EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

CORRIGÉS

VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMEN DES ESPE)

1) On donne la série de valeurs suivante : 58 ; 55 ; 61 ; 70 ; 61 ; 65 ; 58 ; 55 ; 72.

Affirmation 1 : la médiane de la série est 61.

VRAI

Justification :

On récrit la série en rangeant les nombres par valeurs croissantes, ce qui donne :
55 ; 55 ; 58 ; 58 ; 61 ; 61 ; 65 ; 70 ; 72
Comme il y a neuf nombres, la médiane de la série est le cinquième nombre de la liste, c'est-à-dire : 61.

2) Trois personnes s'associent pour créer une entreprise. La première apporte 45 000 €, la deuxième 57 000 €, la troisième 60 000 €. À la fin de l'année, elles doivent se partager un bénéfice de 9 000 € proportionnellement à leur apport initial.

Affirmation 2 : La première personne reçoit 2 000 €.

FAUX

Justification :

Au départ, l'entreprise dispose de 45 000 € + 57 000 € + 60 000 € soit 162 000 €.
La première personne dispose donc de $\frac{45000\text{ €}}{162000\text{ €}} \times 9000\text{ €}$ soit 2500 €.

3) Le prix d'un article a été multiplié par 2.

Affirmation 3 : Ce prix a augmenté de 200 %.

FAUX

Justification :

Rappel :

Augmenter une valeur de t% revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

<u>Méthode 1</u>

Augmenter un prix de 200% revient donc à le multiplier par $1 + \frac{200}{100}$, soit $1 + 2$, c'est-à-dire 3.

<u>Méthode 2</u>

Multiplier un prix par 2 revient à le multiplier par $1 + \frac{100}{100}$, c'est à dire l'augmenter de 100%.

<u>Méthode 3</u>

On choisit un prix de départ, par exemple 100 € qu'on augmente de 200% soit 200 €.
On obtient donc 300 € soit une multiplication par 3 du prix initial.
On a donc exhibé un contre-exemple.

4) Un cycliste monte un col à la vitesse moyenne de 15 km/h. Il descend par la même route à la vitesse de 30 km/h.

Affirmation 4 : Sa vitesse moyenne est de 22,5 km/h.

FAUX

Rappel :

Attention, la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours n'est pas la moyenne arithmétique des vitesses de l'aller et du retour. Malgré tout, cette simple affirmation ne constitue pas une justification.

Justification :

Rappel :

Sur un parcours, la vitesse moyenne notée v, la durée notée t et la distance parcourue notée d sont liées par la relation $v = \frac{d}{t}$ *mais aussi* $t = \frac{d}{v}$ *et* $d = v \times t$.

On note d la distance parcourue lors de la montée de ce col. C'est aussi celle parcourue lors de la descente.
Calculons la durée de la montée que l'on notera t_1.

$t_1 = \frac{d}{15\text{ km/h}}$.

Calculons la durée de la descente que l'on notera t_2.

$t_2 = \frac{d}{30\text{ km/h}}$.

La vitesse sur l'ensemble du parcours que l'on notera V_{AR} est donnée par $V_{AR} = \frac{d+d}{t_1+t_2}$.

On a donc :

$$V_{AR} = \frac{2d}{\frac{d}{15\text{ km/h}} + \frac{d}{30\text{ km/h}}} = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{15\text{ km/h}} + \frac{1}{30\text{ km/h}}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{15\text{ km/h}} + \frac{1}{30\text{ km/h}}} = \frac{2}{\frac{2}{30\text{ km/h}} + \frac{1}{30\text{ km/h}}}.$$

Ainsi $V_{AR} = \frac{2}{\frac{3}{30\text{ km/h}}} = 2 \times \frac{30\text{ km/h}}{3} = 20\text{ km/h}$.

5) Une route sinueuse de 50 kilomètres sépare deux villes.

Affirmation 5 : Sur une carte au $\frac{1}{200\,000}$, cette route a pour longueur 2,5 cm.

FAUX

Justification :

Méthode 1 (utilisation de l'échelle)

On obtient les distances sur la carte en multipliant les distances réelles par $\frac{1}{200\,000}$.

50 km = 5 000 000 cm donc la distance sur la carte est donnée par 5 000 000 cm × $\frac{1}{200\,000}$ soit 25 cm.

Remarque :

Étant souvent amené à manipuler des grands nombres dans les problèmes d'échelle, il peut être opportun d'utiliser la notation scientifique des nombres. Ici 5 000 000 et $\frac{1}{200\,000}$ *seront notés* 5×10^6 *et* 5×10^{-6} *et on obtient alors* $5 \times 10^6\text{ cm} \times 5 \times 10^{-6} = 25\text{ cm}$.

Méthode 2 (recherche d'une quatrième proportionnelle)

Ce problème d'échelle relève de la proportionnalité.

À cette échelle, 1 cm sur la carte représente dans la réalité 200 000 cm soit 2 km.

Variante 1 (utilisation du coefficient de proportionnalité)

× 2

Mesures des longueurs réelles (en km)	2	50
Mesures des longueurs sur la carte (en cm)	1	?

: 2

Dans ce tableau de proportionnalité, on divise par 2 les mesures des longueurs réelles en km pour obtenir les mesures des longueurs sur la carte en cm.

Ainsi, à une longueur réelle de 50 km correspond une longueur sur la carte de 25 cm.

Variante 2 (utilisation de la propriété multiplicative de linéarité)

× 25

Longueurs réelles	2 km	50 km
Longueurs sur la carte	1 cm	?

× 25

50 km c'est 2 km × 25 donc la longueur sur la carte sera de 1cm × 25 soit 25 cm.

Remarque :

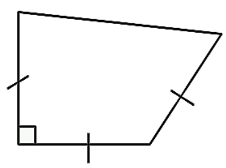
Plutôt que de chercher la longueur sur la carte correspondant à une longueur réelle de 50 km, on aurait pu chercher la longueur réelle correspondant à une longueur sur la carte de 2,5 cm. On aurait alors trouvé 5 km au lieu de 50 km.

6) Affirmation 6 : Un quadrilatère qui possède trois côtés de même longueur et un angle droit est un carré.

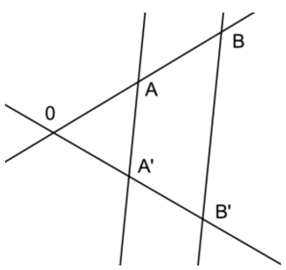
FAUX

Justification :

Il suffit d'exhiber un contre-exemple. La figure ci-dessous possède bien un angle droit et trois côtés de même longueur, mais n'est pas un carré.



7) On considère la figure suivante. Les droites (AA′) et (BB′) sont parallèles :



Affirmation 7 : On a alors : $\dfrac{A'B'}{OA'} = \dfrac{AB}{OA}$.

VRAI

Justification :

O, A' et B' (respectivement O, A et B) sont alignés dans cet ordre donc OB' = OA' + A'B' (respectivement OB=OA+AB).

On a d'une part : $\frac{\text{OB}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{OA}' + \text{A}'\text{B}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{OA}'}{\text{OA}'} + \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{OA}'} = 1 + \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{OA}'}$ (1).

et d'autre part : $\frac{\text{OB}}{\text{OA}} = \frac{\text{OA} + \text{AB}}{\text{OA}} = \frac{\text{OA}}{\text{OA}} + \frac{\text{AB}}{\text{OA}} = 1 + \frac{\text{AB}}{\text{OA}}$ (2).

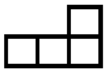
Dans le triangle OBB', les points O, A, B d'une part et les points O, A', B' d'autre part sont alignés et les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité : $\frac{\text{OB}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{OB}}{\text{OA}}$.

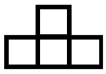
On déduit alors des égalités (1) et (2), l'égalité :

$$\frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{OA}'} = \frac{\text{AB}}{\text{OA}}.$$

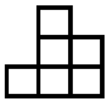
8) On considère un solide constitué d'un empilement de cubes identiques. On voit ci-dessous les vues de droite, de face et de dessus.



Vue de droite



Vue de face



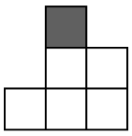
Vue de dessus

Affirmation 8 : On peut construire un tel solide à l'aide d'un empilement de 7 cubes.

VRAI

Justification :

Pour construire ce solide avec 7 cubes, il suffit de placer 6 cubes sur le plan de base dans la disposition indiquée par la vue de dessus, puis de placer un 7ème cube sur le cube grisé du schéma ci-dessous.



9) On augmente de 50 % la longueur L d'un pavé droit, on multiplie sa largeur l par 8 et on diminue sa hauteur h de 25 %.

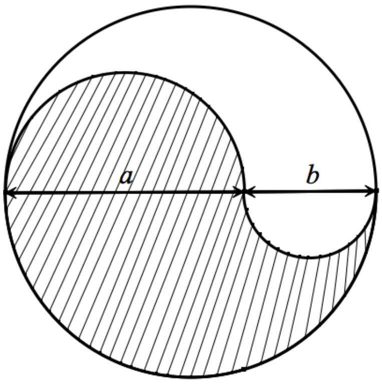
Affirmation 9 : Le volume V de ce pavé droit est multiplié par 9.

VRAI

Justification :

En utilisant le rappel effectué en **3)**, les nouvelles dimensions du pavé sont : 1,5 L, 8 l et 1,25 h.
Le volume du pavé initial est égal à L $\times$ l $\times$ h.
Le volume du pavé modifié est égal à 1,50 L $\times$ 8 l $\times$ 0,75 h $=$ 9 (L $\times$ l $\times$ h).
Le volume du pavé droit initial a donc bien été multiplié par 9.

10) Le diamètre du disque ci-dessous est partagé en deux segments de longueurs a et b. Deux demi-cercles sont construits respectivement sur chacun des deux segments de longueur a et b. Le disque initial est ainsi partagé en deux surfaces, l'une hachurée, l'autre non.



Affirmation 10 : Le rapport entre le périmètre de la figure hachurée et le périmètre de la figure non hachurée est égal à $\frac{a}{b}$.

FAUX

Justification :

Les deux périmètres sont les mêmes : les « bords » communs ont forcément même longueur et les « bords » non communs ont également même longueur (demi-disque initial).

11) On donne la fraction F, telle que :

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}.$$

Affirmation 11 : $\mathrm{F} = \frac{n+2}{n}$.

VRAI

Justification :

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}}{\frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}.$$

D'où $\mathrm{F} = \frac{1}{n(n+1)} \times (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}.$

12) Affirmation 12 : Si, dans la division euclidienne entre deux nombres entiers positifs donnés, le quotient et le reste ne changent pas quand on augmente le dividende de 168 et le diviseur de 4, alors le quotient est 42.

VR AI

Justification :

Appelons A et B les deux nombres entiers positifs tels que A soit supérieur ou égal à B et B non nul.
Dans la division euclidienne de A par B, il existe q et r deux entiers positifs ou nuls uniques tels que :
$\mathrm{A} = \mathrm{B} \times \mathrm{q} + \mathrm{r}$ et $0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{B}$ (1).
La condition exprimée dans l'affirmation se traduit par l'égalité suivante :
$\mathrm{A} + 168 = (\mathrm{B} + 4) \times \mathrm{q} + \mathrm{r}$ (2).
En soustrayant terme à terme l'égalité (1) de l'égalité (2), on obtient la nouvelle égalité :

$168 = 4 \times$ q. On en déduit que q = 42.

Remarque :

On peut aussi effectuer la division euclidienne de B par A ; on obtient $B = A \times 0 + B$.
La condition exprimée dans l'affirmation se traduit par l'égalité $B + 168 = (A + 4) \times 0 + B$.
Cette égalité n'étant satisfaite pour aucune valeur de B, on n'a pas à tester l'affirmation dans ce cas.

13) Affirmation 13 : Le nombre $2(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{12}$ est un nombre décimal.

VRAI

Justification :

Rappel :

L'ensemble des nombres réels contient l'ensemble des nombres rationnels qui contient l'ensemble des nombres décimaux qui contient l'ensemble des nombres entiers relatifs qui contient l'ensemble des nombres entiers naturels.

On peut écrire : $2(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{12} = 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} = -2$
Le nombre $2(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{12}$ est donc un entier relatif et a fortiori un nombre décimal (mais aussi un nombre rationnel et un nombre réel !).

14) Affirmation 14 : Le nombre $10^9 - 9$ possède 9 dizaines.

FAUX

Justification :

Remarque :

Il ne faut pas confondre "chiffre des" et "nombre de" : par exemple, dans le nombre 398, le chiffre des dizaines est 9 et le nombre de dizaines est 39.

On a les égalités : $10^9 - 9 = 1\,000\,000\,000 - 9 = 999\,999\,991$
Ce nombre contient 99 999 999 dizaines (ici c'est le chiffre des dizaines qui est égal à 9).

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Fractions – Géométrie plane – Mises en équation – Tableur – Arithmétique

EXERCICE 1 : fractions (d'après un sujet de Besançon)

1) Calcul des 4ème, 5ème, 6ème et 7ème nombres de la suite

Le 4ème nombre est $A_4 = \dfrac{1+\frac{21}{5}}{\frac{2}{5}} = \left(1+\dfrac{21}{5}\right)\times\dfrac{5}{2} = \dfrac{26}{5}\times\dfrac{5}{2} = 13.$

Le 5ème nombre est $A_5 = \dfrac{1+13}{\frac{21}{5}} = 14\times\dfrac{5}{21} = \dfrac{70}{21} = \dfrac{10}{3}.$

Le 6ème nombre est $A_6 = \dfrac{1+\frac{10}{3}}{13} = \dfrac{13}{3}\times\dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{3}.$

Le 7ème nombre est $A_7 = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}.$

2) Le 2015ème nombre de la suite

Les sept premiers nombres de la suite sont :

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5}$	13	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$

La suite est générée toujours de la même façon, par la formule $A_{n+2} = \dfrac{1+A_{n+1}}{An}$, pour tout entier n supérieur ou égal à 1. Cette suite est périodique de période 5 puisque l'on retrouve en 6ème et 7ème position les premier et deuxième nombres de la suite.
2015 est un multiple de 5 ; ainsi le 2015ème nombre de cette suite est égal au cinquième nombre de cette suite.

Le 2015ème nombre de cette suite est donc égal à $\boldsymbol{\dfrac{10}{3}}$.

3) a) Expression des 3ème , 4ème et 5ème nombres de la suite en fonction de A et de B

Le 3ème nombre est $\dfrac{1+B}{A}$.

Le 4ème nombre est $\dfrac{1+\frac{1+B}{A}}{B} = \dfrac{A+1+B}{A}\times\dfrac{1}{B} = \dfrac{1+A+B}{AB}.$

Le 5ème nombre est $\dfrac{1+\frac{1+A+B}{AB}}{\frac{1+B}{A}} = \dfrac{AB+1+A+B}{AB}\times\dfrac{A}{1+B} = \dfrac{AB+1+A+B}{B(1+B)}.$

Mais $AB+1+A+B = (1+A)(1+B)$ donc $\dfrac{AB+1+A+B}{B(1+B)} = \dfrac{(1+A)(1+B)}{B(1+B)} = \dfrac{1+A}{B}.$

C'est le 5ème nombre de cette suite.

4) b) 6ème et 7ème nombre de la suite dans le cas général

Le 6ème nombre est : $\dfrac{1+\frac{1+A}{B}}{\frac{1+A+B}{AB}} = \dfrac{1+A+B}{B}\times\dfrac{AB}{1+A+B} = A.$

Le 7ème nombre est : $\dfrac{1+A}{\frac{1+A}{B}} = (1+A)\times\dfrac{B}{1+A} = B.$

EXERCICE 2 : géométrie plane (d'après un sujet de Lyon)

1) Les droites (EA) et (CF) sont parallèles

Méthode 1 : en démontrant que AFCE est un parallélogramme.

On sait que E est le milieu de [DC] et F est le milieu de [AB] donc EC = $\frac{\text{DC}}{2}$ et AF = $\frac{\text{AB}}{2}$.
Comme ABCD est un carré, on a AB = DC et donc $\frac{\text{DC}}{2} = \frac{\text{AB}}{2}$, soit EC = AF.
D'autre part, les côtés du carré étant parallèles, on en déduit que (AF) et (EC) sont parallèles.
Ainsi, les côtés [EC] et [AF] sont parallèles et de même longueur.
Le quadrilatère AFCE est donc un parallélogramme.
Comme AFCE est un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles.

On en déduit que les droites (AE) et (FC) sont parallèles.

Méthode 2 : en utilisant la symétrie centrale

On considère la symétrie de centre O.
O étant le point d'intersection des diagonales du carré ABCD, il est centre de symétrie de ce carré. L'image de [AB] est alors [CD].
Donc l'image de F, milieu de [AB] est E milieu de [CD] (conservation du milieu par symétrie).
On en déduit que l'image de la droite (AE) est la droite (FC).

Les droites (AE) et (FC) sont images l'une de l'autre dans la symétrie de centre O, elles sont donc parallèles.

Méthode 3 : en utilisant des angles alternes externes

Les triangles DEA et CBF sont isométriques, en effet ce sont des triangles rectangles en D et B avec AD = CB et ED = FB par construction.

Ainsi les angles $\widehat{\text{DEA}}$ et $\widehat{\text{CFB}}$ ont même mesure. Or les droites (DE) et (BF) sont parallèles **donc les droites (EA) et (FC) sont parallèles**.

Remarque :

La méthode 3 peut également être utilisée avec les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BCF}$.

2) La diagonale est partagée en trois segments de même longueur

Méthode 1 : utilisation de la propriété de la droite des milieux

Dans le triangle DCG, E est le milieu de [DC] et la droite (EH) est parallèle au côté [CG].
D'après la propriété de la droite des milieux, on en déduit que H est le milieu de [DG]. On a donc : DH = HG.
De même, dans le triangle ABH, F est le milieu de [AB] et la droite (GF) est parallèle au côté [AH]. On en déduit (droite des milieux) que G est le milieu de [BH] et donc : HG = GB.
Les points D, H, G, B étant alignés dans cet ordre, avec DH = HG et HG = GB.
On en déduit que : DH = HG = GB.

La diagonale [DB] est partagée en 3 segments de même longueur.

Méthode 2 : utilisation de triangles isométriques

DEH et BGF sont des triangles semblables, en effet leurs angles sont toujours alternes-internes ou alternes-externes. De plus DE = BF, donc les triangles DEH et BGF sont isométriques. Ainsi BG = HD.
D'autre part, la propriété de la droite des milieux (voir Méthode 1) appliquée au triangle BGH donne : DH = HG.
Les points D, H, G, B étant alignés dans cet ordre avec DH = HG = GB.

La diagonale [DB] est donc partagée en 3 segments de même longueur.

Méthode 3 : utilisation de la symétrie centrale

Dans la méthode 2 de la question 1, on a vu que l'image de B par la symétrie de centre O est D. L'image de [CF] est [AE], donc par conservation des intersections, l'image de G est H. Ainsi l'image de [BG] est [DH], donc BG = DH.
D'autre part, la propriété de la droite des milieux (voir Méthode 1) appliquée au triangle BGH donne DH = HG.
Les points D, H, G, B étant alignés dans cet ordre avec DH = HG = BG.

La diagonale [DB] est donc partagée en 3 segments de même longueur.

3) a) Aire du quadrilatère ECGH

Méthode 1 : à l'aide de la symétrie centrale

Par la symétrie de centre O, l'image de E milieu de [CD] est F milieu de [AB] (conservation du milieu par symétrie, cf. méthode 2 question 1), l'image de C est A ([AC] est une diagonale du carré) et l'image de G est H et réciproquement l'image de H est G (car le symétrique de H par rapport à O est situé à la fois sur la droite (BD) puisqu'elle contient le point O et sur la droite (FC) car les droites (AE) et (CF) sont symétriques par rapport à O).
On en déduit que l'image du quadrilatère ECGH est FAHG. Par la propriété de conservation des aires par symétrie on a peut en déduire que ces quadrilatères ont la même aire.
Or la somme des aires de ces deux quadrilatères vaut l'aire de AFCE, donc :

l'aire du quadrilatère ECGH est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme AFCE.

Méthode 2 : à l'aide des triangles isométriques

La méthode 2 de la question 2 montre que les triangles DEH et BGF sont isométriques. Ainsi EH = GF.
De même, les triangles DCG et BHA sont isométriques donc CG = HA.
ECGH et AFGH sont des trapèzes dont les petites bases, les grandes bases et les hauteurs sont les mêmes (la hauteur de chacun d'eux est la distance entre les droites (EA) et (CF) qui sont parallèles). Le calcul de l'aire d'un trapèze ne dépend que des mesures des bases et de la hauteur.
Ainsi, ECGH et AFGH ont même aire.
Or la somme des aires de ces deux quadrilatères vaut l'aire de AFCE, donc :

l'aire du quadrilatère ECGH est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme AFCE.

Méthode 3 : à l'aide des trapèzes isométriques

La méthode 2 ci-dessus prouve que les trapèzes ECGH et AFGH ont des petites bases et des grandes bases de même mesure (EH = GF et AH = CG).
Or par construction AF = EC et le dernier côté HG est commun aux deux trapèzes.
Ainsi, ECGH et AFGH sont isométriques, ils ont donc même aire.
Or la somme des aires de ces deux quadrilatères vaut l'aire de AFCE, donc :

l'aire du quadrilatère ECGH est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme AFCE.

3) b) Aire du quadrilatère grisé ECGH

Méthode 1 : utilisation de la formule de l'aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme est donnée par la formule :

Longueur de la base × Longueur de la hauteur.

Dans le parallélogramme AFCE la hauteur relative à la base [AF] est le segment [CB] car dans le carré ABCD la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CB).
On sait que AF = 2,5 cm et que CB = 5 cm.
Donc l'aire du parallélogramme AFCE est 2,5 cm × 5 cm = 12,5 cm^2.
Le quadrilatère AFCE est composé des deux quadrilatères AFGH et ECGH, qui ont la même aire d'après la question précédente.
L'aire du quadrilatère ECGH est donc égale à la moitié de celle du quadrilatère AFCE,
soit $\dfrac{12{,}5 \text{ cm}^2}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$.

Ainsi, l'aire du quadrilatère ECGH est 6,25 cm².

Méthode 2 : utilisation d'une décomposition de la figure

ADE est un triangle rectangle, son aire est donc :

$$\frac{\text{AD} \times \text{DE}}{2} = \frac{5 \text{ cm} \times 2{,}5 \text{ cm}}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

Il en est de même pour l'aire du triangle BCF.

Ainsi, l'aire du parallélogramme AECF est l'aire du carré ABCD moins la somme des aires des triangles ADE et BCF, c'est-à-dire : $(5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}) - 2 \times 6{,}25 \text{ cm}^2 = 12{,}5 \text{ cm}^2$.

Le quadrilatère AFCE est composé des deux quadrilatères AFGH et ECGH, qui ont la même aire d'après la question précédente.

L'aire du quadrilatère ECGH est donc égale à la moitié de celle du quadrilatère AFCE,

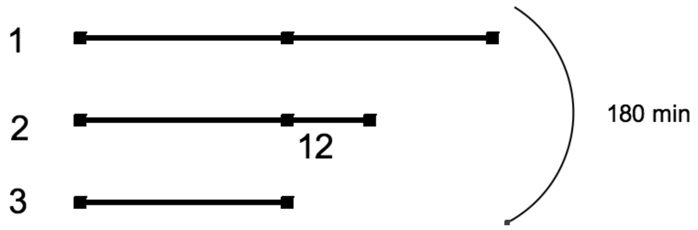
soit $\dfrac{12{,}5 \text{ cm}^2}{2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$.

Ainsi, la mesure de l'aire du quadrilatère ECGH est 6,25 cm².

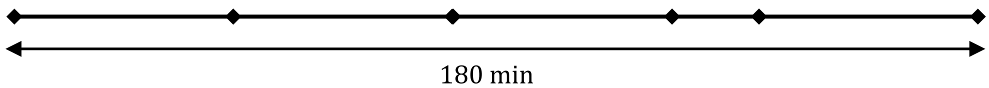
EXERCICE 3 : mise en équation (d'après un sujet de Besançon)

1) Durée de chaque émission en utilisant un schéma

On peut schématiser la situation de la manière suivante en commençant par exemple par représenter la durée de la troisième émission par un segment de longueur arbitraire.



Ce qui, mis bout à bout, donne :



On calcule alors la durée représentée par les quatre segments de même longueur :
180 min – 12 min = 168 min.

On trouve ensuite la durée de la troisième émission (représentée par un des quatre segments de même longueur) : 168 min : 4 = 42 min.

Enfin, on calcule la durée de la première : 2 × 42 min = 84 min.

Puis de la deuxième : 42 min + 12 min = 54 min.

2) Solution algébrique

Appelons d la mesure de durée (avec la min comme unité de durée) de la troisième émission.

La deuxième émission dure $(d + 12)$ min et la première émission dure $2d$ min.

Ainsi l'énoncé se traduit par $2d + (d + 12) + d = 180$ donc $4d + 12 = 180$ ce qui donne $d = 168 : 4 = 42$.

La première émission dure 84 min, la deuxième 54 min, la troisième 42 min.

EXERCICE 4 : mise en équation et tableur (d'après un sujet de Besançon)

1) Prix d'une rose et d'une fougère

Soit r le prix d'une rose et f le prix d'une fougère (en euros) :

$$\begin{cases} 4r + 8f = 12 \\ 6r + 10f = 17. \end{cases}$$

Résolution par substitution :

L'équation $4r + 8f = 12$ donne $4r = 12 - 8f$ puis $r = 3 - 2f$.
On remplace alors r dans la seconde équation $6r + 10f = 17$ donne $6(3 - 2f) + 10f = 17$.
Ceci implique $18 - 12f + 10f = 17$ ou encore $-2f + 18 = 17$ puis $f = \frac{1}{2}$.
Enfin $r = 3 - 2f$ implique $r = 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 2$.

On peut conclure qu'**une rose coûte 2 € et une fougère coûte 0,50 €**.

Remarque :

La résolution par substitution qui consiste à exprimer f en fonction de r est nettement moins pertinente que celle qui consiste à exprimer r en fonction de f car elle fait intervenir des calculs fractionnaires, en effet la première équation implique $f = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}r$.

Résolution par combinaison puis substitution :

La première équation $4r + 8f = 12$ peut se simplifier en divisant chaque membre par 2 pour donner $2r + 4f = 6$. Il suffit ensuite de multiplier chaque membre de cette équation par 3 pour trouver $6r + 12f = 18$.
Le système peut donc s'écrire :
$\begin{cases} 6r + 12f = 18 \\ 6r + 10f = 17 \end{cases}$, il suffit alors de soustraire la seconde équation à la première, membre à membre pour trouver : $(6r + 12f) - (6r + 10f) = 18 - 17$ puis $2f = 1$.
Ainsi $f = \frac{1}{2}$.
On remplace alors cette valeur dans une des deux équations pour trouver $r = 2$.

On peut conclure qu'**une rose coûte 2 € et une fougère coûte 0,50 €**.

Remarque :

Une méthode par combinaison complète serait plus longue car elle demanderait de transformer le système en multipliant la première ligne par 5 et la deuxième par 2 pour ensuite soustraire la première équation à la deuxième : $\begin{cases} 2r + 4f = 6 \\ 6r + 10f = 17 \end{cases}$ *ce qui équivaut à* $\begin{cases} 10r + 20f = 30 \\ 12r + 20f = 34 \end{cases}$
d'où $(12r - 10r) = 34 - 30$ *ce qui donne* $2r = 4$ *soit encore* $r = 2$.

2) Commandes pour lesquelles la formule 1 devient plus avantageuse

Résolution algébrique :

Notons n le nombre de roses commandées.
En choisissant la formule 1 le tarif à payer (en €) sera de $50 + 1{,}2 \times n$.
En choisissant la formule 2 le tarif à payer (en €) sera de $1{,}28 \times n$.
La formule 1 devient plus avantageuse que la formule 2 lorsque $50 + 1{,}2 \times n \leq 1{,}28 \times n$.
L'équation $50 + 1{,}2 \times n \leq 1{,}28 \times n$ implique $50 \leq 0{,}08 \times n$ ou encore $625 \leq n$.

La formule 1 est plus avantageuse à partir de 626 roses commandées (en comprenant « plus avantageux » comme « strictement plus avantageux »).

Résolution arithmétique :

On peut répondre à cette question par essais-erreurs.

Nombre de roses commandées	Tarif avec la formule 1 (en €)	Tarif avec la formule 2 (en €)	Commentaire
10	$50 + 12 = 62$	12,8	Formule 2 plus avantageuse
100	$50 + 120 = 170$	128	Formule 2 plus avantageuse
400	$50 + 480 = 530$	512	Formule 2 plus avantageuse
700	$50 + 840 = 890$	896	Formule 1 plus avantageuse
600	$50 + 720 = 770$	768	Formule 1 plus avantageuse
625	$50 + 750 = 800$	800	Les deux formules se valent

La formule 1 est plus avantageuse à partir de 626 roses commandées (en comprenant « plus avantageux » comme « strictement plus avantageux »).

3) a) Cellule B2

Dans la cellule B2 il convient d'inscrire :
= 0,4*A2

3) b) Cellule B12

Dans la cellule B12 il convient d'inscrire :
= (0,40−0,10*0,40)*(A12−10)+4
ou
= 0,36*(A12−10)+B$11

3) c) i) Prix de 30 fougères en utilisant la feuille de calcul

Il suffit de partir de la ligne donnant le prix de 29 fougères et d'ajouter le prix d'une fougère dans cette tranche, c'est-à-dire 0,3 € : 10,3 € + 0,3 € = 10,6 €.

Le prix de 30 fougères est 10,6 €.

3) c) ii) Prix de 30 fougères sans utiliser la feuille de calcul

Il convient de faire le calcul suivant 10 × 0,40 € + 10 × 0,36 € + 10 × 0,30 € = 10,60 €.
En effet les dix premières ont un prix unitaire de 0,40 €, les dix suivantes avec réduction coûtent chacune 0,36 € (réduction de 10% du prix unitaire), les dix suivantes coûtent 0,30 € chacune.

Le prix de 30 fougères est donc 10,6 €.

EXERCICE 5 : arithmétique (d'après un sujet de Dijon)

1) Les diviseurs de 72

La décomposition de 72 en produit de facteurs premiers est : $2^3 \times 3^2$. Le rappel nous indique que 72 possède donc exactement $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ diviseurs.

Méthode 1 :

En faisant varier toutes les possibilités d'exposants de 0 à 3 pour l'entier 2 et de 0 à 2 pour l'entier 3. On obtient la liste de diviseurs suivante :

$$2^0 \times 3^0;\ 2^1 \times 3^0; \dots;\ 2^3 \times 3^1;\ 2^3 \times 3^2$$

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72

Méthode 2 :

On peut lister les couples de diviseurs dont le produit est 72 en testant les valeurs entières successives du premier facteur (on s'arrête quand le premier facteur devient plus grand que le deuxième facteur) :

$1 \times 72 = 72$; $2 \times 36 = 72$; $3 \times 24 = 72$; $4 \times 18 = 72$; $6 \times 12 = 72$; $8 \times 9 = 72$.

On obtient la liste de diviseurs suivante :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72

2) PGCD de 5390 et 5880

Méthode 1 : décomposition en facteurs premiers

On décompose les deux entiers en produit de facteurs premiers.

$$5390 = 2^1 \times 5^1 \times 7^2 \times 11^1$$
$$5880 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^2$$

Le PGCD de 5390 et 5880 est $\mathbf{2^1 \times 5^1 \times 7^2 = 490}$.

Méthode 2 : algorithme d'Euclide par divisions successives

Cette méthode s'appuie sur la propriété suivante « *si a et b sont deux nombres entiers (a > b) tel que la division euclidienne de a par b donne un quotient q et un reste r, alors le PGCD de a et de b est égal au PGCD de b et de r* ».
L'algorithme consiste à effectuer des divisions successives jusqu'à avoir un reste nul : le PGCD est le dernier reste non nul.
Ici les divisions euclidiennes donnent : $5880 = 1 \times 5390 + 490$ et $5390 = 12 \times 490 + 0$.

5880	5390		5380	490
490	1		0	12
Dernier reste non nul			Reste nul	

Le PGCD de 5880 et 5390 est 490.

Méthode 3 : variante de l'algorithme d'Euclide (soustractions successives)

Cette méthode s'appuie alors sur la propriété suivante : « *si a et b sont deux nombres entiers (a > b) tel que leur différence est égale à d alors le PGCD de a et de b est égal au PGCD de b et de d* ».
L'algorithme consiste à effectuer des soustractions successives jusqu'à avoir une différence nulle : le PGCD est le dernier résultat non nul.
Ici : $5880 - 5390 = 490$, puis on est amené à soustraire à 5390 douze fois 490 jusqu'à obtenir 0.

Le PGCD de 5880 et de 5390 est donc 490.

3) Plus grand diviseur commun à 5390 et 5880, s'écrivant avec deux chiffres

Méthode 1 : décomposition en facteurs premiers

Les diviseurs communs de 5880 et de 5390 sont les diviseurs de leur PGCD : $2^1 \times 5^1 \times 7^2 = 490$. La décomposition de des diviseurs communs de 5880 et de 5390 en produits de facteurs premiers comporte au plus un 2, au plus un 5, au plus deux 7 et pas d'autres facteurs premiers.
Les diviseurs de 490 sont 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 35 ; 49 ; 70 ; 98 ; 245 et 490.

Le plus grand diviseur commun à 5390 et 5880 qui s'écrit avec deux chiffres est 98.

Méthode 2 : par essai-erreur

99 est le plus grand nombre à deux chiffres mais ne divise ni 5880, ni 5390.
Par contre 98 divise 490 donc divise 5880 et 5390 (car 490 = 98 × 5).

Donc **98 est le nombre recherché**.

4) Plus petit entier admettant exactement 10 diviseurs

On utilise ici la propriété rappelé au début de l'exercice :
« si un nombre entier a une décomposition en produit de facteurs premiers de la forme $a^m \times b^n \times c^p$, alors il possède exactement $(m + 1) \times (n + 1) \times (p + 1)$ diviseurs. »

Le nombre 10 se décompose uniquement en 10×1 ou 5×2, ainsi les nombres entiers comportant exactement 10 diviseurs sont du type : a^9, ou $a^4 \times b^1$ avec a et b deux entiers naturels supérieurs à 2.

Pour le premier cas, la valeur la plus petite possible est obtenue pour a = 2, c'est à dire $2^9 = 512$.
Pour le second cas, la valeur la plus petite possible est obtenue quand a et b sont respectivement égaux à 2 et 3, soit $2^4 \times 3^1 = 48$.

Le plus petit entier comportant exactement 10 diviseurs est 48.

EXERCICE 6 : arithmétique (d'après un sujet de Lyon)

1) Première disposition : en rectangle

1) a) Par rangées de 3

Méthode 1 : arithmétique

Quand les Math-jorettes se placent en rangées de 6, il en reste 3.
Or une rangée de 6 peut se partager en deux rangées de 3.
Ainsi toutes les rangées de 6 se transformeront en deux rangées de 3 auxquelles on ajoute les 3 Math-jorettes non placées qui formeront alors une nouvelle rangée de 3.

Il n'en restera donc pas si elles se placent par rangées de 3.

Méthode 2 : algèbre

Le nombre de Math-jorettes peut s'écrire $6k + 3$ avec k entier naturel.
(« k » est le nombre de rangées de 6.)
Le nombre $6k + 3$ peut aussi s'écrire $3 \times 2\,k + 3 \times 1$, c'est-à-dire $3 \times (2k + 1)$.
Le nombre de Math-jorettes est donc un multiple de 3.

Il n'en restera donc pas si elles se placent par rangées de 3.

1) b) Par rangées de 2

Méthode 1 : arithmétique

Quand les Math-jorettes se placent en rangées de 6, il en reste 3.
Or une rangée de 6 peut se partager en trois rangées de 2.
Ainsi toutes les rangées de 6 se transformeront en trois rangées de 2. Les 3 Math-jorettes non placées pourront se placer en une nouvelle rangée de 2 mais il restera une non placée.

Il restera une Math-jorette isolée si elles se placent par rangées de 2.

Méthode 2 : algèbre

Le nombre de Math-jorettes peut s'écrire $6k + 3$ avec k entier naturel.
(« k » est le nombre de rangées de 6.)
Le nombre $6k + 3$ peut aussi s'écrire $2 \times 3k + 2 + 1$ ou encore $2 \times (3k + 1) + 1$ qui est un nombre impair.
On en déduit qu'il y a un nombre impair de Math-jorettes.

Donc **il restera une Math-jorette isolée si elles se placent par rangées de 2.**

1) c) Nombre de Math-jorettes sachant qu'il y en a en tout moins de 100

Méthode 1 : arithmétique

Les multiples de 6 inférieurs à 100 sont :
0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.
Les multiples de 6 inférieurs à 100 auxquels on ajoute 3 sont :
3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99.
Parmi cette dernière liste, ceux qui sont aussi multiples de 5 sont : 15, 45, 75.

Le nombre de Math-jorettes peut être 15, 45 ou 75.

Méthode 2 : algèbre

Le nombre de Math-jorettes peut s'écrire $6k + 3$ avec k entier naturel (le nombre de rangées de 6), mais aussi sous la forme $5p$, avec p entier naturel (le nombre de rangées de 5).
C'est-à-dire que le nombre de Math-jorettes est multiple de 5.
Les multiples de 5 inférieur à 100 qui peuvent s'écrire sous la forme 6k+3 sont :

$$\mathbf{15} = 6 \times 2 + 3 \quad \mathbf{45} = 6 \times 2 + 3 \quad \mathbf{75} = 6 \times 12 + 3.$$

Le nombre de Math-jorettes peut être 15, 45 ou 75.

2) Deuxième disposition : en carré

Méthode 1 : arithmétique

D'après la question précédente on sait que le nombre de Math-jorettes ne peut-être que 15, 45 ou 75.
La phrase *« Elles forment un premier carré, mais il reste 11 Math-jorettes non placées »* signifie que :
si l'on retire 11 Math-jorettes aux possibilités ci-dessus (15, 45 ou 75), le nombre restant devra être le carré d'un nombre entier.
De même la phrase *« Elles essayent d'en former un second en mettant une Math-jorette de plus par rangée, mais cette fois-ci il manque 6 Math-jorettes pour le compléter »* signifie que :
si on ajoute 6 Math-jorettes aux possibilités ci-dessus (15, 45 ou 75) le nombre restant devra aussi être le carré d'un nombre entier.

S'il y a 15 Math-jorettes :
$15 - 11 = 4$ et 4 est le carré de 2.
$15 + 6 = 21$ mais 21 n'est pas le carré d'un entier.
Donc la possibilité 15 Math-jorettes ne convient pas.

S'il y a 45 Math-jorettes :
$45 - 11 = 34$ or 34 n'est pas le carré d'un entier.
Donc la possibilité 45 Math-jorettes ne convient pas.

S'il y a 75 Math-jorettes :
$75 - 11 = 64$ et 64 est le carré de 8.
$75 + 6 = 81$ et 81 est le carré de 9.

Donc la seule solution possible est 75 Math-jorettes.

Méthode 2 : algèbre

Soit *x* le nombre de rangées de Math-jorettes sur le côté du premier carré.
La phrase *« Elles forment un premier carré, mais il reste 11 Math-jorettes non placées »* peut se traduire par : le nombre de Math-jorettes est $x^2 + 11$.

La phrase *« Elles essayent d'en former un second en mettant une Math-jorette de plus par rangée, mais cette fois-ci il manque 6 Math-jorettes pour le compléter »* peut se traduire par : le nombre de Math-jorettes est $(x + 1)^2 - 6$.

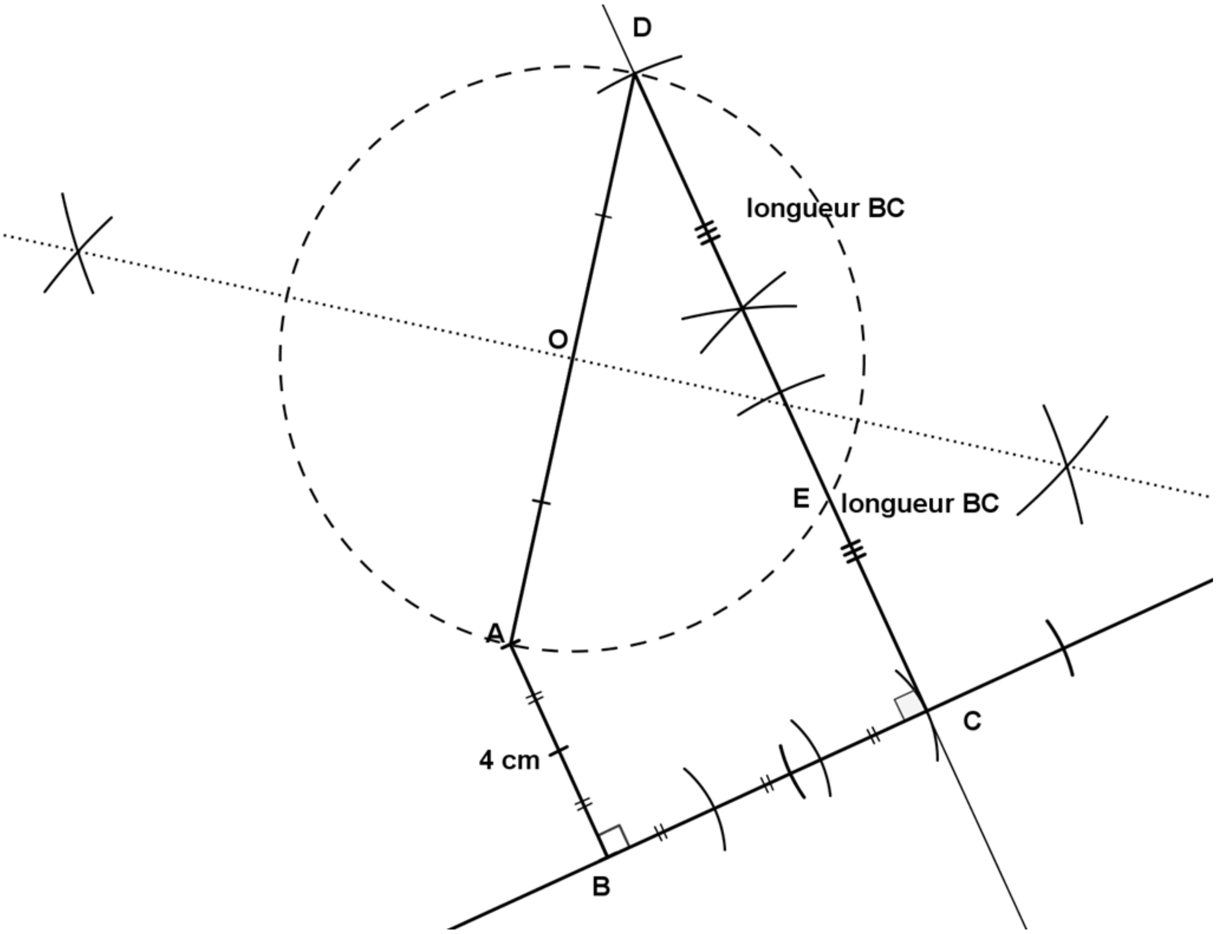
Les deux expressions $x^2 + 11$ et $(x + 1)^2 - 6$, représentant le nombre de Math-jorettes, sont égales, on a donc :
$x^2 + 11 = (x + 1)^2 - 6$,
soit en développant $x^2 + 11 = x^2 + 2x + 1 - 6$,
puis en réduisant $^2 + 11 = x^2 + 2x - 5$,
et en regroupant $11 + 5 = x^2 - x^2 + 2\text{x}$,
soit encore $16 = 2x$, c'est à dire $x = 8$.

Il y a donc 8 rangées de 8 Math-jorettes plus les 11 restantes soit en tout 75 Math-jorettes.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE, AIRES, PÉRIMÈTRES, FONCTIONS d'après un sujet de Dijon

A. Autour du trapèze

1. Construction de la figure à la règle non graduée et au compas



En remarquant que 6 cm = 3 × 2 cm ou encore que 6 cm = 4 cm + 2 cm, pour placer C tel que [BC] soit de longueur 6 cm, on reporte au compas des longueurs déjà données : 4 cm, longueur du segment [AB], et 2 cm en utilisant le milieu du segment [AB].

Pour construire D, il faut d'abord construire la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par C. Il s'agit ensuite de placer D tel que la longueur du segment [CD] soit de 12 cm.
En remarquant au choix que 12 cm = 2 × 6 cm ou que 12 cm = 3 × 4 cm ou encore que 12 cm = 6 × 2 cm, ou tout autre décomposition, on obtient D en reportant ici aussi au compas des longueurs déjà données ou construites.

Le point O s'obtient en traçant la médiatrice du segment [AD]. Il ne reste qu'à tracer le cercle de centre O passant par D pour obtenir le point E à l'intersection avec la droite (CD).

Remarque :

Pour construire la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par C, on pouvait, au choix :

- *compléter le parallélogramme ABCF au compas, qui s'avère être un rectangle comme parallélogramme avec un angle droit ; si la construction choisie amène à tracer ce rectangle ABCF,*

pour la suite du problème, il faudra bien distinguer le point F tel que défini dans cette construction du point E car si E et F sont bien confondus, cela n'est pas encore démontré ;
- *placer (au compas) deux points I et J sur la droite (BC) tels que C soit le milieu du segment [IJ] et ensuite tracer la médiatrice du segment [IJ].*

2. Trois affirmations vraies : justifications

a) Affirmation 1 : le quadrilatère ABCE est un rectangle

Le trapèze ABCD est rectangle en B et en C et le point E appartient à la droite (CD) donc le quadrilatère ABCE possède lui aussi deux angles droits en B et C. Par ailleurs, O est le milieu du segment [AD], le cercle de centre O passant par D peut aussi bien être caractérisé comme étant le cercle de diamètre [AD].

On sait que le point E appartient au cercle de diamètre [AD]. En conséquence le triangle ADE est rectangle en E et les droites (AE) et (ED) sont perpendiculaires. Ainsi le quadrilatère ABCE possède un troisième angle droit en E.

Tout quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle, on peut en conclure que **le quadrilatère ABCE est un rectangle.**

b) Affirmation 2 : le périmètre du trapèze ABCD est exactement 32 cm

On connait les longueurs de trois des côtés AB = 4 cm, BC = 6 cm et CD = 12 cm. Il nous reste à déterminer la longueur du segment [AD].

Pour la calculer, utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle AED rectangle en E. ABCE est un rectangle donc ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux, ainsi AE = BC = 6 cm et EC = AB = 4 cm. On en déduit DE = DC – EC = 12 cm – 4 cm = 8 cm (E est sur le segment [CD]).
La relation de Pythagore donne, appliquée aux mesures en cm : $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, d'où AD = 10 cm.

Le périmètre du trapèze ABCD mesure donc 4 cm + 6 cm + 12 cm + 10 cm, soit **32 cm**.

c) Affirmation 3 : l'aire du triangle ADE est égale à plus de 30% de celle du disque de centre O et passant par D

L'aire du triangle ADE rectangle en E est la moitié de celle du rectangle de longueur AE et de largeur ED.
On a donc : $\text{Aire(AED)} = \frac{\text{AE} \times \text{ED}}{2} = \frac{6\text{ cm} \times 8\text{ cm}}{2} = 24\text{ cm}^2$.
Le disque de centre O et passant par D a pour rayon : $\text{OD} = \frac{1}{2}\text{AD} = \frac{1}{2} \times 10\text{ cm} = 5\text{ cm}$.

L'aire de ce disque est donc : $\text{Aire (disque)} = \pi \times (\text{OD})^2 = \pi \times (5\text{ cm})^2 \approx 78{,}54\text{ cm}^2$.

Trente pour cent de l'aire de ce disque correspond donc à une aire de :

$$\frac{30}{100} \times 78{,}54\text{ cm}^2 = 0{,}3 \times 78{,}54\text{ cm}^2 = 23{,}562\text{ cm}^2.$$

Ainsi l'aire du triangle ADE est égale à plus de 30% de celle du disque de centre O et passant par D.

Remarque :

On peut aussi calculer le rapport des deux aires $\frac{24\,cm^2}{78{,}54\;cm^2} \approx 0{,}3056$ *soit un pourcentage supérieur à 30%.*

B. Un rectangle dans le trapèze

1. MNPC est un rectangle

Méthode 1 : MNPC parallélogramme avec un angle droit

<u>Première étape :</u> montrons que MNPC est un parallélogramme (voir schéma page suivante).

Par construction (MN) est parallèle à (CD), donc à (CP). De même par construction, (NP) est parallèle à (BC), donc à (MC). Ainsi dans le quadrilatère MNPC, les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
Le quadrilatère MNPC est donc un parallélogramme.

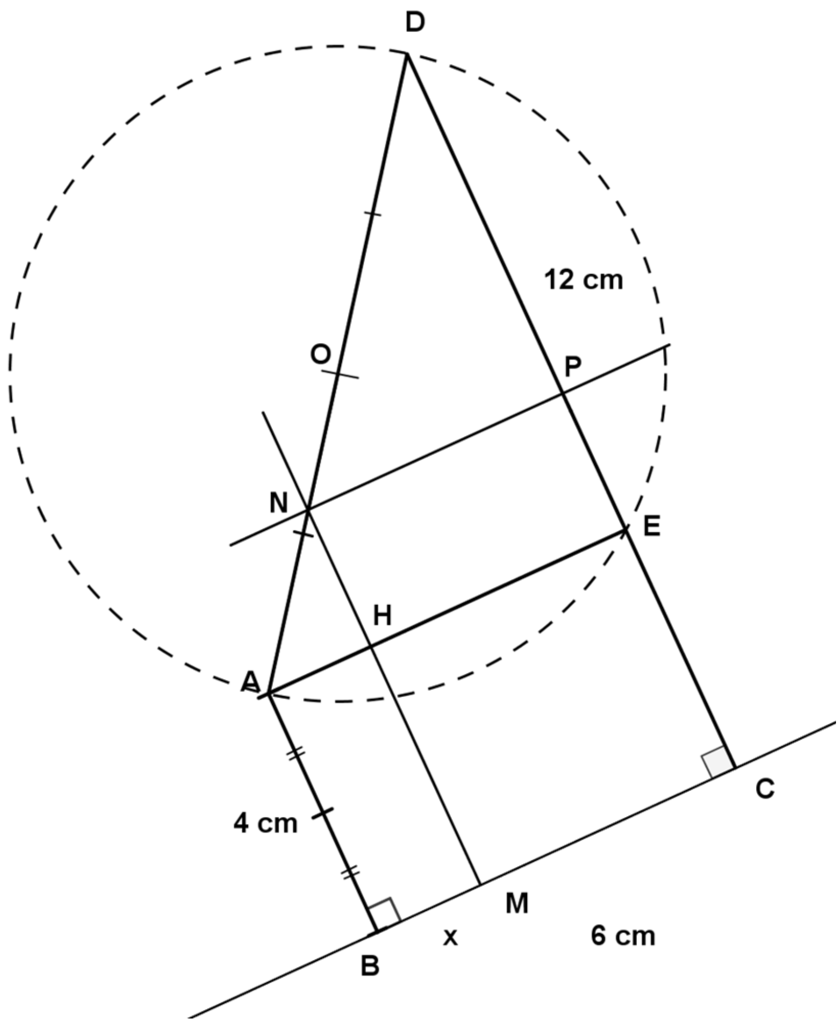
<u>Deuxième étape :</u> montrons que le parallélogramme MNPC est un rectangle.
Le trapèze ABCD est rectangle en C donc le parallélogramme MNPC possède un angle droit en C. Or tout parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle.

On peut donc en conclure que le quadrilatère **MNPC est un rectangle**.

Méthode 2 : MNPC quadrilatère avec trois angles droits

Le trapèze ABCD est rectangle en C donc le parallélogramme MNPC possède un angle droit en C.
(MN) est parallèle à (CD), or (CD) est perpendiculaire à (MC). Ainsi MNPC possède un angle droit en M.
(NP) est parallèle à (BC), or (BC) est perpendiculaire à (DC). Ainsi MNPC possède un angle droit en P.

Le quadrilatère **MNPC possède trois angles droits, il s'agit donc d'un rectangle**.



2.
Dans cette question, l'unité de longueur est le cm et les égalités concernent des mesures de longueurs.

a) $\mathbf{MN = 4 + \frac{4}{3}x}$

Le point H appartient au segment [MN], on a donc $\text{MN} = \text{MH} + \text{HN}$.

ABMH est un rectangle donc ses côtés opposés [BA] et [MH] ont mêmes longueurs,

d'où $\text{MH} = \text{BA} = 4$ et $\text{AH} = \text{BM} = x$.

Il reste à évaluer la longueur HN. Pour cela, utilisons le théorème de Thalès.
Les droites (DN) et (EH) sont sécantes en A. Comme les droites (NH) et (DE) sont parallèles par construction, le théorème de Thalès permet d'affirmer que l'on a :

$$\frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AE}}.$$

On a déjà vu que $\mathrm{AE} = 6$, $\mathrm{DE} = 8$ et $A\mathrm{H} = \mathrm{BM} = x$, d'où l'égalité $\frac{\mathrm{NH}}{8} = \frac{x}{6}$,

dont on déduit l'égalité $\mathrm{NH} = \frac{8x}{6}$, puis $\mathrm{NH} = \frac{4}{3}x$.

Finalement, on obtient bien le résultat cherché : **MN = MH + HN** $\boldsymbol{= 4 + \frac{4}{3}x}$.

b) $\mathbf{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{20} + \boldsymbol{\frac{2}{3}x}$

La longueur du rectangle MNPC a pour mesure $\mathrm{MN} = 4 + \frac{4}{3}x$.
Sa largeur a pour mesure $\mathrm{MC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BM} = 6 - x$.

La mesure de son périmètre est donc :
$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = 2(\mathrm{MN} + \mathrm{MC}) = 2\left(4 + \frac{4}{3}x + 6 - x\right) = 2\left(10 + \frac{1}{3}x\right) = \mathbf{20} + \boldsymbol{\frac{2}{3}x}.$

3. a) Recherche de la valeur de *x* pour laquelle MNPC est un carré

Un rectangle est un carré lorsque deux de ses côtés consécutifs sont égaux.

Le rectangle MNPC sera donc un carré lorsque $\mathrm{MN} = \mathrm{MC}$, c'est-à-dire lorsque : $4 + \frac{4}{3}x = 6 - x$.

Cette équation donne $\frac{4}{3}x + x = 6 - 4$, d'où $\frac{7}{3}x = 2$ qui donne $x = 2 \times \frac{3}{7}$ et finalement $\boldsymbol{x = \frac{6}{7}}$.

3. b) Mesures du périmètre et de l'aire

Dans le cas MNPC est un carré, la mesure (en cm) de la longueur de son côté est :

$$\mathrm{MC} = 6 - x = 6 - \frac{6}{7} = \frac{42}{7} - \frac{6}{7} = \frac{36}{7}.$$

La mesure du périmètre de MNPC est égale à $4 \times \frac{36}{7}$.

La valeur exacte du périmètre du carré est donc $\frac{144}{7}$ cm, dont une valeur approchée au millimètre près est 20,6 cm, ou encore 206 mm.

La mesure de son aire, exprimée en cm^2, est égale à $\left(\frac{36}{7}\right)^2$.

La valeur exacte de l'aire du carré est $\frac{1296}{49}$ cm^2, dont une valeur approchée au mm^2 est 26,45 cm^2 ou encore 2645 mm^2.

4. Égalité des aires des rectangles ABMH et MNPC lorsque $\mathbf{x = 3\sqrt{2}}$.

Lorsque $x = 3\sqrt{2}$, l'aire du rectangle ABMH est égale à :

$$\mathrm{Aire(ABMH)} = \mathrm{AB} \times \mathrm{BM} = 4\ \mathrm{cm} \times 3\sqrt{2}\ \mathrm{cm} = 12\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2.$$

L'aire du rectangle MNPC est égale à :

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire(MNPC)} = \mathrm{MN} \times \mathrm{PC} &= (4 + \tfrac{4}{3}x) \times (6 - x)\ \mathrm{cm}^2\\ &= (4 + \tfrac{4}{3} \times 3\sqrt{2}) \times \left(6 - 3\sqrt{2}\right)\ \mathrm{cm}^2\\ &= (4 + 4\sqrt{2}) \times (6 - 3\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^2\\ &= 24 - 12\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 12(\sqrt{2})^2\ \mathrm{cm}^2\\ &= 24 + 12\sqrt{2} - 12 \times 2\ \mathrm{cm}^2\\ &= 24 + 12\sqrt{2} - 24\ \mathrm{cm}^2\\ &= 12\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2.\end{aligned}$$

Les aires de MNPC et ABMH sont bien égales.

C. Variations du périmètre et de l'aire

1. Étude des variations à l'aide d'un tableur.

a) Formules pour le périmètre

Seule la formule iii) « = 2*A3/3 + 20 » convient.

Les formules i) et iii) visent à traduire l'expression de $p(x)$ (colonne D) en fonction de x (colonne A). Cette expression est $p(x) = 20 + \frac{2}{3}x$ (cf. partie B, question 2. b)).

Cette expression peut aussi s'écrire $p(x) = \frac{2}{3}x + 20$.

La formule iii) convient bien : D3 est bien le résultat du calcul de 2*A3/3 + 20.

Par contre la formule i) ne convient pas. En effet 0,66 n'est qu'une valeur approchée de $\frac{2}{3}$.
L'utilisation de cette formule conduirait à des valeurs approximatives du périmètre mais pas aux valeurs attendues, valeurs exactes ou valeurs arrondies au centième près.
Ainsi par exemple dans la cellule D33, le résultat obtenu avec la formule i) serait :
$20 + 0{,}66 \times \text{A13} = 20 + 0{,}66 \times 6 = 20 + 3{,}96$, soit une valeur de 23,96 au lieu de 24,00.

La formule ii) vise à traduire une expression du périmètre $p(x)$ du rectangle (colonne D) en fonction de sa longueur et de sa largeur (colonnes B et C).
La formule correcte serait « = (B3 + C3)*2 ».
L'absence de parenthèses fait que dans la formule ii) seule la longueur MC est comptée deux fois. Ainsi par exemple dans la cellule D3 le résultat obtenu serait :
$\text{B3} + \text{C3} * 2 = 4 + 6 \times 2 = 4 + 12 = 16,$ au lieu de $(4 + 6) \times 2$ qui donne la valeur 20.

b) Formules de l'aire

Les deux formules i) «= 24 + 4*A3 - 4/3*A3^2 » et ii) « = $B3*$C3 » conviennent.

La formule i) vise à traduire une expression de l'aire A(x) (colonne E) uniquement en fonction de x (colonne A). Cherchons donc une telle expression :

$$\begin{aligned} A(x) = \text{MN} \times \text{MC} &= (4 + \frac{4}{3}x) \times (6 - x) \\ &= 24 - 4x + \frac{24}{3}x - \frac{4}{3}x^2 \\ &= 24 - 4x + 8x - \frac{4}{3}x^2 \\ &= 24 + 4x - \frac{4}{3}x^2 \end{aligned}$$

Cette expression se traduit bien par la formule i).

La formule ii) vise à traduire une expression de l'aire A(x) du rectangle (colonne E) en fonction de sa longueur et de sa largeur (colonnes B et C).
La formule la plus simple serait : « = B3*C3 », mais la présence des $ dans la formule ii) ne change rien ici. Quand on copie vers le bas, on ne fait varier que l'indice de ligne. Or, tels qu'ils sont placés, les $ ne « bloquent » ici que les indices de colonnes (B et C) mais pas cet indice de ligne.

Remarque :

*C'est la formule « = B$3*C$3 » qui poserait problème, car dans ce cas, en copiant vers le bas les résultats obtenus dans les cellules E4 à E33 resteraient tous égaux à B3*C3, c'est-à-dire à 24,00, comme en E3.*

c) Encadrement de la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle MNPC est maximale

L'aire du rectangle MNPC est croissante lorsque x varie de 0 cm à 1,4 cm. Elle est décroissante lorsque x varie de 1,6 cm à 6 cm.

Le tableau suggère donc que **la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle MNPC est maximale est comprise entre 1,4 cm et 1,6 cm.**

2. Étude des variations à l'aide de représentations graphiques

a) Lecture graphique d'une valeur approchée

L'expression de la fonction $p(x) = 20 + \frac{2}{3}x$, qui exprime le périmètre du rectangle MNPC en fonction de *x*, est celle d'une fonction affine (c'est-à-dire du type $f(x) = ax + b$).
La représentation graphique de cette fonction est donc le segment de droite (un segment uniquement car *x* est compris entre 0 et 6) dont les extrémités sont les points de coordonnées (0 ; 20) et (6 ; 24).
L'autre représentation graphique correspond donc à l'aire, la fonction $A(x) = 24 + 4x - \frac{4}{3}x^2$ étant une fonction du second degré, il s'agit d'un arc de parabole.

Par lecture graphique, l'aire est maximale (et vaut 27 cm²) lorsque $x = 6$ cm.
Dans ce cas la valeur approchée lue graphiquement pour **le périmètre est de 21 cm**.

b) Deux affirmations à justifier

Affirmation 1 :
« Par lecture graphique, on peut affirmer que le périmètre du rectangle MNPC est maximal lorsque son aire est nulle. »

VRAI :
Par lecture graphique, le périmètre du rectangle est maximal lorsque $x = 6$.
Or lorsque $x = 6$, l'arc de parabole qui représente la fonction $x \longmapsto A(x)$ intercepte l'axe des abscisses.

Ainsi **lorsque son périmètre est maximal**, c'est-à-dire lorsque $x = 6$, **l'aire du rectangle MNPC est nulle.**

Affirmation 2 :
« Par lecture graphique, on peut affirmer que lorsque l'aire du rectangle MNPC est inférieure à 25 cm², alors son périmètre est supérieur à 21,5 cm. »

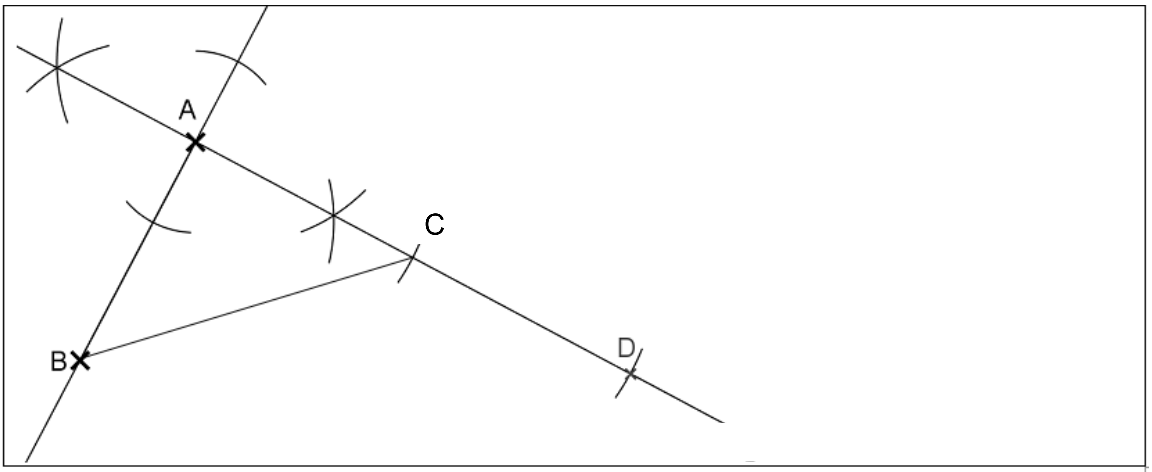
FAUX :

Par lecture graphique, on peut affirmer que l'aire du rectangle est inférieure à 25 cm²,
- lorsque *x* est supérieur à 3 cm, et dans ce cas le périmètre est bien supérieur à 21,5 cm,
- mais aussi lorsque *x* est compris entre 0 cm et 0,25 cm, et dans ce cas le périmètre est inférieur à 21 cm.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE d'après un sujet de Paris

A. Construction de la configuration initiale

1) Construction de la figure à la règle non graduée et au compas



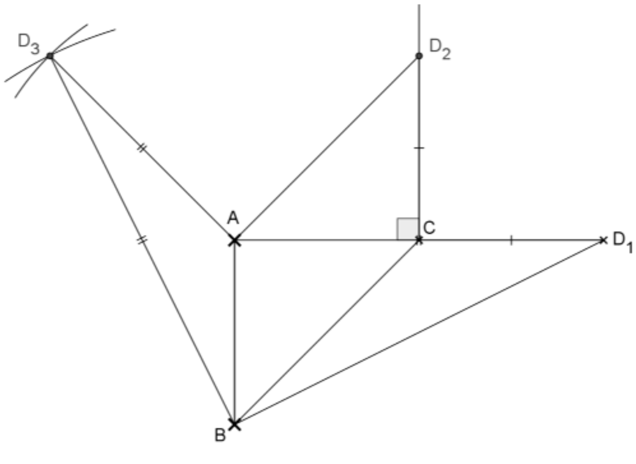
2) Déplacement des points B et D à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

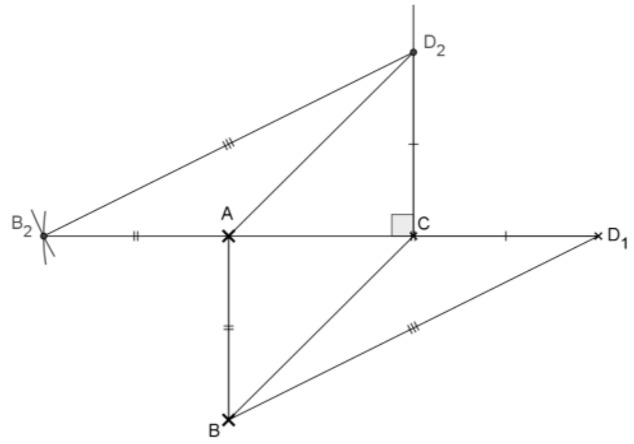
En testant si la figure résiste au déplacement de chacun des deux points, l'enseignant cherche sans doute à mettre en défaut d'éventuels recours à une procédure perceptive dans la construction sans appui sur des relations géométriques demandées explicitement au logiciel. Il peut en effet :

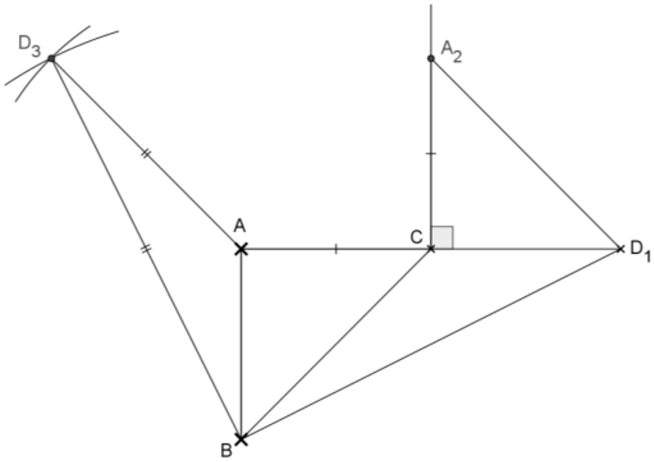
- en demandant de déplacer le point B : vérifier que la relation de perpendicularité entre (AB) et (AC) est préservée (l'élève pourrait avoir tracé de manière perceptive une horizontale et une verticale sans construire une droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point A) ;
- en demandant de déplacer le point B : vérifier que l'égalité de longueurs entre AB et AC est conservée (l'élève pourrait avoir placé le point C sur la droite perpendiculaire à la droite (AB) de façon à ce que les longueurs AB et AC soient perçues comme égales sans construire ce point par report de la longueur AB) ;
- en demandant de déplacer le point D : vérifier que l'égalité de longueurs entre AC et CD est préservée (le point D pourrait avoir été placé de manière perceptive à la même distance du point C que le point A et non construit par report de la longueur AC).

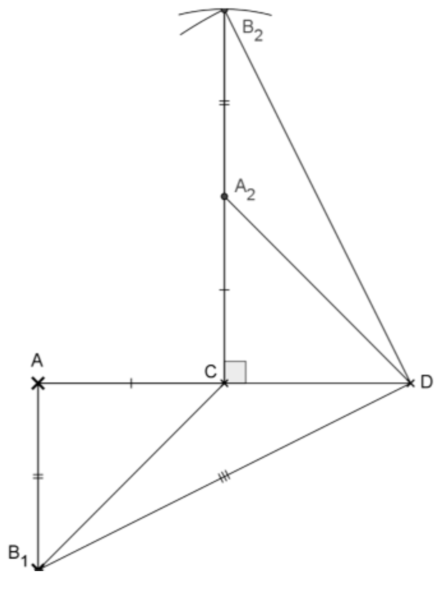
B. Premier problème de construction

Voici quatre patrons possibles :









C. Deuxième problème de construction

Partage du segment [AD] en trois parties de même longueur

Pour construire le point I, on construit la médiatrice du segment [BD] : elle coupe le segment [BD] en I.

1) Les points A, B et D appartiennent à un même cercle (C)

ABC est un triangle rectangle en A, donc la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AC).

Les points A, C et D sont alignés, donc les droites (AC) et (AD) sont confondues, donc la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AD).
ABD est donc un triangle rectangle en A.

Le triangle ABD est donc inscrit dans le cercle qui a comme diamètre l'hypoténuse [BD] et comme centre le milieu de cette hypoténuse, c'est-à-dire I. Son rayon est IB.

2) La droite (CI) est la médiatrice du segment [AD]

C est le milieu de du segment [AD] donc CA = CD.
D'après la question précédente, le triangle ABD est inscrit dans le cercle de centre I et de rayon IB, donc IA = ID.
Les points C et I sont ainsi chacun équidistants des extrémités du segment [AD].

La droite (CI) est donc la médiatrice de [AD].

Parallélisme des droites (IC) et (AB)

La médiatrice d'un segment est perpendiculaire au segment en son milieu, donc la droite (IC) est perpendiculaire au segment [AD] en son milieu C.
On a vu plus haut que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AD).

Les droites (IC) et (AB) sont ainsi perpendiculaires à la même droite : elles sont donc parallèles.

3) Nature du quadrilatère ABED

[AE] et [BD] sont les diagonales du quadrilatère ABED.
Or d'après l'énoncé, elles ont le même milieu : le point I. ABED est donc un parallélogramme.
Par ailleurs, le triangle ABD est rectangle en A. Le parallélogramme ABED a donc un angle droit.

On en déduit que : **ABED est un rectangle**.

4) Nature du quadrilatère AIDJ

[AD] et [IJ] sont les diagonales du quadrilatère AIDJ. Or d'après l'énoncé, elles ont le même milieu C.
AIDJ est donc un parallélogramme.
Par ailleurs, comme le triangle ABD est inscrit dans le cercle de centre I (cf. question C. 1)), IA = ID.
Le parallélogramme AIDJ a donc deux côtés consécutifs de même longueur.

On en déduit que : **AIDJ est un losange**.

Autre argument possible :

(CI) est perpendiculaire à (AD) (cf. question C. 2)) et J est aligné avec I et C. Les diagonales [IJ] et [AD] du parallélogramme sont donc perpendiculaires. On en déduit que AIDJ est un losange.

5) a) La droite (JD) est parallèle à la droite (AE)

AIDJ est un losange donc ses côtés opposés [AI] et [DJ] sont parallèles.
I est le milieu de [AE] donc A, I et E sont alignés. Les droites (AI) et (AE) sont donc confondues.

D'où le parallélisme des droites (JD) et (AE).

5) b) AE = 2JD

AIDJ est un losange donc ses côtés [AI] et [DJ] ont la même longueur : AI = JD.
I est le milieu de [AE] donc AE = 2 AI.

Des deux égalités précédentes, on déduit que **AE = 2 JD**.

5) c) $\mathbf{AG = \frac{2}{3}AD}$

D'après l'énoncé, on sait que : $GD = \frac{1}{2}AG$.
Par ailleurs, comme A, G et D sont alignés dans cet ordre, AD = AG + GD.

Ainsi, $AD = AG + \frac{1}{2}AG = \frac{3}{2}AG$, ou encore $\mathbf{AG = \frac{2}{3}AD}$.

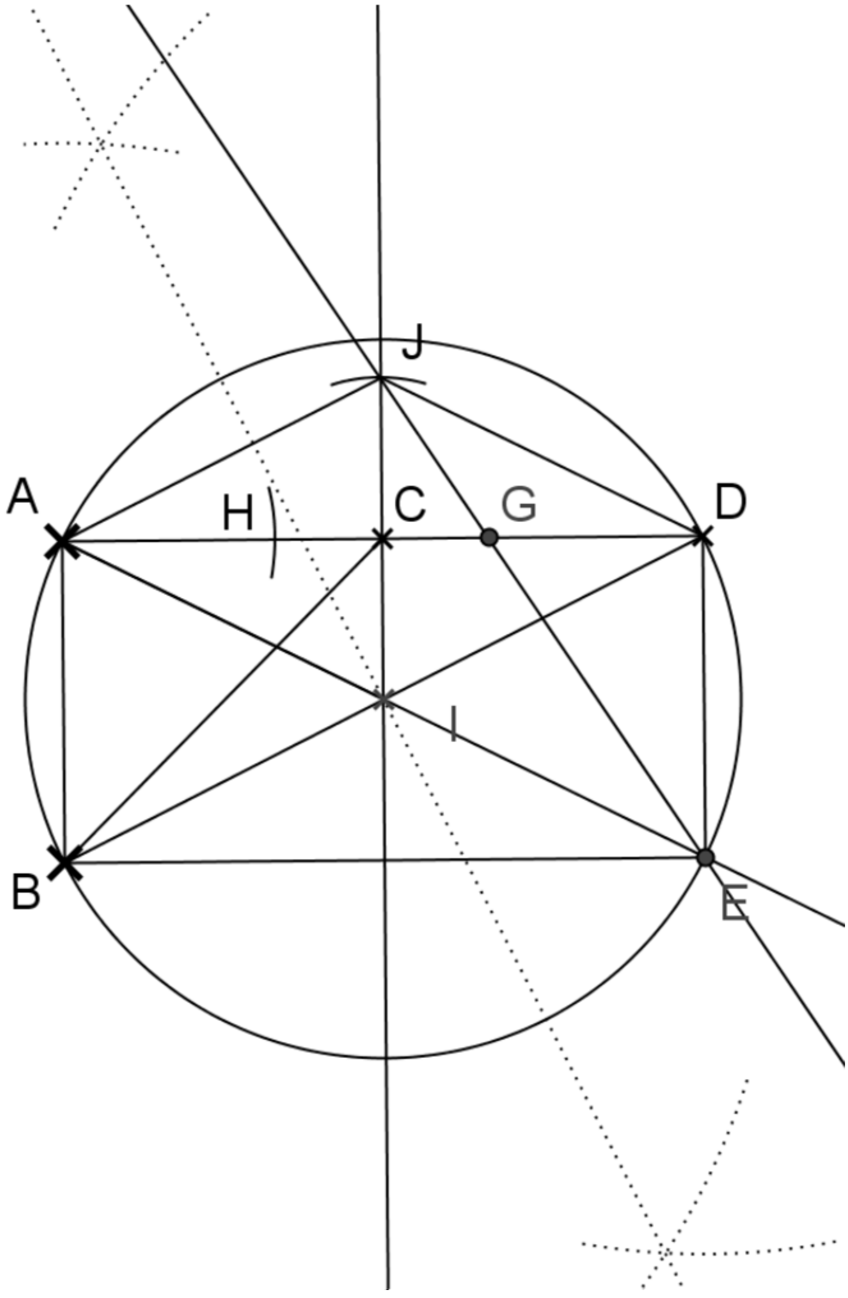
Remarque :

Voici une démonstration du résultat admis dans l'énoncé exigible au concours, mais non demandée ici.
La droite (JD) est parallèle à la droite(AE) d'après C. 5) a).
Les points J, G et E, d'une part, et A, G et D d'autre part, sont alignés.
On est donc en présence d'une configuration pour laquelle le théorème de Thalès peut être appliqué.
On en déduit que : $\frac{AG}{GD} = \frac{EG}{GJ} = \frac{AE}{DJ}$.
On a montré dans la question précédente que $\frac{AE}{DJ} = 2$ *; on en déduit que* $\frac{AG}{GD} = 2$, *et donc que* $AG = 2GD$, *soit encore* $GD = \frac{1}{2}AG$.

5) d) Construction du point H

Il suffit de reporter la longueur GD sur le segment [AD] en partant de A pour placer H.

Figure construite au fil des questions



PROBLÈME DE PROPORTIONNALITÉ, PAVAGES, GRANDEURS d'après un sujet de Dijon

A. Préparation de l'échange

1. Calcul de montants de remboursement

On désigne par x la mesure (en km) de la distance et par $p(x)$ la mesure (en €) du montant de remboursement.

a) Trajet Belfort-Dijon

Pour toute distance comprise entre 150 km et 199 km, le montant du remboursement est exprimé par la formule suivante :

$p(x) = 8{,}0871 + 0{,}1193\,x$.

La distance Belfort-Dijon est égale à 188 km. Le montant du remboursement correspondant est donc :

$$p(188) = 8{,}0871 + 0{,}1193 \times 188 = 8{,}0871 + 22{,}4284 = 30{,}5155.$$

Ce résultat, arrondi au centime d'euro près, donne 30,52 €.

En effet, le chiffre « 1 » des centimes d'euro est suivi d'un « 5 » et encore d'un « 5 ». La valeur approchée au centime d'euro près la plus proche est donc ici la valeur approchée par excès.

b) Trajet Nevers-Dijon

Pour toute distance comprise entre 200 km et 300 km, le montant du remboursement est exprimé par la formule suivante :

$p(x) = 7{,}7577 + 0{,}1209\,x$.

La distance Belfort-Dijon est égale à 216 km. Le montant du remboursement correspondant est donc :

$p(216) = 7{,}7577 + 0{,}1209 \times 216 = 7{,}7577 + 26{,}1144 = 33{,}8721$.

Ce résultat, arrondi au centime d'euro près, donne 33,87 €.

Le chiffre « 7 » des centimes d'euro est suivi d'un « 2 ». La valeur approchée au centime d'euro près la plus proche est donc ici la valeur approchée par défaut.

2. Trajet Nevers-Belfort

a) Montant du remboursement

Comme le trajet passe par Dijon (correspondance du train), la distance Nevers-Belfort est égale à la somme des distances Nevers-Dijon et Dijon-Belfort, soit 216 km + 188 km = 404 km. Cette distance étant comprise entre 301 km et 499 km, le montant du remboursement sera :

$p(404) = 13{,}6514 + 0{,}1030 \times 404 = 13{,}6514 + 41{,}612 = 55{,}2634$.

Ce résultat, arrondi au centime d'euro près, est 55,26 €.

b) Non proportionnalité entre tarifs SNCF et distances parcourues

Les tarifs de la SNCF ne sont pas proportionnels aux distances parcourues.

On pouvait développer l'un des deux arguments suivants :

- Si cette situation était une situation de proportionnalité, la propriété de linéarité additive s'appliquerait et le tarif correspondant au trajet Nevers-Belfort, serait égal à la somme des tarifs correspondants aux trajets Nevers-Dijon et Dijon-Belfort, donc à : $30{,}52\text{ €} + 33{,}87\text{ €} = 64{,}39\text{ €}$.
  Or, nous avons vu au a) que ce tarif Nevers-Belfort est de 55,26 €.

- Si les tarifs étaient proportionnels aux distances parcourues, la fonction $p(x)$ exprimant ce tarif p en fonction de la distance x serait une fonction linéaire de la forme : $p(x) = ax$
  Or sur chaque intervalle [1 ; 16] ; [17 ; 32] ; … la fonction $p(x)$ est de la forme :
  $p(x) = ax + b$, où b n'est pas nul.
  Il s'agit donc d'une fonction affine par morceaux.

Remarque :

La représentation graphique de la fonction p n'est pas une droite passant par l'origine mais un ensemble de segments de droites de pentes toutes différentes correspondants à chaque fois au prix kilométrique indiqué dans le tableau.

3. Déplacement en voiture

a) Coût du trajet en voiture Nevers-Belfort.

Les 186 km parcourus sur autoroute correspondent à 1,86 fois 100 km.
Les 154 km (340 km – 186 km) parcourus sur route correspondent à 1,54 fois 100 km.
La consommation en essence pour ce parcours est donc :

$1{,}86 \times 8{,}4\ \text{L} + 1{,}54 \times 6{,}2\ \text{L} = 15{,}624\ \text{L} + 9{,}548\ \text{L} = 25{,}172\ \text{L}$

pour une dépense de : $25{,}172\ \text{L} \times 1{,}264 \dfrac{€}{\text{L}} = 31{,}817408\ € \approx 31{,}82\ €$.

L'ensemble des frais d'essence et de péage se monte donc à : $\mathbf{31{,}82\ € + 15{,}20\ € = 47{,}02\ €}$.

b) Calcul de la durée du trajet.

Nous connaissons les vitesses moyennes et les distances. Les durées s'obtiennent à l'aide de la relation

$$t = \frac{d}{v}.$$

Méthode 1 :

On peut raisonner à l'aide des heures décimales puis convertir la partie décimale en minutes en utilisant la relation 1 h = 60 min.

Pour la partie route : $\text{t}_\text{r} = \dfrac{154\ \text{km}}{70\ \text{km/h}} = 2{,}2\ \text{h} = 2\ \text{h} + \dfrac{2}{10} \times 60\ \text{min} = 2\ \text{h}\ 12\ \text{min}.$

Pour la partie autoroute : $\text{t}_\text{a} = \dfrac{186\ \text{km}}{120\ \text{km/h}} = 1{,}55\ \text{h} = 1\ \text{h} + \dfrac{55}{100} \times 60\ \text{min} = 1\ \text{h}\ 33\ \text{min}.$

D'où une durée totale de 3 h 45 min.

Méthode 2 :

On peut utiliser des propriétés arithmétiques des nombres en présence et des raisonnements de proportionnalité.

Pour la partie route, l'automobiliste parcourt 70 km en 1 h, donc 140 km en 2 h.
Il lui reste encore 14 km à parcourir pour effectuer 154 km.
Ces 14 km représentent $\dfrac{2}{10}$ (ou encore $\dfrac{1}{5}$) de 70 km ; pour les parcourir il faut donc $\dfrac{2}{10}$ (ou encore $\dfrac{1}{5}$) de 1 h donc de 60 min.
Un dixième de 60 min est égal à 6 min, deux dixièmes de 60 min est égal à 12 min.
D'où $\text{t}_\text{r} = 2\ \text{h}\ 12\ \text{min}.$

Pour la partie autoroute, l'automobiliste parcourt 120 km en 1 h, donc 180 km en 1 h 30 min.
Il lui reste alors encore 6 km à parcourir.
Ces 6 km représentent $\dfrac{1}{20}$ de 120 km ; pour les parcourir il faut donc $\dfrac{1}{20}$ de 1 h donc de 60 min.
Un vingtième de 60 min est égal à 3 min.
D'où $\text{t}_\text{a} = 1\ \text{h}\ 33\ \text{min}.$

D'où une durée totale de 3 h 45 min.

c) Vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours

Méthode 1 :

On convertit la durée en heures décimales et on utilise la relation $v = \dfrac{d}{t}$ pour calculer la vitesse moyenne effective.

On a : $d = 340$ km et $t = 3{,}75$ h (45 min $=$ 0,75 h), on a donc $v = \dfrac{340 \text{ km}}{3{,}75 \text{ h}} \approx 90{,}667$ km/h.

La vitesse moyenne sera donc légèrement supérieure à 90 km/h.

Méthode 2 :

On calcule la distance parcourue en 3 h 45 min à une vitesse moyenne de 90 km/h puis on la compare à la distance à parcourir, c'est-à-dire à 340 km.

Pour calculer la distance parcourue en 3 h 45 min à une vitesse moyenne de 90 km/h, on peut :

- soit utiliser la relation $d = v \times t$ en convertissant la durée en heures décimales :

  $$d = 3{,}75 \text{ h} \times 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 337{,}5 \text{ km}.$$

- soit exprimer la durée sous la forme d'une fraction simple et utiliser des raisonnements de proportionnalité : en 1 h, l'automobiliste parcourt 90 km, donc en 3 h 45 min = 3 h $+ \dfrac{3}{4}$ h, l'automobiliste parcourrait : $3 \times 90 \text{ km} + \dfrac{3}{4} \times 90 \text{ km} = 270 \text{ km} + 67{,}5 \text{ km} = 337{,}5 \text{ km}$.

Comme l'automobiliste a parcouru plus de 337,5 km en 3 h 45 min, sa vitesse moyenne a été supérieure à 90 km/h.

B. Une évaluation de l'aire de la région Bourgogne Franche-Comté

1. Calcul de l'échelle de la carte

Méthode 1 : recherche de la distance réelle pour 1 cm sur la carte

Puisque 18 cm sur la carte correspondent à 288 km en réalité,
1 cm sur la carte correspond à 16 km (car 288 : 18 = 16), soit 16 000 m, soit 1 600 000 cm en réalité.

D'où une **échelle de** $\mathbf{\dfrac{1}{1\,600\,000}}$.

Méthode 1 bis : même méthode que précédemment mais la conversion s'effectue dès le départ

Convertissons les deux longueurs (distances en réalité et sur la carte) en une même unité par exemple, le centimètre :

On a : 288 km = 288 000 m = 28 800 000 cm.

Puisque 18 cm sur la carte correspondent à 28 800 000 cm en réalité,

1 cm sur la carte correspond à $\dfrac{28\,800\,000 \text{ cm}}{18} = 1\,600\,000 \text{ cm}$ en réalité.

L'échelle de la carte est $\mathbf{\dfrac{1}{1\,600\,000}}$.

Méthode 2 : utilisation de la définition de l'échelle

On peut aussi raisonner de la façon suivante :

$$\textit{échelle} = \frac{\textit{distance sur la carte}}{(\textit{distance en réalité})},$$

où les deux distances sont exprimées dans la même unité.

On a donc ici : $\boldsymbol{\textit{échelle}} = \dfrac{18 \text{ cm}}{2\,880\,000 \text{ cm}} = \mathbf{\dfrac{1}{1\,600\,000}}$.

Remarque :

Une échelle est un coefficient de proportionnalité sans unité car les deux grandeurs sont de même nature.

2. Avec le matériel pédagogique « Mosaïque »

a) Calcul de l'aire de chacune des formes en fonction de a

Les formes B, C et D s'obtiennent en juxtaposant respectivement 6, 3 et 2 triangles équilatéraux superposables à la forme A.
Leurs aires sont donc respectivement :

$$\boldsymbol{Aire(B) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, a^2}; \qquad \boldsymbol{Aire(C) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\, a^2}; \qquad \boldsymbol{Aire(D) = \frac{2\sqrt{3}}{4}\, a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a^2}.$$

La forme E est un carré de côté a et son aire est : $\boldsymbol{Aire(E) = a^2}$.

b) i) Évaluation de l'aire de l'assemblage des formes posées sur la carte

Commençons par évaluer l'aire de cet assemblage en fonction de a.

Le tableau suivant structure les premières étapes de ce calcul.

Forme	Aire unitaire en fonction de a	Nombre de pièces	Aire liée à la forme
A	$\frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$	6	$\frac{6\sqrt{3}}{4}\, a^2$
B	$\frac{6\sqrt{3}}{4}\, a^2$	6	$\frac{36\sqrt{3}}{4}\, a^2$
C	$\frac{3\sqrt{3}}{4}\, a^2$	3	$\frac{9\sqrt{3}}{4}\, a^2$
D	$\frac{2\sqrt{3}}{4}\, a^2$	4	$\frac{8\sqrt{3}}{4}\, a^2$
E	a^2	4	$4a^2$

L'expression de l'aire de cet assemblage en fonction de a est donc :

$$Aire = \frac{6\sqrt{3}}{4}\, a^2 + \frac{36\sqrt{3}}{4}\, a^2 + \frac{9\sqrt{3}}{4}\, a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{4}\, a^2 + 4a^2 = \frac{59\sqrt{3}}{4}\, a^2 + 4a^2 = (\frac{59\sqrt{3}}{4} + 4)a^2.$$

Comme $a = 2{,}5 \text{ cm} = 25 \text{ mm}$, on a $a^2 = 2{,}5^2 \text{ cm}^2 = 6{,}25 \text{ cm}^2$ ou $a^2 = 25^2 \text{ mm}^2 = 625 \text{ mm}^2$

et **l'expression au mm² près de cette aire est :**

$$\boldsymbol{Aire = \left(\frac{59\sqrt{3}}{4} + 4\right) \times 6{,}25 \text{ cm}^2 \approx 184{,}67 \text{ cm}^2} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{Aire = \left(\frac{59\sqrt{3}}{4} + 4\right) \times 625 \text{ mm}^2 \approx 18467 \text{ mm}^2}.$$

Remarque :
Ces deux résultats sont cohérents puisque $1\,cm^2 = 100\ mm^2$.

b) ii) Valeur approchée de la superficie de la région Bourgogne Franche-Comté

Méthode 1 :

On a vu que 1 cm sur la carte correspond à 16 km en réalité.
Ainsi pour les unités d'aire,
1 cm² = 1 cm × 1 cm sur la carte correspond à 16 km × 16 km = 256 km² en réalité.
On en déduit que l'aire de la région Bourgogne-Franche-Comté peut être estimée à :

$$\boldsymbol{Aire(\text{Région BFC}) \approx 184{,}67 \times 256\ km^2 \approx 47\ 276 \text{ km}^2}.$$

Méthode 2 :

On sait que dans une homothétie de rapport k, ou dans un agrandissement d'un rapport k, les longueurs sont multipliées par k tandis que les aires sont multipliées par k^2.

L'échelle étant ici de $\frac{1}{1\ 600\ 000}$, les distances en réalité sont 1 600 000 fois plus grandes que celles sur la carte et les aires en réalité sont $1\ 600\ 000^2\ =\ 2{,}56 \times 10^{12}$ fois plus étendues que sur la carte.

L'évaluation de l'aire de la région Bourgogne-Franche-Comté est donc de :

$$Aire(\text{Région BFC}) \approx 2{,}56 \times 10^{12} \times 18467\ \text{mm}^2 \approx 4{,}727552 \times 10^{16}\ \text{mm}^2.$$

Utilisons un tableau de conversion, la première ligne, ici, repère les puissances de 10 avec les mm^2 comme unité :

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
				<u>km²</u>		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		<u>mm²</u>
4	7	2	7	5	5	2										

Grâce à ce pavage, on peut donc évaluer au km^2 près l'aire de la région à 47 276 km^2.

Remarque :

Cette évaluation est très proche de la superficie réelle de la région Bourgogne Franche-Comté qui est de 47 490 km^2, soit une erreur inférieure à 0,5 %.

C. Un travail sur des assemblages de deux triangles

1. Phase 1 : assemblage avec deux sommets communs

Lorsque l'on juxtapose les deux triangles selon cette règle, les côtés juxtaposés doivent être de même longueur.

Il y a alors

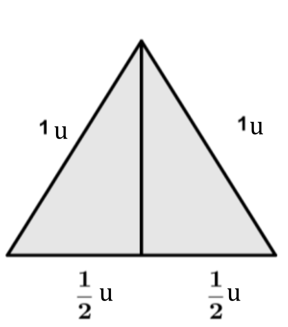
- 3 choix possibles pour les côtés juxtaposés (les grands côtés de l'angle droit, les petits côtés de l'angle droit, les hypoténuses) ;
- puis 2 choix possibles pour l'orientation du second triangle. Les deux triangles se déduisent l'un de l'autre soit par une symétrie axiale (l'action consiste à « retourner » et correspond à un demi-tour dans l'espace), soit par une symétrie centrale (l'action consiste à « tourner » ou pivoter et correspond à un demi-tour dans le plan).

D'où les $3 \times 2 = 6$ figures.

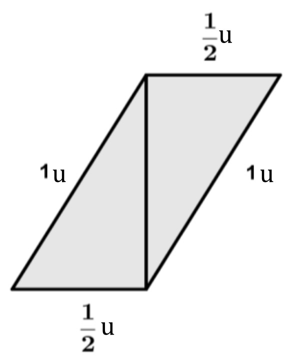
Notons que le périmètre dépend uniquement des côtés juxtaposés et non de l'orientation choisie pour le second triangle.

Les 6 figures à trouver ainsi que leur nature et leur périmètre sont énumérés ci-dessous suivant le côté commun.

Juxtaposition par le grand côté de l'angle droit



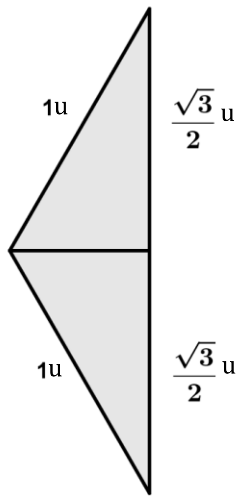
triangle équilatéral



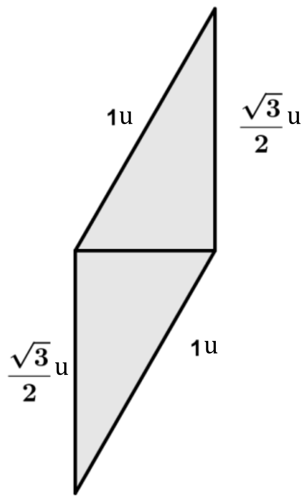
parallélogramme

Ces deux figures ont pour périmètre $P = 3$ u .

Juxtaposition par le petit côté de l'angle droit



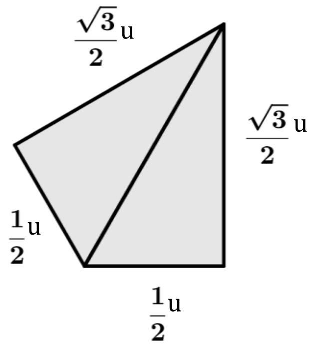
triangle isocèle



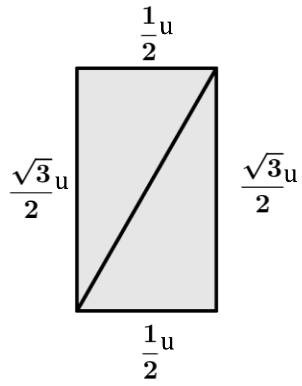
parallélogramme

Ces deux figures ont pour périmètre $P = \left(2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{u} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{u}.$

Juxtaposition par l'hypoténuse



cerf-volant

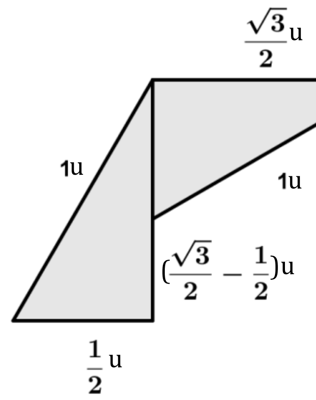


rectangle

Ces deux figures ont pour périmètre $P = \left(2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{u} = \left(1 + \sqrt{3}\right) \text{u}.$

2. Phase 2 : assemblage avec un seul sommet commun

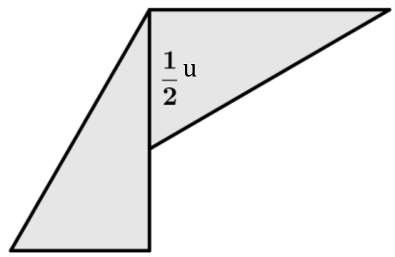
a) Périmètre de la figure B



Méthode 1 :
On peut évaluer la longueur de chacun des 5 côtés de la figure B

$$\boldsymbol{Périmètre(B)} = \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\text{u} = \left(2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{u} = \mathbf{(2 + \sqrt{3})u}.$$

Méthode 2 :
On pouvait aussi raisonner par différence en décomptant les longueurs des côtés juxtaposés.
Chaque demi triangle équilatéral a pour périmètre $(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ u.



La somme des périmètres de ces deux triangles avant juxtaposition est donc $(3 + \sqrt{3})$u.
Le périmètre de la figure B s'obtient alors en décomptant deux fois la longueur $\frac{1}{2}$ u.

D'où $\boldsymbol{Périmètre(B)} = \left(3 + \sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2}\right)\text{u} = \mathbf{(2 + \sqrt{3})u}.$

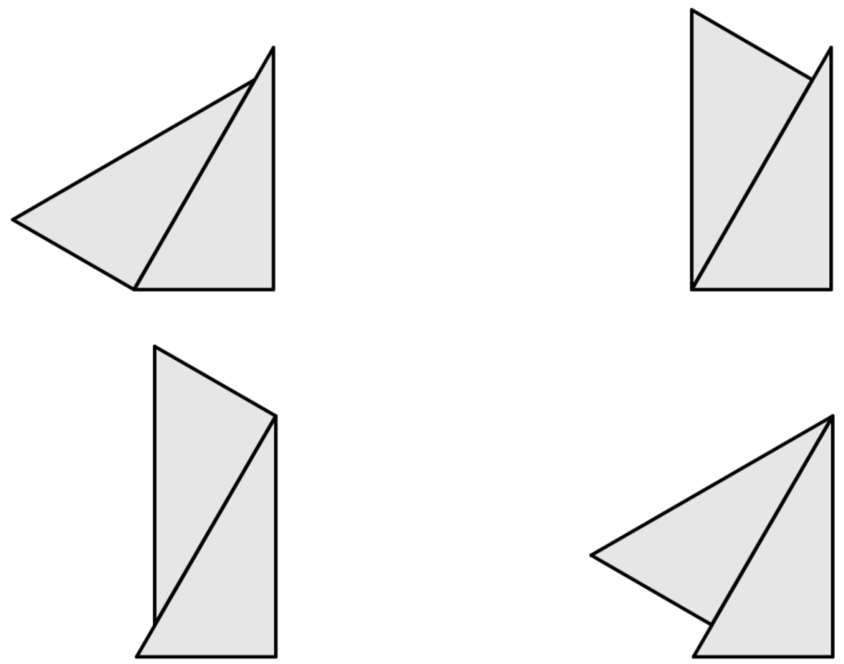
b) Autre exemple d'une figure maintenant autorisée

La méthode 2 précédente permet de guider la recherche.
En effet, selon la règle, les segments de longueurs différentes juxtaposés correspondent au côté de l'un des triangles.
Les différents cas de figures à envisager sont les suivants :

- juxtaposition suivant le petit côté de l'angle droit de l'un des triangles avec l'hypoténuse ou le grand côté de l'angle droit ; dans ce cas, on retrouvera toujours comme périmètre : $\left(3 + \sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2}\right)$u, c'est-à-dire celui de la figure B ;
- juxtaposition suivant l'hypoténuse de l'un des triangles, mais dans ce cas cette juxtaposition s'effectue aussi suivant l'hypoténuse du second triangle et l'on retrouve une des six figures trouvées à la question 1. ;

- juxtaposition suivant le grand côté de l'angle droit avec l'hypoténuse. Pour obtenir des assemblages différents de ceux déjà trouvés, il faut accoler ce premier triangle à l'hypoténuse du second et **le périmètre sera à chaque fois $(\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{2}\times\mathbf{1})\mathbf{u}=(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}})\mathbf{u}$.**

Voici les quatre figures possibles :



Remarque :

Dans l'énoncé, un seul exemple est demandé donc il s'agit de donner une des figures ci-dessus de périmètre $(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}})\boldsymbol{u}$ et non les quatre figures.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Multiplication au cycle 3 d'après un sujet de Nantes

A. Calcul réfléchi, le produit 48×250

1) a) Analyse de la démarche

On sait que : $48 = 12 \times 4$.
Donc : $48 \times 250 = (12 \times 4) \times 250 = 12 \times (4 \times 250) = 12 \times 1\,000 = 12\,000$.

Les connaissances numériques en jeu dans cette démarche sont les suivantes :

- la connaissance mémorisée du produit $4 \times 250 = 1000$, qui justifie le fait de faire apparaître un facteur 4 en décomposant 48 ;
- la capacité à décomposer 48 en 12×4 ;
- la capacité à multiplier un nombre entier par 1000.

1) b) Principale propriété mathématique mise en œuvre

La principale propriété mathématique mise en œuvre est l'associativité de la multiplication :
$(12 \times 4) \times 250 = 12 \times (4 \times 250)$.
Cette propriété s'écrit de manière plus générale comme suit :

pour tous nombres a, b et c, on a : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

2) a) Procédure à valoriser pour chacun des différents produits

Pour préparer à la procédure indiquée par le document, il faut dans chaque ligne de calcul, faire apparaître le facteur 4 et l'associer avec 25 en mettant en œuvre l'associativité de la multiplication.

L'écriture du calcul en ligne doit mettre en évidence ces différentes étapes :
$12 \times 25 = (3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25) = 3 \times 100 = 300$.
$16 \times 25 = (4 \times 4) \times 25 = 4 \times (4 \times 25) = 4 \times 100 = 400$.
$32 \times 25 = (8 \times 4) \times 25 = 8 \times (4 \times 25) = 8 \times 100 = 800$.
$48 \times 25 = (12 \times 4) \times 25 = 12 \times (4 \times 25) = 12 \times 100 = 1200$.

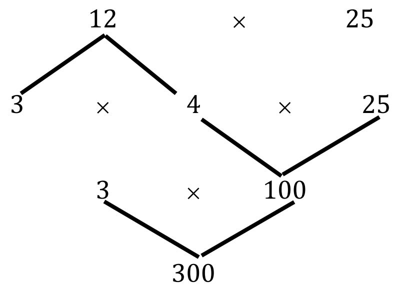
2) b) Trace écrite

Proposition 1 : phrase de synthèse avec exemple de calcul écrit en ligne

Pour multiplier un nombre par 25, on cherche si ce nombre est dans la table de multiplication par 4.
Cela permet de calculer plus facilement, car : $4 \times 25 = 100$.
Exemple : $12 \times 25 = (3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25) = 3 \times 100 = 300$.

Proposition 2 : phrase de synthèse avec exemple présenté en arbre de calcul

Pour multiplier un nombre par 25, on cherche si ce nombre est dans la table de multiplication par 4. Cela permet de calculer plus facilement, car $4 \times 25 = 100$.
Exemple :



3) c) Autres calculs en prolongement du travail

Plusieurs calculs peuvent être proposés en prolongement de ce travail. Ils peuvent varier selon le multiple de 4 choisi et/ou selon la puissance de 10.

Propositions 1 : faire varier le premier facteur multiple de 4

On peut proposer les calculs suivants : $\mathbf{36 \times 250}$ **;** $\mathbf{28 \times 250}$**.**

Propositions 2 : faire varier le deuxième facteur (multiple d'une puissance de 10)

On peut proposer les calculs suivants : $\mathbf{48 \times 2500}$ **;** $\mathbf{48 \times 25000}$**.**

Propositions 3 : Faire varier les deux facteurs (la puissance de 10 n'est plus obtenue avec le facteur 4)

On peut proposer les calculs suivants : $\mathbf{26 \times 500}$; $\mathbf{160 \times 25}$**.**

B. Calcul posé : le produit 48×250

1) Calcul posé : le produit 48×250

Proposition 1 : technique opératoire usuelle

		2	5	0
	×		4	8
	2	0	0	0
1	0	0	0	0
1	2	0	0	0

Sur cette ligne figure le produit de 250 par 8.
Sur cette ligne figure le produit de 250 par 40.
Sur cette ligne figure la somme des deux lignes précédentes, qui est égale au produit cherché puisque $250 \times 48 = 250 \times 8 + 250 \times 40$.

Proposition 2 : technique opératoire usuelle

			4	8
	× 2		5	0
	2	4	0	0
	9	6	0	0
1	2	0	0	0

Sur cette ligne figure le produit de 50 par 48.
Sur cette ligne figure le produit de 200 par 48.
Sur cette ligne figure la somme des deux lignes précédentes, qui est égale au produit cherché puisque $48 \times 250 = 48 \times 50 + 48 \times 200$.

Remarque :

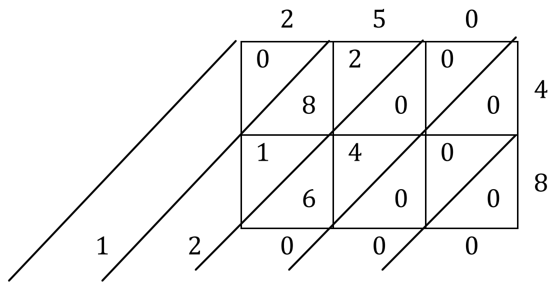
La technique opératoire employée pour ces deux premières propositions vise à réduire le nombre de lignes de l'addition. Il convient donc d'écrire au dessus le nombre ayant le plus de chiffres. Ici, l'ordre des facteurs n'influe pas sur le nombre de lignes puisque 250 a pour chiffre des unités zéro.
Dans tous les cas, on ne fait pas apparaître la ligne de zéros résultant du produit 0×48.

			4	*8*
	×	*2*	*5*	*0*
			0	*0*
	2	*4*	*0*	*0*
	9	*6*	*0*	*0*
1	*2*	*0*	*0*	*0*

Sur cette ligne figure le produit de 0 par 48, cette ligne ne devrait pas apparaitre dans un calcul posé.

Proposition 3 : technique Per Gelosia

Chaque cellule du tableau fait apparaître le produit partiel de l'en-tête de ligne par l'en-tête de colonne. L'ordre dans lequel on effectue ces calculs partiels n'a pas d'importance.
Chaque bande oblique contient alors des chiffres de même rang dans la numération positionnelle décimale. Ils sont enfin additionnés rang par rang (dans l'ordre en commençant par les unités) pour obtenir le résultat dans la dernière ligne, en tenant compte des retenues éventuelles.



Le calcul se justifie ainsi :
Tout d'abord : $250 \times 48 = (2\text{ c} + 5\text{ d} + 0\text{ u}) \times (4\text{ d} + 8\text{ u})$.
Or :
$2\text{ c} \times 8\text{ u} = (2 \times 8)\text{ c} = 16\text{ c} = 1\text{ m} + 6\text{ c}$;
$2\text{ c} \times 4\text{ d} = (2 \times 4)\text{ m} = 8\text{ m}$;
$5\text{ d} \times 8\text{ u} = (5 \times 8)\text{ d} = 40\text{ d} = 4\text{ c}$;
$5\text{ d} \times 4\text{ d} = (5 \times 4)\text{ c} = 20\text{ c} = 2\text{ m}$;
$0\text{ u} \times 8\text{ u} = (0 \times 8)\text{ u} = 0\text{ u}$;
$0\text{ u} \times 4\text{ d} = (0 \times 4)\text{ d} = 0\text{ d}$;
Alors : $250 \times 48 = (1 + 8 + 2)\text{ m} + (6 + 4 + 0)\text{ c} + (0 + 0)\text{ d} + 0\text{ u} = 11\text{ m} + 10\text{ d} = 12\text{ m}$.
Donc : $250 \times 48 = 12\,000$.

Proposition 4 : technique à la russe.

~~250~~	~~48~~
~~500~~	~~24~~
~~1000~~	~~12~~
~~2000~~	~~6~~
4000	3
8000	1
12000	

Pour passer d'une ligne à l'autre, on double le nombre de la colonne de gauche, et on divise par 2 celui de la colonne de droite (en gardant la partie entière si le nombre est impair).
On barre toutes les lignes pour lesquelles le nombre de la colonne de droite est pair.
Enfin, on ajoute les nombres non barrés de la colonne de gauche pour obtenir le résultat.

Le calcul se justifie ainsi :
Tout d'abord : $250 \times 48 = 500 \times 24 = 1000 \times 12 = 2000 \times 6 = 4000 \times 3$.
Alors : $250 \times 48 = 4000 \times (2 + 1) = 4000 \times 2 + 4000 = 8000 \times 1 + 4000$.
Donc : $250 \times 48 = 12\,000$.

Remarque :

D'autres techniques opératoires actuelles ou anciennes existent encore. Elles pourraient constituer une réponse possible.

2) Explicitation de l'apparition de zéros

Dans toutes les propositions, on distingue plusieurs origines à l'apparition de zéros :

- le zéro de 250 provoque l'écriture du zéro des unités du résultat ;
- des zéros apparaissent lors de l'écriture des résultats de multiplications partielles intermédiaires, par exemple lors de la multiplication de 4 par 5 dans les trois premières propositions (le résultat est 20 qui comporte un nombre entier de dizaines), et dans le calcul du double de 250 dans la méthode à la russe (le résultat est 1000) ;

- des zéros résultent des sommes de chiffres dans l'addition finale.

Dans l'algorithme usuel (propositions 1 et 2), la deuxième ligne résulte du calcul de 250×40, c'est-à-dire de 250×4 dizaines. Un zéro est alors écrit au chiffre des unités du résultat de ce calcul (il est à préférer à l'écriture d'un point).

C. Multiplication d'un nombre décimal par une puissance de dix

1) Comparaison de l'usage des tableaux dans ces deux manuels

Les deux manuels n'utilisent pas les tableaux pour la même raison :

- dans *Je retiens* (Petit Phare), les deux tableaux sont utilisés à des **fins esthétiques** : il s'agit en effet de présenter six règles différentes ;
- dans le *Dico Maths* (Cap Maths), l'unique tableau est un tableau de numération, qui permet de mettre en évidence les unités de numération : il est employé à des **fins didactiques**.

2) Cas dans lesquels le résultat d'une multiplication par mille est un nombre entier

Le résultat du produit d'un nombre A par 1000 est un nombre entier si et seulement si A est un nombre décimal ne comportant pas plus de trois chiffres (non nuls) après la virgule.

3) Relation entre l'ensemble des nombres entiers et celui des nombres décimaux

La présentation du *Dico Maths* met en évidence le fait que les nombres entiers sont des nombres décimaux, ou autrement dit, que l'ensemble des nombres entiers est inclus dans celui des nombres décimaux.

4) a) Formulation permettant d'expliciter « oralement » le calcul

Exemple de formulation possible :
13,4 multiplié par cent c'est cent fois plus que 13,4.
Cent fois plus qu'une dizaine c'est un millier, cent fois plus que trois unités c'est 3 centaines, cent fois plus que 4 dixièmes c'est 4 dizaines.

Le résultat est : 1 millier, 3 centaines, 4 dizaines, soit 1340.

4) b) Formulation permettant d'expliciter « oralement » le calcul

Exemple de formulation possible : pour calculer 13,4 multiplié par cent, je déplace la virgule de deux rangs vers la droite et je dois écrire un zéro supplémentaire, soit 1340.

5) Comparaison des règles énoncées

Les règles présentées dans la première partie de *Je retiens* (Petit Phare) formulent un ajout de zéros dans l'écriture du nombre. Les règles présentées dans la deuxième partie formulent un décalage de la virgule dans l'écriture du résultat lorsque ce nombre est décimal non entier. Toutes ces règles correspondent ainsi à des **techniques** (qui ne sont d'ailleurs pas justifiées). Par ailleurs **elles dissocient l'ensemble des nombres entiers et celui des nombres décimaux**.

L'unique règle présentée dans le *Dico Maths* (Cap Maths) **s'appuie sur les unités de numération et correspond à un raisonnement**. Elle est générale au sens où elle s'applique à la fois aux nombres entiers et aux nombres décimaux. Plus précisément, la présentation retenue permet de mettre en évidence que **le raisonnement mis en œuvre dans le cas des nombres décimaux est un prolongement de celui utilisé dans le cas des nombres entiers**.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Grands nombres au cycle 3 d'après un sujet de Dijon

1. Analyse de l'étape 21 (annexe 1)

1. a) Deux choix des auteurs liés aux objectifs annoncés

Choix 1 : des nombres de 1 à 3 chiffres

L'objectif est de débusquer les erreurs fréquentes dans la numération écrite par rapport à la numération orale (la gestion des zéros intercalaires ou finaux). Certaines cartes, comme la première « 4 » comportent moins de 3 chiffres ; lorsque cette carte est avant la carte « mille » elle est lue intégralement, comme dans « quatre-mille-deux-cent-soixante-treize ». Quand elle est placée après la carte mille, elle est aussi lue intégralement mais dans l'écriture chiffrée on doit écrire les zéros pour identifier la classe formée de 3 chiffres et placer le 4 dans les unités de cette classe des « unités simples » : 273 004 en faisant ressortir les paquets de 3 en partant de la droite.

Choix 2 : utiliser la carte « 1 »

Celle-ci ne peut pas être placée avant la carte « mille » puisque l'on ne dit pas « un mille ».
La présence de cette carte permettra de confronter les élèves à des difficultés du type suivant :
« quatre-mille-un » (cartes « 4 », « mille » et « 1 ») qui s'écrit 4 001 mais si on suit l'exemple donné en énoncé, on obtient « un mille quatre » qui ne « se dit pas ». On dit « mille quatre » et on écrit 1 004.

Choix 3 : des nombres complexes tels que 73

Il s'agit d'un choix moins spécifique de cette séance mais d'un rappel (entretien) relatif aux nombres dont la désignation orale et l'écriture chiffrée n'ont pas de correspondance naturelle.

Choix 4 : absence de la carte « 0 »

Bien entendu, cette carte n'a aucune raison d'être dans ce jeu car, le « 0 » ne « se dit jamais » en numération orale. La présence de cette carte pourrait être un moyen de faire le point sur cette particularité.

1. b) Nombres possibles avec ce jeu de cartes et cette règle du jeu

Méthode 1 :

Avec cette règle du jeu et ces cartes l'élève a 20 choix pour la première carte (puisqu'il ne peut utiliser la carte « 1 » avant « mille »), puis il pose la carte « mille », puis il lui reste 20 choix pour la troisième carte (cette fois il peut utiliser la carte « 1 »), soit 20 × 20 choix possibles, donc 400 possibilités.

Méthode 2 :

Il y a 20 cartes numériques différentes de « 1 » et « mille ».
La carte « 1 » est spécifique car on ne peut pas l'utiliser avant la carte « mille », il y a donc 20 nombres possibles écrits avec la carte « 1 ».
Pour les autres nombres : on choisit d'abord une carte parmi 20 (20 choix possibles), on place la carte « mille » et on choisit ensuite un nombre parmi les 19 restants.
Il y a donc 20+19×20 = 20×20 = 400 nombres différents.

Remarque

Le problème de « symétrie » n'est pas à prendre en compte dans ce système de comptage.
Exemple : le nombre « 5 mille 832 » et le nombre « 832 mille 5 » sont comptés car on identifie la première carte puis la dernière carte.

2. Analyse de l'étape 90 (annexe 2)

2. a) Plus petit nombre et plus grand nombre obtenu avec ce jeu (et cette règle)

Le plus petit nombre est obtenu en prenant en premier la plus petite carte « 1 » puis la classe « million », puis le deuxième plus petit nombre « 3 » suivi de la classe « mille » et enfin le troisième plus petit nombre « 5 », donc au final 1 003 005, ou, en orthographe réformée, un-million-trois-mille-cinq.

De même le plus grand nombre sera 816 708 634, soit huit-cent-seize-millions-sept-cent-huit-mille-six-cent-trente-quatre.

2. b) Deux points à retenir par les élèves que l'enseignant mettra en valeur à la fin de l'étape 90

Point 1 :

Pour lire des grands nombres, on doit les décomposer en tranches de trois chiffres à partir des unités simples (à droite) pour distinguer les unités simples, puis les « mille », puis les « millions ». On lit alors dans l'ordre habituel de gauche à droite, chaque nombre inférieur à mille suivi du nom de la classe (« million », « mille ») sauf pour la classe des unités simples où on ne dit rien. Il y a une exception pour la lecture du « 1 » devant « mille » comme il est expliqué dans le point 2 et il y a une exception lorsque la classe des « mille » est nulle comme il est expliqué dans le point 3.

Point 2 :

« 1 » ne se dit pas devant « mille » (« 1 000 » se dit « mille » et pas « un mille ») mais le « 1 » se dit devant « million » (« 1 000 000 » se dit « un million » et pas « million »). Ceci constitue une différence avec ce qui a été vu dans l'étape 21.

Point 3 :

On ne dit pas « zéro mille » lorsque la classe des « mille » n'est pas représentée. Par exemple, le nombre « 816 000 634 » se dit « huit-cent-seize-millions-six-cent-trente-quatre » et pas « huit-cent-seize-millions-zéro-mille-six-cent-trente-quatre ».

Point 4 :

On ne dit pas « mille mille » mais « un million ».

3. Analyse de l'étape 44 (annexe 3)

3. a) Validité de ce qui est affirmé dans « Conclure avec les élèves »

Les auteurs parlent de la juxtaposition d'au plus cinq éléments, mais leur explicitation en fait apparaître sept (quatre groupe de nombre inférieurs à 1000 et trois termes « milliard », « million » et « mille »).

3. b) Pertinence de cette synthèse par rapport à l'activité de découverte de cette étape 44

La synthèse revient effectivement sur le lien entre la désignation orale des nombres et leur désignation chiffrée.

Mais la tâche proposée dans l'activité de découverte est l'inverse de celle de la synthèse.

En effet, dans l'activité de découverte, il s'agit d'écrire le nombre en chiffres (passer du nom du nombre à son écriture en chiffres).
Ce sens est plus complexe que celui qui consiste à écrire en lettres (ou dire) un nombre écrit en chiffres (comme dans la synthèse) car la difficulté de l'écriture des 0 que l'on n'entend pas n'est pas présente.
Par exemple écrire deux-millions-trois-mille-cinquante-huit nécessite d'écrire deux zéros entre le « 2 » et le « 3 » pour marque l'absence de chiffres aux rangs des dizaines et centaines de mille. Par contre lire (ou écrire en lettres) le nombre 2 003 058 peut être réussi sans prendre en compte la question des zéros.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Problèmes additifs au cycle 2 d'après un sujet de Besançon

1) Classification des quatre problèmes

Ces problèmes peuvent être interprétés comme des problèmes de transformation d'état : une quantité passe d'un état initial à un état final en subissant une transformation additive ou soustractive. Dans tous ces exercices, on connait l'état initial et l'état final, la question porte sur la transformation.

2) Comparaison des difficultés des problèmes 1, 3 et 4

Comparaison selon les procédures :

Dans chacun des problèmes, deux procédures peuvent être envisagées :
- la recherche d'un complément ;
- le calcul d'une différence.

Le problème 1 propose de chercher la transformation qui fait passer de 12 à 15.
Les nombres choisis sont « proches » l'un de l'autre (dans la même dizaine) et il n'y a pas de retenue. Quelle que soit la procédure, le résultat semble facile à trouver.

Le problème 3 propose de chercher la transformation qui fait passer de 35 à 3.
Les nombres choisis sont « éloignés » l'un de l'autre (dans des dizaines distinctes) et il n'y a pas de retenue.
Le calcul 35 – 3 apparaît plus simple à réaliser que la recherche du complément de 3 à 35.

Le problème 4 propose de chercher la transformation qui fait passer de 18 à 28.
Les nombres choisis sont « éloignés » l'un de l'autre (dans des dizaines distinctes) mais ils ne sont séparés que d'une dizaine et il n'y a pas de retenue.
Quelle que soit la procédure, les calculs semblent du même ordre de difficulté.

Comparaison selon le contexte des problèmes :

Le contexte du problème 3 pourrait apparaître a priori plus familier aux élèves que ceux des problèmes 1 et 4. Le contexte du problème 1 nous semble plus facile à imaginer pour le problème 1 (canards sur l'étang) que celui du problème 4 (départ d'un bateau).

3) Deux problèmes de comparaison d'états en CE1

Dans un problème de comparaison d'états, la question peut porter sur un des deux états (exemples 1 et 2) ou sur la relation entre les deux états (exemples 3 et 4).

Exemple 1 :

« Elise possède une collection de 38 billes. Elle en a 7 de plus que Kevin. Combien Kevin a-t-il de billes ? »

Exemple 2

« Elise possède une collection de 38 billes. Elle en a 7 de moins que Kevin. Combien Kevin a-t-il de billes ? »

Exemple 3 :

« Etienne et Farid collectionnent tous les deux les cartes Pokedoll. La collection d'Etienne est de 125 cartes, celle de Farid de 115 cartes. Combien Etienne a-t-il de cartes de plus que Farid? »

Exemple 4 :

« Etienne et Farid collectionnent tous les deux les cartes Pokedoll. La collection d'Etienne est de 125 cartes, celle de Farid de 115 cartes. Combien Farid a-t-il de cartes de moins qu'Etienne ? »

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Programmes de construction et géométrie dynamique
d'après un sujet de Dijon

Question 0 : résumé de l'organisation de la séance

Tableau résumant l'organisation :

	Phase 1	Phase 2	Phase 3	Phase 4
CE2	En collectif, les trois niveaux. Reprise de la réalisation d'une figure à partir d'un texte.	Ex 1 avec enseignant.	Ex 2 en autonomie.	Les trois niveaux. Tracé du Tangram avec un logiciel de géométrie dynamique.
CM1		Ex 2 en autonomie.	Ex 3 en autonomie. Puis regroupement avec les CM2 et l'enseignant.	
CM2		Ex 3 en autonomie.	Récepteurs d'un message rédigé par un élève de CM1 au cours de la phase 2 (ex 2). Puis regroupement avec les CM1 et l'enseignant.	

Phase 1 : en collectif sur les 3 niveaux

Question 1 : argument justifiant le choix de faire travailler les CM1 dans le cadre d'une dyade

La définition même d'une dyade consiste à placer deux élèves en interaction.
Il s'agit ici, par le biais d'une situation de communication, de conduire les élèves à utiliser en situation le vocabulaire géométrique. Plus précisément, les programmes proposent dans la colonne "exemples de situation, d'activités et de ressources pour l'élève" :

- les éléments de vocabulaire associés aux objets et à leurs propriétés (solide, polyèdre, face, arête, polygone, côté, sommet, angle, demi droite, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.) sont introduits et utilisés en contexte pour en préciser le sens : jeu du portrait, échange de messages, jeux d'associations.

La dyade favorise donc la communication et l'échange d'où le choix de cette modalité de travail.

Remarques :

1. *Dans la colonne "connaissances et compétences associées", les programmes précisent aussi : « réaliser, compléter et rédiger un programme de construction ». Cependant, cette compétence pourrait tout autant être travaillée sans faire appel à une dyade.*
2. *Ce n'est pas parce que l'on crée une situation de communication que les élèves vont forcément utiliser le vocabulaire géométrique. Ils peuvent très bien se comprendre avec un vocabulaire non conforme aux attendus comme « dessiner un rond ».*

Question 2 : un point de vigilance pour l'enseignant

La construction attendue du cercle circonscrit repose sur le fait que le triangle initial est équilatéral.
Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés. Or, l'énoncé amène à construire les médianes et, pour que médianes et médiatrices d'un triangle coïncident, il faut que ce triangle soit équilatéral.

Phase 2 : les niveaux sont différenciés

Question 3 : deux arguments qui justifient le choix de l'exercice 1 pour les élèves de CE2

L'exercice 1 est semblable à l'activité préparatoire ; il s'agit d'observer les productions de deux élèves virtuels réalisées à partir d'un programme de construction. Les étapes suivies lors de l'activité préparatoire (construction pas à pas puis formulation de la réponse) seront donc réinvesties ; c'est une étape de consolidation de la démarche.

Au cours de cette phase, il s'agit de consolider les connaissances sur le cercle déjà abordées en activité préparatoire et d'introduire la symétrie axiale qui sera ainsi reprise ; c'est cet apport qui justifie en partie le choix de l'enseignant d'être auprès des élèves lors de cette phase.

Question 4 : regard des élèves sur la figure développé dans cette phase

En imposant des mesures différentes, le programme de construction que rédigeront les élèves devra avant tout s'appuyer sur les propriétés de la configuration, et non sur des mesures. De même, la validation ne se fera pas par simple superposition d'un calque mais par le contrôle des caractéristiques propres à la figure : carré, diagonales, cercle inscrit passant par les milieux des côtés et cercle circonscrit de même centre (intersection des diagonales).
Ainsi les élèves sont invités à **utiliser en acte les propriétés des figures simples présentes dans cette figure complexe**, tandis qu'une reproduction aux mêmes mesures peut parfois inciter à une seule perception globale de la figure.

Phase 3 : Les niveaux sont à nouveau différenciés

Question 5 : connaissances acquises par Louise

Louise maîtrise la notion et le vocabulaire de diagonale et de carré, ainsi que la mesure de longueurs.
On a une confusion concernant la notion de « côté » pour le carré : ce mot semble désigner ici le « côté vertical droit » puisque pour le côté « horizontal » suivant, elle parle de « bas ». Le concept est donc acquis mais pas la désignation. Elle ne mobilise pas le vocabulaire « point ».

Question 6 : compétences de Jérôme

Jérôme commence par un dessin à main levée pour suivre les instructions du programme proposé par Louise. Face à la difficulté rencontrée, il estime que son dessin est sans doute trop petit pour s'y retrouver, il le barre et le recommence en plus grand. Au fur et à mesure, il porte des codages d'égalités de longueurs et des mesures à reporter sur la production finale.
Ainsi il maîtrise les compétences suivantes :

- l'utilisation des instruments de géométrie (règle et équerre, en particulier pour la construction du carré) ;
- le tracé d'une figure à partir d'un dessin à main levée (qu'il a lui-même produit) ;
- l'utilisation d'un codage pour porter des indications relatives aux propriétés (longueurs égales) et aux dimensions (mesures indiquées) sur la figure.

Question 7 : compétence manquant à Louise et qui a mis Jérôme en difficulté

Il s'agit de de la désignation des objets géométriques dont Louise parle, comme ici par exemple les segments sur lesquels il faut placer un point.

Phase 4 : en collectif sur les 3 niveaux

Question 8 : deux boutons à conserver dans les menus du logiciel de géométrie afin de remédier aux difficultés observées dans les productions de Louise et Jérôme

Louise ne semble voir que les divers segments (et donc elle les mesure) sans avoir le mot pour les nommer (elle parle de traits).
Elle ne mobilise pas le concept de point, ni en tant que milieu de segment, ni en tant qu'intersection de diagonales. Ce seront donc des éléments à reprendre avec elle à l'issue de ce travail qui peut constituer une évaluation diagnostique de ce début de séquence.
Le choix des deux boutons « segment » et « milieu ou centre » permet la construction de l'ensemble de cette figure. Il oblige Louise d'une part à percevoir les points particuliers structurant la figure et à identifier leur rôle, et d'autre part à utiliser un lexique adapté relevant des propriétés de la figure et non de la mesure.

Remarque :

Dans une reproduction d'une figure à l'identique, on peut repérer un point sur un segment par rapport à la distance à une extrémité de ce segment (y compris le milieu du segment). Par contre, avec un logiciel de géométrie dynamique, un point est caractérisé par une propriété si on veut que la figure reste invariante par agrandissement ou réduction.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES d'après divers sujets d'examen

NUMÉRATION EN CYCLE 2 d'après un sujet de Besançon

1) Description et analyse des procédures et des compétences des élèves A (Noémie) et B (Léa)

Élève A (Noémie)

Cette élève fait des paquets d'arbres et écrit dans chacun d'eux, le nombre correct d'arbres qu'il contient. Elle a dénombré correctement chacune de ces sous-collections. A priori cette élève réalise de petites sous-collections de cardinal aléatoire mais suffisamment petit pour ne pas lui poser de problème de comptage. Elle écrit comme résultat numérique final directement 37 sans explication.
Elle a pu recompter tous les arbres un à un ou se servir des paquets obtenus en additionnant mentalement ou au brouillon les nombres inscrits dans les paquets. Le résultat est correct.

Cette élève maîtrise la gestion spatiale de la collection afin de constituer ses différents groupes (en lien avec l'énumération de la collection).
Cette élève maîtrise le dénombrement des sous-collections obtenues de 4 à 8 éléments.
Cette élève sait également produire l'écriture chiffrée 37 correspondant au nombre total d'arbres.
Cette élève maîtrise soit le dénombrement dans un domaine numérique plus élevé (37) si elle a recompté le tout, soit le calcul additif de plusieurs termes si elle a additionné les différents cardinaux des paquets.

Élève B (Léa)

Cette élève a fait des paquets de 10 arbres. Tous les paquets constitués contiennent bien 10 arbres. Elle obtient donc 3 paquets de 10 et 7 arbres isolés non groupés en paquets. Elle transcrit ce résultat sous forme d'un calcul en ligne et donne la réponse exacte, 37.
Elle a pu obtenir cette réponse par calcul de 10 en 10. Elle peut aussi savoir que « 3 dizaines et 7 unités » s'écrit « 37 » en base 10 sans effectuer d'opération.

Cette élève semble être capable de :
- dénombrer une collection de 10 éléments ;
- gérer spatialement les éléments de la collection en vue de réaliser des paquets de 10 ;
- composer additivement des nombres en lien avec les groupements de 10.

2) Analyse des procédures, erreurs et origine des erreurs pour les élèves C (Floriane) et D (Lucie)

Élève C (Floriane)

Cette élève a fait des paquets de 5 arbres et ne se trompe pas dans le décompte des paquets obtenus. Elle trouve 7 paquets de 5 arbres et 2 arbres isolés.
Elle a correctement géré la disposition spatiale des arbres pour réaliser les différents paquets de 5.
Elle a correctement interprété les deux arbres non mis en paquets.

Par contre son résultat numérique 72 est erroné : elle a traduit « 7 paquets et 2 unités » en « 72 » pour obtenir son écriture chiffrée. Bien entendu son erreur provient du cardinal des paquets (5 au lieu de 10).

Floriane a certainement déjà effectué des exercices qui permettent de faire le lien entre l'écriture chiffrée d'un nombre en base 10 et le nombre de « paquets de 10 et unités isolées ». Cependant elle semble ne pas mettre de sens dans cette traduction entre « 3 paquets de 10 », « 3 dizaines » et « 30 ».

Élève D (Lucie)

Cette élève dénombre la collection d'arbres en numérotant les arbres en suivant chemin de bas en haut et de gauche à droite.
On constate trois types d'erreurs :
- des arbres ne sont pas numérotés ;
- un numéro (huit) est placé de manière ambiguë entre deux arbres ;

- un numéro (trente deux) semble ne pas être associé à un arbre (ou alors est associé à un arbre déjà numéroté, le 31$^{\text{ème}}$ ou le 33$^{\text{ème}}$).

Son résultat est donc erroné : elle trouve 35 arbres au lieu de 37.

On remarque également un autre codage : tous les arbres sont barrés une fois. Il n'y a pas d'éléments nous permettant de savoir si ce codage a été fait avant le numérotage, pendant ou après pour vérification.

SYMÉTRIE AXIALE EN CYCLE 2 d'après un sujet de Besançon

1) Caractéristiques communes et distinctes

Caractéristiques communes :

- Les deux figures sont proposées sur un papier quadrillé. Le quadrillage permet de faire le tracé de la figure symétrique point par point, en comptant les carreaux sur une même ligne (distance à l'axe conservée par symétrie) sans se soucier de la perpendicularité du segment reliant un point et son symétrique par rapport à l'axe de symétrie.
- Chaque figure est une figure complexe, composée de segments se rejoignant sur les nœuds du quadrillage.
- L'axe suit une ligne du quadrillage.
- L'axe n'est pas l'axe de symétrie de la partie quadrillée, on évite ainsi le comptage des carreaux à partir des bords du quadrillage.
- La figure est d'un seul côté par rapport à l'axe de symétrie.
- La figure n'a elle-même pas d'axe de symétrie parallèle à l'axe donné ce qui impose la prise en compte du retournement dans le tracé de la figure symétrique.
- Le quadrillage est inclus sur un fond blanc. Ce n'est pas une feuille globalement quadrillée.

Caractéristiques distinctes :

- Le positionnement de la figure par rapport à l'axe n'est pas le même dans les deux cas :
  - Dans le bateau l'axe ne touche pas la figure, on cherche à tracer la figure symétrique par rapport à l'axe.
  - Dans l'étoile, l'axe touche la figure ; on cherche plutôt à dessiner l'autre partie de l'étoile c'est-à-dire à compléter la figure par symétrie.
- Le positionnement du quadrillage n'est pas le même dans les deux cas :
  - Dans le bateau, le quadrillage n'est pas parallèle à un bord de la feuille, l'axe est oblique par rapport à ces bords (mais l'axe suit les lignes du quadrillage).
  - Dans l'étoile, la position du quadrillage et celle de l'axe sont parallèles aux bords de la feuille.
- Les figures n'ont pas les mêmes caractéristiques :
  - La figure « bateau » n'admet pas d'axe de symétrie.
  - L'étoile est une figure relativement complexe (beaucoup de segments). Elle présente déjà un axe de symétrie. Ainsi la figure finale présentera deux axes de symétrie perpendiculaires et un centre de symétrie.

Remarque :

Seulement deux caractéristiques communes et deux caractéristiques distinctes sont demandées.

2. Deux autres transformations

L'élève B utilise la translation pour le bateau et pour l'étoile (avec un décalage pour certains sommets).
L'élève C effectue une symétrie centrale (visible sur le bateau).

3. Démarche de l'élève D

Pour le bateau, l'élève D a repéré les extrémités des segments de la figure sur les nœuds du quadrillage.
Pour l'étoile, il a de même repéré les extrémités des segments de la figure sur les nœuds du quadrillage. Il semble aussi avoir numéroté le comptage des carreaux.
Il semble donc que cet élève n'ait pas pris en compte la forme globale de la figure pour son tracé, mais a construit le symétrique point après point, en s'assurant de l'équidistance par rapport à l'axe. Il a ensuite relié les points en traçant des segments. Cette façon de procéder est efficace lorsque la figure de base n'est pas trop complexe sinon cette procédure peut s'avérer inopérante (trop de points à relier, comme dans le cas de l'étoile, où les symétriques des points sont bien placés mais pas les segments).

4. Propriétés de la symétrie axiale respectées par l'élève

Dans la construction de l'élève A, l'image d'un segment est un segment de même longueur et les angles sont conservés. Les segments perpendiculaires à l'axe restent perpendiculaires dans la symétrie. La figure obtenue est « retournée ».

5. Les erreurs de l'élève A

Pour le bateau, l'élève ne prend pas en compte la distance à l'axe. Il semble avoir compté les carreaux à partir du bord du quadrillage (3 carreaux), sans tenir compte de l'axe. Par ailleurs, il décale la figure d'un carreau vers le bas ; ceci peut être dû à un mauvais comptage ou centrage du dessin dans l'espace disponible, ou dans le pliage virtuel évoqué dans la consigne. Il prend bien en compte la forme de la figure, mais pas son placement par rapport à l'axe.
Pour l'étoile, l'élève semble avoir complété la partie vide du dessin, sans doute dans l'évocation du pliage suggéré par la consigne. Peut-être a-t-il également complété son dessin pour obtenir une étoile à 5 branches (dessin classique d'une étoile).

MULTIPLICATION PAR 10 d'après un sujet de Paris

Solution du problème :

10 × 15,25 € = 152,50 € ; dix Père Noël en chocolat coûtent 152,50 €

Élève 1 :

* L'élève 1 reconnaît à bon escient une situation multiplicative.
* Il effectue 10 × 15,25 € par un calcul réfléchi : il décompose 15,25 € en 15 € et 25 centimes, puis applique en acte la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
* Ses calculs sont corrects (notamment la conversion des centimes en euros).
* Il commet seulement une erreur dans la phrase de conclusion, en écrivant 150,50 € alors qu'il avait écrit la bonne réponse juste au-dessus. C'est probablement une erreur de recopie.

Élève 2 :

* L'élève 2 reconnaît à bon escient une situation multiplicative.
* Le résultat de l'opération est faux : il obtient 150250c.
* On peut penser que cet élève n'a pas compris le sens des écritures à virgule des nombres décimaux, et qu'il voit « 15,25 » comme la juxtaposition de deux entiers. Il est possible qu'il ait multiplié 15 par 10 et 25 par 10 (en effectuant correctement ces deux produits) puis juxtaposé les deux résultats pour obtenir 150250. Il est également possible qu'il ait « ajouté un zéro » aux deux parties, puis oublié d'écrire la virgule.
* Il ne fait pas de phrase de conclusion.

Élève 3 :

* L'élève 3 reconnaît à bon escient une situation multiplicative.
* Il pose l'opération en colonnes et le résultat final est correct.
* La conclusion du problème est correcte.
* Il applique un algorithme sans en comprendre le sens car il écrit une ligne de zéros inutile et car le second produit partiel est incorrect (il devrait être égal à 15,25 × 10). On ne sait pas comment les chiffres sont placés par rapport à la virgule dans le résultat final : peut-être par hasard au bon endroit, ou il ne tient pas compte des virgules indiquées dans les produits partiels pour placer la virgule dans le produit final (deux chiffres après la virgule dans le produit final comme dans le prix du Père Noël).

Élève 4 :

* L'élève 4 reconnaît à bon escient une situation multiplicative.
* Il effectue l'opération en ligne et le résultat est correct.
*Il s'appuie de manière automatisée sur une règle apprise par cœur.

Élève 5 :

* L'élève traduit la situation multiplicative par une addition itérée (ce qui est correct mais donne des calculs plus longs).
* L'opération effectuée en colonnes et la conclusion sont correctes.
* Cet élève pose également la multiplication de 15 par 10 et de 25 par 10 de manière correcte, sans qu'on puisse savoir si ces calculs servent à poser l'addition itérée, ou à vérifier le résultat obtenu (il additionne 150 et 250 de manière correcte mais sans lien avec la situation réelle : 150 correspond normalement à 150 € et 250 à 2,50 €).

DIVISION EUCLIDIENNE d'après un sujet du CRPE Nouvelle-Calédonie

Préambule

Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels, b étant non nul, il existe unique le couple (q, r) d'entiers naturels tel que :

$$a = b \times q + r, \qquad \text{avec } \ 0 \leq r < b.$$

On dit que q est le **quotient** de la **division euclidienne** de a par b. L'entier r est le **reste**. L'entier a est le **dividende**, b est le **diviseur.**

La condition $0 \leq r < b$ assure l'unicité du quotient et du reste.

Lorsque r est nul ($a = b \times q$), on dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a.

1. Exercice de mathématiques

a) Valeurs de *N*

D'après les données fournies, le quotient est le triple du reste dans la division euclidienne de N par 5, on peut écrire : $\boldsymbol{N = 5 \times 3r + r}$, avec N et r entiers naturels, $N \neq 0$ et $0 \leq r < 5$.
Ainsi $N = 5 \times 3r + r = 16r$.
Et r peut prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4.
Si r = 1, alors ***N* = 16**.
Si r = 2, alors ***N* = 32**.
Si r = 3, alors ***N* = 48**.
Si r = 4, alors ***N* = 64**.

b) Valeurs de *P*

D'après les données fournies, le quotient est le triple du reste dans la division euclidienne de P par 333, on peut écrire : $\boldsymbol{P = 333 \times 3r + r}$, avec P et r entiers naturels, $P \neq 0$ et $0 \leq r < 333$.
De plus P < 10 000 et P est multiple de 6 : $P = 6k$, avec k entier naturel.
$P = 333 \times 3r + r = 1\,000r$ et $P < 10\,000$, d'où $r < 10$.
Puisque P est non nul, multiple de 6, r doit être un multiple de 3 (1000 étant un multiple de 2).
Les seules valeurs possibles de r sont : 3, 6 et 9 et, par conséquent :
si r = 3, alors ***P* = 3000** ;
si r = 6, alors ***P* = 6000** ;
si r = 9, alors ***P* = 9000**.

2. Une situation en CE2 et les productions de deux élèves

a) Intérêt du problème

Proposer un tel problème avant que la technique opératoire de la division euclidienne ne soit connue par les élèves permet de leur faire saisir la signification de l'opération comme permettant de résoudre des problèmes de partage et de groupements : ici, on connaît le nombre de parts (le nombre d'enfants) et on cherche la valeur d'une part (le nombre de billes par enfant).
Sans connaître l'opération experte, l'élève peut résoudre le problème en mettant en œuvre des procédures personnelles faisant appel au dénombrement, au calcul, à la numération.

b) Description des procédures

Nous décrivons ci-dessous les procédures adoptées par les deux élèves dans les productions fournies en identifiant les erreurs éventuelles.

Élève A

Il semble simuler la distribution des billes, en écrivant les nombres de billes distribuées sur trois colonnes (une par enfant) : d'abord 50 par enfant, puis 40, puis 8. Au fur et à mesure, il contrôle ce qui reste après chaque distribution en posant des soustractions et en évaluant mentalement combien de billes peuvent être distribuées selon celles qui restent. Il ajoute mentalement les trois nombres de la colonne pour formuler la réponse.
L'élève ne contrôle toutefois pas le résultat obtenu après avoir posé la première opération et, par conséquent, le nombre de billes qu'il « distribue » au final à chaque enfant :

- en posant la soustraction 216 – 150, il commet une erreur car il fournit le résultat « 146 » au lieu de « 66 » : 1 – 5 étant impossible, il pose 5 – 1, il soustrait le plus petit au plus grand (erreur de l'**écart non orienté**) ;
- il ne contrôle pas que $98 + 98 + 98$ dépasse 216 (ordre de grandeur).

D'après le résultat obtenu, il resterait 2 billes dont il ne fait aucune mention.

Élève B

L'élève représente le nombre total de billes en distinguant les centaines, les dizaines et les unités : deux « ronds », contenant chacun dix petits « ronds », pour les centaines, un petit « rond », contenant dix (?) petits points, pour les dizaines et 6 points pour les unités.
Vraisemblablement, il assemble d'abord le petit « rond » et cinq points, soit 15 billes pour l'associer ensuite à l'écriture multiplicative « $3 \times 5 = 15$ », il reconnaît sans doute la relation entre 15 et 3 (le nombre d'enfants).
Il reste donc deux « ronds » et un point qu'il assemble en les associant erronément à « 21 » car il écrit « $3 \times 7 = 21$ » et en précisant que *c'est des dizaines*. Il conclut donc qu'*une part est 75 billes* car, selon sa procédure, il y aura 7 dizaines et 5 unités par enfant.
Cet élève commet une erreur lorsqu'il associe les deux centaines avec une unité en les faisant correspondre à 21 dizaines.
Comme l'élève A, il ne contrôle pas que le nombre final par enfant ne convient pas car $75 + 75 + 75$ dépasse 216.

Remarque :

Il est vrai que le nombre de dizaines dans 216 est égal à 21 mais le schéma fourni par l'élève montre qu'il ne parvient pas à ce résultat par un raisonnement correct. C'est aussi pour cette raison qu'il est vraisemblable qu'il ait commencé par identifier les 15 billes (une dizaine et cinq unités), il lui reste ensuite deux centaines et une seule unité qu'il assemble probablement pour qu'il ne reste rien.

c) Procédure s'appuyant sur la numération chiffrée

La maîtrise de l'aspect « décimal » de notre système de numération permet de résoudre le problème :
10 unités = 1 dizaine ; 10 dizaines = 1 centaine ; …

216 unités se décomposent en 21 dizaines et 6 unités :

- 21 dizaines = 3 × 7 dizaines = 3 × **70 unités** ;
- 6 unités = 3 × **2 unités**.

On conclut que chaque enfant aura 72 billes.