

## « Le napperon »

# Un problème pour travailler sur la symétrie axiale

Marie-Lise Peltier

*Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon, mars 1997. Reprise également d'un article publié dans la revue grand N( n° 68 en 2000-2001).*

*Cet article relate une situation de formation initiale ou continue de professeurs d'école. Il présente une situation de formation de type homologie transposition en PE2 ayant pour but d'initialiser un cours sur la symétrie axiale et de conduire les stagiaires à réfléchir sur la notion de problème en géométrie à l'école élémentaire.*

### Introduction

Les instructions officielles de l'école primaire mettent l'accent sur le rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Mais si dans le domaine numérique les professeurs stagiaires se sentent généralement à même de construire ou de choisir des problèmes permettant aux élèves de développer une réelle activité intellectuelle et de construire certaines connaissances, il leur est souvent plus difficile d'envisager en géométrie une activité qui puisse être un "problème" pour les élèves. Pour nombreux d'entre eux, les problèmes en géométrie sont liés à la notion de démonstration, et relèvent donc du collège. L'enseignement de la géométrie à l'école leur paraît souvent proche de la "leçon de chose", c'est à dire une succession de séances où il s'agit d'introduire du vocabulaire, de donner quelques définitions, de faire "manipuler" les élèves.

La situation de formation présentée ici fait intervenir la notion de symétrie axiale comme réponse à un problème et permet de mettre en avant :

- le rôle de l'anticipation : il est nécessaire de faire des hypothèses, d'anticiper l'action, avant de l'exécuter ;
- le rôle de la manipulation : ici la manipulation est support pour l'anticipation.

Elle a donc pour objectifs de permettre aux stagiaires PE2 ou aux professeurs d'école en formation continue de mener une réflexion sur les problèmes tout en revisitant la notion de symétrie axiale dans le plan et quelques unes de ses propriétés. Dans l'analyse didactique de la séance, la réflexion porte aussi sur le rôle de l'erreur dans la situation, sur la notion de théorème en acte, sur la validation.

### Description de l'activité

Les stagiaires doivent reproduire un "napperon" en papier qui est affiché au tableau. Il est précisé que ce napperon doit être réalisé en pliant une feuille de papier et en découpant tout ce que l'on souhaite, puis de déplier et de comparer avec le modèle. Une contrainte est imposée : les stagiaires doivent effectuer tous les pliages souhaités avant de découper puis tous les découpages souhaités avant de déplier le napperon.

#### 1. Analyse préalable

##### 1.1. Les variables de la situation

Le choix des découpes du napperon est très important. En fonction de ce choix, la réflexion pourra être centrée :

- sur les positions relatives des différentes découpes et sur des questions d'orientation
- sur la forme des découpes : celles-ci peuvent être choisies de telle sorte que l'exécutant utilise implicitement des "théorèmes en acte"<sup>1</sup> relatifs à l'existence d'axe(s) de symétrie dans certaines figures pour obtenir le résultat souhaité. Par exemple pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, on coupe perpendiculairement au pli, ce qui revient à appliquer la propriété suivante "dans un triangle isocèle l'axe de symétrie est également hauteur".

Le nombre d'axes de symétrie du napperon est également une variable à étudier (Annexe1).

- Un seul axe rend la tâche trop aisée pour être proposée en formation (exemple 1)
- Le choix de deux axes est intéressant dans la mesure où le degré de complexité est raisonnable et le temps est assez facile à gérer (exemples 2, 3)
- Le cas de 4 axes, également intéressant, peut être choisi pour travailler sur les axes de symétrie des polygones usuels. (exemples 4, 5, 6, 7).
- Celui de 6 axes (exemple 8) nécessite un pliage en trois qui permet de proposer la situation en tant que prolongement aux stagiaires les plus rapides.

Le fait de laisser apparents ou non les plis du modèle, d'introduire des plis parasites, ou de les supprimer complètement peut avoir une incidence sur les stratégies des stagiaires dans la mesure où ils sont des indices pertinents ou non à prendre en compte.

Une photocopie du modèle pour chaque stagiaire est souhaitable de manière à permettre une analyse individuelle précise, mais cette reproduction du modèle doit être de dimension différente de celle des feuilles qui seront distribuées pour

---

<sup>1</sup> Notion empruntée à G.VERGNAUD

être découpées afin d'éviter le recours au décalquage des découpes sur le modèle.

### **1.2. Les critères de conformité au modèle**

Les réalisations seront considérées comme conformes au modèle lorsque les éléments suivants auront été respectés :

- le nombre de pliage
- le nombre de découpes
- la forme<sup>2</sup> des découpes
- les positions relatives des différentes découpes
- l'orientation des découpes.

### **1.3. Les procédures envisageables**

- Identification du nombre d'axes de symétrie et réalisation des pliages associés, repérage des éléments à découper,
- Pliage en deux quel que soit le nombre d'axes de symétrie et reproduction des découpes sur ce pliage en deux,
- Pliage en deux ou en quatre puis reproduction par découpage sur le papier ainsi plié de toutes les découpes du modèle complet,
- Pliage en deux ou en quatre , découpages de certaines parties, dépliage et rectification sur la feuille dépliée.

### **1.4. La validation**

La validation se fait par confrontation visuelle au modèle. Bien évidemment les réalisations obtenues ne sont pas superposables au modèle. Ce qui doit être respecté, comme il a été indiqué ci-dessus, ce sont les formes géométriques des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

Il est nécessaire de proposer des modèles tels que les stagiaires puissent décider tout seuls s'ils ont ou non réussi, il est donc important que les erreurs éventuelles soient visibles et pour cela il importe de choisir des napperons avec des découpes de formes différentes et en nombre différent sur chacun des axes et sur deux côtés consécutifs du carré.

### **1.5. La prise en compte des essais et des erreurs**

Les essais erronés sont intéressants à conserver. Ils ont plusieurs fonctions.

- La première, tout à fait fondamentale, est de permettre à son auteur de mener une réflexion et une analyse fine des effets d'un découpage sur un papier plié en 2, en 4, ou en 6. L'erreur peut alors être un point de départ pour affiner la ré-

---

<sup>2</sup> La notion de forme d'une découpe est délicate. Pour les stagiaires, c'est la forme au sens euclidien qui devra être conservée, ainsi par exemple les quadrilatères et les triangles particuliers devront être reproduits comme tels, les alignements devront être respectés, c'est la raison pour laquelle il est souhaitable que les stagiaires disposent d'un modèle individuel pour pouvoir l'analyser..

flexion : en analysant l'effet de telle découpe sur le papier déplié, le stagiaire fera des hypothèses sur les modifications à effectuer pour obtenir le résultat souhaité<sup>3</sup>. L'erreur acquiert ainsi un statut positif, voisin du statut qu'elle a dans la recherche.

-Une seconde fonction provient du fait que chaque réalisation, ayant été obtenue, par pliage admettra au moins un axe de symétrie. Il sera donc possible dans une seconde partie de travail de mettre en évidence les axes de symétrie des différents napperons, de faire des constats sur le motif minimum à conserver dans chaque cas pour obtenir le napperon complet en appliquant à ce motif les symétries axiales mises en évidence.

### 1.6. La synthèse et l'institutionnalisation

La synthèse portera à la fois sur les aspects mathématiques et didactiques :

- la notion d'axe(s) de symétrie d'une figure plane ;
- les axes de symétrie de figures usuelles (triangles, isocèles, losange, rectangle, orthogone, carré, demi cercle, cercle etc. ;
- La notion de centre de symétrie dans le cas d'un nombre pair d'axes de symétrie ;

ainsi que sur les notions didactiques de variables, dévolution, théorème en actes, validation, institutionnalisation.

## 2. Déroulement de la séance

Sur le plan matériel, il est important de prévoir :

- deux modèles grand format du napperon pour le tableau afin de pouvoir plier et manipuler l'un d'eux lors des mises en commun,
- des modèles individuels comme il a été indiqué au paragraphe 1.1,
- de nombreuses feuilles de papier aux dimensions souhaitées pour la réalisation des napperons (dimensions différentes de celles des modèles individuels),
- un ou plusieurs napperons supplémentaires plus complexes pour gérer le temps (napperons présentant davantage de découpes, éventuellement plus d'axes de symétrie pour les stagiaires rapides),
- des paires de ciseaux pour chaque stagiaire.

### 2.1. Phase de recherche

Un "napperon" est affiché au tableau (cf. annexe 1).

Consigne :

*Vous devez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela vous devez effectuer tous les pliages que vous jugez nécessaires, puis, sans déplier, vous devez*

---

<sup>3</sup> Ainsi par exemple, si un stagiaire effectue une découpe en forme de demi cercle sur un bord du papier plié en quatre au lieu de l'effectuer sur un pli, il constate en ouvrant qu'il n'obtient pas les cercles souhaités mais des demi cercles sur les bords du napperon. Lors de l'essai suivant le stagiaire prend en compte la position du cercle à découper par rapport au pli effectué donc à l'axe de symétrie concerné.

*effectuer tous les découpages que vous jugez nécessaires, enfin vous dépliez et comparerez votre réalisation avec le modèle. S'il y a conformité, vous avez "gagné", sinon, vous conservez votre réalisation, sans la froisser, sans la jeter, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier.*

Les critères de réussite sont précisés :

*Un napperon sera considéré comme "conforme" au modèle si les formes géométriques des découpes sont respectées ainsi que leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.*

Après un temps de recherche, on constate que les stratégies sont nombreuses et variées :

- certains identifient rapidement le nombre d'axes de symétrie et font des pliages en conséquence
- d'autres plient seulement en deux et essaient de reproduire les découpes sur ce pliage en deux
- d'autres sont encore plus déroutés et effectuent un premier pliage en deux ou quatre, découpent certaines parties ouvrent et oubliant la contrainte imposée par la consigne, complètent les découpages sur la feuille dépliée.

Dans tous les cas, on peut noter une attention soutenue.

Lors du dépliage, les stagiaires peuvent être très surpris des résultats obtenus car leur napperon est souvent extrêmement différent du modèle. Les erreurs peuvent porter sur la forme des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

La validation se fait individuellement par confrontation au modèle en s'appuyant sur les critères de réussite définis précédemment.

La quasi totalité des stagiaires n'a aucune difficulté à effectuer correctement cette comparaison individuelle avec le modèle. Il se peut cependant qu'un ou deux stagiaires croient, à tort, avoir réussi. Un questionnement dirigé du formateur permet généralement à la personne concernée de prendre conscience de ce qui ne convient pas. Dans certains cas, il est nécessaire que le formateur attire l'attention d'un stagiaire sur certaines "erreurs" de sa réalisation en particulier pour les questions d'orientation ou les questions de positions relatives.

Généralement au premier essai peu de stagiaires réussissent la tâche. Après constat de la non conformité au modèle, la majorité des stagiaires reprennent le premier essai, le replient, l'ouvrent plusieurs fois, avant d'effectuer pliages et découpes sur la nouvelle feuille. Les erreurs sont donc ici analysées pour être dépassées.

Le nombre d'essais avant l'obtention d'une réalisation conforme au modèle est très variable suivant les stagiaires. Quelques uns réussissent du premier coup, dans ce cas le formateur leur donne individuellement un autre napperon plus complexe à reproduire pour permettre aux autres stagiaires de terminer l'activité. Pour d'autres, plusieurs essais sont nécessaires pour que le résultat soit jugé satisfaisant par son auteur.

### 2.2. Mise en commun des productions et des stratégies

Lorsque la totalité des stagiaires a obtenu un résultat satisfaisant, le professeur propose une mise en commun des différentes stratégies utilisées, qu'elles aient abouti ou non, et des productions correspondantes (le professeur prend soin de choisir des productions erronées qui relèvent de types différents<sup>4</sup>).

Lors de cette mise en commun, les stagiaires proposent généralement deux types de stratégies :

- Repérer les axes de symétries, déterminer un domaine fondamental dans lequel se trouve le motif minimum, déterminer le pliage à effectuer pour obtenir ce domaine fondamental, positionner le papier plié de manière à pouvoir exécuter les découpes en fonction du motif identifié dans le domaine fondamental. Cette stratégie est efficace et experte, elle est proposée par les stagiaires avec des formulations diverses.

- Identifier les découpes qui se répètent, plier en fonction du nombre de répétition, découper des moitiés ou des quarts de motifs à partir de l'analyse des répétitions. Cette stratégie peut être efficace, mais dans de nombreux cas, les stagiaires ont tellement fait tourner le papier plié que les découpes qui devraient se trouver au centre se trouvent sur les bords et vice versa.

Les productions correspondantes sont étudiées collectivement. Pour celles qui ne sont pas conformes au modèle les erreurs sont repérées et analysées (nombre de découpes, place des découpes, position relatives, forme, orientation).

### 2.3. Synthèse

#### Point de vue mathématique

Notion d'axe de symétrie d'une figure plane.

Eléments de symétrie des figures usuelles (triangle isocèle, losange, rectangle, carré, demi cercle, cercle, etc.)

Lien entre symétrie axiale et symétrie centrale : lorsqu'une figure admet deux axes de symétrie et deux seulement, ces axes sont perpendiculaires et leur point commun est un centre de symétrie de la figure.

---

<sup>4</sup> Le professeur choisit des napperons qui ont été abandonnés parce que considérés comme non conformes par leurs auteurs, éventuellement des napperons que leurs auteurs considéraient à tort comme conformes. Il est souhaitable de présenter au débat des napperons ne présentant pas le nombre d'axes de symétrie requis, des napperons ne présentant pas le nombre correct de découpes, des napperons présentant des inversions dans les positions relatives des découpes, des orientations erronées, de manière à ce que l'analyse menée sur ces réalisations conduise à mettre en évidence les différents critères de conformité au modèle. On trouvera en annexe 2 des exemples de napperons réalisés par des stagiaires ayant été affichés pour la mise en commun lors de la réalisation du modèle n°3.

### **Point de vue didactique**

Le rôle de l'anticipation : l'anticipation est nécessaire pour répondre à la consigne et effectuer le découpage demandé.

Le rôle de l'erreur : dans cette situation, le rôle positif de l'erreur est mis en évidence : en effet, c'est bien souvent en analysant une production erronée qu'il est possible de prévoir ce qu'il faudrait faire pour obtenir tel ou tel résultat.

La validation : elle est ici en partie à la charge du stagiaire

La notion de théorème en acte. Donnons deux exemples.

Pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, le stagiaire découpe perpendiculairement au pli. Il utilise ici en acte une propriété relative au triangle isocèle : " l'axe de symétrie d'un triangle isocèle est également hauteur du triangle "

Pour obtenir un carré à partir d'un pliage en quatre, le stagiaire découpe en formant un angle de  $45^\circ$ , il utilise ici implicitement la propriété relative au carré : " les diagonales du carré sont axes de symétrie et bissectrices des angles "

Le rôle des manipulations en géométrie. Il est clair que pour la majorité des stagiaires que les manipulations en géométrie ont pour rôle de permettre aux élèves de se constituer un lot d'expériences. Il est nécessaire de rappeler cependant que ces expériences ne pourront être mobilisées que si elles ont été décrites au moment de l'action et surtout évoquées après avoir été menées, de manière différée et sans retour à la manipulation. Mais les manipulations ont d'autres fonctions qu'il est nécessaire de mettre en avant : elles peuvent servir de support à l'anticipation, ce qui est le cas dans cette situation du napperon, elles peuvent également permettre une forme de validation pragmatique à l'école élémentaire.

La gestion du temps : le temps pour réaliser correctement la tâche est très variable. Il est donc nécessaire de prévoir des prolongements, ici d'autres napperons, pour les plus rapides afin de gérer convenablement le temps de la séance et l'hétérogénéité du groupe.

### **Transfert à l'école élémentaire**

Une adaptation de cette situation est envisagée pour des élèves de classes de cycle 2 et 3.

L'article publié dans grand N n° 68 (2000-2001) est distribué.

Le rôle des variables didactiques est alors mis en avant.

L'activité des élèves au cours de cette situation est étudiée.

Une première phase de manipulation libre permettant l'entrée dans l'activité est nécessaire pour pouvoir dévoluer la tâche de reproduction aux élèves. Dans cette phase d'accumulation d'expériences, la main travaille, mais l'esprit est peu sollicité. Au moment de l'observation de leurs réalisations, certains élèves peuvent

développer une activité de pensée en cherchant à justifier les constats qu'ils peuvent faire, mais cette activité n'est pas à proprement parlée requise pour réaliser la tâche demandée.

Dans la deuxième phase, lorsqu'il s'agit de reproduire le modèle, l'esprit est mobilisé en même temps que la main. L'enfant développe une réelle activité cognitive, il anticipe son action, il la prévoit, la manipulation sert à réaliser matériellement cette anticipation et à la valider. C'est dans cette deuxième phase que l'on peut parler d'activité mathématique.

Pour prendre tout son sens dans une progression sur la symétrie axiale, la situation présentée ici, devra être adaptée à la classe dans laquelle elle sera proposée et devra bien sûr être suivie de nombreux exercices d'entraînement et de nouveaux problèmes avant de donner lieu à des exercices d'évaluation qu'il sera d'ailleurs judicieux de différer dans le temps. Ce n'est pas en effet après une seule rencontre avec une notion qu'il est possible de savoir si les élèves se sont approprié certaines propriétés de cette notion. Il faudra de même attendre que d'autres notions aient été étudiées, pour évaluer la capacité des élèves à reconnaître par eux-mêmes des situations relevant de la symétrie axiale et à les traiter correctement.

### Conclusion

Pour conclure cette séance, le formateur revient sur la notion de problème et sur l'activité mathématiques. Les points suivants sont mis en avant.

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes en développant un raisonnement. Pour que cette activité cognitive puisse avoir lieu le problème doit vérifier certaines caractéristiques<sup>5</sup> notamment les suivantes :

- **Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé.** Ici, une reproduction conforme au modèle du napperon nécessite la reconnaissance de l'existence d'un ou plusieurs axes de symétrie, et l'utilisation de ces axes comme droite de pliage.

- **Le problème doit être "consistant", c'est à dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement.** Dans l'activité proposée, c'est le choix du modèle pour le niveau de classe déterminé qui assurera la consistance.

- **L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer.** La phase initiale de manipulation libre permet aux élèves de s'engager dans la tâche de reproduction, mais les critères de conformité au modèle le conduisent à éprouver ses connaissances et éventuellement à les faire évoluer.

- **La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation).** Dans la situation du napperon, cette auto validation est assurée pour un grand nombre d'élèves. Mais pour certains autres élèves, le professeur

---

<sup>5</sup> Ces caractéristiques ont été mises en évidence par R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987).



devra jouer son rôle de médiateur en questionnant l'élève de manière à le guider vers les bonnes questions.

- **Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe.** Cet aspect me paraît très important à souligner. En effet, s'il est nécessaire de penser l'enseignement en prenant en compte l'hétérogénéité des élèves et en prévoyant de différencier certaines tâches, une différenciation a priori au moment où les élèves vont avoir à travailler sur une notion nouvelle (ou reprise d'une année antérieure), à construire certaines de ses propriétés ou à se les approprier, il serait très regrettable et dommageable d'exclure certains élèves des situations censées permettre de construire du sens et d'hypothéquer ainsi toutes possibilités ultérieures de faire appel à cette situation pour mobiliser la mémoire de tous les élèves. Par ailleurs, il me semble important que chaque élève ait à chaque fois "sa chance" sur l'étude d'une nouvelle notion et n'ait pas à subir son éventuelle image d'élève faible ou en difficulté<sup>6</sup> avant même d'avoir été confronté au problème posé.

### **Séance suivante**

Cette séance est suivie d'une séance consacrée à des rappels mathématiques relatifs à la symétrie axiale dont les grandes lignes sont les suivantes.

Différents aspects de la symétrie axiale sont présentés :

- La symétrie axiale est une transformation ponctuelle qui transforme une figure en une autre figure, c'est une isométrie négative involutive (aspect dynamique)
- La symétrie axiale est une transformation ponctuelle ayant de nombreux invariants (point de vue statique) ce qui pédagogiquement correspond à la recherche des axes de symétrie des figures usuelles.

Sur le plan didactique, le formateur met en évidence le rôle de l'analyse mathématique pour concevoir une progression sur la symétrie axiale à l'école élémentaire, pour envisager les situations et les matériels favorisant les changements de points de vue statique et dynamique, le passage du global au local, etc.

La séquence de formation sur le thème de la symétrie se termine par l'étude de quelques pages de manuels. Cette étude est focalisée sur un point précis. Par exemple l'étude de l'introduction de la notion dans différents manuels à un niveau donné, ou bien l'analyse de la progression sur le cycle 3 dans les manuels d'une même collection, ou encore l'analyse des résumés ou aide mémoire pour repérer ce qui est institutionnalisé dans un ou plusieurs manuels, etc.

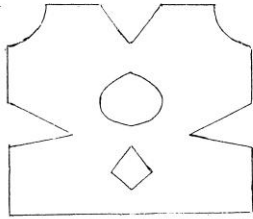
---

<sup>6</sup> "L'effet Pygmalion" a été mis en évidence par plusieurs chercheurs, notamment ROSENTHAL et JACOBSON (1975). Les prédictions négatives des enseignants sur certains de leurs élèves se vérifieraient d'autant plus qu'elles seraient "attendues" et par certains aspects construites par les enseignants eux-mêmes. On pourrait dire que certains enfants se conformeraient à l'image que l'enseignant leur renvoie.

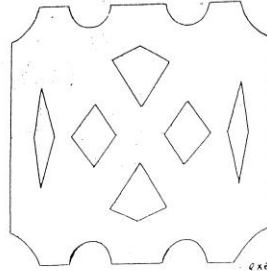
## Espace et géométrie

Dans certains cas, ce travail sur la symétrie axiale peut être repris dans le cadre d'un module optionnel " arts et mathématiques " consacré à l'étude des dessins à motifs répétitifs rosaces, frises, pavages dans les arts graphiques, plastiques ou dans l'architecture.

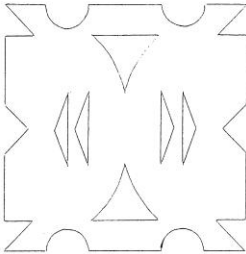
Annexe 1



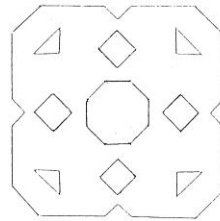
exemple 1



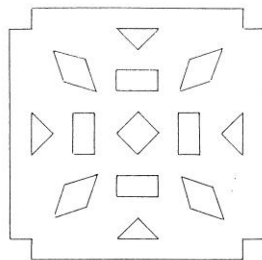
exemple 2



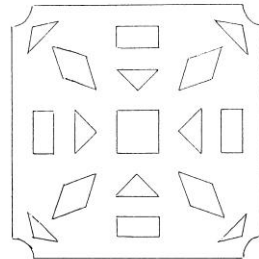
exemple 3



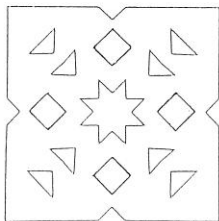
exemple 4



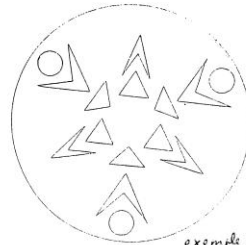
exemple 5



exemple 6



exemple 7



exemple 8

Annexe 2

