qui est soulignée.

Ainsi, avant de trouver place dans une épreuve, chaque problème est l'objet d'un long travail de mise au point. Le travail sur les variables est sans doute le plus exigeant pour les sections. Plusieurs relectures des problèmes sont organisées avant que ceux-ci ne soient acceptés et insérés dans les épreuves. Chaque problème, produit par les sections ou par les groupes de travail, est analysé par l'ensemble des sections. Ces analyses sont menées à partir de l'expérience acquise par les enseignants qui composent les sections, mais aussi en comparant avec les résultats à des problèmes similaires déjà proposés aux classes les années précédentes. Ces analyses tiennent également compte des travaux réalisés par les groupes de travail sur les concepts. En fonction des remarques émises par ces sections, une équipe composée des membres de deux ou trois sections est chargée d'élaborer la version finale d'une épreuve.

L'examen des copies des problèmes du *RMT* confirme généralement les prévisions de l'analyse *a priori* en ce qui concerne les procédures de résolution. Pour certains problèmes, les analyses *a posteriori* apportent des informations complémentaires sur les procédures engagées par les élèves. Dans certains cas, ces analyses mettent en évidence des obstacles inattendus, des représentations dominantes non adéquates, des procédures détournées permettant d'obtenir la solution par des voies non prévues. Quoi qu'il en soit, ces analyses peuvent conduire à des exploitations de problèmes en classe ou à des investigations complémentaires. Ces travaux aboutissent souvent à la création de nouveaux problèmes à partir des modifications des variables didactiques ou de contexte.

Ainsi, le *RMT* ne se propose pas seulement d'organiser un concours. Il tente aussi de mettre au point des problèmes qui, certes servent de base au concours, mais trouvent également une place en classe dans un processus d'enseignement.

De même, pour des formateurs d'enseignants, le *RMT* est une source de problèmes analysés ou à analyser qui mettent en évidence des stratégies, des erreurs, des obstacles, des variables didactiques, … Il peut aussi être considéré comme un champ d'investigation et de développement pour la recherche en didactique des mathématiques.

3 ANALYSER DES PROBLÈMES DU RMT

Abordons maintenant deux séries de problèmes qui pourraient être utilisés en formation d'enseignants. Nous avons choisi de travailler à partir de problèmes de géométrie. Notre objectif sera de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, ainsi que les difficultés des élèves par rapport aux notions d'aire et de périmètre.

3.1 Proposition d'une séquence de travail avec des futurs instituteurs[4]

Dans un premier temps, les étudiants sont invités à résoudre les problèmes. Cette première phase leur permet de prendre contact avec les problèmes, de prendre conscience de leurs propres difficultés et, en fonction de leur expérience, d'émettre des hypothèses quant aux difficultés que les élèves peuvent éprouver et les obstacles auxquels ils peuvent être confrontés.
Dans un deuxième temps, pour chaque série de problèmes, des analyses sont menées à partir de quelques questions. Ces analyses concernent d'abord le travail des étudiants, ensuite celui des élèves à partir de l'analyse de quelques copies :

- *Quelles sont les notions « rencontrées » ou « mobilisées » dans ces problèmes?*
- *Quelles sont les procédures utilisées ?*
- *Quelles sont les « erreurs » produites, quels sont les « obstacles » à surmonter?*
- *Quel est le travail à réaliser sur les variables pour aménager ces problèmes si nécessaire… en fonction de quel(s) objectif(s)?*

Ces analyses des problèmes et des difficultés des élèves permettent parfois d'ébaucher une première progression dans l'apprentissage des notions mathématiques que sont l'unité de mesure commune, l'aire et le périmètre. La référence à un cadre théorique, en l'occurrence celui présenté par une équipe du *CREM* [2007][5], et l'expérimentation dans des classes peuvent ensuite servir de validation et de structuration des savoirs ébauchés lors des séances de travail avec les étudiants.

3.2 Une première série de trois problèmes

Les trois problèmes que nous proposons sont « *Les tables de Tante Marie* » et les deux versions du problème « *La rosace de Julie* ». Ils sont présentés en annexe de cet article.

Après avoir laissé du temps à la résolution individuelle des problèmes, les analyses *a priori* réalisées par les sections sont présentées aux étudiants. Une comparaison entre ces analyses, les procédures des étudiants et celles des élèves initie une première réflexion. Pour le problème « *Les tables de Tante Marie* » (catégories 3, 4), l'analyse *a priori* mettait en avant différentes procédures, dont :
- Comprendre qu'il faut déterminer une unité de mesure (carré ou triangle)
- Se rendre compte de la relation entre les deux unités de mesure (moitié/double)
- Comprendre que, puisque tante Marie utilise 34 pièces pour chacune des deux tables, elle ne peut pas, pour paver la première table, utiliser uniquement des pièces carrées (il en faudrait alors uniquement 25). Pour l'autre table, il est évident que les formes seront mélangées, mais il faut aussi comprendre qu'il doit y en avoir 34. C'est le point central de la compréhension de l'énoncé…

---

[4] Enseignants prenant en charge des élèves de 6 à 12 ans.

[5] Nous présentons succinctement ce cadre à la section 4. Succinctement, la recherche menée par le CREM met en évidence quelques « stades » dans la construction du concept d'aire : la perception qualitative de l'aire ; la quantification d'une aire ; la numérisation de l'aire ; le calcul de la mesure de l'aire.

Constatons d'emblée que ce problème de pavage ne fait pas appel à une « mesure » d'aire et que le concept d'unité de mesure commune n'est pas nécessaire pour arriver à la solution. Par contre, il est nécessaire de constater « l'équivalence » entre un carré et deux triangles ; ce qui a pour conséquence que le nombre de pièces augmente de un chaque fois que l'on partage un carré en deux triangles. Cette constatation peut être implicite chez les élèves qui procèdent au hasard et adaptent ensuite leurs choix. Elle semble explicite chez ceux qui procèdent de manière progressive pour s'approcher des 34 pièces en remplaçant un carré par deux triangles et faisant ainsi augmenter le nombre des pièces un à un. Elle peut être considérée comme intégrée chez ceux qui calculent d'avance le nombre de carrés à remplacer.

L'analyse *a priori* se poursuivait en indiquant un usage possible de tableaux tels que celui présenté ci-dessous :

- Pour la table carrée, on peut faire successivement plusieurs hypothèses sur le nombre de pièces carrées et sur le nombre correspondant de pièces triangulaires permettant de compléter le pavage, et vérifier s'il y a effectivement 34 pièces, avec un tableau comme celui-ci :

carrés	*24*	*23*	*22*	*21*	*20*	*19*	*18*	*17*	***16***	*15*
triangles	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*	***18***	*20*
total des pièces	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	***34***	*35*

jusqu'à retenir la solution : 16 morceaux carrés et 18 triangulaires.

L'analyse des copies d'élèves montre que ce type de tableau n'a été utilisé par aucune classe. On peut donc s'interroger sur la manière d'introduire cet outil de résolution dans les classes de CE2 et de CM1.

Au niveau de l'analyse statistique des résultats, ce problème obtient 1.5 de moyenne[6]. Pour les classes de CE2 (329), près de 50% de celles-ci ont obtenu 0 point. Au niveau du CM1 (414 classes), 30% des classes obtiennent 0 point et 36% obtiennent 4 points.

Les deux versions du problème « *La rosace de Julie* » étaient dévolues aux catégories 3,4 (CE2, CM1) et 5,6 (CM2, 6e). Ce problème, quelle que soit sa version, fait intervenir les décompositions et les recompositions de formes tout comme dans le problème précédent. Cependant, l'utilisation d'une unité de mesure commune est cette fois nécessaire.

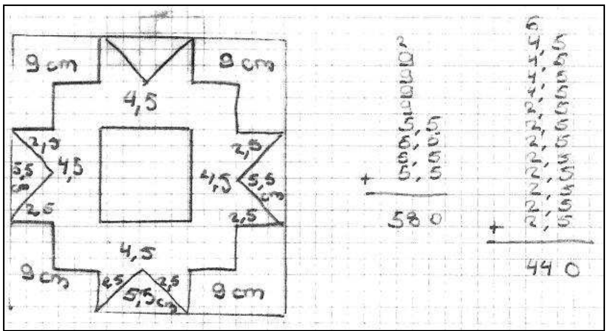
[6] Les problèmes du RMT sont évalués à partir d'un dispositif sur 4 points maximum : 0 correspondant à l'incompréhension du problème, 4 à la réponse correcte avec des explications ou des justifications complètes, 3 à la réponse correcte avec des explications ou justifications incomplètes. Les notes 1 et 2 correspondent souvent à des réponses incomplètes ou à des erreurs de calculs.

Tab. 1 – « *La rosace de Julie* »

	Copies belges		
cat 3	19	Moyenne	**1.83**
		Mode	Ind.
		Écart-type	**1.57**
cat 4	13	Moyenne	**1.63**
		Mode	**0**
		Écart-type	**1.69**
cat 5	18	Moyenne	**1.25**
		Mode	**0**
		Écart-type	**1.30**
cat 6	28	Moyenne	**2.89**
		Mode	**4**
		Écart-type	**1.59**

Lors de la conception du problème, dans la perspective de le complexifier pour les catégories 5 et 6, les segments qui délimitent des triangles ont été supprimés, de telle sorte que l'unité de mesure commune (les petits triangles rectangles isocèles) ne soit plus directement perceptible. L'analyse des résultats indique que ce problème est moins bien réussi en catégorie 4 qu'en catégorie 3 et, à l'inverse, qu'il est moins bien réussi en catégorie 5 qu'en catégorie 6. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ces constats.

Tout d'abord, dans le cursus belge, les notions de périmètre et d'aire sont abordées à partir de la 4e année (cat 4) et approfondies en 5e (cat 5) et 6e primaire (cat 6). L'analyse des copies des élèves montre que c'est particulièrement dans les catégories 4 et 5 que les erreurs sont liées à des obstacles de type épistémologique, c'est-à-dire là où les connaissances liées à ces notions de périmètre et d'aire sont encore mal maîtrisées (figures 1 et 2). En catégorie 3, les élèves ont plutôt tendance à utiliser des procédures de découpage ou d'association, les seules qu'ils ont à leur disposition à ce moment du cursus.
En catégorie 6, les connaissances sur les formes et sur les notions de périmètre et d'aire étant mieux structurées et maîtrisées, les élèves utilisent des procédures associées à ces notions qui sont plus appropriées à la résolution du problème.



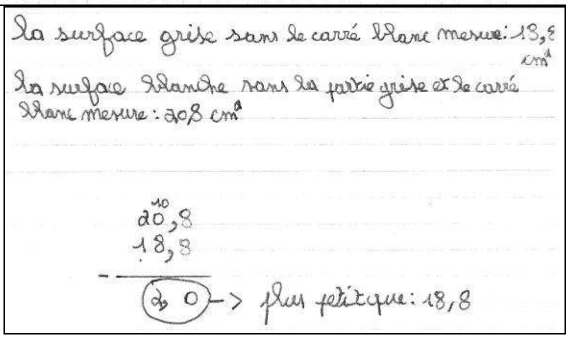


Fig. 2 – Calcul des aires

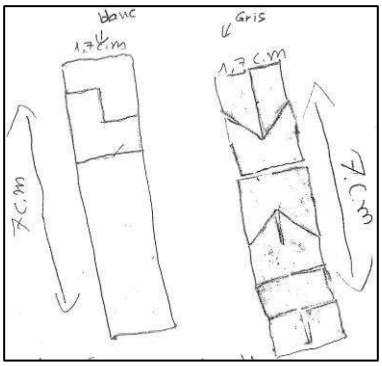


Fig. 3 – Décomposer et recomposer

Fig. 1 - Calcul des périmètres

Enfin, une procédure surprenante (unique sur près de 80 copies) consiste à décomposer la rosace en formes blanches et formes grises, et ensuite à recomposer deux rectangles identiques à l'aide des formes découpées (figure 3).

Notons encore que des erreurs peuvent aussi être expliquées par un obstacle d'ordre ontogénique pour les classes de catégorie 3 notamment. La compréhension de l'association entre la quantité de peinture et la surface à peindre reste problématique pour certains élèves de cet âge (figure 2). Ces élèves associent ainsi un nombre de figures à peindre avec la quantité de peinture, quelle que soit la grandeur de ces figures.

Mais, une autre hypothèse peut aussi être mise en évidence par les étudiants : celle qui consiste à dire que c'est le problème en lui-même qui est plus complexe, que c'est le fait d'avoir introduit les segments délimitant les triangles qui complique la lecture de la figure. De même que ce découpage en triangles induit le comptage de figures non iso-superficielles. À ce jour, nous n'avons pas encore vérifié cette hypothèse.

3.3 Une deuxième série de trois problèmes

Les problèmes précédents ont permis de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, des procédures différentes pour résoudre des problèmes faisant appel à cette notion (comparaison, correspondance terme à terme, calcul), des erreurs et des obstacles auxquels des élèves des catégories 3 à 6 sont confrontés. La deuxième série de problèmes a pour objet de comprendre en quoi la modification de certaines variables modifie le comportement des élèves. Ainsi, nous proposons trois nouveaux problèmes (voir annexe) faisant également appel à l'unité de mesure commune, mais pour lesquels soit le contexte a été changé (arithmétique) soit des variables ont été modifiées (nombres de figures de base, contexte de la comparaison : géométrie ou arithmétique). Pour cette deuxième série, l'investissement des constats réalisés précédemment permet d'approfondir les savoirs en jeu et d'améliorer la qualité des observations des étudiants.

Deux problèmes peuvent être considérés comme semblables dans la mesure où des procédures semblables peuvent être investies pour les résoudre. Ces problèmes sont « *RMT 2005* » et « *Cartable RMT* ». Des procédures de correspondance terme à terme, de recherche d'unité de mesure commune, de recherche d'éléments communs que l'on peut ne pas prendre en compte, … peuvent être utilisés par les élèves. Du côté des procédures erronées, des similarités existent également, par exemple compter les éléments sans tenir compte de leur « poids » relatif. Force est cependant de constater que le problème situé dans le contexte numérique est mieux réussi. Différents arguments peuvent être mis en évidence pour expliquer cette différence. Nous en proposons trois.

D'abord, le problème des cartables possède moins d'unités différentes (cahier, livre, farde) que le problème des briques (rectangle, carré, triangle, trapèze). Ensuite, sans doute est-il moins complexe pour les élèves de comparer des nombres plutôt que des figures géométriques. Enfin, dans le problème numérique, les rapports entre les différents éléments sont précisés dans l'énoncé. Cela induit très probablement le comportement des élèves.

Dans le cadre de la formation des étudiants, cette première analyse permet de montrer comment faire varier le contexte d'un problème, mais aussi le domaine mathématique dans lequel il s'inscrit, tout en maintenant des démarches de résolution.

Le travail se poursuit par une comparaison des problèmes « *RMT 2005* » et « *Les surfaces de Monsieur Minipot* ». Ceux-ci présentent des situations géométriques. Pour les résoudre, la détermination d'une unité de mesure commune peut être utile. Mais d'autres procédures peuvent être utilisées. Cependant, si dans « *RMT 2005* » la procédure relative à l'unité de mesure commune est induite par le dessin des briques, dans « *Les surfaces de Monsieur Minipot* », l'unité de mesure doit être construite par l'élève, généralement en prolongeant le quadrillage. À partir de quoi, l'unité de mesure indiquée est le carré. Ce qui n'est pas le cas dans « *RMT 2005* »[7].

Pour « *Les surfaces de Monsieur Minipot* », les procédures utilisées par les élèves sont les suivantes :

- comptage des carrés unités avec recomposition de carrés unités à partir de l'assemblage de deux triangles et de l'assemblage d'un triangle et d'un trapèze ;
- de même mais avec une procédure d'extension à un rectangle pour la « voile » du bateau, comptage puis division par deux, assemblage de deux triangles pour former un carré (figure 4) ;

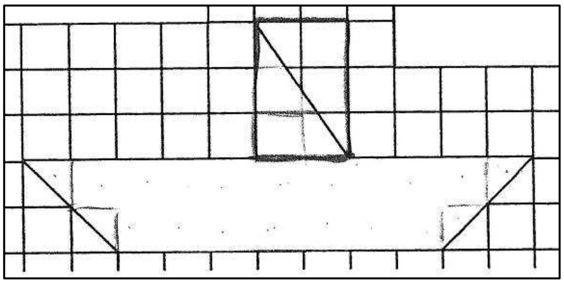


Fig. 4 – Extension à un rectangle

- calcul du périmètre (figure 5).

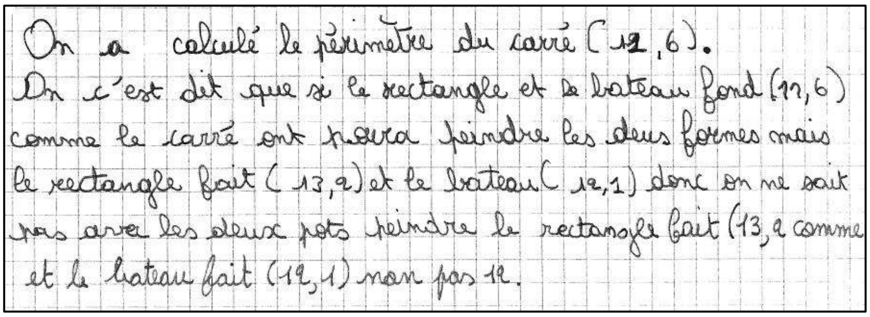


Fig. 5 – Calcul du périmètre

Les procédures d'appariement et de comptage de formes sans tenir compte de leur grandeur ne sont pas apparues dans le problème de « *Monsieur Minipot* », alors qu'elles représentaient respectivement 45% et 3% des procédures pour le problème « *RMT 2005* ».

---

7 Pour plus de détails sur l'analyse de ce problème, nous renvoyons le lecteur vers l'article de Grugnetti L. & Jaquet F., 2005.

Au-delà de l'analyse des procédures, les résultats pour la catégorie 4 (classes belges) semblent indiquer que le problème « *RMT 2005* » est moins bien réussi (tableau 2). Cependant, notre échantillon est trop petit pour pouvoir l'affirmer. Par contre, les résultats globalisés pour l'ensemble des sections montrent que ce problème peut être considéré comme difficile. En effet, pour les 300 classes de Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique, les moyennes se situent entre 0,5 et 1,5 en catégorie 3 et entre 0,9 et 1,7 en catégorie 4, alors que la moyenne globalisée est de 1.9 pour « *Monsieur Minipot* ».

Points	MINIPOT			RMT 2005	
	Belgique (11 classes)		ARMT (416 classes)	Belgique (22 classes)	
0	5	45%	31.7 %	13	59%
1	2	18%	13.9 %	2	9%
2	1	9%	7.9 %	2	9%
3	0	0%	22.1 %	1	4,5%
4	3	27%	24.3 %	4	18%
Moyenne	1.45		1.9	1.14	

Tab. 2 – « Les surfaces *de Monsieur Minipot* » et « RMT 2005 ».

4 APPRENDRE À METTRE EN ÉVIDENCE DIFFÉRENTES PROCÉDURES

Ce travail d'analyse comparative permet de montrer l'influence des variables sur les procédures et les résultats des élèves. Il a aussi pour objectif d'apprendre aux étudiants à déterminer et interpréter des procédures utilisées par les élèves.

Le problème « *RMT 2005* » nous semble être un bon problème pour atteindre cet objectif avec de futurs enseignants parce que, d'une part, ces procédures sont nombreuses et, d'autre part, elles sont relativement explicites :

- comptage des « pièces » sans tenir de leur grandeur relative,
- comptage des briques entières après recomposition,
- comptage des briques entières uniquement,
- mesure,
- appariement.

Ajoutons que selon les copies, ces procédures sont appliquées soit aux quatre chiffres de 2005, soit uniquement au 2 et au 5 lorsque les élèves ont compris que les 0 ne changeaient pas la réponse puisque pris en charge de la même manière par les deux enfants (figure 6).

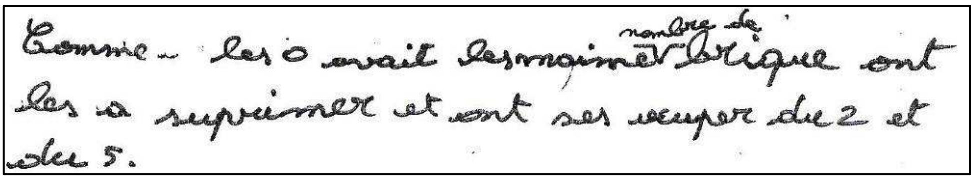

Comme les 0 avait les mêmes nombre de brique ont les a supprimer et ont ses ocuper du 2 et du 5.

Fig. 6 – Justification de l'abandon des 0.

Au-delà de la détermination des procédures d'élèves, la compréhension des erreurs et leur mise en relation avec des obstacles est aussi une activité importante dans la formation des futurs enseignants. Si, dans un premier temps, il est possible de s'appuyer sur les hypothèses des élèves, elles-mêmes énoncées à partir de leurs connaissances, par la suite, pour confirmer certaines hypothèses ou pour compléter celles des étudiants, la référence à un cadre théorique ou à des expérimentations est nécessaire. Un cadre théorique utilisé avec les étudiants est celui établi par une équipe du CREM (2007). Il met en évidence « un fil conducteur relatif aux concepts d'aire et de mesure des aires » constitué de quatre *niveaux* de procédure :

- la perception qualitative de l'aire : comparaisons directe et indirecte d'aires (équidécomposition, équicomplémentarité), rapport entre deux aires ;
- la quantification d'une aire par recouvrement à l'aide d'unités entières ou d'unités entières et de fractions de celle-ci, ou par encadrement ;
- la numérisation de l'aire où la grandeur est remplacée par un nombre ;
- le calcul de la mesure de l'aire à partir de formules s'appuyant sur des longueurs.

Pour les futurs enseignants, en plus de ce fil conducteur, à considérer comme non linéaire, il est essentiel de montrer en quoi la mobilisation conditionnelle de ses composantes est importante. En effet, tout problème relatif à l'aire et à l'unité de mesure commune ne demande pas l'utilisation d'une procédure de calcul à l'aide d'une formule. Celle-ci est par ailleurs parfois plus coûteuse en termes cognitifs qu'une procédure de comparaison simple.

5 PRODUIRE DE NOUVEAUX ÉNONCÉS

Les analyses de problèmes, le retour sur les cadres théoriques et l'observation des procédures investies par les élèves sont autant d'occasions de mettre au point de nouveaux problèmes. Ce travail s'effectue à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer une difficulté particulière ou pour vérifier la pertinence ou l'influence d'une variable. Au-delà, c'est la mise au point d'un dispositif d'enseignement de la notion d'aire, associée à celle de périmètre et d'unité de mesure commune qui est questionnée. Par exemple, pour le problème de Monsieur Minipot, plusieurs variantes ont été construites. Nous en présentons quelques-unes ci-dessous.

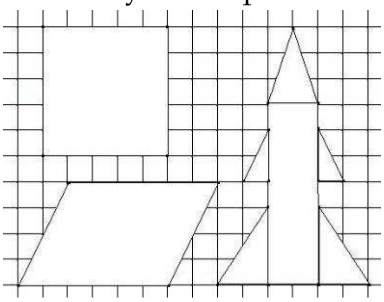


Fig. 7 – Variante 1.

La figure 7 est une variante où les figures (carré, parallélogramme et fusée) à comparer sont composées de formes plus variées que dans le problème initial. La mesure de l'aire de chaque figure ne s'effectue donc plus à partir de carrés et de triangles rectangles isocèles, moitiés de carré. Cependant, comme dans la version initiale, les élèves peuvent mesurer l'aire des trois figures en transformant certaines de leurs parties en rectangle ou en carré, en les décomposant (figure 8), ou en en juxtaposant deux (figure 9).
C'est la perception de la décomposition et de la recomposition de carrés unités à partir de formes diverses qui sont en jeu.

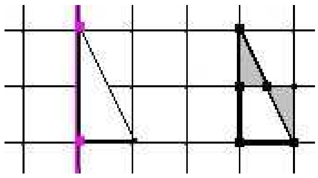


Fig. 8 – Décomposer une forme.

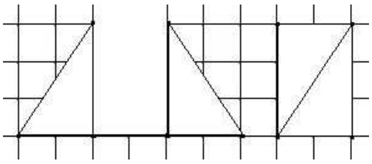


Fig. 9 – Juxtaposer deux formes.

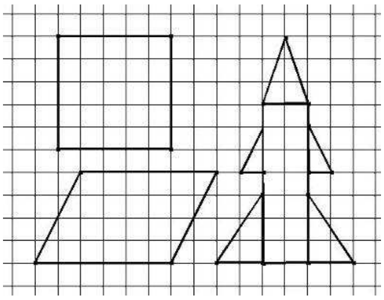


Fig. 10 – Quadrillage

Le problème peut aussi être proposé en montrant le quadrillage (figure 10), faisant apparaître ainsi une des unités de mesure qu'est le carré. Une des hypothèses que l'on peut émettre concernant les procédures investies par les élèves, à l'aune des observations réalisées pour le problème RMT 2005, est que ceux-ci vont plutôt traiter de petites surfaces distinctes plutôt que de juxtaposer des formes comme dans la situation précédente (figure 9). Une des explications est que le quadrillage structure la lecture des figures à partir de petites surfaces isolées et que l'interprétation de la figure, notamment pour la fusée, ne se fait plus à un niveau « globale » mais plutôt à un niveau que l'on pourrait qualifier d'« atomisé »[8].

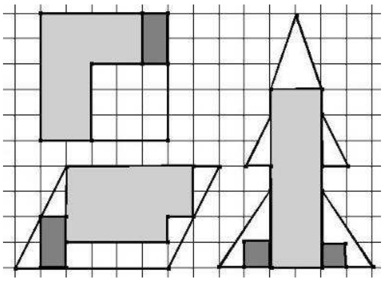


Fig. 12 – Une procédure d'appariement

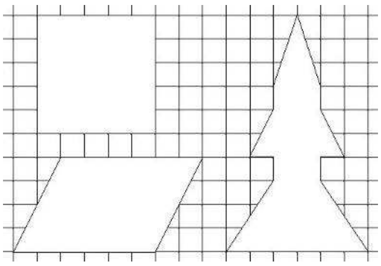


Fig. 11 – La fusée en *une seule pièce.*

De la même manière, la fusée, plutôt que d'être composée de plusieurs formes, peut apparaître en *une seule pièce* (figure 11). La décomposition de la figure est alors entièrement dévolue aux élèves.

Mais l'énoncé du problème peut aussi être modifié. Ainsi, la notion de proportionnalité, bien que presque implicite dans la version initiale, peut être ôtée du problème : « M. Minipot a peint ces trois surfaces. Il souhaite à présent savoir pour laquelle des trois il a utilisé le plus de peinture ». Ce changement d'énoncé peut ne pas modifier les procédures investies par les élèves. En effet, comme dans « RMT 2005 », il est possible que les élèves mesurent l'aire de chacune des trois figures et ensuite comparent les mesures obtenues.

Par contre, ce changement peut amener les élèves à utiliser d'autres procédures, notamment la correspondance terme à terme. Par exemple, dans un premier temps, les élèves peuvent enlever (ou colorier) dans chaque forme le même nombre de carrés unités (figure 12). Ensuite, poursuivre avec des procédures qui peuvent être mixtes, dont la recomposition de carrés accompagnée de leur mise en correspondance.

[8] Nous renvoyons le lecteur intéressé par la problématique de la vision et de la lecture des figures géométriques vers, entre autres, le travail du CREM (2007) et l'article de R. Duval (2005).

Le problème « *Décoration* »[9] (en annexe) est une autre variante où la notion de proportionnalité apparaît davantage. Comme pour Monsieur Minipot, seules deux unités d'aire sont utilisées (des carrés et des triangles rectangles isocèles). Les procédures relatives à la notion d'aire sont également semblables. D'autres problèmes du RMT proposent également des situations similaires à celle de Monsieur Minipot , tel que « Coupe et découpe »[10] présenté également en annexe.

Ainsi, une autre piste de travail avec de futurs enseignants est de parcourir les différentes épreuves du RMT et de repérer des problèmes qui concernent les notions d'aire, de périmètre et d'unité de mesure commune. Ensuite, de proposer un arrangement de ceux-ci dans le cadre de l'enseignement et de l'apprentissage de ces notions.

6 CONCLUSION

L'utilisation de problèmes du RMT avec des futurs instituteurs permet de rencontrer plusieurs objectifs de leur formation en mathématique, en didactique et en sciences cognitives. Tout d'abord en demandant aux étudiants de résoudre les problèmes, ceux-ci sont confrontés à leurs propres difficultés, notamment au niveau mathématique. Le recours à un cadre théorique mathématique est alors nécessaire et motivé par les difficultés des étudiants.

Ensuite, l'analyse des copies permet aux étudiants de construire une attitude empathique qui consiste à s'intéresser et comprendre ce que l'autre pense, connaît et est capable d'investir. Cette analyse permet aussi d'amener les étudiants à interpréter certaines erreurs en termes d'obstacles à la résolution de problème et au-delà à comprendre des difficultés d'élèves face à l'apprentissage de certaines notions mathématiques. Ce travail d'interprétation nécessite souvent un retour sur des cadres théoriques didactiques et cognitifs.

L'analyse des problèmes permettent également de mettre au point de nouveaux problèmes à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer telles difficultés ou pour vérifier la pertinence de telle variable. Ce travail débouche parfois sur la mise au point de dispositifs d'enseignement de telle ou telle notion.

7 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2008]. Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 8. 167-178. Traduction française, 179-182. ARMT.
- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2007]. La costruzione a lungo termine del concetto di area. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 7. 199-216. ARMT.
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Noël, G. (Dir.). [2007]. *Impact du*

[9] Voir notamment F. Jaquet (2005), P. Stegen (à paraître) et M. Vernex (2001).

[10] Pour une approche des ces problèmes dans le cadre d'un enseignement de la notion d'aire, nous renvoyons le lecteur, notamment, à l'article de C. Bisso et L. Grugnetti (2008), le concept d'aire avec les problèmes du RMT : un parcours de 5 ans.

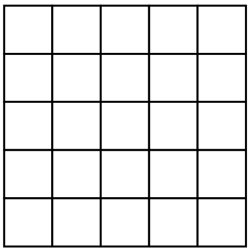
logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages. Nivelles : CREM.
- Duval, R. [2005]. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Grugnetti L. & Jaquet F. [2005]. D'un concours de mathématiques par classes à la formation des maîtres, *Actes de la COPIRELEM*.
- Jaquet, F. [2005]. Successioni proporzionali e variabili didattiche. L'Educazione matematica. 3.
- Skilbecq, Ph. [2006]. Un problème de géométrie ! *Livret RMT*. 2. 48-63. Section belge du RMT : Nivelles.
- Stegen, P. [À paraître]. Exploitation d'un problème du RMT : Décoration. *Livret RMT*. 5,6. Section belge du RMT : Nivelles.
- Vernex, M. [2001]. Analyse et utilisation du problème Décoration du 9e RMT. *Math-Ecole*. 198. 4-18.

8 ANNEXES

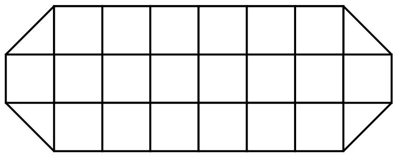
LES TABLES DE TANTE MARIE (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 16e RMT, épreuve 2)

Tante Marie a deux vieilles tables de jardin dessinées ici,

une table carrée :

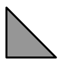


et une table allongée :



Elle décide de recouvrir ses tables avec des pièces de papier plastifié adhésif de deux sortes :

- des pièces carrées, rouges, de la même grandeur que les carrés des tables : 

- des pièces triangulaires, vertes, qui sont des moitiés de carré : 

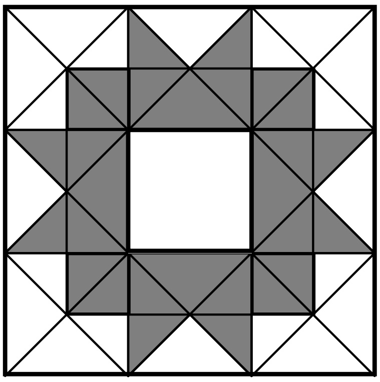
Son travail fini, tante Marie remarque que les deux tables sont entièrement recouvertes et que les pièces sont placées correctement les unes à côté des autres, sans se chevaucher.
Elle remarque aussi qu'elle a utilisé 34 pièces pour chacune des deux tables, soit 68 pièces en tout.

Combien de carrés rouges et de triangles verts tante Marie a-t-elle utilisés pour recouvrir la table carrée ? Et la table allongée ?

Expliquer comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

LA ROSACE DE JULIE (I) (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 15e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

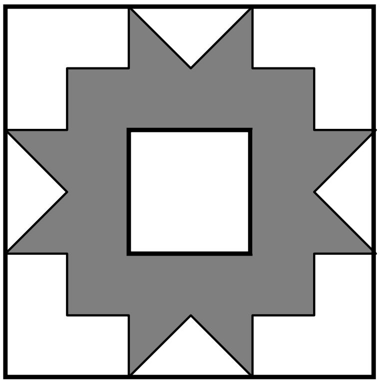


Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris … ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6 ; problème 7 ; 15e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.



Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris … ?

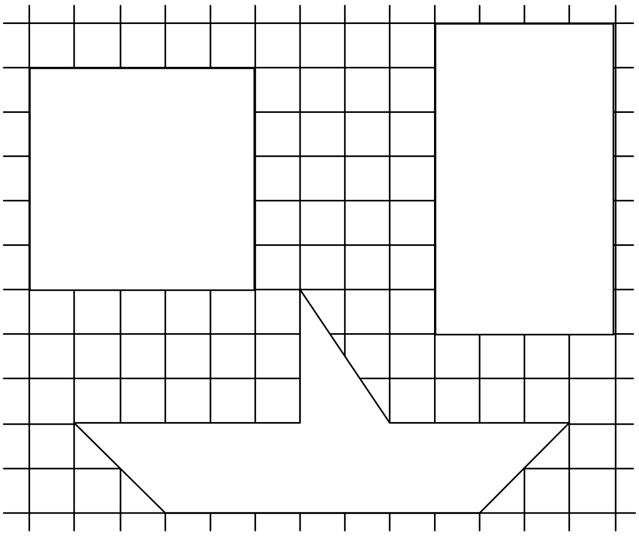
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

LES SURFACES DE M. MINIPOT (Cat. 4, 5 ; problème 6 ; 16e édition, épreuve 2)

M. Minipot veut peindre les surfaces dessinées ci-contre en mettant toujours la même épaisseur de peinture.

Il possède trois pots de peinture identiques.

Il en utilise un, complètement, pour peindre la surface carrée.



Avec les deux pots qui restent, et en mettant la même épaisseur de peinture partout, pourra-t-il peindre entièrement les deux autres surfaces ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

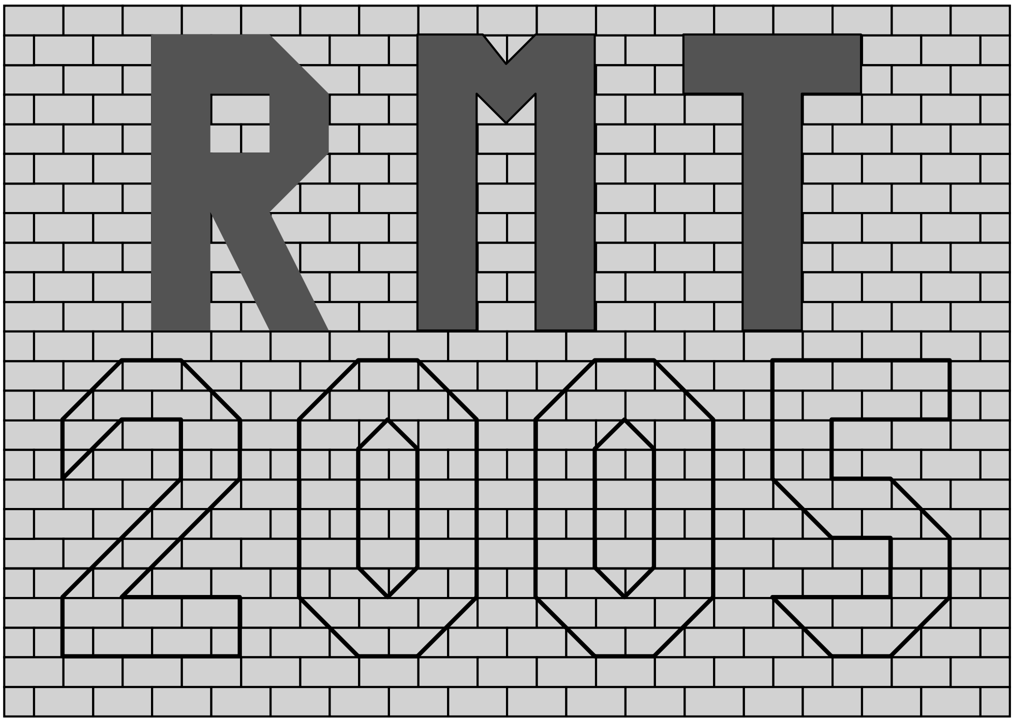
CARTABLE RMT (Cat. 4, 5, 6 ; problème 7 ; 16e RMT, épreuve 2)

Philippe et Pierre ont acheté le même cartable de la marque RMT. Dans son cartable Philippe a mis 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres de classe. Pierre a déposé dans son cartable, 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres.
Pierre et Philippe savent que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers mais est aussi égal au poids de 2 livres.

Qui a le cartable le plus lourd ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

RMT 2005 (Cat. 3, 4 ; problème 2, 13e RMT, épreuve 1)
Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

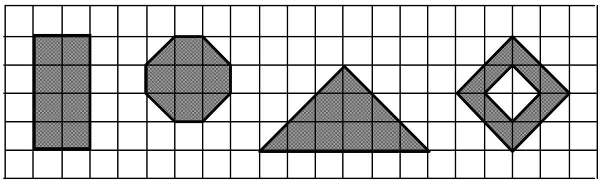


Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

DÉCORATION (Cat. 5, 6, 7 ; problème 9 ; 9e RMT ; épreuve 2)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

A la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

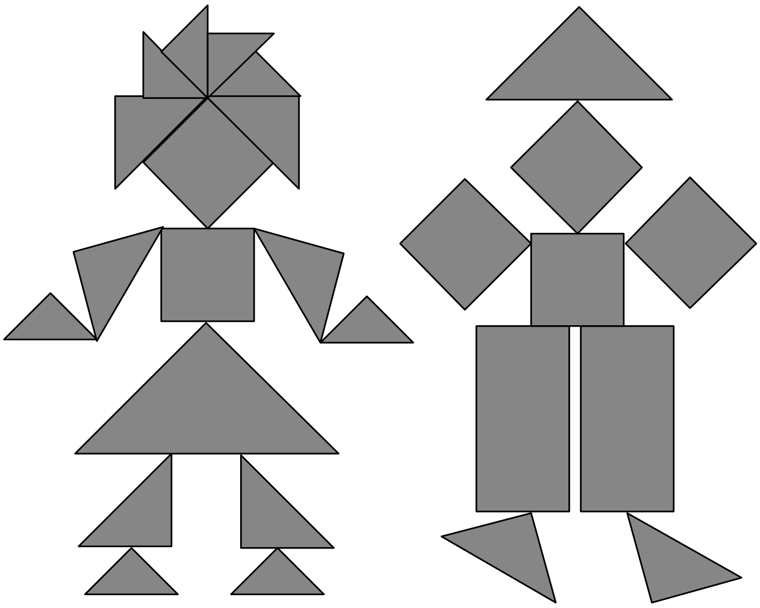
Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

10. COUPE ET DÉCOUPE (Cat. 5, 6 ; PROBLÈME 10 ; 15 RMT ; épreuve 2)

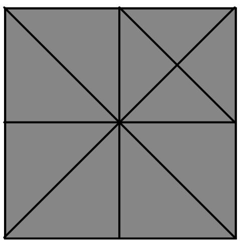
En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.



Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.
Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.
Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



Atelier B6

« QUESTION D'ENSEIGNANTS, QUESTION D'ENSEIGNEMENT : UN PARTAGE D'EXPÉRIENCE DE FORMATION AVEC DES ENSEIGNANTS DE COURS PREPARATOIRE RELATIVEMENT A LA CONSTRUCTION DE LA NUMERATION »

Joël BRIAND
IUFM d'Aquitaine
Laboratoire DAESL Bordeaux 2
briandjoel@free.fr

Résumé
Cet atelier a pour origine une demande faite par des enseignants d'une circonscription de la banlieue bordelaise. Ces enseignants souhaitaient construire une évaluation « sans brouillage par le dire ou par l'écrit » des acquis en numération au CP (au mois de Mars).
En première partie, les participants à l'atelier sont invités à réfléchir, par groupe, à la conception d'une telle évaluation diagnostique.
La seconde partie de l'atelier rend compte, à l'aide d'une vidéo, de l'évaluation diagnostique construite alors avec les enseignants de la circonscription, évaluation fondée sur une situation d'action (dans un milieu différent des contraintes habituelles de l'écrit et du discours) mise en œuvre et suivie d'un travail de soutien sur 2 mois.
- Pour la première partie, les discussions qui ont suivi chacune des présentations des 7 groupes ont permis d'évoquer certains aspects d'une situation dite de diagnostique.
- Pour la seconde partie, la vidéo montre le scénario suivant : une enseignante donne à chaque élève une étiquette prise sur le tableau des nombres de la classe. Il s'agit de constituer, de la façon la plus rapide et la plus fiable possible, une collection de cubes correspondant au nombre proposé. Pour ce faire, deux boîtes sont mises à disposition : une contenant des cubes « isolés », en vrac, une autre dans laquelle les cubes sont emboîtés par paquets de dix.
Le groupe a observé les démarches de 6 élèves. Partant de ces observations, la discussion qui a suivi a eu pour objet de faire évoluer cette situation d'évaluation vers une situation de remédiation-consolidation..

1 ORIGINE DU PROBLÈME ET TRAVAIL DES PARTICIPANTS

1.1 La question d'origine

Dès le cours préparatoire, les élèves sont confrontés aux différences fondamentales de fonctionnement des deux systèmes de numération : lire le groupe de signes « 18 », en disant « dix-huit » et comprendre que 18 est construit à partir de 10 et de 8 par une addition (10 + 8). Or, il n'est pas rare d'observer des élèves qui lisent « 18 » en énonçant « dix-huit » et simultanément considèrent que 18 c'est 8 et 1 (donc 9 !)[1] .

[1] Plus tard, au cycle 3, certains élèves ont toujours des difficultés à voir dans les écritures chiffrées autre chose que les « chiffres » qui le composent : dans 4 537 par exemple, ils sont capables de repérer que 5 est le chiffre des centaines, mais ne parviennent pas à envisager 5 comme la « trace » de 500 ; pour d'autres, le fait que le nombre 4 537 contient 45 centaines n'est pas encore acquis, or dans un calcul de division tel que 4 537 divisé par 42, il est nécessaire de pouvoir envisager de retrancher 42 centaines aux 45 centaines du nombre 4 537. Par ailleurs, les résultats des évaluations nationales à l'entrée en sixième montrent une persistance des difficultés chez certains élèves à écrire en

Il s'agit donc de se donner les moyens d'observer et d'évaluer dès le cours préparatoire, après les premiers apprentissages, comment les élèves vivent ce passage de la lecture première des nombres à une re-lecture fondée sur la numération que nous appellerons "lecture-numération".
A la demande d'une enseignante de cours préparatoire, nous avons construit une situation d'évaluation sur laquelle nous posons des contraintes que nous allons préciser. Mais avant cela, détaillons le contexte : dans la classe de cette collègue, les élèves suivent la progression définie par un fichier. Les nombres y sont étudiés les uns après les autres de manière linéaire, c'est-à-dire dans leur ordre d'apparition au sein de la suite numérique. Pour les nombres composant la première dizaine, des exercices portant sur des « faits numériques » sont systématiquement proposés. Ils consistent à reconnaître ou produire diverses décompositions additives. L'étude de la deuxième dizaine doit alors permettre aux enfants de percevoir les principes de la numération décimale positionnelle. Les nombres allant de 11 à 19 sont décomposés en une dizaine et en unités.
L'enseignante a déjà perçu que le fait de demander où se situait le chiffre des dizaines, le chiffre des unités ou de le faire souligner dans une évaluation écrite ne constituait en aucune façon une garantie de la compréhension de « l'écriture numération ». En effet les élèves apprennent vite que la réponse à donner à la question « où est le chiffre des unités » consiste à désigner le signe qui est à gauche…
L'enseignante souhaite donc faire une évaluation plus fine (on est en mars) sur les connaissances des élèves et pour cela veut mettre en place une activité qui permettrait d'évaluer l'état des compétences acquises ou non relativement à cette lecture de l'« écriture numération ».
Les contraintes sont donc : construire une situation d'évaluation qui permette, sans brouillage par l'écrit ou le dire, de s'assurer que les élèves sont devenus lecteurs de l' « écriture numération » des nombres.
Dans le cadre de l'atelier, nous avons donc demandé aux participants de réfléchir à l'élaboration d'une telle situation.

1.2 Travail par groupe à la constitution d'une situation d'action dite diagnostique

Nous avons travaillé par groupe pendant environ une heure sur la conception d'une situation d'action qui tiendrait lieu d'évaluation diagnostique. Puis, chaque groupe a présenté le résultat de ses réflexions grâce à une ou deux fiches rétroprojetées. Nous décrivons rapidement les situations des sept groupes.

- G1 développe une situation dans laquelle il s'agit de produire une collection en utilisant des paquets initialement présentés tout faits et déposés dans des boîtes : boîte de 10, boîte de 1, boîte de 5, etc. Les élèves doivent produire une réponse sous la forme de groupement : par exemple : 14 = 12 x 1 + 1 x 2 (c'est-à-dire 12 paquets de 1, 1 paquet de 2). Une contrainte importante serait de disposer d'un nombre limité de paquets dans les boîtes.
- G2 présente une situation basée sur un système d'étiquettes-nombres (disposées aléatoirement). Dans un premier temps, l'élève doit reconnaître des étiquettes et les nommer (d'abord il reconnaît celles qu'il connaît, puis le maître cite des nombres et l'élève doit les reconnaître sur les étiquettes). Dans un deuxième temps, l'élève doit construire des collections à partir des étiquettes. Puis inversement, l'élève doit, à partir d'une collection donnée, désigner une étiquette correspondante.
- G3 propose des jetons soit organisés par boîtes de 10 soit donnés librement. A partir d'une étiquette codée 18, l'élève doit rapporter autant de jetons que le nombre indiqué sur l'étiquette.
- G4 décrit une situation dans laquelle le maître passe à l'élève une commande écrite sous forme chiffrée à propos d'un matériel de type « carrelage » constitué d'objets isolés, d'objets groupés par paquets de 10, d'objets groupés autrement que par paquets de 10 (ex : par paquets de 5) pour contrôler l'effectif des groupements. Le maître évalue la réponse de l'élève. Nombres choisis possibles : 5 ; 18 ; 12, etc. Si l'élève échoue, le maitre demande à l'élève de repérer un nombre et de le nommer ; il peut aussi lui demander de dénombrer une petite collection. Si l'élève réussit, retour à la situation avec la contrainte de ne pas utiliser plus de 9 objets isolés.

---

chiffres des nombres donnés en lettres et réciproquement.

- G5 propose une situation individuelle qui s'effectue par le passage un par un des élèves avec un matériel basé sur des pièces de 1€ ou 10€ et/ou un matériel 'organisé' : allumettes, mains, constellations, etc. La première consigne est : « donne-moi ou montre-moi vite X allumettes/mains, etc. » ; avec X=7, 18, 15, 24, etc. La seconde consigne est : « où est-ce qu'il y a X ? » où la désignation de X peut également se faire sous la forme d'étiquettes où on trouverait par exemple pour X=17 : 1+7 ; 17 ; 10+7 ; 8 ; un billet de 10€ et des pièces de 1€, etc.
- G6 propose une situation de communication (émetteur récepteur). La tâche indiquée à l'émetteur est de réaliser une collection équivalente au nombre-étiquette donné. Le récepteur doit écrire la quantité correspondante à la collection constituée par l'élève émetteur. Les nombres choisis peuvent être 58 ; 67 ; 75 ; 82 ; 89 ; 97 etc.
- G7 décrit une situation qui consiste à aller chercher des pailles pour *n* gobelets (n=18, ou 17). Les pailles sont données par paquet de 10 et par unités.

1.3 Discussion

Les discussions qui ont suivi chacune des présentations des sept groupes ont permis d'évoquer certains aspects d'une situation dite de diagnostique comme par exemple :
- « s'il s'agit d'une situation diagnostique, on ne devrait pas se préoccuper de la validation ».
- « autour de la disponibilité de la connaissance : elle peut être là et ne pas être sollicitée par la situation ».
Plusieurs groupes ont donc construit des situations qui mobilisent le savoir visé. La situation que nous avons ensuite observée est proche de plusieurs propositions faites : groupes G3 ; G4 ; G7.

2 VIDÉO DE LA SITUATION DIAGNOSTIQUE OBSERVÉE DANS L'ATELIER

2.1 Description de la vidéo

La maîtresse donne à chaque élève une étiquette prise sur le tableau des nombres de la classe. Il s'agit de constituer, de la façon la plus rapide et la plus fiable possible, une collection de cubes correspondant au nombre proposé. Pour ce faire, deux boîtes sont mises à disposition :
- une boîte contenant des cubes « isolés », en vrac ;
- une autre dans laquelle les cubes sont assemblés par paquets de dix.
Les élèves réalisent un travail individuel : ils ont donc devant eux deux corbeilles dans lesquelles il y a d'une part des cubes emboités par 10 et d'autre part des cubes seuls. L'élève doit associer à une étiquette une collection de cubes ; l'étiquette en question est bicolore car le chiffre des dizaines est différent du chiffre des unités.

Parmi les variables de la situation, citons :

- Le choix des nombres : proposer 61 nécessite 7 prises pour un élève qui est lecteur de « l’écriture numération » et 61 prises pour celui qui comptera un à un. Proposer 13 nécessite 4 prises pour un élève qui est lecteur de « l’écriture numération » et 13 prises pour celui qui comptera un à un. Le différentiel est plus grand avec le premier nombre qu’avec le second. Un nombre tel que 20 ; 30 ou 40 peut susciter des lectures particulières.
- les paquets de dix sont mis à part ou bien les paquets de dix et les cubes en vrac sont dans une même boîte...

2.2 Bilan de l’observation

	Effectif	Travail observé
Réussite		
Immédiate	5	
Hésitation	1	L’élève commence par construire une barrettes de nombre égal au chiffre des dizaines de son nombre, s’arrête et prend des barrettes de dix.
Hésitation	1	L’élève reconstitue une barrette de dix à laquelle il rajoute des cubes unités. L’intervention de l’enseignante lui permet de trouver la solution.
	Effectif	Travail observé
Échec		
Nombre et somme	3	Les élèves confondent le nombre avec la somme de ses chiffres. (voir illustration pour 32)
Barrettes « variant »	1	L’élève constitue une barrette de nombre égal au chiffre des dizaines (ou au chiffre des unités : voir illustration 45) de son nombre.

Près de la moitié des élèves ayant pris part à l’activité tire le meilleur parti du matériel fourni pour la construction des collections et utilise à bon escient les barrettes de dix pour les dizaines et les cubes isolés pour les unités.

Deux élèves parviennent au résultat attendu après quelques hésitations ou par des voies détournées. Le premier se met à construire des barrettes de nombre égal au chiffre des dizaines de son nombre (ayant l'étiquette « 74 », il se met à former des paquets de 7) avant de s'interrompre et d'utiliser les paquets de dix déjà constitués. Le deuxième élève (E) dispose lui du nombre « 67 ». Il commence par reconstituer une barrette de dix à laquelle il rajoute 7 cubes unités. La maîtresse (M) arrive et s'engage alors un dialogue.

— M : Sur ton étiquette peux-tu me dire ce que représentent les différents chiffres ?

— E : Le 7 c'est les unités et le 6 les dizaines.

— M : D'accord. Et qu'est-ce que c'est qu'une dizaine ?

— E : C'est ça ! (Il montre les cubes organisés en paquets de dix.)

—M : À ton avis, est-ce que la collection que tu viens de construire et l'étiquette que tu as sous les yeux représentent la même chose ? Est-ce qu'on peut les mettre ensemble ?

— E : Non !

— M : Alors je te laisse faire.

Suite à cette brève discussion permettant à l'élève de clarifier la relation qui existe entre la notion de dizaine et l'écriture du nombre « 67 », il va alors réussir sans difficulté l'activité proposée en utilisant très justement barrettes de dix et cubes isolés.

Trois élèves en revanche éprouvent des difficultés dans la construction des collections car ils confondent le nombre qui leur est donné avec la somme de ses chiffres. Ainsi, une petite fille qui a devant elle l'étiquette « 47 », forme une collection de 11 cubes (constituée d'un groupement de 4 et d'un autre de 7). C'est cette élève que nous avons plus particulièrement observée lors de l'atelier.

Un autre élève qui dispose de l'étiquette « 51 » construit cinq barrettes de cinq cubes auxquelles il adjoint un cube unité.

2.3 L'observation de « 47 »

L'élève doit représenter 47 : elle propose 4 cubes emboîtés et 7 unités et dit : « 4 dizaines et 7 unités ». L'enseignante l'invitant à recompter l'ensemble des éléments de sa collection et à dire comment elle écrirait le nombre ainsi obtenu, elle répond sans sourciller : « un 1 et un 1 ». L'enseignante lui demande alors si le nombre qu'elle vient de décrire (11) ressemble à l'étiquette « 47 », ce à quoi elle rétorque : « Non, 11 c'est une dizaine et une unité ! » mais sans toutefois percevoir l'incohérence de ses actions et de ses propos.

2.4 Discussion après cette observation : recherche de remédiation

Extraits bruts de la discussion :
« On devine les prémices de groupement chez cette élève (les 4 cubes emboîtés) mais la règle n'est pas celle de la numération. » (…) « Il faudrait un milieu où justement les collections 47 et 11 ne répondent pas au problème : il faudrait une rétroaction qui invaliderait le 11 ».
Nous proposons ce qui a été mis en place, de façon relativement spontanée, dans cette classe pour que la contradiction apparaisse. Nous avons demandé de replacer l'étiquette (47 pour cette élève) dans le tableau (de la suite numérique) afin qu'elle se rende compte, via la comptine, que le 11 n'est pas 47 (dans le but de faire apparaître une incompatibilité).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Tableau de la suite numérique

2.5 Apports d'informations

Dans cette classe, cette élève a dû être mise dans cette situation contradictoire à plusieurs reprises pour comprendre la règle d'écriture du nombre. Par la suite, l'enseignante a repris une progression au cours de laquelle des situations d'actions collectives étaient régulièrement proposées aux élèves.

3 CONCLUSION

Nous venons d'étudier le rôle du professeur dans le déroulement d'une situation. Nous avons dit que ses interventions étaient déterminantes pour faire en sorte que ses rappels à la règle du jeu soient perçus comme une invitation à s'aventurer vers d'autres expérimentations. Or, le professeur est souvent bien seul face à l'émergence des premières connaissances et déclarations des élèves lors des apprentissages. Ces premiers signes, manifestations de connaissances utiles pour l'organisation de l'enseignement, ne sont pas répertoriées dans les documents dont le professeur dispose couramment. L'irrésistible ascension du terme de compétence focalise actuellement le système enseignant sur le listage d'items pour effectuer des évaluations. Ces items sont le plus souvent calqués sur l'organisation des savoirs, et ceci dans chaque discipline[2]. Mais les compétences ne sont pas actuelles, elles s'actualisent et se manifestent en performances à l'occasion d'accomplissement de tâches. Nous avons vu que c'est en observant de près les tâches à accomplir que nous pouvons commencer à repérer des manifestations, même faibles, de connaissances, dont nous savons qu'elles sont nécessaires à la construction de savoirs dans un domaine donné. Si ces modèles implicites d'action, ces « briques » élémentaires ne sont pas jugées dignes d'être repérées, c'est une part délicate du métier de professeur qui consiste à faire vivre les connaissances, les savoirs en devenir, ou encore maladroitement formulés, mais qui sont nécessaires à la construction des savoirs établis, qui est ignorée.
Dans un article [Briand 2007] nous répertorions les compétences à construire pour s'approprier la signification de ce qui est convenu d'appeler une « suite additive ». Nous faisions alors la conclusion suivante : *« En focalisant toute l'énergie des enseignants sur un listage de compétences directement issu de l'organisation des savoirs, au détriment de l'observation de manifestations des connaissances des élèves, de règles d'actions […], il y a un risque non négligeable d'égarer les professeurs vers des formes officielles d'organisation naturalisée de savoirs et donc d'évaluations qui ne correspondent pas aux émergences et aux organisations des connaissances des élèves dans une situation donnée. »*
Le but de cet atelier était donc de réhabiliter le rôle de l'enseignant dans la construction d'évaluations fines de l'état des connaissances nécessaires à l'acquisition de la numération au cours préparatoire.

4 BIBLIOGRAPHIE

BODIN A. (2007) Dissonances et convergences évaluatives, *Bulletin APMEP*

BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe, *Petit x*, **75**.

GAUTHIER R.F. (2006) Évaluation des acquis des élèves, évaluation de système, où en est-on en France en 2006 ?, *Conférence École Navale de Brest*.

[2] Il est difficile de parler de compétence hors du couple compétence/performance, ou, mieux encore hors de la triade : tâche-compétence-performance.

Atelier B7

UTILISATION DE L'ATELIER JEUX MATHÉMATIQUES DE L'IREM DE TOULOUSE DANS LES ÉCOLES DE L'ACADÉMIE

Jean Pierre Abadie
IREM de Toulouse
njpabadie@orange.fr

Nicole Abadie
IREM de Toulouse

Gérard Martin
IREM de Toulouse

Résumé
L'objectif de cet atelier est de présenter les jeux contenus dans une mallette utilisée par l'IREM de Toulouse lors de diverses manifestations dans l'Académie. Les jeux sont regroupés en quatre catégories :
- jeux numériques (figures magiques, …)
- pavages du plan (puzzles, grilles logiques, …)
- remplissage de l'espace (reconstitution de cubes, de pyramides, …)
- casse-tête.

Après un bref historique de la genèse de « l'atelier jeux mathématiques de l'Irem de Toulouse », les auteurs s'attachent à mettre en évidence les conditions d'utilisation de la mallette et à justifier que les activités proposées sont bien des jeux.
Par la suite, quatre jeux sont présentés en détail, chacun appartenant à une des catégories précédemment citées. Le premier consiste à disposer en triangle les nombres de 1 à 6 pour que la somme des valeurs placées sur chacun des côtés soit la même. Le second consiste à placer des pions de deux couleurs sur un quadrillage carré de façon à ce que deux pions d'une même couleur ne soient disposés sur une ligne verticale, horizontale ou oblique. Le troisième est un assemblage de billes pour reconstituer une pyramide. Enfin, le quatrième jeu est un casse tête visant à séparer des éléments constitués d'une planchette et d'une cordelette.
Outre la présentation d'un jeu, les auteurs s'attachent à décrire les comportements des enfants lors des animations et engagent quelques pistes de réflexion sur l'aide à apporter aux élèves.

1 UTILISATION DE L'ATELIER JEUX MATHEMATIQUES

1.1 Historique

L'Atelier Jeux Mathématiques a vu le jour en l'an 2000, déclarée année mondiale mathématique par l'UNESCO. La Régionale APMEP et l'IREM avaient organisé entre autres des animations grand public (Beaumont de Lomagne, place du Capitole à Toulouse) en proposant quelques jeux et casse-tête à un public très varié qui n'était pas venu pour ce genre d'activité. Vus les lieux et le public visés, le parti pris était de ne retenir que des jeux basés sur des manipulations. C'était, en quelque sorte une illustration de la pensée d'Anaxagore « l'homme pense parce qu'il a une main ». Ces manifestations ont eu un grand succès et ont appelé une suite.

Ces jeux ont été utilisés pour la première fois en milieu scolaire par Jean-François Bergeaut pour la formation des professeurs des écoles de l'Ariège et dans l'atelier maths de son collège.

Les jeux ont été et sont encore regroupés en quatre catégories :
- jeux numériques (figures magiques, …)
- pavages du plan (puzzles, grilles logiques, …)
- remplissage de l'espace (reconstitution de cubes, de pyramides, …)
- casse-tête.

Un premier intérêt pédagogique est apparu immédiatement. Certaines activités sont tirées de jeux papier crayon mais au lieu d'écrire les nombres on utilise des jetons numérotés. En écrivant, les divers essais de solution laissent des traces et peuvent donner un sentiment d'échec, tandis que déplacer un jeton donne l'impression d'améliorer une situation. Des élèves sont ainsi plus actifs sur ces jeux que sur des problèmes semblables en classe.

1.2 Utilisation

Aujourd'hui cinq exemplaires de la mallette (deux écoles, trois école-collège) existent. Au cours de ces dernières années scolaires ils ont été utilisés dans :
des animations grand public comme la Fête à Fermat à Beaumont de Lomagne, la fête de l'ail toujours à Beaumont de Lomagne, et divers festivals de jeux.
des animations en direction des établissements scolaires :
- pendant le Fête de la Science dans le Gers,
- dans le hall de l'Administration de l'Université Paul Sabatier (une semaine en janvier et une semaine en mars)
- à Rodez (invitation de Sciences en Aveyron)
- auprès des étudiants et des professeurs stagiaires de l'IUFM de Foix.
Durant ces animations, c'est surtout des classes de cycle 3 qui sont reçues. Chaque année, lors de ces manifestations, près de 200 classes sont accueillies dont plus de 120 d'écoliers pendant des plages horaires de 1 h à 1 h 30. Nous intervenons surtout pour donner éventuellement des explications sur les consignes, pour valider des réponses ou pour donner des indications pour débloquer une situation. Entre ces activités, nous observons les réactions des élèves. Les remarques qui suivent dans ce texte découlent d'observations faites lors des animations.

des prêts aux établissements scolaires pendant une semaine minimum : une quarantaine en bénéficient dont plus de la moitié d'écoles pendant l'année.

Pour répondre à la demande, nous avons créé une mallette cycle 2 utilisée surtout pour la fête de la science dans le Gers et des prêts aux écoles.

Depuis 2006, l'atelier Jeux Mathématiques est invité au Salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris. Il est aussi connu internationalement avec son utilisation dans des camps d'été de lauréats du concours Kangourou et par une conférence atelier à un colloque de l'espace mathématique pan africain en novembre 2008 en Tunisie.

1.3 Les activités proposées sont-elles des jeux ?

Mais tout d'abord qu'est ce qu'un jeu ?

Tout en soulignant la difficulté de le définir, les auteurs qui se sont intéressés au jeu ont essayé de cerner au plus près cette activité.

Roger Caillois dans « les jeux et les hommes » définit le jeu comme une activité :
- libre (le joueur ne saurait être obligé)
- séparée (circonscrite dans des limites de temps et d'espace)

- incertaine (le résultat n'est pas acquis préalablement)
- improductive (ne créant ni bien ni richesse)
- réglée (soumise à des conventions)
- fictive.

Gilles Brougère (université Paris 13 auteur de « jeu et éducation » et de « jouer/apprendre ») ne définit pas le jeu mais donne des critères ou caractéristiques qui permettent d'analyser les situations de jeu. Ces critères sont :
- le second degré (c'est pour de faux, on fait semblant)
- la présence d'une décision (entrer dans le jeu et par la suite prendre une succession de décisions en relation avec les autres joueurs)
- la règle (préalable ou construite avec le jeu)
- la frivolité ou l'absence de conséquence de l'activité
- l'incertitude.

Pour ces deux auteurs la notion de liberté est fondamentale : on ne peut pas jouer sous la contrainte. Les activités proposées sont conformes à la plupart des critères donnés lors d'animations grand public qui est libre de participer ou pas. Par contre, on s'éloigne de ces critères lors des animations pour les établissements scolaires !!! On peut remplacer « jeu » par « activité ludique », « amusement » ou « divertissement » mais cela ne fait que déplacer le problème sans le résoudre.

Pour Michel Criton (président de la Fédération Française de Jeux Mathématiques), auteur de « les jeux mathématiques », c'est évidemment l'activité « résolution de problème » qui est prépondérante.
Il précise quelques sont les conditions pour qu'un problème soit considéré comme un jeu :
il doit être accessible au plus grand nombre, formulé dans un langage courant,
son énoncé doit surprendre, intriguer, poser un défi à celui qui le lit,
la résolution du problème doit pouvoir étonner, distraire celui qui l'entreprend.
Les jeux de l'atelier s'inspirent très largement de ces réflexions.

Qu'en pensent les utilisateurs ?
Les constatations suivantes s'appuient sur des réactions ou des remarques des utilisateurs et non sur une enquête rigoureuse. Les jeux numériques sont plutôt considérés comme mathématiques alors que les autres jeux (pavage du plan, remplissage de l'espace et surtout casse-tête) sont plutôt considérés comme des amusements.

1.4 Présentation de quatre jeux

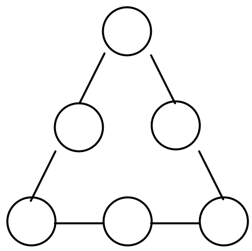
1.4.1 Jeu numérique

Voici trois jeux qui en réalité n'en font qu'un.

Rappel de la consigne :

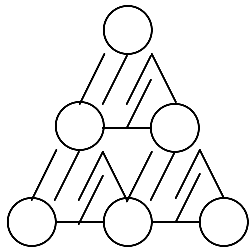
Triangle magique

Placer les nombres entiers de 1 à 6 sur les côtés du triangle de telle façon que la somme des nombres sur chacun des côtés soit la même.



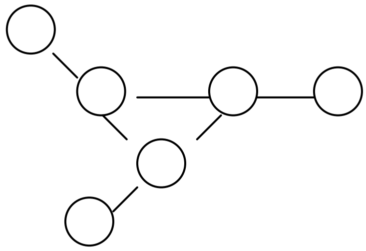
Magie dans trois triangles

Placer les nombres entiers de 1 à 6 de telle façon que la somme des nombres inscrits aux trois sommets de n'importe quel triangle hachuré soit la même.



Six nombres, trois alignements

Il s'agit de placer les nombres de 1 à 6 de sorte que les trois sommes de trois nombres sur chacun des alignements soient les mêmes.



Dans les trois cas six pions numérotés de 1 à 6 accompagnent la consigne.

Dans tous les cas on doit obtenir trois sommes égales en utilisant les nombres entiers de 1 à 6, trois d'entre eux étant utilisés deux fois. La somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 est égale à 21 qui est divisible par trois. La somme des trois nombres qui sont utilisés deux fois doit aussi être divisible par 3 pour que la somme totale le soit aussi.
Les nombres qui sont utilisés deux fois peuvent être 1, 2 et 3 (somme 6), 4, 5 et 6 (somme15), 1, 3 et 5 (somme 9), 2, 4 et 6 (somme 12). Par contre on arrive rapidement à une impossibilité avec 1,2 et 6 et avec 1, 5 et 6 (c'est une condition nécessaire et non suffisante).

Pour les élèves, il y a :
l'utilisation du calcul mental
la reconnaissance que les cases ne jouent pas toutes le même rôle
la nécessité de répartir les grands nombres et les petits nombres (on ne peut pas mettre 5 et 6 ou 1 et 2 côte à côte dans des cases de poids différents)
Quelles réactions des élèves ? Si c'est leur première activité de l'atelier avec des pions, il y a souvent des demandes d'explication de la consigne. Les élèves ne sont pas dans le schéma « j'apprends, j'applique ». Il n'y a aucune méthode particulière de résolution qui serait directement applicable et rencontrée au préalable en classe. Ils se rendent très vite compte qu'ils peuvent faire autant d'essais qu'ils veulent. On peut faire avec eux un travail d'analyse des essais et des erreurs que certains, peu nombreux, font naturellement.
Ces activités développent des capacités d'ordre méthodologique : élaborer une démarche, faire et gérer des essais, faire des hypothèses et éprouver leur validité.
Une solution peut-elle être trouvée par hasard ? Un calcul de probabilités simple donne une chance sur trente, ce qui n'est pas négligeable.

1.4.2 Pavage du plan

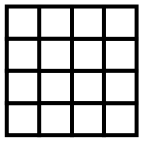


fig. 1

Rappel de la consigne :
Il s'agit de placer les quatre pions bleus et les quatre pions rouges dans les cases de telle façon qu'il n'y ait jamais deux pions de la même couleur sur une ligne horizontale, verticale ou oblique.
Quelques indications :
Pour le premier pion bleu il n'y a que trois cases possibles (fig.2).
Par diverses symétries, on en déduit les résultats pour les autres.

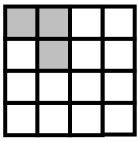


fig. 2

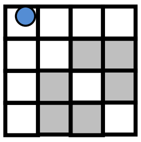


fig. 3

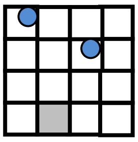


fig. 4

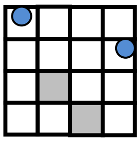


fig. 5

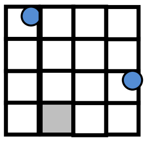


fig. 6

Si l'on place le pion bleu dans un coin, en haut à gauche par exemple, on obtient 6 cases pour placer le second pion (fig. 3). Le deuxième pion étant placé comme sur la fig. 4, il ne reste qu'une case pour 2 pions. Placé comme sur la fig. 5 il reste deux cases mais elles sont sur une même ligne oblique. Enfin placé comme dans la figure 6 il ne reste qu'une case pour deux pions. L'impossibilité pour les autres cases de la fig.3 se déduit par symétrie. On ne peut donc mettre aucun pion dans les quatre coins.

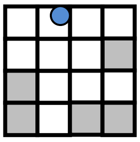


fig. 7

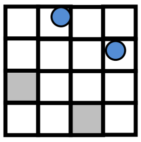


fig.8

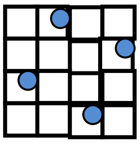


fig. 9

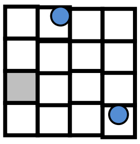


fig. 10

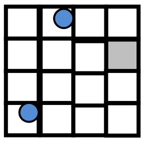
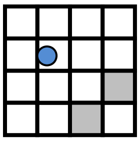
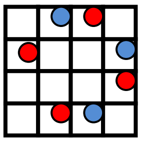


fig. 11

Si l'on place le pion bleu comme sur la fig. 7, on obtient 5 cases pour placer le second pion. Le deuxième pion étant placé comme sur la fig. 8, il ne reste que deux cases pour les deux derniers pions. Ces deux cases répondent à la question
Il ne reste qu'à examiner le cas de deux cases. Dans les deux cas il ne reste qu'une case pour deux pions (fig. 10 et fig. 11).



Il reste à examiner deux cas où l'on obtient rapidement une impossibilité (deux cases pour trois pions).
On obtient finalement la solution ci contre.



Ici la symétrie axiale est très présente. Au CE1, on doit « percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : …, axe de symétrie, … ». La déduction est aussi présente : cette case est occupée donc je ne peux pas utiliser telle et telle case …

Quelles aides pour les élèves ?
Les élèves commencent avec les deux couleurs en même temps, ce qui n'aide pas pour voir les cases qui conviennent. On peut leur suggérer de faire une couleur après l'autre.
Ils commencent souvent comme sur la fig. 3. Ils obtiennent des impossibilités mais ils ont du mal à remonter au pion de départ.
La recherche par tâtonnement, retour en arrière et essai-erreur est utilisée ici.

1.4.3 Remplissage de l'espace

Rappel de la consigne :

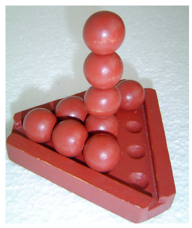
Le tas d'oranges
Il s'agit de reconstituer, avec les quatre éléments, le tas d'oranges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire

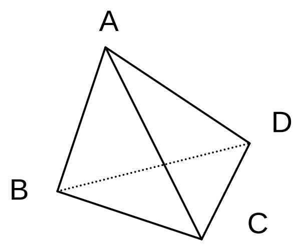
Tirer à boulets rouges
Il s'agit de reconstituer, avec les six éléments, le tas de boulets rouges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire

Le matériel se compose de deux barrettes de trois billes et deux barrettes de deux billes dans le premier cas, deux barrettes de quatre et quatre barrettes de trois dans le second.

Quelques indications :

Peut-on avoir la construction ci-contre ?
Dans les deux cas, la bille du sommet repose sur trois billes de l'étage en dessous et sur cet étage, il n'y a pas de bille à la verticale de la bille du sommet. Ce début de construction ne peut pas donner la solution.





Les barrettes de trois (ou de quatre) ne peuvent pas être sur des arêtes qui ont un sommet commun (la seconde barrette aurait une bille de moins). Elles sont situées sur des arêtes opposées : [AB] et [CD], [AD] et [BC], [AC] et [BD]. Dans ce dernier cas l'arête [BD] n'est pas visible sur les représentations données.

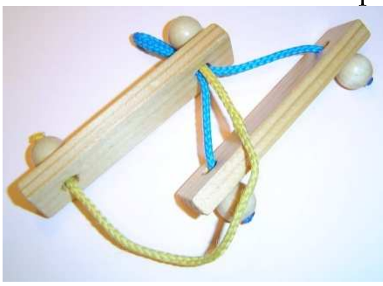
Quelle aide apporter aux élèves ?

On peut demander aux élèves d'observer ce qu'ils ont (les barrettes) et ce qu'ils veulent obtenir (les pyramides représentées dans les consignes). Dans le cas du « tas d'oranges », où sont situées les barrettes de trois sur la photo ? Une fois repérées sur la représentation, on peut leur faire placer approximativement sur la base. Enfin comment combler le vide entre les deux ?.
On peut faire la même chose avec les barrettes de quatre pour « tirer à boulets rouges ».
Nous insistons sur ce que l'on a (données de l'énoncé) et sur ce que l'on veut obtenir (question à résoudre).
D'une façon générale, nous constatons des difficultés en géométrie dans l'espace,. Il n'est pas rare de voir des élèves qui doivent reconstituer un cube faire un assemblage plat qui ressemble plus ou moins à un carré. Pourtant, dès le CE1 on doit « reconnaitre, décrire, nommer quelques solides droits : cube, pavé … »
Dans le primaire, la géométrie dans l'espace reçoit-elle le même traitement qu'en collège ou lycée où elle est souvent le parent pauvre des mathématiques ?

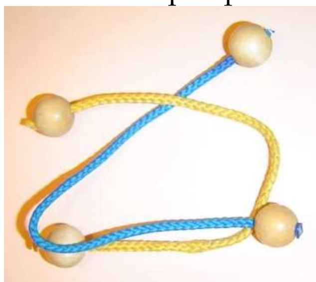
1.4.4 Casse-tête : « la séparation »

Rappel da la consigne :
il s'agit d'obtenir deux éléments séparés formés chacun d'une planchette et de sa corde comme l'indiquent les vues ci-contre. sans bien sûr couper la ficelle.

Pour séparer il est nécessaire de sortir de la boucle formée par la planchette et la ficelle jaune. Comment ?
Il faut d'abord trouver une porte de sortie qui est un trou de la planchette dans lequel passe la ficelle.



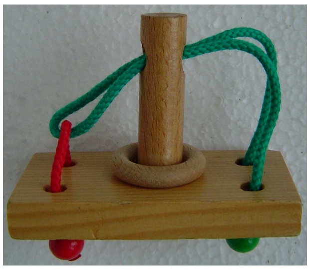
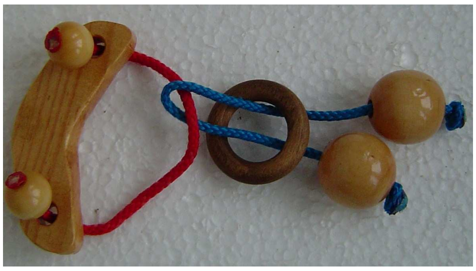
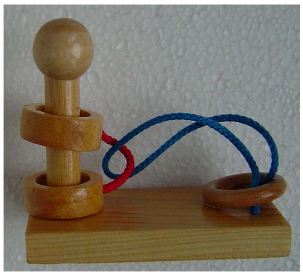
Après avoir passé la ficelle dans le trou, (figure de gauche) on se retrouve dans la situation de la figure de droite où l'on fait passer la ficelle bleue par dessus l'extrémité de la ficelle jaune c'est-à-dire la bille de bois.

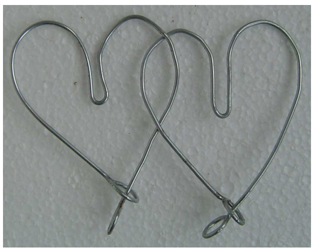
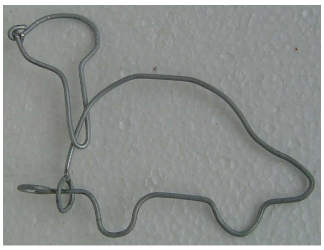


Très souvent, on cherche d'abord à contourner la planchette, c'est-à-dire l'obstacle, alors qu'il faut passer à travers.

D'une façon générale, les élèves sont amenés à réinvestir un nouveau savoir ou savoir-faire dans d'autres problèmes.

On peut faire la même chose avec des casse-tête, en particulier en trouvant la solution des six ci-dessous qui sont proposés en même temps que le casse-tête précédent. Ils sont basés sur le même principe : ce que l'on croit fermé est en réalité ouvert. On y trouve une boucle de laquelle il faut sortir avec une sortie qui est un trou (par exemple l'un des deux trous de la planchette dans les deux premiers cas).


1.5 Conclusion

Les jeux de cet atelier ne sont pas destinés à introduire de nouvelles notions du cours. Les résultats mathématiques utilisés sont peu nombreux même si certaines activités sont un excellent entraînement au calcul mental pour les écoliers. Certaines énigmes proposées, sans l'habillage de l'atelier (en particulier les pions), peuvent souvent figurer dans la partie exercice d'un manuel scolaire. Cette originalité a pour but de rendre les mathématiques plus séduisantes.

Cet atelier a ses limites : comme il n'y a pas d'écrit, il est difficile d'analyser des productions d'élèves. De plus lors des animations (qui durent de 1 h à 1 h 30), il n'est pas possible de faire le point sur les méthodes utilisées comme par exemple la recherche de la solution par essais-erreurs. Mais on peut, pour certains jeux, en observant les actions des élèves, voir leur démarche. C'est surtout un outil très intéressant qui n'est, pour le moment, pas assez exploité.

Les jeux et énigmes donnent leur chance à tous et ce n'est pas forcément le meilleur en classe qui va trouver le plus rapidement. Ils évitent le blocage de l'écrit pour certains. Les élèves peuvent faire les activités par eux-mêmes, sans risque, en dehors de toute sanction notée.

La résolution d'énigmes permet de changer de cadre, de réagir devant l'inconnu. Rendre le tâtonnement systématique, c'est élaborer une méthode. Le jeu change le statut de l'erreur avec des recherches par essai-erreur. Les élèves proposent parfois des solutions, des méthodes auxquelles on n'avait pas pensé.
Les jeux font plus appel à la logique et au raisonnement qu'a des résultats du cours. Ils apportent un plus aux écoliers pour qui la recherche d'une stratégie est une difficulté, la plupart d'entre eux n'étant pas confrontée à ce genre de situation.

Ils peuvent permettre de montrer que l'apprentissage peut se faire autrement que sous la contrainte, qu'on peut prendre du plaisir à chercher et bien sûr un plaisir encore plus grand à trouver.

Et les enseignants qui accompagnent les élèves ? Nous voyons le pire comme le meilleur. Le pire : des enseignants qui ne s'intéressent pas aux énigmes proposées ou qui valident des réponses fausses. Le meilleur : des enseignants qui veulent réinvestir l'atelier dans leur classe et leur école à qui l'on envoie les fichiers des jeux. Heureusement ce sont les plus nombreux. L'exemple de Caussade est très intéressant : un conseiller pédagogique nous a contactés pour présenter l'atelier à plus de vingt collègues. L'atelier a été emprunté pendant deux mois et a circulé dans les écoles de la circonscription qui se sont réparti le travail pour copier les jeux. C'est cette forme d'utilisation qui est la plus efficace car il permet un travail plus en profondeur.

Dans l'atelier du colloque, après un exposé basé sur le texte ci-dessus, les participants ont pu découvrir les autres jeux proposés. Pour résoudre les énigmes proposées, leur tendance a été de chercher avec méthode sans forcement passer par une résolution théorique à l'aide des mathématiques, d'un papier et d'un crayon, c'est la même démarche que les élèves. La solution trouvée ils réinvestissaient leurs découvertes dans les jeux de même type. Nous avons essayé de leur faire expliciter leur démarche mais comme pour les élèves des classes visiteuses, les recherches ont été passionnantes et une fois le but atteint, une seule envie : relever un nouveau défi.

Ils ont copié sur leur clé USB les dossiers correspondant à ces jeux. C'est un des intérêts de cet atelier qui n'avait pas été mentionné plus haut. Dans des stages de formation, des visites lors d'animations et même des manifestations grand public ce sont plusieurs centaines d'enseignants (de l'Académie et hors Académie au salon de la culture et des jeux mathématiques) qui ont demandé et reçu les fichiers. Ils peuvent être demandés à l'adresse mèl donnée au début. Les trois quarts environ sont instituteurs ou professeurs des écoles. C'est sûrement une lacune mais nous ne leur demandons pas de compte rendu de leur utilisation.

2 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ACL - Les Editions du Kangourou Les malices du Kangourou écoles

APMEP Brochures Jeux n ($n \in N$ et $1 \leq n \leq 8$)

APMEP Lorraine Objets mathématiques (tome 1 et 2)

Gilles Brougère Jeu et éducation L'Hamattan

Gilles Brougère Jouer/apprendre Economica Anthropos

Roger Caillois Les jeux et les hommes Gallimard

Michel Criton Les jeux mathématiques Que sais-je

Mathematice (dossier sur les jeux)

Site : www. Apmep.tlse.free.fr/spip/spip/php?rubrique2

Tangente Jeux mathématiques HS n° 20