CORRIGÉS

AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

L'échelle d'une carte est le rapport entre la mesure d'une distance séparant deux points représentés sur la carte et la mesure de la distance entre ces mêmes points sur le terrain ou dans la réalité, toutefois pour établir leur rapport ces deux distances doivent être exprimées dans la même unité de longueur, des conversions sont donc souvent nécessaires.

Ici on nous indique que 10 cm sur la carte représentent une longueur de 25 km dans la réalité, pour exprimer l'échelle de cette carte on peut donc convertir 25 km en cm.

1 km = 1000 m donc 25 km = 25 000 m
1 m = 100 cm donc 25 000 m = 2 500 000 cm

On peut écrire que l'échelle est égale à 10 / 2 500 000 $^{\text{ème}}$.

Mais on convient généralement d'exprimer les échelles sous la forme d'un rapport dont le numérateur est égal à 1, en simplifiant le rapport précédent par dix on obtient une réponse plus conventionnelle : l'échelle est égale à 1 / 250 000 $^{\text{ème}}$.

Autre méthode :
Si 10 cm sur la carte représentent 25 km sur le terrain, 1 mètre représente dix fois plus, soit 250 kilomètres. 250 km correspondent à 250 000 mètres. L'échelle est donc égale au rapport $\frac{1}{250000}$.

EXERCICE 2

<u>Remarque :</u>
Pour justifier qu'une affirmation est vraie, il faut prouver qu'elle est vraie dans tous les cas possibles, ce qui nécessite soit d'étudier la liste exhaustive de tous les cas possibles, soit d'étudier la question dans un cas général ; pour justifier qu'une affirmation est fausse il suffit d'exhiber un cas particulier dans lequel elle ne s'applique pas, un tel cas est alors appelé un contre-exemple, mais on peut aussi étudier le cas général et montrer que l'affirmation ne s'y applique pas.

Examinons chacune des affirmations proposées :

<u>**Affirmation 1**</u> :
« Le produit de deux diviseurs d'un nombre entier est un diviseur de ce nombre ».

Voici un contre-exemple direct construit à partir des diviseurs de 6 :
L'ensemble des diviseurs de 6 est l'ensemble formé des nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 6
Si l'on multiplie 1 par 2, par 3, ou par 6, on retrouve le même nombre.
Si on multiplie 2 par 3, on trouve 6 qui est bien un des diviseurs, mais si on multiple 2 par 6 on trouve 12 qui n'est pas un diviseur de 6, de même si on multiplie 3 par 6 on trouve 18 qui n'est pas non plus un diviseur de 6, en multipliant 6 par 6 on trouve 36 qui n'est pas non plus un diviseur de 6, l'un de ces trois derniers exemples suffit pour prouver que cette affirmation est fausse.

<u>Autre méthode :</u>
On peut être tenté de faire une démonstration générale : Considérons un entier n supérieur à 1, n est toujours un diviseur de lui-même, il est même le plus grand de ses diviseurs.
En multipliant n par n on obtient n^2 qui est un entier supérieur à n et qui n'est donc jamais un diviseur de n. Cela prouve aussi que l'affirmation est fausse.

<u>**Affirmation 2 :**</u>
« La médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire ».

<u>Remarque :</u>
Ce résultat est énoncé de façon incorrecte car l'énoncé laisse penser qu'un triangle ne possède qu'une seule médiane, or il en possède trois. Toutefois chacune de ses trois médianes possède la propriété de le partager en deux triangles de même aire.

Cette affirmation est vraie.
Vu la longueur du sujet il est probable que les examinateurs se seront contentés d'une réponse du type suivant :
«La médiane d'un triangle le partage bien en deux triangles de même aire car l'aire d'un triangle se calcule à l'aide de la formule : Aire = (base × hauteur) : 2 ; et les deux triangles que fait apparaître la médiane ont même base et même hauteur. »
enrichie d'une figure qui l'illustre, comme celle proposée ci-après.

Toutefois, pour prouver sa validité, il faut la démontrer de façon rigoureuse dans le cas général. Nous vous proposons ci-dessous une démonstration possible :

Si on considère un triangle ABC, une de ses médianes est une droite passant par un de ses sommets et par le milieu du côté opposé à ce sommet, elle partage donc toujours le triangle initial en deux nouveaux triangles ayant la médiane comme côté commun.
Si nous choisissons la médiane passant par A et par le milieu I du côté [BC], elle découpe le triangle ABC en deux triangles ABI et ACI, il faut prouver qu'ils ont la même aire.
L'aire d'un triangle peut s'obtenir en faisant en utilisant la formule :

$$\text{Aire triangle} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$$

Remarque :
Pour utiliser correctement cette formule, il faut savoir que n'importe quel côté d'un triangle peut être choisi comme « base » et qu'alors, la hauteur qui doit lui être associée est celle qui passe par le sommet opposé au côté choisi et qui est perpendiculaire à ce côté.

Si on exprime l'aire de ABI en choisissant comme « base » le côté [BI], si on nomme H le pied de la hauteur issue de A nous obtenons :

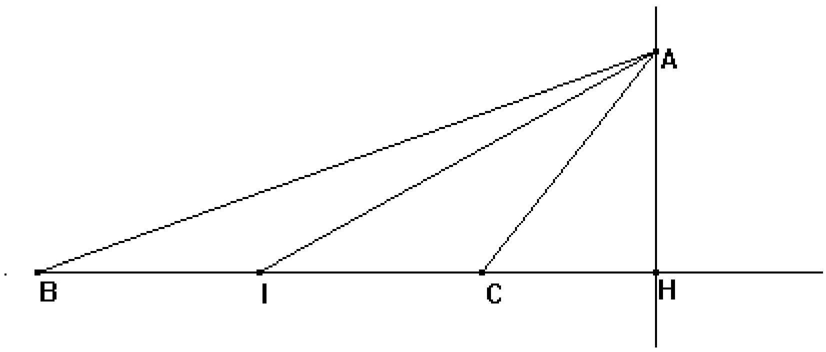
$$\text{Aire ABI} = \frac{BI.AH}{2}$$

Si on exprime l'aire de ACI en choisissant comme « base » le côté [CI], la hauteur issue du sommet A est la même que pour le triangle ABI car les points B, C et I sont alignés sur (BC) et il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à (BC) passant par le point A, donc la hauteur correspondant au côté [CI] est aussi (AH). Nous obtenons alors :

$$\text{Aire ACI} = \frac{CI.AH}{2}$$

Comme I est le milieu de [BC], on a BI = CI ; de cette égalité de longueur on déduit l'égalité des aires de ABI et ACI. La médiane (AI) partage donc bien le triangle ABC en deux triangles de même aire.

Remarque :
Le dessin ci-dessous peut servir d'appoint visuel pour suivre la démonstration précédente qui conserve un caractère général car applicable à n'importe quel triangle.



<u>Affirmation 3 :</u>
« $\frac{1}{3}$ est solution de l'équation $x^3 + x^2 + x = 0,48$ ».

Pour qu'un nombre soit solution d'une équation il faut qu'en remplaçant l'inconnue par ce nombre l'équation se transforme en une égalité vraie. Pour savoir si cette affirmation est vraie, il suffit donc de remplacer x par $\frac{1}{3}$ dans le premier membre de l'équation et regarder si la fraction obtenue au terme des calculs est ou non égale à 0,48 :

$$x^3 + x^2 + x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{9}{27} = \frac{13}{27}$$

Il s'agit donc de savoir si $\frac{13}{27}$ est égal à 0,48.

Pour cela deux méthodes s'offrent à nous :

- Soit donner une écriture décimale de la fraction et la comparer à 0,48 :

Une machine donne 13/27 = 0,481481…
La valeur 0,48 est donc un arrondi de cette fraction au centième près, mais n'en est pas la valeur exacte. Il faut donc conclure que l'égalité est fausse et que l'affirmation 3 est elle aussi fausse.

- Soit transformer 0,48 en fraction ce qui est toujours possible avec un décimal et comparer cette fraction avec 13/27 :

0 ,48 = $\frac{48}{100}$ pour savoir si $\frac{13}{27} = \frac{48}{100}$, il suffit de comparer les produits en croix :
$13 \times 100 = 1300$ et $27 \times 48 = 1296$; on constate que les produits en croix ne sont pas égaux, les fractions ne sont donc pas égales et l'affirmation 3 est fausse.

<u>Remarques :</u>

1. *Cette dernière méthode présente l'avantage de ne pas faire appel à des valeurs approchées.*
2. *On pouvait aussi démontrer que la fraction irréductible $\frac{13}{27}$ représentait un nombre rationnel non décimal en considérant que son dénominateur n'était pas un diviseur d'une puissance de dix ou que sa décomposition en facteurs premiers ($27 = 3 \times 3 \times 3$) contenait d'autres facteurs que des 2 et des 5, et en conclure qu'elle ne pouvait donc pas être égale au nombre décimal 0,48.*

<u>Affirmation 4 :</u>
« Si on multiplie le diamètre d'un cercle par 2 son aire est multipliée par 2 ».

<u>Remarque :</u>
Pour savoir si cette affirmation est vraie ou fausse, on peut soit se référer à un résultat concernant l'agrandissement des figures : « Quand toutes les dimensions d'une figure sont multipliées par le même facteur k, son aire est multipliée par le

facteur k^2 », soit regarder ce que vaut l'aire d'un disque initial et celle du disque ayant un diamètre double.

En se référant au résultat précédent appliqué à un disque, sa seule dimension étant son rayon ou son diamètre, lorsqu'on multiplie son rayon ou son diamètre par 2, son aire se trouve multipliée par $2^2 = 4$; l'affirmation 4 est donc fausse.

En écrivant l'aire A d'un disque initial de rayon R et de diamètre D = 2R on obtient :

$$A = \pi R^2$$

En écrivant l'aire A'du disque de diamètre double D' = 2D et donc de rayon R' = 2R on obtient :

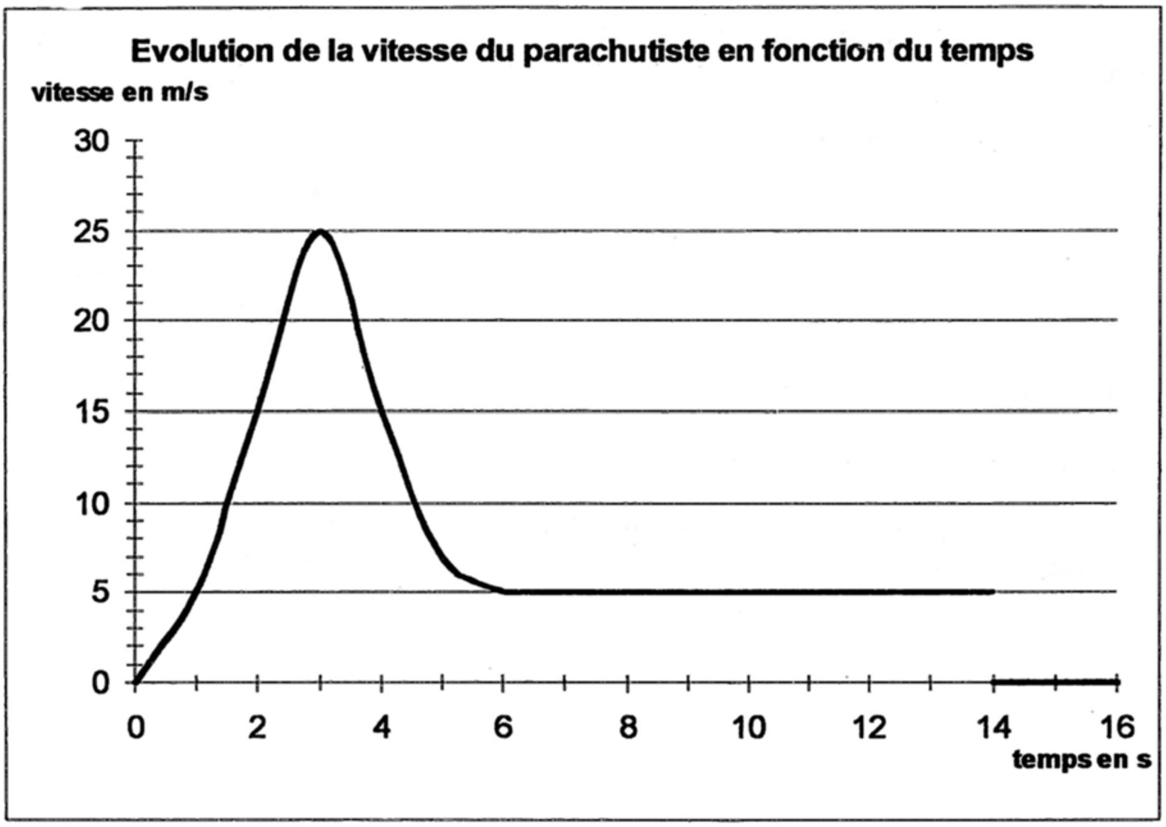
$$A' = \pi R'^2 = \pi (2R)^2 = \pi 4R^2 = 4\pi R^2 = 4 A$$

Donc l'aire A est multipliée par 4 et non par 2, l'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3

Question 1

Le graphique ci-dessous indique la façon dont la vitesse de chute du parachutiste mesurée en m/s (indiquée en ordonnée) varie en fonction du temps mesuré en secondes (indiqué en abscisse).



La vitesse est constante quand elle conserve la même valeur alors que le temps s'écoule entre deux instants. Cela se traduit sur le graphique par des points ayant tous la même ordonnée, ce qui fait apparaître un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses.

On observe que cela se produit pour v = 5 m/s et t variant entre 6 s et 14 s.
La vitesse est donc constante sur l'intervalle [6 ; 14].
La vitesse est aussi constante (0 m/s) sur l'intervalle]14 ; 16] (t variant entre 14s et 16s).

Question 2

L'ouverture du parachute provoque une diminution de la vitesse de chute du parachutiste qui jusque là augmentait ; elle correspond donc au moment où la vitesse cesse d'augmenter pour se mettre à diminuer, c'est-à-dire au sommet de la courbe représentée sur le graphique dont les coordonnées sont 3 s en abscisse et 25 m/s en ordonnée.
Ou encore le point de coordonnées : (3 ; 25)

Question 3

Entre 3s et 6s la vitesse du parachutiste diminue de 25 m/s à 5 m/s (après quoi elle reste constante).

Question 4

La chute du parachutiste dure en tout 14 secondes, la seconde moitié de sa chute correspond donc à une durée de 7 secondes et à l'intervalle [7 ; 14]. Sur cet intervalle la vitesse est constante, sa valeur est de 5 m/s. La distance parcourue est donc égale au produit : 5 m/s × 7 s = 35 m

Question 5

Sa vitesse moyenne est égale au quotient entre la distance parcourue (115 mètres) et la durée totale de sa chute (14 secondes) :

$$\text{Vitesse} = 115 \text{ m} / 14 \text{ s} \approx 8{,}214\ldots \text{ m/s}$$

Cette vitesse se trouve naturellement exprimée en m/s puisqu'on divise des mètres par des secondes, on demande de l'exprimer en km/h, la vitesse en km/h correspond à la distance (exprimée en km) parcourue en une heure. Nous pouvons donc faire le calcul suivant :
Distance parcourue en une heure soit en 3600 secondes, exprimée en mètres :

$$8{,}214 \text{ m/s} \times 3600 \text{ s} = 29\,570{,}4 \text{ m}$$

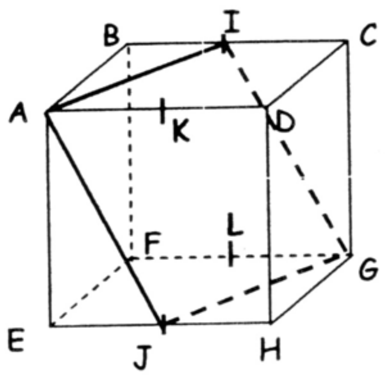
Distance parcourue en une heure exprimée en kilomètres : 29,5704 km

Vitesse moyenne arrondie au centième, exprimée en km/h : 29,57 km/h

<u>Remarque :</u>
On constate que pour obtenir le nombre exprimant la vitesse en km/h, on a multiplié le nombre exprimant la vitesse en m/s par 3600 puis divisé le produit par 1000.
Si on rassemble ces deux opérations en une seule on aboutit à une multiplication par 3,6.
On apprend et on applique quelquefois la relation suivante :
Nombre exprimant la vitesse en m/s × 3,6 = Nombre exprimant la vitesse en km/h
Cette relation purement numérique a le mérite d'économiser toute réflexion, mais a l'inconvénient de supprimer tout le raisonnement sur les unités qui permet de contrôler le travail de conversion.

EXERCICE 4

Les questions concernent le cube ABCDEFGH reproduit ci-dessous (extrait du sujet), de 4 cm d'arête, les points I, J, K, et L étant les milieux respectifs des côtés [BC], [EH], [AD], et [FG].



<u>Remarque:</u>
L'énoncé utilise le mot « côté » à la place du mot « arête » dont l'usage est ici plus pertinent.

Question 1

Dans une représentation en perspective cavalière, le solide représenté est comme projeté sur un écran parallèle à l'observateur par un faisceau de droites toutes parallèles entre elles et dont la direction est celle du regard de l'observateur. Il peut donc arriver que des points soient confondus ou alignés sur la représentation par effet de projection alors qu'ils ne le sont pas sur le solide réel.
Ici il s'agit de savoir si le point D appartient au segment [IG] sur le solide réel, ce qui est un implicite de la question. Sur la représentation en perspective cavalière on voit que le point D est sur le segment [IG], mais sur le cube réel le segment [IG] est tout entier contenu dans la face BCGF du cube (face arrière), alors que le point D est sur la face ADHE du cube (face avant), ces deux faces sont parallèles et ne se touchent pas, le point D, contrairement aux apparences, n'appartient donc pas au segment [IG] sur le solide réel.

Question 2 a

AC, CH, HF et FA sont toutes quatre des longueurs de diagonales de faces du cube. Or toutes les faces d'un cube sont formées de carrés isométriques (ou superposables), cela suffit pour affirmer que ces quatre longueurs sont égales.

Autres méthodes :

1. On peut énoncer le résultat concernant la diagonale d'un carré : La longueur de la diagonale d'un carré est égale au produit de la longueur du côté du carré par le réel $\sqrt{2}$.
   Ici chacune de ces longueurs est une diagonale d'un carré ayant 4 cm de côté elles sont donc toutes égales à $4\sqrt{2}$ cm.
2. On pouvait aussi chercher à calculer chacune de ces longueurs en appliquant le théorème de Pythagore à chacun des triangles rectangles formés par les demi-carrés qu'elles déterminent sur les faces du cube :
   Dans le triangle ABC rectangle en B et isocèle, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
   $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$ et $\sqrt{32} = \sqrt{16x2} = 4\sqrt{2}$
   Donc : AC = $4\sqrt{2}$ cm.
   On obtient les mêmes valeurs avec la même démarche pour les trois autres longueurs.

Question 2 b

Un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur est un losange, mais ce théorème ne s'applique que dans le plan à des figures polygonales qui sont toutes des figures planes.
Ici la figure dont les sommets sont les quatre points A, C, H, et F n'est pas une figure plane ; en effet le plan défini par A, C et H coupe les faces du cube suivant les segments [AC], [CH] et [HA] qui sont tous trois des diagonales de faces du cube, et le point F n'appartient pas à ce plan, car si c'était le cas la droite (CF) couperait la droite (AH) ou lui serait parallèle, or ces deux droites sont portées par les diagonales de deux faces opposées du cube et ne sont pas parallèles entre elles. ACHF n'est donc pas un losange, il s'agit en fait d'un solide ayant six arêtes de même longueur à savoir un tétraèdre régulier ou pyramide (régulière) à base triangulaire.

Autres méthodes :

1. On peut aussi prouver que ACHF n'est pas un losange en prouvant que ses diagonales [AH] et [CF] ne se coupent pas, en effet elles sont situées dans les faces ADHE (face avant) et BCGF (face arrière) qui sont des faces opposées et parallèles du cube.
2. On pouvait aussi examiner deux côtés opposés et montrer qu'ils n'étaient pas parallèles :
   [FH] est une diagonale de la face EFGH du cube, elle est parallèle à la diagonale [BD] de la face ABCD du cube qui lui est opposée et parallèle, [AC] est la deuxième diagonale de la même face ABCD, donc [BD] et [AC] se coupent au centre de la face ABCD.

Si [FH] était parallèle à [AC] comme [FH] est parallèle à [BD] on aurait [AC] parallèle à [BD], or comme on vient de le voir, ce n'est pas le cas puisque ces deux segments se coupent, cela prouve que [FH] et [AC] ne sont pas parallèles et donc que ACHF n'est pas un losange.

Question 3

Étude du quadrilatère AICK :

<u>Première méthode :</u>
Le quadrilatère AICK est tout entier contenu dans la face ABCD du cube, il est donc plan.
Les côtés [IC] et [AK] sont portés respectivement par les côtés [BC] et [AD] du carré qui sont parallèles, ils sont donc eux aussi parallèles. Comme I et K sont les milieux de [BC] et [AD], les longueurs IC et AK sont toutes deux égales à la moitié de la longueur du côté du carré, elles sont donc égales entre elles. Le quadrilatère AICK possède donc deux côtés parallèles et de même longueur, comme de plus il est **convexe**, c'est un parallélogramme.

<u>Deuxième méthode :</u>
Si on appelle O le centre du carré ABCD, et si l'on note S la symétrie centrale de centre O, comme S transforme [AD] en [CB], on peut affirmer qu'elle transforme le milieu K de [AD] en le milieu I de [CB] donc O est le milieu commun de [AC] et [IK] et le quadrilatère AICK possède deux diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Étude du quadrilatère CKJG :

<u>Première méthode :</u>
On peut utiliser la propriété : Dans un carré la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés (médiane du carré) est parallèle aux deux autres côtés du carré et de même longueur que ces derniers, à ce titre (JK) // (DH) et JK = DH
Comme dans le carré DCGH on a (DH) // (CG) et DH = CG ; on en déduit que : (JK) // (CG) et JK = CG, le quadrilatère CKJG étant **convexe** et possédant deux côtés opposés parallèles et de même longueur, on peut affirmer qu'il s'agit d'un parallélogramme.

<u>Deuxième méthode :</u>
On cherche à montrer que CKJG est un rectangle et on en déduit que c'est donc un parallélogramme. On reprend la première partie de la méthode précédente pour montrer que (JK) // (DH), puis on utilise le fait que dans un cube chaque arête est perpendiculaire aux plans des faces qui passent par ses extrémités donc (DH) est perpendiculaire au plan ABCD et au plan EFGH.
Comme (JK) // (DH) on en déduit que (JK) est elle aussi perpendiculaire au plan ABCD et au plan EFGH.
Quand une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qui passent par le point où elle traverse le plan, donc (JK) $\perp$ (KC) et (JK) $\perp$ (JG).

En raisonnant de la même manière on obtient (CG) perpendiculaire aux plans ABCD et EFGH, donc (CG) $\perp$ (KC) et (CG) $\perp$ (JG).
Le quadrilatère CKJG possède donc quatre angles droits, c'est un rectangle et donc un parallélogramme.

<u>Remarque :</u>
Il était tentant de se livrer à des raisonnements du genre :
(JG) est dans le plan EFGH et (KC) est dans le plan (ABCD), ces deux plans sont parallèles car ce sont deux faces opposées du cube « donc » les droites (JG) et (KC) sont parallèles. Cette dernière déduction est fausse car deux droites se trouvant dans deux plans parallèles peuvent très bien ne pas être parallèles entre elles, elles ne le sont qu'à la condition supplémentaire de se trouver dans un même plan !
ou encore
(CG) est perpendiculaire au plan EFGH donc (CG) est perpendiculaire à (JG) qui est contenue dans ce plan, ce qui est exact. De même (CG) est perpendiculaire au plan ABCD donc (CG) est perpendiculaire à (CK) qui est contenue dans ce plan, ce qui est aussi exact.
Les droites (JG) et (CK) étant toutes deux perpendiculaires à la même droite (CG), elles sont parallèles entre elles. Cette dernière déduction qui est vraie dans le plan n'est pas vraie dans l'espace car les droites (JG) et (CK) pourraient ne pas être dans le même plan en ayant tourné différemment autour de (CG), ce qui les empêcherait d'être parallèles.
Ces deux raisonnements étaient donc des raisonnements faux qui ne devaient pas être appliqués ici même si les affirmations auxquelles ils conduisaient étaient exactes dans le cas particulier du quadrilatère CKJG.

Etude du quadrilatère AIGJ :

<u>Première méthode :</u>
Comme le quadrilatère AICK est un parallélogramme on en déduit que les côtés [AI] et [KC] sont de même longueur et portés par des droites parallèles, comme CKJG est un parallélogramme on en déduit que les côtés [KC] et [JG] sont de même longueur et portés par des droites parallèles, donc les côtés [AI] et [JG] sont de même longueur et portés par des droites parallèles, comme AIGJ est un quadrilatère **convexe** ayant deux côtés opposés de même longueur et portés par des droites parallèles, c'est un parallélogramme.

<u>Deuxième méthode :</u>
Si on appelle Ω le centre du cube, la symétrie centrale de centre Ω transforme A en G et le côté [EH] en le côté [CB], donc le milieu J du côté [EH] en le milieu I du côté [CB], de ce fait Ω est le milieu commun des diagonales [IJ] et [AG] donc le quadrilatère AIGJ est un parallélogramme.

Question 4

Pour démontrer que AIGJ est un losange, puisqu'on a montré à la question précédente qu'il s'agissait d'un parallélogramme, il suffit de montrer que deux de ses côtés consécutifs sont de même longueur.

Si on choisit de calculer la longueur AI en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en B on obtient : $AI^2 = AB^2 + BI^2$
Comme AB = BC = 4 cm on en déduit que BI = 2 cm et $AI^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$
Donc AI = $\sqrt{20}\text{ cm} = 2\sqrt{5}$ cm
Si on calcule la longueur AJ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEJ rectangle en E on obtient : $AJ^2 = AE^2 + EJ^2$
Comme AE = EH = 4 cm on en déduit que EJ = 2 cm et $AJ^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$
Donc AJ = $\sqrt{20}\text{ cm} = 2\sqrt{5}$ cm
Conclusion : AI = AJ donc le parallélogramme AIGJ est un losange.

<u>Autre méthode :</u>
On pouvait calculer à l'aide du théorème de Pythagore la longueur des quatre côtés de AIGJ, on trouvait alors que les quatre côtés étaient de même longueur ce qui, les points A, I, G et J étant coplanaires, suffisait pour affirmer que AIGJ est un losange sans faire référence à la question précédente.

<u>Remarque :</u>
Il n'était pas indispensable d'effectuer les calculs de longueurs, il suffisait de dire que chaque côté de AIGJ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et que les quatre triangles rectangles concernés sont isométriques.

Question 5

Pour savoir si le quadrilatère AIGJ est un carré il faut voir si deux de ses côtés consécutifs sont perpendiculaires. Pour cela on peut utiliser le théorème de Pythagore d'abord pour calculer la longueur AG puis pour voir si le triangle AJG est rectangle en J :
Si $AG^2 = AJ^2 + JG^2$ alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore AJG est rectangle en J.
Si $AG^2 \neq AJ^2 + JG^2$ alors le triangle AJG n'est pas rectangle en J car il ne vérifie pas la relation du théorème de Pythagore.

<u>Calcul de AG :</u>
Le triangle AEG est rectangle en E car (AE) est perpendiculaire au plan EFH et donc (AE) est perpendiculaire à (EG), on donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle AEG rectangle en E :
$AG^2 = AE^2 + EG^2$ comme AE = 4 cm et EG = $4\sqrt{2}$ cm, propriété de la diagonale d'un carré, on obtient : $AG^2 = 16 + 32 = 48$
Nous savons grâce à la question précédente que $AJ^2 = JG^2 = 20$ donc $AG^2 \neq AJ^2 + JG^2$ car $48 \neq 20 + 20$; on en déduit que le triangle AJG n'est pas rectangle et donc que le losange AIGJ n'est pas un carré car dans un carré les quatre angles sont droits.

<u>Autre méthode :</u>
Montrer que IJ = BE, par exemple en montrant que BIJE est un parallélogramme du fait que [BI] et [EJ] sont de même longueur, portés par des droites parallèles et que le quadrilatère BIJE est convexe, puis calculer sa longueur qui vaut $4\sqrt{2}$ cm (diagonale du carré).

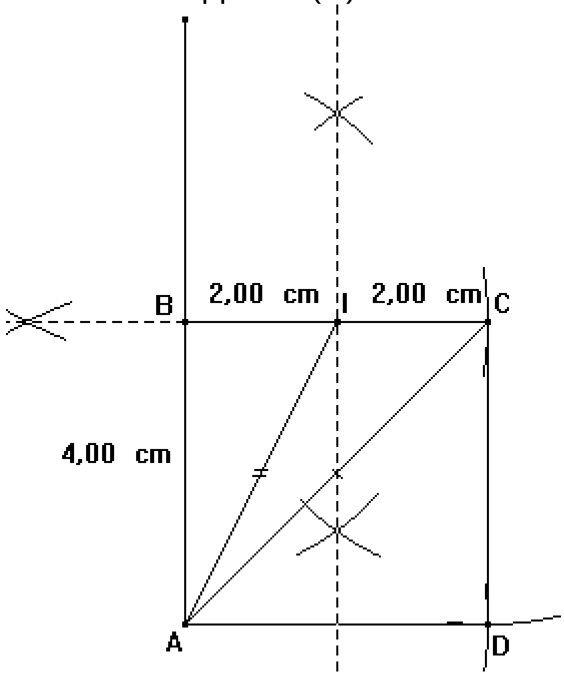
Calculer la longueur de [AG] qui vaut $\sqrt{48}$ cm $= 4\sqrt{3}$ cm (voir ci-dessus).
Conclure que AIGJ n'est pas un carré car ses deux diagonales ne sont pas de même longueur.

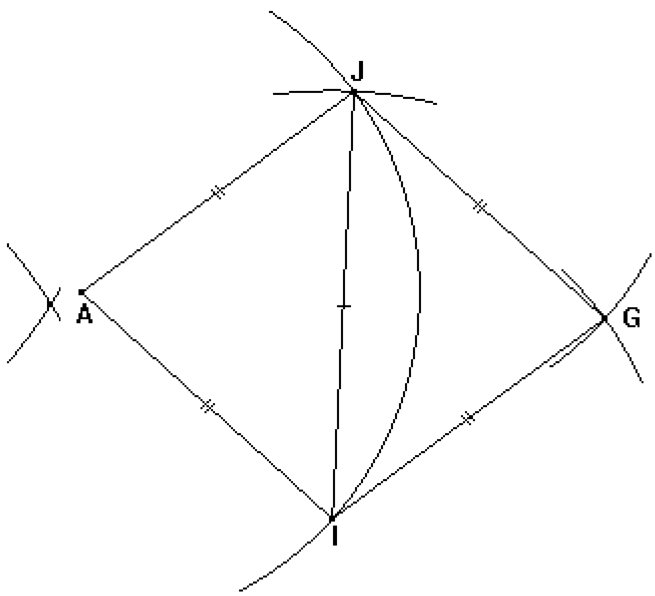
Question 6

Pour construire le losange AIGJ en vraie grandeur, il faut commencer par construire un demi-losange avec une des deux diagonales et deux côtés de même longueur, puis le symétrique de ce demi-losange par rapport à la diagonale choisie.
En effet cela permet, en construisant ce triangle, de déterminer un des angles du losange ce qui en fixe la forme.
On peut choisir soit la diagonale [AG] qui, avec le cm comme unité de longueur, mesure $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, soit la diagonale [IJ] qui mesure $4\sqrt{2}$, les longueurs des côtés [AJ], [JG], [GI], et [IA] ayant tous pour mesure $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

La première difficulté est donc de construire géométriquement les longueurs AG ou IJ et AJ, pour ce faire nous allons reconstruire les triangles rectangles qui leur ont donné naissance dans la figure précédente :

- la construction du carré de départ ayant 4 cm de côté inclut la construction d'une perpendiculaire à une droite et la construction de la médiatrice d'un côté pour en déterminer géométriquement le milieu, ce carré permet de tracer un premier segment ayant pour longueur $\sqrt{20}$ cm, soit $2\sqrt{5}$ cm et une diagonale ayant pour longueur $4\sqrt{2}$ cm.
- la construction du losange s'appuie sur la diagonale [IJ] dont la longueur peut être obtenue grâce au carré précédent. On trace le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{20}$ cm, sur ce cercle on choisit un point J et on trace le segment [IJ] de longueur $4\sqrt{2}$ cm. Le point G étant le symétrique de A par rapport à (IJ).





DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Conseil :
Avant d'étudier les démarches utilisées par les élèves il est indispensable de résoudre soi-même le problème proposé, pas seulement pour en fournir la ou les réponses mais aussi pour tenter d'en identifier la structure : « Une école comporte deux classes. Dans cette école, il y a 26 filles. Dans la première classe, il y a 12 filles et 11 garçons. Dans la deuxième classe il y a 27 élèves. Quel est le nombre de garçons dans la deuxième classe ? »

On perçoit qu'il s'agit d'un problème de réunion d'ensembles, l'ensemble des élèves de l'école étant découpé d'une part en deux classes et d'autre part entre filles et garçons. On peut penser à un tableau à double entrée pour croiser ces deux paramètres de découpage, mais on peut aussi raisonner directement sur les nombres donnés.

	Première classe	*Deuxième classe*	*Total de la ligne*
Nombre de filles	*12*	*A*	*26*
Nombre de garçons	*11*	*B = ?*	*C*
Total de la colonne	*D*	*27*	*E*

Il existe au moins deux façons différentes d'obtenir la valeur de B, la première passe par le calcul préalable de la valeur de A, la seconde par le calcul préalable de la valeur de C :

Calcul de la valeur de A, puis de celle de B sur laquelle porte la question du problème :
Nombre de filles de la deuxième classe : A = 26 – 12 = 14
Nombre de garçons de la deuxième classe : B = 27 – A = 27 – 14 = 13

Calcul de la valeur de C, donc de celle de E, donc de celle de D, puis de celle de B :
Nombre d'élèves de la première classe : D = 11 + 12 = 23
Nombre d'élèves de l'école : E = D + 27 = 23 + 27 = 50
Nombre de garçons de l'école : C = 50 – 26 = 24
Nombre de garçons de la deuxième classe : B = 24 – 11 = 13

Question 1
Analyse des démarches utilisées par les élèves en précisant les erreurs commises

Elève	Démarche suivie	Erreurs commises
MANON	Elle calcule le nombre de filles de la deuxième classe (26 - 12), puis elle calcule le nombre de garçons dans cette même classe	Elle commet une erreur de calcul dans sa première soustraction, elle semble additionner les unités entre elles alors qu'elle

	(27 - 18). Sa démarche est correcte mais sa réponse est fausse.	soustrait les dizaines entre elles. Ce calcul qui ne nécessitait aucune retenue, semble avoir été effectué trop rapidement, contrairement à la deuxième soustraction qui comporte les marques des retenues et qui est correcte.
REMI	Il calcule le nombre d'élèves de l'école en additionnant le nombre de filles et le nombre de garçons de la première classe avec le nombre d'élèves de la deuxième classe (12 + 11 + 27), puis il soustrait à ce résultat le nombre de filles de l'école (50 - 26). Le résultat qu'il obtient correspond au nombre total de garçons de l'école, sa démarche est erronée car incomplète.	Il n'a commis aucune erreur de calcul mais sa démarche n'est pas menée à son terme, il aurait fallu soustraire le nombre de garçons de la première classe au dernier résultat obtenu pour trouver le nombre de garçons de la deuxième classe, ce que Rémi n'a pas fait. Il a effectué deux calculs, ce qui est en général un maximum pour de nombreux élèves qui en font un contrat implicite.
ANTOINE	Il calcule le nombre d'élèves de l'école en deux étapes : il calcule mentalement le nombre d'élèves de la première classe (11 + 12 = 23) puis il additionne le nombre d'élèves des deux classes (23 + 27). Il calcule ensuite le nombre de garçons de l'école (50 - 26) puis le nombre de garçons de la deuxième classe (24 - 11).	Aucune erreur. Démarche correcte. Calculs exacts.
CLARA	Elle calcule le nombre de filles de la deuxième classe (26 - 12), puis calcule le nombre de garçons de la deuxième classe (27 - 14).	Aucune erreur. Démarche correcte. Calculs exacts.

Question 2
Compétences visées dans cet exercice

<u>*Remarque :*</u>
On peut se demander si le terme « visées » a un sens différent, dans l'esprit des concepteurs du sujet, du terme « évaluées », pour notre part nous le considérerons avec le même sens, tout en regrettant le choix du terme « visées » qui peut semer le doute dans l'esprit des candidats attentifs.

En analysant la tâche des élèves, les compétences évaluées dans cet exercice sont les suivantes :

- Savoir utiliser ses connaissances pour résoudre un problème additif.
- Savoir élaborer un raisonnement nécessitant des étapes intermédiaires dont l'initiative est laissée à la charge des élèves, ou savoir décomposer un problème additif complexe en sous-problèmes plus simples.
- Savoir traduire par l'opération adéquate, ici addition ou soustraction, la situation étudiée.
- Savoir calculer correctement une somme ou une différence.

En prenant pour référence les programmes de 2002, les compétences évaluées dans cet exercice sont formulées de la façon suivante :

- Mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution.
- Résoudre un problème en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.
- Connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément.
- Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux, par un calcul écrit en ligne ou en colonnes.

Question 3

Comme l'analyse préalable l'a montré, selon de quelle manière on choisit de résoudre ce problème le nombre de garçons de la première classe n'est pas une donnée indispensable à sa résolution, elle peut donc être supprimée de l'énoncé. Toutefois sa suppression rend impossible la deuxième façon de résoudre le problème, utilisée par Rémi et Antoine.

Il peut donc être intéressant de la conserver pour permettre aux élèves qui ont besoin de passer par le calcul des effectifs totaux (nombre d'élèves de l'école puis nombre de garçons de l'école) de pouvoir résoudre le problème, pour amener aussi les élèves qui conçoivent l'autre solution (calcul du nombre de filles puis du nombre de garçons de la deuxième classe) à accepter l'idée qu'un énoncé de problème peut comporter des données inutiles et permettre lors du bilan une confrontation entre les deux procédures de résolution.

Question 4
Les représentations schématiques

Remarque :
L'utilisation de schémas dans la résolution de problèmes n'est pas une attitude spontanée chez les élèves ; elle nécessite un long et difficile apprentissage dont l'efficacité dans l'élaboration de la solution du problème est très longue à se dessiner. Cette remarque reste valable pour de nombreux adultes.

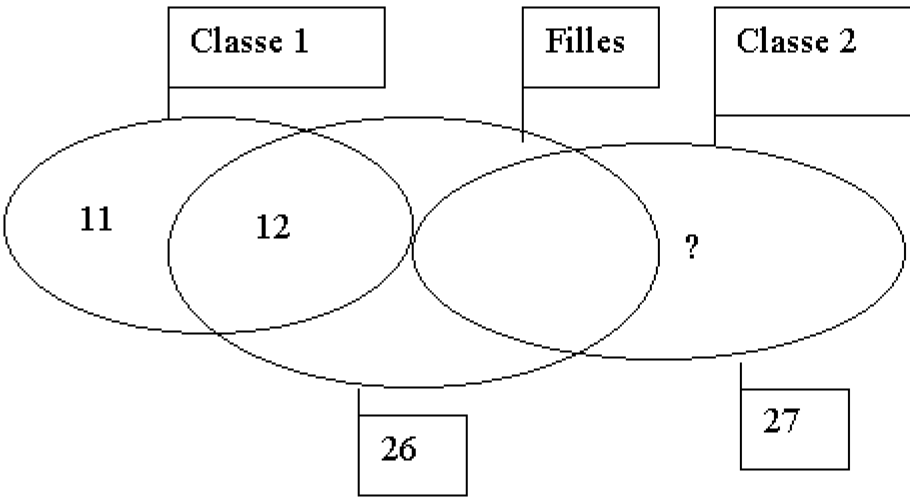
Pour proposer une représentation schématique on peut hésiter entre plusieurs modes de représentations, mais sur la copie des candidats, une seule suffisait.

- Si on opte pour un tableau à double entrée, on peut reprendre ici le tableau proposé comme aide à l'analyse du problème dans l'analyse préalable aux réponses aux questions (voir plus haut).

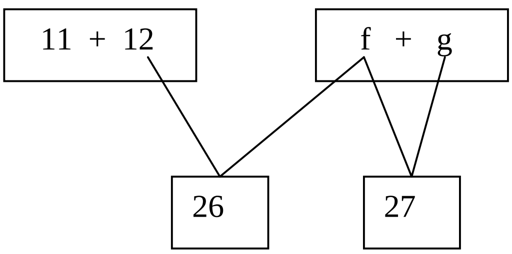
- Si on opte pour une représentation des ensembles, la plus fonctionnelle semble celle qui utilise les principes des diagrammes de Caroll : sur deux lignes on représente un ensemble et son complémentaire (filles et garçons), sur deux colonnes on représente un autre ensemble et son complémentaire (classes 1 et 2), toutefois il est nécessaire ici de représenter la réunion des deux ensembles pour en faire figurer l'effectif ce qui rapproche beaucoup ce type de diagramme du tableau à double entrée précédent :

	Filles	Garçons	Total
Classe 1	12	11	
Classe 2			27
Ecole	26		

- Leur représentation sous forme de « patates » (diagrammes de Venn) bien que moins bien adaptée, est aussi possible : on peut dessiner deux patates disjointes pour représenter les deux classes, et une patate ayant une intersection non vide avec chacune des deux patates précédentes, pour représenter l'ensemble des filles de l'école :



- Si on opte pour une représentation sous forme d'arbre à calcul, on doit alors désigner les nombre inconnus par une lettre ou par une case vide (algébrisation du problème), voici un exemple possible :



SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Objectif d'apprentissage commun aux deux documents

Remarque :
Les documents des annexes 2 et 3 *traitent tous deux du thème des aires, mais un thème ne constitue pas un objectif d'apprentissage, il faut être plus précis. A l'examen des deux documents on voit qu'ils s'attachent tous deux à proposer aux élèves de fabriquer des formes différentes ayant la même aire, c'est cela qui constitue leur point commun.*

L'objectif d'apprentissage commun aux deux documents est donc : « Comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire » ou encore « Dissocier les notions de forme et d'aire d'une surface ».

Question 2
Objectif des exercices de l'annexe 3, page 2/2

Remarque :
Ce type de question expose à une réponse du genre « l'objectif de l'exercice est de faire réaliser aux élèves la tâche proposée dans cet exercice » qui n'apporte aucun élément d'analyse. Il faut évidemment s'attacher aux objectifs d'apprentissage et non à la tâche elle-même qui n'est qu'un des exemples possibles pour atteindre cet objectif, toutefois quand la tâche proposée est très spécifique, il est quelquefois difficile d'énoncer un objectif sous une forme très différente de la formulation de la consigne. Ce type de question serait sans doute plus facile à comprendre si la façon dont le maître utilise ces exercices dans la séquence d'apprentissage était décrite avec précision.

Exercice n°1 :
Faire utiliser de manière implicite la mesure de l'aire d'une figure dessinée sur un quadrillage pour obtenir des surfaces de formes différentes ayant la même aire.

Exercice n°2 :
Faire comparer les aires de figures ayant des formes différentes en les pavant à l'aide d'un gabarit unité.

Exercice n°3 :
Faire prendre conscience qu'une même surface (ici un carré dessiné sur un quadrillage) peut être décomposée de plusieurs manières en surfaces (ici quatre) superposables.

Exercice n°4 :
Découvrir que le découpage et le recollement sans chevauchement des différents morceaux d'une surface permet de former une nouvelle surface de même aire que la surface initiale.

Question 3
Exercices 1 et 2 de l'annexe 2, page 1/2

Les élèves sont invités par une démarche de manipulation, complètement guidée par des consignes et des dessins, à constater que la superposition directe des surfaces des deux rectangles dont ils doivent comparer les aires ne leur permet pas de répondre à la question qui leur est posée. En effet aucun des deux rectangles n'est entièrement contenu dans l'autre, il faut donc procéder à une comparaison indirecte en fabriquant par découpage et recollement sans chevauchement, une nouvelle surface de même aire que la surface initiale qui permette d'aboutir soit à une inclusion de l'une des surfaces dans l'autre soit à une superposition exacte pour pouvoir comparer les aires des deux rectangles initiaux.

Question 4
Exercice 2 de l'annexe 3, page 2/2

La figure qui a une aire différente des aires des autres figures est la figure D car elle est formée de 7 demi-carrés alors que toutes les autres sont formées de 8 demi-carrés.

<u>Remarque :</u>
L'expression « Exprimer une procédure » utilisée dans la question est une formulation assez vague ; on peut se demander si les concepteurs du sujet attendent des candidats qu'ils indiquent simplement un principe général sur lequel peut s'élaborer une procédure ou bien qu'ils décrivent entièrement une procédure avec ses différentes étapes. Nous choisissons d'opter pour la deuxième interprétation.

Procédures utilisables par les élèves :

- Décalquer la figure fournie dans l'énoncé comme gabarit d'unité d'aire, puis partager soit par simple tracé, soit par découpage effectif, chacune des figures à étudier en triangles dont on vérifie la superposition au gabarit grâce au calque, dénombrer pour chaque figure le nombre de triangles nécessaires, comparer les nombres obtenus.
- Se convaincre visuellement du fait que le triangle rectangle fourni comme gabarit d'unité est bien superposable aux triangles qui apparaissent en saillie sur les figures à étudier, puis faire apparaître d'autres triangles identiques en traçant une diagonale sur les carrés qu'on devine dans chaque surface en faisant abstraction des triangles en saillie. Après tracé de tous les triangles procéder à leur dénombrement et à la comparaison des nombres obtenus.
- Prendre conscience que l'association de deux triangles fournis comme gabarit d'unité peut donner naissance à un carré, chercher à faire apparaître de tels carrés dans chacune des formes à étudier, puis procéder au dénombrement

des triangles contenus dans chaque forme en comptant deux triangles pour chaque carré, comparer les nombres obtenus.

Question 5
Exercice 3 de l'annexe 2, page 1/2

Dans l'illustration proposée il est fait appel à une règle graduée, à une feuille rectangulaire en papier uni et à la technique du pliage bord sur bord pour obtenir les perpendiculaires aux bords de la feuille pour faire apparaître le rectangle cherché. On suppose que le découpage final sera fait à la main grâce aux plis mais le rectangle obtenu serait certainement plus propre si on utilisait une paire de ciseaux pour le découper.

Si la feuille rectangulaire de papier uni reste le support choisi, on peut remplacer le pliage par l'utilisation d'une équerre afin de tracer les perpendiculaires aux bords de la feuille à partir des points obtenus grâce à la règle graduée, pour obtenir le quatrième sommet du rectangle à construire. Son découpage s'effectuant alors à l'aide d'une paire de ciseaux

En conservant la feuille rectangulaire de papier uni comme support, on peut utiliser la règle graduée pour marquer les bonnes longueurs et le compas pour construire le quatrième sommet du rectangle (on trace deux arcs de cercle ayant chacun pour centre un des points repérés sur les côtés de la feuille, et pour rayon la longueur repérée sur le côté de la feuille qui est perpendiculaire au côté dont le centre est une extrémité). Le découpage du rectangle s'effectuera à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est une feuille rectangulaire quadrillée à « carreaux Seyes », la règle graduée reste nécessaire pour marquer les bonnes longueurs sur les bords de la feuille mais l'équerre devient inutile puisqu'il suffit de suivre les traits du quadrillage pour tracer à la règle les côtés du rectangle qui sont perpendiculaires aux bords de la feuille. Le découpage s'effectuant à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est une feuille rectangulaire à « petits carreaux », il suffit de savoir que le côté de chaque carreau a une longueur de 0,5 cm (ou que deux côtés de carreaux ont pour longueur 1 cm) pour déterminer les bonnes longueurs sur le bord de la feuille, une simple règle non graduée suffit alors pour tracer les côtés du rectangle qui sont perpendiculaires aux bords de la feuille. Le découpage s'effectuant à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est du papier pointé avec des mailles de 1 cm , comme dans le cas précédent, seule la règle non graduée est nécessaire.

On peut aussi tracer et découper un rectangle 8×12 par l'une des deux premières méthodes sur un support blanc assez rigide (papier à dessin ou bristol) puis utiliser cet exemplaire comme gabarit pour tracer par contour du gabarit d'autres rectangles superposables.

<u>Remarque :</u>
Il n'était certainement pas nécessaire de proposer autant de réponses différentes, et la liste proposée ci-dessus ne prétend pas être exhaustive ; elle montre toutefois qu'il est souhaitable d'associer le support de construction avec les instruments qui lui correspondent.

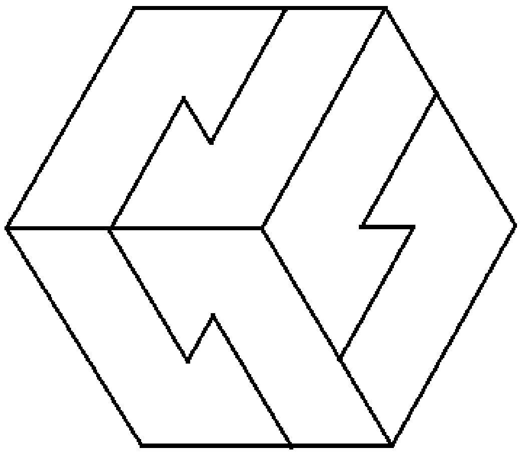
Question 6 a
Pertinence des deux sous-questions de la partie 3 des activités « Découvertes » de l'annexe 3, page 1/2

La première sous-question demande aux élèves de voir parmi les cinq surfaces proposées quelles sont celles qui permettent de paver l'hexagone en six surfaces superposables à partir de son centre. Cela nécessite de disposer une même surface dans des positions très différentes à l'intérieur de l'hexagone, ce travail peut se faire avec l'aide d'une feuille de papier calque comme le suggère l'énoncé de la question 1. On pourrait en regretter le caractère répétitif et fastidieux, puisqu'il faut tester six positions de chacune des cinq surfaces proposées, mais on peut aussi considérer que cela va inciter les élèves à tenter de se passer du papier calque pour anticiper par l'imagination la rotation à partir du centre du carré des surfaces à tester, dans ce cas la question devient pertinente.

La deuxième sous-question demande aux élèves quelles sont les surfaces qui ont la même aire. Elle peut être résolue par le dénombrement des petits triangles équilatéraux dessinés en pointillés à l'intérieur de chacune des cinq surfaces et soulignera le fait que bien qu'ayant des formes différentes certaines de ces surfaces ont la même aire, ce qui est l'objectif principal de la leçon. Elle peut donc être considérée comme pertinente.

Question 6 b

Les formes qui permettent de répondre à la consigne de Martin sont A, B et C.
Évidemment les formes précédentes ont toutes la même aire, égale à 1/6 de l'aire de l'hexagone, mais la forme E est, elle aussi, formée de 25 petits triangles équilatéraux comme les trois formes précédentes, par contre elle ne permet pas de paver l'hexagone à partir de son centre. Voir figure ci-dessous :



La forme D ne convient pas car elle est formée de 29 triangles équilatéraux.
Les formes ou surfaces ayant la même aire sont donc A, B, C, et E.

Remarque :
Pour répondre de manière argumentée au a) il était souhaitable d'avoir auparavant répondu au b) !

Question 7
Préparation du travail sur les unités légales de mesure d'aires

Remarque :
L'annexe 3 ne comportant que des figures construites sur quadrillage ou sur des réseaux triangulaires réguliers semble, plus que l'annexe 2, reliée à la démarche de mesurage des aires en utilisant une aire-unité, puisqu'il incite les élèves à dénombrer les triangles ou les carreaux contenus dans les surfaces étudiées pour comparer leurs aires.

Les activités de l'annexe 2 proposent des méthodes permettant de fabriquer de nouvelles surfaces rectangulaires ayant la même « étendue » qu'une surface rectangulaire donnée au départ, elles soulignent donc que l'aire d'une surface rectangulaire peut rester constante bien que les dimensions de cette surface varient. Si nous devons établir un lien entre ces activités et l'utilisation des unités légales de mesure d'aire, nous pouvons le voir au niveau de la définition de l'unité d'aire qui ne dépend que de l'aire et non de la forme choisie pour représenter cette aire. En particulier 1 cm² n'est pas forcément l'aire d'un carré de 1 cm de côté, ce peut aussi être l'aire d'un rectangle de 2 cm de longueur et de 0,5 cm de largeur, ou bien d'un triangle de 2 cm de base et 1 cm de hauteur…

Cela permet de lutter contre l'obstacle constitué par l'utilisation du mot « carré » dans la désignation des unités légales de mesure d'aire, en le dissociant de la forme carrée, même si elle sert de forme de référence, et en soulignant l'indépendance entre l'unité d'aire et la forme qui sert à la représenter.

Question 8
Exercices utilisables pour des activités de remédiation

Pour aider les élèves ayant des difficultés à comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire on peut travailler sur deux types de démarches :

a) Soit partir d'une forme donnée, la découper en plusieurs morceaux et fabriquer une nouvelle forme différente en assemblant tous ces morceaux sans chevauchement ; on peut encore renforcer cette démarche en montrant sa réversibilité, en démontant la deuxième surface pour reformer la première. On joue donc ici sur la décomposition/recomposition de forme.

b) Soit choisir une forme qui sert de gabarit d'unité d'aire, et constater après dénombrement que deux surfaces de formes différentes peuvent contenir le même nombre de formes unitaires. On joue ici sur le mesurage des aires.

Les exercices 4 et 5 de l'annexe 2 peuvent être choisis pour travailler sur la démarche de type a).

Les exercices 2 et 4 de l'annexe 3 peuvent être choisis pour travailler sur une démarche de type b), l'exercice 1 du même document peut aussi être classé dans cette catégorie, mais le conseil d'utiliser une feuille de papier calque laisse plutôt penser à un travail de compensation : si la forme n'est pas la même que le carré de référence, pour qu'elle ait la même aire que lui il faut qu'il manque autant de petits carrés a l'intérieur du carré de référence qu'elle en a en plus à l'extérieur. Cette comparaison étant facilitée par l'utilisation du calque qui permet de transporter le carré de référence.

AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN

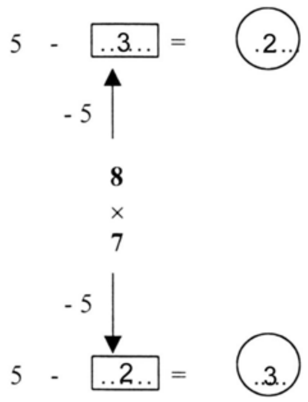
Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

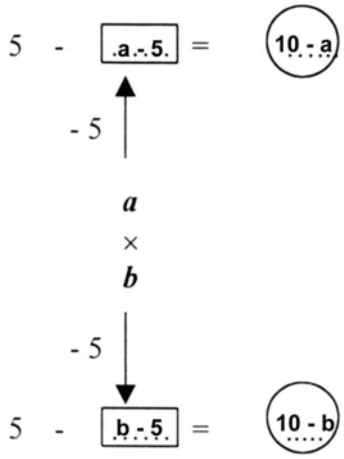
EXERCICE 1

Question 1
Cas du produit 8 × 7



$(3 + 2) \times 10 + (2 \times 3) = 5 \times 10 + 6 = 56$

Question 2 a
Cas général : diagramme pour a × b



Question 2 b

La somme des deux nombres encadrés est : (a - 5) + (b - 5) soit a + b - 10
Les deux nombres entourés sont : 5 - (b - 5) soit 10 - b et 5 - (a - 5) soit 10 - a.
Le calcul issu du diagramme est donc : (a + b - 10) × 10 + (10 - a).(10 - b).

Question 2 c

Après développement des produits, l'expression devient :

$$10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab$$

Ce qui, après réduction, donne : ab.

EXERCICE 2

Question 1

Dans la représentation d'une répartition par un diagramme circulaire, les mesures d'angles sont proportionnelles aux effectifs correspondants ; on a ici un effectif de 1000 personnes représenté par un angle plein de 360°, cette correspondance détermine les autres.
On a donc une relation de proportionnalité représentée par le tableau suivant où les nombres inconnus sont désignés par *x, y, z* et *t*.

	Société A	Société B	Société C	Total
Effectif	400	*y*	*z*	1000
Angle (degré)	*x*	198 °	*t*	360

Calcul de x : $1000\,x = 400 \times 360$

D'où $x = \dfrac{144000}{1000}$

$x = 144$

Calcul de y : $1000 \times 198 = 360\,y$

d'où $y = \dfrac{198\,000}{360}$

$y = 550$

On déduit l'effectif z, par différence avec l'effectif total : $z = 1000 - (400 + 550)$

$z = 50$

Le calcul de t peut s'effectuer en utilisant la valeur trouvée pour z et la proportionnalité entre les effectifs et les angles : $1000\,t = 360 \times 50$

d'où $t = \dfrac{18000}{1000}$

$t = 18$

Ou alors, par recherche du complément à 360 : $t = 360 - (144 + 198)$

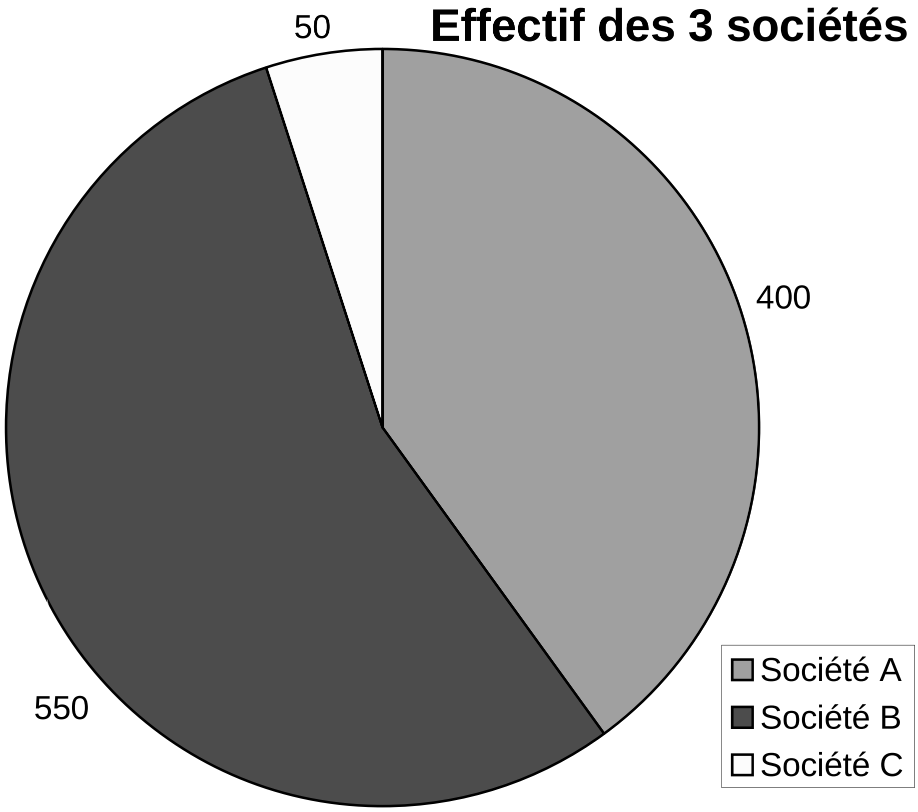
$t = 360 - 342$

$t = 18$

<u>Remarque :</u>
L'essentiel des calculs ci-dessus a été fait en utilisant un théorème qui caractérise l'égalité de deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par l'égalité des « produits en croix » a.d et b.c.
Signalons une autre méthode possible, utilisant les propriétés de linéarité additive et multiplicative :

- *On calcule d'abord l'angle correspondant à un effectif de 100 :*
  1000 correspond à 360° ; 100, c'est 10 fois moins, donc 36°.
- *L'angle correspondant à l'effectif de 400 (société A) est donc de 4 x 36°, soit 144°.*
- *198° = 180° + 18° (la moitié de 360° + la moitié de 36°) ; l'effectif de la société B est donc :*
  500 + 50 (la moitié de 1000 + la moitié de 100), soit 550.
- *On obtient ensuite les nombres relatifs à la société C par différence :*
  Effectif : 1000 – 400 – 550 = 50
  Angle : 360° - 144° - 198° = 18°

Question 2
Diagramme circulaire représentant la situation.



EXERCICE 3

Partie I : construction de l'inverse d'une longueur.

Question 1

Comme (EI) est parallèle à (JA), en appliquant le théorème de Thalès aux triangles (OEI) et (OJA), on obtient :

$$\frac{OE}{OJ} = \frac{OI}{OA}$$

et, en remplaçant par les mesures données, on obtient :

$\frac{OE}{1} = \frac{1}{8}$ d'où $OE = \frac{1}{8}$ soit OE = 0,125.

Question 2

Un raisonnement similaire, cette fois avec OA = x (x différent de 0),
avec toujours 0J = 1, OI = 1 et OA = 8 fournit :

$\frac{OE}{1} = \frac{1}{x}$ d'où $OE = \frac{1}{x}$

Question 3

<u>Remarque :</u>
La démonstration qui conduit au résultat OE = 0,125 fait appel au Théorème de Thalès qui peut s'appliquer car on sait que les droites (EI) et (JA) sont parallèles.
Dans cette démonstration, le fait que (JO) et (OA) sont perpendiculaires n'intervient pas. On peut donc définir un programme de construction qui découle de cette démonstration valide quel que soit l'angle des droites (JO) et (OA).
Cependant, dans cet exercice, on donne « (JO) et (OA) sont perpendiculaires », ce qui amène un cas particulier de figure (où l'angle entre (OJ) et (OA) est fixé), ainsi le programme de construction lié à cette figure sera un programme particulier qui s'appuie sur un angle déterminé entre les droites (OJ) et (OA) : nous avons choisi de nous placer dans ce cas.

Il s'agit donc de trouver un programme de construction de la figure qui a servi de support à la démonstration précédente à partir d'un segment dont la longueur est le nombre dont on veut trouver l'inverse.
La droite (OJ) peut être considérée comme la médiatrice de segment [AA'], où A' est le symétrique de A par rapport au point O.

Voici un programme de construction :

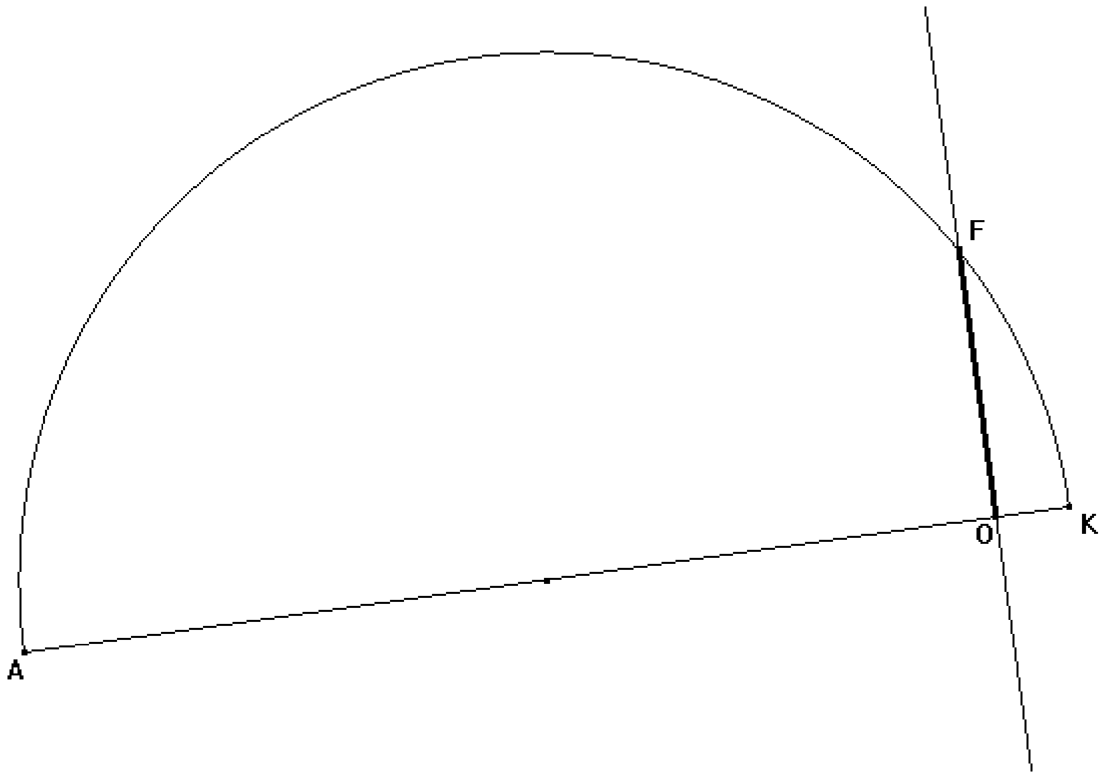
1) Construire, à la règle graduée, un segment [OA] dont la mesure de longueur exprimée en cm est x, le nombre dont on veut déterminer l'inverse.
2) Avec la règle graduée ou le compas, construire le symétrique de A par rapport à O, c'est à dire le point A' tel que O soit le milieu de [AA'].

3) Avec le compas, construire un point H équidistant de A et de A'. Avec la règle tracer la droite (OH) : cette droite est la médiatrice du segment [AA'] donc (OH) est perpendiculaire à (OA).
4) Avec la règle graduée, placer sur la demi droite [OH) le point J à 1 cm de O et sur la demi-droite [OA), le point I à 1 cm de O.
5) Avec le compas, par report des longueurs des côtés opposés, construire le point K tel que JAIK soit un parallélogramme.
6) La droite (IK) coupe la demi-droite [OJ) au point E tel que (EI) est parallèle à (JA) (côtés opposés du parallélogramme).
   Comme cela a été démontré ci-dessus, la longueur OE est l'inverse de x.

<u>Remarque :</u>
Pour avoir un programme général, il suffit de commencer par tracer deux demi-droites d'angle quelconque (inférieur à 180°), [OJ) et [OA), puis de reprendre les instructions 4), 5) et 6).

Partie II : construction de la racine carrée d'une longueur.

Question 1



Question 2

Dans le triangle FOK rectangle en O, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $FK^2 = FO^2 + OK^2$
Comme AO + OK = AK, du fait que O est un point du segment [AK] et que AO = 13, on déduit OK = AK - AO soit OK = 14 – 13 = 1.

On a donc : $FK^2 = OF^2 + 1^2$ d'où $\mathbf{OF^2 = FK^2 - 1}$ **(1)**

Dans le triangle FOA rectangle en O, par le théorème de Pythagore,
on obtient : $FA^2 = FO^2 + AO^2$
D'où $OF^2 = FA^2 - AO^2$ soit $OF^2 = FA^2 - 13^2$
ou encore $\mathbf{OF^2 = FA^2 - 169}$ **(2)**

Question 3

Par addition des égalités (1) et (2) membre à membre, il vient :
$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - 169$,
ce qui donne :
$\mathbf{2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170}$

Question 4

Le triangle AFK est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AK] ; or tout triangle inscrit dans un demi-cercle et ayant pour côté son diamètre est rectangle avec comme hypoténuse ce diamètre, donc : **le triangle AFK est rectangle en F**.

Question 5

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AFK rectangle en F, on a :
$AK^2 = AF^2 + FK^2$
et comme AK = 14, cela donne $196 = AF^2 + FK^2$.

Or, on a établi à la question 3 que $2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170$
donc $2 \times OF^2 = 196 - 170$ d'où $2 \times OF^2 = 26$

On en déduit $OF^2 = 13$ d'où $\mathbf{OF = \sqrt{13}}$.

Partie III : construction d'un segment de longueur $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{11}}}$ cm.

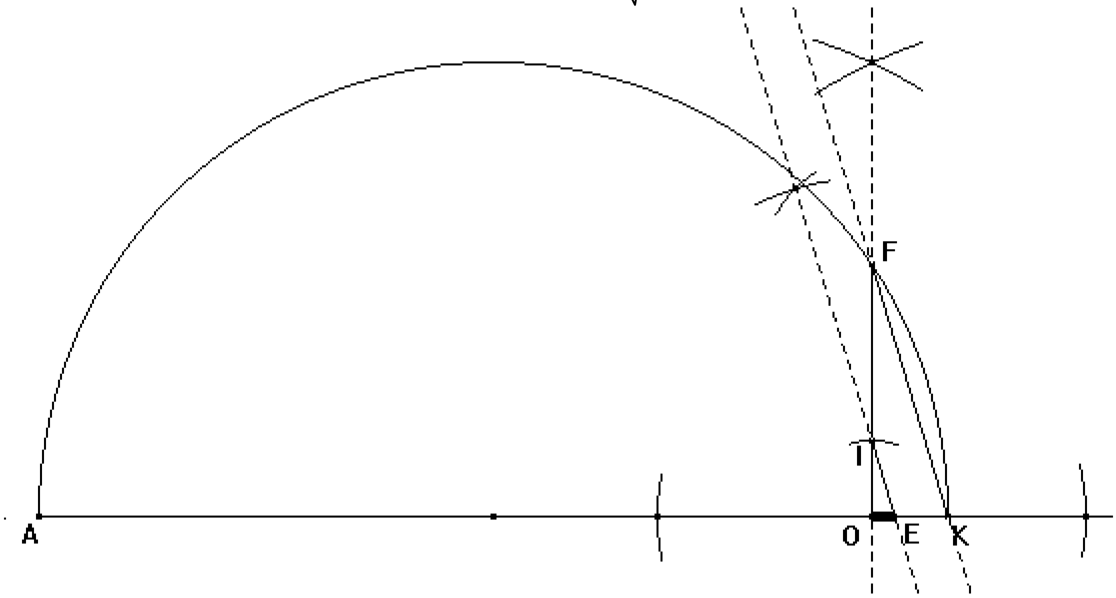
On refait la construction de la partie II en partant d'un segment [AK] de longueur 12 cm et avec O point de [AK] tel que [OA] soit un segment de longueur 11 cm.
On obtient le point F, intersection de la perpendiculaire à (AK) passant par O avec un des demi-cercles de diamètre [AK] qui vérifie :

$$OF = \sqrt{11}$$

(cela se vérifie aisément en reprenant les calculs de la partie II avec les nouvelles mesures ; on peut aussi établir une généralisation du résultat de la partie II ; si on reprend le raisonnement effectué avec OA = x cm et AK = x + 1 cm, on :
$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - x^2 = FK^2 + FA^2 - 1 - x^2 = (x + 1)^2 - 1 - x^2 = 2x$
d'où $OF^2 = x$ *et* $OF = \sqrt{x}$*.)*

On place alors sur la demi droite [OF) le point I tel que [OI] ait pour longueur 1 cm et la construction de la partie I (tracé de la droite parallèle à (FK) et passant par I) nous fournit le point E de la demi droite [OK) qui vérifie :

$$OE = \frac{1}{\sqrt{11}}$$



DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1
Les compétences mises en œuvre.

Pour un début de CE2, elles se rattachent à plusieurs domaines :

- Compétences générales :

S'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme.

- Calcul réfléchi :

Organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs sur les nombres entiers.

- Exploitation de données numériques ; résolution d'un problème en utilisant une procédure personnelle :

Dans une situation où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer le nombre de quantités (ou de valeurs).
D'autre part, la résolution de ce problème nécessite la connaissance de la monnaie et de l'utilisation des échanges.

Question 2
Analyse des 3 procédures.

Elève A :
Il constitue les sommes de 5 euro à partir des sommes correspondant à chaque pièce ou billet, soit en les décomposant soit en les regroupant.
Il tient un compte des sommes de 5 euro qu'il a pu ainsi former, ce qui lui permet d'en faire le total pour répondre correctement.

Elève B :
Il établit la liste des sommes d'argent par catégories de pièces et billets, calcule mentalement (aucune trace de calcul écrit) la valeur totale de la somme d'argent, soit 35 euro, somme à laquelle il ajoute 5 euro. Il semble perdre de vue le but à atteindre : Il additionne le nombre qu'il vient d'obtenir (35) au seul nombre donné non utilisé (5). Il utilise le résultat 40 (qui est une somme d'argent en euro) pour répondre que l'enfant obtient 40 billets (de 5 euro).
Cet élève semble ne pas être capable de distinguer l'aspect « mesure d'une grandeur » d'un nombre, ici la valeur d'une somme d'argent de l'aspect « cardinal » d'un nombre, ici un nombre de billets.

Elève C :
Il produit une écriture additive faisant apparaître les valeurs unitaires de pièces ou billets, puis il calcule la somme totale et fait une erreur de 2 unités (33 au lieu de 35) ; il a peut-être oublié un terme 2 en calculant la somme.
Par des soustractions successives de 5, il détermine le nombre de fois 5 qui est contenu dans la somme totale ; mais il se trompe à deux reprises dans le calcul des différences (33 – 5 = 28 et non 29 ; 24 – 5 = 19 et non 18).

Sa réponse est en cohérence avec sa procédure : le nombre de billets trouvé correspond bien au nombre de soustractions qui ont été faites.
Mais la réponse qu'il donne n'est pas la solution du problème.
Les écritures produites (33 – 5 = 29 – 5 = …), erronées du point de vue mathématique, sont acceptables dans un écrit de recherche, car elles traduisent un raisonnement correct.

Question 3
Eléments de remédiation.

Pour l'élève B :
<u>Démarche 1 :</u>
Dans une première étape, lui donner des vraies pièces de 1 € et 2 € et de vrais billets de 5 € et de 10 € et lui demander de réaliser les échanges, l'interroger sur le nombre de billets de 5 € ainsi obtenus ; dans une deuxième étape lui donner un problème analogue à résoudre sans matériel.
<u>Démarche 2 :</u>
Lui suggérer de matérialiser les pièces et les billets afin de l'aider à distinguer les objets, leur nombre et la valeur de chacun d'entre eux.
A l'aide de dessins, demander à l'élève de mettre en évidence la correspondance entre par exemple, cinq pièces de 1 euro et un billet de 5 euro, entre deux pièces de 2 euro et 1 pièce de 1 euro et un billet de 5 euro.
Suggérer d'écrire les égalités mathématiques qui expriment cette correspondance :
Par exemple : 2 + 2 + 1 = 5 ; 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 .

Pour l'élève C :
Lui suggérer, une fois le résultat d'une somme obtenu, de calculer cette somme d'une autre manière pour contrôler le résultat.
Lui proposer un travail autour des différentes manières de calculer une somme contenant des termes identiques.
Favoriser le calcul mental ; le faire décompter de 5 en 5 à partir d'un nombre.

<u>*Remarque :*</u>
Le fait de produire une réponse erronée à ce problème en début de CE2 ne signifie pas qu'il y a nécessité de mettre en place une remédiation pour ces élèves. Les propositions faites sont plutôt des propositions d'aide à la compréhension et à la résolution du problème.

Question 4
Autre procédure experte.

Une procédure experte de début CE2, moment où les élèves connaissent la multiplication serait, une fois calculée la somme totale de 35 euro, de chercher à atteindre ce nombre en multipliant 5 successivement par 2, 3, 4, ….
Cela conduit à dresser la liste des multiples de 5 : $2 \times 5 = 10$; $3 \times 5 = 15$; $4 \times 5 = 20$; …. ;$7 \times 5 = 35$.
La réponse est alors fournie par l'interprétation de cette dernière égalité : 7 billets de 5 euro font 35 euro.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1

Situation A

Fiche 1 :
Elle ne permet pas d'obtenir la figure car, sur la figure, le point A est sur le cercle de centre O et le segment [OA] a donc comme longueur le rayon de ce cercle annoncé par la fiche, soit 40 mm, ceci contredit la donnée de départ de la fiche qui est de 20 mm comme longueur pour OA.

Fiche 2 :
Elle permet de construire la figure.

Fiche 3 :
Elle ne convient pas, car la fiche situe le point A à l'intérieur du cercle de centre O alors que la figure indique que le point A est un point situé sur le cercle de centre O.

Remarques :
Sur le document présenté, on lit [OA]=20 mm, ce qui ne respecte pas le codage en vigueur actuellement qui distingue un segment noté [OA] de sa longueur notée OA. D'autre part il faut comprendre ici « l'intérieur » du cercle comme la surface plane dont le cercle est la frontière... à l'exclusion des points du cercle...

Situation B

Fiche 23 :
Elle ne convient pas car la fiche ne donne pas le point C comme milieu de [AO]. Néanmoins, l'absence de codage du milieu de [AO] peut justifier le choix de la fiche 23 par les candidats.

Fiche 24 :
Elle permet de construire la figure.

Fiche 25 :
Elle ne convient pas car elle fait tracer (DE) comme droite quelconque par rapport à (AB) alors que sur la figure (DE) est perpendiculaire à (AB).

Question 2
Comparaison des deux situations.

Ressemblances	Différences	
1) Les deux situations proposent la confrontation d'une figure et de trois programmes de construction : la tâche consiste à déterminer le programme qui correspond à la figure donnée. Dans les deux cas, il s'agit de tester si chaque programme permet d'obtenir la figure donnée.	1) A : Contrôle du rayon	B : Contrôle du rayon puis vérification qu'un segment donné est un diamètre (vérification de l'alignement des points A,O,B)
2) Les deux situations exigent le contrôle du tracé d'un cercle par vérification du centre et du rayon. 3) Les fiches de construction se présentent, dans les deux cas, comme une chronologie de constructions élémentaires.	2) A : Contrôles portant seulement sur les caractéristiques du cercle	B : Contrôles portant sur les caractéristiques du cercle mais aussi sur le milieu d'un segment, la perpendicularité, les points d'intersection de lignes du plan.
4) Les fiches de construction nécessitent dans les deux cas la compréhension du vocabulaire géométrique relatif au cercle, ainsi que la connaissance de l'écriture symbolique d'un segment : [AO].	3) A : La réponse peut être trouvée aussi bien par confrontation en allant de la figure vers la fiche ou de la fiche vers la figure.	B : La complexité de la figure donnée rend plus délicat le passage de la figure vers les fiches mais favorise l'examen de la fiche et la vérification de chaque étape dans la figure.

Question 3

La tâche, qui consiste à rapprocher une figure donnée de différents programmes de construction exige autant des connaissances mathématiques (caractéristiques géométriques) que des connaissances d'action qui sont l'application de ces connaissances (construction et vérification de ces caractéristiques).
Nous énumérons ci-dessous les connaissances géométriques : à chacune d'entre elles, il faut associer les savoir-faire correspondants (construire et vérifier).

<u>Situation A :</u>

- Construction (et vérification) d'un segment donné par la mesure de sa longueur.
- Caractérisation d'un cercle par l'identification de son centre et du rayon.
- Appartenance d'un point à une ligne déjà tracée (le cercle).

Ces connaissances relèvent des niveaux : Fin CE1 ou début CE2.

<u>Situation B :</u>

- Caractérisation d'un cercle par la connaissance de son centre et de son rayon.
- Connaissance du diamètre d'un cercle en tant que segment passant par le centre du cercle et joignant deux points de celui-ci.
- Caractéristique du milieu d'un segment.
- Reconnaissance d'une droite perpendiculaire à une autre à partir de la donnée du point d'intersection des droites.
- Points d'intersection d'une droite et d'un cercle.
- Détermination d'un quadrilatère à partir de la donnée de la liste des sommets.

  Niveau : CM1-CM2 compte-tenu de l'expertise des connaissances géométriques mises en oeuvre (elles relèvent du cycle 3) et de leur utilisation conjointe dans une même situation, ce qui constitue un facteur de complexité.

<u>Remarque :</u>
Une des difficultés spécifique à la situation B tient au fait qu'il faut repérer la non indication de propriétés (milieu et perpendiculaire) ; cela est plus délicat que le repérage d'indications contraires et suppose une compréhension de la distinction entre le général et le particulier en mathématique.
Les deux situations demandent à l'élève de connaître la désignation symbolique d'un segment, ce qui n'est pas exigible à l'école élémentaire.

Question 4
Eléments d'évaluation observables.

Les éléments communs aux deux situations :

- lire l'enchaînement des consignes d'un programme de construction
- maîtriser le vocabulaire géométrique relatif au cercle (centre, rayon et diamètre).
- mettre en relation des indications de construction avec des propriétés perçues puis vérifiées sur le dessin.
- rédiger une argumentation en géométrie.
- savoir décoder l'écriture symbolique d'un segment :[OA].
- mettre en relation des indications de construction avec des propriétés connues des objets géométriques et formuler ces propriétés comme des conditions nécessaires à l'obtention du dessin fourni.

Les éléments spécifiques à l'une ou l'autre des deux situations :

Situation A	**Situation B**
Connaître les positions relatives d'un point et d'un cercle selon la distance entre ce point et le centre.	Reconnaître un diamètre d'un cercle donné, à partir de la connaissance de ses extrémités**.** Repérer et vérifier qu'un point donné est le milieu d'un segment donné. Reconnaître et vérifier qu'une droite est perpendiculaire à une droite donnée, l'intersection étant un point donné. Reconnaître les points d'intersection d'une droite et d'un cercle. Savoir identifier un quadrilatère sur une figure, à partir de la donnée de ses sommets.

BESANÇON

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question a

Les multiples de 5 ont une écriture décimale dont le chiffre des unités est soit 0, soit 5. Pour les sélectionner on peut donc commencer par écrire tous les nombres proposés sous forme décimale usuelle :

$$\left.\begin{array}{l} 1025 \\ 3,6 \times 10^2 = 360 \\ 0 \times 10^6 = 0 \\ 19 \times 10^6 = 19\ 000\ 000 \end{array}\right\} \quad \text{sont des multiples de 5.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 312 \times 10^0 = 312 \\ 40120 \times 10^{-1} = 4012 \end{array}\right\} \quad \text{ne sont pas multiples de 5.}$$

Question b

Écrivons A et B décomposés en facteurs premiers :

$A = 2 \times 3^4 \times 3 \times 3 \times 5$ donc $A = 2 \times 3^6 \times 5$

A est divisible par les sept premières puissances de 3 :
3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 et 3^6.

$B = 30^3$ donc $B = (3 \times 2 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$

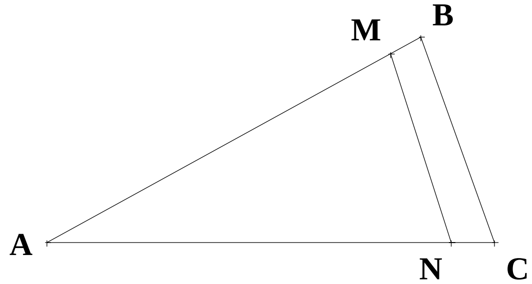
Donc **les quatre premières puissances de 3 (3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3) divisent B**.

EXERCICE 2

- Si François peut disposer N jetons en carré, alors $N = c^2$, en appelant c le nombre de jetons sur le côté du carré.
  Soit J le nombre de jetons de François :
  Première tentative : $J = n^2 + 52$
  Deuxième tentative : $(n + 4)^2 - 60 = J$
  On obtient donc : $n^2 + 52 = (n^2 + 16 + 8n) - 60$
  $52 + 60 - 16 = 8n$
  $n = 12$
  On conclut que : $J = 12^2 + 52 = 144 + 52 = 196$
  François possède donc 196 jetons.

- On remarque que $196 = 14^2$ donc son problème a bien une solution : il peut disposer ses 196 jetons “en carré” à condition de mettre **14 jetons par côté** (14 lignes de 14 jetons).

EXERCICE 3



Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, on a une configuration de Thalès avec deux triangles AMN et ABC de sommet commun A ; en particulier on a l’égalité :

(E) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Donc si les deux droites sont parallèles, alors l’égalité (E) est vraie ou, par contraposée, on a de façon équivalente : si l’égalité (E) est fausse, alors les deux droites ne sont pas parallèles.

Or $\frac{AM}{AB} = \frac{1{,}000001}{1{,}000002}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{1{,}000001}$

Il s’agit d’étudier si ces deux rapports sont égaux ou non.

<u>*Remarque :*</u>
L’utilisation d’une calculatrice est ici trompeuse car les calculs précis dépassent les possibilités d’affichage de tous les chiffres significatifs et la calculatrice procède alors aux arrondis programmés.

On peut raisonner ainsi (par les “produits en croix”) :

$\frac{1{,}000001}{1{,}000002} = \frac{1}{1{,}000001}$ si et seulement si $(1{,}000001)^2 = 1{,}000002$

Cette dernière égalité est fausse puisque devra apparaître dans l'écriture décimale du carré de 1,000001 le chiffre 1 (comme produit 1×1)) au douzième rang à droite de la virgule, or ce chiffre n'apparaît pas dans la partie décimale de 1,000002.
L'égalité (E) est donc fausse, et les droites ne sont pas parallèles.

Autre démonstration :

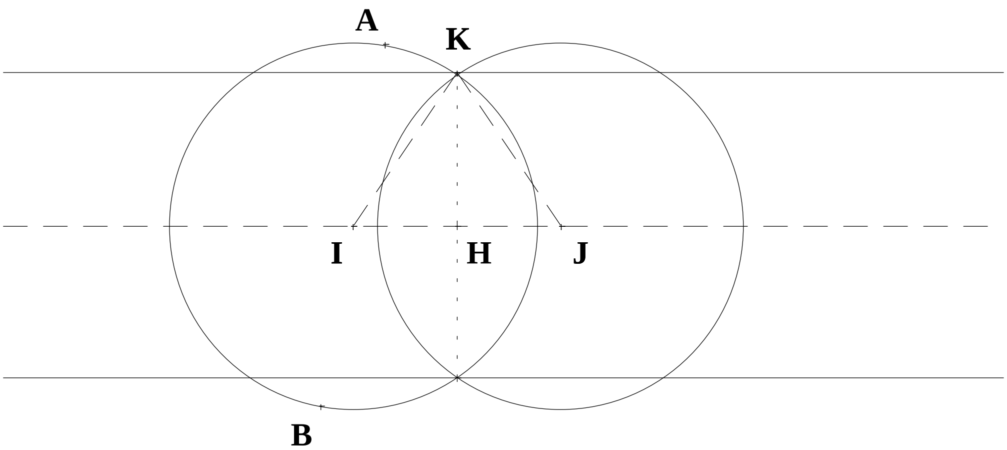
Rappelons que lorsqu'on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b et d différents de 0), on a aussi les égalités : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ (La fonction linéaire qui associe a à b et c à d, associe aussi à (a - c) la différence (b - d)).
Ici on obtiendrait en supposant l'égalité (E) :

$$\frac{1{,}000001}{1{,}000002} = \frac{1}{1{,}000001} = \frac{0{,}000001}{0{,}000001} = 1$$

ce qui est faux !

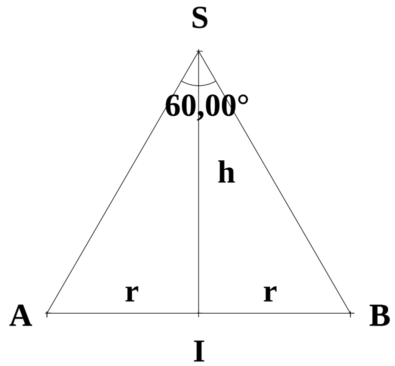
EXERCICE 4

Il faut tout d'abord interpréter la figure proposée comme étant une vue "du dessus" : on a la route et son axe médian en pointillés, l'emplacement de deux projecteurs marqués par deux traits sur cet axe, et assimilés à deux points I et J centres de deux disques sécants représentant les deux cônes de lumière projetée sur la route. En effet l'intersection d'un cône de révolution avec un plan perpendiculaire à la hauteur du cône est un disque dont le centre est un point de la hauteur.



Cette figure représente la position exacte des centres, qui permet de n'avoir aucune zone d'ombre sur la route ; les deux points intersections des deux cercles sont exactement sur les droites définissant les bords de la route ; si on écarte les centres, ces deux points intersections passent à l'intérieur de la "bande" route et il y aura de l'ombre sur la route ; si on rapproche les deux centres, ces deux points intersections passent à l'extérieur de la "bande" route et une plus grande partie des "bas-côtés" sera éclairée.
La distance maximale recherchée est bien d.

Schématisons alors un projecteur et son cône de lumière de sommet S en représentant une section plane (SAB) passant par l'axe (SI) du projecteur et perpendiculaire au plan de la route (plan de la figure proposée). Il faut d'ailleurs comprendre que c'est dans un tel plan vertical que l'angle au sommet vaut 60°.



C'est l'angle du triangle SAB isocèle (puisque le cône est de révolution) : SA = SB.
La hauteur [SI] de ce triangle est aussi la hauteur du cône, et a donc pour longueur 9 m : IS = h = 9.
Et le pied I de la hauteur est le centre du disque de lumière de rayon r :
AB = 2r (dans un triangle isocèle la hauteur "principale" est aussi médiane.)
Le triangle isocèle SAB a un angle de 60°, donc ses deux autres angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux ; de plus leur somme vaut 120° (180° - 60°), donc les trois angles de SAB sont égaux à 60° et SAB est un triangle équilatéral.
On peut calculer r avec le théorème de Pythagore dans le triangle SIB rectangle en I :

$$SB^2 = IS^2 + IB^2$$
$$(2r)^2 = 9^2 + r^2$$
$$3r^2 = 81$$

$r^2 = 27$ $r > 0$ donc $r = 3\sqrt{3}$ (en m) et $r \approx 5{,}2$ m

<u>Calcul de d :</u>
Dans la figure "vue de dessus" considérons le triangle IJK isocèle en K puisque IK = JK = r (les disques de lumière projetée ont même rayon r).
La hauteur principale de ce triangle a pour longueur KH = 4 m (moitié de la largeur de la route) et est aussi médiane (IJK triangle isocèle en K) :

H est le milieu du segment [IJ] $IH = JH = \frac{d}{2}$

Calculons cette longueur IH dans le triangle IKH rectangle en H, en utilisant le théorème de Pythagore :

$$IH^2 = IK^2 - KH^2$$
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 - 16 = 27 - 16 = 11$$

soit $\frac{d^2}{4} = 11$ et $d^2 = 44$ donc $d = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

soit $d \approx 6{,}6$ m

La distance maximale qui doit séparer deux projecteurs pour qu'il n'y ait aucune zone d'ombre sur la route est donc $2\sqrt{11}$ mètres, soit 6,6 mètres au dixième près.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Remarque :
Le candidat doit prêter attention à l'utilisation du terme "chiffre".
On écrit le nombre 15 en dessinant le chiffre 1 puis le chiffre 5.
Mais dans une consigne du type « Prends 2 jetons ! », 2 est un nombre et non un chiffre, puisqu'il exprime une quantité.

Question 1
Procédures engagées par les élèves

Le nombre de carrés de chocolat mangés par les souris est 18.
Les quatre élèves ont compris la situation et développent chacun une procédure pour dénombrer les carrés de chocolat qui, pour eux, sont manquants.
Ils ont tous tenu compte que les carrés mangés se répartissaient en trois "trous".

Charlotte :
Pour le premier trou elle énumère les carrés qu'elle reconnaît, d'abord sur la 1ère ligne puis en suivant les bords du trou, en inscrivant l'écriture chiffrée des nombres dans l'ordre de la comptine jusqu'à 10 ; puis elle continue sans se tromper pour les deux carrés en ligne du deuxième trou et les trois carrés en colonne du troisième trou, arrivant ainsi à l'écriture 15, elle termine en revenant au premier trou pour écrire 16 sur un carré oublié et bien délimité par la découpe de deux côtés. Elle conclut en écrivant 16 en gros caractères, 16 étant le dernier nombre qu'elle a probablement énoncé (on remarque qu'elle avait bien oublié ce seizième carré puisqu'elle avait d'abord conclu 15).

Léo :
On peut faire l'hypothèse qu'il évalue globalement par lignes (par colonne pour le troisième trou) la partie occupée par un carré de chocolat en dessinant un gros point au centre approximatif de son emplacement présumé ; pour cela il s'aide des lignes de carrés existantes mais ne prend pas en compte l'alignement des colonnes. Puis il dénombre les points dessinés, sans doute par comptage et conclut en écrivant 17.

Manon :
Elle a voulu visualiser tous les carrés de la tablette et a reconstitué à la main le quadrillage en s'appuyant sur les parties de lignes et colonnes existantes. Puis elle effectue le dénombrement des carrés de chacun des trois trous qu'elle additionne en colonnes. Pour le premier trou elle compte par lignes et utilise une écriture additive pour noter le nombre de carrés qu'elle calcule alors correctement (13). Elle conclut justement en écrivant son résultat final calculé 18.

Dylan :
Il visualise non des carrés, mais des barres de chocolat (5 barres en lignes et 1 barre en colonne) et confond donc carré et barre. Il dénombre alors ces barres en

les comptant et en écrivant successivement chaque nombre de la comptine de 1 à 6. Il conclut en écrivant le cardinal trouvé : 6.

Question 2
Qualités et erreurs des productions

Remarque :
Certaines des qualités énoncées dans ce tableau doivent faire partie des acquis d'un élève en cours de C.P.

	Qualité(s)	Erreur(s)
Charlotte	a compris le problème. connaît la comptine et l'écriture des nombres jusqu'à 16. sait que le dernier nombre énoncé désigne le nombre total (principe cardinal).	oublie 3 carrés centraux dans le 1^{er} trou. ajoute un carré inexistant, compté comme le $9^{ème}$. écrit le chiffre 7 "en miroir".
Léo	a compris le problème. a cherché à visualiser tous les carrés. sait dénombrer une collection de 17 éléments.	oublie un carré central à la $3^{ème}$ ligne du 1^{er} trou.
Manon	a compris le problème. sait visualiser les carrés en retrouvant et en traçant le quadrillage disparu. explicite sa démarche par un calcul additif en ligne, puis en colonne. utilise et maîtrise l'écriture additive et les calculs additifs.	aucune erreur.
Dylan	a compris le sens du problème. possède le principe cardinal (pour une collection de 6).	n'a pas compris ce que représentait un carré de chocolat.

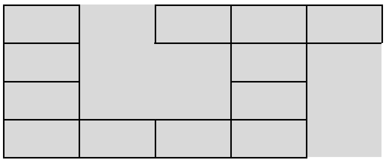
Remarque :
Pour Charlotte et Léo, les difficultés ne sont pas d'ordre numérique mais d'ordre spatial.

Question 3
Remédiations envisageables

Après avoir précisé à Dylan la différence entre une barre de chocolat et un carré de chocolat, le maître pourrait alors distribuer à chaque élève le nombre de carrés de chocolat (découpés dans du carton à l'échelle de l'illustration de l'exercice) qui correspond à sa réponse et leur demander s'ils parviennent avec ces carrés à reconstituer la totalité de la tablette de chocolat. Cette étape déboucherait pour chacun sur le constat de son erreur ou de sa réussite, c'est la première étape de toute démarche de remédiation. Il arrive que cette étape permette aussi aux élèves de découvrir la cause de leur erreur, il suffit alors de leur proposer un exercice semblable au précédent pour leur permettre de réinvestir leur découverte et s'assurer ainsi de la validité de leur procédure que le maître confirmera.

Si après cette première étape de constat les élèves ne parviennent pas à analyser les causes de leur erreur, le maître leur proposera une nouvelle situation en prévoyant des aides adaptées en fonction du type d'erreur commise :

- Pour Dylan si les explications précédentes n'ont pas suffi à lui faire prendre conscience de la différence entre barre et carré, le maître peut par exemple lui proposer un petit quadrillage du type 5x4 sur papier blanc avec 2 trous, l'un de 5 carrés, l'autre de 3 carrés, et lui demander : « Voici un tableau avec des cases ; certaines ont leurs bords effacés. Essaie de colorier toutes les cases avec deux couleurs différentes, jaune et rouge ; deux cases voisines par un bord ne doivent pas être de la même couleur. »



  Il peut aussi lui proposer un transparent portant un quadrillage de même taille pour contrôler, par superposition, son coloriage.
  Puis il peut lui donner un quadrillage équivalent à la tablette de chocolat avec ses trois trous et lui demander de dessiner les carrés manquants et de les dénombrer.

- Pour Charlotte et Léo le maître peut leur donner une consigne comme « Dessine tous les carrés du premier trou en t'aidant d'une règle ». Cette aide peut être efficace en leur apprenant ainsi à visualiser tous les carrés, s'ils rétablissent le quadrillage. Il peut, là aussi, leur proposer un quadrillage sur transparent comme moyen de contrôle avant de leur proposer de dénombrer les carrés manquants.

Remarque :
Le fait de produire une réponse erronée à ce problème en cours de CP ne signifie pas qu'il y a nécessité de mettre en place une remédiation pour ces élèves. Les propositions faites sont plutôt des propositions d'aide à la compréhension et à la résolution du problème.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Remarque :
Ces deux élèves Mathieu et Mathilde sont fictifs et peu vraisemblables. Cependant on peut bien sûr décrire leurs procédures.

Question 1
Niveau de classe

Les exercices de l'annexe 2 concernent des additions à trou, des soustractions à trou, des multiplications à trou et des divisions à trou (avec reste nul) sous la forme du jeu « le nombre pensé ».
Les calculs additifs utilisent des nombres inférieurs à 2500. Les notions de multiple (inférieur à 1000) et de diviseur d'une part, de « n fois plus grand », « n fois plus petit » d'autre part, et de division euclidienne avec reste nul et diviseur à un chiffre doivent être acquises pour faire ces exercices.
On est donc nécessairement au cycle 3, en CM1 ou en CM2 selon les progressions choisies par le maître de la classe.

Remarque :
On pourrait penser aussi à une classe de CE2 en fin d'année, en particulier pour les problèmes additifs, malgré une difficulté certaine dans la gestion des informations. Cependant un problème multiplicatif tel que le "quatrième nombre pensé" est difficile même si les notions de multiples et diviseurs sont travaillées en CE2 : remplacer 762 par un nombre comme 624 permettrait à l'élève de reconnaître plus facilement un multiple de 6.

Question 2 a
Calculs de Mathieu

- Situation 1 : « Je cherche … + 47 = 141 »

70 + 47 = 117	**c'est plus de 70**
90 + 47 = 137	**c'est plus de 90**
100 + 47 = 147	c'est moins de100
C'est donc entre 90 et 100	
95 + 47 = 142	c'est moins de 95
94 + 47 = 141	Gagné ! C'est 94 !

- Situation 2 : « Je cherche … - 32 = 127 »

200 - 32 = 168	**c'est moins de 200**
180 - 32 = 148	**c'est moins de 180**
150 - 32 = 118	c'est plus de 150
160 - 32 = 128	c'est moins de 160
159 - 32 = 127	Gagné ! C'est 159 !

Question 2 b
Comparaison des procédures utilisées par les deux élèves

Procédure de Mathieu :
Il comprend le problème et le traduit immédiatement par une écriture additive (ou soustractive) à trou. Il procède alors par essais raisonnés ; il commence en choisissant un nombre qui est un nombre entier de dizaines et suffisamment petit dans la situation 1 (en gros la moitié du nombre 141 à obtenir) ou suffisamment grand dans la situation 2 (en gros le double du nombre 127 à obtenir) ; il traduit son raisonnement par une écriture additive ou soustractive et compare la somme ou la différence trouvée au nombre à obtenir ; il ajuste en conséquence son essai suivant en choisissant soit un nombre plus grand, soit un nombre plus petit pour essayer de trouver le nombre pensé.

Procédure de Mathilde :
Elle comprend le problème et tout de suite se représente mentalement la droite numérique avec le nombre pensé comme un point (inconnu) sur cette droite ; toujours mentalement elle schématise et code la transformation additive (ou soustractive) opérée sur ce “nombre point” par un saut en avant puisqu’on ajoute (ou en arrière puisqu’on retire) ; elle visualise le nombre obtenu sur sa droite et constate qu’il est à droite donc plus grand que le nombre pensé (ou à gauche donc plus petit). En comparant alors ces deux nombres (le nombre pensé qu’elle a placé en premier et le nombre obtenu après l’action de la transformation) elle déduit immédiatement l’écriture du nombre pensé sous forme de différence (ou de somme) en appliquant la transformation réciproque (inverse) au nombre obtenu. Il reste à effectuer le calcul.

Comparaison des deux procédures :
La procédure de Mathilde aboutit à une écriture soustractive ou additive du nombre pensé et il faut encore mener à bien un calcul pour avoir son écriture usuelle. Elle est cependant plus rapide que la procédure par essais, même raisonnés. Elle utilise une représentation efficace des nombres et des problèmes additifs de transformation (ici avec état initial inconnu) et amène à lier une transformation et sa transformation réciproque (donc addition et soustraction).
La procédure de Mathieu s’appuie sur la reconnaissance de l’écriture additive ou soustractive à trou traduisant l’énoncé, donc sur l’opération mise en jeu par l’énoncé, puis sur une bonne maîtrise du sens des calculs menés avec les différents essais, et en surmontant la gestion complexe des comparaisons et des ajustements à en déduire, par exemple dans la situation 1 : avec 70 j’obtiens 117, 117 est plus petit que 141, donc j’essaie avec un nombre plus grand que 70.
Ces deux procédures s’appuient sur la comparaison des nombres (plus grand, plus petit) qui, soit guide les essais de Mathieu, soit induit pour Mathilde la transformation réciproque.

Question 3
Analyse de la progression proposée

Un premier élément de progression est la nature des opérations mathématiques travaillées ; le premier exercice concerne le champ additif (addition et soustraction) ;

le deuxième concerne le champ multiplicatif (multiplication et division euclidienne avec reste nul) ; le troisième exercice mêle les deux champs.
Un deuxième élément tient à une succession de 3 phases : d'abord présentation du jeu du nombre pensé et de la méthode de Mathieu, détaillée mais que les élèves doivent mener à son terme, et de la méthode de Mathilde en bande dessinée de 4 vignettes qui la détaillent complètement (il reste à effectuer le calcul), ceci dans le champ additif ; puis phase 2 (exercice 2) dans le champ multiplicatif avec la méthode de Mathilde présentée en une vignette avec le 3ème jeu et seulement amorcée avec le 4ème jeu ; enfin la phase 3 (exercice 3) est une phase d'entraînement proposant 4 jeux dans le champ additif et 4 jeux dans le champ multiplicatif mêlés, suivis d'une demande d'invention de deux autres jeux pour renforcer la compréhension.
On privilégie la méthode de Mathilde qui occupe une place plus importante que celle de Mathieu, cette dernière disparaissant d'ailleurs rapidement ; à chaque nouveau calcul on laisse de plus en plus d'étapes à la charge de l'élève qui est censé devenir capable de s'en sortir tout seul après ce guidage évolutif.
Certes on trouve aussi dans cette phase d'entraînement des nombres plus grands (dans le champ additif : F et G), mais cela ne paraît pas un élément déterminant de progression.

<u>*Remarque :*</u>
La procédure de Mathilde évoquée dans le champ additif/soustractif (droite numérique) n'est évoquée que partiellement dans le champ multiplicatif. Il n'est pas évident que les élèves transfèrent l'utilisation de la droite numérique dans la recherche du nombre pensé dans le champ multiplicatif : « 3 fois moins » ne se traduit pas aussi facilement que « 3 de moins » sur ce support et la transformation inverse est donc plus difficile à prendre en compte par l'intermédiaire de ce support.

Question 4
Cas des élèves en difficulté qui n'entrent pas dans les procédures décrites

On ne s'intéresse pas dans cette question aux difficultés liées aux apprentissages de l'addition, de la soustraction, de la multiplication ou de la division.
On peut remarquer que les procédures décrites sont des procédures modélisées, c'est-à-dire exécutées savamment par un hypothétique élève expert qui comprend, raisonne, déduit et calcule bien.
Même pour des élèves qui ne sont pas en difficulté, il n'est pas souhaitable de les faire travailler directement sur cette page.
La situation du nombre pensé doit d'abord être comprise par l'élève donc bien mise en scène par le maître ; par exemple le maître peut utiliser une calculette[1] : « Je pense à un nombre et je le tape sur ma calculette » ; il choisit un élève témoin qui note secrètement ce nombre et pourra ainsi valider les propositions des autres ; « Je tape + 47, je tape sur la touche = et j'obtiens141. » et il montre l'écran de sa calculette : « Quel était le nombre de départ ? ».
Le fait de permettre aux élèves de se servir, eux aussi, de leur calculette, peut alors débloquer certains élèves, mauvais calculateurs, qui vont s'approprier plus facilement la méthode de Mathieu.

[1] Cf. livre du maître CM2 page 100, éditions Retz.

Mais c'est la méthode de Mathilde qui est centrale dans cet apprentissage, et pour l'acquérir, il est nécessaire d'être familier et sûr avec l'utilisation de la droite numérique, en particulier savoir placer les uns par rapport aux autres différents nombres (sans se préoccuper d'échelle à respecter), savoir associer l'addition à un déplacement sur l'axe dans le sens des valeurs croissantes, et associer la soustraction à un déplacement sur l'axe dans le sens des valeurs décroissantes. Il faudrait aussi les inciter à schématiser eux-mêmes sur feuille « comme Mathilde ».

Remarques :
La difficulté du jeu du nombre pensé réside plus dans la traduction de la situation que dans le calcul : les mots utilisés induisent des transformations qui, si elles ne sont pas inversées, aboutissent à un résultat erroné.
Proposer des questions intermédiaires du style « Je pense à un nombre, je lui ajoute 10 ; je trouve 184. Le nombre auquel j'ai pensé est-il plus petit ou plus grand que 184 ? Est-il avant ou après 184 ? » peut contribuer efficacement à la compréhension de la situation.
Pour des élèves en difficulté, leur proposer (avant les exercices avec la calculatrice) des nombres avec lesquels ils n'ont pas de difficultés calculatoires peut aussi les aider à se construire des représentations du jeu.

Question 5 a
Intentions de l'auteur

Comme le dit le titre, les intentions de l'auteur sont de rendre le plus explicite possible pour les élèves le lien entre addition et soustraction d'une part, et entre multiplication et division ("exacte") d'autre part. Plus précisément il veut diffuser la procédure de Mathilde qui s'appuie sur la représentation des nombres à l'aide de la droite numérique, et la perception d'une transformation (additive ou multiplicative) et de sa transformation réciproque ; ainsi l'élève apprendra que le "nombre trou" de … + 47 = 141 peut être calculé par 141 – 47, ou que le "nombre trou" de … : 3 = 14 peut être calculé par 14 × 3.
Sont alors associées les notions :

- d'addition et soustraction
- de multiple et diviseur
- de multiplication et division euclidienne "exacte"[2]

Question 5 b

Remarque préalable :
Cette question est vraiment délicate à interpréter. Qu'entendent les auteurs du sujet par « ce support » ? Serait-ce le jeu du nombre pensé ? Serait-ce la progression en 3 étapes ? Serait-ce la présentation de méthode sous forme de bande dessinée ? Serait-ce la présentation de la méthode précise de Mathilde ?
Et que veulent-ils dire par « dans une situation d'apprentissage » ? Serait-ce que, pour eux, cette séquence 29 n'est pas une situation d'apprentissage ? Ou encore

[2] L'expression correcte est division euclidienne avec reste nul.

doit-on raisonner pour une situation d'apprentissage d'une quelconque notion mathématique ?
Il est raisonnable de décider que le support désigne l'ensemble de l'annexe 2 ; qui en fait est le montage de deux pages successives du manuel (pages 44 et 45) auxquelles on a enlevé de courtes informations (principalement destinées au maître).
Et la question portant sur « une situation d'apprentissage » relève certainement d'une réflexion pédagogique et didactique sur les méthodes d'enseignement.

L'important pour un maître est de proposer un réel apprentissage à tous ses élèves, et pas seulement aux élèves les plus experts.
Il faut donc proposer des situations qui vont prendre du sens pour tous les élèves parce qu'ils doivent agir (et pas seulement manipuler) et donc s'impliquer personnellement. Il est nécessaire aussi que l'élève prenne conscience de son propre raisonnement, donc qu'il soit amené à formuler ce qu'il a essayé de faire, à en débattre avec d'autres, à comparer les procédures découvertes (selon leur rapidité, fiabilité, efficacité).
Les réponses données aux questions 3 et 4 montrent que ce support ne satisfait pas à ces conditions ; bien sûr des élèves déjà experts sauront identifier les procédures de Mathieu et Mathilde, les comparer, se les approprier et choisir celle de Mathilde.
Mais avec cette démarche on ne fait que montrer ce qu'il faut faire, on oblige l'élève à adopter la procédure de Mathilde par un guidage contraint sans étapes évolutives possibles, on passe donc directement à l'apprentissage d'une procédure experte sans expérimenter de procédures personnelles et on demande alors d'appliquer : où sont les essais de procédures personnelles ? L'élève ne pourra ni s'impliquer, ni analyser et dépasser les erreurs commises lors de ses essais : que pourra-t-il alors vraiment apprendre ?
On est de plus en contradiction nette avec les programmes 2002 du cycle 3 :
« …Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat. »

BORDEAUX, CAEN, CLERMONT-FERRAND, LIMOGES, NANTES, POITIERS, RENNES

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1
Tableau complété

Pour arrondir les résultats au dixième, nous avons arrondi au plus proche du dixième.

Nombre d'enfants : n	Nombre d'élèves	Pourcentage d'élèves dont la famille comporte n enfants
1	5	19,2 X
2	10	38,5 X
3	6 X	23,1 X
4	5	19,2 X
5 ou plus	0	0

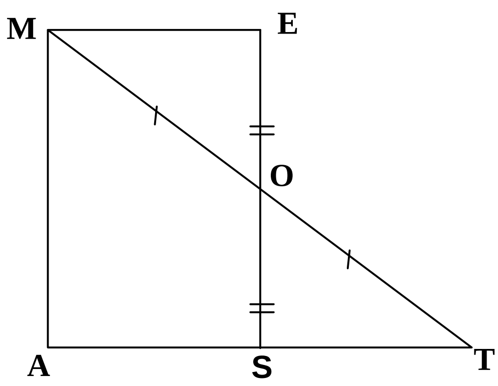
Question 2
Nombre d'élèves ayant au moins deux frères et sœurs

S'ils ont deux frères et sœurs au moins, c'est que le nombre d'enfants est au moins 3. La réponse est donc 6 + 5 = 11
Réponse : 11.

Question 3
Un nouvel élève arrive, il a deux sœurs…

Les cases concernées sont cochées sur le tableau ci-dessus. Si cet élève a deux sœurs, cela signifie qu'ils sont trois dans la famille, ce qui a pour conséquence la modification de l'effectif d'élèves de familles de 3 : 7 à la place de 6 **(croix dans la troisième ligne de la deuxième colonne)**.
Tous les pourcentages seront modifiés en conséquence (**croix dans la troisième colonne).**

EXERCICE 2



Question a
Aire du triangle MAT

Le demi-périmètre est : $p = \dfrac{4{,}2 + 5{,}6 + 7}{2}$ = 8,4 (en cm)

aire (MAT) = $\sqrt{8{,}4 \times (8{,}4 - 4{,}2) \times (8{,}4 - 5{,}6) \times (8{,}4 - 7)}$ (en cm^2)

= $\sqrt{8{,}4 \times 4{,}2 \times 2{,}8 \times 1{,}4}$

= $\sqrt{138{,}2976}$

Aire (MAT) = 11,76 (en cm^2)

Question b
Calcul de l'aire d'une autre façon

Les mesures des côtés permettent de conclure que le triangle vérifie l'égalité suivante :
$7^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2$.
Cette égalité permet, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, de conclure que le triangle MAT est rectangle en A.
L'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{MA \times AT}{2}$, ce qui donne : $\dfrac{4{,}2 \times 5{,}6}{2} = 11{,}76$.
L'aire du triangle est donc 11,76 cm^2

Question c
Aire du triangle TOS

Plusieurs démonstrations sont possibles :

Méthode 1 : A partir de la droite des milieux
(OS) est parallèle à (AM), l'angle TAM est droit, donc l'angle TSO est droit. De plus MA = 2 OS. Comme on sait que AT = 2ST alors
Aire(MAT) = $\frac{MA \times AT}{2} = \frac{2OS \times 2ST}{2} = 4$ aire(TOS).
Donc **aire (TOS) =** $\mathbf{\frac{11{,}76}{4} = 2{,}94}$ **(en cm^2)**

Méthode 2 : En se servant de l'homothétie de centre T et de rapport $\frac{1}{2}$ qui fait passer du point M au point O et du point A au point S (cf. la droite des milieux).
Les deux triangles MAT et OST sont homothétiques, leurs aires sont dans le rapport le carré du rapport d'homothétie, donc aire(TOS) = $\frac{\text{aire(MAT)}}{4}$

Aire (TOS) = $\mathbf{\frac{11{,}76}{4} = 2{,}94}$ **(en cm^2)**

Question d
Aire du quadrilatère MASE

E est le symétrique de S par rapport à 0 et on sait que O milieu de [MT].
La droite(ME) est donc la transformée de la droite (ST) par la symétrie de centre O, donc (ST) et (ME) sont deux droites parallèles, donc [ME] et [AS] sont parallèles.
D'après le théorème de la droite des milieux appliqué au triangle MAT, (SE) et (AM) sont deux droites parallèles.
Par suite, le quadrilatère MASE a ses côtés opposés parallèles deux à deux ; c'est donc un parallélogramme.
De plus l'angle $\widehat{ATM}$ est droit. Le quadrilatère MASE est donc un rectangle.
Son aire est obtenue :

Méthode 1 : en effectuant le produit de sa largeur par sa longueur.

Aire(MASE) = MA × AS
MA × AS = 4,2 × 2,8
Aire(MASE) = 11,76 (en cm^2).

Méthode 2 :
Une autre solution possible consiste à comparer les aires des triangles TOS et MOE (égales par symétrie centrale). On a alors :
Aire(MASE) = Aire(MASO) + Aire(MOE)
Aire(MASE) = Aire(MASO) + Aire(TOS)
Donc Aire(MASE) = Aire(MAT).
En utilisant le résultat de la question b : ***Aire(MASE) = 11,76 (en cm^2).***

Question e
Comparaison des périmètre de MAT et de MASE

<u>Méthode 1 :</u>
Le périmètre de MASE est 2 (MA + AS), soit 14 cm.
Le périmètre du triangle TAM est MA + AT + MT : 4,2 cm + 5,6 cm + 7 cm = 16,8 cm
Ces deux figures ont même aire et n'ont pas même périmètre.

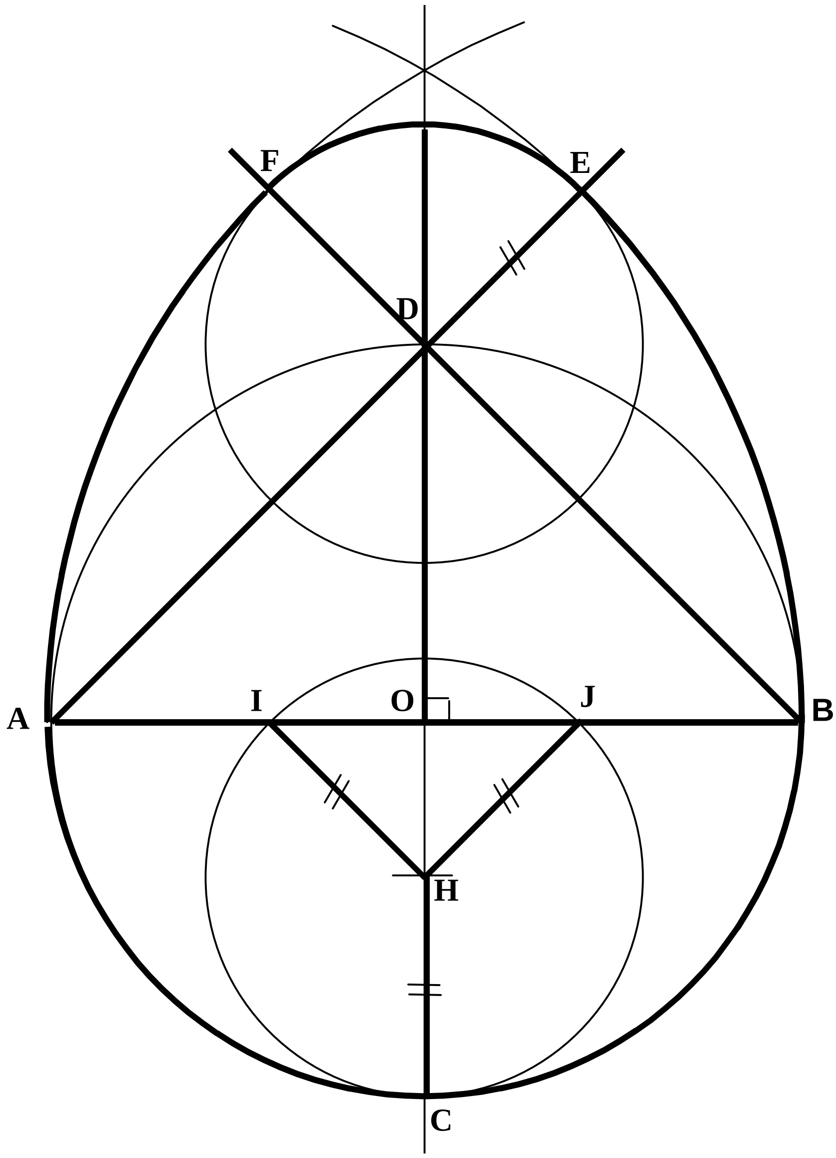
<u>Méthode 2 :</u>
le périmètre de MASE est : MA + AS + SO + OE + EM = MA + AS + 2SO + EM
le périmètre de MAT est : MA + AS + ST + TO + OM = MA + AS + ST + 2TO (1)
Or, ST = ME (symétrie centrale de centre O).
MA + AS + 2SO + EM = MA + AS + 2SO + ST (2)
La comparaison de (1) et (2) se réduit à la comparaison de SO et de TO.
TO>SO (TO longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et SO longueur d'un côté) Cela implique donc : périmètre de MASE > périmètre de MAT.
Ces deux figures ont même aire et n'ont pas même périmètre.

EXERCICE 3

Question I
Reproduction du dessin avec OB = 5cm

<u>Remarque :</u>
Dans ce corrigé, nous avons tracé la figure à l'échelle demandée à des questions de reprographie près. Dans ce type de question, le jury est attentif aux traits de construction qui permettent de comprendre comment le candidat est parvenu à reconstruire la figure.

Nous rédigeons brièvement des éléments du programme de construction se basant sur la figure d'origine, bien que cela ne soit pas demandé dans le sujet :
- Tracer le cercle de centre O et de rayon 5 cm,
- Tracer un diamètre [AB] de ce cercle,
- Tracer le diamètre [CD] perpendiculaire à [AB],
- Tracer les demi-droites [AD) et [BD),
- Tracer les arcs de cercle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs A et B, et de rayon AB ; $\mathcal{C}_1$ coupe [AD) en E et $\mathcal{C}_2$ coupe [BD) en F.
- Tracer l'arc de cercle de centre D, passant par E et F, situé au-dessus de D,
- Tracer alors le point H sur le segment [OC] tel que HC = DE,
- Tracer le cercle de centre H et de rayon HC ; il coupe [AB] en I et J.
- Tracer [HI] et [HJ].



Question II 1 a
Calcul de DE et de OH

A, D et E sont dans cet ordre sur la droite (AE). Donc DE = AE - AD.
Calculons AD :
Le triangle ODA est rectangle isocèle par construction, donc AD = OA$\sqrt{2}$,
c'est à dire AD = 5$\sqrt{2}$.
Le rayon du cercle de centre A passant par B et E est 10 cm donc la longueur de [AE] est 10 cm.
DE = AE - AD d'où **DE = 10 - 5$\sqrt{2}$.**

OH = OC - HC
OH = 5 - (10 - 5$\sqrt{2}$) = 5 – 10 + 5$\sqrt{2}$ = 5$\sqrt{2}$ - 5
D'où **OH = 5($\sqrt{2}$ - 1)**

Question II 1 b
Mesure de l'angle $\widehat{IJH}$

Le triangle JHI est isocèle par construction. Montrons que l'angle en H de ce triangle est un angle droit.

Cinq démonstrations possibles :

Méthode 1 : (trigonométrie)
L'angle $\widehat{IJH}$ est aussi l'angle $\widehat{OJH}$. Le fait de calculer le sinus de cet angle et qu'il soit aigu nous permettra de calculer sa mesure.
Le triangle HOJ est rectangle en O et HJ = HC (rayons du cercle de centre H passant par C).
CH = DE = HJ = $5(2 - \sqrt{2})$
OH = OC – CH = $5(\sqrt{2}-1)$
$$\text{Sin}(\widehat{OJH}) = \frac{OH}{HJ} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{5(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+2)}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)} = \frac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2+4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
(on utilise la quantité conjuguée $2 + \sqrt{2}$ du dénominateur pour rendre le dénominateur rationnel).
Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45°.

Méthode 2 : (utilisant le théorème de Pythagore)
On connaît OH : $5(\sqrt{2} - 1)$. On connaît HJ : $5(2 - \sqrt{2})$, car HJ = DE.
Dans le triangle OJH, rectangle en O, utilisons le théorème de Pythagore :
$HJ^2 = OJ^2 + OH^{2,}$
$OJ^2 = HJ^2 - OH^2$
$OJ^2 = 25\,(3 - 2\sqrt{2})$
Or $OH^2 = 25\,(3 - 2\sqrt{2})$ donc OJH est rectangle isocèle en O. Donc $\widehat{OJH} = 45°$
Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45°.

Méthode 3 : (utilisant la réciproque du théorème de Pythagore)
En reprenant la démonstration précédente, après $OJ^2 = 25\ (3 - 2\sqrt{2})$, on montre l'égalité de IJ^2 et de $IH^2 + HJ^2$. La réciproque de Pythagore permet de dire que IJH est rectangle en H. On sait de plus que IH = HJ. Ce triangle est donc isocèle rectangle.
Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45°.

Méthode 4 : (utilisant le théorème de Thalès)
On peut comparer $\frac{OH}{OD}$ et $\frac{HJ}{DA}$:
$$\frac{OH}{OD} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{5}$$
donc $\frac{OH}{OD} = \sqrt{2} - 1$

$\frac{HJ}{DA} = \frac{DE}{DA}$

donc $\frac{HJ}{DA} = \frac{5(2-\sqrt{2})}{5\sqrt{2}}$

soit $\frac{HJ}{DA} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$

Les rapports sont égaux.
La réciproque du théorème de Thalès permet de justifier le parallélisme de (HJ) et (AD). Le triangle DAO est rectangle isocèle par construction. Donc l'angle $\widehat{DAO}$ vaut 45°. Les angles $\widehat{DAO}$ et $\widehat{IJH}$ sont alternes internes égaux.

<u>Méthode 5 :</u> (utilisant l'homothétie)
On peut comparer $\frac{OH}{OD}$ et $\frac{HJ}{DA}$ qui sont égaux. Les points A et D sont donc les transformés des points J et H dans une homothétie de centre O. L'homothétie conserve les angles, donc les angles $\widehat{DAO}$ et $\widehat{HJO}$ sont égaux.

Question II 1 c
Égalités CH = JB et DE = JB

OB = OJ + JB ; OC = OH + HC, donc JB = OB – OJ ; HC = OC-OH.
OB = OC et OJH est un triangle rectangle isocèle en O (voir question II 1 b, méthode 2), donc OJ = OH.
On en déduit :
HC = JB.

HC = DE par construction, donc **DE = JB**

Question II 2
Aire de la pièce DEB

Aire de la pièce DEB = Aire du secteur de disque EAB – Aire du triangle DAB
Donc, pour calculer l'aire de la pièce DEB, nous calculons l'aire du secteur de disque EAB et l'aire du triangle DAB.
L'aire du disque de centre A et de rayon AB vaut $\pi 10^2$.
L'angle du secteur du disque $\widehat{EAB}$ mesure 45°.
Donc l'aire du secteur vaut $\frac{1}{8}$ de l'aire du disque, car $45 = \frac{1}{8} \times 360$; soit :

$$\frac{1}{8}\pi(10)^2 = 25\frac{\pi}{2}.$$

L'aire du triangle DAB vaut : $\frac{10 \times 5}{2} = 25$ (en cm^2).

L'aire de la pièce DEB vaut donc : $25\frac{\pi}{2} - 25$

soit **14,27 (en cm^2)**, arrondi au centième de cm^2 près.
Périmètre de la pièce DEB = DE + DB + Longueur de l'arc $\overset{\frown}{BE}$.
Pour calculer le périmètre de cette pièce, il faut donc connaître la mesure de cet arc ; cela donne : $\frac{1}{8} \times 2\pi \times 10$.
Le périmètre de la pièce est donc :
$DE + DB + \frac{1}{8} \times 2\pi \times 10 = 10 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2,5\pi$,
soit **17,85 (en cm),** arrondi au centième de cm près.

Remarque :
La référence au puzzle de départ, par le mot « pièce », vient tardivement et on peut penser que des étudiants se sont intéressés au triangle DEB plutôt qu'à la « pièce du puzzle ».

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question a
Quatre compétences générales

- Savoir comprendre l'énoncé : dépasser les difficultés langagières : « chaque », « le », « un ».
- Savoir comprendre l'énoncé : dépasser les difficultés liées à la structure de la phrase ; « un stylo à plume pour 25 euro » peut être interprété comme « 25 euro est le prix d'un stylo ».
- Savoir enchaîner des calculs pour résoudre un problème. (il s'agit d'un problème avec question intermédiaire à la charge de l'élève).
- Savoir utiliser l'addition et la soustraction à bon escient.

Question b
Difficultés pour un élève

Les deux difficultés principales sont :

- Il s'agit d'un problème complexe dans lequel les élèves doivent prendre en charge la détermination d'une étape pour répondre à la question.

Cependant, les nombres proposés sont très accessibles et ne doivent plus poser de problèmes majeurs dans les algorithmes opératoires au cycle 3. Le problème est donc bien posé pour travailler avec une question intermédiaire non posée.

- Il s'agit d'un problème de composition d'états (relativement à la classification de G. Vergnaud) dans lequel il faut déterminer une partie après avoir déterminé l'autre et connaissant le tout :

On connaît le prix du tout : 25 € (l'ensemble des achats). On calcule le prix de la première partie : 2 × 9 € = 18 € (le prix de deux livres). On cherche le prix de l'autre partie : le prix d'un stylo 25 € - 18 € = 7 €

D'autres difficultés peuvent être évoquées : difficultés langagières (voir plus haut), écriture des nombres en lettres et en chiffres, soustraction avec retenue si l'élève n'utilise pas l'addition à trou.

Question c
Stratégies des élèves

<u>Élève A :</u>
Il réussit après une technique opératoire de la soustraction mal engagée.
Il calcule le prix des deux livres puis il effectue un calcul soustractif en écrivant le nombre le plus petit en premier. Le procédé de calcul de la première soustraction révèle des pertes de sens au niveau de la retenue. Nous pouvons donc penser, en faisant l'hypothèse que l'écrit s'est effectué de gauche à droite, que l'élève a ensuite effectué un calcul soustractif correct en utilisant la technique des différences égales. L'élève donne la bonne réponse et la traduit correctement par une phrase.

Élève B :
Après des essais infructueux au cours desquels il retire le prix d'un livre au prix total, mais ne semble pas continuer (on peut penser qu'il aurait pu réussir en retirant à 16 € le prix du deuxième livre), il finit par utiliser la même stratégie que l'élève A.
Le calcul en colonne 16 + 16 = 32 peut laisser penser qu'il fait comme si Coralie avait acheté 2 livres et 2 stylos.

Élève C :
La première partie de la démarche est correcte (calcul du coût des deux livres) ; l'autre non.
Pour calculer le prix des deux livres, il écrit un calcul en ligne. Ensuite, nous pouvons penser qu'il considère que le stylo coûte 25 € (« ... et un stylo à plume pour 25 € »). Il ajoute les deux résultats comme s'il cherchait le prix total.
Autre hypothèse possible : deux nombres sont là : on les additionne. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Élève D :
Un début de démarche correcte qui n'aboutit pas :
Il soustrait une fois le prix d'un livre. Le 25 - 18 a-t-il écrit avant ou après ? Difficile de savoir.
Nous faisons l'hypothèse que : soit il ne prend qu'un livre en compte, soit il pense que les deux livres coûtent 9 €. Le « 1 » rayé est difficilement interprétable. Il s'agit peut-être d'une retenue. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Élève E :
Démarche erronée :
il additionne les deux nombres écrits en chiffres dans l'énoncé. Le calcul additif est juste. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Question d
Aides pour l'élève E.

Le professeur pourra :

- Mettre en scène matériellement, avec des objets réels et des étiquettes prix, ce problème pour valider, après que les calculs aient été effectués (en tant que prévision), et vérifier si le résultat trouvé est conforme à celui que le milieu matériel fait apparaître.
- Mimer la situation avec des objets réels et des étiquettes prix, en même temps que la résolution du problème, ce qui n'est pas la même remédiation que précédemment.
- Manipuler uniquement de la monnaie.
- Demander à l'élève E de représenter le problème par un dessin.
- Demander à l'élève E de raconter le problème à un pair qui ne connaîtrait pas l'énoncé, en le reformulant à sa façon.
- Reformuler la première phrase qui est ambiguë.
- Poser la question correspondant à l'étape intermédiaire ou demander à l'élève ce qu'il est possible de calculer sans lui donner la question finale.

SECOND VOLET (8 POINTS)

I - DOCUMENT A

Question 1a
Progression des activités

1. Comparaison directe (visuelle ou par superposition) d'aires de surfaces planes[1].
2. Vers la notion d'étalon et d'unité d'aire : aire de surfaces planes obtenues par assemblage de plusieurs exemplaires d'une même surface ; utilisation implicite de l'addition d'aires ; comparaison d'aires de surfaces planes.
3. Introduction d'une unité d'aire – Introduction de la mesure d'une aire, une unité étant choisie.
4. Aire et périmètre d'une surface donnée : mesure des aires et des périmètres de surfaces données. – Vers l'indépendance entre le périmètre et l'aire d'une figure plane.
5. Encadrement de l'aire d'une surface plane non polygonale par les aires de deux surfaces planes polygonales : vers la notion d'aire d'une surface plane quelconque.
6. Choix d'une nouvelle unité d'aire pour déterminer l'aire d'une surface plane.

Remarque :
Lors du passage des comparaisons directes à la mesure, aucun problème nouveau n'est posé : il s'agit d'appliquer.

Question 1b
Support pédagogique pertinent

Les difficultés des exercices sont progressives :

- La situation de découverte encourage à travailler à l'aide de surfaces, à superposer ces surfaces afin de ranger des figures selon la grandeur « aire ».
- Le quadrillage facilite le passage de la grandeur à la mesure,

Mais :

- Les figures A et C sont presque impossibles à comparer même par superposition directe, puisque, centrées l'une par rapport à l'autre, le rectangle dépasse à ses sommets l'autre figure. Ce choix de ces deux figures semble ne pas être en cohérence avec les autres choix. Cela introduit trop tôt (est-ce voulu ?) une difficulté qui serait intéressante à traiter plus tard dans d'autres conditions (figures trop voisines).

[1] Nous rappelons brièvement que la surface est une forme, l'aire une grandeur mesurable (deux surfaces qui ont la même étendue ont la même aire), la mesure est un nombre. Dans l'exercice 3 de l'annexe 3, l'aire semble, à tort, être un nombre : il manque l'unité de mesure.

- Avant d'introduire la mesure, il aurait été intéressant de proposer des activités de comparaison d'aires par découpage et recollement des surfaces.
- Le passage à l'utilisation de la mesure ne répond à aucune problématique nouvelle. *(Par exemple, on aurait pu mettre en scène le fait que l'impossibilité de comparer directement provoque la nécessité de travailler avec un objet intermédiaire qui sera plus tard l'unité).*
- Les indications données sur ce qu'il faut faire laissent peu de place à l'initiative de l'élève. Tout est dirigé, les élèves n'ont seulement qu'à appliquer les consignes.

Question 2a
Activité « Je découvre 1 »

Cet exercice vise un travail de comparaison directe des étendues, par superposition des figures.
Pour que cette activité soit assez simple et surtout faisable, il est nécessaire de modifier les figures A et C et les figures B et F pour les raisons évoquées ci-dessus.
Il faut aussi que les élèves aient les figures effectivement découpées (d'où l'usage du papier calque pour conserver les figures sans découper le manuel !)
A partir de là, on peut demander aux élèves de d'abord faire un pari « à vue d'œil », puis de valider (ou d'invalider) leurs paris en leur demandant de trouver un moyen de prouver : dans ce cas, la superposition apparaît comme solution, comme preuve pragmatique, par rapport au problème posé et non pas comme un geste demandé par le professeur.

Ensuite, il convient de faire évoluer la situation en mettant à disposition des figures non directement comparables par superposition, ce qui posera la question de la preuve et donc pourra déboucher sur des découpages / recompositions plus sophistiqués.

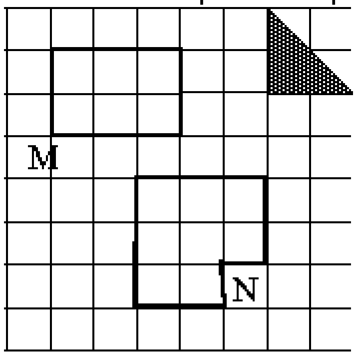
Question 2b
Variables didactiques pour l'activité 2

<u>*Rappel :*</u>
une variable didactique est un élément de la situation qui, modifié par le maître, engendre des procédures de résolution différentes chez les élèves.

- **Le triangle unité objet matériel ou non.**
  Soit c'est un objet matériel unique et découpé, soit les élèves disposent d'une grande quantité de triangles unités, soit les élèves n'ont pas le droit de le découper. Selon ces variantes, les procédures vont changer (pavage, découpage-recomposition, …).

- **Présence/absence des pointillés**.
  Les pointillés délimitant les morceaux dessinés, selon qu'il sont présents ou non, changent la nature de la tâche et donc certaines procédures.

- **Forme des figures**
  On pourrait citer d'autres variables comme la forme des figures : les figures M et N suivantes ne sont pas construites à partir uniquement de triangles unités.



II – INSERTION DU DOCUMENT B DANS LE DOCUMENT A

Nous faisons l'hypothèse qu'une couche de peinture régulièrement répartie peut donner du sens à la notion d'étendue. En effet la surface est bien représentée par la quantité de papier qui est nécessaire pour former la lettre, et par conséquent la quantité de peinture à poser. Cependant, la comparaison de la quantité de papier seule suffit. Néanmoins cet exercice peut être proposé tôt dans la progression :

<u>Place 1:</u>
Il peut se placer après l'exercice de découverte, puisqu'il s'agit de comparaison par découpage recollement :

Procédure : les élèves peuvent découper les lettres de façon à constituer des alignements (bande) et comparer les longueurs ainsi obtenues.

<u>Place 2 :</u>
Il peut aussi se placer après l'exercice 2 :

Procédure : certains élèves peuvent penser à dessiner un quadrillage et compter le nombre de carreaux obtenus.

III

Question 1
« J'ai appris »

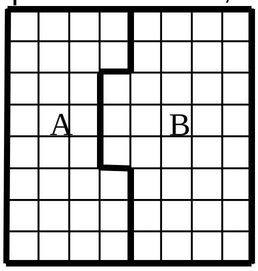
- à comparer des aires :
  - soit en superposant des surfaces
  - soit en dénombrant des surfaces représentant une unité.
- que des surfaces différentes peuvent avoir la même aire.
- à utiliser une unité qui permet, en comparant des nombres, de comparer des aires.
- à encadrer des aires de surfaces qui ne sont pas des polygones.

- *Accessoirement* : j'ai appris que des figures peuvent avoir la même aire mais pas le même périmètre et réciproquement.

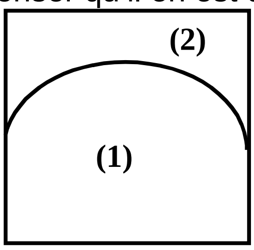
Question 2
Obstacles

De nature plutôt épistémologique :
Dans les pratiques courantes (usage des photocopies entre autres), la déformation première des figures est l'agrandissement. Dans ce cas, périmètre et aire varient dans le même sens. Cela va constituer un obstacle initial pour la plupart des élèves.

De nature plutôt didactique :
Des figures étudiées sont souvent convexes. L'étude des figures « en creux » permet d'augmenter le périmètre tout en diminuant l'aire.
Ici, la surface A a même périmètre que la surface B, tout en ayant une aire plus petite.



Là une illusion d'optique : l'aire de la partie (1) est visiblement supérieure à celle de la partie (2), les élèves peuvent penser qu'il en est de même du périmètre.



Question 3
Suite à prévoir

- Passer au calcul sur les aires et lier concaténation de surfaces et addition des aires.
- Connaître et utiliser les unités usuelles d'aires : cm^2, dm^2, m^2 et km^2, avec les relations qui permettent de passer de l'une à l'autre : $1\ m^2 = 100\ dm^2$, $1\ dm^2 = 100 cm^2$, $1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$.
- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière.
- Construire une surface qui a même aire (même périmètre) qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).
- Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire.

CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Le polygone régulier[1] ABCDEFGHIJKL est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R donc dans ce cercle les douze triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOH, HOI, IOJ, JOK, KOL et LOA sont isocèles car deux de leurs cotés sont de même longueur : la longueur du rayon du cercle.

De plus l'angle au centre de chacun de ces triangles vaut $\frac{360}{12} = 30°$.

Ainsi le triangle AOC est : isocèle (car OA = OC)
avec un angle de 60° ($\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$)
donc il est **équilatéral**.
Chacun de ses côtés a une longueur égale à R.

Question 2

Le polygone ACEGIK est composé de six triangles AOC, COE, EOG, GOI, IOK et KOL tous équilatéraux et dont les côtés ont pour mesure R (on ferait la même démonstration que pour le triangle AOC). Donc le polygone ACEGIK est un **hexagone régulier** : tous ses cotés ont pour mesure R et tous ses angles ont pour mesure 2 × 60° = 120°.

---

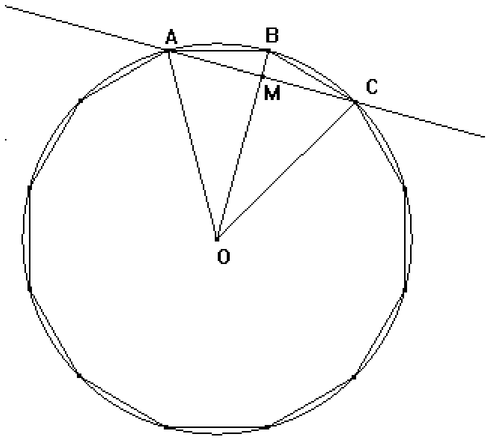
[1] Remarque : A cause de la présence du mot « donc », l'énoncé de l'exercice induit l'idée que le fait d'être inscriptible dans un cercle implique les égalités d'angles et de côtés.
Un dodécagone régulier est un dodécagone dont les cotés et les angles sont isométriques. Il a alors la propriété d'être inscriptible dans un cercle. La confusion est vite faite par les candidats de déduire que, pour qu'un polygone soit régulier, il suffit qu'il soit inscriptible dans un cercle, ce qui est faux.

On peut aussi dire que le polygone ACEGIK est un hexagone inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon R et dont tous les côtés sont de même longueur donc il est régulier.

Question 3

On démontre que la droite (AM) est la hauteur issue du sommet A du triangle ABO.

Méthode 1 :
B est équidistant des points A et C (BA = BC) car le polygone est régulier.
O est équidistant de A et C car OA = OC comme rayons du cercle.
Donc la droite (OB) est la médiatrice du segment [AC]. Ainsi les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires en M et on en conclut que la droite (AM) est la hauteur du triangle ABO.



Méthode 2 :
Le dodécagone ABCDEFGHIJKL est régulier donc tous les diamètres du cercle de centre O passant par les sommets du polygone sont des axes de symétrie de la figure. Ainsi la droite (BO) est un axe de symétrie du polygone donc les triangles ABO et BCO sont symétriques par rapport à la droite (BO). On en déduit que (BO) est la médiatrice du segment [AC] donc est perpendiculaire à ce même segment.
Le point M appartenant à la droite (AC), alors la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (BO).

Méthode 3 :
(BO) est la bissectrice issue de O du triangle équilatéral AOC (on a prouvé que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ valent chacun 30°). Dans un triangle équilatéral, les bissectrices et les hauteurs sont confondues donc les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires, et par conséquent les droites (AM) et (BO) sont perpendiculaires.

Recherche de la longueur AM

AOC est un triangle équilatéral donc AC = OC = OA = R.
On montre que M est le milieu du segment [AC] :
- soit par le fait que (BO) est la médiatrice du segment [AC] ;

- soit par le fait que bissectrices, médiatrices, médianes sont confondues dans un triangle équilatéral.

Donc **AM = $\frac{1}{2}$ R**.

Question 4

L'aire du triangle AOB est définie par la formule : (base × hauteur) / 2.

En appliquant au triangle AOB on obtient : $\dfrac{R \times \frac{R}{2}}{2} = \dfrac{R^2}{4}$

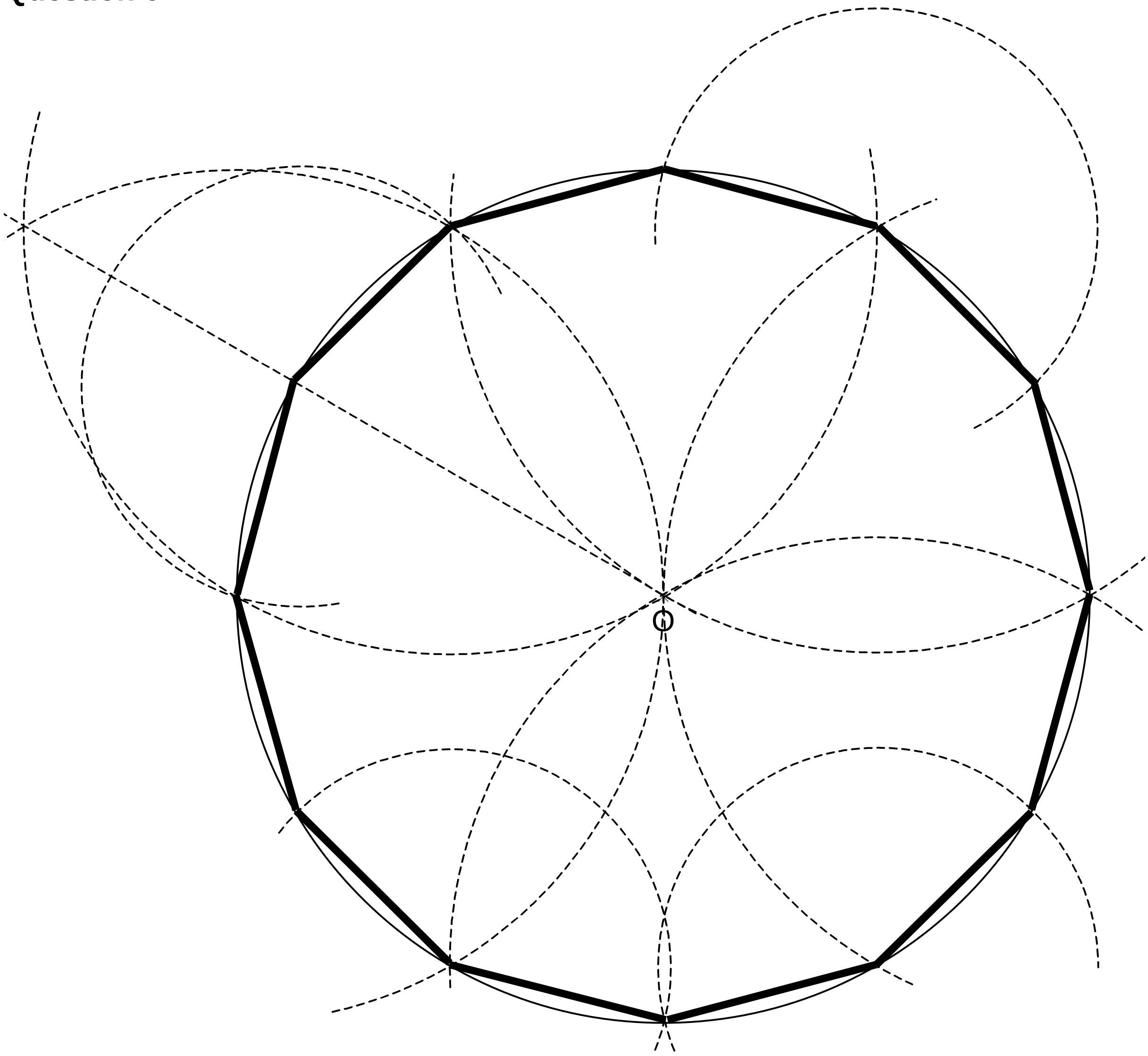
L'aire du dodécagone régulier est égale à douze fois l'aire du triangle AOB.

Donc elle vaut : $12 \times \dfrac{R^2}{4}$ = **$3\ R^2$**.

Question 5

Pour calculer l'aire du dodécagone inscrit dans un cercle de diamètre 18 cm, on applique le résultat précédent en prenant la valeur de 9 cm pour le rayon R.
L'aire du dodécagone est de : $3 \times 9^2 = 3 \times 81 =$ **243 cm^2.**

Question 6



EXERCICE 2

Soit le nombre N = 72*a*83*b*

On rappelle une propriété :
Si un nombre p divise un nombre k alors tous les diviseurs de p divisent aussi le nombre k.

Question 1

<u>Méthode 1 :</u>
On déduit de cette propriété que :

- si N est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;
- si N est divisible par 45 alors il est divisible aussi par 9 et 5.

Donc sachant que ce nombre N est divisible par 2 et par 5 (deux nombres premiers entre eux), il est divisible par 10 et ainsi il se termine par le chiffre 0. On en déduit que ***b* = 0.**

<u>Méthode 2 :</u>
On déduit de cette propriété que :

- si N est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;
- si N est divisible par 45 alors il est divisible aussi par 9 et 5.

Donc si N est divisible par 5, il se termine soit par 0 soit par 5. D'autre part, N est divisible par 2,donc c'est un nombre pair. Seul le chiffre 0 vérifie ces deux conditions. On en déduit que ***b* = 0.**

Question 2

On utilise maintenant le fait que N est divisible par 9 en appliquant le critère de divisibilité par 9 (la somme des chiffres du nombre doit être divisible par 9).
Ainsi la somme $7 + 2 + a + 8 + 3 + 0 = 20 + a$ doit être un nombre divisible par 9, avec $0 \leq a \leq 9$. La valeur de a est donc 7.

Le nombre N cherché est 727830.

EXERCICE 3

Rappel de la définition de la division euclidienne :

$a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < q$

b : le diviseur ; q : le quotient ; r : le reste.

Si on veut effectuer la division euclidienne de 36 202 par 3748, dans l'expression
36 202 = 9658 x 3748 + 4560 , on doit obtenir un reste inférieur au diviseur.
Ainsi on écrit 4560 = 3748 + 812 et on transforme l'expression par :

$$36\,202 = (9658 + 1) \times 3748 + 812 = 9659 \times 3748 + 812$$

Le quotient cherché est donc 9 659.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Remarque :
Il est recommandé aux candidats de résoudre eux-mêmes l'exercice proposé aux élèves pour pouvoir répondre de façon pertinente aux questions posées.

Question 1

L'élève qui n'a pas fait d'erreur est **Justine**.
Cette élève utilise un schéma où elle fait apparaître les durées écoulées entre les heures de départ et d'arrivée du bateau.
Elle calcule ainsi :

- le temps écoulé entre l'heure du départ du bateau (20h) et minuit la fin de la journée (24h). Elle trouve une durée de 4 heures ;
- le temps écoulé entre minuit et l'heure d'arrivée 6h30. Elle trouve une durée de 6h30.

Puis elle additionne ces deux durées et elle trouve une durée totale de 10h30, qui correspond à la durée de la traversée du bateau.

Question 2

La réponse de Rémi
Cet élève additionne les deux données numériques puis effectue une conversion qui est fausse.
Il semble, pour cet élève, y avoir confusion entre la grandeur durée (grandeur mesurable) et la grandeur date (grandeur repérable).

La réponse de Céline
Cette élève a bien calculé un écart entre les horaires de départ et d'arrivée du bateau en effectuant la différence entre l'heure la plus grande (20h) et la plus petite (6h30). Elle ne prend pas en compte le passage au jour suivant d'une part et d'autre part sa soustraction met en évidence une confusion entre les nombres décimaux et les nombres sexagésimaux dans les calculs (1h = 60min et non pas 1h = 100min).

La réponse de Karl
Cet élève fait la même erreur que Céline pour résoudre le problème mais lui ne fait pas d'erreur dans sa soustraction des nombres sexagésimaux.

L'erreur dans la démarche de Céline et de Karl s'explique assez bien car leur procédure de résolution est celle la plus couramment utilisée : on calcule la différence entre l'heure d'arrivée et celle de départ sachant que les situations les plus fréquemment rencontrées mettent en présence des horaires donnés dans la même journée.
Ici il n'y a pas prise en compte de la notion du lendemain.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Remarque 1 :
Il est recommandé aux candidats de résoudre eux-mêmes les exercices posés aux élèves pour pouvoir comprendre le déroulement des séances 1 et 2 et ainsi répondre de façon pertinente aux questions.

Remarque 2 :
Il serait raisonnable de supposer que les élèves ont déjà abordé la division euclidienne en classe et donc que ces deux séances ne visent pas à la découverte de la division.

Question 1

Les notions mathématiques mises en jeu dans les séances 1 et 2 :

- Les notions de **quotien**t et de **reste** dans la division euclidienne .
- Les notions de diviseurs et de multiples d'un nombre entier.
- Pour la 2ème séance, les notions de critères de divisibilité d'un nombre par 5, par 2 et par 10.

Les connaissances utilisables par les élèves pour ces deux séances :

- pour la 1ère séance :
    - savoir effectuer la division euclidienne d'un nombre entier par 8 ; c'est à dire savoir calculer son quotient et son reste (éventuellement par une procédure non experte) ;
    - savoir trouver un nombre, connaissant son quotient et son reste dans la division par 8 ;
    - connaître les tables de multiplications, en particulier la table de 8.
- pour la 2ème séance :
    - même chose que pour la première séance mais en utilisant la division euclidienne par 5 et les multiples de 5.

Question 2
Les objectifs de M. LECOLE pour chacune de ses deux séances.

Pour la 1ère séance les objectifs sont par ordre d'importance :

- faire utiliser la division euclidienne par les élèves dans un contexte différent de celui des partages équitables qui est presque toujours celui des problèmes de division. Les élèves vont mettre un certain temps à reconnaître que c'est la division qu'il connaissent qui donne la solution ;
- faire prendre conscience du fait qu'une division euclidienne donne deux résultats (le quotient et le reste) et non un seul comme les autres opérations et que le reste est un résultat qui peut être aussi important que le quotient ;
- faire travailler les élèves sur les valeurs possibles des restes dans une division euclidienne ;

- faire découvrir que par une organisation de la suite numérique des nombres, on obtient de façon immédiate la valeur du quotient et du reste d'une division euclidienne à condition de numéroter les lignes et les colonnes en commençant par le numéro 0 (la 1ère colonne sera nommée la « colonne 0 » et on fera de même pour les lignes).

La deuxième séance :
- faire réinvestir l'organisation de la suite numérique élaborée dans la séance précédente pour la division par 5, par 2 et par 10 ;
- faire ressortir les critères de divisibilité d'un nombre entier par 5, 2 et 10.

Question 3

Pour la pertinence des nombres[2].

Remarque :
Ici la pertinence cherchée n'est pas une pertinence mathématique puisque tous les nombres proposés sont pertinents ; aucun nombre n'est à éviter. On suppose que la question parle de la pertinence didactique. C'est dans ce sens que la réponse suivante est rédigée.

Pour les nombres 19 et 23, ceux-ci sont dans le tableau mais en posant la question le maître s'assure de la compréhension de l'organisation des nombres ainsi que des termes « ligne » et « colonne ». Ensuite la proposition des nombres 62 et 70 fait appel à un travail d'anticipation de la part des élèves. Ces nombres n'étant pas présents dans le tableau, les élèves doivent élaborer une procédure pour trouver leur place. Ces nombres sont pertinents car ils permettent une mise en situation-

[2] *On pourrait imaginer une variante de la consigne dans la phase 2 . Au lieu d'annoncer qu'on va continuer le tableau en imposant de ne pas le faire immédiatement pour trouver la place de 62 et 70, le maître pourrait laisser les élèves plus libres de leur stratégie en demandant de trouver le plus vite possible la place des nombres. Ainsi pour les élèves qui n'ont pas d'autre idée, il y aurait toujours la stratégie de base qui consiste à écrire effectivement les nombres. D'autres stratégies non écrites dans la préparation de l'enseignant et non demandées par le sujet sont possibles. En voici par exemple deux :*
- *compter oralement en assignant une place à chaque nombre sur la première ligne de 0 à 7 et en revenant au 0 chaque fois qu'on a épuisé les huit places c'est à dire à chaque multiple de 8. C'est ce que l'on fait en effeuillant une marguerite où on associe chaque pétale à un mot d'une comptine en boucle. Cette stratégie donne très vite la colonne. Pour la ligne il faut noter combien de fois on passe sur cette première ligne ;*
- *remarquer que les multiples de 8 sont toujours dans la première colonne, donc en déduire que 64 multiple de 8 très connu se trouve dans la première colonne et donc que 62 est deux places en arrière. Pour trouver la ligne on écrit seulement la colonne des multiples de 8 jusqu'à 64.*

Les stratégies peuvent être assez nombreuses. Il est probable que peu d'élèves penseront à la division euclidienne à ce stade, même s'ils l'ont déjà étudiée. Dans sa préparation l'enseignant prévoit de recommencer plusieurs fois. Les mises en commun successives où on débat à chaque fois de la stratégie la plus rapide parmi celles qui ont été trouvées permettront de s'acheminer vers la division euclidienne.

recherche des élèves, et la réponse pourra être validée par eux-mêmes puisque ces nombres sont assez petits pour être ensuite écrits dans le tableau sans prendre trop de temps.

Le choix ensuite des nombres 784 et 852 prend tout son sens pour aller vers l'institutionnalisation cherchée de l'enseignant. Ces nombres sont situés dans un champ numérique important et il n'est pas raisonnablement possible de les mettre à la suite du tableau déjà construit.

Les nombres à éviter

Du point de vue didactique, ce sont ceux qui sont déjà écrits dans le tableau, donc tous ceux allant de 1 à 25, puis ceux au moins des deux lignes suivantes car facilement mémorisables mentalement et peut-être aussi des multiples de 8 très connus mentalement comme 48 ou 64. Il est assez facile de voir que les multiples de 8 sont dans la première colonne.

Question 4

Remarque :
La question est ici mal posée car qu'attend-on des réponses des candidats ? Est-ce une analyse de la tâche de chaque phase avec les interventions du maître inhérentes à cette tâche ou bien attend-on des candidats une réponse globale sur l'ensemble de la séance ?

Tâche de l'élève selon les différentes phases

Phase 1 collective
Les élèves doivent observer la construction du tableau de nombres par le maître, certains élèves vont compléter cette organisation de la suite numérique devant toute la classe. Puis ils répondent à deux questions en lisant sur le tableau.

Phase 2 en situation individuelle puis collective
Les élèves doivent rechercher la place de deux autres nombres et faire des propositions de stratégie, puis recommencer avec plusieurs autres nombres.
Chaque fois les propositions sont discutées entre élèves et validées par la poursuite de la construction du tableau de nombres. Progressivement ils sont amenés à calculer le quotient et le reste du nombre donné dans la division euclidienne par 8.
Les élèves doivent formuler leurs résultats.

Phase 3 en situation d'application
Les élèvent doivent faire les exercices demandés donc réinvestir ce qu'ils semblent avoir élaboré en phase 2.

Phase 4 collective
Les élèves participent à l'élaboration de l'institutionnalisation, à la synthèse de la séquence.

Globalement, les élèves ont la charge et la responsabilité de leur recherche ainsi que la validation de leurs réponses.

Les interventions du maître

Après la présentation du problème par le maître, celui ci s'assure d'une bonne dévolution de la situation et laisse les élèves chercher seuls à partir de questions didactiquement bien construites. Pour répondre à ses questions les élèves devront faire appel à des connaissances mobilisant le savoir en jeu . Ce savoir n'est à aucun moment mentionné.
Le maître observe puis aide les élèves à formuler leur résultat.

Il institutionnalisera ce savoir en fin de séance mais rien n'est explicité dans le sujet du concours. Il est vrai que la division euclidienne n'est peut-être pas un savoir nouveau pour ces élèves. Néanmoins il est indispensable de faire un bilan à la fin de la séance pour fixer ce qui a été fait avant la séance suivante[3].

Question 5
Notions mathématiques en jeu

Dans la séance de M CALCULUS, les notions mathématiques en jeu sont :

- Les notions de diviseurs et de multiples d'un nombre entier.
- Les critères de divisibilité d'un nombre entier par 2, par 3 ou par 5, puis par 10.
- La propriété sur les diviseurs d'un nombre : « Si un nombre *n* est divisible par un autre nombre *p*, alors il est aussi divisible par les diviseurs de *p*. »

Question 6
Tâche de l'élève et interventions du maître

Remarque :
Le sujet du concours ne mentionne pas si les élèves de M.CALCULUS disposent du support ou pas, ce qui change un peu les réponses proposées dans le corrigé.

La tâche des élèves est ici de répondre aux questions du scénario proposé par le manuel.
Ainsi après avoir lu la consigne de chaque exercice, l'élève répond et attend la correction faite par le maître. L'institutionnalisation est même déjà proposée dans le manuel de l'élève.
Si les élèves ne disposent pas du manuel, on peut penser que le maître aura reproduit les questions sans proposer les institutionnalisations.

---

[3] *Ce bilan non demandé par le texte du sujet pourrait être ici :*

- *il y a 8 nombres qui donnent le même quotient quand on les divise par 8 avec des restes différents qui vont de 0 à 7.*
- *il y a autant de nombres qu'on veut qui donnent le même reste quand on les divise par 8. Par exemple si ce reste est 3, ils sont tous de la forme $8 \times q + 3$ avec $q = 0$, ou $q = 1$, ou $q = 2$, etc....*

Donc les élèves se trouvent en situation d'exécutant, peu de recherche, pas d'échanges avec les pairs et surtout des énoncés d'exercice assez pauvres.

Les interventions du maître consistent essentiellement à effectuer une correction de chaque exercice au fur et à mesure de la séance. Il fait ressortir les connaissances à retenir (les notions de multiples et diviseurs, les critères de divisibilités) en s'appuyant sur les écrits du manuel.
Si le maître suit pas à pas la démarche du manuel alors il donne toutes les précisions aux élèves pour que ceux-ci réussissent tous les exercices proposés.

DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STASBOURG

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1
Obtenir un zéro à l'issue de l'étape 4

Méthode 1 (algébrique) :
Soit x le nombre en entrée. La suite des actions se code :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(4(x + 2) - 20) &= 2 (x + 2) - 10 \\ &= 2 (x + 2 - 5) \\ &= 2 (x - 3)\end{aligned}$$

L'obtention de « 0 » à l'étape 4 se traduit par l'équation suivante : 2 (x - 3) = 0, dont la solution est 3.

Méthode 2 (arithmétique) :
Remontons le cours de la « machine à nombres » :

Sortie	**3**	
Etape 4	5	Soustraire 2
Etape 3	20	Diviser par 4
Etape 2	0	Ajouter 20
Etape 1	0	Multiplier par 2

On obtient donc le **nombre 3.**

Question 2
Expression en fonction de x des nombres obtenus à chaque étape

Entrée	x	
Etape 1	$x + 2$	Ajouter 2
Etape 2	$(x + 2) \times 4$	Multiplier par 4
Etape 3	$[(x + 2) \times 4] - 20$	Soustraire 20
Etape 4	$\dfrac{[(x + 2) \times 4] - 20}{2}$	Diviser par 2
Sortie	$2 (x - 3)$	

Question 3
Nombre inchangé à l'issue de l'étape 4

Cela se traduit par l'équation $2x – 6 = x$ qui se résout aisément et donne **6** comme solution.

Question 4
Nouvelle machine… Détermination de a et b pour que tout nombre passant dans la machine reste inchangé.

Tout nombre x entant dans la machine se transforme en $(2x - 6)a + b$.
Il est inchangé si et seulement si $(2x - 6)a + b = x$;
ce qui donne $(2a - 1) x + (b - 6a) = 0$.
Cette équation doit être de nature $0x = 0$ (indéterminée) afin qu'elle soit vérifiée quelque soit x, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} 2a – 1 = 0 \\ b - 6a = 0 \end{cases}$$

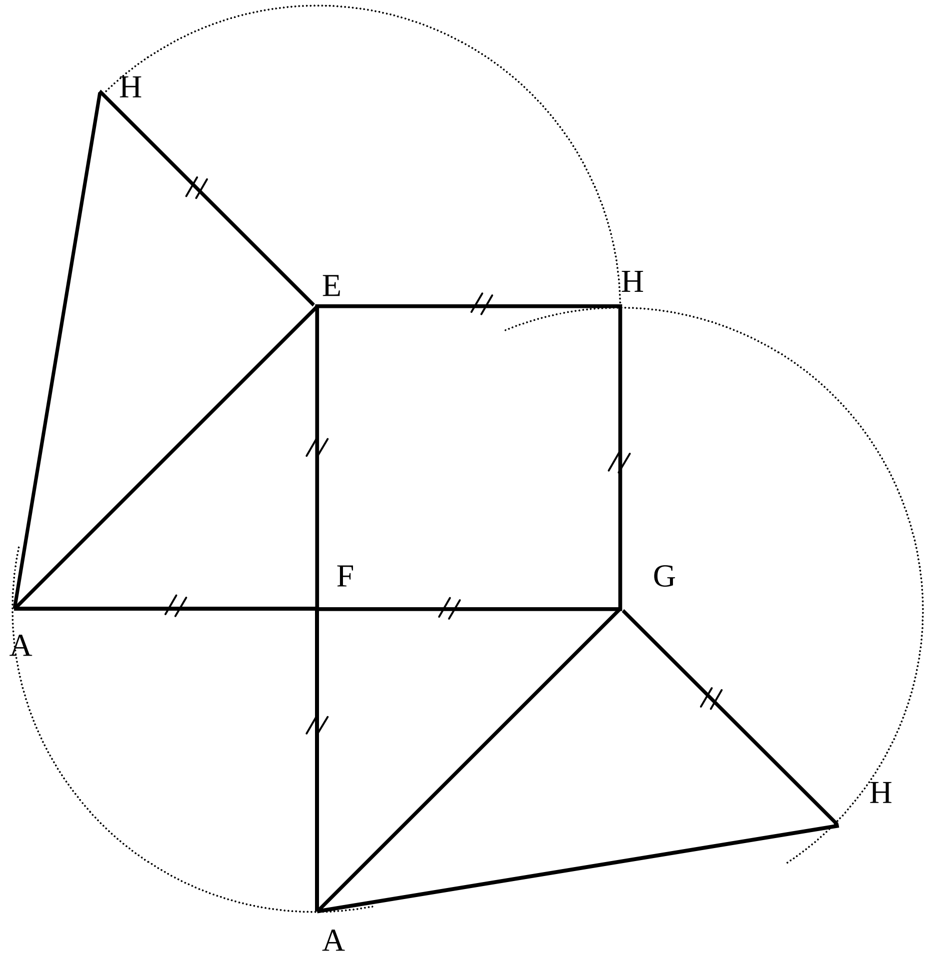
ou encore

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

La nouvelle machine laisse inchangé tout nombre
si et seulement si $\mathbf{a = \dfrac{1}{2}}$ **et** $\mathbf{b = 3}$**.**

EXERCICE 2

Question 1
Patron de la pyramide de sommet a et de base EFGH



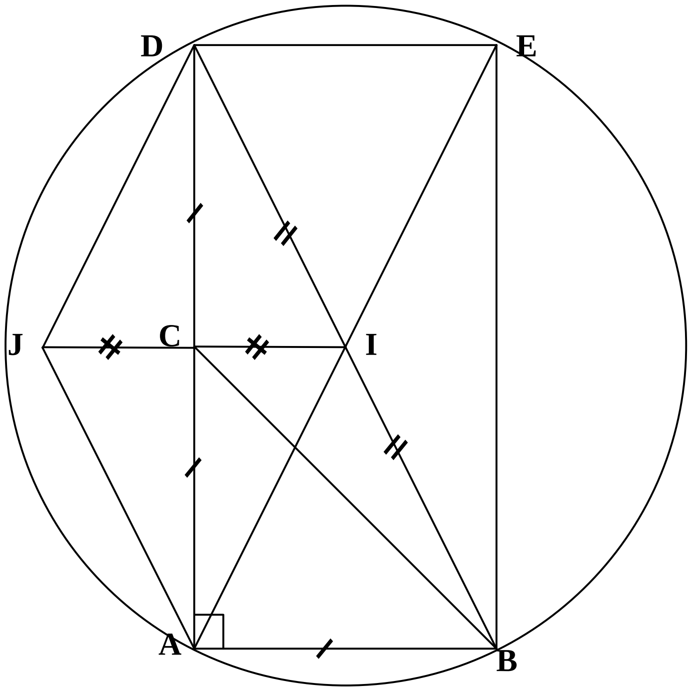
Question 2
Mesure exacte des longueurs AE et AH

Dans le triangle AEF rectangle en F, nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore :
$AF^2 + FE^2 = AE^2$ soit $AE^2 = 4^2 + 4^2$
d'où $AE^2 = 2 \times 4^2$ et $\mathbf{AE = 4\sqrt{2}}$

L'arête [EH] du cube est orthogonale à la face ADEF. On en déduit que la droite (EH) est orthogonale à toute droite du plan (ADEF). En particulier les droites (AE) et (EH) sont perpendiculaires. Le triangle AEH est donc rectangle en E.
Dans le triangle AEH rectangle en E, nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore :
$AE^2 + EH^2 = AH^2$ soit $AH^2 = 4^2 + (2 \times 4^2)$
d'où $AH^2 = 3 \times 4^2$ et $\mathbf{AH = 4\sqrt{3}}$ **.**

EXERCICE 3

Question 1
Tracé de la figure



La figure contient les codages des résultats liés aux questions qui suivent. Elle est donc réalisée complètement.

Question 2
Droites (CI) et (AB) parallèles

Dans le triangle DAB, C est le milieu de [AD] et I est le milieu de [DB]. D'après le théorème de la droite des milieux appliqué au triangle DAB, **la droite (CI) est parallèle à la droite (AB)** et CI = $\frac{1}{2}$AB.

(On pourrait aussi citer la réciproque du théorème de Thalés).

Question 3
Les points A, B et D et le cercle circonscrit

Trois points non alignés déterminent un cercle.
Précisons le centre et le rayon. Les points A, B et D forment un triangle rectangle en A qui a pour hypoténuse [DB]. Or tout triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle de centre I le milieu de l'hypoténuse et de diamètre cette hypoténuse.
A, B et D sont donc sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon IB. Déterminons ce rayon.
$AD^2 + AB^2 = DB^2$ donc $DB^2 = 8^2 + 4^2$

DB² = 80 donc DB = $4\sqrt{5}$.
Le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ vaut donc **AI = $2\sqrt{5}$ (en cm)**

Question 4
E appartient au cercle $(\mathcal{C})$

Soit E le symétrique de A par rapport à I. I est centre de symétrie du cercle, A est sur le cercle $(\mathcal{C})$ donc son symétrique I est sur le cercle.
E appartient donc au cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon IA.

Nature du quadrilatère ABED

Le quadrilatère ABED qui a ses diagonales isométriques (diamètres d'un même cercle) qui se coupent en leur milieu est **un rectangle**.

<u>Remarque :</u>
Ce n'est pas un carré car AD = 2 AB.

Question 5
Nature du quadrilatère AIDJ

J est le symétrique de I par rapport à C, donc C est le milieu de [IJ].
(CI) est parallèle à (AB) or (AB) est perpendiculaire à (AD) ; la droite (IC) est donc perpendiculaire à (AD).
De plus C est le milieu de [AD] et aussi le milieu de [IJ].
Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu est un losange.
AIDJ est un losange.

<u>Remarque :</u>
Ce n'est pas un carré car les demi diagonales n'ont pas la même longueur : CI = $\frac{1}{2}$AC.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Analyse en terme de respect de la consigne

La consigne demande de rédiger un énoncé de problème et la résolution de ce problème doit nécessiter le calcul « (12 × 35) + 8 »

Élèves	Traduction par une écriture en ligne de la proposition de l'élève	Commentaires
Céline	(11 × 35) + 8 ou (12 × 35) - (35 - 8)	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de litres se traduit par : (12 × 35) - (35 - 8) ou (11 × 35) + 8, si on considère que la bouteille cassée fait partie des 12. **Céline ne respecte donc pas la consigne.**
Linda	12 + 35 + 8.	C'est un énoncé de problème, mais il n'est pas adapté. Le calcul du nombre de livres se traduit par : 12 + 35 + 8 . De plus, Linda ne demande pas le résultat du calcul, mais le calcul à effectuer. **Elle ne respecte donc pas la consigne**.
Simon	(12 × 35) + 8.	C'est un énoncé de problème. Le calcul du nombre de véhicules se traduit par : (12 × 35) + 8. **Simon respecte donc bien la consigne**. On peut en outre remarquer qu'il traduit, par une multiplication une disposition rectangulaire d'objets.
Amandine	12 + (35 × 12) + 8.	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de baguettes se traduit par : 12 + (35 × 12) + 8. Elle a voulu introduire le calcul de 35 × 12 à partir d'une donnée préalable. Elle reprend cette donnée dans l'écriture, mais il aurait fallu demander : « combien de baguettes pour mardi et mercredi ? ». **Amandine ne respecte donc pas la consigne.**

Rébecca	428 - (12 × 35).	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de bonbons restants se traduit par : 428 - (12 × 35). **Rébecca ne respecte donc pas la consigne.**
Loïc	(35 × 12) + 8.	C'est un énoncé de problème. Le calcul du nombre de places se traduit par : (35 × 12) + 8. **Loïc respecte donc bien la consigne.**
Rachid		Ce n'est pas un énoncé de problème. Il effectue correctement le calcul (35 × 12) + 8 en expliquant ce qu'il fait. Ce n'est pas ce qui lui est demandé. **Rachid ne respecte donc pas la consigne.**
Marie	428 - 100.	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de bonbons se traduit par : 428 - 100. La réponse est inadaptée. **Marie ne respecte donc pas la consigne.**

Question 2
Pour chaque production, situation de l'erreur

Production de Céline :
Elle a bien compris la consigne, le problème met en évidence les trois nombres 12, 35 et 8, mais le résultat n'est pas celui attendu. Elle n'a pas pris en compte que si une bouteille se cassait, il n'y en avait plus que 11 entières. De plus, le problème n'est pas réaliste : les bouteilles de Cola ne contiennent pas en général 35 litres, et lorsque l'on casse une bouteille, on ne récupère pas une partie du contenu.
L'erreur se situe au niveau de la prise en compte de la bouteille cassée : l'énoncé devient difficile à concevoir.

Production de Linda :
Cet énoncé de problème ne traduit pas une situation multiplicative mais une situation additive, la première difficulté se situe donc au niveau **du sens des opérations**. Pour elle, la décision d'effectuer une opération plutôt qu'une autre n'est pas dictée par la situation présentée mais par une injonction : elle indique entre parenthèses les opérations à effectuer (« utilise multiplication et addition »), mais son énoncé n'utilise que l'addition.
Une autre hypothèse d'erreur **serait de la mauvaise compréhension de la consigne** ou une habitude à rédiger des exercices pour lesquels il faut trouver la question sans chercher à y répondre.

Production de Amandine :
Son problème aurait répondu à la consigne si elle avait demandé « combien Tom a acheté de baguettes mardi et mercredi ? ». La formulation de la question est compréhensible mais pas très correcte en français.

La difficulté réside dans la rédaction de l'énoncé. Amandine ne s'est pas rendue compte que l'introduction du « lundi » rajoutait un terme à la somme demandée.

Production de Rébecca :
La difficulté **se situe au niveau de la compréhension de la consigne où l'enseignant** souhaite voir utiliser « (12 × 35) + 8 » et non pas le résultat 428 que Rébecca a calculé préalablement. Cela la conduit à demander le reste de la division euclidienne de 428 par 35.

Production de Rachid :
Rachid se situe dans le cadre d'une explication d'un calcul à effectuer. Il ne semble pas savoir exactement ce qu'est un énoncé de problème.
L'erreur se situe du côté de la compréhension de la consigne.

Production de Marie :
Cette production ressemble à celle de Rebecca. Elle propose un énoncé utilisant le résultat du calcul. Le calcul lui même n'intervient pas dans la résolution.
C'est au niveau de la compréhension de la consigne que se situe la difficulté.

SECOND VOLET (8 POINTS)

PREMIÈRE PARTIE : OUVRAGE DE CE1

Question 1a
Intérêt du tracé à main levée par rapport à un tracé à la règle

Il favorise une perception globale des figures qui permet de mettre en évidence les relations entre points, traits droits ou curvilignes, en se dégageant des problèmes d'exactitude de tracés. Le dessin à main levée permet une reproduction avec une plus grande rapidité.
Il s'agit de faire percevoir des propriétés géométriques avant de les vérifier à l'aide d'instruments de géométrie ou d'utiliser ces derniers pour traduire des propriétés dans des constructions géométriques.
prélever des propriétés de façon perceptive avant d'être amené à utiliser des instruments de géométrie.

Question 1b
Objectif réécrit

Nous proposons :
« Prendre en compte de manière perceptive des rapports de longueur, des alignements et des positions de points représentés par des signes (les respecter visuellement) pour tracer des traits droits ou curvilignes. »

Question 2
Variables didactiques repérées

Les tracés demandés ne sont pas de même nature : dans l'exercice découverte, il s'agit de reproduire plusieurs dessins, dans le premier exercice, une seule figure, dans le second exercice, de repasser sur une figure déjà construite, puis de dessiner une figure identique.

- **Les supports :**
  Les deux types de quadrillages du papier de l'annexe 1.2 peuvent induire des procédures de tracés différentes chez les enfants. Pour s'en assurer, il faudrait proposer les deux quadrillages dans un même exercice.

- **Les figures à reproduire sont connexes ou non**. (en un seul tenant ou non)
  Lorsque la figure est connexe, le tracé peut être contrôlé localement au fur et à mesure. Il n'y a pas de ruptures, de levé de crayon.

- **La présence ou non de figures repères**
  (carré noir pour la situation de découverte et disque, demi disque et rectangles noirs dans l'exercice 1).
  Ces figures facilitent le positionnement des segments.

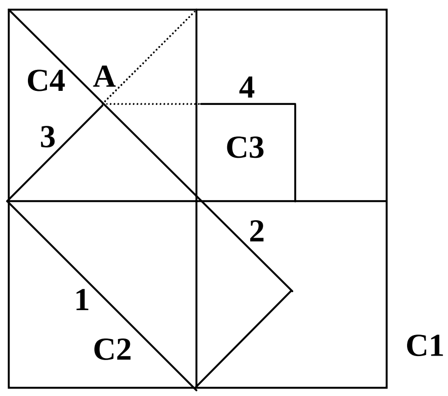
- Le fait que les figures **représentent des dessins connus ou non** des élèves : reproduire un trèfle, un cœur ou une maison est plus simple que reproduire un dessin qui n'évoque rien.

- **La longueur des segments** à reproduire qui complique plus ou moins le positionnement des extrémités. Cela peut aussi se retrouver dans le nombre de carrés traversés

- L'inclinaison des segments à 45° **ou selon un angle différent.** Les inclinaisons à 45° permettent beaucoup plus d'alignements de nœuds que les autres inclinaisons.

- **Possibilité de tracer à main levée ou avec une règle graduée ou non**. Sachant que l'utilisation de la règle graduée nécessite un apprentissage car les élèves qui mesureraient les segments peuvent débuter au bord de la règle ou sur le « 1 »…

Question 3a
Tracé.



Une solution d'ordre possible est indiquée sur le schéma. Il faut l'étape 2 avant l'étape 3. L'étape 4 arrive après l'étape 3. L'étape 1 peut être placée indifféremment

Explication des différentes étapes

Le point de départ étant le carré du centre de la page du manuel : sont déjà tracés le « grand » carré C1 et ses deux médianes ainsi qu'une demi diagonale du « moyen » carré C2 et un segment « vertical » dans le « petit » carré C3.

- étape 1 : tracer la diagonale du carré C2
- étape 2 : tracer une partie de la diagonale du grand carré C1 qui part du sommet « en haut à gauche » ; elle s'arrête à l'extrémité du segment déjà dessiné.

- étape 3 : tracer la demi diagonale (celle non déjà tracée) du carré C4 en « haut à gauche ».
- étape 4 : tracer le côté manquant du carré C3 en remarquant que la droite qui le supporte passe par le point A.

Question 3b
Trois compétences que l'élève doit[1] exercer dans ses tracés à la règle

La tâche consiste à reproduire ou compléter une figure à partir d'un modèle. Les compétences sont :

- Percevoir un alignement d'objets ou de points,
- Percevoir un angle droit,
- Être capable d'organiser les étapes de la construction (compétence méthodologique),
- Être capable d'utiliser :
  - une règle, pour tracer des segments, pour prolonger un segment, pour contrôler des alignements ;
  - une équerre pour contrôler la présence d'angles droits et pour en construire.
- Faire preuve de soin dans les tracés : précision dans les tracés à la règle, dans le positionnement par rapport aux points et dans l'arrêt d'un segment au bon endroit,

Remarque :
Être capable de tracer des perpendiculaires, des parallèles est une compétence de fin de cycle 3.

DEUXIÈME PARTIE : OUVRAGE DE CP

Question 4
En quoi chacun des exercices de la fiche 13 prépare l'enfant à la réalisation de la fiche 7

- L'exercice 1 :

A partir d'un dessin plus simple que l'activité de découverte de la fiche 7, l'enfant devra tout d'abord percevoir le positionnement des lignes et des points avant de les placer dans le cadre. Il devra ensuite placer les quatre points et les relier par des traits sans déborder. Puis il devra placer l'élément décoratif demi disque noir et demi disque vide qui semble être la tête du bonhomme. Cette même compétence se retrouve dans la fiche 7 (exercice de découverte) où il faut placer les points, les

[1] Nous proposons des compétences que l'élève **peut** exercer : en effet, l'étape 4 peut être réussie en contrôlant l'alignement d'un segment et d'un point sur le modèle à l'aide d'une règle et en l'effectuant le tracé demandé, ou bien en contrôlant et en réalisant le tracé de l'angle droit avec l'équerre.

points entourés de cercles et les étoiles convenablement dans l'espace feuille avant de tracer les traits.

- L'exercice 2 :

Il apprend aussi à relier les points par un trait et sera utilisé dans l'exercice de la fiche 7. Cet exercice propose, en plus une contrainte (idée de la spirale de la toile d'araignée) : l'élève apprend donc à anticiper le tracé.

- L'exercice 3 :

C'est un exercice d'entraînement qui permet à l'élève de continuer à développer des tracés soignés en suivant le trait gras rectiligne ou non. Les traits devront être « parallèles » et de même courbure. L'élève en CE1 pourra alors mieux tracer les traits droits et courbes du bateau.

Question 5
La progressivité des apprentissages entre les quatre fiches

- Fiche 20 CP :

Elle vise à faire percevoir, à repérer des cases alignées. Ces cases pouvant être en ligne, en colonne, ou en diagonale sur un quadrillage.

- Fiche 21 CP :

L'étape suivante consiste à passer des cases aux nœuds.
Les points sont placés soit « horizontalement », soit « verticalement » soit sur des obliques à 45°. La consigne demande de ne placer que des points, mais ne demande pas de tracer les segments. Cependant, un effort de vérification à la règle est demandé. Cela permet déjà d'imaginer le trait qui reliera les points.

- Fiche 17 CE1 :

L'étape suivante consiste à passer des nœuds aux segments.
Il s'agit de tracer des obliques qui ne sont pas nécessairement orientées à 45°par rapport aux lignes du quadrillage. Les exercices proposent des tracés plus complexes. Ils proposent non seulement des segments, mais aussi des dessins représentatifs ou non. Il est à noter qu'on travaille encore sur le perceptif en demandant de comparer les dessins dans le dernier exercice afin de déterminer ceux qui sont ou non semblables au modèle.

- Fiche 88 CE1 :

L'étape suivante consiste à passer du quadrillage au papier uni.
L'élève doit percevoir les alignements, les points remarquables de la figure comme le point A cité en question 3a. il doit aussi rechercher l'ordre dans lequel devra être tracée la figure à dessiner. En outre, certains traits devront être effacés ou non prolongés. L'élève ne devra laisser apparents que ceux du modèle.
Le pas en avant peut se concevoir dans l'analyse de la figure dont les propriétés ne sont pas apparentes car le quadrillage manque. Il faut également noter l'utilisation du support papier blanc qui complexifie les tracés.

GRENOBLE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Si B dit : « 7 + 1 = 8 », A pourra dire : « 8 + 2 = 10 » et gagnera.
Et si B dit : « 7 + 2 = 9 », alors A pourra dire : « 9 + 1 = 10 » gagnant ainsi la partie.
Donc, quelque soit le coup joué par B, A pourra jouer un coup qui lui permettra de dire 10. Cela justifie l'affirmation « J'ai gagné » de A.

Remarque préalable à la suite de l'exercice :
L'énoncé ne dit rien des points de départ possibles pour le premier joueur ; toute la suite de l'exercice fonctionne sur un implicite : les points de départs possibles sont identiques aux nombres que les joueurs peuvent ajouter chacun à leur tour, c'est à dire 1 ou 2 dans les questions 1 et 2, 1, 2 ou 3 dans les questions 3 à 5. Mais pour partager cet implicite avec le rédacteur du sujet, ne faut-il pas avoir déjà une certaine connaissance de ce jeu ou d'autres jeux de la même catégorie, les jeux de Nim ? Certes, ces jeux sont relativement connus des professeurs de mathématiques et tout particulièrement « la course à 20 » utilisée par G. Brousseau dans une série de leçons visant à introduire l'algorithme de la division euclidienne[1], mais ils ne font pas partie de la culture exigible d'un candidat au CRPE.
C'est pourquoi, nous faisons le choix dans ce corrigé de traiter les questions suivantes de deux manières : avec cet implicite et sans (c'est à dire avec tout entier autorisé comme point de départ entier) tout en limitant nos réponses aux nombres positifs, car il y a évidemment une infinité de solutions envisageables aux différentes questions si le nombre de départ peut être négatif..

[1] Guy BROUSSEAU, « Division euclidienne au cours élémentaire et cours moyen » dans « La mathématique à l'école élémentaire » ; APMEP, 1972.

Question 2

Si les seuls nombres de départ possibles sont 1 et 2 :

On a vu à la question précédente que le joueur qui totalise 7 a gagné.

De la même manière, on peut expliquer que le joueur qui totalise 4 est sûr de gagner, car quel que soit le coup joué par son adversaire, il pourra dire 7 au coup suivant et donc 10 ensuite.

Plus généralement, si N est une position gagnante, N - 3 est aussi une position gagnante car le joueur arrivé à N - 3 est assuré d'arriver à N au coup suivant :

Si son adversaire ajoute 1, il ajoutera 2. (N - 3) + 1 + 2 = N
Si son adversaire ajoute 2, il ajoutera 1. (N - 3) + 2 + 1 = N
Dans tous le cas, il arrivera à N.

Ainsi on peut trouver toutes les positions gagnantes en comptant à rebours de 3 en 3 à partir de 10 : 10 ; 7 ; 4 ; 1.

Le nombre annoncé par le joueur B est donc 1.

S'il n'y a aucune contrainte sur le nombre de départ :

On se restreint évidemment aux nombres entiers inférieurs ou égaux à 10, car les autres nombres, s'ils sont choisis comme point de départ, ne permettent à aucun des joueurs de gagner la partie.

Si le joueur B commence en annonçant X choisi parmi les nombres 1, 4, 7 ou 10, il est certain de pouvoir dire X + 3 au coup suivant, c'est à dire qu'il est sûr de gagner :

Tout de suite s'il commence en disant 10.
Au coup suivant, s'il commence par 7.
Au troisième coup, s'il démarre par 4.
Au quatrième coup en annonçant 1 au début.

Si le joueur B commence par un nombre inférieur à 10 différent de 1, 4, 7 ou 10, le joueur A pourra en additionnant 1 ou 2 atteindre au coup suivant la position gagnante la plus proche et ainsi être certain de gagner.

Donc, le joueur B a annoncé l'un des nombres : 1, 4, 7 ou 10.

Question 3

Méthode 1 :

Avec un pas de 3, l'écart entre deux positions gagnantes sera 4 ; un joueur peut toujours avancer de 4 d'un coup au suivant : si son adversaire ajoute 1, il ajoutera 3 ; si son adversaire ajoute 2, il ajoutera 2 ; et si son adversaire ajoute 3, il ajoutera 1.

Donc, dans la course à 10 avec un pas de 3, les positions gagnantes seront :

10, 6 et 2.

Méthode 2 :

Pour être sûr d'annoncer 10 , il faut être celui qui annonce 6 (dire 6 + 1, 6 + 2 ou 6 + 3 permettra toujours en additionnant respectivement 3, 2 ou 1 d'être celui qui dit 10). Et pour être sûr d'annoncer 6, il faut au coup précédent annoncer 2.

Donc, pour être sûr de gagner, le joueur qui commence doit annoncer :
2 si les seuls nombres de départ autorisés sont 1, 2 et 3

2, 6 ou 10 s'il n'y a pas de contraintes sur les nombres de départ.

Question 4

Si on fait maintenant la course à 12 avec des pas de 3, des raisonnements analogues à ceux ci-dessus permettent d'affirmer que les positions gagnantes sont maintenant : 0, 4, 8 et 12.

<u>Si les seuls nombres de départ possibles sont 1, 2 et 3 :</u>
Le joueur qui commence ne peut pas gagner ; qu'il dise 1, 2 ou 3, son adversaire pourra dire 4 au coup suivant et s'installer dans une position gagnante.
Donc, dans ce cas, en laissant son adversaire commencer, A est sûr de gagner.

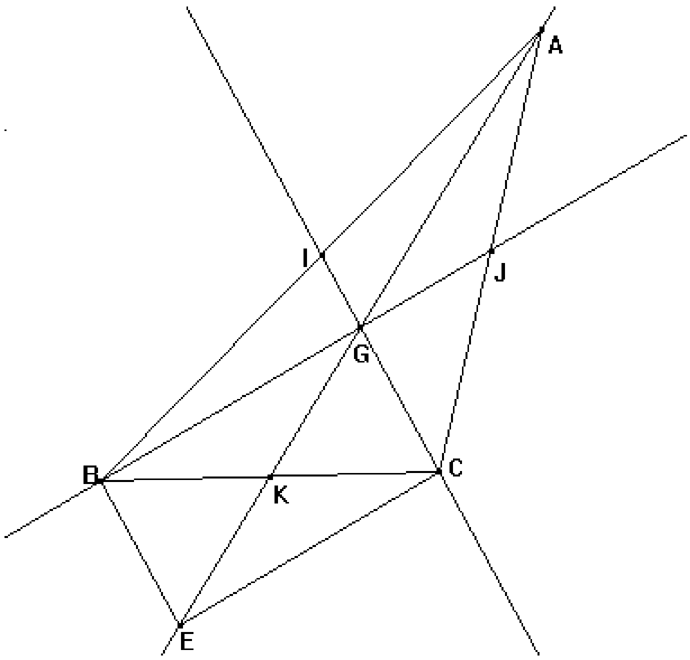
<u>S'il n'y a aucune contrainte sur le nombre de départ :</u>
Alors rien n'empêche le joueur qui commence de gagner en commençant par 0, 4, 8 ou même 12.

Question 5

Dans la course à n par pas de 3, les positions gagnantes seront les entiers de la forme n - 4k (k entier).
Sans contrainte sur le nombre de départ, comme ci-dessus, rien n'empêche le joueur qui commence d'avoir la certitude de gagner.
Si seuls 1, 2 et 3 sont autorisés comme point de départ, pour que le joueur qui commence ait la certitude de gagner, il faut qu'un des nombres 1, 2 ou 3 soit parmi les positions gagnantes, c'est à dire que l'on ait :
1 = n - 4k ou 2 = n - 4k ou encore 3 = n - 4k avec k entier
c'est à dire que n ne soit pas un multiple de 4.

EXERCICE 2

<u>Remarque préalable :</u>
On comprend à la question 3 que <u>le but de l'exercice est de démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes</u>. Il aurait été opportun dans la formulation de l'exercice de l'annoncer dès le début de l'énoncé, car ce fait a une conséquence implicite importante pour les raisonnements en jeu dans cet exercice : la propriété de concourance des médianes ne peut pas faire partie des outils utilisables pour faire les démonstrations demandées ; ainsi, on ne pourra pas l'utiliser à la question 2 pour affirmer que K est le milieu de [BC] et …
Un candidat qui ne lit pas l'énoncé jusqu'au bout avant de commencer ou qui n'accède pas à cet implicite sur les propriétés autorisées dans les démonstrations demandées dans l'exercice risque de se fourvoyer et <u>d'utiliser une propriété dans un raisonnement qui est (implicitement) conçu comme la démonstration de cette même propriété !</u>



Question 1

E est le symétrique de A par rapport au point G, donc G est le milieu de [AE]
D'autre part , on sait que I est le milieu de [AB].
Donc, en utilisant le théorème de la « droite des milieux » ou encore la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABE, on peut affirmer que **les droites (IG) et (BE) sont parallèles**.

Question 2

Le même raisonnement conduit à affirmer que, dans le triangle AEC, la droite (GJ) qui passe par les milieux des côtés [AE] et [AC] est parallèle au troisième côté, c'est à dire à la droite (CE).
Dans le quadrilatère BGCE, on a donc :

(GC) // (BE) d'après la question 1
(GB) // (CE) d'après ci-dessus (la droite (GB) est la droite (GJ))

On a ainsi un quadrilatère BGCE dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux, donc:

BGCE est un parallélogramme.

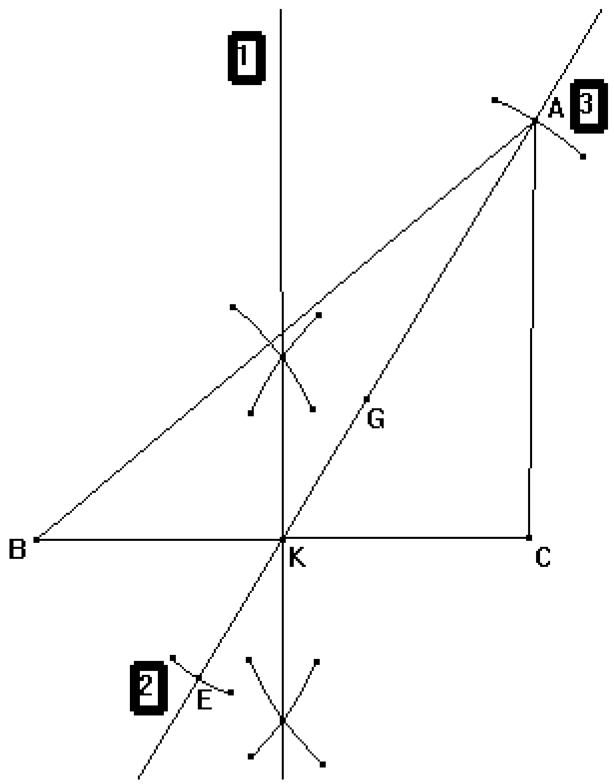
Question 3

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ; comme BGCE est un parallélogramme, il en résulte que K est le milieu des segments [BC] et [GE].
Or K est par hypothèse l'intersection de la droite (AG) avec le côté [BC].
Donc **(AG) est la troisième médiane du triangle ABC.**
Donc la droite issue de A et passant par le point d'intersection G des médianes issues de B et de C est la troisième médiane du triangle ABC.

On vient donc de démontrer la propriété :
« Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes. »

<u>Remarque :</u>
Les raisonnements effectués dans cet exercice permettent de pousser plus loin les conclusions :
E est le symétrique de A par rapport à G, donc AG = GE
K est le milieu de [GE], donc $GK = \frac{GE}{2}$
Donc $GK = \frac{AG}{2}$*, ou encore* $AG = \frac{2}{3}AK$
On a démontré : « Le point d'intersection G des médianes (aussi appelé centre de gravité) est situé aux deux tiers de la médiane [AG] en partant du sommet A. »
Le même raisonnement peut être appliqué aux deux autres médianes.

Question 4
Construction du triangle ABC avec une règle non graduée et un compas, à partir de la donnée des points B, C et G non alignés.



La figure ci-dessus fait apparaître les traces et la chronologie de cette construction :

- On trace le segment [BC], puis sa médiatrice (construction $\boxed{1}$) pour obtenir son milieu K.
- On trace ensuite le point E symétrique de G par rapport au point K (construction $\boxed{2}$).

- Enfin on obtient A symétrique de E par rapport au point G (construction $\boxed{3}$) et on trace le triangle ABC.

Remarque :
En utilisant le résultat établi dans la remarque de la question 3, on peut construire A sans passer par la construction du point E : on reporte à l'aide du compas deux fois la distance KG à partir de G sur la portion de la droite (KG) ne contenant pas K.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Remarque préalable :
Compte tenu des programmes actuels de l'école primaire, on peut affirmer que les exercices que l'énoncé attribue au cycle des apprentissages fondamentaux ont été en fait proposés à des élèves de fin de cycle des approfondissements : il n'y a aucune référence aux aires et périmètres dans le programme du cycle 2 ; de même, les décimaux ne figurent que dans le programme du cycle 3 et il est donc impossible qu'ils soient utilisés (réponse 8,2) dans des productions d'élèves de fin de cycle 2.
Nous choisissons de répondre aux questions posées en faisant l'hypothèse que les productions à analyser sont des productions d'élèves de fin de cycle 3, l'attribution de celles-ci à des élèves de fin de cycle 2 nous paraissant totalement irréaliste.

Conseil :
Avant de répondre aux questions sur les travaux d'élèves, il est judicieux de faire soit-même les exercices proposés aux élèves, même si le sujet ne le demande pas.

Question 1
Difficultés de ces exercices pour les élèves.

- L'unité imposée ne correspond ni à la longueur du côté d'un carreau pour l'unité de longueur, ni à l'aire d'un carreau pour l'unité d'aire.
- La longueur de certains côtés mesurée en cm ne s'exprime pas à l'aide d'un nombre entier.
- La mesure en cm² de l'aire de la surface coloriée en gris ne s'exprime pas par un nombre entier.
- Les formes géométriques en présence sont complexes et ne permettent pas une réponse (pour l'aire comme pour le périmètre) par une procédure de calcul d'aires de surfaces connues.
- L'aire de la surface grisée ne peut pas être mesurée par simple pavage de la surface à l'aide d'un certain nombre d'exemplaires de la surface unité utilisée ; il est nécessaire de fractionner le carré unité de différentes façons.
- A ce stade des apprentissages, périmètre et aire sont deux grandeurs indépendantes associées aux mêmes figures qui sont souvent confondues par les élèves.

Question 2a
Productions de Marina et Raoul.

Marina et Raoul amalgament « segment de 2 carreaux » et « surface de deux carreaux » ; on peut remarquer que l'espace occupé sur la figure par la légende « 1 cm » est une surface de deux carreaux, ce qui a pu provoquer cette erreur.

Ces deux élèves reportent cette surface de deux carreaux à l'intérieur de la figure proposée pour la paver, puis il comptent le nombre d'exemplaires de la surface unité qu'ils ont utilisée.
Pour ces élèves, il y a donc confusion entre mesure d'un périmètre et mesure d'une aire, mais aussi contresens sur la signification de « 1 cm » qui est pris ici comme une unité d'aire.

<u>Remarque :</u>
Le terme « périmètre » ne semble rien évoquer pour ces deux élèves qui conduisent leur action uniquement sous l'effet de la perception des carreaux.

Question 2b
Production de Mathilde.

La présence du produit 7×9 incite à penser que Mathilde calcule l'aire d'un rectangle.
Il est probable qu'il s'agit du rectangle dans lequel s'inscrit la figure et dont les dimensions sont 6 carreaux pour la largeur et 8 carreaux pour la longueur.
Mais au lieu de compter les carreaux, Mathilde compte les nœuds, d'où le nombre 7 pour la largeur et le nombre 9 pour la longueur.

<u>Remarque :</u>
On peut remarquer qu'elle écrit 7 × 9 mais signale par des flèches qu'il faut intervertir le 7 et le 9 : sans doute veut-elle se « conformer » à la formule de l'aire d'un rectangle qu'elle a du apprendre : Aire rectangle = Longueur × Largeur et respecter l'ordre d'écriture des grandeurs.

Question 2c
Erreur commune aux productions des trois élèves de l'annexe B1.

Dans les productions des trois élèves, il y a confusion entre les notions d'aire et de périmètre d'une figure.

<u>Remarque :</u>
Le fait de travailler sur papier quadrillé privilégie la perception des carreaux en rendant plus difficile la perception des longueurs.

Question 3a
Production d'Anaïs et Julie.

Anaïs a compté les carreaux grisés ; elle utilise une unité d'aire erronée 4 fois plus petite que l'unité donnée par l'énoncé : l'aire d'un carreau du quadrillage.
De plus, elle compte de la même façon (pour une unité) les carreaux entiers (totalement grisé) et les carreaux à moitié grisés.

Julie compte, comme Anaïs, tous les carreaux grisés sans faire de différence entre ceux qui sont entiers et les moitiés de carreaux en les marquant d'un point noir, puis elle les regroupe par 4 (« J'ai compté 4 carreaux à chaque fois ») pour tenir compte de l'unité d'aire imposée (aire d'une surface de 4 carreaux du quadrillage). Elle répond 9, sans se préoccuper du dernier carreau isolé qui doit lui rester une fois comptés les 9 paquets de 4 carreaux. (on peut aussi penser qu'elle a oublié un carreau lors du recomptage par paquets de 4.)

Question 3b
Production d'Alexandre.

Pour Alexandre, il y a **confusion entre l'unité d'aire et la surface utilisée pour présenter cette unité ;** pour lui, le cm² est indissociable du carré de 1 cm de côté. Il reporte à l'intérieur de la surface grisée autant d'exemplaires entiers de ce carré qu'il peut (ici 4) ; il n'imagine pas d'autres surfaces de forme différente ayant la même aire (rectangle de 1 carreau sur 4 par exemple obtenu en découpant la surface unité donnée en quatre petits carrés, puis en regroupant ceux-ci dans une autre configuration) ou un fractionnement de cette surface unité.

Question 4

On peut faire l'hypothèse suivante pour expliquer le « 8,2 » proposé par certains élèves comme mesure de l'aire de la surface grisée :
Ils ont dénombré 8 unités entières à l'intérieur de la surface grisée et il leur restait alors 2 carreaux du quadrillage (ou l'équivalent de 2 carreaux) grisés qui ne constituaient pas une unité entière ; cela peut expliquer le 2 après la virgule.
L'écriture à virgule est mal maîtrisée et la partie décimale est comprise comme un entier indiquant le nombre de morceaux (de fractions) de l'unité sans prise en compte de la nature du fractionnement : ici il y a deux quarts d'unité alors que le 2 dans l'écriture 8,2 signifie deux dixièmes d'unité.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1a
Différences de conception de l'entrée dans la numération.

Les documents proposés font apparaître deux organisations des apprentissages relatifs à la numération assez opposées :

- Le sommaire de l'ouvrage « Math - Pédagogie de l'essai » publié chez Hachette fait apparaître une <u>approche des nombres organisée par la succession de ceux-ci dans la file numérique</u> : on étudie successivement les nombres de 1 à 16 dans des leçons séparées, puis une leçon est consacrée aux nombres 17, 18 et 19 ; après la leçon du nombre 20, la progression continue, mais avec une leçon par dizaine (les nombres de 20 à 29 ; les nombres de 30 à 39 ; …).
- L'index du fichier des éditions Retz « J'apprend les maths avec Picbille » laisse imaginer une approche plus globale des nombres : l'organisation en chapitres est pilotée non par l'étude des objets mathématiques que sont les nombres, mais par les types d'actions que ces nombres permettent de mener (représenter les quantités, ordonner, repérer, calculer)

Si on entre dans le détail des titres de chapitres, on peut relever d'autres marques de cette différence de conception sur l'apprentissage de la numération :

- L'ouvrage de Retz semble accorder une <u>place particulière aux nombres 5 et 10</u> : on y étudie les nombres inférieurs à 5, puis ceux inférieurs à 10 et enfin ceux supérieurs à 10.
  Le sommaire de l'ouvrage des éditions Hachette fait apparaître une place importante pour le nombre 10 (leçons 25, 27, 34 et 37), mais aucune place particulière ne semble accordée au nombre 5 à la seule lecture du sommaire.
- L'ouvrage Hachette manifeste par son sommaire une attention particulière à la <u>distinction entre le nombre zéro</u> (leçon 31) <u>et le chiffre 0</u> (leçon 30) ; cela n'apparaît pas dans l'index de l'autre manuel (seul « le nombre zéro » apparaît comme titre pour la page 24).
- Enfin l'index de l'ouvrage de Retz semble accorder <u>une place importante aux supports qui permettent des apprentissages numériques</u> : boîtes de Picbille, boulier, constellations, configurations de doigts, monnaie, file numérique.
  Dans l'autre ouvrage, seule la file numérique apparaît dans le sommaire.

<u>Remarques :</u>

1. *Les titres figurant dans ce sommaire et cet index ne permettent pas de préjuger du contenu des différentes leçons proposées : par exemple l'utilisation de constellations et des doigts qui n'apparaissent pas dans le sommaire de l'ouvrage des éditions Hachette est peut-être proposée à l'intérieur des différentes leçons sur les nombres. Les documents à notre disposition ne permettent pas d'en juger. En consultant le manuel, on constate*

qu'il propose l'utilisation de dominos (jusqu'à 10) puis les carrés-unités et les barres de dix carrés, mais cela n'apparaît pas dans le sommaire.

2. *La réponse ci-dessus utilise « numération » au sens usuel de « connaissance des nombres » et non au sens de la « connaissance de leurs systèmes de désignation ». Si on s'intéresse plus spécifiquement au début de l'apprentissage des systèmes de désignation des nombres, on peut remarquer que chez Retz l'expression numération décimale apparaît dans le sommaire à partir de la page 74, soit à une époque où les élèves utilisent les nombres jusque 50 sans que la dizaine et le rôle des différents chiffres dans l'écriture d'un nombre semblent avoir été évoqués auparavant. L'ouvrage d'Hachette introduit la dizaine comme groupement de 10 et un semblant de tableau de numération (c'est la leçon 28 qui l'atteste) avant l'étude du nombre 11 : une première approche globale des désignations écrites des nombres n'est semble-t-il pas envisagée. D'éventuelles connaissances de celles-ci issues de la maternelle ne le sont pas non plus.*

Question 1b
La place du calcul dans ces deux ouvrages.

Il semble difficile de juger de la place accordée au calcul dans chacun des deux ouvrages par seule référence au nombre de pages explicitement consacrées au calcul tel qu'il peut apparaître dans les documents des annexes C1 et C2.
On peut simplement relever que le manuel Hachette semble concentrer le travail sur le calcul plutôt en fin d'année, après la leçon sur le nombre 16 (leçons 48, 54, 64, 70,…) alors que la partie « Organisation en 4 périodes » de l'index de l'ouvrage de Retz fait apparaître une présence du calcul dans les apprentissages des quatre périodes.

D'autre part, les titres consacrés au calcul dans le sommaire de l'ouvrage Hachette semblent indiquer une priorité donnée au calcul posé ; rien dans ce sommaire n'indique la part accordée au calcul réfléchi et au calcul mental. A l'inverse, l'index de l'ouvrage Retz présente dans la partie calcul, des titres consacrés aux « stratégies de calcul » avant d'aborder la technique opératoire de l'addition dans les dernières leçons ; l'organisation en 4 périodes articule travail sur le comptage et travail sur le calcul. Mais rien ne nous permet d'affirmer que ce qui n'est pas explicité dans un sommaire ou un index n'apparaît pas dans le déroulé des leçons proposées par ces ouvrages.

Un autre différence qui apparaît dans le sommaire concerne la mémorisation de faits numériques : chez RETZ le thème stratégies de calcul laisse transparaître l'organisation de la mémorisation de certains résultats par les élèves ; chez Hachette, on n'a quasiment pas d'information si ce n'est la leçon 54 intitulée « table d'addition » faut-il en déduire que la mémorisation est prévue en une fois à ce moment là ? Ce serait trop s'engager !

Question 2a
Aspect cardinal et aspect ordinal des nombres.

L'aspect cardinal des nombres intervient dans leur utilisation pour dénombrer les éléments d'une collection ; c'est le nombre comme mémoire de la quantité.
L'aspect ordinal des nombres intervient dans la mise en ordre des éléments d'une collection et l'attribution à chacun d'eux, par le comptage, d'un nombre qui indique le rang; c'est le nombre comme mémoire de la position.

Question 2b
Compétences du cycle 2 (§ Exploitation de données numériques) se rapportant à l'aspect ordinal des nombres.

1.1 b Utiliser les nombres pour exprimer la position d'un objet dans une liste ou pour comparer des positions.
1.1 d Déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière.
1.2 b Déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée ou déterminer la valeur du déplacement.

Question 3
Procédures pour effectuer la somme 12 + 7.

- Comptage de 1 en 1 en partant de 1 jusqu'à 19 de la réunion de deux collections de 12 et 7 objets respectivement (doigts, jetons ou objets dessinés).
- Surcomptage : on compte de 1 en 1 à partir de 13 qui est le suivant de 12 ; les doigts ou un autre support peuvent être utilisés pour repérer le point d'arrêt du comptage (19) qui est atteint lorsqu'on a énoncé 7 mots-nombres.
- Décomposition de 12 en 10 + 2 puis recomposition avec appui sur la numération orale : dix et deux et sept, c'est dix et neuf, c'est dix-neuf.
- Décomposition de 12 en 10 + 2, puis, avec appui de la numération écrite, recomposition sous la forme 2 + 7 = 9 (résultat mémorisé ou obtenu par surcomptage de 2 au-dessus de 7) et 10 + 9 = 19.
- Utilisation d'un résultat mémorisé : 12 + 7, c'est 19.
- Utilisation de résultats mémorisés et d'une stratégie de calcul accordant une place privilégiée au nombre 5, comme « pivot » :
  12 + 3 = 15 et 15 + 4 = 19

<u>Remarques :</u>
Si le calcul était proposé sous la forme 7 + 12, on pourrait envisager le surcomptage à partir de 8 jusqu'à 19 comme procédure utilisée par certains élèves ; mais donné sous la forme 12 + 7, cette procédure a peu de chance de se présenter.
Le comptage de 1 en 1 de 1 à 19, parfois aussi appelé recomptage du tout, est ici une procédure lourde avec de gros risques d'erreurs.

La technique opératoire de l'addition n'apporte pas grand chose à l'élève qui doit effectuer un tel calcul.

Question 4a
Inconvénient de ne travailler que l'écriture a + b.

Si on travaille exclusivement l'écriture a + b au début des apprentissages, celle-ci risque d'être utilisée de façon automatique en situation de résolution de problème, car les élèves n'auront fréquenté longtemps que des problèmes où cette écriture fournit la solution, du coup, ils seront enclins à produire cette écriture devant n'importe quel problème à résoudre sans qu'ils réfléchissent au lien entre le sens du problème et l'opération choisie.
Un tel choix conduit également à ne mémoriser le répertoire additif que d'une manière : ex 6 + 5 = 11 alors que l'on utilisera à terme ce triplet (5 ;6 ;11) pour des recherches de compléments et des calculs de différence.

Question 4b
Autres raisons pour un travail simultané des écritures a + b et a - b.

Un travail simultané des écritures a + b et a - b permet de rattacher celles-ci à deux familles de situations et par là-même d'aider les élèves à apprendre à distinguer ces deux opérations en référence au sens que les situations leur confère.

- La nature de l'opération n'est pas un élément essentiel pour établir une hiérarchie de difficulté des problèmes arithmétiques : certains problèmes relevant de l'addition sont plus difficiles que d'autres problèmes relevant de la soustraction ; la recherche du résultat d'une diminution n'est pas plus difficile, toute chose égale par ailleurs, que la recherche du résultat d'une augmentation.
- On peut travailler tout de suite sur la réciprocité des deux opérations : si a et b sont les nombres d'éléments respectifs de deux collections que l'on réunit en une collection unique de c éléments, la situation peut être décrite par l'une ou l'autre des trois égalités :
  c = a + b   a = c - b   b = c - a

Cette réciprocité des opérations est notamment mise en avant dans l'étude et la mémorisation des triplets additifs :
de « 5 pour aller à 11, il y a 6 » et « 11 – 5 = 6 » découlent de « 6 + 5 = 11 » et se mémorisent en même temps.
D'autre part, dans le domaine du calcul, il est intéressant que les élèves disposent simultanément des écritures a + b et a - b pour pouvoir mettre en œuvre certaines procédures de calcul réfléchi de sommes qui s'appuient sur des décompositions soustractives. Par exemple, pour calculer 9 + 4, on peut utiliser :
9 c'est 10 - 1 ; je complète pour avoir 10 avec 1 pris à 4 ; il me reste 4 - 1, c'est à dire 3 à ajouter à la dizaine, donc 13.

Question 4c
Difficultés des élèves dans l'apprentissage de la soustraction.

Il faut distinguer :

- Les difficultés relatives à la résolution de problèmes soustractifs :

Celles-ci ne sont pas propres à la soustraction mais communes à tous les problèmes arithmétiques relevant de l'addition ou de la soustraction qui sont communément regroupés sous l'appellation de problèmes additifs : une même opération va modéliser des situations très différentes du point vue du sens. G. Vergnaud[2] a étudié les difficultés relatives à ces problèmes et a établi une classification qui s'appuie principalement sur le type de relation liant les trois nombres en jeu dans le problème ; les principaux types de situations pour l'école primaire sont :

  - La relation partie-partie-tout ;
  - La transformation d'états ;
  - La comparaison d'états ;
  - La composition de transformation.

- les difficultés relatives au calcul d'une différence :

Elles proviennent de la non-commutativité de la soustraction ; de ce fait, les techniques de calcul de sommes ne sont pas transférables au calcul de différences :

  - Dans le calcul d'une différence, l'ordre des deux termes n'est pas indifférent : étant donnés deux nombres entiers a et b avec a > b, seule la différence a - b est calculable à l'école primaire, la différence b - a qui est un nombre négatif n'entrant pas dans le champ des nombres étudiés dans ces classes.
  - On peut additionner plus de deux nombres, mais la soustraction concernera toujours deux nombres seulement.
  - On retrouve cette dissymétrie dans le calcul réfléchi d'une différence : partir de l'un ou l'autre des deux termes débouche sur deux types de stratégie de calcul différents :
    - Reculer du plus grand nombre vers le plus petit (par décomptage ou par sauts arrière sur la droite numérique).
    - Avancer du plus petit nombre vers le plus grand (par surcomptage, par sauts avant sur la droite numérique ou par addition à trou).
  - Cette non-commutativité entraîne aussi des difficultés dans le calcul posé : le calcul de « l'écart entre deux chiffres » de même rang ne permet le calcul de différence qu'en l'absence de retenue, c'est à dire si le « plus grand chiffre » est dans le premier nombre.

$$\begin{array}{rcc} & 5 & 6 \\ - & 1 & 4 \\ \hline & 4 & 2 \end{array}$$

$\swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$

5 - 1 $\qquad$ 6 - 4

Le calcul des écarts entre chiffres donne le résultat

[2] Voir Le Moniteur de Mathématiques, Fichier pédagogique Résolution de problèmes, Nathan 1997.

$$\begin{array}{rcc} & 5 & 6 \\ - & 1 & 8 \\ \hline & \cancel{4} & \cancel{2} \end{array}$$

Le calcul des écarts entre chiffres donne un résultat erroné (6 < 8).

- La gestion de la retenue dans la technique opératoire de la soustraction est source de difficulté pour les élèves pour deux raisons :
  - Elle est très différente de la gestion des retenues dans la technique opératoire de l'addition.
  - Elle dépend de la technique utilisée : technique classique par compensation, technique par emprunt, technique par addition à trou.[3]

Question 5a
Position du chapitre 27 dans la progression du manuel Hachette.

On peut s'interroger sur la cohérence des écritures utilisées dans les titres de chapitres. En effet, pour le chapitre 25, le nombre dix est nommé en lettres ; puis , pour le chapitre 27, ce même nombre est écrit en chiffres, utilisant donc le chiffre 0 qui ne sera étudié comme chiffre que 3 chapitres plus tard. Cette incohérence semble confirmée par le titre du chapitre 37 « Dix = 10 » qui semble faire le lien entre le nombre dix et son écriture en chiffres.

<u>Remarque :</u>
Mais, n'ayant en main que le sommaire du manuel, on peut aussi faire l'hypothèse selon laquelle les chapitres 30 et 31 sont des chapitres de synthèse dans lesquels, après un temps de fréquentation, on revient sur le chiffre 0 utilisé pour écrire les nombres, et le nombre 0 utilisé pour dénombrer une collection vide afin d'expliciter et de formuler ces savoirs.

Question 5b
La différence chiffre-nombre.

Les chiffres sont des signes utilisés pour écrire les nombres ; dans notre système de numération, on utilise dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Un chiffre est un « *signifiant ».*
Les nombres sont des objets mathématiques. Les nombres entiers sont utilisés pour mesurer les quantités (le cardinal d'une collection) ou pour repérer des positions (le rang d'un élément dans une collection). Ce sont des *« signifiés* » qui existent indépendamment des signes utilisés pour les exprimer.

<u>Remarque :</u>
Hors de tout contexte, il n'est pas possible de dire si « 8 » est un chiffre ou l'écriture en chiffres du nombre huit.

[3] Voir M. Pauvert, Faire comprendre la soustraction, Collection Les pratiques de l'éducation, Nathan/CNDP 1990.

Question 6a
Compétences visées dans les exercices de l'annexe E.

Il s'agit des compétences 2.1.a et 2.1.b du document annexe D :

- Dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un ou des groupements par dizaines et centaines.
- Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.

<u>Remarque :</u>
Ces deux compétences sont reliées aux exercices de l'annexe E, mais on ne peut pas prétendre que ceux-ci permettent d'atteindre ces compétences pour les raisons suivantes :

1. *seul un exemple donné utilise le groupement par dix : dans l'exercice 1, l'élève peut choisir la taille du groupement à moins qu'il n'effectue le groupement par dix par imitation de l'exemple; par ailleurs, les exercices 2 et 3 utilisent les groupements par huit, par quatre et par six.*
   La compétence réelle faisant l'objet du travail proposé est davantage l'acquisition du mécanisme de groupement.
2. *dans ces exercices, on réalise des groupements que l'on code dans un tableau. On entretient l'illusion selon laquelle il est évident pour les élèves qu'une fois le tableau rempli, sa lecture fournit un dénombrement de la collection. Or l'expérience montre qu'à l'issue d'un tel travail, un grand nombre d'élèves n'utilisent pas spontanément le codage enregistré dans le tableau pour répondre à la question « combien y a-t-il de … ? », mais se lancent plutôt dans un recomptage un à un de la collection ou dans un calcul mental, facilité par l'organisation en sous collections de certains exemples.*
   L'interprétation du codage écrit dans le tableau est d'autant plus délicate qu'il ne correspond pas, dans le cas d'un groupement autre que dix, au nombre que l'on obtient par le comptage un à un des éléments de la collection.
3. *Dans le cas de groupement par dix, l'écriture décimale des nombres n'est jamais exprimée en dehors du tableau, ce qui ne permet pas la compréhension explicite de la valeur des chiffres selon leur position par le passage de :*

❍dix	✖
2	*4*

Redondance de l'information : position + titre de la colonne

à 24 où seul subsiste le codage positionnel.

Question 6b
Types de réponses envisageables pour l'exercice 1.

- Utilisation du groupement par dix induit par l'exemple : 1 groupe et 8 éléments isolés.
- Utilisation de groupements de même quantité (autre que dix) avec des éléments restant isolés : par exemple, 2 groupes de 8 et 2 éléments isolés.

- Utilisation de groupements de même quantité sans éléments isolés : par exemple, 2 groupes de 9 ou 3 groupes de 6.
- Utilisation de groupements de tailles différentes, avec ou sans éléments isolés : par exemple, 3 groupes (2 de 5, 1 de 6) et 2 éléments isolés.

Question 6c
Analyse des exercices 2 et 3.

Comme indiqué dans la remarque de la question 6a, ces exercices fonctionnent sur un implicite erroné selon lequel le fait d'avoir rempli les tableaux après réalisation de groupements d'objets est compris comme un moyen pour dénombrer la collection.

Mais, même en admettant une identification entre le codage effectué dans le tableau et une écriture du nombre d'éléments de la collection, on peut faire les remarques suivantes :

- Dans l'exercice 2, on code deux collections n'ayant pas le même nombre d'éléments, l'une en base huit, l'autre en base quatre. A aucun moment, le problème de la comparaison des collections n'est posé. Cet exercice apparaît comme un exercice de codage un peu gratuit et la remarque qui suit l'exercice a peu de chance d'être comprise des élèves.
- Dans l'exercice 3, on code deux collections ayant le même nombre d'éléments : l'une est codée en base six et l'autre en base quatre. On veut monter que des groupements différents de la même quantité aboutissent à des codages différents.
  Cependant :
  - Les objets des deux collections n'ayant pas la même forme, la perception de « la même quantité des deux côtés » n'est pas favorisée ;
  - Le nombre d'éléments isolés après groupements est le même dans les deux cas ; cela peut masquer en partie l'aspect « différence des deux codages ».

Un tel exercice apporte-t-il vraiment quelque chose aux élèves dans l'apprentissage de la numération décimale, d'autant que l'élève est confiné dans l'exécution d'une tâche et n'est soumis à aucun questionnement ? Il est permis d'en douter.

GUADELOUPE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Le nombre $\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta5\Delta$ est un nombre écrit en base 10. On en déduit que Δ est un nombre entier tel que $0 < \Delta \leq 9$.
La somme des chiffres de ce nombre vaut $6 \times \Delta + 25$ et doit être un multiple de 7.
Comme $0 < \Delta \leq 9$, on en déduit que $31 < 6 \times \Delta + 25 \leq 79$.
On peut organiser la recherche à l'aide d'un tableau dans lequel on donnera pour valeurs à l'expression $6 \times \Delta + 25$ les multiples de 7 compris entre 31 et 79 ; puis on essayera de trouver des valeurs de Δ qui conviennent si c'est possible.

$6 \times \Delta + 25$	**$6 \times \Delta$**	**Δ**
35	10	impossible
42	17	impossible
49	24	4
56	31	impossible
63	38	impossible
70	45	impossible
77	52	impossible

La seule valeur possible est $\Delta = 4$.

Question 2a

Le nombre E97F est écrit en base 10.
On en déduit que $1 \leq E \leq 9$ et que $0 \leq F \leq 9$.
Si la somme des chiffres de ce nombre est 29 on a l'égalité suivante :
$E + F + 16 = 29$ d'où $E + F = 13$ donc les couples (E ; F) possibles sont :

(4 ; 9), (5 ; 8), (6 ; 7), (7 ; 6), (8 ; 5), (9 ; 4).

Question 2b

Si le produit des chiffres de ce nombre est 2268, on a E × F × 9 × 7 = 2268
d'où E × F = 2268 ÷ 63 = 36 .
D'autre part, on sait que le nombre EF est divisible par 7.
Parmi les couples (E ; F) trouvés en question a), voici les possibilités :

E × F = 36	EF	
4 × 9	49	valeur possible
9 × 4	94	valeur impossible car non multiple de 7

On obtient donc **E = 4 et F = 9** ainsi le nombre cherché est donc **4 979**.

EXERCICE 2

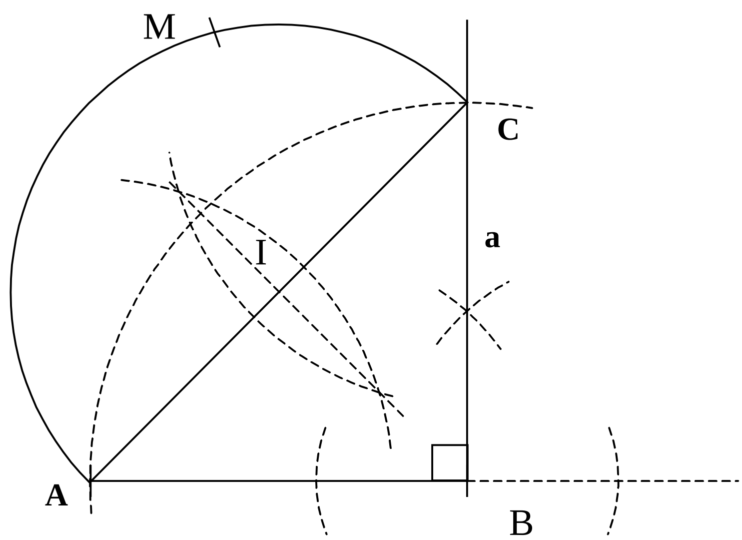
Sur la carte donnée, la distance mesurée entre les deux pointes est de 41 mm ou 4,1 cm.
En réalité, la distance est de 1 km ou 1 000 000 mm.
L'échelle de cette carte est donc de 41 / 1 000 000 $^{\text{ème}}$, soit environ 1 / 25 000 $^{\text{ème}}$.

<u>Remarque :</u>
L'échelle d'une carte est le rapport de la mesure sur la carte par la mesure de la longueur correspondante dans la réalité (les deux mesures étant exprimées dans la même unité). L'échelle de la carte est le coefficient de réduction de la réalité.
On peut la trouver exprimée sous différentes formes.
Par exemple :
41 / 1 000 000$^{\text{ème}}$ ou 4,1 cm pour 1 km.

EXERCICE 3

Question 1

Le sujet ne précise pas les instruments utilisables, on suppose que seuls la règle et le compas sont autorisés.



Question 2

Calcul de la longueur AC

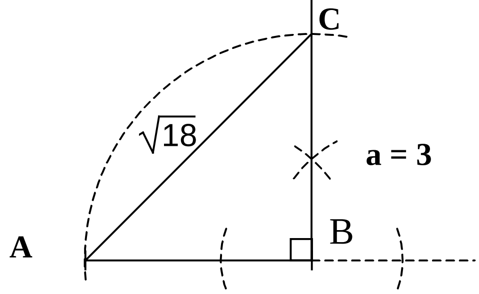
<u>Méthode 1 :</u>
Le triangle ABC rectangle isocèle en B est un demi-carré de côté **a,** coupé par sa diagonale [AC]. On sait que la diagonale d'un carré de côté **a** vaut $\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$. On en déduit que AC = $\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$.

<u>Méthode 2 :</u>
On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

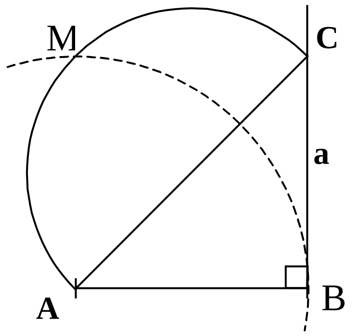
$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2 = 2\,\mathbf{a}^2 \qquad \text{d'où } AC = \sqrt{2a^2} = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$$

Pour construire un segment de longueur $\sqrt{18}$ cm il suffit de construire un triangle rectangle isocèle de 3 cm de côté puisque si **a** = 3 alors $2\mathbf{a}^2 = 18$ et l'hypoténuse de ce triangle aura une longueur de $\sqrt{18}$ cm.



On peut aussi construire un carré de côté 3 cm et la longueur de sa diagonale sera de $\sqrt{18}$ cm.

Question 3



Méthode 1 :
Le triangle AMC est rectangle en M car il est inscriptible dans le demi-cercle de diamètre [AC].
Dans ce triangle rectangle, on calcule MC par le théorème de Pythagore.

$$MC^2 = AC^2 - AM^2 = 2\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2$$

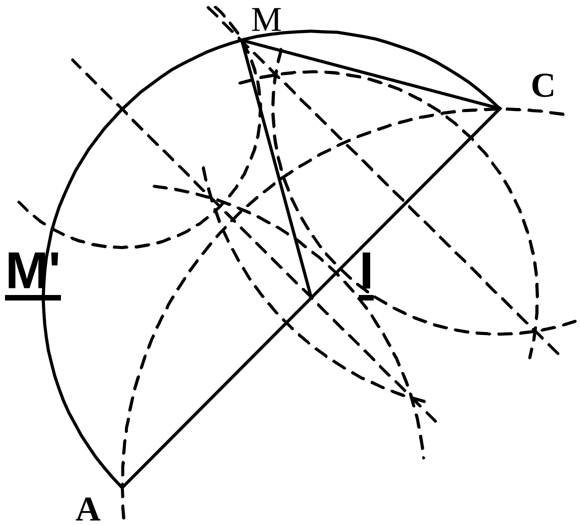
D'où MC = **a.**
Ainsi le quadrilatère ABCM a quatre côtés de même longueur **a,** c'est un losange. De plus l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, **donc ABCM est un carré**.

Méthode 2 :
Le triangle AMC est rectangle en M car il est inscriptible dans le demi-cercle de diamètre [AC] et donc inscriptible dans le cercle de diamètre [AC].
Le triangle ABC rectangle en B est aussi inscriptible dans le cercle de diamètre [AC].
On en déduit que les points A, B, C et M sont cocycliques.
Le diamètre [AC] est un axe de symétrie de ce cercle. Comme les points M et B sont sur le cercle et que AM = AB alors les points M et B sont symétriques par rapport à l'axe (AC). On en déduit que CM = CB = **a** car la symétrie conserve les distances.
Ainsi le quadrilatère ABCM a quatre côtés de même longueur **a,** c'est un losange. De plus l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, **donc ABCM est un carré**.

Question 4 a

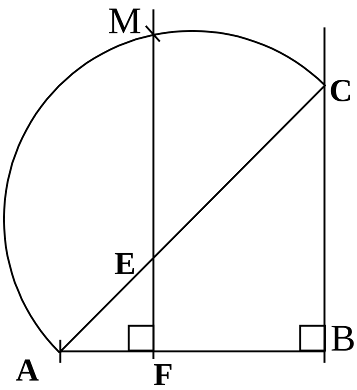
Si IM = MC le triangle IMC est équilatéral. En effet tout d'abord IMC est isocèle puisque IM = MC puis IM = IC car tous deux sont des rayons du cercle.

Question 4b



Attention ! Pour améliorer sa lisibilité, la figure a été agrandie !

Question 5



Par construction, la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (AB).
D'autre part, le triangle ABC est rectangle en B, donc la droite (BC) est aussi perpendiculaire à la droite (AB).

Ainsi, les deux droites (EF) et (BC) sont perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles entre elles.

Elles sont toutes les deux coupées par la droite (AC) donc les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux car ils sont correspondants.

Or dans le triangle isocèle ABC, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux

On peut en déduire que les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{FAE}$ sont égaux ;
donc **le triangle AEF est isocèle.**

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1
Problème soustractif au CE1

Dans l'annexe 2 donnant des extraits de programmes, ce problème est associé a la compétence suivante :

« Dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité (ou la valeur) initiale, ou trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution ».

Explication de la réponse 44 cubes

Première difficulté :
En début de CE1 les élèves ont bien révisé l'addition, mais très peu abordé la soustraction, voire pas du tout. Ils vont avoir tendance à utiliser l'opération qu'ils font d'habitude d'autant plus que dans l'énoncé du problème l'expression « j'ajoute » induit une addition. Les élèves vont se précipiter sur cet indice pour utiliser l'opération qu'il connaissent en oubliant tout le reste : manipulation des cubes et autres mots clés (« maintenant », y « avait-il » à l'imparfait) dans le discours de l'enseignant, d'autant plus qu'il semble bien que les élèves ne disposent pas d'un texte écrit (l'enseignant « s'adresse » aux élèves).

Deuxième difficulté :
D'après la classification élaborée par Gérard Vergnaud des types de problèmes additifs, il s'agit d'une transformation d'état pour laquelle on donne la transformation (« j'en ajoute 10 ») et l'état final (« maintenant, il y a 34 cubes »). Il faut trouver l'état initial (« combien y avait-il de cubes dans la boite »). Parmi les types de problèmes résolus par addition ou soustraction, il est classé comme assez difficile[1].

Validation de la réponse

Remarque :
La place de la question dans ce paragraphe pose problème. S'agit-il de la validation de la seule réponse « 44 cubes » ou s'agit-il de la validation globale de la résolution du problème ? Dans ce corrigé, nous avons traité les deux possibilités en même

[1] *D'après G. Vergnaud, ce n'est pas le type de problèmes le plus difficile. En effet parmi les problèmes résolus par addition ou soustraction, un autre type difficile est celui d'une succession de deux transformations dans lequel on demande :*
- *soit la transformation finale en donnant les deux transformations ;*
- *soit une des deux transformations en donnant l'autre et la transformation finale.*

Mais ce type de problème n'est pas donné à résoudre au cycle des apprentissages fondamentaux.

temps. Le mot validation est au singulier, le candidat pourra donner une des deux validations suivantes ou les deux.

<u>Validation avec manipulation des cubes</u>
Un élève compte effectivement les cubes de la boîte du maître. Il y en a bien 34. D'où proviennent-ils ? Il y a ceux qui étaient déjà dans la boite et ceux que le maître a rajoutés[2]. L'élève met 10 cubes de côté, et dénombre les autres, il obtient ainsi la réponse exacte au problème.
L'invalidation de la réponse « 44 cubes » peut se faire à différents moments :

- soit totalement à la fin de la manipulation, en comparant 44 au résultat trouvé ;
- soit en déduisant que la quantité des cubes restant, après en avoir mis 10 de côté, devra être plus petite que 34 donc que 44 n'est pas une réponse possible ;
- soit dès le dénombrement initial des 34 cubes, puisque 44 est plus grand que 34.

<u>Validation sans manipulation des cubes</u>
Pour savoir si la réponse calculée est exacte, on imagine une boîte fictive contenant le nombre de cubes trouvés, on lui ajoute 10. Si on trouve 34 le nombre anticipé est exact[3].
Ainsi pour la réponse « 44 cubes », l'élève peut vérifier que 44 + 10 n'est pas égal à 34.

Question 2
Problème de proportionnalité et nombres sexagésimaux en fin de cycle 3

<u>Conseil :</u>
Avant d'analyser les réponses fournies par les élèves, il est judicieux de résoudre soit-même le problème, même si le sujet ne le demande pas.

L'élève qui fournit ces réponses suit la chronologie suivante :

- il écrit les nombres sexagésimaux sous forme de nombres décimaux ;
- il fait un calcul avec ces nombres décimaux ;
- il écrit une phrase de conclusion en transformant le nombre décimal trouvé sous forme d'un nombre sexagésimal.

Dans ces écritures, en terme d'erreurs ou de réussites, on peut dire que :

- L'élève considère les nombres sexagésimaux comme des nombres décimaux obtenus par simple juxtaposition des nombres d'heures et de minutes.
- L'élève considère le nombre décimal comme la juxtaposition de deux nombres entiers. En effet, il divise séparément la partie entière et la partie décimale de 3,15 par 3 et ainsi donne un résultat faux 1,5. On peut noter ici que cette règle appliquée au deuxième calcul donne un résultat exact.

---

[2] *Ce serait plus simple si l'enseignant avait rajouté 10 cubes rouges par exemple en ayant mis au préalable des cubes d'une autre couleur dans la boite. Ce n'est pas du tout indispensable.*
[3] *Pour 10 cela peut se faire mentalement car il s'agit plus d'un problème de numération que d'un problème d'addition. Si le nombre est différent de 10 cela peut se faire par surcomptage ou en posant l'addition par écrit.*

- Les deux situations de proportionnalité sont reconnues, le choix du type de coefficient est correct (multiplier par…, diviser par…).
- Le premier coefficient de proportionnalité « multiplier par 3 » n'est pas correct. L'élève interprète une proportionnalité inverse en proportionnalité directe. La bonne réponse est 3 fois 3h15min donc 9h45min.
- De même, le deuxième coefficient est faux. L'élève utilise le coefficient « multiplier par 3 » qui s'applique à l'agrandissement des côtés du rectangle alors que le coefficient d'agrandissement de l'aire du rectangle est « multiplier par 3 × 3 ». La bonne réponse est 9 fois 3h15min, soit 29h15min.
- Les notations utilisées dans la phrase de conclusion sont incomplètes, il manque « min ». Une des origines possibles est que le mot « minutes » est rarement prononcé oralement.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1a

Objectifs de l'activité 1

- Renforcer le lien entre l'addition itérée et la multiplication.
- Amener les élèves à se convaincre de l'intérêt de l'utilisation de la multiplication quand le nombre de termes égaux dans l'addition augmente.

Objectifs de l'activité 2

- Faire trouver une stratégie pour résoudre un problème sur la recherche d'un quotient dont la valeur appartient à un champ numérique fréquenté par les élèves, sans recourir à la division pas encore connue et qui ne sera introduite qu'en CE2.
- Faire abandonner l'addition itérée au profit de calculs de produits quand le quotient augmente, dans un même type de problèmes.

Question 1b
Compétences développées

- les cinq compétences générales énumérées dans l'annexe 2. Cependant la compétence de rédaction de la réponse s'exerce peu puisque la rédaction est en partie déjà faite dans le bon de commande fourni aux élèves.

- dans des situations où plusieurs valeurs identiques sont réunies, déterminer la valeur totale ou le nombre de valeurs.

Question 2a
Titre pour chaque étape

<u>Activité 1 phase 1</u>

Etape 1 : Appropriation de la tâche par les élèves[4] .
Etape 2 : Recherche du problème.
Etape 3 : Mise en commun des résultats et des procédures de calcul.
Validation du résultat.

---

[4] On dit aussi en didactique que l'enseignant fait la « dévolution du problème » aux élèves. Le fait de demander les prix est une façon de permettre aux élèves de s'approprier le problème.

Activité 1 phase 2

Etape 1 : Appropriation de la tâche et résolution du problème.
Etape 2 : Mise en commun des messages, des résultats et des procédures de calcul. Validation des résultats.
Etape 3 : Réinvestissement.

Activité 2 phase 1

Etape 1 : Appropriation de la tâche et résolution du problème.
Etape 2 : Mise en commun des résultats et des procédures de calcul. Validations des résultats.

Question 2b
Procédures de calcul

Activité 1 Phase 1

Procédure 1 : Les élèves effectuent trois additions itérées.
Exemple : 22 + 22 + 22 + …
Ces additions peuvent se faire à la main ou avec la calculette de différentes façons.

Procédure 2 : Les élèves effectuent des additions par groupement de termes à la main ou avec la calculette.
Par exemple en regroupant :
- deux termes
(22 + 22 = 44, 44 + 44 = 88, 88 + 88 = 176, 176 + 44 = 220).
- plusieurs termes
(22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 110 puis 110 + 110 = 220).

Procédure 3 : Les élèves effectuent trois multiplications en utilisant tous les moyens disponibles pour y arriver (c'est à dire ce qui a été appris sur la multiplication dans les leçons antérieures ou avec la calculette).

Activité 1 Phase 2

Dans cette phase, on peut distinguer les différentes types de messages envoyés par les émetteurs :
- soit sans indication de calcul. Par exemple un dessin de 11 objets avec le prix unitaire marqué sur chaque objet ;
- soit avec l'indication d'un calcul à effectuer qui peut être de deux sortes, une longue écriture additive de prix unitaires ou une écriture multiplicative.

En ce qui concerne les récepteurs, ils peuvent utiliser les trois procédures de calcul décrites pour la phase 1. Partant d'une longue écriture additive, ils peuvent ou non la fractionner avec des sommes intermédiaires ou la transformer en écriture multiplicative.

Activité 2 Phase 1

Procédure 1 : Les élèves effectuent une addition itérée des prix unitaires à la main ou avec la calculette tant que le résultat est inférieur à 200. Puis ils décomptent le nombre de valeurs identiques mises en jeu et ils déterminent le reste.

Procédure 2 : Les élèves effectuent des soustractions successives de même prix unitaire à la main ou avec la calculette, tant que c'est possible. Puis ils décomptent le nombre de valeurs identiques mises en jeu et ils déterminent le reste (le dernier résultat trouvé).

Procédure 3 : Les élèves essaient d'approcher 200 avec des produits, les multiplications se faisant avec les moyens disponibles (répertoire multiplicatif, calculette). Puis ils déduisent le quotient et le reste.

Question 3
Variables didactiques de la situation

On peut considérer deux types de variables : les outils mis à disposition et le choix des nombres.

Les outils mis à disposition

- la disponibilité ou non de la calculette.
  Cette disponibilité permettra des calculs multiplicatifs qui ne seraient pas envisageables par des élèves ayant peu de connaissances dans la technique de multiplication[5] .
- la disponibilité ou non de répertoires multiplicatifs ou de tables de multiplication.

Le choix des nombres

- le nombre d'objets dont il faut calculer le prix.
  Plus ce nombre est grand, plus les calculs basés sur l'addition itérée seront coûteux en temps et en risque d'erreurs. Un nombre d'objets plus grand que 10 doit favoriser l'apparition de calculs multiplicatifs[6].

- les prix unitaires des objets.
  Certains nombres facilitent les calculs additifs (par exemple les nombres terminés par 0 ou 5, ou bien les nombres dont les chiffres des unités et des dizaines sont petits (1 ou 2) retardant ainsi l'apparition des retenues). Les

[5] *Le sujet semble bien indiquer que ces élèves sont au début de l'apprentissage de la multiplication du fait du mot « présenté » dans la phrase « le signe x a été présenté ».*

[6] La valeur particulière 10 pour un nombre d'objets peut amener à introduire la règle du zéro : chaque dizaine devient une centaine et chaque unité devient une dizaine. Ceci peut ensuite inciter les élèves à utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Par exemple pour calculer le prix de 12 objets, on calcule le prix de 10 puis on ajoute le prix de 2. C'est la base de la technique opératoire de la multiplication.

nombres 25 et 50 sont encore plus particuliers car ce sont des diviseurs de 100, facilitant aussi bien les calculs additifs que multiplicatifs.

Question 4
Organisation de la classe

Dans les phases successives, le problème est résolu avec l'organisation suivante :

- **individuellement ou par équipe de 2** (phase 1 de l'activité 1)

Cette organisation est importante pour démarrer.
En effet un premier temps de réflexion individuelle permet à chaque élève de se mesurer seul au problème, de se rendre compte des difficultés qu'il rencontre personnellement.
Collaborer ensuite avec un voisin permet de corriger ses premières erreurs, aller plus loin dans la procédure choisie, voire de trouver la réponse.
On peut espérer que chaque élève aura ainsi adopté une procédure et l'aura menée le plus près de son terme.
La mise en commun permettra à chacun de se rendre compte de l'existence d'autres procédures et peut-être d'en changer par la suite.

- **par la collaboration de deux équipes de 2 , une qui demande un calcul et l'autre qui effectue ce calcul** (activité 1 phase 2)

Remarquons d'abord que l'organisation permet dans un premier temps à tous les élèves d'être émetteurs, et dans un second temps à tous d'être récepteurs.
Les émetteurs, qui choisissent de poser un calcul[7], sont obligés de le faire en respectant une certaine forme pour être compris.
D'autre part, si dans la première phase, certains avaient adopté une procédure par additions intermédiaires (risque d'écrire par exemple: 27 + 27 = 54 + 27 = 81 ,. etc.) ceci n'est plus possible car tout calcul est interdit. Ils doivent opter soit pour la longue écriture additive, soit pour l'écriture multiplicative.
Les récepteurs peuvent éventuellement transformer l'écriture additive en écriture multiplicative s'ils sont bien persuadés que cela ne change pas le résultat.
Cette organisation devrait ainsi favoriser l'adoption du signe × qui a dû être déjà rencontré par tous lors de la mise en commun précédente.

- **par la collaboration de deux équipes de 2, une qui résout le problème et une qui vérifie si le problème est bien résolu**
  (les deux phases de l'activité 2)

Si une équipe a opté pour des calculs additifs, rien n'empêche l'équipe qui vérifie son travail d'effectuer une multiplication (surtout s'ils ont la calculette) et de manifester son éventuel désaccord si les résultats sont différents. Ils peuvent ensuite rechercher ou non où se trouve l'erreur éventuelle dans le calcul additif.
Cette organisation permet à nouveau d'inciter les élèves à adopter la multiplication plus rapide que l'addition itérée et donc à apprendre la technique opératoire la plus rapide pour le cas où la calculette n'est pas disponible.

[7] *Les dessins d'objets accompagnés du prix pourraient être interdits dans la consigne.*

GUYANE

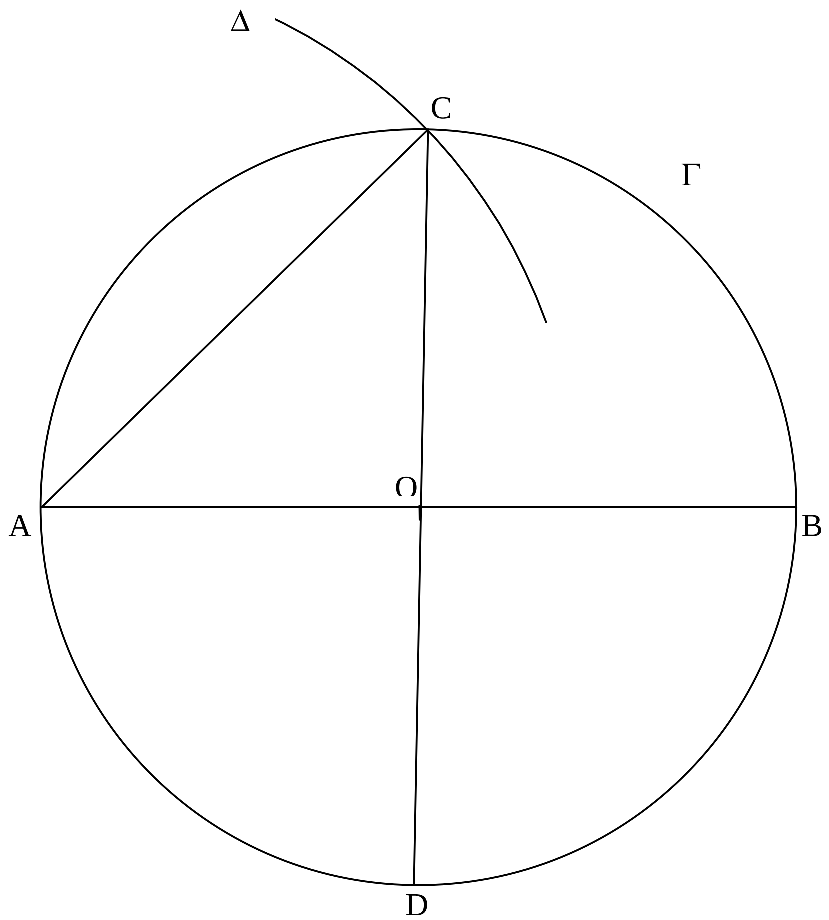
Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1
Figure en vraie grandeur



Nous traçons le cercle de centre O et de rayon 5 cm : c'est aussi le cercle Γ de diamètre [AB].
C est l'un des points d'intersection du cercle Γ avec le cercle Δ de centre A et de rayon 7,1 cm. Traçons le segment [AC].
La droite (CO) recoupe le cercle Γ au point D qui est diamétralement opposé à C.

Question 2
Nature du quadrilatère ACBD

ACBD est un parallélogramme car ses 2 diagonales [AB] et [CD] se coupent en leur milieu commun O ([AB] et [CD] sont deux diamètres du cercle Γ de centre O).

ACBD est-il un losange ?
Le parallélogramme ACBD aurait alors ses deux côtés consécutifs [AC] et [CB] isométriques, montrons de deux façons différentes que cela n'est pas le cas.

<u>Méthode 1 :</u>
AC = 7,1 **$AC^2 = 50{,}41$**
C point du cercle Γ et [AB] diamètre. Le triangle ACB inscrit dans le demi cercle est donc rectangle en C.
Avec le théorème de Pythagore $AB^2 = AC^2 + CB^2$
$CB^2 = AB^2 - AC^2$ $CB^2 = 100 - 7{,}1^2$ $CB^2 = 100 - 50{,}41$ **$CB^2 = 49{,}59$**
Ainsi $AC^2 \neq CB^2$ donc $AC \neq CB$
ACBD n'est donc pas un losange.

<u>Méthode 2 :</u> par l'absurde.
Si AC = CB alors CB = 7,1
d'où $AC^2 + CB^2 = 2 \times 7{,}1^2$ soit $AC^2 + CB^2 = 2 \times 50{,}41$;
c'est à dire $AC^2 + CB^2 \neq 100$ et le triangle ACB ne serait donc pas rectangle en C ; d'où la contradiction.

ACBD est un rectangle car il s'agit d' un parallélogramme ayant un angle droit en C (ACB triangle rectangle en C).

ACBD n'est pas un carré car dans ce cas ce serait un losange ce qui n'est pas le cas.

Question 3
Aire de ACBD

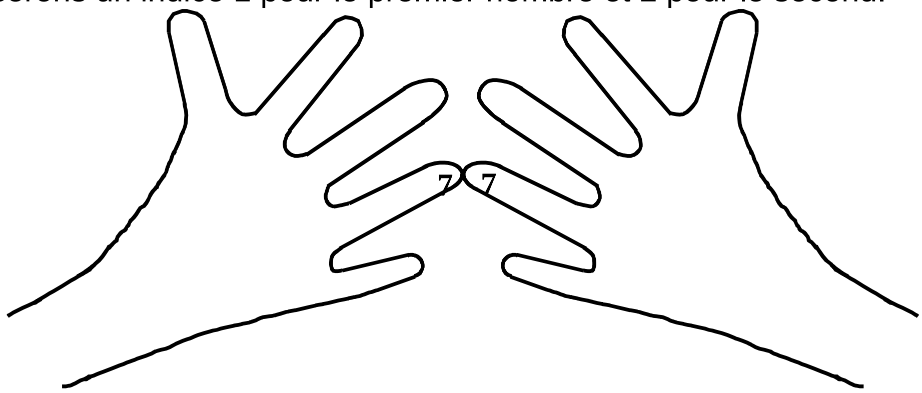
C'est un rectangle : son aire vaut donc AC x CB, soit en cm^2 :
$AC \times CB = 7{,}1 \times \sqrt{49{,}59}$
d'où une aire peu différente de 49,99831 cm^2,
soit une **valeur approchée de 4998,3 mm^2** à 0,1 mm^2 par défaut.

EXERCICE 2

Question 1

Vérification de la méthode sur le calcul de 7 × 7

Nous utiliserons un indice 1 pour le premier nombre et 2 pour le second.

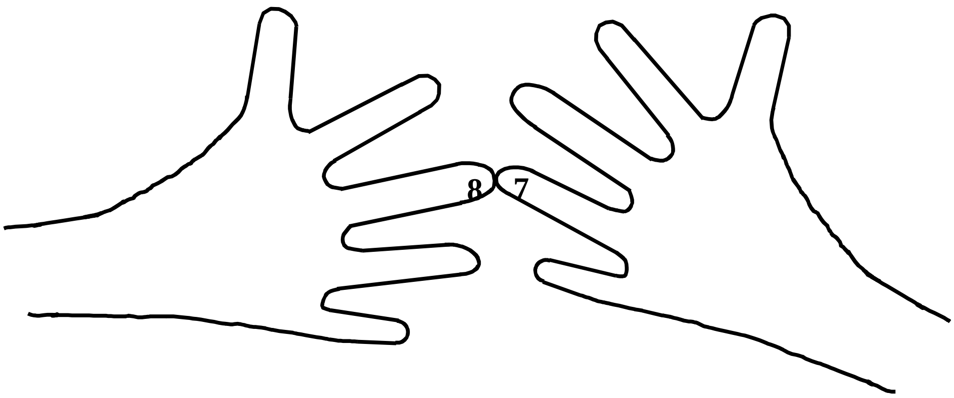


- Il y a 3 doigts « libres en haut » dans chaque main $U_1 = 3$ et $U_2 = 3$
  Ce qui fait que le chiffre des unités est : $U = 3 \times 3$ soit $U = 9$.

Remarque :
La méthode n'indique pas qu'il s'agit du « chiffre des unités » du résultat.

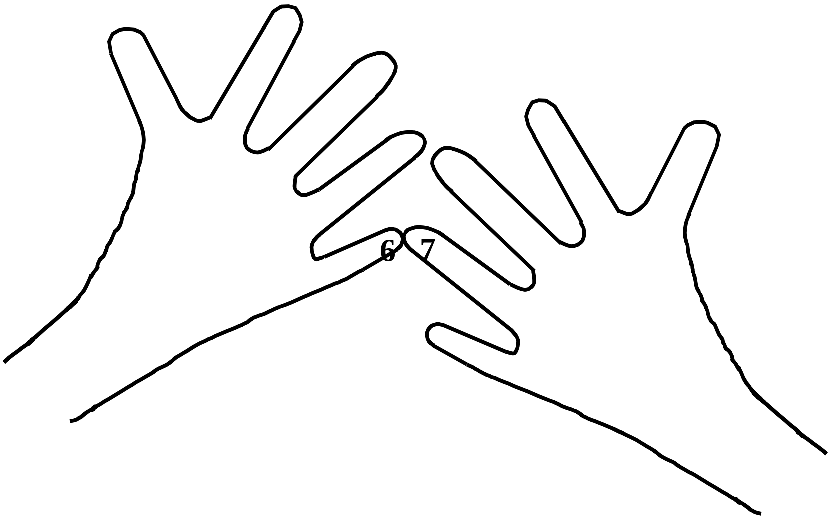
- Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 2 + 2$, soit $D = 4$. C'est le chiffre des dizaines.
- Le résultat est donc bien : $\overline{DU} = 49$.

Vérification de la méthode sur le calcul de 8 × 7



- Il y a 2 doigts « libres en haut » dans la main gauche et 3 doigts « libres en haut » dans la main droite $U_1 = 2$ et $U_2 = 3$.
- Ce qui fait que le chiffre des unités est $U = 2 \times 3$ soit $U = 6$.
- Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 3 + 2 = 5$. C'est le chiffre des dizaines.
- Le résultat est donc bien : $\overline{DU}$ **= 56**.

Question 2
Le cas de 6 × 7



Il y a 4 doigts « libres en haut » dans la main gauche et 3 doigts « libres en haut » dans la main droite : $U_1 = 4$ et $U_2 = 3$.
Les unités devraient être : $U = 4 \times 3$ soit $U = 12$.
Ce nombre est constitué de deux chiffres, car $U > 10$.
Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 2 + 1$ soit $D = 3$.
Nous n'obtenons plus l'écriture canonique en base dix : $\overline{\mathrm{DU}}$ du résultat, mais :
$R = (D \times 10) + U$.
Il faut échanger 10 unités contre une dizaine supplémentaire pour obtenir l'écriture canonique.
$R = (3 \times 10) + 12$; d'où $R = (4 \times 10) + 2$ soit $R = 42$
Le résultat est donc bien 42. La méthode reste valable

Trois cas sont dans cette catégorie :
Pour que le produit $U_1 \times U_2$ soit supérieur à 10, il faut : ($U_1 > 2$ et $U_2 > 3$) ou ($U_1 > 3$ et $U_2 > 2$) car le premier produit supérieur à dix est le produit 3 × 4.
L'énumération des cas est alors le suivant (car $U_1 < 5$ et $U_2 < 5$) :

U_1	U_2	$U_1 \times U_2$	Premier nombre x	Second nombre y	Produit
3	4	12	7	6	42
4	3	12	6	7	42
4	4	16	6	6	36

Question 3
Justification de la méthode

Il s'agit de prouver que $10\,(D_1 + D_2) + U_1\,U_2 = x\,y$

Nous avons $x = 5 + D_1$ soit $D_1 = x - 5$
et $D_1 + U_1 = 5$ soit $U_1 = 5 - D_1$ d'où $U_1 = 10 - x$

De même :

$D_2 = 5 - y$ et $U_2 = 10 - y$

Calculons $10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2$ en fonction de x et de y.

$$10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = 10(x + y - 10) + (10 - x) (10 - y)$$

d'où

$$10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = 10 x + 10 y - 100 + 100 - 10 x - 10 y + xy$$

soit

$$\mathbf{10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = xy}$$

Remarque :

Pour plus de compléments et une autre façon de calculer sur ses doigts, voir “histoire universelle des chiffres” Georges Iffrah. Collection “bouquin” R. Laffont. Tome 1 pages 149 à 152.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Nous proposons deux résolutions de ce problème

<u>*Méthode 1 :*</u> *sous forme algébrique*

On nomme respectivement m et v le nombre de motos et le nombre de voitures ; on peut écrire :

$$\begin{cases} m + v = 9 \\ 2m + 4v = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m + 2v = 18 \\ 2m + 4v = 30 \end{cases}$$

donc $2v = 12$ soit $v = 6$ et $m = 3$.

Le père dispose de 6 voitures et de 3 motos.

<u>*Méthode 2 :*</u> *sous forme arithmétique*
Supposons que le nombre de voitures soit 4 et le nombre de motos soit de 5.
Nous aurions : $4 \times 4 = 16$ et $5 \times 2 = 10$; soit 26 roues.
L'échange d'une moto contre une voiture permet l'ajout de deux roues supplémentaires. Il est donc suffisant d'échanger deux motos contre deux voitures.
Nous obtenons donc 6 voitures et 3 motos*.*
(Méthode arithmétique dite de la « fausse position »).

Question 1
Deux compétences que ce problème permet de travailler

Ce problème relève de la catégorie « problèmes de recherche ».
Nous pouvons citer les compétences générales suivantes :

- Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche (les élèves ne disposent pas de la solution experte pour ce problème)
- Mettre en oeuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes de la solution.
- Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi même.

Question 2
Procédures employées par les élèves A, B et C

Elève	Procédure
Elève A	Résultat juste. Il représente une voiture par quatre roues et une moto par deux roues. Il sépare les véhicules. Il semble avoir commencé par deux groupements voiture/moto, ce qui donne 4 + 2 + 4 + 2, soit 12. Il place ensuite trois voitures, une autre moto et enfin une voiture ce qui fait bien 30 roues. Il semble avoir agi par ajustement et à l'aide de schémas, mais nous ne

	savons pas s'il a pris en compte le nombre total de véhicules qui est 9.
Elève B	Résultat erroné. Il schématise également les quatre roues pour une voiture et deux roues pour une moto. Selon la façon dont il a réalisé ses schémas (que nous ne connaissons pas), nous pouvons avancer deux hypothèses : H1 : Si l'élève a écrit en ligne, il a privilégié le couple auto/moto. Une fois dessinés 5 couples, il effectue un dénombrement des roues de voitures et des roues de motos. Il trouve 20 et 10 donc 30 roues au total. Il n'a respecté qu'une contrainte du texte. Il n'a pas un total de 9 véhicules. Sa procédure de type couple « auto/moto » l'empêche d'échanger deux motos contre une voiture. H2 : Si l'élève a écrit en colonne, il a privilégié la décomposition de 30 en 20 + 10. Il trouve 5 voitures et 5 motos. Si le nombre de roues et correct, il ne se soucie pas du nombre total de véhicules car nous pouvons en compter 10 dans sa solution qui ne répond donc pas à la consigne. Sa procédure se base donc sur un schéma, mais aussi sur une décomposition numérique de 30.
Elève C	Résultat erroné. Pour 9 véhicules qu'il considère comme des motos, il compte 18 roues. Il sait que 30 - 18 = 12 et que 3 × 4 = 12. Cela l'amène à trouver 3 voitures. Il trouve 9 motos (nous considérons que « 18 motos » est une maladresse. Il voulait dire 18 roues, sinon, le 12 n'aurait pas de raison d'apparaître) et 3 voitures, ce qui donne bien 30 roues. Sa procédure est uniquement calculatoire. Il n'a respecté qu'une contrainte du texte. Il n'a pas un total de 9 véhicules.

Question 3
Erreurs et réussites

	Réussite	**Erreur**
Elève A	Le schéma est juste. Il trouve 6 voitures et 3 motos ce qui fait bien 30 roues et 9 véhicules.	Pas d'erreur. On ne peut pas savoir s'il a effectivement contrôlé la contrainte « 9 véhicules ».

Elève B	Les schémas et travaux numériques sont cohérents entre eux. Ils aboutissent à 30. (Respect de la deuxième contrainte).	Il n'a pas pris en compte la première contrainte : « 9 véhicules »
Elève C	Il trouve le bon nombre de roues au travers des 18 roues pour 9 motos et du complément à 30 de 18, soit 12 qui l'amène à trouver 3 voitures.	Il n'a pas pris en compte la première contrainte : « 9 véhicules »
Elève D	La réussite est obtenue grâce à des calculs très méthodiques par essais exhaustifs, en prévoyant d'augmenter le nombre de voitures de un à chaque essai et de diminuer simultanément le nombre de motos de un, sur la base d'un total de 9 véhicules. Il contrôle à chaque étape le nombre de roues et arrête donc son programme au 7° pas car il obtient les 30 roues.	Pas d'erreur.
Elève E	Il part de 30 et soustrait des « 4 » et des « 2 » pour atteindre 0. Il a bien trouvé 9 véhicules au total, mais on ne peut rejeter l'hypothèse d'une réussite fortuite. Les calculs soustractifs écrits en ligne sont exacts, sauf un.	Une erreur est repérable au niveau du calcul de « 22 - 4 ». Il n'a pas vérifié si son travail donnait effectivement 30 roues.

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>I - FICHE 8</u>

Question 1
Deux compétences mathématiques (autres que celles liées à l'algorithme de l'addition)

Compétences liées à la connaissance des nombres
- Savoir comparer deux entiers naturels (concerne l'exercice 1)

Compétences liées au calcul
- Savoir calculer des sommes et des différences de nombres entiers,
- Savoir évaluer un ordre de grandeur (pour la question c) de l'exercice 1)

Compétences liées à la résolution de problèmes :
- Dans des situations où une quantité subit une augmentation, déterminer la quantité initiale, la quantité finale, la valeur de l'augmentation.
- Résoudre des problèmes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires (concerne la question b) de l'exercice 1 et l'exercice 4).
- Savoir lire et interpréter quelques schémas simples. (Concerne les exercices 2 et 3).

Question 2 (exercice 1)
Les nombres 40 et 100 de l'exercice 1…

Les nombres 40 et 100 de la question b) permettent aux élèves une activité de calcul réfléchi, sans obligatoirement passer par une addition posée. De 312, il est aisé de passer à 352 ; de 256, il est aisé de passer à 356 et alors de comparer 352, 328 et 356.

Remarque :
Ils sont, en même temps, choisis pour donner des nombres qui demandent toute attention pour être comparés.

Question 3 (exercice 1)
Justification de la comparaison à 1000 du nombre total

En ayant les nombres 352, 328 et 356, le professeur peut attendre :
- que les élèves travaillent sur l'ordre de grandeur en minorant chacune des quantités : 352 par 350 ; 328 par 300 ; 356 par 350 donc 352 + 328 + 356 par 1000.

- que les élèves voient que la somme est supérieure à 9 centaines et 12 dizaines (5 + 5 + 2), donc à 1000.

Remarque :
Dans cette question, les auteurs supposent que les élèves travaillent sur la collection modifiée par la question b). Certains élèves pourront partir de la collection (donnée du problème) et conclure qu'il y a moins de 1000 timbres.

Question 4 (exercice 2)
Illustration du problème par un schéma

Arguments pour :
- Le schéma permet de faire passer l'élève du cadre d'un énoncé écrit en français à une représentation se servant de la droite graduée. Ce changement de cadre permet de faire varier les représentations et aide à la résolution du problème.
- La présence du mot inducteur « reste » peut engendrer une soustraction. Le schéma permet de lever la confusion.

Arguments contre :
- Le travail sur un tel schéma ne s'improvise pas. Si les élèves ont déjà travaillé sur ce type de support, l'apport est utile, sinon cela constitue une difficulté supplémentaire.
- Le schéma est amené par le fichier et n'est pas produit par l'élève. On n'a aucune garantie sur le sens que l'élève attribue à ce support.
- Le schéma donné induit la procédure à utiliser ; les élèves auraient pu, en l'absence du schéma, proposer d'autres procédures.

Question 5 (exercice 3)
Les variables didactiques et leurs effets

Remarque :
Nous rappelons en bas de page la définition d'une variable didactique[1]*. L'emploi de ce terme pour cet exercice suppose qu'on l'assimile à une situation de construction de nouvelles connaissances.*

Variables	**Effets**
Le choix des nombres :	Selon le choix des nombres, « peu compliqués » ou non, l'élève pourra avoir recours au calcul réfléchi ou mental ou bien devra poser des calculs.

[1] Variables didactiques Une variable didactique est un élément de la situation dont la modification des valeurs influe significativement sur les procédures des élèves. Ce concept s'utilise dans le cas de situations de construction de nouvelles connaissances.

La place du nombre cherché	Les calculs sont soit additifs, soit soustractifs : Recherche d'un état final : calcul additif ; Recherche d'un état initial ou de la valeur de la transformation positive : calcul soustractif.

Nous proposons d'autres variables qui supposent une mise en scène de cet exercice dans la classe ;

Variables	**Effets**
Usage d'instruments	L'usage de la calculatrice facilite les calculs mais oblige à des décisions concernant le choix de l'opération. Par exemple, trouver l'état initial lorsque l'on ajoute 50 suppose,dans ce cas de soustraire 50 à 750 ou de faire des essais.
Usage de matériel de numération	Le matériel peut aider à trouver la solution, sans passer par des calculs

II - FICHE 9

Question 1
Différencier somme et addition

L'addition une loi de composition interne qui, a deux entiers naturels (exemple 3 et 5) en associe un autre : le résultat.
Le résultat de cette opération est aussi appelé somme, qui peut avoir une écriture additive (3 + 5) ou une écriture canonique (8)

Question 2 (exercice 2)
Analyse des problèmes

Nous traitons cette question à l'aide d'un tableau.
Les tâches communes à ces problèmes sont :
- comprendre les énoncés et écrire une phrase solution ;
- traduire un problème de réunion de collections d'objets par une écriture additive.

Problème	**Tâche spécifique de l'élève**	**Difficultés internes au problème**
A	Additionner trois nombres (250, 300 et 150)	Il faut avoir une connaissance de la structure d'un parking souterrain, ce qui a pour conséquence la compréhension de « rez de chaussée », « premier sous-sol », « deuxième sous-sol ».
B	Addition itérée de 42 trois fois. Remarque : la tâche peut être réalisée en additionnant 42 trois fois de suite, ou bien le cas échéant en effectuant 42 × 3.	Le terme « chacun » est souvent source de difficulté de compréhension.
C	Deux nombres nouveaux sont à trouver (84 et 21) avant de répondre à la question finale. La tâche consiste donc à : - résoudre deux questions intermédiaires puis à répondre à la question. - traduire l'expression « deux fois plus » par une écriture multiplicative et l'expression « deux fois moins » par « la moitié de ».	Ce problème demande de résoudre deux questions intermédiaires, ce qui est toujours une source de difficultés. D'autre part, ces deux questions sont lisibles à travers deux expressions langagières (deux fois plus, deux fois moins) qui mêlent le vocabulaire additif et multiplicatif.
D	Un nombre nouveau est à trouver (125) avant de répondre à la question finale. La tâche consiste donc à résoudre une question intermédiaire puis à répondre à la question.	Le groupe de mots « aussi lourde que les deux autres réunies » est sans doute source de difficulté.

Question 3 (exercice 2)
Maîtrise de la langue : piste de travail

Il s'agit de s'assurer de la bonne compréhension des expressions (deux fois plus, deux fois moins) :

> Dans une activité collective, le professeur peut demander aux enfants de répondre à des questions orales comme :
>
> > « Paul a 6 billes, j'en ai deux fois plus, combien en ai-je ? ».
> > « Pierre a 4 billes, Jacques en a deux fois moins, combien Jacques en a-t-il ? ».

Dans le cadre de la maîtrise de la langue le professeur et les élèves peuvent proposer des reformulations à l'aide de synonymes :

> « deux fois plus » signifie « le double » qui, du point de vue mathématique, se traduit par une multiplication par 2.
> « deux fois moins » signifie « la moitié » qui, du point de vue mathématique, se traduit par une division par 2.

Le professeur peut s'appuyer sur un tableau comme ci - dessous pour permettre des reformulations.

Deux fois moins
La moitié
Divisé par 2

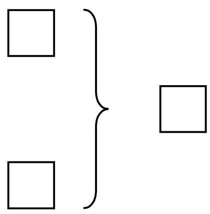
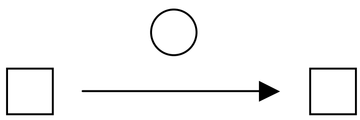
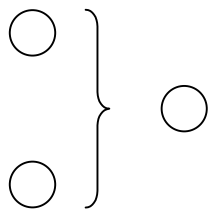
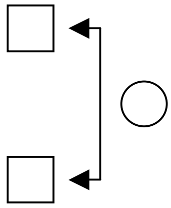
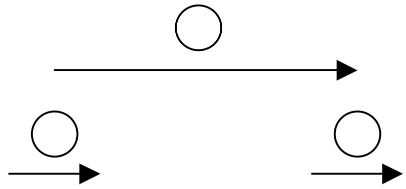
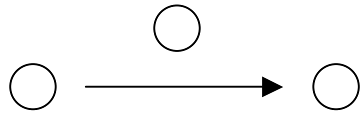
4	?	12	6	?
2	10	?	?	5

Deux fois plus
Le double
Multiplié par 2

III - QUESTIONS D'ORDRE GENERAL

Question 1
Autre utilisation de l'addition

Pour répondre à cette question, on pourra se servir utilement du travail de G.Vergnaud sur la typologie des structures additives (cf : le moniteur de mathématiques, résolution de problèmes, fichier pédagogique p.16 Nathan 1997 et extrait p.17)

1  Relation partie-partie-tout	2  Transformation d'états Relation état-transformation-état Les états sont des mesures	5  Comparaison de relations
3  Comparaison d'états Relation référé-comparaison-référent Le référé et le référent sont des mesures	4  Composition des transformations	6  Transformation d'une relation Les états sont des relations

L'encadré de la fiche 8 se retrouve dans la structure (2) : on connaît l'état de départ, la transformation et on cherche l'état d'arrivée.

Remarque :
Dans certains items de l'exercice 3 c'est l'ajout ou l'état initial qui sont recherchés alors que l'on connaît le résultat.

L'encadré de la fiche 9 se retrouve dans la structure (1).

Une autre illustration de l'addition peut se construire à partir de la classification de Vergnaud :

- Voici un énoncé possible à partir de la structure (4) où l'addition sert à construire la composée de deux transformations :
  Ce matin, jean avait des billes. Il en a gagné 15 à la première récréation, puis 4 à la seconde récréation. Combien en a-t-il gagné en tout ?
- Et un autre à partir de la structure (3) (comparaison d'états) :
  Jean a 127 billes. Pierre en a 50 de plus que Jean. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Question 2
Justification du contenu par rapport aux compétences en fin de cycle 2

Remarque :
Aucun document relatif aux textes officiels n'avait été remis aux candidats.

Nous avons listé un ensemble de compétences mathématiques (I.O. 2002) de fin de cycle 2 qui sont sollicitées dans ces deux fiches. Toutefois, ces fiches portent sur la compréhension des énoncés de problèmes additifs (exemple fiche 8 problème 4 et surtout les problèmes 2 de la fiche 9) dans un cadre plus général.
L'accent n'est pas mis sur les techniques opératoires.

Compétences mathématiques repérées dans le document d'accompagnement du cycle 2 :

- Comparer deux entiers naturels (Fiche 8).
- Déterminer par addition ou soustraction la quantité à obtenir à la suite d'une augmentation ou d'une diminution. (Procédures expertes). (Fiche 8).
- Déterminer par addition la quantité obtenue par réunion de deux quantités connues. (Procédures expertes). (Fiche 9).
- Dans les situations où une quantité subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité initiale ou trouver la valeur de l'augmentation et de la diminution. (procédures personnelles) (Fiche 8).

Les difficultés de lecture d'énoncés de problèmes sont signalées dans l'introduction des documents d'accompagnement des programmes : *« une attention particulière doit être portée aux difficultés de lecture des énoncés que rencontrent de nombreux élèves…* », mais pas dans les compétences mathématiques. *« La résolution de problèmes occupe une place importante dans l'apprentissage par les élèves des connaissances mathématiques* » est dans le même cas.

LILLE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

La question porte manifestement sur la correspondance entre les pourcentages de lecteurs en grave difficulté des populations masculines et féminines testées dans chacune des catégories. On s'intéresse donc aux deux lignes surlignées ; il s'agit de répondre à la question : les deux suites de nombres grisées sont-elles proportionnelles ?
Non, elles ne sont pas proportionnelles ; il suffit, pour le justifier, de proposer comme contre-exemple, deux rapports de nombres correspondants qui ne sont pas égaux :
Par exemple :

$$\frac{\text{Pourcentage de garçons de la catégorie 1}}{\text{Pourcentage de filles de la catégorie 1}} \neq \frac{\text{Pourcentage de garçons de lacatégorie 2}}{\text{Pourcentage de filles de la catégorie 2}}$$

Soit $\frac{27,6}{20,1} \neq \frac{12,9}{8,4}$

On peut vérifier cela de différentes manières :

- Méthode 1 :

  En utilisant un théorème qui caractérise l'égalité de deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par l'égalité des « produits en croix » a.d et b.c

  $27,6 \times 8,4 \neq 20,1 \times 8,4$ donc $\frac{27,6}{20,1} \neq \frac{12,9}{8,4}$.

- Méthode 2 :

  En utilisant les valeurs approchées des quotients :

  $\frac{27,6}{20,1} \approx$ 1,37 à 0,01 près par défaut et $\frac{12,9}{8,4} \approx$ 1,53 à 0,01 près par défaut

Question 2a
Nombre de jeunes en grave difficulté dans chaque niveau de scolarité

Pour calculer l'effectif dans chaque niveau, on multiplie l'effectif total par le pourcentage prélevé dans le tableau et exprimé sous forme de fraction de dénominateur 100.

Par exemple, l'effectif dans le niveau 1 est donné par $\frac{6,7}{100} \times 522148 = 34983,916$, que l'on arrondit à l'unité, car les effectifs sont des nombres entiers.

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	Total
Pourcentage	6,7	29,1	11,7	52,5	100,0
Effectif	34 984	151 945	61 091	274 128	522 148

Dans chaque niveau, on calcule le nombre de jeunes en grave difficulté de lecture, en multipliant l'effectif (calculé ci-dessus) par la fraction de dénominateur 100 qui exprime le pourcentage dans le niveau concerné (lu dans le tableau donné).

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Effectif total	34 984	151 945	61 091	274 128
Pourcentage de jeunes en grave difficulté	25,3	11,1	3,2	1,4
Nombre de jeunes en grave difficulté	$34\,984 \times \frac{25,3}{100}$ $\approx 8\,851$	$151\,945 \times \frac{11,1}{100}$ $\approx 16\,866$	$61\,091 \times \frac{3,2}{100}$ $\approx 1\,955$	$274\,128 \times \frac{1,4}{100}$ $\approx 3\,838$

Question 2b
Pourcentage de jeunes en grave difficulté dans chaque niveau de scolarité

Dans le contexte de l'exercice, « population totale » désigne l'ensemble des jeunes gens participant à la JAPD.

<u>Méthode 1 :</u>
Sur une population totale de 522 148, on a 8 851 jeunes en grave difficulté dans le niveau 1, ce qui s'exprime par le rapport $\frac{8\,851}{522\,148}$.
Il est demandé d'écrire ce rapport sous forme de pourcentage, c'est à dire comme une fraction de dénominateur 100 :

$$\frac{8\,851}{522\,148} \approx 0,017 \quad \text{soit } \frac{1,7}{100} \qquad \text{c'est à dire } 1,7\%$$

<u>Méthode 2 :</u>
6,7% de l'ensemble de la population totale est au niveau 1.
Parmi eux, 25,3% sont en grave difficulté.
Donc, les jeunes en grave difficulté au niveau 1 représentent 25,3% de 6,7% de la population totale.
Cela conduit à calculer :

$$\frac{25{,}3}{100} \times \frac{6{,}7}{100} \approx \frac{1{,}7}{100} \qquad \text{soit } 1{,}7\%$$

Un raisonnement et un calcul similaires pour les niveaux 2, 3 et 4 conduisent au tableau ci-après :

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Pourcentage de jeunes en grave difficulté par rapport à la population totale.	1,7	3,2	0,4	0,7

Question 3
Nombre de garçons et nombre de filles dans le niveau 1

x désigne le nombre de garçons de niveau 1, c'est un nombre entier positif.
y désigne le nombre de filles de niveau 1, c'est un nombre entier positif.
x + y désigne le nombre total de jeunes au niveau 1, qui est calculé dans le premier tableau de la question 2a.
On peut donc écrire : $x + y = 34\,984$
D'autre part, dans le niveau 1 : 27,6% des garçons et 20,1% des filles sont en grave difficulté d'après les données de l'énoncé ; le nombre total de ces jeunes (garçons et filles réunis) en grave difficulté est 8851 (calculé à la question 2a).
Cela peut s'écrire :
$\frac{27{,}6}{100}x + \frac{20{,}1}{100}y = 8\,851$ c'est-à-dire $27{,}6\,x + 20{,}1\,y = 885\,100$

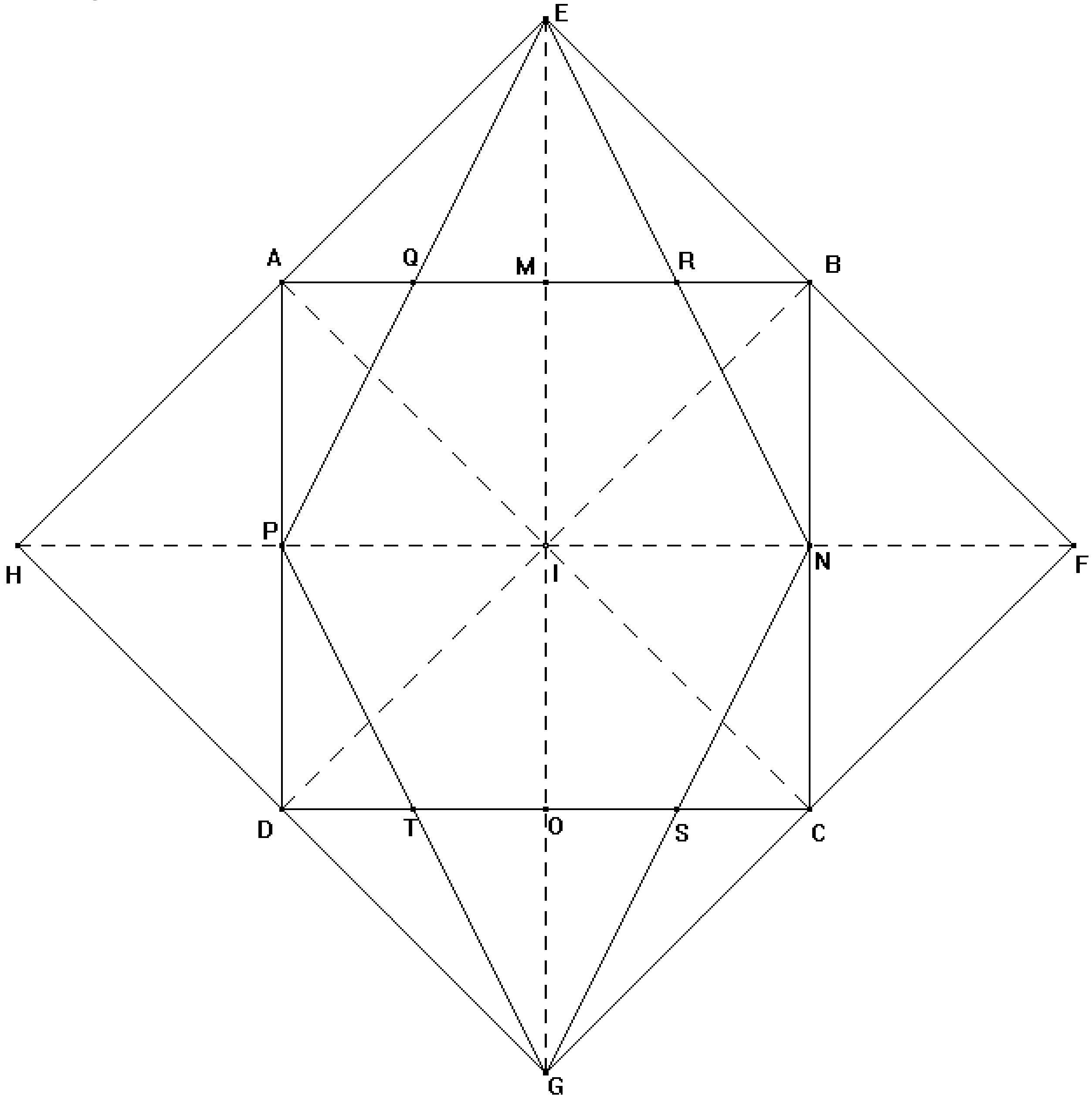
On résout le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + y = 34\,984 \\ 27{,}6\,x + 20{,}1\,y = 885\,100 \end{cases}$$

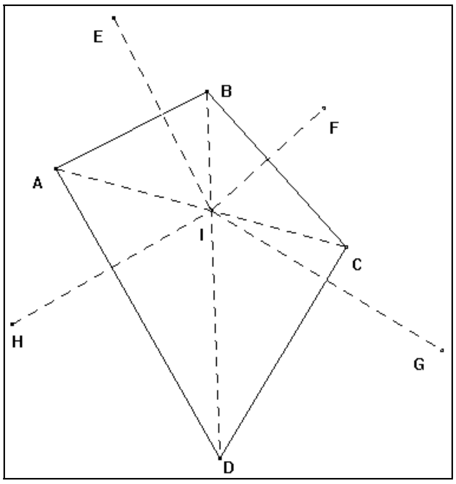
La première équation permet d'écrire y en fonction de x et on procède par substitution de y dans la deuxième.
$x = 34\,984 – y$ d'où $27{,}6\,x + 20{,}1\,(34\,984 – x) = 885\,100$
d'où après développement et réduction :
$7{,}5\,x = 181\,921{,}6$ c'est-à-dire $x \approx 24\,256{,}2$
Le report de cette valeur dans la première équation permet de trouver une valeur approchée de y.
$y = 34984 – x \approx 10\,727{,}8$
On arrondit à l'entier le plus proche et on conclut que **le nombre de garçons de niveau 1 est 24 256** et que **le nombre de filles de niveau 1 est 10 728**.

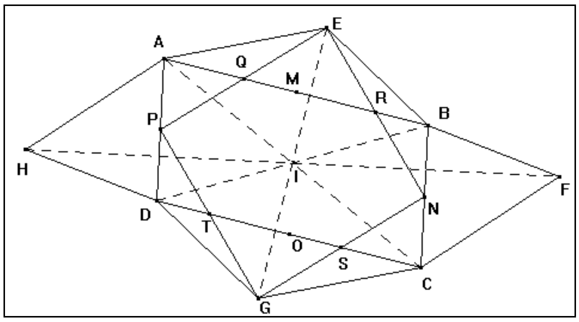
EXERCICE 2

La figure demandée



<u>Remarque :</u>
Les figures ci-dessous illustrent ce que devient la configuration (obtenue par les indications de l'énoncé) dans les cas où ABCD est un quadrilatère quelconque et où ABCD est un parallélogramme « ordinaire ». On y voit que les propriétés que l'on va démontrer dans l'exercice découlent du fait que ABCD est un carré.





Question 1
Nature du quadrilatère AEBI

Nous démontrons tout d'abord que AEBI est un losange, puis que c'est un carré ;
Le point I est le centre du carré ABCD, donc les longueurs AI et BI sont égales.
Par la symétrie orthogonale d'axe (AB), le point I a pour image le point E, les points A et B sont invariants. Or l'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur, donc le segment [AI] a pour image le segment [AE] et les longueurs AI et AE sont égales.
De même [BI] a pour image [BE] et BI = BE.
Par transitivité de l'égalité, on peut conclure que les longueurs des quatre côtés du quadrilatère AEBI sont égales, **donc AEBI est un losange**.
Le quadrilatère ABCD est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires, cela entraîne que les droites (AI) et (IB) sont perpendiculaires, c'est à dire que **le losange AEBI a un angle droit : c'est un carré.**

Question 2
Nature du quadrilatère EFGH

Nous démontrons en plusieurs étapes que le quadrilatère EFGH est un carré :

a) Nous démontrons que les points E, I, G sont alignés, de même que les points H, I, F ; c'est-à-dire que le point I est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère EFGH.
b) Nous démontrons que les longueurs EI, IG, IF, IH sont égales, ce qui entraîne que les diagonales du quadrilatère EFGH ont même longueur et même milieu.
c) Nous démontrons que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires.
d) Nous concluons que EFGH est un carré car c'est un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires, se coupant en leur milieu et de même longueur.

a) Les points E, I, G sont alignés, de même que les points H, I, F.

Le point E est le symétrique du point I par rapport à la droite (AB), donc la droite (EI) est perpendiculaire à la droite (AB).
De même, le point G est le symétrique du point I par rapport à la droite (DC), donc la droite (GI) est perpendiculaire à la droite (DC).

Or les droites (DC) et (AB) sont parallèles, comme côtés opposés du carré ABCD, cela entraîne que la droite (GI) est perpendiculaire à la droite (AB).
Par le point I, il passe une unique perpendiculaire à la droite (AB), donc les points E, G, I sont alignés.
Par un raisonnement analogue, on démontre que les points H, I, F sont alignés sur une perpendiculaire à la droite (AD).
Le point I est donc situé sur les droites (EG) et (HF) : il est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère EFGH.

b) <u>Nous démontrons que les longueurs EI, IG, IF, IH sont égales.</u>

Nous avons démontré à la question 1 que le quadrilatère AEBI est un carré ; par un raisonnement analogue on démontre que les quadrilatères BFCI, CGDI, DHAI sont aussi des carrés. On a donc pour chacun des diagonales de même longueur : AB = EI ; BC = IF ; CD = IG ; DA = IH.
ABCD est un carré, donc ses côtés sont de même longueur, ce qui achève de prouver l'égalité des longueurs EI, IG, IF, IH.

<u>Nous démontrons que les diagonales du quadrilatère EFGH ont même longueur et même milieu.</u>

De l'égalité de EI et IG, et de l'alignement des points E, I, G, on déduit que I est le milieu du segment [EG]. On a de ce fait l'égalité : EG = EI + IG.
Par un raisonnement analogue on démontre que I est le milieu du segment [HF] et que HF = HI + IF.
On en déduit (avec l'égalité des longueurs EI, IG, IF, IH) que les longueurs HF et EG sont égales.

c) <u>Nous démontrons que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires.</u>

On a établi au (a) que la droite (AB) et la droite notée (EI) ou (EG) sont perpendiculaires. Or les segments [AB] et [AD] sont deux côtés consécutifs du carré ABCD, donc les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
Les droites (EG) et (AD) ont une perpendiculaire commune, donc les droites (EG) et (AD) sont parallèles.
Or on a établi également au (a) que les droites (HF) et (AD) sont perpendiculaires, donc la droite (EG) est perpendiculaire à la droite (HF).

e) <u>Nous concluons.</u>

Nous avons démontré que les diagonales du quadrilatère EFGH sont perpendiculaires (c), de même longueur et de même milieu I (b) : ces propriétés caractérisent **un carré**.

Question 3
Alignement des points E, B, F

Le quadrilatère AEBI est un carré donc les droites (EB) et (AI) sont parallèles.
Le quadrilatère BFCI est un carré donc les droites (FB) et (CI) sont parallèles.
Or les points A, I, C sont alignés (I est le centre du carré ABCD, il appartient donc à la diagonale (AC)), donc (AI) et (IC) désignent la même droite.
Les droites (BF) et (EB) sont toutes deux parallèles à cette droite et passent par le point B, elles sont donc confondues ; donc **les points E, B, F sont alignés**.

Question 4a

AQ = $\frac{1}{4}$AB

Le point M est donné comme le milieu du segment [AB], or le quadrilatère AEBI est un carré, donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Il en résulte que <u>le point M appartient au segment [EI] et qu'il en est aussi le milieu.</u>
De la même manière, <u>le point P donné comme milieu du segment [AD] appartient au segment [HI] et en est le milieu</u>.
On peut déduire entre autres que PI = $\frac{1}{2}$HI

<u>Méthode 1 : utilisation du triangle EPI</u>
On a montré à la question 2a que les droites (AB) et (HF) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (EI) ; il en résulte qu'elles sont parallèles entre elles. Dans le triangle EPI, la droite (MQ) est donc parallèle au côté [PI] et passe par le milieu du côté [EI]. On en déduit d'une part que la longueur MQ est la moitié de la longueur PI, et également (en vue de la question 4c) que le point Q est le milieu du segment [EP].
On a donc MQ = $\frac{1}{2}$PI = $\frac{1}{4}$HI ;
or HI = AD (les diagonales d'un carré sont de même longueur)
et AD = AB (les côtés d'un carré sont de même longueur)
il vient que MQ = $\frac{1}{4}$ AB.
Par ailleurs AM= $\frac{1}{2}$ AB et le point Q appartient au segment [AM] donc on a l'égalité AM = AQ + QM.
Il vient que AQ = $\frac{1}{2}$AB – $\frac{1}{4}$AB; c'est-à-dire : **AQ = $\frac{1}{4}$AB,** ce qui termine cette question et permet de déduire en vue de la question 4c que le point Q est le milieu du segment [AM].

<u>Méthode 2 : utilisation du quadrilatère AEMP</u>
On commence par démontrer que c'est un parallélogramme, pour cela on va montrer que ses côtés opposés sont parallèles.
ABCD est un carré donc la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (AM) ; la droite (EI) est également perpendiculaire à la droite (AM), donc les droites (AP) et (EI) sont parallèles.
Dans le triangle HEI, on a les points P et M qui sont les milieux de deux côtés ; donc la droite (MP) est parallèle à la droite (HE) qui est le troisième côté du triangle.
Le quadrilatère AEMP a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.
La point Q est le point d'intersection des diagonales [AM] et [PE] de ce parallélogramme, il se trouve donc au milieu de celles-ci ; donc la longueur AQ est la moitié de la longueur AM.
Le point M étant le milieu du segment [AB] on peut conclure que la longueur AQ est le quart de la longueur AB.

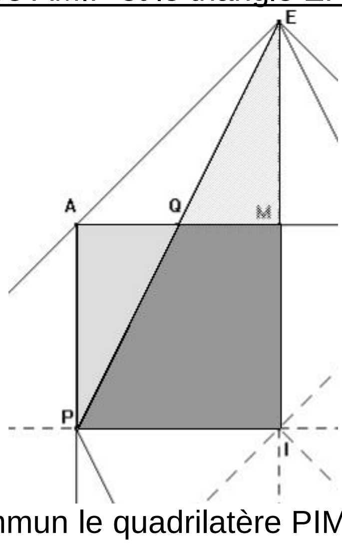
Question 4b
Nature du quadrilatère ENGP

On suppose démontré tout d'abord (comme pour les points M et P) que le point N est le milieu du segment [IF]. Ensuite la démonstration choisie utilise la caractérisation du losange par ses diagonales.
On a déjà établi que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires à la question 1 ; des alignements et des égalités de longueurs précédemment établis on tire que le point I est le milieu du segment [PN]. On savait déjà, depuis la question 2, que ce point I est le milieu du segment [EG].
Le quadrilatère ENGP a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu : **c'est un losange.**

Question 4c
Aires des quadrilatères ABCD et ENGP

Remarque :
Pour les questions 4c et 5 nous rédigeons des démonstrations par comparaisons de surfaces géométriques, on peut également utiliser les formules de calcul d'aire connues.

Nous commençons par démontrer que les triangles PAQ et EMQ sont superposables et pour cela nous utilisons le quadrilatère AEMP[1] :
Nous avons démontré en traitant la question 4a (méthode 1), que ses diagonales [EP] et [AM] ont le point Q pour milieu, cela entraîne donc que le quadrilatère AEMP est un parallélogramme dont le point Q est le centre. Par suite, les triangles APQ et MEQ sont images l'un de l'autre par la symétrie de centre Q, et ils sont bien superposables.
Nous comparons le quadrilatère AMIP et le triangle EPI :



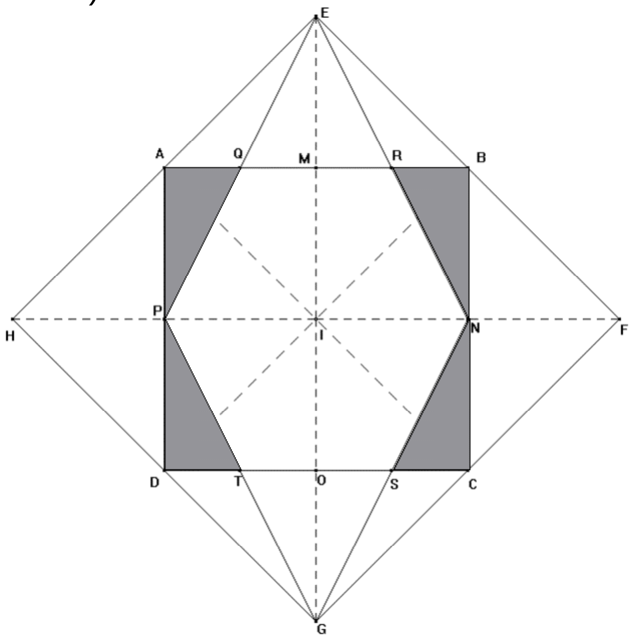
Ces deux surfaces ont en commun le quadrilatère PIMQ ; le quadrilatère AMIP est la réunion disjointe du quadrilatère PIMQ et du triangle APQ ; le triangle EPI est la réunion disjointe du quadrilatère PIMQ et du triangle MEQ. Cela entraîne que **le quadrilatère AMIP et le triangle EPI ont la même aire.**

[1] Si l'on a utilisé la méthode 2 à la question 4a, la nature de ce quadrilatère est déjà établie.

Les droites (EG) et (PN) sont des axes de symétrie pour le losange ENGP car ce sont ses diagonales, et pour le carré ABCD car ce sont les médianes de ses côtés (On a déjà démontré à la question 3a que le point M donné comme milieu du côté [AB] est sur la droite (EG), cette droite étant perpendiculaire à la droite (AB) ; un raisonnement analogue s'applique aux trois autres côtés). On en déduit que **le carré ABCD (vu comme réunion des quadrilatères AMIP, MBNI, INCO, IODP) a la même aire que le losange ENGP (vu comme réunion des triangles EIP, EIN, NIG, GIP).**
On déduit également des symétries évoquées que les quadrilatères AMIP, MBNI, INCO, IODP sont superposables, ce sera utile à la prochaine question.

Question 5
Aire du polygone QRNSTP

On va déduire cette aire de l'aire du carré ABCD, en regardant l'hexagone QRNSTP comme obtenu en « retirant » les triangles AQP, RNB, NCS, TDP au carré ABCD (voir illustration ci-dessous).



En remarquant à la question 4c que (EG) et (PN) sont les médianes du carré ABCD, on dit que le quadrilatère AMIP a trois angles droits (en M, en I, en P), on sait par ailleurs que les longueurs AM et AP sont égales, donc AMIP est un carré et le triangle AMP un demi carré.
On a démontré que le point Q est le milieu du segment [AM], donc la droite (PQ) est une médiane du triangle AMP, ce qui entraîne que l'aire du triangle AQP est la moitié de l'aire du triangle AMP et donc le quart de l'aire du carré AMIP et par suite le seizième de l'aire du carré ABCD.
Donc l'aire de l'hexagone QRNSTP est obtenue en retirant à l'aire du carré ABCD quatre fois un seizième de celle-ci, soit un quart.

aire (QRNSTP) = aire (ABCD) – $\frac{1}{4}$.aire (ABCD) = $\frac{3}{4}$ aire (ABCD)

ce qui donne pour la **mesure d'aire exprimée en cm^2 : $\frac{3}{4} \times 8 \times 8 = 48$**

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Prénoms	**Description de la stratégie et validité**	**Validité de la production écrite et de la réponse**	**Cause(s) d'erreur(s) possible(s)**	**Message aux parents**
Clémence	Elle calcule la somme dont elle dispose en additionnant les valeurs unitaires des pièces ou billets. Elle trouve 33. On peut penser qu'elle ajoute mentalement des « 5 » pour approcher 33 par défaut. Elle produit une décomposition additive de 33 utilisant un maximum de termes « 5 ». Elle compte enfin le nombre de « 5 ». Sa procédure est tout à fait valide : le nombre de billets trouvé est la réponse à la question : combien de fois 5 dans 33 ?	Elle ajoute « 2 » trois fois seulement et non quatre fois. Ce qui fausse la réponse. Mais tous les calculs écrits sont juste. Le caractère erroné de la réponse finale provient uniquement de l'oubli initial d'un terme 2.	L'oubli du terme 2 peur relever d'une étourderie ou d'une difficulté à contrôler une longue liste de nombres (écriture de l'addition en colonne).	Clémence a un raisonnement correct dans ce problème à deux étapes, difficile pour un début de CE2. Des calculs additifs bien maîtrisés. Son erreur est sans doute due à une étourderie.
Brandon	Il constitue des sommes de 5 € de deux manières différentes : * regroupement de toutes les pièces de 2 € et de pièces de 1 € par addition mentale de leurs valeurs. * remplacement de chaque billet de 10 € par deux billets de 5 €. Cette procédure est pertinente, elle peut conduire à la réponse, à condition de bien contrôler le nombre de sommes de 5 € obtenues. Elle est favorisée par la collection de pièces donnée par l'énoncé : s'il fallait échanger 5 pièces de 2 €, on ne pourrait pas procéder de la même manière.	Les échanges évoqués sont pertinents et prennent en compte toutes les données de l'énoncé. Les écrits évoquent des échanges ; ce sont des moyens de recherche et de contrôle, mais ce ne sont pas des écrits mathématiques. De telles écritures ont toute leur place dans un écrit de recherche. La réponse est fausse car il se trompe en dénombrant les billets de 5 € obtenus.	Au moment de conclure, on peut penser qu'il a compté le nombre de « 5 », apparaissant sur sa feuille, ou le nombre d'échanges (ou peut-être de lignes) sans prendre en compte les doublements qu'il avait exprimés par l'expression « 2 billets de 5 € ».	Brandon a mis en oeuvre une stratégie personnelle adaptée aux données du problème. Il n'a pas su utiliser son écrit de recherche pour trouver la réponse à la question posée. Le symbole €, est systématiquement écrit à l'envers (problème d'orientation des signes ?).

Malika	Sa procédure est à rapprocher de celle de Clémence. Elle calcule la somme totale, ajoute des « 5 » jusqu'à trouver 35 et conclut en comptant les « 5 » de son addition itérée. A la différence de Clémence, d'une part, elle calcule mentalement la valeur totale des deux billets de 10 € et celle des sept pièces de 1 € ; elle ne le fait pas pour les pièces de 2 €. Elle pose et effectue ensuite une addition en colonne utilisant ces sommes partielles. D'autre part, elle pose en colonne son addition itérée de 5, l'utilisant à la fois comme outil de recherche et de contrôle du résultat (la présence de la retenue le laisse penser).	Tout est juste. Les écrits produits sont des écrits mathématiques totalement décontextualisés, remarquables en début de cycle 3.	Pas d'erreur. <u>Remarque :</u> *On peut supposer qu'elle ne regroupe pas les sommes de 2 € en une somme de 8 €, car à ce stade de la scolarité, le résultat multiplicatif « 4 fois 2 » est moins disponible que « 2 fois 10 » ou « 7 fois 1 ».*	Malika est capable d'effectuer un traitement mathématique d'un problème additif complexe mettant en jeu des sommes d'argent sans référence au contexte matériel.
Ludovic	Il dessine le « contenu initial de la tirelire », en indiquant la valeur sur les différentes pièces et billets. Il n'y a pas de trace d'une autre recherche, mais la réponse « 35 » laisse penser qu'il a calculé la somme totale. Il n'a pas su exploiter ce résultat pour répondre correctement à la question posée..	Les dessins représentent fidèlement les pièces et les billets donnés par l'énoncé. ; l'élève ne va pas au-delà de cette représentation. La réponse : 35 est la somme totale de l'argent de poche évoqué, mais ne correspond pas au nombre de billets de 5 € après échange, elle est donc fausse.	Il est probable que l'élève n'a pas réellement compris le problème d'échange d'une somme d'argent contre des billets de 5 €. et qu'il a calculé la somme totale par automatisme. Il a pu aussi se construire une bonne représentation du problème puis perdre de vue le but à atteindre.	Ludovic ne parvient pas à utiliser sa représentation matérielle correcte du problème posé pour le résoudre.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Notion mathématique travaillée dans la séquence.

Le principe des carrés magiques repose sur des égalités de sommes d'entiers disposés dans un tableau carré, donc la notion mathématique travaillée est l'addition.

Question 2
Compétences mises en jeu dans la séquence.

Ces recherches développent des compétences en résolution de problème :

- « Utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ».
  Des connaissances du répertoire additif doivent être mobilisées pour effectuer les recherches proposées.
- « Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ».
  L'existence d'une phase de recherche individuelle doit favoriser l'émergence de solutions personnelles.
- « Contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution ».
  La recherche individuelle suppose un processus d'essais, de contrôle et d'ajustement. La phase collective conduira les élèves à discuter des solutions proposées.
- « Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade ».
  Des choix différents dans la phase collective (examen de propositions de solutions diverses erronées ou non) auraient pu permettre de travailler cette compétence

A condition que les recherches s'effectuent sans calculatrice, elles développent aussi les compétences en calcul suivantes :

- « Connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément ».
- « Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif ou soustractif en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations ».
- « Calculer des sommes et des différences de nombres entiers par un calcul écrit en ligne ou posé en colonnes ».

Question 3
Utilisation de la calculatrice.

L'utilisation ou non de la calculatrice est à envisager en fonction des objectifs prioritaires de l'enseignant qui n'apparaissent pas sur la préparation ; elle dépend également des compétences individuelles des élèves.

Sur un plan collectif :

- Si l'objectif prioritaire de l'enseignant est de proposer à ses élèves un problème de recherche, il est pertinent de mettre la calculatrice à disposition des élèves afin d'éviter les obstacles liés au calcul et de focaliser le travail des élèves sur la recherche.
- Si l'objectif principal de l'enseignant est de renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction, la calculatrice (avec la touche **-**) peut être un outil judicieux pour travailler l'équivalence entre le calcul d'une différence et la recherche d'un complément ; la calculatrice prend en charge tous les calculs, en particulier ceux pour lesquels les élèves ne disposent pas encore de technique maîtrisée.
- Enfin, si l'objectif prioritaire de cette séquence est, pour le maître qui la conduit, un entraînement au calcul l'utilisation de la calculatrice n'est pas pertinente.

Sur le plan individuel :

- Un élève qui a une mauvaise connaissance du répertoire usuel additif ne peut réellement s'engager dans cette recherche puisqu'il n'est pas en mesure de distinguer un carré magique d'un banal tableau de nombres. L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de s'engager dans la recherche.
- Un élève qui a des difficultés dans les calculs additifs et soustractifs (par exemple parce qu'il n'a pas l'habitude du calcul réfléchi et parce qu'il pose systématiquement toutes les opérations ou qu'il a une mauvaise connaissance du répertoire soustractif et/ou du répertoire des compléments) sera très lent dans la construction de chaque tableau et dans les vérifications.
  L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de se concentrer sur les contraintes du problème et d'engager des recherches efficaces sans être handicapé par ses difficultés en calcul. La résolution du problème reste à la charge de l'élève, l'outil calculatrice ne prenant en charge que l'exécution des calculs et non leur organisation.
- Dans cette optique, on pourrait penser que tous les élèves peuvent tirer bénéfice de l'utilisation d'un calculatrice... il n'en est rien : pour celui qui calcule mentalement avec aisance, la calculatrice ralentit, elle peut être source d'erreurs (liées à la saisie) et peut faire perdre le fil de la démarche engagée par la rupture visuelle nécessaire.

Question 4

La somme des nombres de 1 à 9 est 45. On peut calculer cette somme en effectuant l'addition de ces neuf nombres ou en utilisant la formule qui donne la somme des n premiers entiers : $\frac{n.(n+1)}{2}$ pour n = 9.
On veut que « la somme des trois nombres écrits sur chacune des trois lignes et des trois colonnes soit chaque fois la même » (contrainte formulée par l'énoncé). Chaque nombre figure dans une seule ligne et dans une seule colonne, on cherche donc à d'écrire 45 comme somme de trois nombres égaux. Il n'y a qu'une décomposition possible, c'est 15 + 15 + 15.

Question 5
Rôle de la mention du nombre 15 dans la séquence.

En donnant la somme attendue pour chaque ligne, colonne, diagonale l'énoncé oriente la démarche vers la recherche de triplets d'entiers de somme 15.
Si cette somme n'est pas donnée, l'entrée dans la recherche est différente : la procédure experte consiste à commencer par chercher la valeur de cette somme ; mais on peut penser que des élèves du cycle 3 vont s'engager dans un premier essai en plaçant les neuf nombres dans un tableau, puis en calculant les sommes et en cherchant à ajuster : le nombre d'essais peut alors être très important.
Par ce choix, l'enseignant peut mettre l'accent soit sur la recherche, soit sur les calculs.

Question 6
La recherche individuelle initiale.

La recherche individuelle du début de séance est en général très brève et a pour seul objectif l'appropriation du problème par les élèves. Dans ce cas, la véritable recherche commence après une analyse commune du but à atteindre qui favorise l'entrée dans le problème de tous les élèves... sans « tuer » la recherche.
Ici la phase collective s'appuie sur des solutions trouvées par quelques élèves. Cela suppose que la première phase a été suffisamment longue et a permis à certains élèves de s'engager dans la recherche, et peut-être de résoudre le problème.
Dans ce contexte, les objectifs de la première phase individuelle sont, d'une part de repérer les élèves mis en difficulté par cette recherche et d'intervenir individuellement auprès d'eux, d'autre part de fournir des exemples de solutions en vue du travail collectif qui suit.

Question 7
Analyse de la phase collective.

Le maître veut faire en sorte que tous les élèves disposent de deux solutions, afin de relancer l'activité et d'orienter celle-ci vers une recherche exhaustive de toutes les solutions.

Pour les élèves qui n'avaient pas su résoudre le problème, la phase collective apporte des exemples de bonnes réponses et des explications à leur sujet (la place du nombre cinq dans les tableaux, et l'utilisation des décompositions additives de dix).
Pour les élèves qui ont su résoudre le problème, la phase collective permet, par la juxtaposition des deux carrés magiques, de prendre conscience de la pluralité des solutions. Si on tient compte des deux solutions que le maître envisage de proposer dans sa fiche de préparation, les élèves peuvent être conduits à observer l'existence d'un lien entre les deux solutions : une permutation circulaire des nombres. Cela peut leur suggérer une méthode de recherche d'autres solutions.

Remarque :
On peut s'interroger sur le choix de ne proposer dans cette phase que des « bonnes solutions ». Ne serait-il pas opportun à ce moment du travail, de présenter aux élèves des carrés magiques et d'autres non magiques, pour les faire étudier et valider par la classe : il s'agit alors de faire formuler oralement aux élèves les raisons pour lesquelles on les accepte ou on les écarte. Ce travail peut stimuler l'activité de recherche des élèves.
La phase collective décrite dans la fiche de préparation peut engager certains élèves, lors de la phase individuelle qui suit, dans une stratégie de recherche s'appuyant uniquement sur les relations spatiales entre les nombres (chercher, par exemple, à obtenir une nouvelle solution par permutation circulaire opérant sur une des solutions données par le maître). Dans ce cas, le problème reste consistant mais ne porte plus sur l'addition.

Question 8
Le nombre 10 et ses décompositions
La phase collective fait apparaître le rôle et la place privilégiée du nombre 5 dans ces carrés magiques et met en évidence toutes les décompositions possibles du complément de 5 à 15 (c'est à dire 10) en somme de deux entiers : 1 + 9 ; 2 + 8 ; 3 + 7 ; 4 + 6.

Recherche d'autres carrés magiques
Étant donné un carré ABCD de centre O, dont les médianes sont appelées (E) et (E'), les transformations géométriques qui le laissent globalement invariant sont les suivantes :

- Rotations de centre O et d'angle 90°, 180° ou 270°.
- Symétrie d'axe (AC), (BD), (E) ou (E')

En faisant opérer ces transformations sur un carré magique, on obtient de nouveaux carrés magiques ; par exemple (il y en a bien d'autres...) :

Solution donnée dans l'énoncé :

8	1	**6**
3	**5**	7
4	9	**2**

Solution 1

Par rotation d'angle 90°, on obtient :

4	3	**8**
9	**5**	1
2	7	**6**

Solution 2, donnée dans l'énoncé

Par rotation d'angle 180°, on obtient :

2	9	**4**
7	**5**	3
6	1	**8**

Solution 3

Par symétrie d'axe (E), on obtient :

4	9	**2**
3	**5**	7
8	1	**6**

Solution 4

Si on identifie les cases disposées autour de la case 5 à celles d'une « roue » comme dans la recherche A, les rotations de centre « la case 5 » et d'angle 45°, 135°, 225° et 315° fournissent d'autres solutions ; par exemple (il y en a bien d'autres...) :

Solution donnée :

8	1	**6**
3	**5**	7
4	9	**2**

Solution 1

Par rotation d'angle 45°, on obtient :

3	**8**	1
4	**5**	**6**
9	**2**	7

Solution 5

Par rotation d'angle 315°, on obtient :

1	**6**	8
8	**5**	**2**
3	**4**	9

Solution 6

Par symétrie d'axe (E), sur la solution 6 on obtient :

3	**4**	9
8	**5**	**2**
1	**6**	8

Solution 7

<u>Remarque :</u>
Le fait que, dans tous les carrés magiques 3 x 3, l'entier 5 occupe nécessairement la case centrale n'est jamais prouvé dans ce problème.

Question 9
La recherche A.

<u>Remarques :</u>
La fiche de préparation ne donne pas d'informations sur le statut de cette recherche dans la séquence. La seule indication fournie est que cette situation est proposée « selon la réussite à la recherche 1 », ce qui n'est pas suffisant pour comprendre l'intention du maître quand il propose cette recherche.
Pour répondre à la question, il est judicieux de résoudre soi-même le problème.

Le passage du carré à la roue permet de focaliser sur la place centrale du 5 et sur la perception des alignements de trois cases de même somme, 15, incluant 5. On peut penser que cet exercice, à la place qu'il occupe dans la séquence, permettra de vérifier que les élèves comprennent la signification de l'expression « obtenir la même

somme sur chaque... », la compréhension de cette contrainte étant un préalable à la résolution du problème.
L'exercice peut également permettre de vérifier que les élèves placent correctement le nombre 5 et savent utiliser les paires de nombres de somme 10 qui ont été listées dans la phase collective.

Question 10
La solution de la recherche B.

Remarque :
La question posée conduit à proposer et rédiger une procédure de résolution du problème très éloignée de celle que pourrait élaborer un élève de cycle 3.

La somme des nombres entiers de 1 à 16 qui figurent chacun une seule fois dans le tableau est donnée par la formule rappelée à la question 4 : $16 \times \frac{17}{2} = 136$
La somme des nombres figurant sur chaque ligne, colonne, diagonale étant constante, elle vaut : $\frac{136}{4} = 34$
Le nombre manquant dans la colonne 1 est donc 12 car 34 - (1 + 8 + 13) = **12**
Le nombre manquant sur la diagonale où figure déjà trois nombres est 4
car 34 – (13 + 10 + 7) = **4**
On en déduit le nombre manquant sur la ligne 1 : 34 - (1 + 14 + **4**) = **15**

Il reste 6 nombres à placer : 2 – 3 – 5 – 6 – 9 – 11
Notons a ; b ; c ; d ; e ; f les contenus des cases où il faudra les placer :

1	**15**	14	**4**
12	a	7	b
8	10	c	d
13	e	f	16

Les contraintes sur les lignes, donnent :

Pour la ligne 2,
a + b = 34 - (12 + 7)
donc a + b = 15
la seule manière de faire 15 avec les nombres de la liste est 9 + 6.
donc a = 6 et b = 9 (*) ;
ou a = 9 et b = 6

Pour la ligne 3,
c + d = 34 - (8 + 10)
donc c + d = 16
la seule manière de faire 16 avec les nombres de la liste est 11 + 5.
donc c = 11 et d = 5 (**) ;
ou c = 5 et d = 11

Pour la ligne 4,
e + f = 34 - (13 + 16)
donc e + f = 5
la seule manière de faire 5 avec les nombres de la liste est 2 + 3.
donc e = 2 et f = 3 ;
ou e = 3 et f = 2 (*)

Les contraintes sur les colonnes vont conduire à écarter l'une des possibilités à chaque fois :

<u>Pour la colonne 2,</u>
a + e = 34 - (10 + 15)
donc a + e = 9
la seule manière de faire 9 avec deux nombres de la liste est 3 + 6.
donc a = 6 et e = 3
ou a = 3 et e = 6
En prenant en compte la conclusion du travail sur les lignes (*), on déduit que nécessairement
a = 6 ; b = 9 et e = 3 ; f = 2

<u>Pour la colonne 3</u>,
c + f = 34 - (14 + 7)
donc c + f = 13
on sait déjà que f = 2
donc c = 13 – 2 = 11
On déduit du travail sur la ligne (**) que d = 5.

On n'a pas besoin de travailler avec la colonne 4, on peut l'utiliser pour vérifier.

D'où la solution unique du problème posé :

1	**15**	14	**4**
12	**6**	7	**9**
8	10	**11**	**5**
13	**3**	**2**	16

Question 11

La première étape de la résolution est nécessairement la détermination du nombre 34 qui est la somme des termes de chaque ligne, colonne et diagonale du carré magique.
Ce calcul, du fait qu'aucune rangée n'est complète, ne peut être exécuté directement et nécessite une véritable recherche comportant plusieurs étapes. De plus, les élèves peuvent ne pas avoir conscience du caractère déterminant de ce calcul.
La situation va probablement inciter les élèves à essayer des nombres dans les cases, puis à ajuster pour tenter de rendre égales les sommes. Etant donné le nombre de termes inconnus, cette stratégie a peu de chance d'aboutir.
Une fois le nombre 34 connu, la recherche peut rester très lourde du fait de la taille des nombres et de la quantité d'opérations à effectuer.

Des aides peuvent être données à plusieurs niveaux :
- Préciser qu'il faut d'abord chercher la valeur de la somme des termes de chaque rangée.
- Faciliter le calcul de cette somme en donnant une rangée complète dans le carré.
- Dire que la somme de chaque rangée vaut 34.
- Autoriser l'usage de la calculatrice pour contourner les difficultés inhérentes au calcul.

LYON

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

La technique habituelle d'addition de deux nombres consiste à additionner les chiffres de même ordre d'unités de ces deux nombres, en commençant par les unités, puis les dizaines et les centaines, et en tenant compte des retenues éventuelles, 0 palliant éventuellement l'absence de chiffre à un certain rang.
Le chiffre des unités et le chiffre des dizaines de la somme sont égaux à 9.
La somme de deux nombres s'écrivant avec un chiffre est au plus égale à 18, et il est alors impossible d'obtenir 19, nombre au moins égal à 10 et dont le chiffre des unités est égal à 9 et non à 19, de ce fait il n'y a pas de retenue sur les chiffres des dizaines. Par le même raisonnement que sur les chiffres des unités on en conclut que la somme des chiffres des dizaines ne peut être égale qu'à 9 et non à 19, il n'y a donc pas de retenue sur les chiffres des centaines. Au total l'addition de Toto ne comporte aucune retenue.

Remarque :
Pour obtenir 9 comme chiffre des unités les seules possibilités sont 9+0, 8+1, 7+2, 6+3, 5+4, 4+5, 3+6, 2+7, 1+8, 0+9.
Voici quelques exemples de telles sommes : 496+3, 432+67, 195+304.

EXERCICE 2

Question 1 a

La différence des pourcentages de votes exprimés pour chacun des deux camps est égale à 0,96%   (50,48 - 49,52 = 0,96).
Les 1044 voix d'écart correspondent donc à 0,96% des votes exprimés.
Le nombre de suffrages exprimés est égal à 108 750 voix car $\frac{1044}{0,96}\times 100$ = 108 750

Question 1 b

On ne peut connaître le nombre d'électeurs inscrits, n'ayant aucune information sur les nombres de votes blancs, de votes nuls et d'abstentions.

Question 2

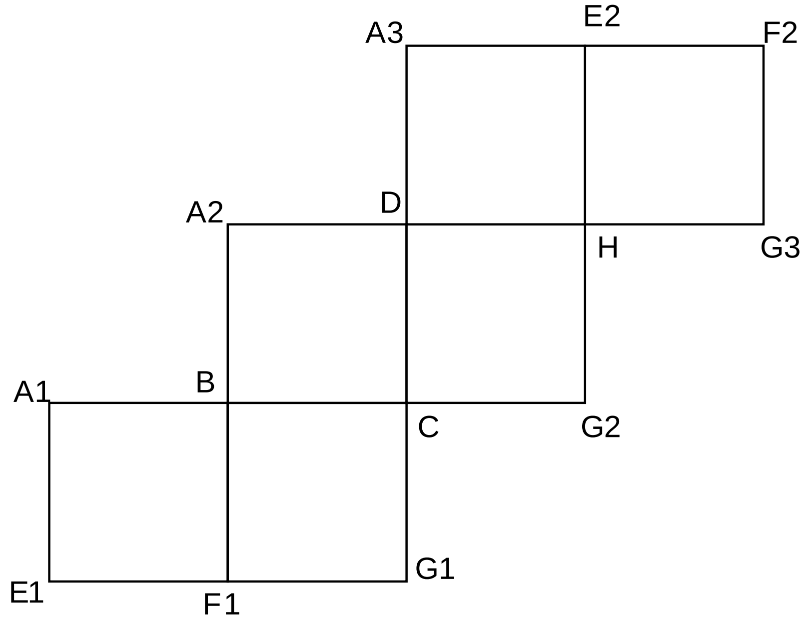
En 2003 il y a eu un tiers de suffrages exprimés en plus qu'en 1992, il y a donc eu 600 votes exprimés (un tiers de 450 est égal à 150, et 450 + 150 = 600).
62% de 450 voix représentent 279 voix.
47% de 600 voix représentent 282 voix.

Année	Suffrages exprimés	Votes « non »	Pourcentages de « non »
1992	450	**279**	62%
2003	600	**282**	47%

Le nombre de « non » a donc augmenté, car il y a 3 voix de plus en 2003, cependant que le pourcentage de ces votes relatif au nombre de suffrages exprimés a, au contraire, diminué.

PROBLEME.

Question 1
Patron complété

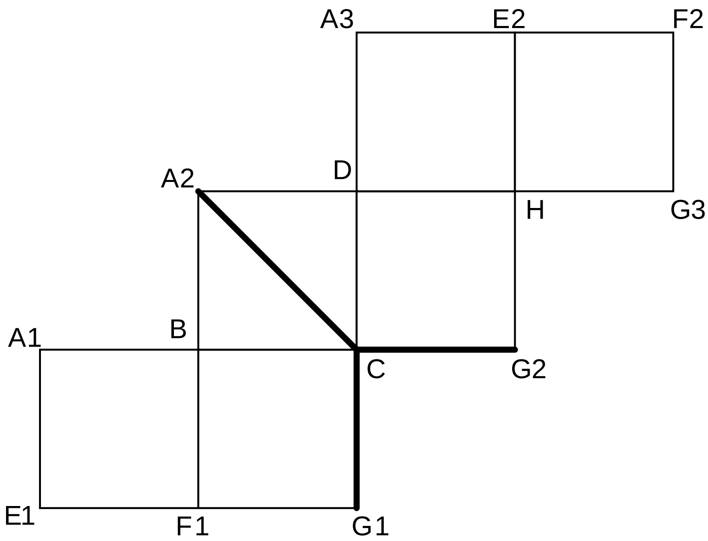


Question 2 a

Le tracé demandé comprend la réunion de deux segments : la diagonale [A_2C] et le segment [CG] lui-même représenté par [CG_1] et [CG_2] sur le patron. Voir ci-dessous.

Question 2 b

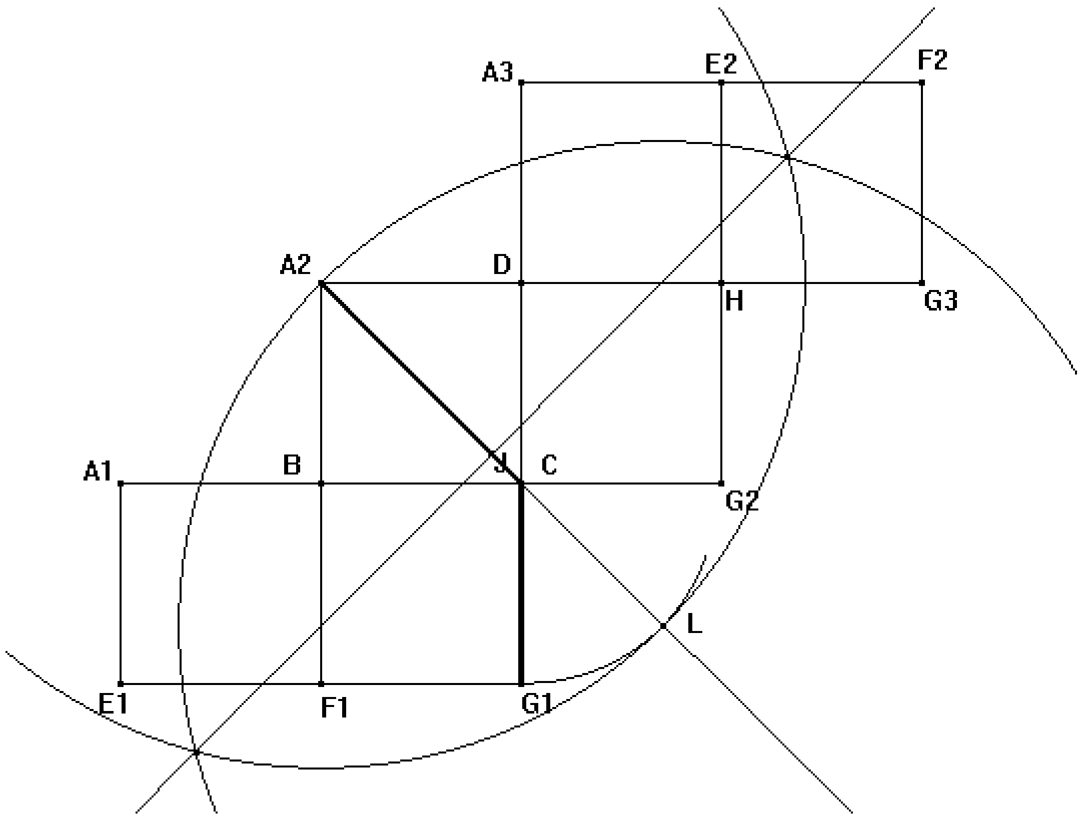
La longueur de la ligne brisée est l = AC + CG.
La longueur d'une arête du cube est égale à 1, donc CG = 1.
Une diagonale d'une face carrée du cube a pour longueur $\sqrt{2}$. (C'est une application directe du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC).
La longueur l de la ligne brisée ACG est donc égale à $\sqrt{2}+1$.



Question 2 c

J est le point de la ligne brisée ACG tel que AJ = $\frac{l}{2}$. Comme AC > CG, le point J est un point du segment [AC].

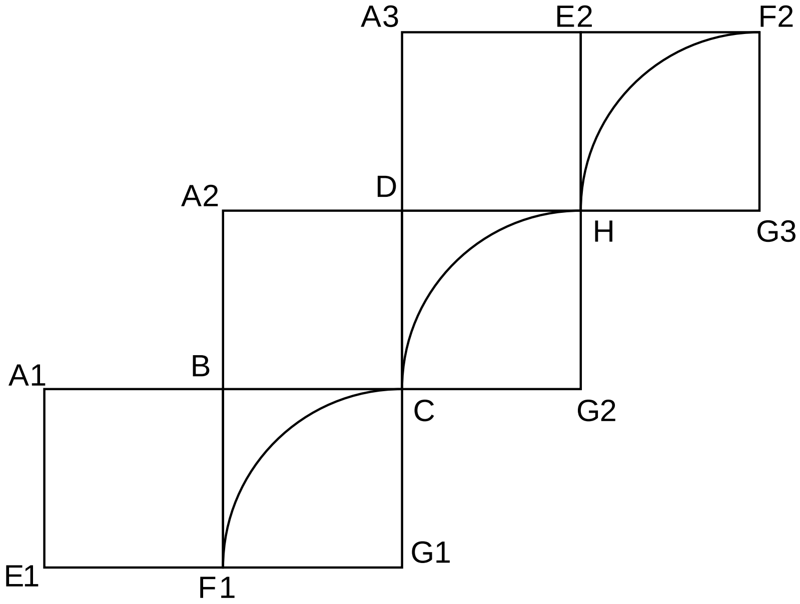
Tracé sur le dessin du patron : Prolonger la demi-droite [A_2C). Placer un point L sur [A_2C) tel que CL = CG_1. Ainsi $A_2L = A_2C + CG_1$ (C étant situé entre A_2 et L).
$A_2L = l$.
Il reste à utiliser la construction de la médiatrice de [A_2L] pour situer le milieu J du segment [A_2L].   J est le point cherché.



<u>Autre méthode possible :</u>
Construire le point C' tel que C' soit sur [A_2C] et A_2C' = CG_1 alors J est le milieu de [C'C], le milieu s'obtenant par construction de la médiatrice de [C'C] comme précédemment.

Question 3

Si la « distance » de G à M, notée d(G,M), est égale à la « distance » de G à C, cela permet de dire que *d*(G,M) = 1. Il s'agit donc de tracer le lieu des points M qui, situés sur la surface du cube, sont à une distance constante et égale à 1 du point G.
Sur chacune des trois faces ayant G pour sommet, l'ensemble des points est un quart de cercle de centre G et de rayon 1.
L'ensemble des points est la réunion des trois quarts de cercle tracés sur la figure ci-après.



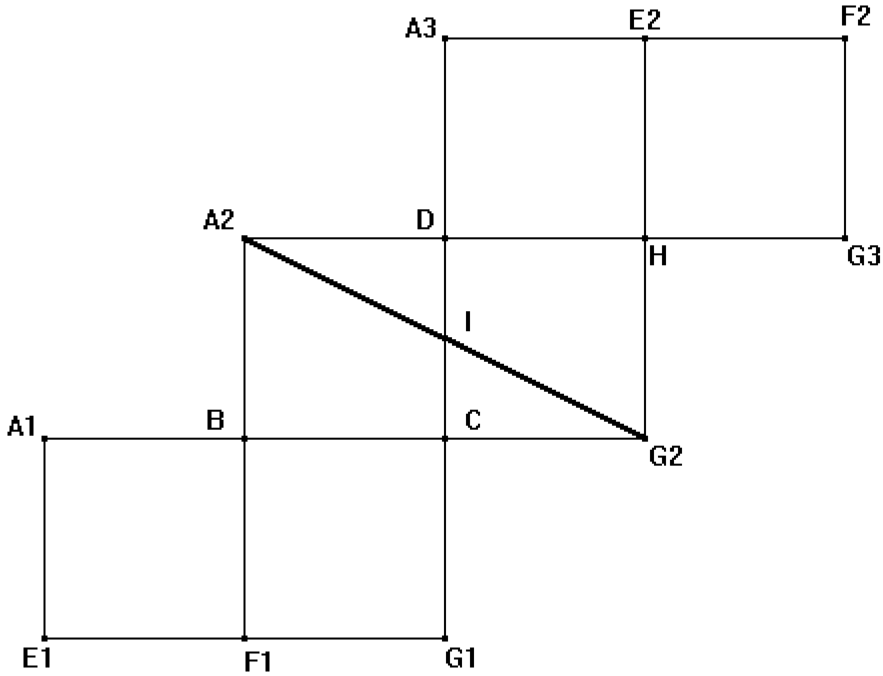
Question 4 a
Le trajet le plus court de A à G

Premier cas :
Considérons le dessin du patron du cube : Cette représentation plane du cube permet de voir toutes les faces à plat, dans un même plan. Chacun connaît le principe selon lequel « le chemin le plus court d'un point à un autre est (sur) une ligne droite », aussi le chemin le plus court allant du sommet A au sommet G est-il représenté par le segment [A_2G_2] pour respecter le choix imposé des faces ABCD et CDHG.
Pour le tracer sur cette représentation, il suffit de joindre avec une règle les sommets A_2 et G_2.
Se reporter à la figure ci-dessous.

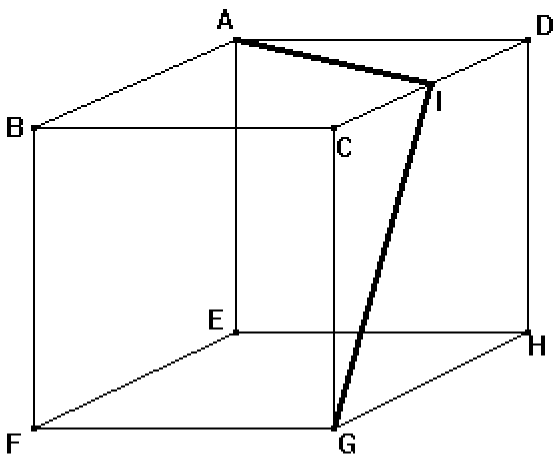
Second cas :
Sur le dessin en perspective cavalière, il faut d'abord situer et construire le point I de l'arête [DC], situé sur le trajet. En effet, les segments [AI] et [IG] sont situés le premier sur une face « horizontale », le second sur une face « verticale » et leurs représentations sur le patron ne suivent pas la même règle.
On « voit » que le point I est le milieu de l'arête [DC]. Prouvons-le, en nous appuyant sur le dessin du patron : On considère le triangle rectangle A_2HG_2. La droite (A_2H) est perpendiculaire à la fois à (DC) et à (HG_2), les angles droits provenant du fait que les faces du cube sont des carrés. Appelons I le point d'intersection des droites (DC) et (A_2G_2). Appliquons la réciproque du théorème des milieux dans le triangle A_2HG_2 : Le point D est le milieu de [A_2H], la droite (DC) est parallèle à (HG_2) et coupe par conséquent le segment [A_2G_2] en son milieu. I est donc le milieu du segment [A_2G_2]. Mais il faut encore prouver que I est aussi le milieu de [DC].
Pour cela on peut écrire l'égalité des rapports :

$$\frac{A_2D}{A_2H} = \frac{A_2I}{A_2G_2} = \frac{DI}{HG_2}$$

Ces rapports sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, donc [DI] a pour mesure la moitié de celle d'un côté d'une face carrée du cube, soit $DI = \frac{DC}{2}$, ce qui permet d'affirmer que I est bien le milieu de [DC].



Pour tracer à la règle le plus court trajet sur la représentation en perspective cavalière, joindre les points A et I (I milieu de l'arête [DC]), puis joindre I et G.



Question 4 b
Calcul de la longueur de ce trajet

On considère de nouveau le triangle rectangle A_2HG_2.
Le segment $[A_2H]$ a pour mesure 2, le segment $[HG_2]$ a pour mesure 1. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle A_2HG_2 rectangle en H :
$A_2G_2^2 = A_2H^2 + HG_2^2$. $A_2G_2^2 = 5$, on en déduit $A_2G_2 = \sqrt{5}$

La longueur du trajet le plus court, sur les faces du cube, a pour mesure $\sqrt{5}$. Cette mesure est effectivement inférieure à l égale à $\sqrt{2}+1$.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Le graphique est un histogramme. Pour chaque jour, les ventes sont représentées par une bande rectangulaire verticale en couleur dont la longueur est proportionnelle au nombre de livres vendus ce jour. Les cinq bandes correspondant aux cinq jours s'inscrivent chacune dans un cadre rectangulaire identique, blanc, dont la longueur est égale à 48 mm. On peut observer que cette longueur (48 mm) correspondrait à une vente de 120 livres (en utilisant la représentation concernant le mardi). La réponse attendue est résumée dans le tableau ci-dessous, lequel n'était pas demandé dans cette épreuve.
On y désigne par n le nombre de livres vendus, par l la longueur de la bande correspondante exprimée en millimètres, et par r le rapport entre la longueur de la bande en couleur et celle du rectangle blanc servant de cadre. Les réponses attendues sont indiquées en caractères gras.

jour	*Mardi*	*Mercredi*	*Jeudi*	*Vendredi*	*Samedi*
n	60	45	90	105	75
l (en mm)	24	18	**36**	**42**	**30**
r	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$

Question 1
Principale notion mathématique abordée

Pour compléter le graphique d'un jour, en cohérence avec les deux premiers qui fournissent un modèle, il faut déterminer la longueur de la bande rectangulaire en couleur, cette longueur devant être proportionnelle au nombre de livres vendus.
La « notion mathématique principale » abordée est donc **la proportionnalité**.

Question 2
Analyse des productions

<u>Production de Yann :</u>

- Procédures mises en œuvre :

Sa procédure repose sur les propriétés de conservation d'écarts, ou de rapports entre écarts, entre les termes de deux suites proportionnelles : la suite constituée par les nombres de livres vendus (*n*) et la suite des longueurs de la bande en couleur correspondante (*l*).
Pour compléter les trois graphiques Yann utilise la même procédure : Il calcule l'écart entre le nombre de livres vendus un jour avec celui du mardi. Il compare cet

écart avec celui existant entre les ventes des mardi et mercredi. Il établit le rapport entre ces écarts. Il reporte alors autant de fois sur le dessin l'écart de longueur mesuré entre les bandes du mardi et du mercredi, en se référant toujours au rectangle du mardi. « Je prends **deux fois, trois fois** ou **une fois**… l'écart ».
Sa méthode est correcte, la trace écrite fort explicite.

- Réponses aux questions posées :

Les mesures des bandes rectangulaires sont étonnamment correctes, car le report de l'écart d'une longueur de 6mm nécessite de la précision et du soin. On ne sait quelle procédure géométrique et quels instruments ont été utilisés.

Production d'Alexis :

- Procédures mises en œuvre :

Sa procédure repose sur la comparaison de nombres entiers, et la représentation approximative de longueurs de façon à respecter la relation d'ordre observée.
Pour compléter les trois graphiques Alexis utilise la même procédure : Par exemple, pour le dessin du jeudi : « 90 est plus grand que 60, donc le rectangle doit être plus haut. » Alexis compare le nombre de livres vendus un jour avec le nombre de livres vendus la veille, le jour précédent. Il exprime la différence de ces deux nombres en termes de dizaines et d'unités, et trace à la règle un trait horizontal, plus haut ou plus bas selon la comparaison, apparemment sans effectuer de mesure précise, sans quantifier la longueur à ajouter ou retirer (car les longueurs correspondant à 3 dizaines ne sont pas égales entre elles et celle correspondant à 1,5 dizaines n'est pas égale à la moitié de l'une d'elle). La proportionnalité n'est donc pas respectée.

- Réponses aux questions posées :

Les graphiques respectent l'ordre entre les longueurs. Cependant, le rectangle du jeudi est trop petit, celui du vendredi est trop grand, seul celui du samedi est correct.

Remarque :
On peut se demander si cela est dû au hasard, ou bien s'il s'agit d'une facétie des auteurs de ce sujet, destinée à évaluer la rigueur de l'observation des candidats.

Production d'Héloïse :

- Procédures mises en œuvre :

La procédure d'Héloïse est originale. Elle s'appuie sur le sens donné aux parties non colorées du cadre rectangulaire. Ayant affirmé que le nombre total de livres à vendre était égal à 120, elle en déduit que la seconde partie du cadre rectangulaire, non colorée, correspond à des livres qui resteraient à vendre, dont le nombre est le complément à 120 du nombre de livres vendus. Elle va alors calculer ce que représentent les différentes bandes blanches ainsi que leur moitié, selon le besoin, afin de reporter leur longueur, en haut du cadre. Le reste du rectangle sera alors colorié. Elle emploie une procédure analogue pour les trois jours, en choisissant les bandes appropriées :
Pour jeudi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la moitié de celle du mardi. Le complément est à colorier.
Pour vendredi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la moitié de celle du jeudi, et le complément est à colorier.
Pour samedi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la même que celle qui représente les ventes du mercredi.
Elle associe aux rectangles des longueurs proportionnelles aux nombres qu'ils

représentent, indépendamment de leur couleur. Cette démarche est sensée et s'avère également « économique » pour le tracé du graphique de samedi.

- Réponses aux questions posées :

La procédure, correcte, permet à Héloïse de proposer des dessins qui le sont aussi.

Remarque :
*Héloïse affirme d'entrée : « **On sait que** le nombre de livres à vendre est égal à 120. » On ne sait pas si elle a déduit cette affirmation initiale d'une fine observation du graphique des ventes du mardi, ou bien si cela faisait partie d'un énoncé plus complet, ou bien si cela a été établi par le maître lors de la présentation du problème.*

Production de Benoît :

- Procédures mises en œuvre :

Benoît ne fait pas référence aux nombres de livres, mais associe après mesurage une mesure de longueur égale à 1,2 cm au nombre 30 (« la moitié du mardi »). Il semble qu'ensuite il ait privilégié le calcul, pour déterminer la longueur de bande associée au nombre 15 et égale à 0,6 cm. Se référant ensuite, pour les trois exercices, à la longueur du rectangle du mardi, les mesures en centimètres des longueurs des rectangles coloriés auraient dû être respectivement :
2,4 + 1,2 pour le jeudi, 3,6 + 1,2 pour le vendredi et 2,4 + 0,6 pour le samedi.
Ce raisonnement est donc pertinent, mais Benoît n'indique pas les mesures qu'il a obtenues. On constate que les mesures des rectangles du jeudi et du vendredi sont nettement erronées : Il manque 4 à 5 millimètres à chacun d'eux.

- Réponses aux questions posées :

Les tracés des rectangles du jeudi et du vendredi sont erronés. S'agit-il d'une erreur de mesurage, d'un emploi incorrect de sa règle graduée, ou d'une erreur de calcul antérieure ?

Question 3
Autres procédures possibles

Les suites (n) de nombres de livres vendus et (l) de longueurs (exprimées en mm) pour les rectangles qui les représentent sont proportionnelles. Soit l_j la longueur du rectangle pour le jeudi et l_v celle du vendredi.

jour	*Mardi*	*Mercredi*	*Jeudi*	*Vendredi*	*Samedi*
n	60	45	90	105	75
l (en mm)	24	18	l_j	l_v	l_s

Trois procédures différentes de celles observées précédemment peuvent être les suivantes :

- Ventes du jeudi : utilisons la conservation du rapport entre termes de chacune des suites : 90 est le double de 45, donc l_j vaut le double du nombre de ventes du mercredi, soit 18 × 2.
  l_j = 36.

- Ventes du vendredi : utilisons la propriété additive de linéarité pour déterminer l'image de 105.

105 = 60 + 45 (le nombre de ventes du vendredi est la somme de celles du mardi et du mercredi). Par conséquent la longueur l_v du rectangle doit être égale à la somme des longueurs des rectangles correspondants à ces deux jours : 24 + 18

l_v = 42

- Ventes du samedi : soit f la fonction linéaire associant la longueur (exprimée en mm) du rectangle au nombre n de livres correspondant : f(n) = l

Sachant que f(60) = 24, on en déduit successivement f(1) = 0,4 et f(n) = 0,4.n
(0,4 est le coefficient de proportionnalité, ce nombre est dépendant du choix effectué pour l'unité de mesure de longueur)
Alors, pour le samedi, où 75 livres ont été vendus : f(75) = 75 × 0,4 = 30

l_s = 30.

SECOND VOLET (8 POINTS)

I - ANALYSE DE LA SÉQUENCE EXTRAITE DE *MILLE MATHS* CP

Question 1a
Compétences que les élèves doivent maîtriser

<u>*Remarque :*</u>
Les élèves disposent des cartes à points. En principe les cartes à dix points présentent la face où il est écrit « dix », mais il est peut-être possible de les retourner…

Les élèves doivent maîtriser la comptine, la suite des mots nombres.
Pour utiliser la procédure souhaitée, il leur faut comprendre qu'une carte indiquant « dix » représente une collection de dix points (qu'en principe ils ne voient pas) et que cela dispense de compter effectivement les points un à un, tout en permettant d'obtenir le même nombre au final.
Il leur faut savoir compter à partir de 10, et même compter de 10 en 10 (savoir au moins que 10 + 10 = 20). Ils doivent pouvoir surcompter à partir de 20 pour ajouter le nombre de points de la dernière carte. (Le document suggère que cet exercice soit répété dix fois pour aller de 20 à 30 !)
Il leur faut savoir écrire les nombres sous forme d'écriture additive et passer d'une écriture telle que 10 + 10 + 3 à l'écriture usuelle 23, savoir lire cette écriture en chiffres…
La seconde partie de cette activité consiste à inverser la démarche, pour représenter avec le nombre minimal de cartes en privilégiant les cartes « dix » un nombre écrit en chiffres au tableau.

Question 1b

Le fait de compter en premier les dizaines augmente considérablement la rapidité de comptage par rapport au comptage un à un. Une contrainte de limite de durée pourrait, à condition que la consigne en fasse valoir l'intérêt, amener les élèves à choisir une procédure plus rapide. Une autre contrainte pourrait consister à modifier les cartes « dix » de sorte que leur verso ne montre plus les dix points. Dès lors, ne pouvant plus accéder à la vue de la collection de points, les élèves seraient contraints à envisager une procédure de comptage différente de celle qui leur semble la plus naturelle.

Question 1c
Pertinence du deuxième exercice (activité « Décomposer en utilisant 10 »

Non, cette « situation » ne permet pas vraiment de faire prendre conscience de l'intérêt qu'il y a à utiliser 10 puisque l'élève n'a pas l'occasion de choisir une autre stratégie, de comparer une autre procédure avec celle qui lui est imposée par la consigne. Le nombre de cartes « dix » semble donné a priori par la consigne du professeur, il ne reste à l'élève qu'à chercher la carte correspondant aux unités, et s'il avait quelque hésitation, il lui suffit de se reporter à son matériel « bande numérique » où la réponse attendue est déjà affichée.

Question 2
Difficultés dans l'activité « Dénombrer des collections »

Les difficultés pour trouver le nombre d'objets d'une collection peuvent être liées :

- aux objets plus ou moins commodes à manipuler, à déplacer, objets qui glissent, roulent, et rendent difficile le contrôle du comptage, qui peuvent se prêter difficilement à être regroupés en paquets, indépendamment de leurs propriétés ou de leur aspect, surtout dès lors que leur nombre devient important.
- à une connaissance insuffisamment stable de la comptine, suite des mots nombres (par exemple, certains enfants ont des difficultés lors des passages à la dizaine supérieure).
- à l'énumération de la collection (chaque objet doit être pris en considération, une fois et une seule, sans redoublement, sans omission, et cela doit être fait en parfaite synchronisation avec la comptine). Une organisation de la manipulation des objets est nécessaire.
- à la mémorisation des différents nombres dans le cas d'une décomposition en paquets non réguliers.

Question 3a
Adéquation entre l'objectif annoncé et les exercices (annexe 6)

Les exercices ne correspondent pas à l'objectif annoncé puisque les groupements par dizaines sont déjà effectués : l'élève n'a pas lui-même à grouper des objets par dix.
Dans le premier exercice l'énoncé indique que les boîtes contiennent chacune dix chocolats (non visibles en dehors de la boîte modèle).
Dans le second exercice les modèles de calcul proposés, qu'il s'agit de compléter et imiter, reposent sur une décomposition explicite en dizaines (Chaque nombre 10 correspond à un billet de 10 euros).
L'énoncé du troisième exercice ne laisse pas davantage l'initiative aux élèves de grouper par 10 les éléments d'une collection : le nombre de bonbons contenus dans les poches est écrit sur le paquet : c'est 10.

Question 3b
Procédures utilisables pour résoudre l'exercice A (annexe 6)

- Les élèves pourraient dessiner une collection plus ou moins schématisée des 19 ou 30 chocolats (en effectuant ainsi la simulation de vider les boîtes de 10) et dénombrer cette collection témoin. Connaissances sollicitées : savoir dessiner tous les éléments de la collection, même ceux qui sont « cachés » dans la dizaine ; dénombrer une collection dessinée.
- Les élèves pourraient surcompter à partir de dix (cette procédure est davantage favorisée par le premier des deux exercices : « dix, onze,… dix-neuf. », plutôt que par le second dans lequel ils pourraient plus facilement compter de dix en dix). Connaissances sollicitées : savoir surcompter en sachant qu'une dizaine vaut dix unités.
- Les élèves pourraient effectuer un calcul réfléchi : 10 et 9, c'est dix-neuf, puis, 10 et 10 et 10, cela fait trente (en passant ou non par 20). Connaissances sollicitées : calcul mental avec 10.

Les deux premières procédures ont toutes les chances d'aboutir à une réponse correcte, la troisième nécessite davantage de connaissances, une maîtrise expérimentée du domaine numérique concerné ($n < 50$), ce qui peut se rencontrer.

Question 3c

Remarque :
Il nous paraît légitime de se demander ce que peut recouvrir l'expression « réussir partiellement l'exercice » : S'agit-il seulement de trouver l'écriture en chiffres ? S'agit-il d'avoir complété les espaces réservés conformément au modèle ?

Proposition 1 :
La disposition spatiale des billets et monnaies représentés peut inciter à effectuer le calcul autrement. En opérant sur des alignements verticaux, les calculs des trois exercices pourraient se traduire par les additions : 15 + 12 ; 12 + 10, puis 15 + 15 ce qui amène à compléter autrement les cases de la somme sans altérer le résultat final.

Proposition 2 :
Les élèves peuvent additionner mentalement, étape par étape, la valeur de chaque billet et pièce représentés ce qui les conduit à donner le résultat final (dont la valeur dépend de leur habileté calculatoire) sans pour autant compléter les cases vides de la somme.

II - ANALYSE DE LA SÉQUENCE EXTRAITE DE *CAP MATHS CP*

Question 4
La séance 1 (annexe 7)

Pour réussir leur commande les enfants peuvent compter un à un les « boutons »

(petits carrés blancs sur le dessin) en les marquant d'une croix afin de rendre plus fiable leur énumération et leur dénombrement (leur disposition spatiale ne privilégie aucun regroupement évident à l'aide de paquets particuliers).
Les élèves peuvent aussi effectuer librement des groupements de « boutons » par 10, ou par 4 ou par 7 ou par 6… puis effectuer une commande en disant par exemple : « Il me faut un paquet de dix boutons, et 13 boutons » ou « 2 paquets de dix et 3 boutons » ou bien « 7 boutons et 6 boutons et encore 6 et encore 4 ». Notons bien qu'une commande demandant des paquets contenant un nombre de boutons différent de 10 ne peut aboutir vu la règle imposée aux marchands.

Remarque :
Le dessin du ziglotron ne favorise pas la procédure consistant à entourer les paquets de dix carrés au fur et à mesure de leur pointage.

Question 5a
Intérêt des trois premières contraintes (séance 2 de l'annexe 7)

L'apprentissage visé est de « mettre en évidence la signification de chaque chiffre dans l'écriture chiffrée d'un nombre ».

- La première contrainte oblige à effectuer une commande écrite, et non plus orale comme dans la phase précédente, faisant référence à des paquets de 10 et à des unités isolées. Le bon de commande ne permet de commander que des paquets de 10 boutons, ou un nombre au plus égal à 9 de boutons isolés. Il doit indiquer également l'écriture usuelle du nombre total. Ceci devrait permettre de faire découvrir la coïncidence entre le chiffre des dizaines et le nombre de paquets de 10, entre le chiffre des unités et le nombre de boutons isolés ; en juxtaposant l'écriture du nombre total de boutons (exemple : 23), avec le nombre de paquets de dix boutons (ici 2) et le nombre de boutons seuls (ici 3), on favorise la prise de conscience chez l'élève des liens existant entre ces trois écritures.

- La seconde contrainte interdit de formuler une commande telle que 15+13 ou 20 + 2 + 12, ou encore 37 (avec des nombres supérieurs à 10), les seuls groupements de boutons autorisés étant des paquets de 10 ou un nombre de boutons isolés inférieur ou égal à 9. Cela contribue à renforcer la prise de conscience évoquée ci-dessus.

- La troisième contrainte est l'obligation pour les marchands de lire le bon de commande. Une lecture à haute voix permet aux élèves qui l'ont rédigé d'entendre ce qu'ils ont écrit et peut favoriser la découverte de certaines relations ; de plus la simple exécution du bon de commande après lecture amène les marchands à se contenter de donner les paquets de 10 et les boutons isolés demandés sans nécessairement s'assurer que cela est en cohérence avec l'écriture usuelle du nombre. Cela permettra éventuellement ensuite de rendre nécessaire un débat entre les élèves.

Finalement l'objet de ces contraintes est de rendre nécessaire pour tous les élèves la prise en compte du nombre de paquets de 10 de la collection et l'association chiffre des unités et nombre de boutons isolés.

Question 5b
Intérêt de la quatrième contrainte (séance 2 de l'annexe 7)

Retarder une validation effective, matérielle, va permettre au maître d'effectuer une mise en commun où il s'agira d'analyser et de comparer les différents bons de commande. Sont-ils lisibles ? Respectent-ils les différentes contraintes ? Permettent-ils a priori d'obtenir le nombre convenable de boutons ? Est-il possible d'anticiper sur la validité d'une commande ? Certains élèves prendront-ils alors conscience des similitudes perceptibles entre le nombre de paquets de 10, le nombre d'unités, et l'écriture du nombre lui-même ?

Question 6a
L'enseignant est seul en possession du ziglotron… (séance 3 de l'annexe 7)

Les élèves ne disposant plus du matériel (le ziglotron), ils ne peuvent plus dénombrer directement les boutons sur le dessin et ne peuvent plus entourer sur la collection les paquets de dix dont elle se compose ; ils sont incités à lire directement les nombres de paquets de 10 et d'unités dans l'écriture des nombres eux-mêmes.

Question 6b
Trois procédures utilisables (séance 3 de l'annexe 7)

Le nombre 42 est donné. Il s'agit de compléter le bon de commande en respectant les contraintes.
Trois procédures peuvent être choisies parmi les suivantes :

- Dessiner 42 boutons, entourer les paquets de 10 et compléter le bon de commande par : 4 paquets de 10 et deux boutons isolés.
- Traduire l'écriture 42 par 10 10 10 10 2 ou par 10+10+10+10+2 en contrôlant chaque étape de la décomposition puis exploiter cette écriture pour compléter le bon.
- Compter oralement de dix en dix jusqu'à 40 en comptant les « dix » sur leurs doigts, remplir alors la partie du bon de commande concernant les paquets de dix, puis surcompter jusqu'à 42 et compléter le bon de commande.
- Utiliser la procédure attendue en affirmant : « Dans 42, le 4 c'est 4 paquets de 10, et le 2 c'est les boutons tout seuls. »

Question 6c
Lien entre l'apprentissage visé et la réussite de l'élève

Bien que cette dernière phase soit individuelle, la réussite d'un élève doit être considérée avec prudence : Il est possible que l'élève ait perçu ce que le maître attendait de lui (effet de contrat didactique), et que sa réponse soit guidée davantage par cette attente que par une réelle compréhension du mécanisme de la numération. Il est possible aussi que sa compréhension du problème posé soit fortement liée au contexte de la situation du ziglotron, et qu'il ne fasse pas spontanément une généralisation de cette découverte. Une phase d'institutionnalisation des connaissances, menée par le professeur, est nécessaire, afin d'expliciter et d'identifier clairement ce qui vient d'être « découvert », de transformer cette connaissance en un savoir commun à toute la classe, savoir qui devra être retenu et réutilisé ultérieurement, tâche que l'élève ne serait pas capable de faire seul.

III - SYNTHÈSE.

Question 7a
Analyse comparative par rapport à l'apprentissage visé

L'apprentissage visé est pratiquement le même : il s'agit de comprendre la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

Question 7b
Analyse comparative par rapport aux modalités utilisées pour provoquer l'apprentissage

Les modalités ne s'appuient pas sur la même conception d'un apprentissage.
Dans la séquence extraite de *Mille maths* les auteurs montrent d'abord les connaissances numériques que les enfants devront apprendre (par le biais de la bande numérique et des consignes à respecter, par la répétition de la même tâche proposée au paragraphe 2 de l'annexe 1 *pour* <u>*tous*</u> *les nombres de 20 à 30,* ce qui peut se traduire par l'expression « enfoncer le clou »). Les auteurs leur demandent ensuite d'appliquer ces connaissances dans les exercices de la page « utiliser la dizaine ». Cette séquence correspond de fait à une démarche d'apprentissage par ostension, ou de transmission des savoirs.
Dans la séquence extraite de *Cap maths* les auteurs ont privilégié une démarche d'apprentissage par la résolution de problèmes, dans laquelle les élèves sont davantage acteurs et responsabilisés : ils doivent découvrir eux-mêmes la relation entre l'écriture chiffrée des nombres et la signification de chacun des chiffres de cette écriture. Le savoir visé est la solution d'une situation problème qu'ils ont à résoudre.

MARTINIQUE

Note préliminaire :
Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1
Les nombres.

Question 1
Les égalités vraies

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

Question 2
Décimaux rangés dans l'ordre croissant

1,07 ; 1,109 ; 1,7 ; 1, 81

Question 3
Intercaler deux décimaux…

1,102 < 1,1025 < 1,12 et 1,102 < 1,11 < 1,12

Question 4
Durées à exprimer en heures, minutes et secondes

1,5 ou $1 + \frac{5}{10}$ ou $1 + \frac{1}{2}$ soit **1 heure 30 minutes** ($\frac{1}{2}$ heure vaut 30 minutes)

2, 25 ou $2 + \frac{25}{100}$ ou $2 + \frac{1}{4}$ soit **2 heures 15 minutes** ($\frac{1}{4}$ heure vaut 15 minutes)

0,3 ou $\frac{3}{10}$ ou $3 \times \frac{1}{10}$ soit **18 minutes** ($\frac{1}{10}$ heure vaut 6 minutes)

3,375 ou $3 + (3 \times \frac{1}{10}) + (7 \times \frac{1}{100}) + \frac{5}{1000}$

$3 \times \frac{1}{10}$ heure valent 18 minutes

1 heure vaut 60 minutes ou 60 × 60 secondes , $\frac{1}{100}$ heure vaut donc 36 secondes et $7 \times \frac{1}{100}$ heure valent donc 7 × 36 = 252 secondes soit (60 × 4) + 12 soit 4 min 12 s .

$\frac{5}{1000} = \frac{1}{200} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100}$ et $\frac{5}{1000}$ heure valent donc 18 secondes

3,375 heures, c'est donc :3 + 18 min + (4 min + 12s) + 18 s
soit 3 heures 22 minutes 30 secondes

Question 5
Fractions irréductibles

$A = \frac{5}{8} + 0{,}25$

$A = \frac{5}{8} + \frac{25}{100} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8}$

$A = \mathbf{\frac{7}{8}}$

$B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + 0{,}15$

$B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + \frac{15}{100} = \frac{20}{100} + \frac{175}{100} + \frac{15}{100} = \frac{20+175+15}{100} = \frac{210}{100}$

$B = \mathbf{\frac{21}{10}}$

PROBLÈME 1

Question 1

La famille de Mme Lelong :
2 adultes, 3 enfants dont 1 de plus de 15 ans et un de moins de 5 ans pour 10 nuits, soit 1 semaine et 3 nuits d'une seconde semaine.

Camping Beausoleil	Installation : 50 € Une nuitée : 3 de plus de 15 ans 3 × 15 = 45 2 de moins de 15 ans 2 × 10 = 20 soit 65 € par nuit 10 nuitées : 65 × 10 = 650 soit un total de 700 €
Camping Bellevue	Première semaine : 7 jours 4 personnes payantes 4 × 20 × 7 = 560 Seconde semaine : 3 nuits 4 personnes payantes 4 × 15 × 3 = 180 soit un total de 740 €

Ils doivent donc choisir le camping Beausoleil.

Question 2

La famille de Mme Dubois : 2 adultes, 2 enfants pour 2 semaines soit 14 jours.

Composition famille	**Camping Beausoleil**	**Camping Bellevue**	**Choix du camping**
2 adultes 2 enfants moins de 5 ans	Installation : 50 € Par nuitée : Plus de 15 ans 2 × 15 = 30 Moins de 15 ans 2 × 10 = 20 Soit 50 € par nuit Pour 14 nuitées : 50 × 14 = 700 Soit un total de 750 €	Première semaine : 7 jours 2 personnes payantes 2 × 20 × 7 = 280 Seconde semaine : 7 jours 2 personnes payantes 2 × 15 × 7 = 210 Soit un total de 490 €	**Bellevue**
2 adultes 1 enfant moins de 5 ans 1 enfant plus de 5 ans et moins de 15 ans	Idem 750 €	Première semaine : 7 jours 3 personnes payantes 3 × 20 × 7 = 420 Seconde semaine : 7 jours 3 personnes payantes 3 × 15 × 7 = 315 Soit un total de 735 €	**Bellevue**

2 adultes 1 enfant moins de 5 ans 1 enfant plus de 15 ans	<u>Installation :</u> 50 € <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans 3 × 15 = 45 Moins de 15 ans 1 × 10 = 10 Soit 55 € par nuit <u>Pour 14 nuitées</u> : 55 × 14 = 770 <u>Soit un total de 820 €</u>	<u>Idem : 735 €</u>	**Bellevue**
2 adultes 2 enfants plus de 5 ans et de moins de 15 ans	<u>Installation :</u> 50 € <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans 2 × 15 = 30 Moins de 15 ans 2 × 10 = 20 Soit 50 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> 50 × 14 = 700 <u>Soit un total de 750 €</u>	Première semaine : 7 jours 4 personnes payantes 4 × 20 × 7 = 560 Seconde semaine : 7 jours 4 personnes payantes 4 × 15 × 7 = 420 <u>Soit un total de 980 €</u>	**Beausoleil**
2 adultes 1 enfant de plus de 15 ans 1 enfant entre 5 et 15 ans	<u>Installation :</u> 50 € <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans 3 × 15 = 45 Moins de 15 ans 1 × 10 = 10 Soit 55 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> 55 × 14 = 770 <u>Soit un total de 820 €</u>	<u>Idem 980 €</u>	**Beausoleil**
2 adultes 2 enfants de plus de 15 ans	<u>Installation :</u> 50 € <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans 4 × 15 = 60 Soit 60 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> 60 × 14 = 840 <u>Soit un total de 890 €</u>	<u>Idem 980 €</u>	**Beausoleil**

PROBLEME 2

Question 1
Calcul du prix réel

Soient : Pn le nouveau prix, Pi le prix initial et R la remise

Pn = Pi - R avec R = $\frac{20}{100}$ × Pi d'où Pn = (1 - $\frac{2}{10}$) × Pi

Un remise de 20% correspond donc à un coefficient multiplicateur de 0,8 à appliquer au prix initial.

	Prix initial	Prix après remise de 20%
Jean	60 000 €	60 000 × 0,8 = 48 000 €
Pascal	43 200 €	43 200 0,8 = 34 560 €
Sandrine	46 800 €	46 800 × 0,8 = 37 440 €

Question 2
Coût du gardiennage

Le coût initial en euro du bateau est 60 000 + 43 200 + 46 800 = 150 000

	Prix initial	**Part de chacun**	**Contribution au gardiennage**
Jean	60 000 €	$\frac{60\,000}{150\,000} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	5000 × $\frac{2}{5}$ = 2000 €
Pascal	43 200 €	$\frac{60\,000}{150\,000} = \frac{432}{1500} = \frac{144}{500}$	5000 × $\frac{144}{500}$ = 1440 €
Sandrine	46 800 €	$\frac{60\,000}{150\,000} = \frac{468}{1500} = \frac{156}{500}$	5000 × $\frac{156}{500}$ = 1560 €
Somme totale	150 000 €	1	5000 €

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1
Compétences nécessaires à la réussite

S'agissant de calcul réfléchi, plusieurs procédures vont être envisageables.
Il s'agit pour l'élève de savoir effectuer mentalement, sans l'aide de l'écrit, des calculs donnés oralement et plus spécifiquement de :

60 - 19	P_1 : savoir effectuer mentalement un calcul soustractif en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. Par exemple (60 - 20) + 1 ou 19 + 1 + 40 pour une décomposition de 60. P_2 : savoir calculer une différence de deux entiers mettant en jeu une retenue.
3 × 0,5	P_1 : savoir effectuer mentalement un calcul de type « fois 0,5 » en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. P_2 : savoir calculer le produit d'un décimal par un entier en se basant éventuellement sur une addition itérée et sur le fait que 2 fois 0,5 est 1.
1,7 + 2,3	P : savoir calculer une somme de deux décimaux de même format (au dixième) mettant en jeu une retenue.
2,5 × 4	P : savoir calculer le produit d'un décimal par un entier en se basant éventuellement sur une addition itérée et sur le fait que 2 fois 2,5 est 5

On peut rajouter pour les quatre items :
Être capable de donner du sens à l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

Question 2
Analyse des productions et aides[1]

<table>
<tr><th>Analyse et aides</th><th>Alex</th><th>Raoul</th><th>Claire</th></tr>
<tr><td>60 - 19</td><td>Il trouve 59 : résultat erroné.

L'élève effectue mentalement une soustraction entre les chiffres de même rang (nombre plus petit soustrait au nombre le plus grand).</td><td>Il trouve 51 : résultat erroné.

L'élève effectue mentalement une soustraction en oubliant de prendre en compte la retenue.</td><td>Elle trouve 41 : résultat juste</td></tr>
<tr><td>3 × 0,5</td><td rowspan="3">Les trois résultats sont erronés, car l'élève effectue mentalement les opérations indépendamment sur les parties entières et les parties décimales :
3 × 0 puis 3 × 5 pour 0,15
1 + 2 puis 7 + 3 pour 3,10
2 × 4 puis 5 × 4 pour 8,20.</td><td>Pas de réponse</td><td>Elle trouve 1,5 : résultat juste</td></tr>
<tr><td>1,7 + 2,3</td><td>Il trouve 3 : résultat erroné.

L'élève effectue mentalement une addition en oubliant de prendre en compte la retenue.</td><td>Elle trouve 3,10 : résultat erroné, ce qui est étonnant vu la réussite aux calculs
3 × 0,5 et 2,5 × 4.</td></tr>
<tr><td>2,5 x 4</td><td>Pas de réponse</td><td>Elle trouve 10 : résultat juste</td></tr>
<tr><td>Aide 1 sans support écrit</td><td colspan="2">• Pour enlever 19 il suffit d'enlever 20 et d'ajouter 1
• 2 fois 0,5 c'est 1 on demande 3 fois 0,5
• Ajouter d'abord 0,3 à 1,7 on obtient 2 ; poursuivre.
• 2 fois 2,5 c'est 5 on demande 4 fois 2,5.</td><td>Ajouter d'abord 0,3 à 1,7 on obtient 2 ; poursuivre.</td></tr>
</table>

[1] De quels types d'aides s'agit-il ? Sont-elles destinées à lui permettre de réussir ce calcul mental sur l'instant ou à redonner du sens aux techniques opératoires et à l'écriture des entiers et (ou) des décimaux ?

Analyse et aides	**Alex**	**Raoul**	**Claire**
Aide 2 avec support écrit	Poser la soustraction. Remplacer 0,5 par l'écriture fractionnaire 5 dixièmes et suggérer que l'on a donc 3 fois 5 dixièmes ($\frac{5}{10}+\frac{5}{10}+\frac{5}{10}=\frac{15}{10}$) Poser l'addition en colonnes : virgule sous virgule. Remplacer 2,5 par l'écriture fractionnaire 25 dixièmes et suggérer que l'on a donc 4 fois 25 dixièmes ($4 \times \frac{25}{10}=\frac{100}{10}$ et $\frac{100}{10}=10$).		Poser l'addition en colonnes : virgule sous virgule
Autres[2] aides	A long terme : redonner du sens à l'écriture des entiers (numération écrite) et à l'écriture à virgule des décimaux en opérant sur ces écritures dans le cadre d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication par un entier perçue comme une addition itérée. L'écriture fractionnaire est à favoriser, y compris à l'aide du support de la droite numérique.		Redonner du sens à l'écriture à virgule des décimaux en opérant sur ces écritures dans le cadre d'une addition.

[2] Ces aides supplémentaires sont d'autres qui seraient envisageables dans le cadre de la correction

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Niveau concerné

Cette séquence peut être proposée en troisième année du cycle 3 (CM2).
Tout d'abord, le document comporte des désignations de points que l'on trouve dans les manuels scolaires de fin de cycle 3.

Elle est difficilement réalisable à un niveau inférieur car les tâches proposées nécessitent :

- une anticipation des mouvements des pièces en vue de constituer un carré (activité 1)
- le tracé de perpendiculaires à un segment donné passant par un point sur ou à l'extérieur du segment (activité 3)
- l'utilisation d'une propriété de la médiane du carré : la perpendiculaire au milieu d'un côté coupe le côté opposé en son milieu (activité 3)
- la réalisation de figures complexes à construire (activités 3 et 4)
- la rédaction d'un programme de construction qui nécessite un vocabulaire et des notions en cours d'acquisition en cycle 3 (activité 3)

Ces compétences restent encore fragiles au cycle 3.

<u>Remarque :</u>
L'activité 4 nécessite un contrôle complexe de l'égalité de longueurs de segments pour trouver l'enchaînement des actions à effectuer pour la reproduction du dessin.

Question 2
Analyse des activités 1, 2 et 3

Bien que l'énumération des tâches ne soit pas demandée, il nous paraît important de les expliciter avant de répondre à la question.

	Activité[3] 1	**Activité 2**	**Activité 3**
Tâches	Utiliser un dessin à main levée pour recomposer un carré.	Reproduire à l'aide d'une règle un dessin d'échelle[4] différente	T1 : reproduire à l'aide d'une règle et d'une équerre un

[3] Les deux carrés sont respectivement réalisés avec les pièces 1, 3, 6 et 2,4,5.
remarque : les 3 pièces sont regroupées dans une même zone, les pièces 1 et 3 s'emboîtent après une simple translation .

[4] Deux échelles sont possibles : utilisation du pointé 7 × 7 (demande implicite) ou du pointé 5 × 5

	Activité[3] 1	**Activité 2**	**Activité 3**
		sur un support pointé.	dessin d'échelle différente sur une feuille blanche. T2[5] : rédiger un programme de construction.
Compétence 1	Percevoir des égalités de longueurs.	Percevoir l'égalité de longueur de 2 segments, percevoir le milieu d'un segment tracé sur deux supports différents (papier blanc ou papier pointé).	T1 : savoir tracer à la règle des perpendiculaires à une droite donnée passant par un point sur ou hors de la droite.
Compétence 2	Percevoir des angles droits et des égalités d'angles.	Percevoir ou vérifier à l'aide d'une règle des alignements de points et de segments (un point et un segment ; deux points et un segment)	T1 : savoir ordonner des actions pour réaliser la construction d'une figure complexe.
Autres[6] compétences	• Connaître les propriétés caractéristiques d'un carré. • Imaginer une rotation glissement d'une figure. • Percevoir l'emboîtement d'un angle saillant et d'un angle rentrant.	• Être capable d'utiliser une règle pour tracer un segment en joignant deux points. • Connaître la signification des mots milieu et carré. • Percevoir l'orthogonalité ou le parallélisme de deux segments comme moyen de contrôle de la tâche.	T1 : savoir (même implicitement) que la perpendiculaire au milieu d'un côté coupe le côté opposé en son milieu. De plus les compétences nécessaires à l'activité 2 restent valables car il faut analyser les caractéristiques de la figure pour la construire (en particulier percevoir ou vérifier des

[5] Nous ne citerons pas de compétences particulières pour cette tâche dont les difficultés seront précisées à la question 4c.
[6] Ces compétences supplémentaires sont d'autres qui seraient envisageables dans le cadre de la correction.

	Activité[3] 1	**Activité 2**	**Activité 3**
			alignements et des perpendicularités) T_2 : les documents d'accompagnement évoquent les « programmes de construction » dans le cadre d'une lecture et non de la rédaction.

Question 3
Analyse de la logique de la séquence

Plusieurs logiques peuvent être mises en évidence :

1) Utilisation progressive d'instruments dans le cadre d'une difficulté croissante.
D'abord règle sur un support pointé (activité 2), puis règle et équerre sur du papier blanc (activité 3), et enfin règle, équerre et compas sur du papier blanc (activité 4).

2) Volonté de faire acquérir aux élèves des compétences spatiales dans une activité de reproduction de dessins.
Activité 1 : reconstitution de figures à partir de pièces (activité puzzle).
Activité 2 : reproduction d'une figure avec l'aide d'un papier pointé.
Activité 3 : reproduction d'une figure sur papier blanc à l'aide d'instruments de géométrie (règle non graduée et équerre) et formulation de l'action.
Activité 4 : reproduction d'une figure sur papier blanc à l'aide d'instruments de géométrie (les mêmes que pour l'activité 3, plus le compas), puis analyse de la relation spatiale du dessin 2 avec le dessin 1.

Remarque :
Nous pouvons reconnaître une logique dans le choix des figures toutes réalisées à partir de carrés. Si l'on fait subir une rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens direct au triangle ABE dans le dessin 2 de l'activité 4, on obtient le dessin 1.

Question 4 (Activité 3)

Question 4a
Rôle des instruments

Règle :
- permet de vérifier des alignements d'objets (points, segments).
- de tracer des segments en joignant 2 points, de réaliser des alignements de points et de segments.

Équerre :

- permet de vérifier si un angle est droit.
- permet de tracer une perpendiculaire à un segment en un point donné de ce segment (élever une perpendiculaire) ou de tracer une perpendiculaire à un segment passant par un point donné hors de ce segment (abaisser une perpendiculaire).

Question 4b
Deux difficultés prévisibles pour la construction

Nous répertorions quatre familles de difficultés :

- La première famille de difficultés est de prendre l'information nécessaire pour la reproduction du dessin et qui n'est pas codée explicitement sur celui-ci : égalité de longueurs de segments, angles droits, alignements (souvent codés sous forme de pointillés)

- La deuxième famille de difficultés réside dans l'obtention de l'ordre des constructions à réaliser :
    - d'abord (DC) et (BC) pour obtenir le point C (tracés de 2 perpendiculaires)
    - puis (EF) pour obtenir F puis [DF] (tracé d'une perpendiculaire et d'un segment)
    - et enfin les deux derniers segments permettant d'obtenir le carré central (tracés de deux perpendiculaires)

- La troisième famille de difficultés est celle de l'obtention des différents éléments de la figure complexe :
    - difficulté de repérage du tracé du point F : il doit être obtenu comme l'intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire au segment [AD] en E (deuxième étape du programme de construction).
    - difficulté du tracé du segment porté par la droite perpendiculaire à la droite (BE) et passant par A et délimité par les segments [BE] et [DF] (élément de la troisième étape du programme de construction).

- La quatrième famille de difficultés réside dans l'usage des instruments, en particulier celui de l'équerre.

Question 4c
Trois difficultés prévisibles pour la rédaction

- difficulté de trouver l'ordre des différentes étapes de la construction.
- difficulté à décrire une construction, en particulier dans l'élaboration de phrases souvent très complexes pour des enfants de cet âge.
- difficulté à utiliser du vocabulaire géométrique efficace (perpendiculaire à un segment en un point ...) des désignations géométriques (nommer un point ; désigner un segment, une droite).

Question 4d
Trois composantes[7] du bilan

- pointer les difficultés rencontrées dans la réalisation des deux tâches (construction et rédaction) et essayer de les surmonter collectivement ;
- reprendre collectivement la construction de la figure complexe en pointant la nécessité de bien l'analyser (ce que permet l'activité 2) et faire réaliser avec soin les différents tracés de perpendiculaires ;
- reprendre collectivement la rédaction du programme en introduisant le vocabulaire géométrique approprié utilisable dans de futures activités identiques.

Remarque :
Rédiger le programme de construction du dessin de l'activité 3 paraît hors de portée de la plupart des élèves de cycle 3.

[7] Il est difficile de répondre à cette question dès l'instant où nous n'avons aucun détail de mise en œuvre de cette activité.