# COPIRELEM

*Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.*

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

# Mathématiques

# Annales 2017

*Sujets, corrigés et éléments de formation*

+

***Exercices complémentaires avec corrigés issus des concours blancs et examens des ESPE***

**Ces annales ont été rédigées par :**

**Agnès BATTON** (ESPE de l'Académie de Versailles)
**Anne BILGOT** (ESPE de l'Académie de Paris)
**Christophe BILLY** (ESPE de l'Académie de Toulouse)
**Laetitia BUENO-RAVEL** (ESPE de Bretagne)
**Richard CABASSUT** (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
**Valentina CELI** (ESPE d'Aquitaine)
**Bruno COURCELLE** (ESPE de Clermont-Auvergne)
**Pierre DANOS** (ESPE de l'Académie de Toulouse)
**Nicolas DE KOCKER** (ESPE de Lorraine)
**Gwenaëlle GRIETENS** (ESPE de l'Académie de Nantes)
**Pascal GRISONI** (ESPE de Bourgogne)
**Michel JAFFROT** (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)
**Laurence MAGENDIE** (retraitée de L'ESPE d'Aquitaine)
**Christine MANGIANTE** (ESPE de l'Académie de Lille)
**Pascale MASSELOT** (ESPE de l'Académie de Versailles)
**Edith PETITFOUR** (ESPE de Lorraine)
**Arnaud SIMARD** (ESPE de Franche-Comté)
**Frédérick TEMPIER** (ESPE de l'Académie de Poitiers)
**Claire WINDER** (ESPE de l'Académie de Nice)
**Hélène ZUCCHETTA** (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

**Pierre EYSSERIC** (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
**Michel JAFFROT** (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)

Coordination de l'ensemble :
**Pierre EYSSERIC** (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

# REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d’examens proposés dans leurs ESPE.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
  ***Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :***
  - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
  - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
  - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire) et l’**IREM** (Institut de recherche pour l’enseignement des mathématiques) de l’Université de Paris VII Denis Diderot.

# SOMMAIRE

## Informations



## Les sujets et leurs corrigés

# EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

# L'ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2017

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html.

## CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

## DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

*Référence :*

*http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98653/les-epreuves-crpe-externe-troisieme-crpe-second-crpe-interne.html*

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

**Épreuves d'admissibilité**

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

**Deuxième épreuve d'admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques**

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.

3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

## MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

**Références concernant le matériel autorisé :**

« Le matériel autorisé pour passer l'épreuve, en dehors du matériel normal d'écriture, est indiqué dans le document qui vous est fourni en même temps que la convocation. »

http://www.siec.education.fr/votre-concours/crpe-enseignants-du-1er-degre/se-preparer#triple-mission

**Références concernant l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2018 lors des examens et concours.**

http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=87354

« I - Pour les examens et concours de l'enseignement scolaire, la présente note de service annule et remplace les dispositions énoncées par la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 relative à l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2000. **Elle est applicable à compter du 1er janvier 2018**. »
« ...l'usage de la calculatrice est autorisé si le sujet de l'épreuve le prévoit expressément. La page de garde des sujets ... doit impérativement indiquer si l'usage de la calculatrice est autorisé ou interdit. »

« II - **Est considéré comme « calculatrice »** tout dispositif électronique autonome, dépourvu de toute fonction de communication par voie hertzienne, ayant pour fonction essentielle d'effectuer des calculs mathématiques ou financiers, de réaliser des représentations graphiques, des études statistiques ou tous traitements de données mathématiques par le biais de tableaux ou diagrammes. »

« Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » répondant aux spécificités suivantes :

  - la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;

  - le blocage de toute transmission de données, que ce soit par wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;

  - la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;

  - la non réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve. La sortie du «mode examen» nécessite une connexion physique, par câble, avec un ordinateur ou une calculatrice. »

« III - **Le déroulement des épreuves**
Le « mode examen » ne doit être activé par le candidat, pour toute la durée de l'épreuve, que sur instruction du surveillant de salle lorsque le sujet de l'épreuve autorise l'usage de la calculatrice.
Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices. L'utilisation d'une calculatrice non conforme aux caractéristiques techniques mentionnées au point II de la présente note donne lieu à la mise en œuvre d'une procédure disciplinaire.

Est interdite l'utilisation de tout module ou extension enfichable ainsi que de tout câble, quelles qu'en soient la longueur et la connectique.

Les chefs de centres d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés des consignes relatives à l'utilisation des calculatrices, qui doivent être strictement respectées.

Les recteurs d'académie et les vice-recteurs veilleront à ce que tous les personnels appelés à participer aux tâches de surveillance des épreuves soient informés de ces dispositions. »

# AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

# CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Par ailleurs, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

# PROBLÈME

| | Géométrie plane | Trigonométrie | Géométrie espace | Arithmétique | Numération Opérations | Équations Mise en équation | Probabilités | Grandeurs et mesures | Vitesses-Échelles Pourcentages-Proportionnalité | Fonctions Graphiques | Tableur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sujet 1 2017 | X | | | | | | | X | X | X | |
| Sujet 2 2017 | X | | | | | | | | X | X | X |
| Sujet 3 2017 | X | | X | | | | | X | X | X | |
| Sujet 4 2017 | X | | | | | | | | | X | |
| Sujet 5 2017 | X | | X | | | | | | | X | X |

# EXERCICES

| | Géométrie plane | Géométrie espace | Numération Arithmétique | Programmes de calcul | Équations Mise en équation | Probabilité Statistique | Algorithmique | Grandeurs et mesures | Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité | Fonctions Graphiques | Tableur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sujet 1 2017 | X | | X | | X | X | X | | X | | |
| Sujet 2 2017 | | | X | X | X | X | X | | X | | |
| Sujet 3 2017 | X | | X | | | X | X | X | X | | |
| Sujet 4 2017 | X | X | X | | | X | | | X | X | |
| Sujet 5 2017 | | | X | | | X | X | | X | | |

# ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

| | Addition Soustraction | Proportionnalité | Division | Nombres | Fractions et décimaux | Multiplication | Résolution de problèmes | Grandeurs et mesures | Algorithmique | Cycle |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sujet 1 2017 | | **X** | **X** | | | | **X** | | | **3** |
| Sujet 2 2017 | | | **X** | | | **X** | **X** | | | **3** |
| Sujet 3 2017 | **X** | | | | | | **X** | | **X** | **2** |
| Sujet 4 2017 | **X** | | | | | **X** | **X** | | | **2-3** |
| Sujet 5 2017 | **X** | | | | | | **X** | | | **2** |

# ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

| | Addition Soustraction | Proportionnalité | Division | Nombres | Fractions et décimaux | Multiplication | Résolution de problèmes | Grandeurs et mesures | Algorithmique | Cycle |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sujet 1 2017 | | | | **X** | | | **X** | | | **1** |
| Sujet 2 2017 | | | | | | | | | | |
| Sujet 3 2017 | **X** | | | | | | **X** | | **X** | **2** |
| Sujet 4 2017 | | | | | | | | | | |
| Sujet 5 2017 | **X** | | | | | **X** | **X** | | | **2** |

*Remarque :*

*Dans les sujets de cette session du concours, un grand nombre d'exercices de la troisième partie, bien qu'annoncés comme des analyses de situations d'enseignement, ne sont que des analyses de productions d'élèves, parfois associées à une analyse d'un énoncé de problème.*

# LES SUJETS DU CONCOURS 2017

# GROUPEMENT 1 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

### Présentation du problème

Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d'une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux / Brive-la-Gaillarde / Montauban.

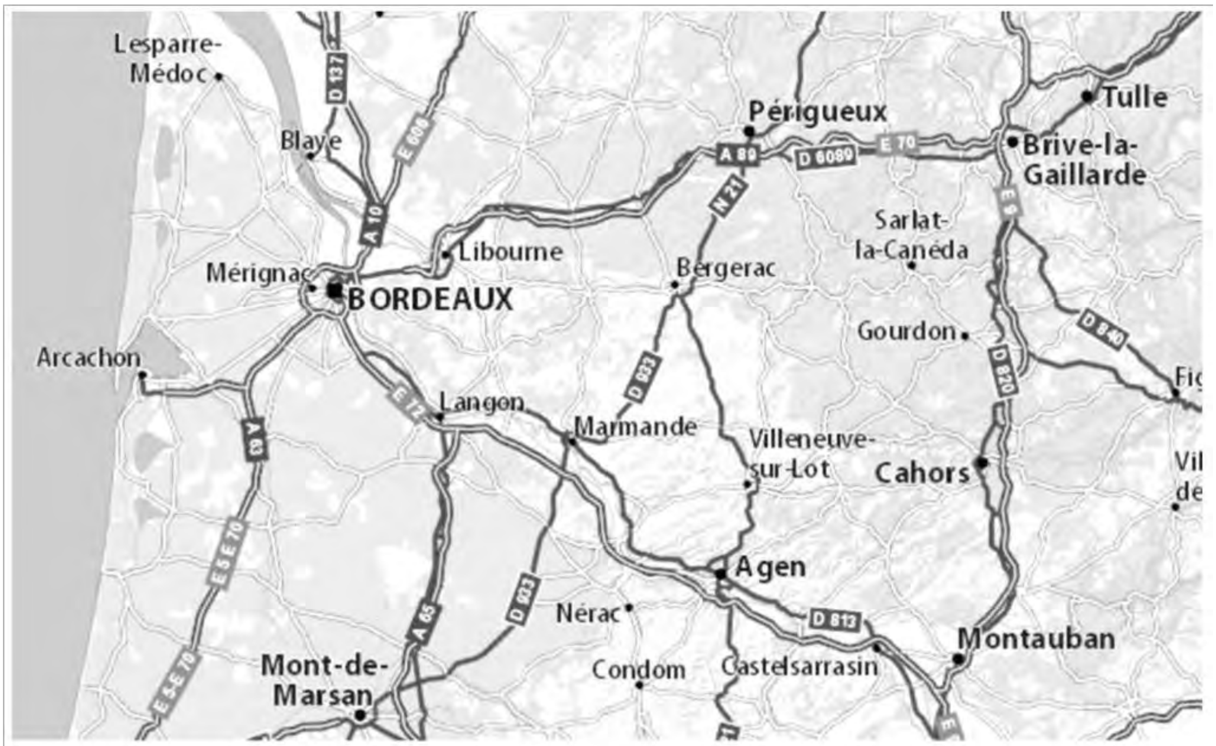



Figure 1 : Source = http://www.viamichelin.fr/

### 1) Représentation géométrique

À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde.

On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban. Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

a) Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.

b) Construire le triangle ABC.

c) Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

### 2) Étude de faisabilité

Dans le cadre d'un projet d'extension, la société d'exploitation mandate une entreprise de BTP pour étudier la construction d'une portion d'autoroute reliant Brive-la-Gaillarde et l'autoroute entre Bordeaux et Montauban. On cherche à construire la portion d'autoroute la plus courte possible.

Sur la figure construite précédemment, on note D le point du segment [AC] tel que la distance BD soit la plus courte possible. Le point D représente l'emplacement de l'échangeur à construire.

a) Placer le point D sur la figure et indiquer ce que représente la droite (BD) dans le triangle ABC.

b) Les formules trigonométriques et un théorème appelé théorème d'Al Kashi permettent d'établir l'égalité (admise) :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD.$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, montrer que AD = 5,5 cm.

c) En déduire les longueurs CD et BD.

### 3) Validation du projet

Il s'avère que l'échangeur ne peut être placé à cet endroit car il serait situé dans une zone protégée.
Sur la figure construite précédemment, E désignera l'emplacement définitivement choisi pour l'échangeur et donc [BE] la portion d'autoroute à réaliser.
On appelle E le point du segment [AD] tel que [ED] mesure 0,9 cm.

a) Déterminer la mesure en degré, arrondie au centième de degré, de l'angle $\widehat{DBE}$.

b) Calculer la longueur BE, arrondie au centième de centimètre.

c) En déduire la longueur, en kilomètre, arrondie au dixième de kilomètre près, de la portion d'autoroute qui sera réalisée.

### 4) Tarification

Après validation, le projet a été réalisé. La société d'exploitation des autoroutes propose des badges à ses usagers.
Mme Dupuis, enseignante à Brive, emprunte cette nouvelle portion d'autoroute chaque jour, matin et soir. Elle hésite entre les deux propositions suivantes :

| **Tarif 1** | **Tarif 2** |
|---|---|
| Sans badge, un aller simple coûte 12,40 €. | Un badge coûte 30 € par an et donne lieu à une réduction de 20 % par aller simple. |

a) Le graphique ci-dessous représente le coût global pour chaque tarif en fonction du nombre d'allers simples effectués.

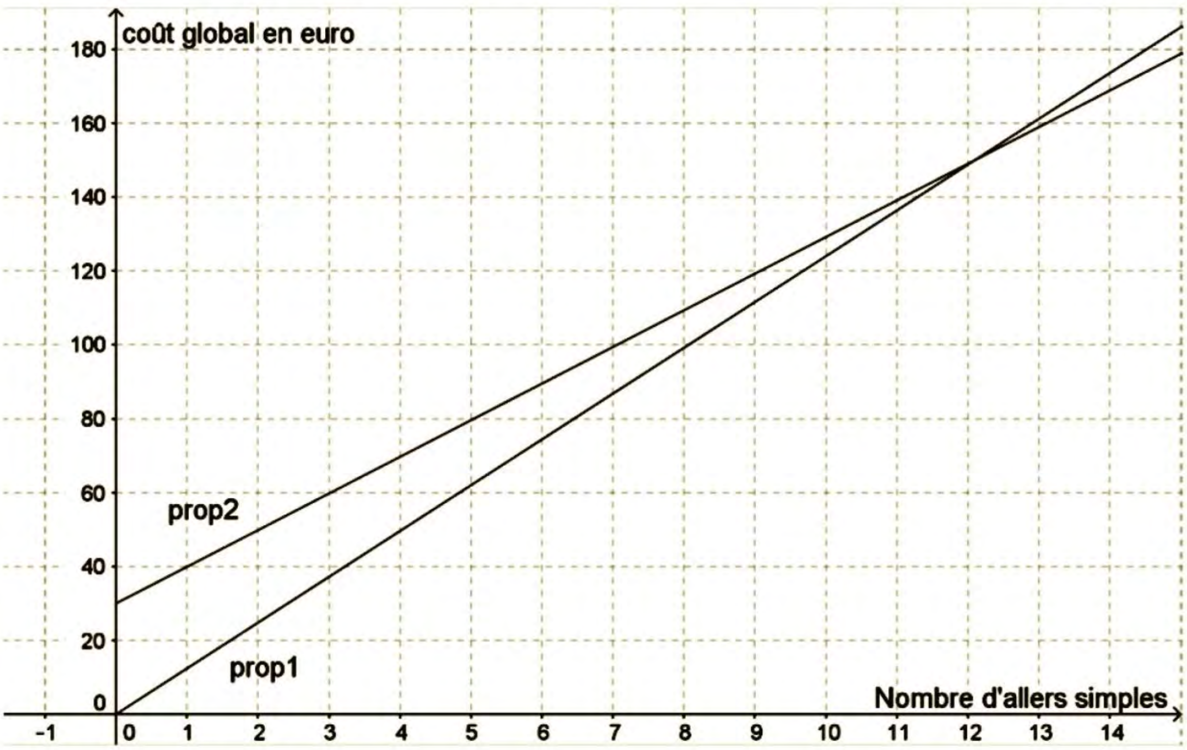



*Figure 2 : Coût global en euro en fonction du nombre d'allers simples*

Déterminer graphiquement à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.

b) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples $x$ le coût global $f(x)$, en euro, selon le tarif 1.

c) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples $x$ le coût global $g(x)$, en euro, selon le tarif 2.

d) Retrouver par le calcul à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.

## 5) Les dangers de l'autoroute

Information :
Pour un véhicule, la distance d'arrêt $D_a$ correspond à la somme de la distance de réaction $D_r$ et la distance de freinage $D_f$ :

$$D_a = D_r + D_f$$

La distance de réaction $D_r$ est la distance parcourue par le véhicule pendant le temps que met le conducteur pour réagir. Le temps de réaction est d'une seconde pour un conducteur en bonne forme et de deux secondes pour un conducteur fatigué.
La distance de freinage, exprimée en mètre, est donnée par la formule :

$$D_f = \frac{v^2}{254 \times C_{fl}}$$

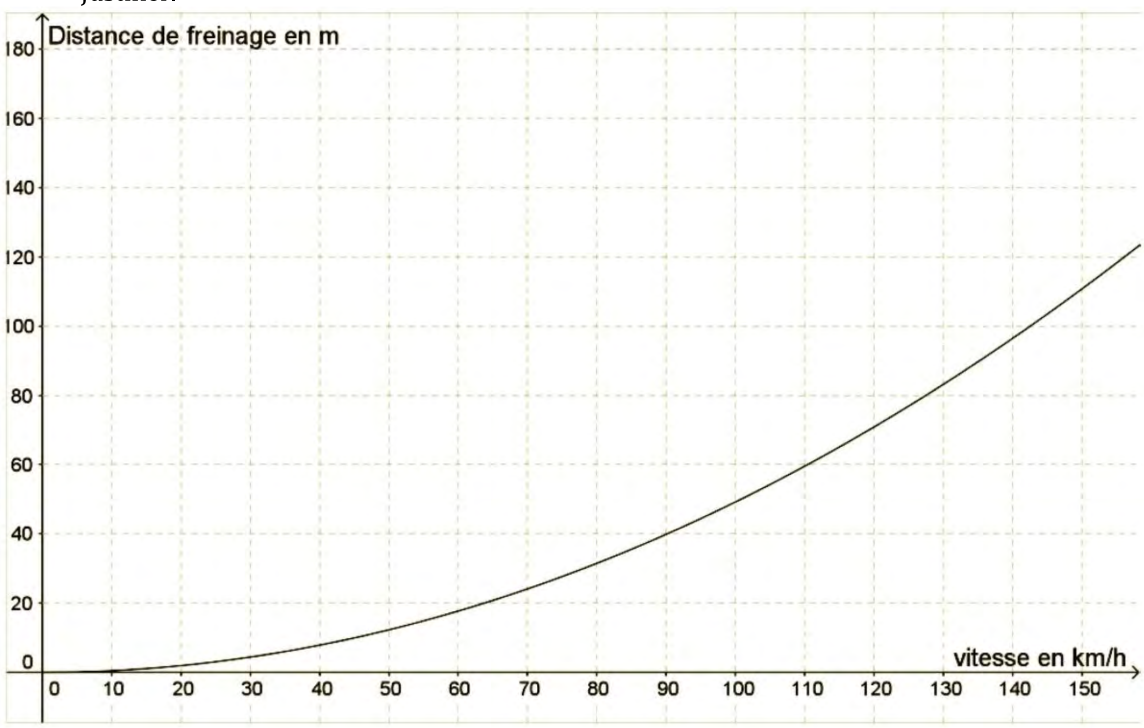
où $v$ est la vitesse en kilomètre par heure et $C_{fl}$ désigne le coefficient de frottement longitudinal. La distance obtenue est exprimée en mètre.
On admet que le coefficient $C_{fl}$ vaut 0,8 sur route sèche et que sur route mouillée, ce coefficient est divisé par deux.

inspiré de : http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/college/troisieme/cours/distance_arret/Distance_arret.pdf

Une voiture roule à 120 km/h sur l'autoroute. La chaussée est sèche et le conducteur est fatigué. Tout à coup, un cerf surgit sur la voie et s'arrête, tétanisé par les feux de la voiture.
L'animal se trouve à 150 m de la voiture.

a) Calculer la distance de réaction $D_r$, arrondie au dixième de mètre, pour cette voiture conduite par un conducteur fatigué.

b) On donne ci-dessous la courbe correspondant à la distance de freinage $D_f$ sur route sèche en fonction de la vitesse. Indiquer si la collision avec le cerf pourra être évitée.
Justifier.




*Distance de freinage en mètre, en fonction de la vitesse en km/h.*

c) Exprimer une formule à écrire dans la cellule B3 du tableur ci-dessous pour calculer la distance de freinage $D_f$, en mètre, formule que l'on fera ensuite glisser pour l'étendre aux autres cellules de la colonne B dans le tableur.

B3

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Distance de freinage Route sèche | |
| 2 | V (km / h) | $D_f$ (m) |
| 3 | 10 | |
| 4 | 20 | |
| 5 | 30 | |
| 6 | 40 | |
| 7 | 50 | |
| 8 | 60 | |
| 9 | 70 | |
| 10 | 80 | |
| 11 | 90 | |
| 12 | 100 | |
| 13 | 110 | |
| 14 | 120 | |
| 15 | 130 | |
| 16 | | |

## DEUXIEME PARTIE (13 POINTS)

***Cette partie est composée de trois exercices indépendants.***

### Exercice 1

Au mois de février 2017, on a interrogé 12 527 personnes de plus de 15 ans à la sortie du métro, à propos du nombre de fois où elles sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017. Chaque personne sondée est enregistrée par un numéro, de 1 à 12 527.
Le tableau ci-dessous présente des résultats, selon la classe d'âge des personnes interrogées.

| | De 15 à 25ans | De 26 à 44ans | De 45 à 60 ans | Plus de 60 ans | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Pas du tout | | 82 | 415 | 147 | 666 |
| Une fois | 682 | | 1243 | 589 | |
| Deux fois | | 634 | 552 | 138 | 1737 |
| Trois fois | 174 | 95 | | | 1907 |
| Quatre fois ou plus | 251 | 418 | 923 | 317 | |
| TOTAL | 1542 | | 3517 | 2445 | |

1) Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

2) On tire au hasard un des numéros correspondant aux personnes interrogées, en supposant que chacun a la même probabilité d'être choisi.

   a. Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

   b. Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans.

   c. Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

## Exercice 2

On utilise le programme ci-contre.

1) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 7 ?
2) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7 ?
3) Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre – 6 ?


## Exercice 3

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Affirmation :
   *« 117 est un nombre premier. »*

2)
   a. Affirmation :
   *« Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8. »*

   b. Affirmation :
   *« Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 32. »*

3) Affirmation :
   *« Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. »*

4) Affirmation :
   *« 6 est l'unique solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$. »*

5) On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20 % et 10 %.
   Affirmation :
   *« L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28 %. »*

6) Un rectangle a une largeur et une longueur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20 % et la longueur de 10 %.
   Affirmation :
   *« Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15 %. »*

## TROISIEME PARTIE (14 points)

***Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.***

### SITUATION 1

Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

> « J'ai installé trois poupées avec leur assiette autour de cette table pour le goûter. Elles pourront commencer leur goûter quand il y aura un biscuit dans l'assiette de la poupée blonde, un biscuit dans l'assiette de la poupée brune et un biscuit dans l'assiette de la poupée rousse.
>
> Les biscuits du goûter se trouvent dans une boîte dans le coin cuisine.
>
> Vous devez aller chercher juste ce qu'il faut de biscuits pour le goûter des poupées. Vous pouvez faire plusieurs voyages. »

La table des poupées est éloignée de quelques mètres du coin cuisine.
L'information suivante « la boîte contient 5 biscuits » n'est pas donnée aux élèves.
On appelle « voyage » un aller au coin cuisine et un retour à la table des poupées.

- L'élève A a effectué 3 voyages, rapportant un seul biscuit à chaque fois.
- L'élève B a effectué 1 voyage. Il utilise sa main droite dont il abaisse deux doigts. Il se déplace à la table du coin cuisine et revient avec 3 biscuits dans la main gauche.
- L'élève C effectue très rapidement 1 voyage. Il a pris 3 biscuits.
- L'élève D effectue 2 voyages. Au premier voyage il ramène tous les biscuits. Au deuxième il rapporte 2 biscuits à la cuisine.

1) Quel aspect du nombre est mobilisé dans cette situation ?
2) Analyser les stratégies mises en œuvre par chacun des élèves.
3) Proposer une modification interne à l'énoncé de la situation susceptible d'engager les élèves A et D à évoluer dans la construction du nombre. Expliciter cette évolution.

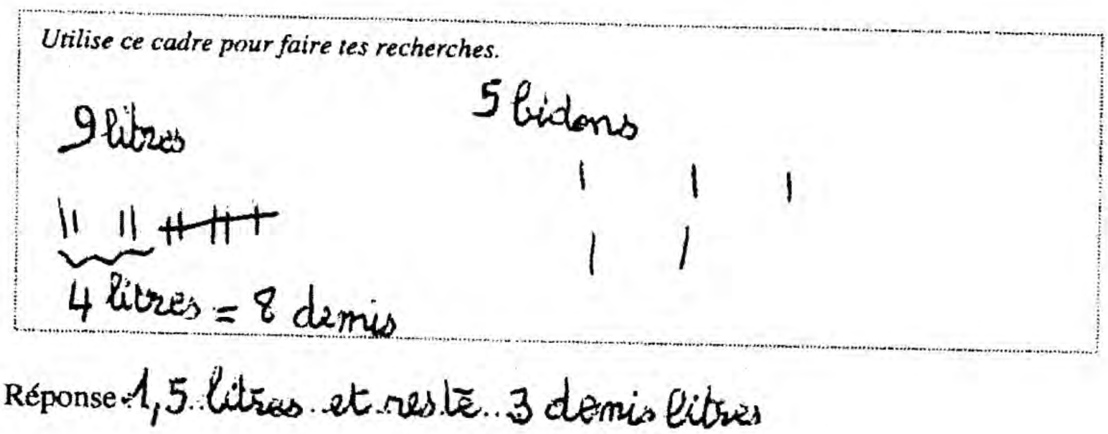
### SITUATION 2

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2012.

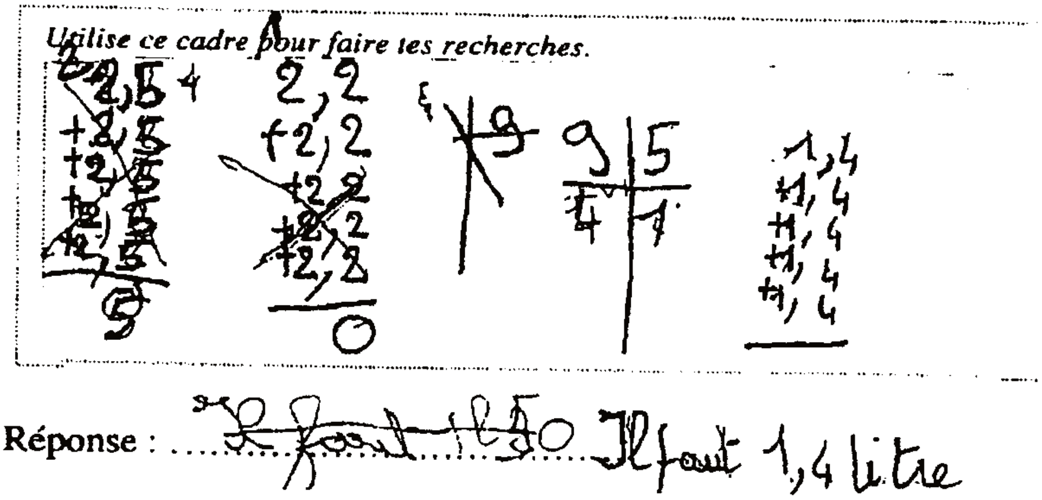
> *Il faut 9 litres d'huile pour remplir complètement 5 bidons identiques.*
> *Quelle est la contenance, en litre, de chacun de ces bidons ?*

1) Quelle opération permet de répondre à cette question ?
2) Voici les productions de trois élèves Julia, Karima et Louis. Pour chacune d'entre elles, expliquer la procédure utilisée.

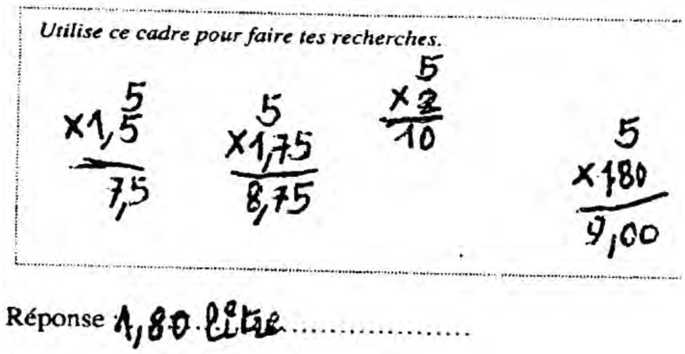
### Julia


*Utilise ce cadre pour faire tes recherches.*
9 litres
5 bidons
4 litres = 8 demis
Réponse 1,5 litres et reste 3 demis litres

**Karima**




**Louis**




3) Quelles modifications, concernant les nombres en jeu dans l'exercice, peut proposer l'enseignant à Louis pour l'encourager à changer de procédure ?

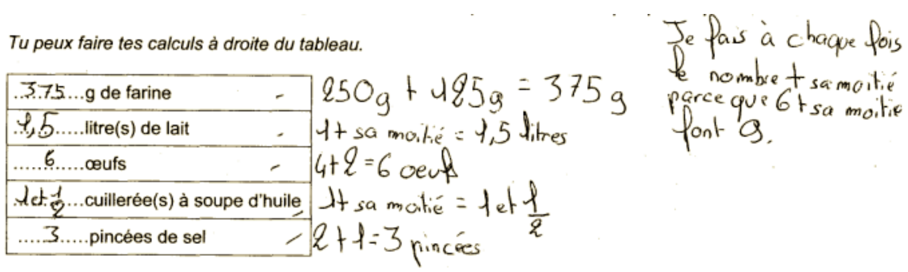
## SITUATION 3

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2008.

| |
|---|
| *Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :*<br>*- 250 g de farine*<br>*- 1 litre de lait*<br>*- 4 oeufs*<br>*- 1 cuillerée à soupe d'huile*<br>*- 2 pincées de sel.*<br>*Calcule la quantité de chacun des ingrédients nécessaire pour faire des crêpes pour 9 personnes.* |

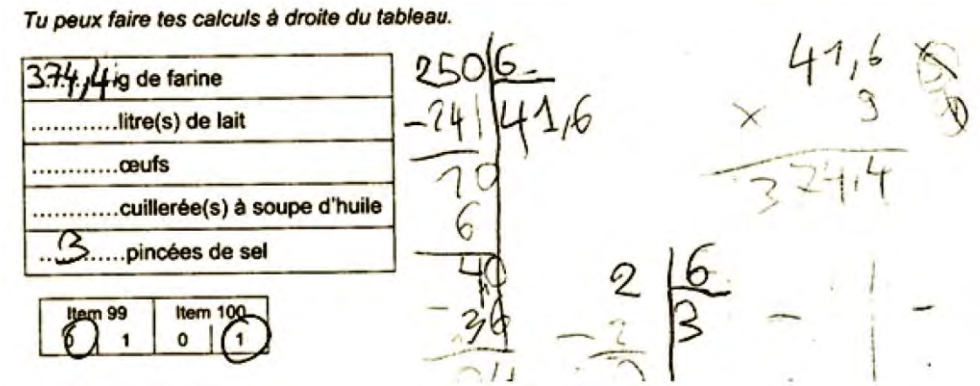
Voici les productions de trois élèves :

**Élève A**

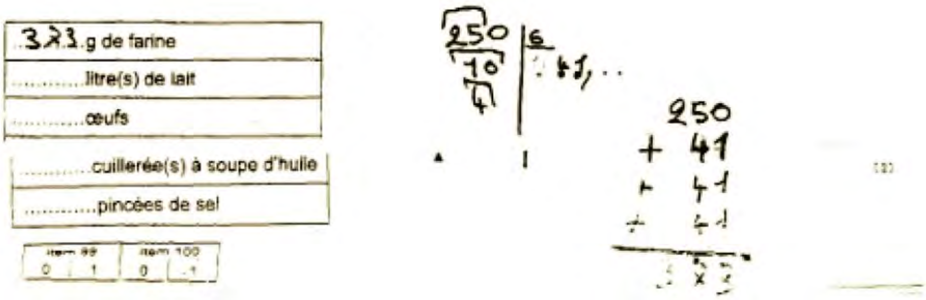

Tu peux faire tes calculs à droite du tableau.

| | |
|---|---|
| 375 g de farine | 250g + 125g = 375 g |
| 1,5 litre(s) de lait | 1 + sa moitié = 1,5 litres |
| 6 œufs | 4+2 = 6 oeufs |
| 1 et ½ cuillerée(s) à soupe d'huile | 1 + sa moitié = 1 et ½ |
| 3 pincées de sel | 2+1 = 3 pincées |

**Élève B**




**Élève C**



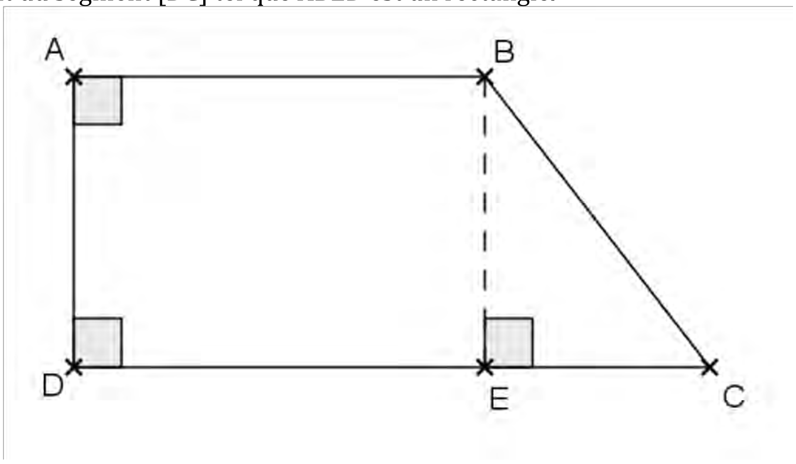

1) Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?
2) Expliciter les procédures utilisées pour le calcul de la masse de farine nécessaire par chacun des élèves A, B et C.
3) En quoi le choix de 300 g de farine nécessaires au lieu de 250 g aurait-il pu modifier les procédures proposées par les élèves ?

# GROUPEMENT 2 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

*Les figures données ne sont pas à l'échelle.*
La figure ci-dessous modélise un jardin dont l'aménagement doit être repensé.
Le trapèze ABCD est tel que :

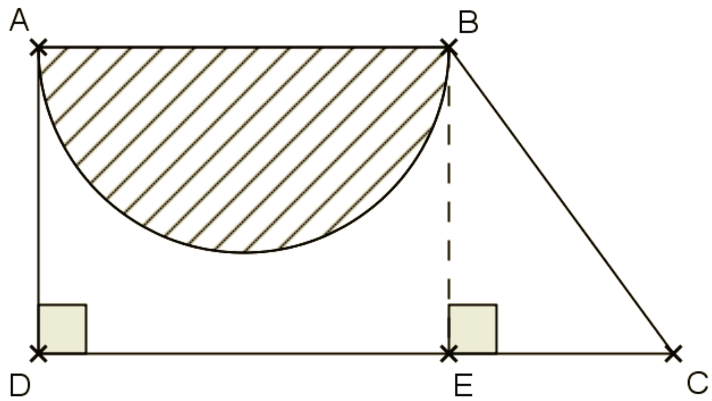
- les droites (AB) et (DC) sont parallèles ;
- les droites (AD) et (DC) sont perpendiculaires ;
- AB = 50 m, AD = 30 m et DC = 70 m ;
- E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle.




### A - Premier projet d'aménagement

1) Dans un premier temps, le propriétaire désire clôturer le jardin.
Calculer la longueur de clôture nécessaire sachant qu'il prévoit l'installation d'un portail de 3,10 m de large. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mètre.

2) Dans un deuxième temps, il partage son jardin en trois parties :




- Un espace réservé au potager représenté par le triangle rectangle BCE.
- Un espace de plantations florales représenté par le demi-disque hachuré de diamètre [AB].
- Un espace engazonné sur le reste du jardin.

Calculer l'aire arrondie au mètre carré de chacune des trois parties du jardin.

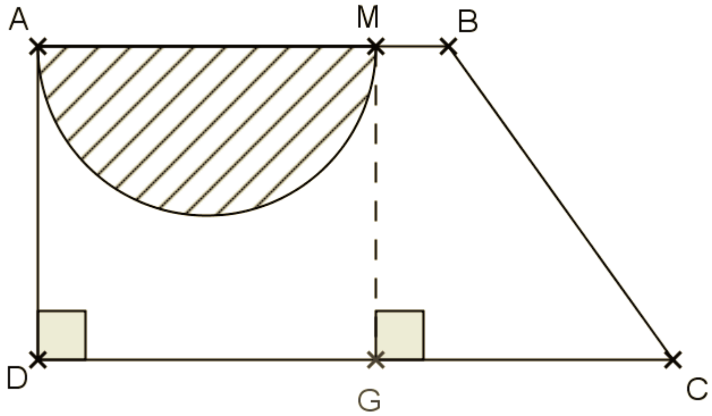
### B - Plantations

1) Pour cette question, on considèrera que l'aire de la partie engazonnée est de 520 m$^2$.
Le propriétaire contacte un paysagiste qui propose, pour l'ensemencement du gazon, un tarif de 5 euros le m$^2$. Il offre une remise sur le prix total et ne facture que 1950 euros.
Quel est le pourcentage de la remise accordée ?

2) Pour débuter son potager, le propriétaire a acheté 75 plants de salade et 50 pieds de tomates. Il se souvient que le prix d'un plant de salade était de 22 centimes et qu'il a payé, en tout, entre 50 et 55 euros.
En déduire un encadrement, le plus précis possible, du prix d'un pied de tomates.

## C - Étude d'un agrandissement du potager.

Après réflexion, le propriétaire décide d'agrandir son potager. Sur le plan de son jardin, il place un point M sur le côté [AB] et trace la droite parallèle à (AD) passant par M. Elle coupe le segment [DC] en un point G. Le potager est maintenant représenté par le trapèze MBCG et l'espace de plantations florales par le demi-disque de diamètre [AM].




On pose AM = $x$, où $x$ est exprimée en mètre.

1) a) Donner un encadrement des valeurs de $x$ possibles.

b) Démontrer que l'aire du trapèze MBCG est égale à $1800 - 30x$.

2) Le propriétaire utilise un tableur pour effectuer des calculs d'aires des différentes parties du jardin en fonction de la distance AM.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | distance AM | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 2 | Aire du potager (en m²) | 1800 | 1500 | 1200 | 900 | 600 | 300 |
| 3 | Aire de l'espace de plantations florales (en m²) | 0,00 | 39,27 | 157,08 | 353,43 | 628,32 | 981,75 |
| 4 | Aire de la partie engazonnée (en m²) | 0,00 | 260,73 | 442,92 | 546,57 | 571,68 | 518,25 |
| 5 | | | | | | | |

a) Une formule a été saisie dans la cellule B2 de la feuille de calcul et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules entre C2 et G2. Quelle peut être cette formule ?

b) Parmi les quatre propositions suivantes, quelle est la formule qui a pu être saisie dans la cellule B3 de la feuille de calcul et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage de cellules entre C3 et G3 ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| = PI()*B1*B1 | = PI()*B1*B1/8 | = PI()*B1*B1/2 | = PI()*B1*B1/4 |

*Remarque : PI() désigne le nombre $\pi$.*

3) Le propriétaire utilise un logiciel pour construire les représentations graphiques des trois fonctions donnant l'aire de chacune des parties du jardin en fonction de la distance AM.
Il obtient le graphique donné en page suivante.

a) Indiquer, sans justifier, à quelle partie du jardin correspond chacune des courbes C1, C2 et C3.

b) Les courbes C2 et C3 se coupent en un point dont l'abscisse est environ 38. À quoi cela correspond-il pour le jardin ?

c) Par lecture graphique, déterminer une valeur approchée des aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée lorsque l'aire du potager vaut 400 m².

4) Par le calcul, déterminer les aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée lorsque l'aire du potager vaut 750 m². Arrondir ces aires au mètre carré.


Aires
1150
1100
1050
1000
950
900
850
800
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
C2
C3
C1
Distance AM
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56

## DEUXIEME PARTIE (13 points)

***Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.***

### Exercice 1

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
*Une réponse exacte non justifiée ne rapporte aucun point.*
*Une réponse fausse n'enlève aucun point.*

1) Dans un club sportif, les trois quarts des adhérents sont mineurs (ils ont moins de 18 ans) et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans.
   Affirmation :
   *« Un adhérent sur six a donc entre 18 ans et 25 ans. »*

2) Affirmation :
   *« Durant les soldes si on baisse le prix d'un article de 30 % puis de 20 %, alors le prix de l'article a baissé de 50 %. »*

3) On considère une série statistique de moyenne égale à 5. On complète la série en ajoutant 5 comme valeur supplémentaire.
   Affirmation :
   *« La moyenne de la série ne change pas. »*

4) Affirmation :
   *« Pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit et d'ajouter 1. »*

### Exercice 2

Ce tableau présente la hauteur, en millimètre, des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, sur l'aéroport Roland Garros de l'île de La Réunion.

| Hauteur des précipitations (en millimètre) | 0 | 0,3 | 1,3 | 1,7 | 2,5 | 7 | 13 | 21 | 28 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de jours | 4 | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |

1) Calculer la valeur moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, arrondie au dixième de millimètre.

2) Déterminer la valeur médiane de ces précipitations journalières. Interpréter ce résultat par une phrase.

3) Quelle est l'étendue de cette série ?

4) Déterminer le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 mm, puis exprimer ce nombre en pourcentage par rapport au nombre de jours dans le mois.

5) Sachant qu'une des pistes de décollage de l'aéroport Roland Garros est rectangulaire et mesure 3 200 m de long et 50 m de large, calculer, en mètre cube, puis en litre, le volume de pluie tombé sur cette piste au cours du mois d'avril 2016.

**Exercice 3**

Déterminer, sans justifier, quelle figure géométrique est tracée lorsque l'on exécute chacun des programmes suivants.

**Programme A**


**Programme B**


**Exercice 4**

Un batelier descend une rivière de 120 km en un certain nombre de jours $n$, puis il la remonte. La distance parcourue quotidiennement lors de la remontée est inférieure de 6 km à celle parcourue quotidiennement lors de la descente. Le batelier met au total un jour de plus pour remonter que pour descendre. On considère qu'il descend à vitesse constante et qu'il remonte à vitesse constante.

1) Exprimer en fonction de $n$, la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la descente et la distance, en kilomètre, parcourue quotidiennement pendant la remontée.

2) Montrer que :
$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6.$$

3) Déduire de la question précédente que $(n + 1) = 20$.

4) En déduire la valeur de $n$ et interpréter ce résultat.

## TROISIEME PARTIE (14 points)

***Cette partie est composée de trois situations indépendantes.***

### SITUATION 1

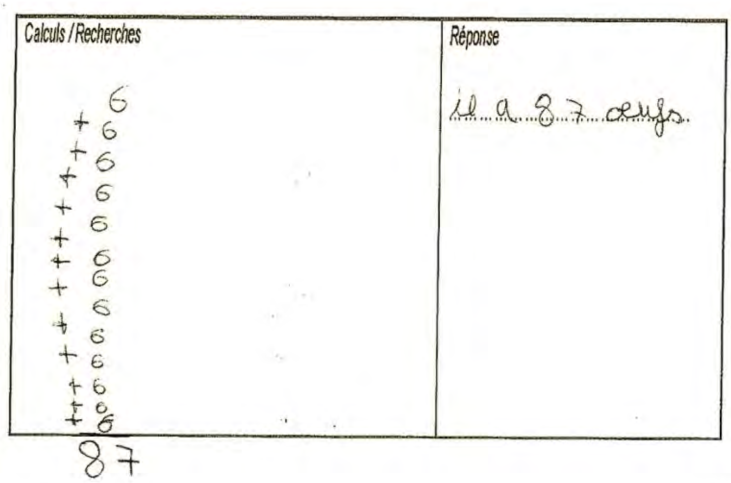
Exercice extrait des évaluations nationales à l'entrée au CE2.

> Un fermier range 6 œufs dans chaque boîte.
> Quand il a fini, il compte ses boîtes et en trouve 13. Combien a-t-il rangé d'œufs ?
> Écris tes calculs dans le premier cadre et ta réponse dans le deuxième cadre.

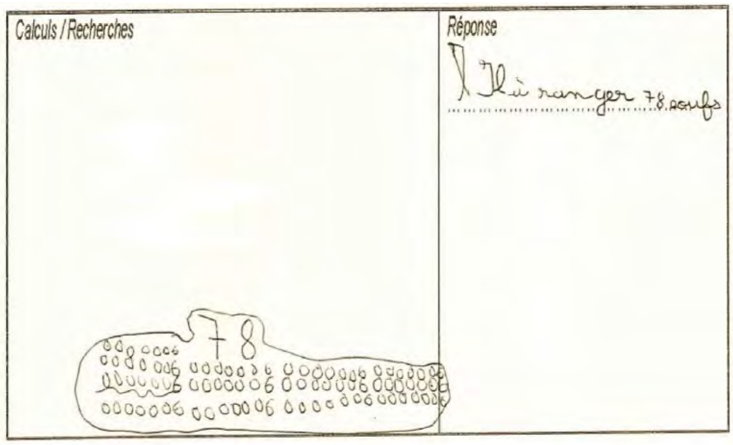
| Calculs / Recherches | Réponse |
|---|---|
| | …………………………………… |

Voici les productions de six élèves :

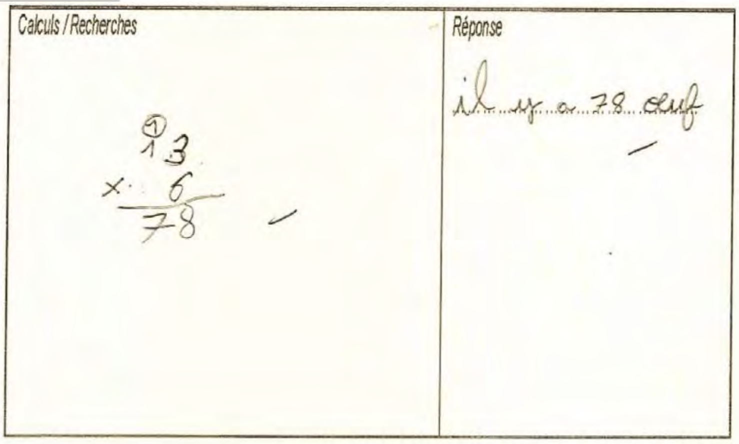
**Élève 1**




**Élève 2**



**Élève 3**

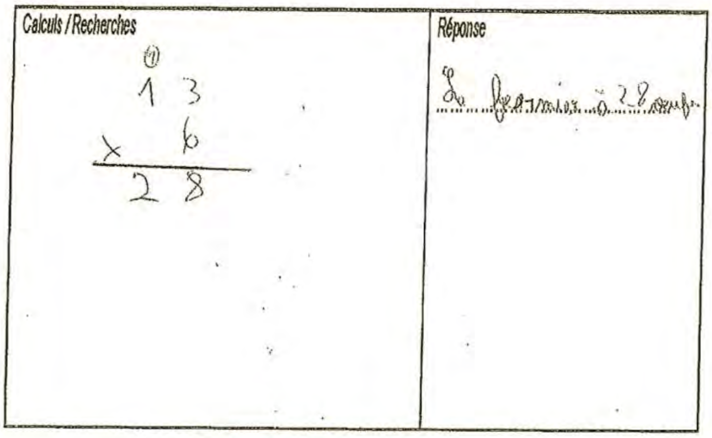

Calculs / Recherches

13
× 6
78

Réponse

il y a 78 oeuf

**Élève 4**

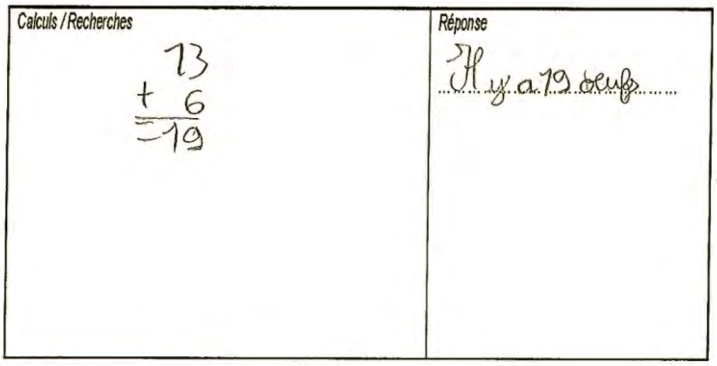

Calculs / Recherches

13
× 6
28

Réponse

La fermière a 28 oeufs

**Élève 5**

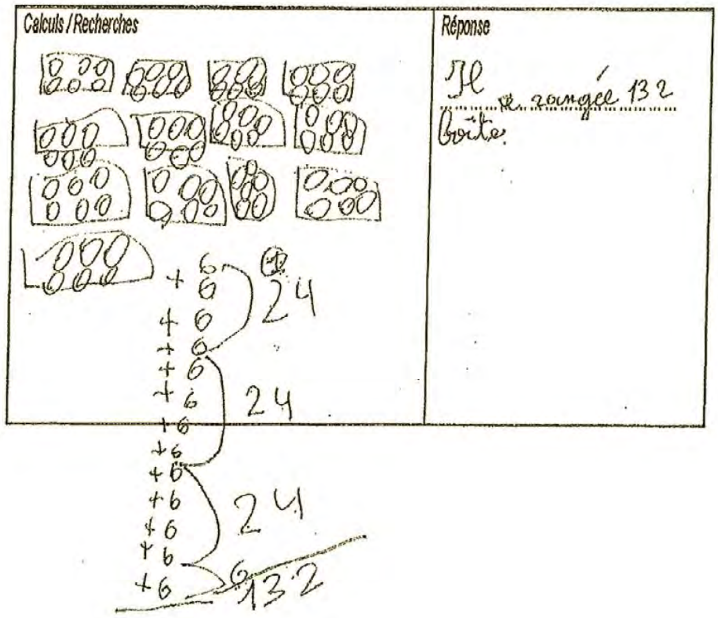

Calculs / Recherches

13
+ 6
= 19

Réponse

Il y a 19 oeufs

**Élève 6**




1) Pour chacun des élèves 1, 2 et 3 :
   a) Expliciter les procédures utilisées.
   b) Donner deux compétences qui semblent acquises pour chacun des élèves.
2) Pour chacun des élèves 4, 5 et 6 :
   a) Citer une compétence qui semble acquise.
   b) Identifier et analyser les erreurs.
3) Pour l'élève 5, proposer une aide que pourrait envisager l'enseignant pour l'amener à corriger son erreur.
4) Pour les élèves 1 et 6, comment l'enseignant pourrait-il modifier l'énoncé pour les amener à utiliser une multiplication ?

## SITUATION 2

Les problèmes suivants, issus du manuel EuroMaths CM2 (éditions Hatier, 2009), ont été donnés en fin d'année à des élèves d'une classe de CM2. La calculatrice n'était pas autorisée.

*1. Un croissant coûte 1,25 €. Quel est le prix de 10 croissants ?*

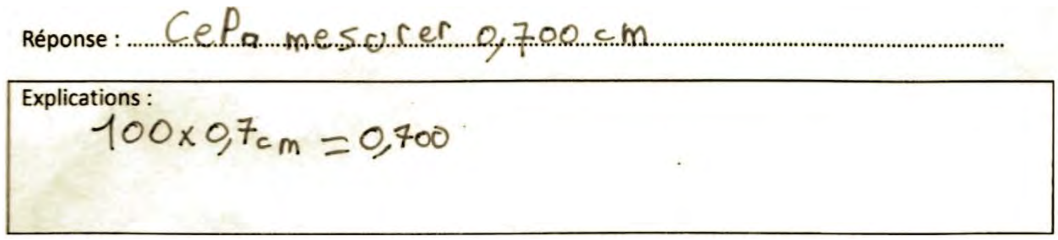
*2. Pour 10 baguettes, Pierre paie 8,50 €. Quel est le prix d'une baguette ?*

*3. Un paquet de 100 enveloppes illustrées coûte 13 €. Quel est le prix d'une enveloppe ?*

*4. Eric fait la collection de fourmis en plastique. Il en a plus de 100. Chacune de ses fourmis mesure 0,7 cm. Quelle est la mesure de la ligne formée par 100 fourmis à la queue leu leu ?*

1) Citer deux compétences travaillées dans ces exercices.
2) Voici (en page suivante) les productions de deux élèves en réponse au problème 4.
   a) Analyser l'erreur de Théo en émettant une hypothèse sur son origine.
   b) Formuler précisément la procédure utilisée par Eugénie et en donner une justification mathématique.

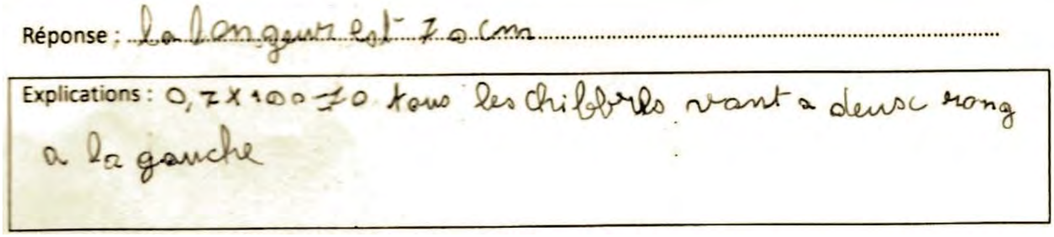
**Théo**



Réponse : CePa mesurer 0,700 cm

Explications :
100 x 0,7cm = 0,700

**Eugénie**



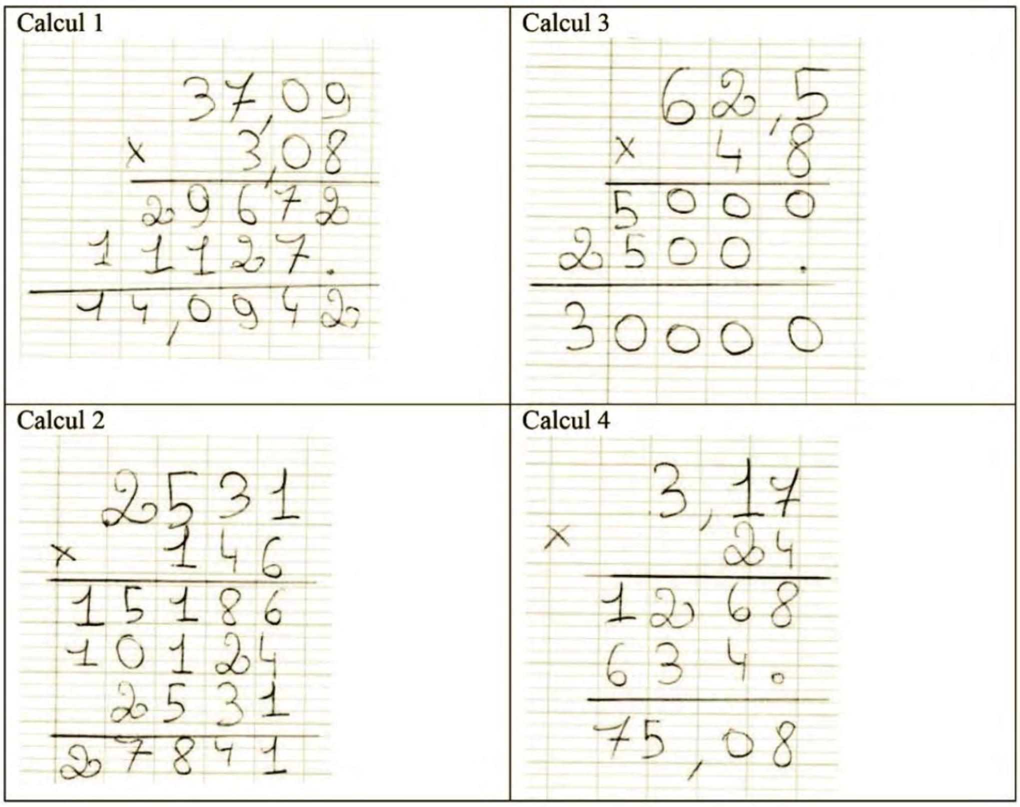
Réponse : la longeur est 70 cm

Explications : 0,7 x 100 = 70 tous les chiffres vont a deux rang a la gauche

## SITUATION 3

Technique opératoire de la multiplication

Voici 4 opérations posées.



Calcul 1

```
   37,09
 ×  3,08
  29672
 11127.
 14,0942
```

Calcul 3

```
   62,5
 ×  4,8
  5000
 2500.
 30000
```

Calcul 2

```
   2531
 ×  146
  15186
  10124
   2531
  27841
```

Calcul 4

```
   3,17
 ×   24
  1268
  634.
  75,08
```

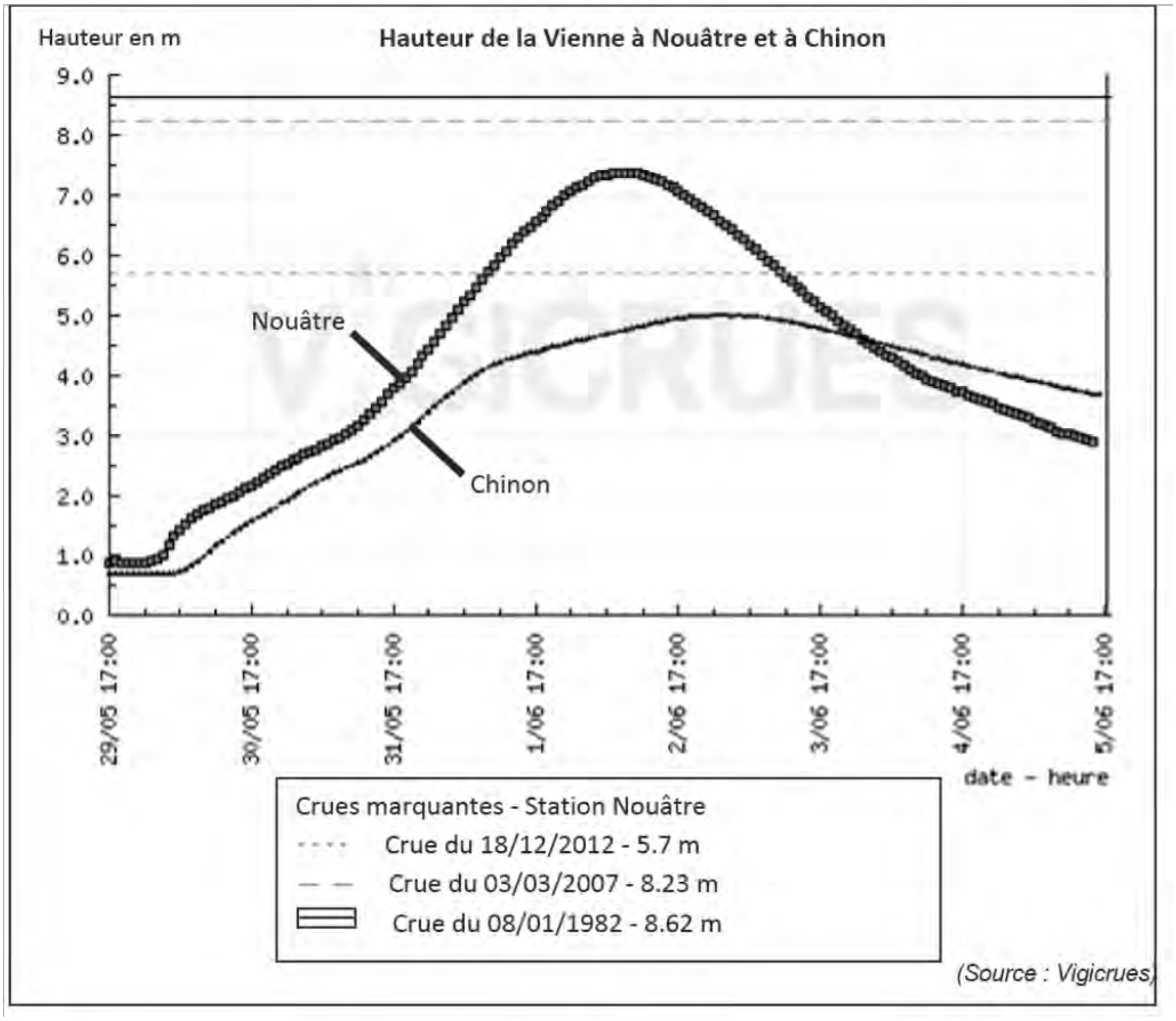
1) Dans chacun des cas, décrire les erreurs éventuelles.
2) Que pourrait proposer le professeur aux élèves ayant produit les calculs 1 et 3 pour leur permettre de contrôler leur résultat ?

# GROUPEMENT 3 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

La fin mai 2016 a été marquée par un passage fortement pluvieux avec des cumuls de pluie exceptionnels dans certaines régions françaises, provoquant crues et inondations.

## PARTIE A : étude d'une crue de la vienne




À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1) Quelle hauteur maximale la Vienne a-t-elle atteinte à Chinon entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h ?

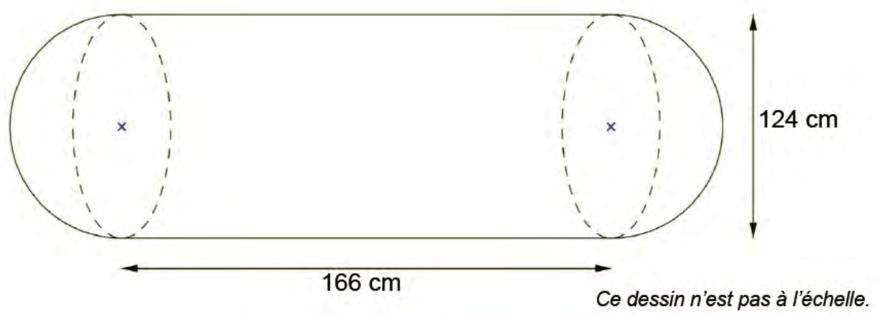
2) À Nouâtre, entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h, pendant combien de temps le niveau de l'eau a-t-il été supérieur au niveau maximum de la crue du 18 décembre 2012 ? Donner la réponse en heure.

3) a) Combien d'heures se sont écoulées entre le pic de la crue de Nouâtre et celui de Chinon ?

   b) De Nouâtre ou de Chinon, quelle station est située le plus en amont de la rivière ?
   Justifier la réponse.

## PARTIE B : précipitations et récupérateur d'eau

Un habitant de Poitiers utilise la toiture de son garage pour recueillir l'eau de pluie et la stocker dans une cuve enterrée.
Vue du ciel, la toiture a la forme d'un rectangle de 4 mètres sur 6,2 mètres.
La cuve est constituée de deux demi-sphères de 124 cm de diamètre et d'un cylindre de révolution de diamètre 124 cm et de longueur 166 cm.




1) Le dimanche 29 mai 2016, il a été relevé une hauteur de 31,7 mm de précipitations à Poitiers *(Source : Info Climat)*.

a) Vérifier que le volume d'eau, en litre, tombé sur la toiture de la grange ce jour là est environ 790 L.

b) Sachant que 90 % de l'eau de pluie tombée sur le toit du garage est récupérée dans la cuve, calculer le volume d'eau, en litre, réellement recueilli dans le réservoir ce jour là.

c) Est-il vrai que, ce jour là, un peu moins d'un quart de la citerne a été rempli ?

On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

et le volume d'un cylindre de révolution de hauteur *h* et dont la base a pour rayon R est

$$V = \pi R^2 h$$

2) Le tableau suivant donne la hauteur des précipitations relevée mensuellement à Poitiers entre le 1$^{er}$ janvier 2015 et 31 mai 2016. *(Source : Info Climat)*.

| | Janv. 2015 | Fév. 2015 | Mars 2015 | Avril 2015 | Mai 2015 | Juin 2015 | Juil. 2015 | Août 2015 | Sept. 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cumul Précipitations en mm | 50,1 | 59,7 | 31,2 | 43,5 | 46,6 | 94,4 | 14,4 | 151,6 | 83,6 |

| | Oct. 2015 | Nov. 2015 | Déc. 2015 | Janv. 2016 | Fév. 2016 | Mars 2016 | Avril 2016 | Mai 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cumul Précipitations en mm | 26,0 | 43,9 | 18,8 | 77,9 | 84,3 | 85,4 | 33,9 | 121,1 |

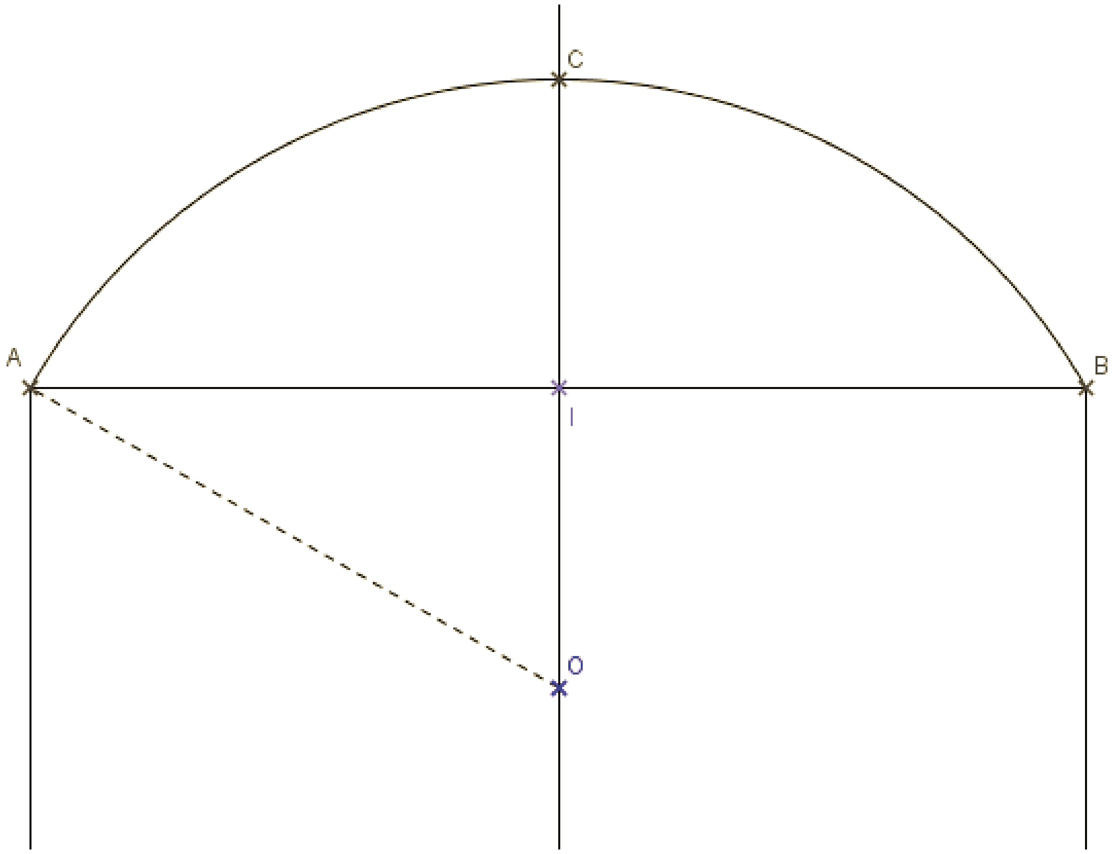
a) Calculer le pourcentage d'augmentation des précipitations entre le mois de mai 2015 et le mois de mai 2016.

b) En supposant que la cuve soit vide à la fin du mois de septembre 2015, quand sera-t-elle à nouveau pleine si le propriétaire n'utilise pas d'eau entre temps ? On rappelle que 90 % de la pluviométrie est récupérée dans la cuve.

## PARTIE C : péniche et pont

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.

La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.




1) Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.


La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a EH = 12 m et FE = 4 m.

2) Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.

# DEUXIEME PARTIE (13 points)

***Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.***

## Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Pour réaliser un collier en perles, Camille enfile 200 perles en répétant le modèle suivant : une perle jaune, puis trois perles rouges, puis deux perles blanches.

   Affirmation :
   *« La couleur de la 147$^{e}$ perle sera rouge. »*

2) Arthur a acheté un article bénéficiant d'une réduction de 30% et a ainsi économisé 48 €.

   Affirmation :
   *« Au final, il a payé 112 € pour cet article. »*

3) Un randonneur marche pendant 12 km à 6 km/h puis il marche pendant 12 km à 4 km/h.

   Affirmation :
   *« Pour les 24 km de randonnée, sa vitesse moyenne est 5 km/h. »*

4) ABCD est un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires et de même milieu.

   Affirmation :
   *« ABCD est un carré. »*

## Exercice 2

*Dans cet exercice, les réponses seront données sous la forme d'une fraction irréductible.*

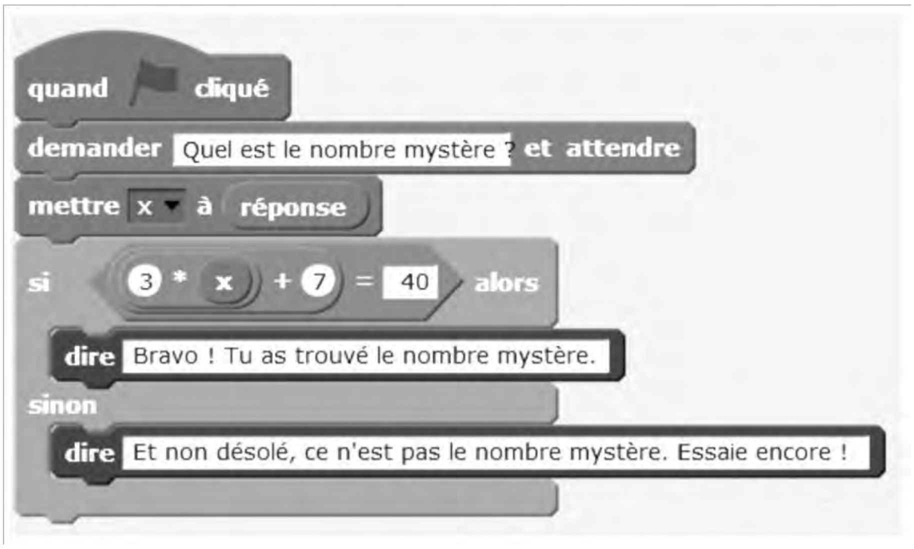
On dispose d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé tétraédrique à 4 faces avec des sommets numérotés de 1 à 4 comme sur la photo ci-dessous, parfaitement équilibrés.

On lance les deux dés et on note le nombre lisible sur la face supérieure du dé à 6 faces et le nombre lisible sur le sommet supérieur du dé à 4 faces.

1) a) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un 3 est-elle la plus grande ?
   b) Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur ou égal au nombre obtenu avec le dé à 6 faces ?
2) On calcule la somme des nombres obtenus avec chacun des deux dés.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme paire ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3 ?

## Exercice 3

Un élève utilise le programme ci-dessous.




1) Quelle réponse le logiciel va-t-il afficher si l'élève entre la valeur 5 ?
   Expliquer pourquoi.
2) Quel nombre l'élève doit-il rentrer pour obtenir en retour le message « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. » ?

## Exercice 4

Pour calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute, les infirmiers utilisent la formule

$$D = \frac{V}{3 \times T}$$

où V est le volume, en millilitre, de la perfusion et T est le temps, en heure, que doit durer la perfusion.

1) À quel débit doit être réglée la perfusion si le volume à transfuser est de 1,5 litre en un jour ? Arrondir la réponse à l'unité.
2) Une perfusion est réglée sur un débit de 6 gouttes par minute. Quel volume de liquide sera perfusé en une heure et quart ?
3) Une perfusion a un volume de 250 mL et est réglée sur un débit de 8 gouttes par minute. Quelle devrait être la durée de la perfusion ? Donner la réponse sous la forme *x* heures *y* minutes.

## TROISIEME PARTIE (14 points)

***Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.***

### SITUATION 1

Un enseignant met en œuvre dans sa classe les activités d'apprentissage ci-dessous.

**Activité 1**

**Étape 1**

On met à disposition des élèves une boîte opaque vide visible de tous.
Un premier élève y dépose une quantité d'objets annoncée à la classe. Un autre élève met à son tour des objets dans la même boîte en précisant la quantité, sans les mettre un à un ; la boîte est fermée et il est demandé aux élèves de trouver combien il y a d'objets dans la boîte. Il est annoncé qu'on vérifiera ensuite en comptant dans la boîte. Le nombre d'objets déposés par chaque élève est compris entre 1 et 10.

**Étape 2**

Même situation, mais le premier élève peut mettre jusqu'à 20 objets et le deuxième élève doit enlever un certain nombre d'objets de la boîte.

**Étape 3**

Le premier élève met des objets dans la boîte en annonçant le nombre ; un deuxième élève est appelé ; l'enseignant lui indique le nombre d'objets qu'il souhaite avoir dans la boite, ce nombre étant supérieur au nombre d'objets déjà présents et lui demande combien d'objets il doit rajouter.

**Activité 2**

Un enfant met un certain nombre de cailloux dans une main de l'enseignant (moins de 10 cailloux) ; il les compte à haute voix. Un autre enfant fait de même, dans l'autre main.
L'enseignant les réunit et demande aux élèves combien il a de cailloux dans ses mains.
Après recueil de propositions, la validation se fait par comptage des cailloux.

1) Indiquer un objectif d'apprentissage de ces activités.
2) Qu'est-ce qui distingue les tâches demandées aux élèves dans l'étape 1 de l'activité 1 et l'activité 2 ?
3) Indiquer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour faire ce qui leur est demandé dans l'étape 1 de l'activité 1.
4) Indiquer une variable didactique sur laquelle jouer en spécifiant les effets que l'on peut alors en attendre en termes d'évolution des procédures.

### SITUATION 2

On considère l'exercice suivant.

**Calcule avec la méthode de ton choix.**

a. 91 – 52 = ..............  c. 800 – 153 = ..............

b. 613 – 209 = ..............  d. 607 – 54 = ..............

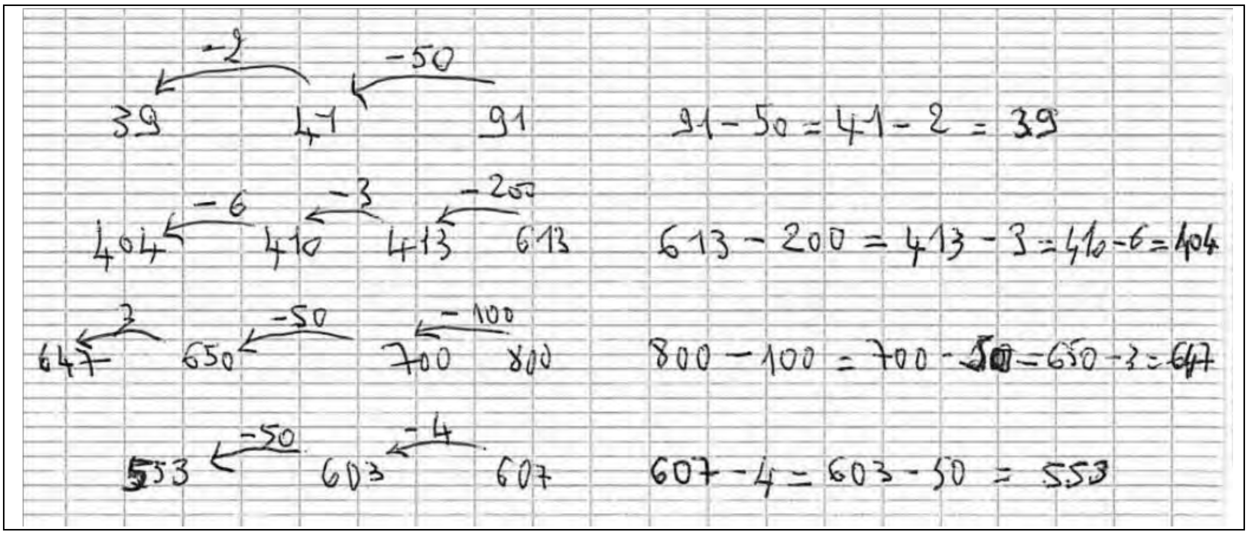
*Manuel scolaire « Cap maths » Hatier (édition 2016).*

1) Quelle est la notion abordée ? Citer deux connaissances et savoir-faire que cette situation met en jeu.

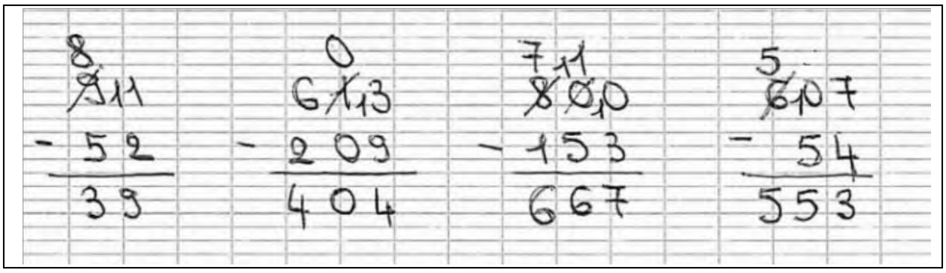
2) Étude des productions des élèves.

On considère les quatre productions d'élèves suivantes :

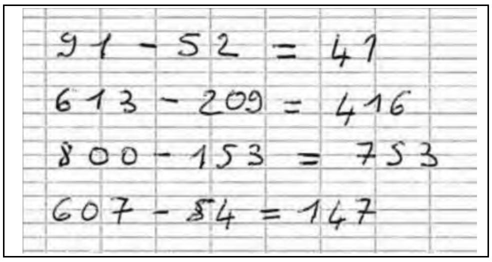
**Antoine**



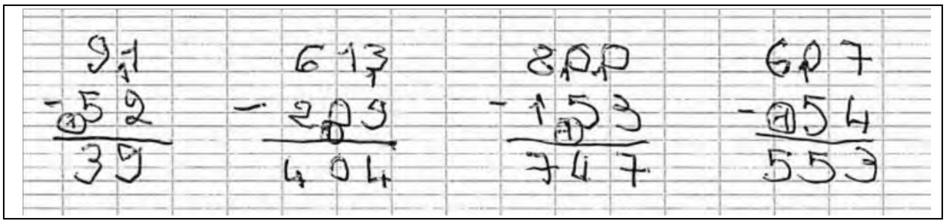

**Barbara**




**Clara**




**Dominique**




a) Quelles sont les différentes procédures utilisées par Antoine, Barbara et Clara ?

b) Qu'est-ce qui différencie les procédures utilisées par Barbara et Dominique ?

c) Relever les réussites et les erreurs de Barbara et Clara.

d) Quel accompagnement pédagogique mettriez-vous en œuvre pour remédier aux difficultés rencontrées par Clara ?

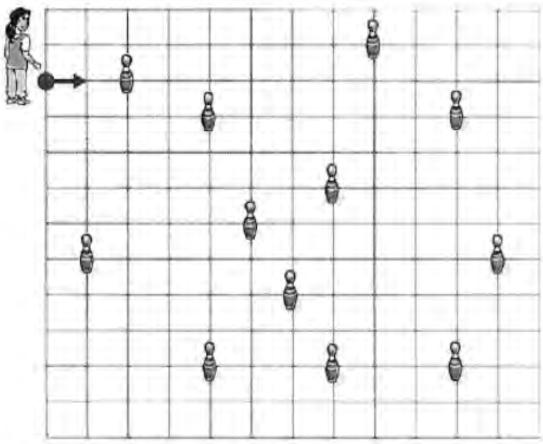
**SITUATION 3**

Un enseignant propose l'exercice ci-dessous à des élèves de CM1.

En séance d'E.P.S., les élèves doivent se déplacer sur les lignes de ce quadrillage tracé au sol.
On estime que pour se déplacer sur le côté d'un carreau il faut 1 seconde.
Programme un parcours pour récolter le plus de quilles possible en sachant que l'épreuve sera arrêtée au bout de 20 secondes.
Combien de quilles as-tu ramassées ?

Doc. **Instructions de programmation**

- av **1** (avancer pendant une seconde)
- tg **90** (tourner à gauche d'un angle droit)
- rq (ramasser une quille)
- av **2** (avancer pendant 2 secondes)
- td **90** (tourner à droite d'un angle droit)



*Exercice tiré de Graine de maths CM1, Nathan, 2016*

1) Citer deux connaissances ou savoir-faire mathématiques nécessaires à la réussite de cet exercice.
2) Utiliser les deux productions d'élèves reproduites ci-après pour répondre aux questions ci-dessous.
   a) Analyser chaque production en termes de réussites et d'erreurs.
   b) Proposer deux dispositifs de remédiation que l'enseignant pourrait mettre en œuvre à l'attention d'Oriane.

av 2 ~~av~~ rq av 2 tg 90 av 1 rq av 2
tg 90 av 2 av 1 rq td 90 av 1 tg 90
av 2 rq td 90 av 2 tg 90 av 1 rq av 1
td 90 av 2 rq

j'ai ramassée 6 quilles.

Oriane

av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 ~~av 1~~ ~~td 90~~ av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 2 tg 90 av 2 tg 90 av 4 rq
j'ai ramassé 5 quilles

Samuel

# GROUPEMENT 4 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

## PARTIE A : puissance électrique d'une éolienne

Le graphique ci-dessous représente les variations de la **puissance électrique,** exprimée en kilowatt (kW) fournie par une certaine éolienne, en fonction de la **vitesse du vent,** exprimée en mètre par seconde (m/s).

La forme de la courbe dépend des caractéristiques mécaniques et électriques de l'éolienne.


*Reproduit d'après la source : http://www.vestas.com/en/products/turbines/v112-3_3_mw*

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1) Quelle est la puissance électrique de l'éolienne quand la vitesse du vent est 11 m/s ?
2) À partir de quelle vitesse du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 500 kW ?
3) La puissance électrique de l'éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ?
   Justifier.
4) Pour quelles vitesses du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle comprise entre 1 000 et 2 000 kW ?
5) Quelle est la puissance électrique maximale que peut fournir l'éolienne ?
6) À partir de quelle vitesse du vent, **en km/h**, la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 3 000 kW

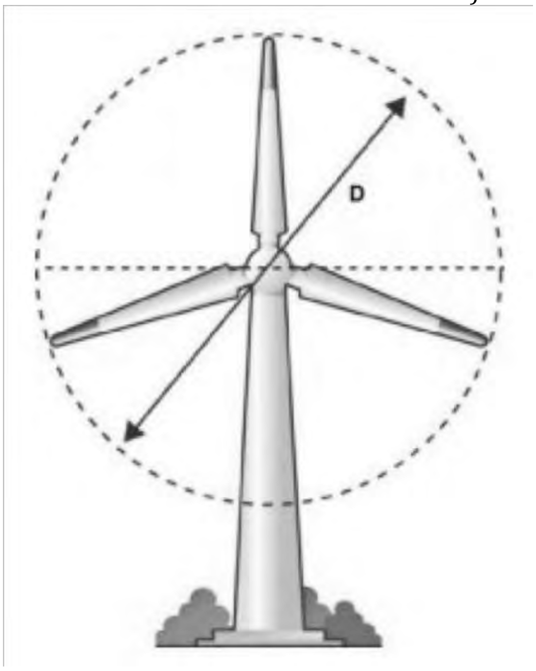
## PARTIE B : calcul de la puissance récupérable d'une éolienne

On dispose des informations suivantes sur les éoliennes :

La **puissance récupérable** d'une éolienne, exprimée en watt, notée $P_{\text{récupérable}}$, se calcule à l'aide de la formule :

$$P_{\text{récupérable}} = C_p \times P_{\text{disponible}}$$

où $C_p$ est le **coefficient de performance** de l'éolienne et $P_{\text{disponible}}$ est la **puissance disponible** de l'éolienne, exprimée en watt, fournie par le vent.
Les puissances récupérables et disponibles fournissent des valeurs théoriques qui ne tiennent pas compte des contraintes mécaniques (minimum ou maximum de vitesse du vent).




La puissance disponible se calcule à l'aide la formule :

$$P_{\text{disponible}} = \frac{1}{2} r \times S \times V^3$$

où

- *r* est la densité de l'air (l'industrie éolienne utilise la valeur 1,225 kg/m$^3$),
- S est l'aire de la surface balayée par les pales de l'éolienne (en m$^2$), c'est-à-dire l'aire d'un disque dont le diamètre D est celui de l'éolienne (en m),
- V la vitesse du vent (en m/s).

D'après les principes de la mécanique, la valeur maximale du coefficient de performance $C_p$ est $\frac{16}{27}$.

1) Dans cette question, l'éolienne considérée a pour diamètre 112 m et pour coefficient de performance 0,52.
   a) Calculer l'aire de la surface balayée par les pales de cette éolienne.
   b) Montrer que la puissance récupérable de cette éolienne, exprimée en watt, est
   $$P_{\text{récupérable}} = 998{,}816\pi \times V^3.$$
   c) En déduire la puissance récupérable, exprimée en kilowatt, de cette éolienne pour un vent de 6 m/s. On arrondira le résultat au centième.
   d) Expliquer pourquoi la puissance récupérable est multipliée par 8 lorsque la vitesse du vent est multipliée par 2.
   e) La puissance récupérable de cette éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? Justifier.
2) Montrer que d'une manière générale, pour une éolienne de diamètre D, on a :
$$P_{\text{récupérable}} < 0{,}29 \times D^2 \times V^3$$

## PARTIE C : étude de la production éolienne en france en 2015

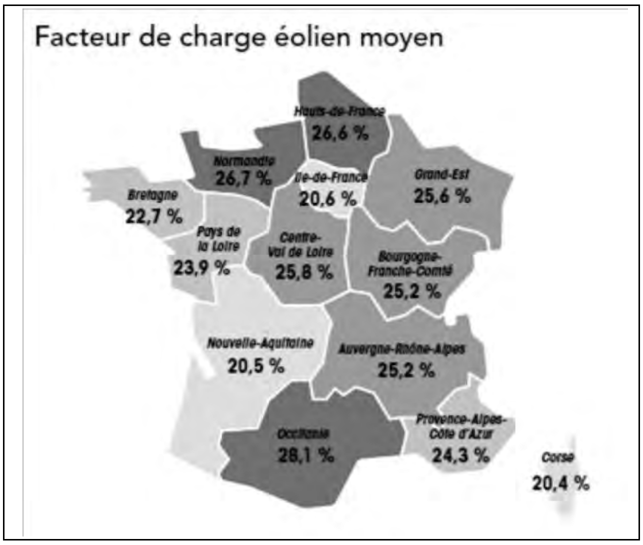
On appelle **puissance nominale** d'une éolienne la puissance électrique maximale qu'elle peut fournir.

**L'énergie électrique produite par l'éolienne** sur une durée $t$ se calcule en multipliant la puissance nominale P de l'éolienne par la durée $t$ considérée et un **facteur de charge $f$** qui dépend de la région. Cette énergie électrique est notée E.

Ainsi, $\mathrm{E} = \mathrm{P} \times t \times f$.

Si la puissance nominale est exprimée en watt (W) et le temps en heure (h), l'énergie électrique sera exprimée en Watt-heure (Wh).

1) La carte représentée ci-dessous donne, suivant les régions, le facteur de charge en 2015 pour la production éolienne :




   a) On considère une éolienne de puissance nominale 4 MW implantée en région Centre-Val de Loire. Calculer, en MWh, l'énergie électrique produite durant l'année 2015 par cette éolienne.
   *On rappelle que 1 mégawatt est égale à 1 million de watts ou encore que 1MW = $10^6$ W.*

   b) L'énergie électrique totale produite en 2015 dans l'ensemble de la région Centre-Val de Loire par les parcs éoliens est de $1{,}98 \times 10^6$ MWh.
   Calculer la puissance nominale totale des éoliennes installées dans cette région.

2) L'énergie électrique totale produite par l'éolien en France en 2015 est d'environ $21{,}9 \times 10^6$ MWh. Sachant que le taux moyen de couverture de la production d'énergie électrique en France en 2015 par la production éolienne est de 4,5%, calculer l'énergie électrique produite au total en France en 2015. Arrondir le résultat au million de MWh.

## DEUXIEME PARTIE (13 points)

***Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.***

### Exercice 1

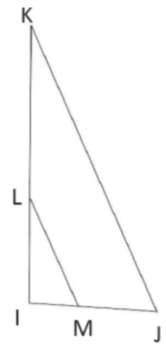
Cet exercice comporte cinq affirmations. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de point, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Affirmation :
   *« Un quadrilatère qui a trois angles droits est un carré. »*

2) Dans une boucherie, on peut lire : « 3 steaks hachés achetés, 1 steak en plus gratuit ».
   Solène demande 3 kg de viande hachée. Une fois la commande préparée, le boucher déclare : « J'ai haché la viande que j'utilise pour les steaks, aussi je vous fais bénéficier de la promotion. Vous ne payez donc que 2 kg de viande. »

Affirmation :
   *« Le boucher se trompe ; il aurait dû lui faire payer 2,250 kg de viande. »*

3) On considère la figure ci-contre.




On sait que :

M $\in$ [IJ]
L $\in$ [IK]
IM = 0,8
IL = 1,6
LK = 2,4
IJ = 2

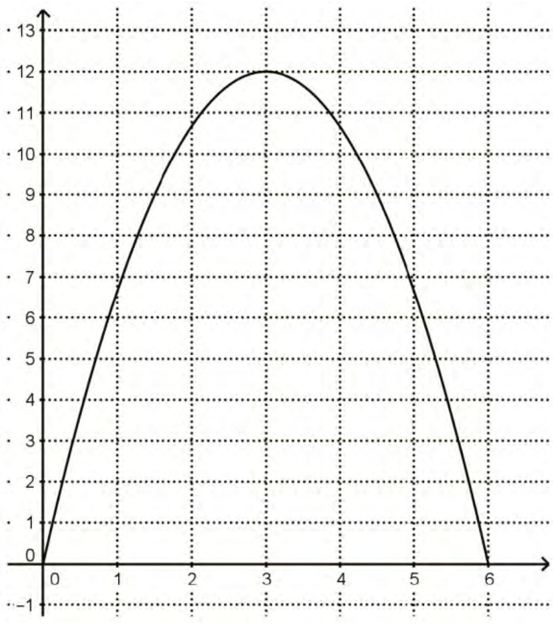
Affirmation :
   *« Les droites (ML) et (KJ) sont parallèles. »*

4) Affirmation :
   *« Le carré d'un nombre entier positif premier admet exactement trois diviseurs positifs. »*

5) On considère une fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 6] par :

$$f(x) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

et on donne sa représentation graphique ci-dessous :




Affirmation :
   *« 4 a pour antécédent un nombre compris entre 10 et 11. »*

## Exercice 2

Jules possède deux dés cubiques équilibrés avec des faces numérotées de 1 à 6 (un rouge et un vert). Il propose à Paola un jeu au cours duquel chacun des joueurs, à tour de rôle, lance simultanément les deux dés et gagne des points suivant les règles ci-dessous :

**Règle de la paire :**
• Si, lors d'un lancer, un joueur fait deux 1, c'est-à-dire une paire de 1, il remporte 1000 points
• Si un joueur obtient une paire de 2, il obtient 100 fois la valeur de 2, soit 200 points.
• De même, si un joueur obtient une paire de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6, il obtient 100 fois la valeur du dé.

**Règle des autres lancers :**
• Si un joueur obtient un résultat autre qu'une paire, il obtient 50 points.

**Gain de la partie :**
• Le gagnant de la partie est le premier à atteindre au moins un total de 1000.

*Inspiré d'un exercice du manuel TRANSMATHS 3ème 2016, Éditions Nathan*

1) Paola lance les deux dés.
   a) Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 400 points ?
   b) Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 50 points ?
2) Paola a déjà joué deux tours et a obtenu 650 points. Jules n'a toujours pas obtenu 1000 points. Elle s'apprête à lancer les dés pour une troisième fois. Quelle est la probabilité qu'elle gagne la partie lors de son troisième lancer ?
3) Quelle est la probabilité de gagner au moins 1000 points en 1 ou 2 coups ?

## Exercice 3

Voici un programme de calcul :


1) a) On applique ce programme de calcul au nombre 10. Montrer que le résultat affiché à la fin est 40.
   b) On applique ce programme de calcul au nombre –2. Quel va être le résultat affiché à la fin ? Justifier.

2) Une modification possible de l'algorithme est copiée ci-après, mais il manque une instruction à la 4ème ligne.

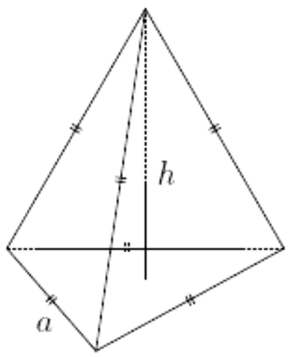

Comment compléter la 4ème ligne, là où il y a un carré blanc, par l'expression la plus simple possible pour que cet algorithme affiche le même résultat que l'algorithme précédent quel que soit le nombre entré ?

## Exercice 4

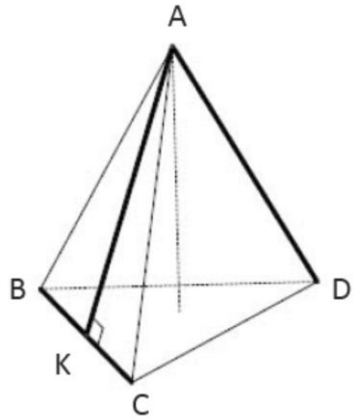
Dounia et Yanis ont acheté un coffret contenant des sachets de thé. Ces sachets ont une forme que l'on peut modéliser par un tétraèdre régulier.
On rappelle qu'un tétraèdre régulier est une pyramide dont les 3 faces latérales et la base sont des triangles équilatéraux.
De plus, on rappelle que, pour un tétraèdre régulier ayant ses côtés de longueur notée $a$ :

– la hauteur $h$ correspondant à la base d'aire $\mathrm{A_{Base}}$ est donnée par la formule $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

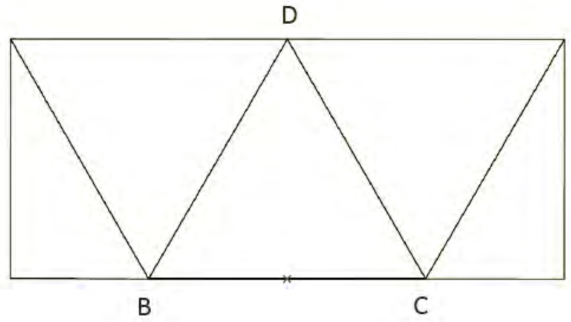
– le volume V est donné par la formule $\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{A_{Base}} \times h}{3}$




1) Le sachet de thé de Yanis a la forme d'un tétraèdre régulier ABCD de côté 5,5 cm et est fabriqué en gaze de papier. On note K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.




Yanis remarque que seuls trois « bords » sont collés (en gras sur le dessin : [AK], [BC] et [AD]). Il découpe la gaze le long de ces segments [AD], [AK], et [BC], puis il met à plat. Il obtient un rectangle.




*Ce dessin n'est pas à l'échelle.*

a) Déterminer les dimensions de ce rectangle.

b) Calculer le volume du sachet de thé de Yanis. On donnera une valeur arrondie au dixième de centimètre cube.

2) La marque pense proposer des sachets « grand format », présentés aussi sous la forme d'un tétraèdre régulier, mais d'un volume au moins deux fois plus grand que le sachet de thé choisi par Yanis.
Dounia pense qu'en multipliant par 1,3 les longueurs des côtés du tétraèdre ABCD, les conditions de la marque pour obtenir un sachet « grand format » seront satisfaites.

Justifier l'affirmation de Dounia.

## TROISIEME PARTIE (14 points)

**Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.**

### SITUATION 1

Le problème suivant a été proposé à une classe de CP au mois de juin.

> « À la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? »

Voici quatre productions d'élèves :

| **Léanne** | **Enzo** |
|---|---|
| A la récréation, Léo joue aux billes.<br>Au début de la partie il possède 12 billes.<br>Il gagne 9 billes.<br>Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?<br><br>Il y a 21 billes. | A la récréation, Léo joue aux billes.<br>Au début de la partie il possède 12 billes.<br>Il gagne 9 billes.<br>Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?<br>12 + 9 = 21<br>Il y a 21 billes |
| **Zélie** | **Miléna** |
| A la récréation, Léo joue aux billes.<br>Au début de la partie il possède 12 billes.<br>Il gagne 9 billes.<br>Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?<br>Il y a 21 billes.<br> | A la récréation, Léo joue aux billes.<br>Au début de la partie il possède 12 billes.<br>Il gagne 9 billes.<br>Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?<br>$\begin{array}{r} {}^{1}\;\; \\ 12 \\ +\;\;9 \\ \hline 21 \end{array}$<br>Il y a 21 billes. |

1) Pour les productions de Léanne, Zélie et Miléna, indiquer les procédures probablement utilisées.
2) La production d'Enzo permet-elle d'évaluer la maitrise d'une procédure relevant du calcul ? Justifier la réponse.

## SITUATION 2

1) Analyser les procédures mises en œuvre pour chacun des élèves de cycle 2 pour effectuer le calcul en ligne $29 + 47$.

**Élève A**
$29 + 47 = 29 + 1 + 46 = 30 + 46 = 76$

**Élève B**
$29 + 47 = 60 + 16 = 76$

**Élève C**
$29 + 47 = 69 + 7 = 76$

2) Un élève de cycle 3 a écrit les opérations en ligne suivantes :

$96 + 53 + 4 = 96 + 4 + 53 = 100 + 53 = 153$ $(ligne\ a)$

$14 \times 5 = 7 \times 2 \times 5 = 7 \times 10 = 70$ $(ligne\ b)$

$6 \times 12 = 6 \times 10 + 2 \times 10 = 60 + 12 = 72$ $(ligne\ c)$

Pour chaque ligne, quelle(s) propriété(s) des opérations est/sont mise(s) en œuvre par l'élève dans la procédure de calcul ?

## SITUATION 3

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> *« Sur une table, il y a un livre ouvert. Si j'ajoute le nombre indiquant le numéro de la page gauche avec celui qui indique le numéro de la page de droite, je trouve 129.*
> *À quelles pages le livre est-il ouvert ? »*

*Source : Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57metznord/spip.php?article205*

Proposer deux procédures que peuvent mettre en œuvre des élèves pour résoudre ce problème.

## SITUATION 4

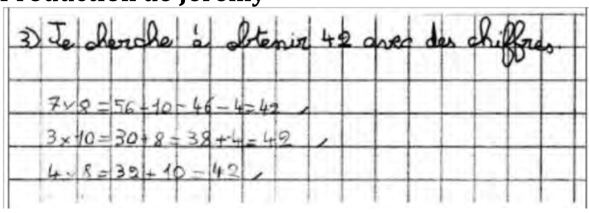
Dans une classe de CM2 un professeur propose de jouer au « Compte est bon » :

| |
|---|
| Il s'agit d'obtenir 42 en faisant des opérations avec les nombres : |
| 8      4      7      10      3 |
| Ceux-ci ne sont utilisés qu'une seule fois et sans que l'on soit obligé de tous les utiliser. |

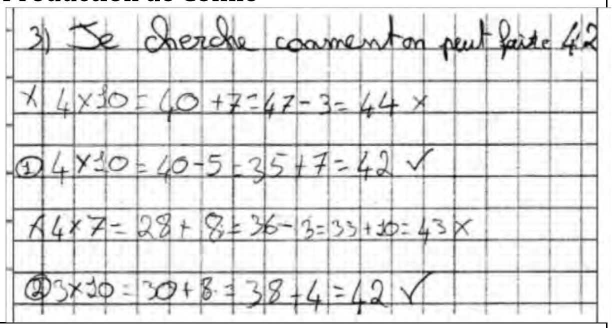
*(Source : 40 problèmes ouverts, Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancymetz.fr/ien57metznord/spip.php?article205)*

On considère les productions de quatre élèves de la classe :

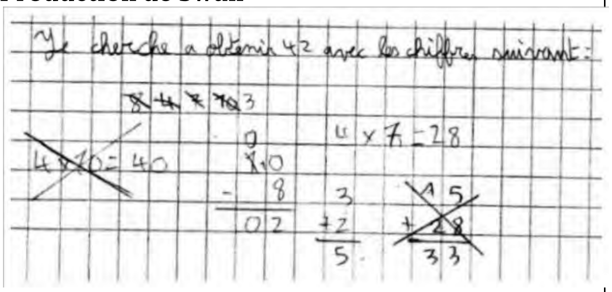
**Production de Jérémy**



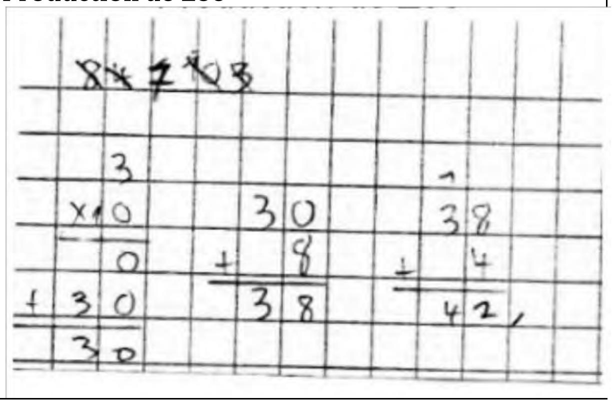

**Production de Coline**




**Production de Swan**




**Production de Zoé**




1) Analyser les stratégies et repérer les réussites et les éventuelles erreurs de chacun des élèves.

2) Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3, apparaissent les six « compétences travaillées » en mathématiques suivantes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

   Quelles sont les compétences particulièrement travaillées au cours de cette séance d'apprentissage ? Justifier.

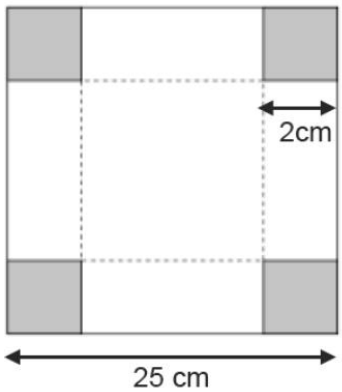
# GROUPEMENT 5 – mai 2017

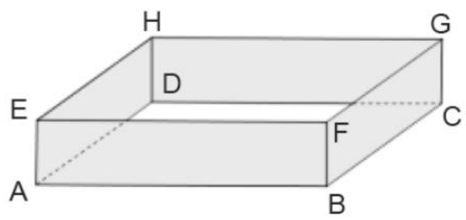
## PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

**UN PROBLÈME DE BOÎTE**

## PARTIE A : étude d'un cas particulier

Dans un carré de carton dont le côté mesure 25 cm, on enlève aux quatre coins un carré de côté de longueur 2 cm comme sur la figure ci-dessous.
On obtient ainsi le patron d'une boîte sans couvercle :



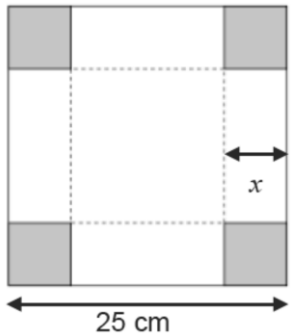




**On admet que la base ABCD de la boîte est un carré.**

1) Vérifier que le volume de cette boîte est de 882 $cm^3$.
2) Vérifier que l'aire de la surface de carton utilisée pour réaliser la boîte est de 609 $cm^2$.

## PARTIE B : étude du cas général

On note $x$ la longueur, en centimètre, du côté du carré enlevé à chaque coin d'un carré de carton dont le côté mesure 25 cm.




1) Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?
2) On appelle $V$ la fonction donnant le volume, en centimètre cube, de la boîte en fonction de $x$.
   Montrer que : $V(x) = x(25 - 2x)^2$.
3) On appelle $A$ la fonction donnant l'aire, en centimètre carré, de la surface de carton utilisée pour réaliser la boîte en fonction de $x$.
   Exprimer $A(x)$ en fonction de $x$.
4) Vérifier que les expressions trouvées en B.2) et B.3) permettent de retrouver les résultats obtenus dans la partie A.
5) On a construit avec un tableur une table de valeurs de la fonction $V$ (voir copie d'écran ci-après).

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | x | V(x) |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 529 |
| 4 | 2 | 882 |
| 5 | 3 | 1083 |
| 6 | 4 | 1156 |
| 7 | 5 | 1125 |
| 8 | 6 | 1014 |
| 9 | 7 | 847 |
| 10 | 8 | 648 |
| 11 | 9 | 441 |
| 12 | 10 | 250 |
| 13 | 11 | 99 |
| 14 | 12 | 12 |
| 15 | 12,5 | 0 |

Les questions qui suivent visent à résoudre le problème suivant :

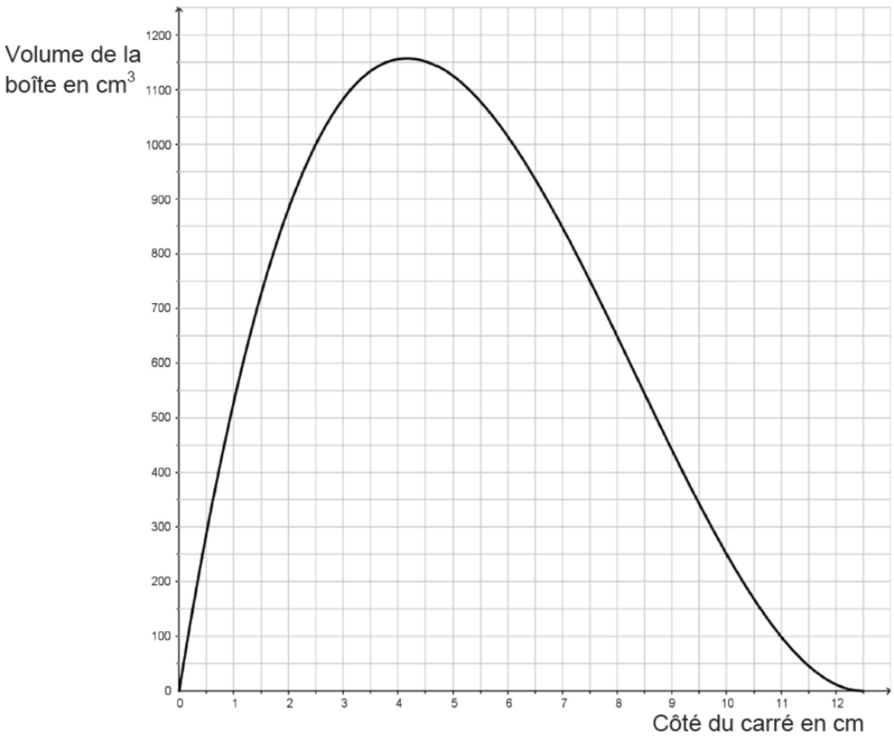
*quelle(s) valeur(s) de $x$ permet(tent) de fabriquer une boîte de volume égal à 1 litre ?*

a) Quelle formule a pu être entrée en B2, puis recopiée vers le bas, pour calculer les valeurs de la colonne B ?

b) En s'appuyant sur cette table, dire si le problème (obtenir une boîte de volume égal à 1 litre) possède ou non des solutions.
Si des solutions existent, donner pour chacune un encadrement d'amplitude 1 cm.

c) Décrire une démarche utilisant le tableur permettant d'obtenir un encadrement plus précis (d'amplitude 0,1 cm) de la (des) solution(s).

6) Voici une représentation graphique de la fonction $V$ :



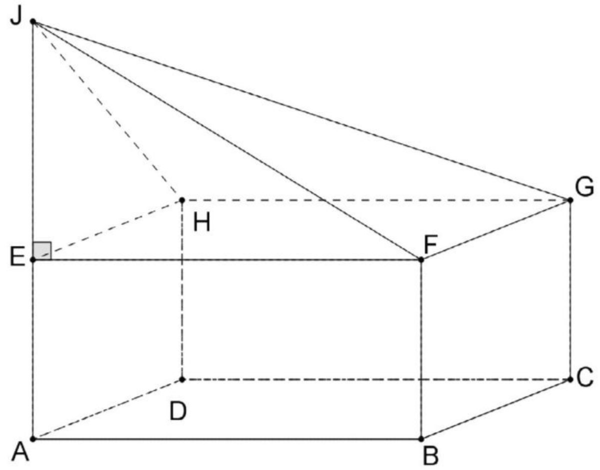

a) À l'aide de ce graphique, expliquer comment on peut retrouver une valeur approchée du résultat trouvé à la question A.1)

b) Lire sur le graphique le volume maximal que l'on peut obtenir (avec la précision permise par le graphique), et la valeur de $x$ correspondante.

c) Par lecture graphique déterminer les valeurs de $x$ (approchées au millimètre) pour lesquelles la boîte a pour volume 1L.

## PARTIE C : couvercle de la boîte

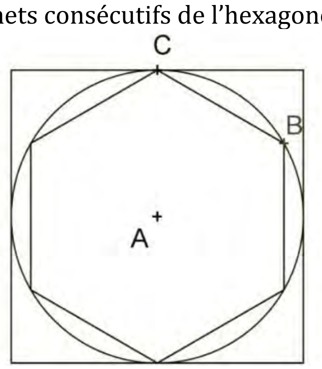
Un artisan pâtissier souhaite utiliser ce type de patron pour construire des boîtes pour emballer des chocolats. Il choisit d'enlever à chaque coin des carrés de 6 cm de côté.
Il fabrique par ailleurs des couvercles de forme pyramidale.
Sur le dessin en perspective ci-dessous, ABCDEFGH est la boîte obtenue et JEFGH, son couvercle, est une pyramide de sommet J, tel que A, E et J sont alignés.




1) Quelle doit être la hauteur JE de la pyramide pour que le volume de la pyramide soit égal à celui de la boîte ?
   On rappelle que le volume d'une pyramide dont la base a pour aire $A$ et dont la hauteur est $h$ est égal à :
   $$V = \frac{A \times h}{3}.$$
2) Pour des raisons esthétiques, l'artisan choisit JE = 8 cm.
   Tracer sur la copie le patron de cette pyramide à l'échelle 1/4.
   Coder ce patron pour faire apparaître les angles droits et les segments de même mesure.

## PARTIE D : décoration de la boîte

L'artisan souhaite utiliser les chutes restantes après la construction du patron de la boîte de chocolats (des carrés de 6 cm de coté) pour y dessiner le logo de sa pâtisserie, inscrit dans un hexagone régulier comme sur la figure ci-dessous.
A est le centre du carré, B et C deux sommets consécutifs de l'hexagone régulier.




1) Justifier que ABC est un triangle équilatéral.
2) Reproduire cette figure en vraie grandeur sur la copie.
3) Calculer l'aire de l'hexagone. On donnera la valeur exacte et l'arrondi au mm².

## DEUXIEME PARTIE (13 points)

***Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.***

### Exercice 1

On peut lire sur la porte d'un magasin : **– 30 % sur tous les articles.**

1) Calculer le prix soldé d'un article qui valait 132 €.
2) Calculer le prix initial d'un article dont le prix soldé est 29,40 €.
3) En fin de période de soldes ce magasin propose une réduction supplémentaire de 20 % sur les prix déjà soldés. Le propriétaire annonce alors une baisse de 50 %. Cette annonce est-elle exacte ?
4) Un article avait augmenté au cours de l'année de 5 % et a été soldé à 30 % ensuite.
   Quel est alors le pourcentage de réduction par rapport au prix initial ?

### Exercice 2

On considère l'algorithme ci-dessous programmé à l'aide du logiciel Scratch.


1) On décide d'entrer le nombre 7. Montrer que le résultat obtenu est 64.
2) On choisit 19 comme nombre de départ. Quel est alors le résultat ?
3) Démontrer que quel que soit le nombre impair choisi au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre et un multiple de 4.

### Exercice 3

Pour fêter le premier anniversaire de son ouverture, un magasin offre à ses clients des tickets à gratter. Certains tickets sont perdants, d'autres permettent de gagner des bons d'achat de 5 €, de 10 € ou de 100 €.
Au bout d'une journée, le commerçant comptabilise :

200 tickets perdants,
444 tickets à 5 €
330 tickets à 10 €.

1) Combien y avait-il de tickets à 100 €, sachant que la moyenne des gains était de 8,12 € ?
2) a) Si les tickets à 100€ sont remplacés par des tickets 1000 €, quelle est la nouvelle moyenne des gains ?

   b) Expliquer pourquoi la médiane des gains n'est pas modifiée.

**Exercice 4**

Lors d'une phase d'institutionnalisation, l'enseignante d'une classe de CM1 demande aux élèves de proposer une phrase pour dire ce qu'est un nombre décimal.
Elle les invite à commencer leur phrase par « Un nombre décimal est… ».

Voici quatre propositions d'élèves :

Omar :

> « *Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.* »

Lucie :

> « *Un nombre décimal est un nombre entre deux entiers.* »

Léo :

> « *Un nombre décimal est un nombre avec une partie entière avant la virgule et une partie décimale après la virgule.* »

Aminata :

> *« Un nombre décimal est une fraction avec 10 ou 100 en bas. »*

1) Expliquer pour chacune des quatre propositions, pourquoi elle n'est pas satisfaisante du point de vue des mathématiques et ne peut pas être retenue par l'enseignante.
2) Proposer une phrase commençant par « Un nombre décimal est… », que l'enseignante pourrait faire écrire aux élèves dans leur cahier lors de cette phase d'institutionnalisation.

## TROISIEME PARTIE (14 points)

***Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.***

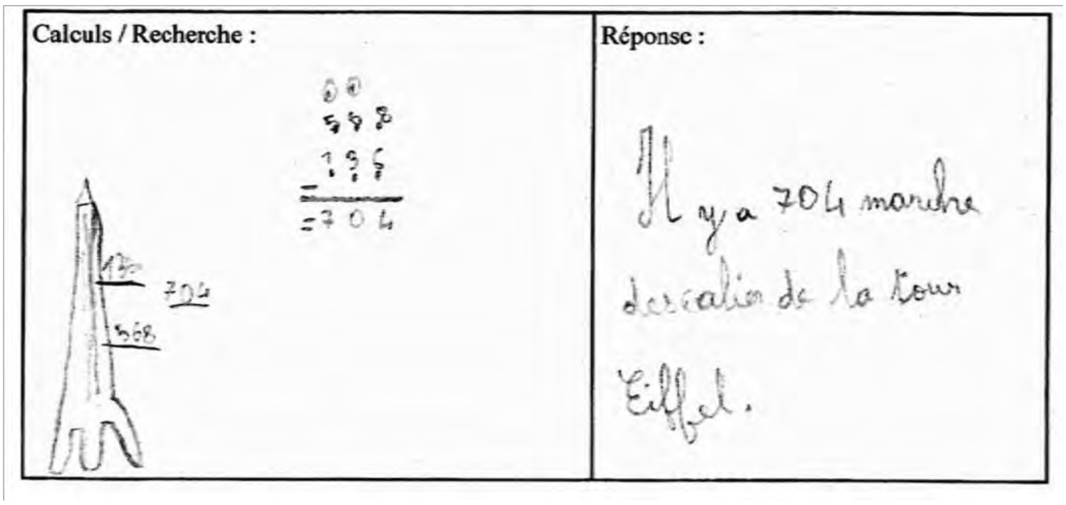
### SITUATION 1

Le problème suivant, inspiré des propositions de la banque outil Eduscol, a été proposé à des élèves de CE2.

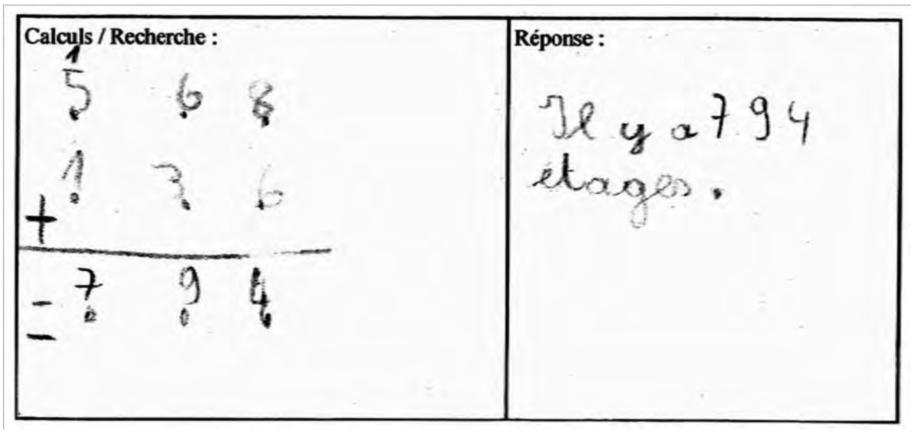
> *« Jade monte au deuxième étage de la tour Eiffel. Elle a déjà monté 568 marches. Il reste 136 marches. Combien de marches y a-t-il pour monter au deuxième étage ? »*

Voici les productions de quatre élèves.

### Élève A



**Élève B**

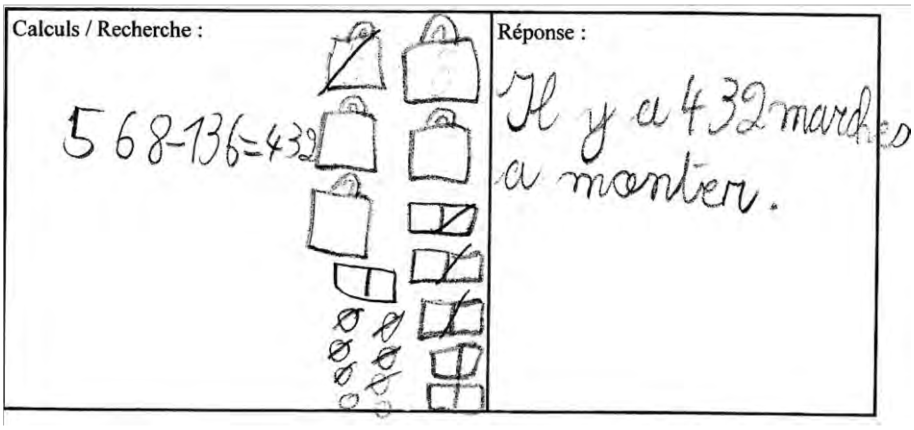

Calculs / Recherche :

568
+ 176
= 794

Réponse :

Il y a 794 étages.

**Élève C**

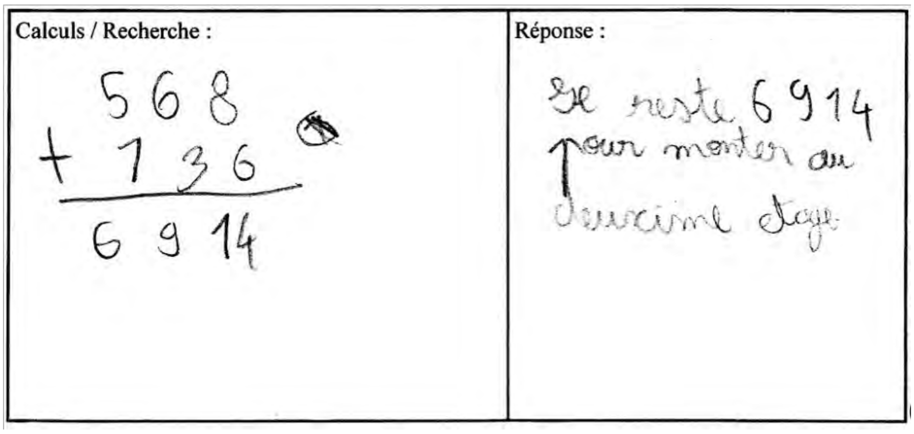

Calculs / Recherche :

568-136=432

Réponse :

Il y a 432 marches a monter.

**Élève D**


Calculs / Recherche :

568
+ 736
6914

Réponse :

Il reste 6914 pour monter au deuxime étage

1) Sur quel type de problèmes porte cet exercice ?

2) Les élèves A et C recourent à des schémas de la situation. Expliciter leur intérêt dans la procédure de l'élève.

3) Analyser chacune des productions des élèves B, C et D. Émettre une hypothèse sur l'origine des erreurs éventuelles.

4)
   a) Quelle aide peut-on proposer à l'élève C pour qu'il comprenne mieux la situation ?

   b) Quelle aide peut-on proposer aux élèves B et D pour qu'ils puissent progresser ?

**SITUATION 2**

### Document 1

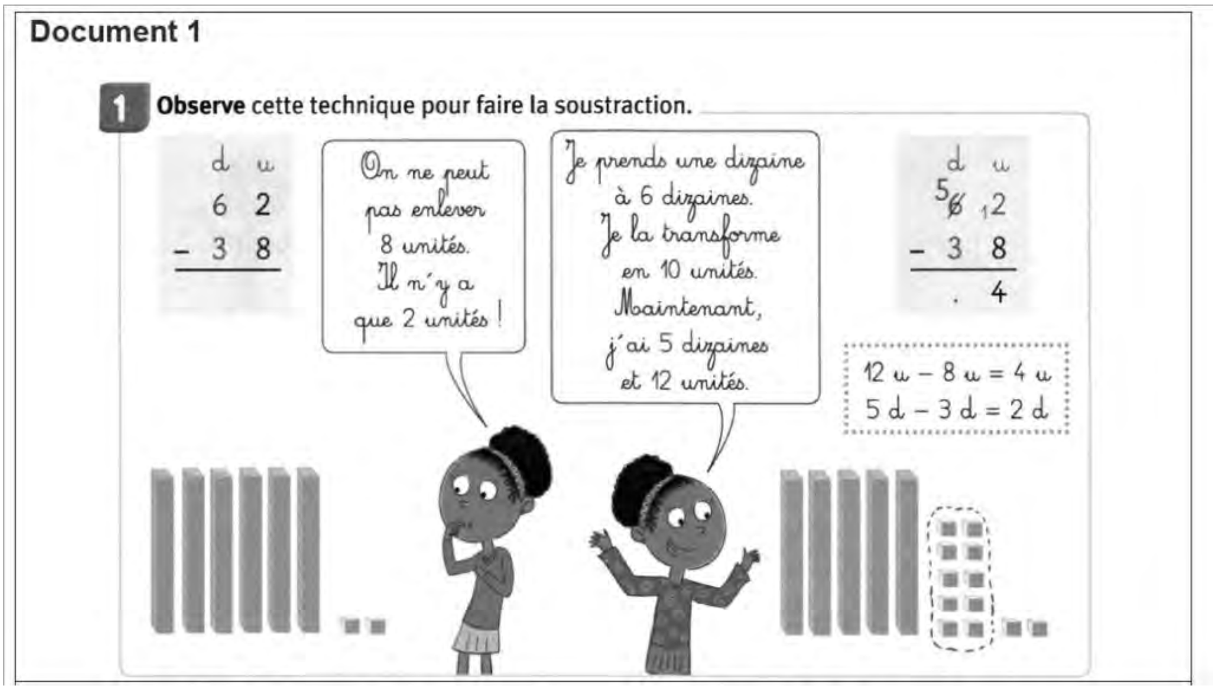
« Vivre les maths CE1 » Nathan, éditions 2015, chapitre 119, la soustraction posée à retenue.

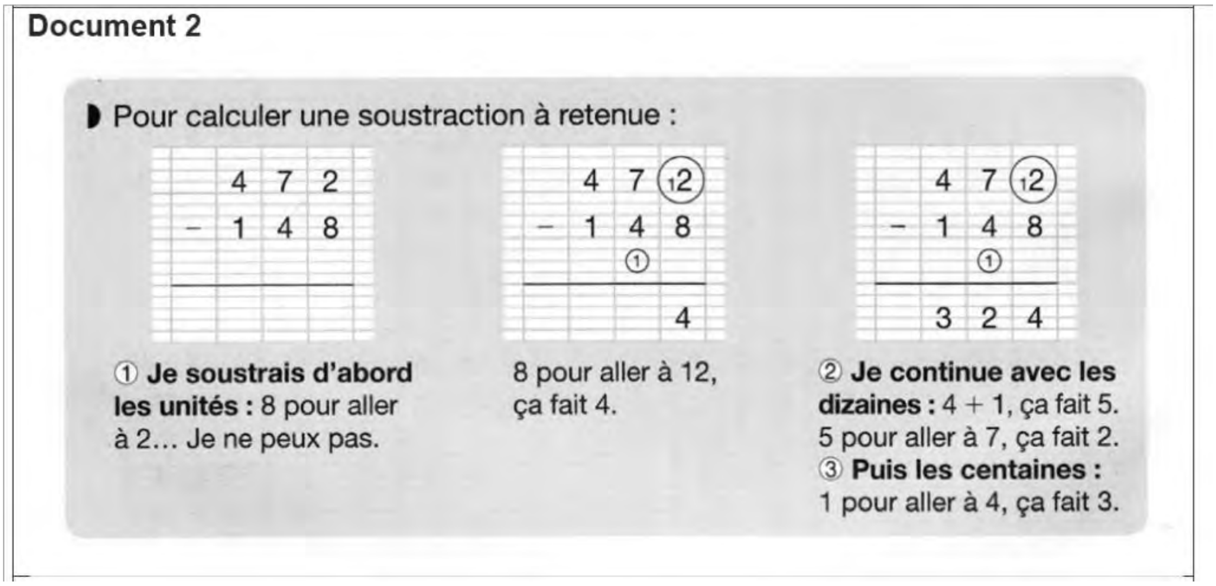
### Document 2

« Pour comprendre les mathématiques CE1 » Hachette éducation, éditions 2014, chapitre 136, la soustraction posée avec retenue.

### Document 3

Copie d'une trace écrite du cahier de leçons d'un élève de CE1.



**Document 3 :** Copie d'une trace écrite du cahier de leçons d'un élève de CE1

***Calcul en ligne***

| | |
|---|---|
| $85 - 18 = 87 - 20$<br>$= 67$ | Enlever 18 c'est difficile mais enlever 20 c'est plus facile !<br>On ajoute 2 à 85 et à 18.<br>On effectue l'opération $87 - 20$ « dans sa tête ». |
| $289 - 47 = 282 - 40$<br>$= 242$ | Enlever 47 c'est difficile mais enlever 40 c'est plus facile !<br>On enlève 7 à 289 et à 47<br>On effectue l'opération $282 - 40$ « dans sa tête ». |
| $472 - 148 = 474 - 150$<br>$= 424 - 100$<br>$= 324$ | On ajoute 2 aux deux nombres<br>On enlève 50 aux deux nombres<br>On effectue l'opération « dans sa tête ». |

1) Sur quelle(s) connaissance(s) mathématique(s) s'appuie chacune des méthodes proposées pour effectuer une soustraction dans les deux présentations des manuels **(documents 1 et 2)** ?
2) Quelle propriété mathématique justifie la méthode proposée dans le **document 3** ?
3) Dans le cadre de l'apprentissage de la soustraction, donner un avantage et un inconvénient de chacune des présentations de la technique opératoire de la soustraction proposées dans les trois documents.

## SITUATION 3

Voici trois extraits de manuels de mathématiques :

**L'essentiel**

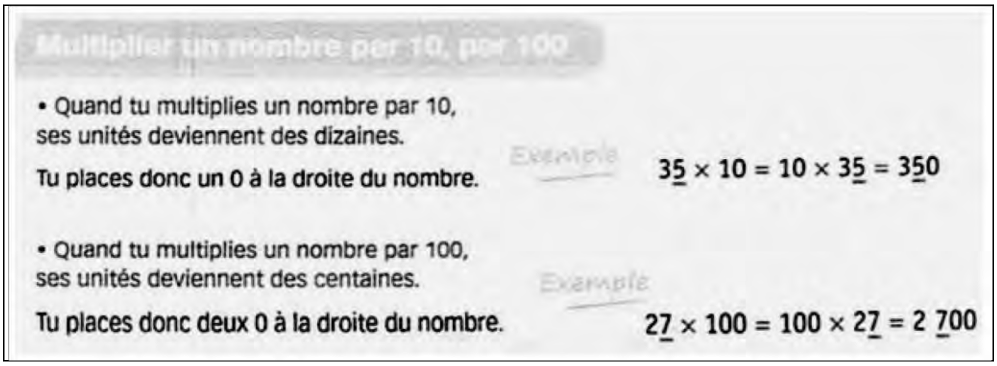
Pour multiplier un nombre par 10, 100 ou 1000, on écrit un, deux ou trois zéros à la droite de ce nombre
$25 \times 10 = 250$  $25 \times 100 = 2500$  $25 \times 1000 = 25000$

*Figure 1 : Extrait du manuel A "Pour comprendre les mathématiques" - CM1, Hachette (2016).*

**Je retiens**

- **Multiplier** un nombre **par 10, 100, 1 000**… revient à le rendre **10, 100, 1000 fois plus grand**.
  Ex.: $42 \times 10 = 42$ dizaines $= 420$
  $42 \times 100 = 42$ centaines $= 4\,200$
  $42 \times 1\,000 = 42$ milliers $= 42\,000$
- Quand on **multiplie** un nombre **par 20**, on multiplie d'abord ce nombre **par 2**, puis **par 10**.
  Ex.: $21 \times 20 = (21 \times 2) \times 10 = 42 \times 10 = 420$
- Quand on **multiplie** un nombre **par 300**, on multiplie d'abord ce nombre **par 3, puis par 100**.
  Ex.: $13 \times 300 \rightarrow (13 \times 3) \times 100 = 39 \times 100 = 3\,900$
- Multiplier par 10 est très utile pour évaluer un ordre de grandeur du résultat.
  Ex: $39 \times 81$, c'est proche de $40 \times 80 = 3\,200$

*Figure 2 : Extrait du manuel B "Les nouveaux outils pour les maths" - CM1, Magnard (2016).*



**Multiplier un nombre par 10, par 100**

• Quand tu multiplies un nombre par 10,
ses unités deviennent des dizaines.
Tu places donc un 0 à la droite du nombre.

Exemple $3\underline{5} \times 10 = 10 \times 3\underline{5} = 3\underline{5}0$

• Quand tu multiplies un nombre par 100,
ses unités deviennent des centaines.
Tu places donc deux 0 à la droite du nombre.

Exemple $2\underline{7} \times 100 = 100 \times 2\underline{7} = 2\ \underline{7}00$

*Figure 3 : Extrait du manuel C "Maths" Cycle 3, Hatier (2016).*

1) Ces extraits de manuels abordent le même savoir mathématique. Quel est-il ?
2) Analyser ces extraits de manuels au regard de l'apprentissage visé.
3) Suivant l'approche sous-tendue par le manuel utilisé, quelles difficultés les élèves risquent-ils de rencontrer au cycle 3 ?

# CORRIGÉS DES CINQ SUJETS 2017

# MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ[1]

La notion de « proportionnalité » est très présente dans les sujets du CRPE. Il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire utilisé pour parler des propriétés afférentes.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire qui traduit la relation liant les deux grandeurs en présence. Cette fonction décrit et généralise la situation. De manière générique, on peut noter $f$ cette fonction linéaire. Les deux propriétés principalement citées pour décrire une procédure ou analyser une situation sont les suivantes :

(A) *pour tous réels $x$ et $y$ on a* $f(x+y) = f(x) + f(y)$
(B) *pour tous réels $k$ et $x$ on a* $f(k \times x) = k \times f(x)$

On montre, par exemple dans [simard2012] que les propriétés (A) et (B) sont des propriétés caractéristiques d'une fonction linéaire (sous réserve d'une condition de continuité de la fonction $f$).

La propriété (A) est communément appelée *propriété additive* ou *propriété linéaire additive.*
La propriété (B) est communément appelée *propriété multiplicative* ou *propriété linéaire multiplicative* ou encore *propriété d'homogénéité*.

La locution « propriété linéaire additive » est redondante, nous préférerons « propriété additive » pour désigner la propriété (A). Nous choisirons, de même, la locution « propriété multiplicative » pour désigner la propriété (B). Le terme mathématique « homogénéité » est moins connu du public auquel s'adresse ce document donc nous ne l'utiliserons pas.

Une situation de proportionnalité met en jeu deux grandeurs liées par un coefficient multiplicateur, on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par un nombre $a$. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité* de la situation. La fonction linéaire sous-jacente est définie par $f(x) = a \times x$. Ce nombre $a$ a de multiples significations qu'il convient de distinguer :

- $a$ est le *coefficient de proportionnalité* lorsque l'on considère la structure multiplicative de la situation ;
- $a$ est la *valeur commune des rapports* des deux grandeurs en jeu lorsque l'on considère la situation en terme de *rapports égaux* ;
- $a$ est le *coefficient* qui définit la *fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on considère la situation d'un point de vue *fonctionnel* ;
- $a = f(1)$ est la *valeur de l'unité* (ou *valeur pour « un »*) lorsque l'on considère une procédure de *passage à l'unité* ;
- $a$ est le *coefficient directeur de la droite représentative de la fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on se place dans le cadre graphique. On peut également dire que $a$ est la *pente* ou l'*inclinaison* de la droite représentative de la fonction linéaire associée.

Ces distinctions permettent d'être précis lorsque l'on décrit une procédure. Une procédure de retour à l'unité insiste sur la *valeur pour « un »*, alors qu'une procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre.

Le tableau de proportionnalité est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée à la situation. La construction d'un tel tableau relève d'une compétence d'organisation et de gestion de données. Cette structure s'avère efficace pour clarifier une situation de proportionnalité, en particulier identifier le statut des différentes données, éventuellement mieux « visualiser » des liens entre les nombres présents (correspondant à une même grandeur ou liés par la relation), et pour schématiser la procédure utilisée par l'élève. Les propriétés additive et/ou multiplicative sont généralement représentées par des flèches avec un symbole « $+$ » ou « $\times$ », le coefficient de proportionnalité par une flèche avec « $\times a$ » qui « fait passer » d'une grandeur à l'autre, le passage à l'unité est exprimé en ajoutant, le cas échéant, une ligne ou une colonne avec la valeur pour « un ». Un tableau de proportionnalité ne donne pas la réponse à la

[1] **Référence :**

[simard2012] Simard A., « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », Petit x, n° 89, 2012, 51-63 recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est une schématisation mais pas une technique de résolution.

*Remarque :*

*Lorsque l'élève considère l'utilisation d'un tableau comme une technique de résolution, il peut être amené à conclure que tout tableau à double entrée est un tableau de proportionnalité (ce qui est une erreur fréquente).*

Finalement il semble important de faire le point sur trois procédures particulières : « le passage à l'unité », « la règle de trois » et « le produit en croix ». Pour cela on se donne un exemple de situation tiré de la partie 3.C. du sujet du Groupement 2 du CRPE 2014.

> Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
> Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
> Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

La procédure de *passage à l'unité* consiste à chercher le nombre d'œufs pour 1 personne puis à multiplier ce résultat par 20 pour répondre à la question. Dans cet exemple, s'il faut 6 œufs pour 8 personnes, il faut $6 : 8 = 0{,}75$ œuf par personne, et donc $0{,}75 \times 20 = 15$ oeufs pour 20 personnes.

*Remarque :*

- *dans cette procédure, le premier calcul est une division, le second est une multiplication. Le résultat de la division peut être entier, décimal ou rationnel non décimal… ce qui représente une difficulté selon le niveau de l'élève ;*
- *si le résultat de cette division est non décimal, l'utilisation d'une valeur approchée peut donner un résultat final approximatif et faux (par exemple : pour 3 personnes il faut 2 œufs, donc pour une personne il faut $2 : 3 \approx 0{,}66$ œufs donc pour 30 personnes il faut $0{,}66 \times 30 = 19{,}8$ œufs… au lieu de 20 œufs) ;*
- *le résultat de la division peut être difficile à re-contextualiser car 0,75 œuf par personne n'a pas beaucoup de sens dans la réalité.*

La procédure de *la règle de trois* consiste à répondre à la question en trois temps sans faire de calculs intermédiaires.

S'il faut 6 œufs pour 8 personnes

alors il faut huit fois moins pour 1 personne, soit $\frac{6}{8}$ œufs pour 1 personne

et il faut vingt fois plus pour 20 personnes, soit $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ œufs pour 20 personnes.

*Remarque sur le calcul du résultat :*

- *dans cette procédure, le premier calcul est une multiplication, le second est une division ;*
- *le résultat de la multiplication* $20 \times 6$ *n'a aucun sens vis à vis du contexte de l'énoncé ;*
- *l'utilisation de l'égalité* $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times 6}{8}$ *fait appel à une propriété du calcul fractionnaire ;*
- *le fait de « multiplier puis diviser » peut donner des calculs plus simples que « diviser puis multiplier » (dans l'exemple cité* $\frac{20\times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ *est une suite de calculs dans les entiers, alors que le calcul* $20 \times \frac{6}{8} = 20 \times 0{,}75 = 15$ *nécessite un passage dans les décimaux).*

La procédure du *produit en croix* est vue au collège (programme de la classe de quatrième). Cette procédure consiste à ranger les valeurs en jeu dans un tableau (de proportionnalité) et à faire un calcul (multiplication puis division ou division puis multiplication).

$20 \times 6 : 8 = 15$

| | |
|---|---|
| 8 | 6 |
| 20 | ? |

*Remarque :*

*Il s'agit d'une procédure dé-contextualisée et purement technique qui masque le sens de la notion de proportionnalité. Cette procédure ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire.*

# MISE AU POINT SUR LE CHOIX DES EXPRESSIONS UTILISÉES À PROPOS DE L'ÉCRITURE DES NOMBRES

L'expression **« écriture d'un nombre »** fait référence aux différentes écritures possibles pour un même nombre.

**Pour les nombres entiers, on distingue :**

- **L'écriture à l'aide des mots nombres** est la transcription écrite de notre système de numération orale. Nous préférons cette expression à l'expression « écriture en lettres », qui peut prêter à confusion avec « écriture algébrique » ou l'écriture en chiffres romain par exemple.
De leur côté, les programmes parlent de « noms des nombres », ceux-ci pouvant être constitués d'un ou plusieurs mots nombres.

- **L'écriture en chiffres** : celle-ci dépend du système de numération utilisé, en particulier des chiffres (les signes) utilisés et de la base choisie ; celle-ci va permettre l'utilisation d'un nombre fini de chiffres pour écrire tous les nombres.

Lorsque la base de numération est dix, on parle d'**écriture décimale**.
Les programmes parlent « d'écriture usuelle » ou indifféremment « d'écriture en chiffres » et « d'écriture chiffrée ».
Lorsque la base de numération est deux, on parle d'**écriture binaire**.
Lorsque la base de numération est soixante, on parle d'**écriture sexagésimale**.

Attention à l'utilisation du terme "chiffre". On écrit le nombre 15 en dessinant le chiffre 1 puis le chiffre 5. Mais dans une consigne du type « Prends 2 jetons », 2 est un nombre et non un chiffre, puisqu'il exprime une quantité.

**On rencontre aussi des écritures liées aux différentes opérations :**

- **Écriture additive** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'une somme.
Par exemple :
  $5 + 2$ est une écriture additive du nombre sept.
  $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ est une écriture additive du nombre quinze.

- **Écriture multiplicative** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'un produit.
Par exemple :
  $6 \times 10$ est une écriture multiplicative du nombre soixante.
  $2 \times 3 \times 5 \times 7$ est une écriture multiplicative du nombre deux-cent-dix.

- **Décomposition canonique** : ce sont des écritures qui font référence à la valeur des chiffres selon leur position (« canons » de la numération, les puissances de 10), par exemple $437 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 7$.

Dans les programmes, « l'écriture en ligne mixte » désigne un type de décomposition mêlant décomposition additive et multiplicative. Par exemple $437 = 43 \times 10 + 7$ ou $437 = 2 \times 220 - 3$.

Dans les programmes de cycle 2, on trouve l'expression « l'écriture en unités de numération » qui désigne des écritures du type « 5d 6u », mais aussi « 4d 16u » ou « 6u 5d » pour 56.

**L'écriture de nombres non entiers amène l'utilisation d'autres écritures :**

- **Les écritures fractionnaires**. Ce sont les écritures du type

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{238}{10}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{20}{5}, \quad \frac{2{,}2}{3} \quad \dots$$

On réserve le terme de **fraction** aux écritures fractionnaires dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.

Il n'y a pas unicité de l'écriture d'un nombre rationnel sous forme de fraction :

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

De même $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

Une **fraction décimale** désigne une écriture fractionnaire dont le dénominateur est 10, 100, 1000… (ou toute autre puissance de 10).

Les nombres décimaux sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

$\frac{3227}{100}$ est un nombre décimal, mais aussi $\frac{1}{2}$ qui peut s'écrire $\frac{5}{10}$ .

- **L'écriture à virgule**.

L'écriture à virgule est une convention d'écriture des nombres.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures du nombre dont l'écriture à virgule est 0,5.

L'écriture à virgule d'un nombre décimal s'appelle son écriture décimale. Elle peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Les nombres non décimaux peuvent aussi s'écrire avec une virgule, mais leur écriture comporte alors une infinité de chiffres :

- Périodique dans le cas d'un rationnel ; par exemple : $\frac{4}{3} = 0{,}66666\ \dots$
- Non périodique dans le cas d'un réel non rationnel (cas de l'écriture à virgule de π par exemple).

**On proscrira l'expression « nombre à virgule »,** car « à virgule » est une caractéristique de l'écriture du nombre et non du nombre lui-même.

# MISE AU POINT SUR LA RÉDACTION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES PORTANT SUR LES CALCULS DE GRANDEURS

Il s'agit dans les formulations utilisées de bien distinguer les trois concepts intervenants, à savoir l'**objet**, la **grandeur** et la **mesure**, et d'éviter au maximum les abus de langage.

Le langage courant et le langage des manuels contiennent de nombreuses formes incorrectes, où sont confondues grandeur et mesure.

*Exemples :*

| On écrira : | plutôt que |
|---|---|
| « un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur » ; | « un triangle équilatéral a ses trois côtés de même mesure » ; |
| « la longueur du segment est 3 cm ». | « la mesure du segment est 3 cm ». |

D'autre part, certains mots sont polysémiques : par exemple diamètre désigne parfois un segment ou une longueur ou la mesure de cette longueur.

Dans ces annales, on utilise le verbe « mesurer » uniquement pour l'action de mesurer avec un instrument ou des unités étalons.
On utilisera des expressions telles que « la hauteur de la tour Eiffel est (ou vaut) 320 m », plutôt que la formulation incorrecte : « la tour Eiffel mesure 320 m ».

Les programmes de cycle 3 précisent : « La notion de mesure d'une grandeur, consiste à associer, une unité étant choisie, un nombre (entier ou non) à la grandeur considérée. Il s'agit de déterminer combien d'unités ou de fractionnements de l'unité sont contenus dans la grandeur à mesurer. Les opérations sur les grandeurs permettent également d'aborder les opérations sur leurs mesures… »

Les programmes de cycle 4 indiquent que les élèves doivent « mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, <u>en conservant les unités</u>. »

**Dans ces annales, nous nous conformerons autant que possible aux injonctions des programmes.**

*Exemples :*

- Calcul de la somme de la masse de deux objets, l'un de masse 1 kg 800 g et l'autre de masse 450 g :
  1 kg + 800 g + 450 g = 1 kg + 1250 g = 2 kg + 250 g = 2,250 kg

- Calcul avec des grandeurs composées :
  La durée du parcours est égale au quotient de la distance parcourue par la vitesse du parcours :
  $$\frac{45\ \mathrm{km}}{30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 1{,}5\ \mathrm{h}$$

- Calcul du volume d'une pyramide à base carrée :
  $$\frac{1}{3} \times (7{,}5\ \mathrm{cm})^2 \times 10\ \mathrm{cm} = \frac{1}{3} \times 56{,}25\ \mathrm{cm}^2 \times 10\ \mathrm{cm} = 187{,}5\ \mathrm{cm}^3$$

- Calcul à l'aide du théorème de Thalès :
  $$\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{HE}} \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{DJ}}{9\ \mathrm{cm}} = \frac{10\ \mathrm{cm}}{12\ \mathrm{cm}} = \frac{10}{12} \quad \text{et donc} \quad \mathrm{DJ} = \frac{10}{12} \times 9\ \mathrm{cm} = 7{,}5\ \mathrm{cm}$$

**Parfois, nous ne pourrons éviter certains abus :**

De manière générale AB désigne la longueur du segment [AB] et on écrit par exemple AB = 3 cm. Mais, lorsque la lisibilité des calculs l'exige, on utilise aussi AB pour désigner la mesure de la longueur (une unité étant choisie), en étant conscient qu'il s'agit d'un abus de notation.

*Exemples :*

1) Un triangle ABC rectangle en A est tel que AB = 3 cm ; AC = 4 cm. Calculer BC.

*Dans la correction de cet exercice, on note de la même manière les grandeurs AB, AC, BC et leur mesure pour effectuer les calculs sur les nombres.*

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = 9 + 16 = 25$

$\mathrm{BC} = \sqrt{25} = 5$

La longueur du segment [BC] est 5 cm.

2) Dans un calcul à l'aide du théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{HE}} \quad \text{donc} \quad \frac{12 - \mathrm{x}}{12} = \frac{\mathrm{JK}}{9} \quad \text{c'est - à - dire} \quad \mathrm{JK} = \frac{9 \times (12 - x)}{12} = 0{,}75(12 - x)$$

# GROUPEMENT 1 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE

## 1) Représentation géométrique

### 1) a) Calcul des longueurs AC et BC

Puisque le triangle ABC représente les trois villes Bordeaux, Brive et Montauban « à l'échelle », les distances entre les trois points sont proportionnelles aux distances entre les trois villes.
On note respectivement $x$ et $y$ les mesures en centimètres des longueurs AC et BC.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mesure de la distance réelle en km | 204,4 | 210 | 145,6 |
| Mesure de la distance sur la représentation en cm | 7,3 | $x$ | $y$ |

*Remarque :*
*Le tableau ci-dessus permet de présenter et d'associer les données mais il n'est pas indispensable à la résolution de la question, qui est une double recherche de quatrième proportionnelle.*

*Méthode 1 : Utilisation du coefficient de proportionnalité*

Puisqu'il y a proportionnalité entre les distances réelles et les distances sur la représentation, le coefficient multiplicateur qui permet de calculer les valeurs de la 2ème ligne à partir de celles de la 1ère est :

$$k = \frac{7{,}3}{204{,}4} = \frac{x}{210} = \frac{y}{145{,}6}$$

De la 1ère égalité, on déduit : $x = \frac{7{,}3}{204{,}4} \times 210$ d'où $x = 7{,}5$

De même, on a : $y = \frac{7{,}3}{204{,}4} \times 145{,}6$ ; d'où $y = 5{,}2$.

**La longueur AC est donc 7,5 cm et la longueur BC est 5,2 cm.**

*Remarque*
*Le nombre k n'est pas un décimal. Une calculatrice scientifique donne : k ≈ 0,035. Si on utilise cette valeur approchée pour la suite des calculs avec AC = 210 × k, on obtient AC ≈ 7,497 ce qui n'est qu'une valeur approchée de AC. De même pour BC. Mais une calculatrice (récente) de type collège indique d'abord : k =* $\frac{1}{28}$*, valeur exacte de k qui donne ensuite les valeurs exactes de AC et BC (car 2100 et 1456 sont divisibles par 28).*

*Méthode 2 : Utilisation du produit en croix*

Des deux premières colonnes du tableau de proportionnalité ci-dessus, on tire : $204{,}4 \times x = 7{,}3 \times 210$

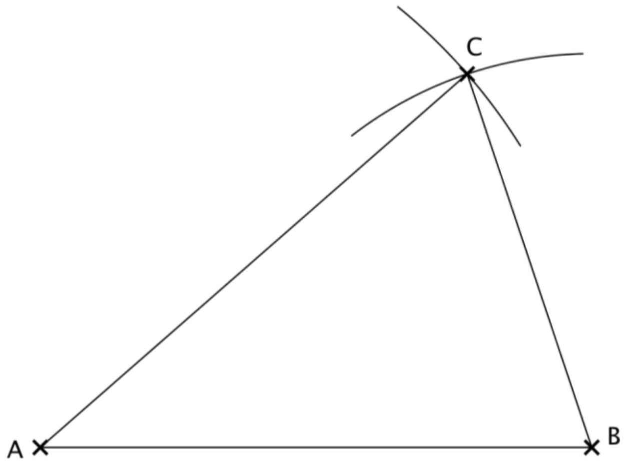
On en déduit : $x = \frac{7{,}3 \times 210}{204{,}4} = 7{,}5$

De même, en utilisant la 1ère et la 3ème colonne du tableau, on obtient : $y = \frac{7{,}3 \times 145{,}6}{204{,}4} = 5{,}2$

**La longueur AC est donc 7,5 cm et la longueur BC est 5,2 cm.**

*Remarque*
*Cette technique de calcul est efficace pour la recherche d'une quatrième proportionnelle mais elle « cache » le lien entre les grandeurs considérées. Ici, en incitant à effectuer le produit avant le quotient, elle permet d'obtenir directement les valeurs exactes des mesures des longueurs AC et BC, quelle que soit la calculatrice utilisée.*

### 1) b) Construction du triangle ABC




### 1) c) Échelle utilisée pour modéliser la situation

*Remarque*
*L'échelle d'une représentation est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le terrain et les distances sur le dessin. Ce coefficient est conventionnellement exprimé sous la forme d'un quotient* $\frac{1}{\mathrm{n}}$ *où* n *est un entier, ce qui signifie que les distances sur la représentation sont* n *fois plus petites que dans la réalité.*
*On peut le traduire par : « 1 cm sur le dessin représente* n *cm sur le terrain ».*

*Méthode 1 : raisonnement direct*
On sait que 7,3 cm sur le dessin représentent 204,4 km = 20 440 000 cm sur le terrain
donc 1 cm représente $\frac{20440000}{7{,}3}$ cm sur le terrain, c'est à dire 2 800 000 cm
**L'échelle utilisée est donc** $\mathbf{\frac{1}{2\,800\,000}}$.

*Méthode 2 : utilisation des résultats de la question 1) a)*
D'après la question 1) a) le coefficient de proportionnalité entre les mesures en km des distances sur le terrain et les mesures en cm des distances sur le dessin est égal à $\frac{7{,}3}{204{,}4}$. Son inverse est donc $\frac{204{,}4}{7{,}3} = 28$.
On en déduit que 1 cm sur le dessin correspond à 28 km sur le terrain, soit à 2 800 000 cm.
**L'échelle utilisée est donc** $\mathbf{\frac{1}{2\,800\,000}}$.

## 2) Étude de faisabilité

### 2) a) Placement du point D représentant l'échangeur

La distance du point B à un point M de la droite (AC) est minimale lorsque les droites (BM) et (AC) sont perpendiculaires. Le point D est donc le projeté orthogonal de B sur (AC) ou le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. *(cf. figure 1 en page suivante).*

**La droite (BD) est donc la hauteur du triangle ABC issue de B.**

*Remarque :*
*Dans les réponses aux questions 2) b) et 2) c), afin d'alléger l'écriture des calculs, on s'autorise un abus de notation en assimilant les longueurs et leurs mesures en centimètres, par exemple en écrivant AB = 3 au lieu de AB = 3 cm.*

### 2) b) Calcul de la distance AD

D'après l'énoncé, on sait que $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AD}$ avec AB = 7,3 ; AC = 7,5 ; BC = 5,2

On a donc : $5{,}2^2 = 7{,}3^2 + 7{,}5^2 - 2 \times 7{,}5 \times \mathrm{AD}$
C'est-à-dire : $27{,}04 = 53{,}29 + 56{,}25 - 15 \times \mathrm{AD}$
D'où : $15 \times \mathrm{AD} = 82{,}5$.
On en déduit : $\mathrm{AD} = \dfrac{82{,}5}{15} = 5{,}5$.
**La distance AD est donc de 5,5 cm.**

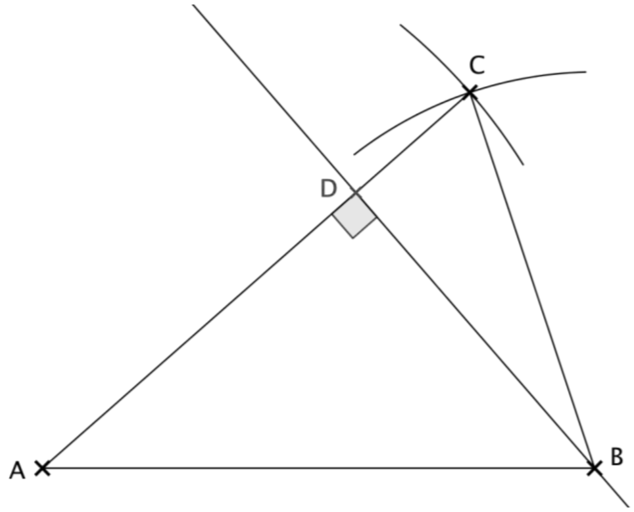


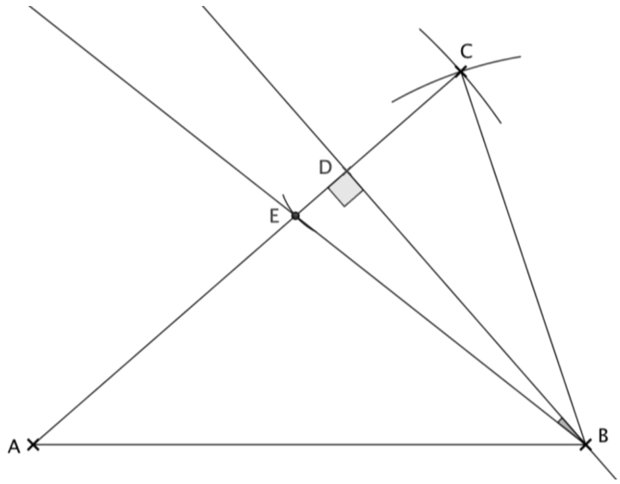

*Figure 1*

### 2) c) Calcul des longueurs CD et BD

Le point D appartient au segment [AC] donc CD = AC – AD = 7,5 – 5,5 = 2
**La longueur CD est 2 cm.**
Puisque la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AC), le triangle ABD est rectangle en D.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2$
D'où $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AD}^2 = 7{,}3^2 - 5{,}5^2 = 23{,}04$
On en déduit : $\mathrm{BD} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$
**La longueur BD est 4,8 cm.**

## 3) Validation du projet

### 3) a) Calcul de l'angle $\widehat{\mathrm{DBE}}$




Le triangle DBE est rectangle en D et on connaît les longueurs BD et DE, donc, pour déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{DBE}}$, on peut calculer sa tangente :
$\tan \widehat{\mathrm{DBE}} = \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{0{,}9 \text{ cm}}{4{,}8 \text{ cm}} = 0{,}1875$ donc $\widehat{\mathrm{DBE}} \approx 10{,}61965°$ à $0{,}00001°$ près.
**L'angle $\widehat{\mathrm{DBE}}$ mesure environ 10,62°, arrondi au centième de degré.**

### 3) b) Calcul de la longueur BE

*Remarque :*
*Ici encore, afin d'alléger l'écriture des calculs, on s'autorise un abus de notation en assimilant les longueurs et leurs mesures en centimètres.*

*Méthode 1 : Utilisation de l'angle $\widehat{DBE}$*

On a : $\sin \widehat{\mathrm{DBE}} = \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}$ donc $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{DE}}{\sin \widehat{\mathrm{DBE}}} = \dfrac{0{,}9 \text{ cm}}{\sin(10{,}62°)}$ d'où BE ≈ 4,883 cm à 0,001 cm près.

**La longueur BE est donc environ 4,88 cm (arrondie au centième de cm).**

*Remarque :*

*On peut utiliser le même raisonnement avec* $\cos \widehat{DBE} = \dfrac{BD}{BE}$.

*Méthode 2 : Utilisation de l'égalité de Pythagore*

Le triangle BDE est rectangle en D, donc, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{ED}^2 = 4{,}8^2 + 0{,}9^2 = 23{,}85$$

d'où BE = $\sqrt{23{,}85}$, c'est-à-dire BE ≈ 4,8836 à 0,0001 près

**La longueur BE est de 4,88 cm (arrondie au centième de cm).**

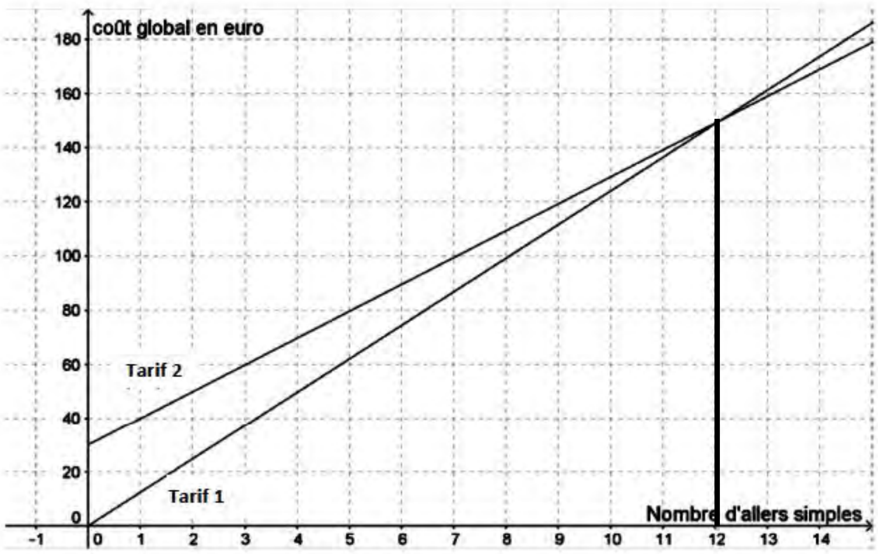
### 3) c) Longueur de la portion d'autoroute

La portion d'autoroute à réaliser est représentée par le segment [BE] de longueur 4,88 cm.
D'après l'échelle de la représentation déterminée question 1.c), on peut déduire que la longueur correspondante sur le terrain est : $L$ = 4,88 cm × 2 800 000 = 13 664 000 cm = 136,64 km.

**La longueur de la portion d'autoroute à construire est 136,6 km (arrondie au dixième de km).**

## 4) Tarification

### 4) a) Lecture graphique




Le tarif 2 devient plus intéressant que le tarif 1 dès que sa représentation graphique est au-dessous de celle du tarif 1. On lit graphiquement que les deux courbes se coupent en un point d'abscisse proche de 12.

**Donc le tarif 2 est plus intéressant à partir de 13 allers simples (et peut-être aussi pour 12).**

### 4) b) Coût du tarif 1 en fonction du nombre d'allers simples

Avec le tarif 1, un aller simple coûte 12,40 € donc pour *x* allers simples, on paiera 12,4 *x* €.
Puisque *f(x)* est le coût global en euro selon le tarif 1, on a :

***f*(*x*) = 12,4 *x***

### 4) c) Coût du tarif 2 en fonction du nombre d'allers simples

Avec le tarif 2, on a une réduction de 20% sur le coût de chaque aller simple.
Diminuer de 20% revient à multiplier par $\left(1-\frac{20}{100}\right)=0{,}8$
donc, une fois le badge de 30 € payé, chaque aller simple coûte, en euro : 12,40 × 0,8 = 9,92.
Puisque, pour *x* allers simples, *g(x)* est le coût global en euro selon le tarif 2, on a :

***g*(*x*) = 9,92 *x* + 30**

### 4) d) Nombre d'allers simples à partir duquel le tarif 2 est le plus avantageux

Le tarif 2 est le plus avantageux dès que $g(x) \leq f(x)$ où $x$ est un entier.
On résout donc l'inéquation : $9{,}92x + 30 \leq 12{,}4x$
Celle-ci est équivalente à :

$30 \leq 12{,}4x - 9{,}92x$

soit $30 \leq 2{,}48x$

d'où $\frac{30}{2{,}48} \leq x$.

Or $\frac{30}{2{,}48} \approx 12{,}096$ à 0,001 près,

donc **pour que le tarif 2 soit le plus avantageux il faut au moins 13 allers simples.**

## 5) Les dangers de l'autoroute

### 5) a) Calcul de la distance de réaction

Puisque le conducteur est fatigué son temps de réaction est de 2 s.
La voiture roule à 120 km/h, donc, durant ces deux secondes, la distance parcourue est :

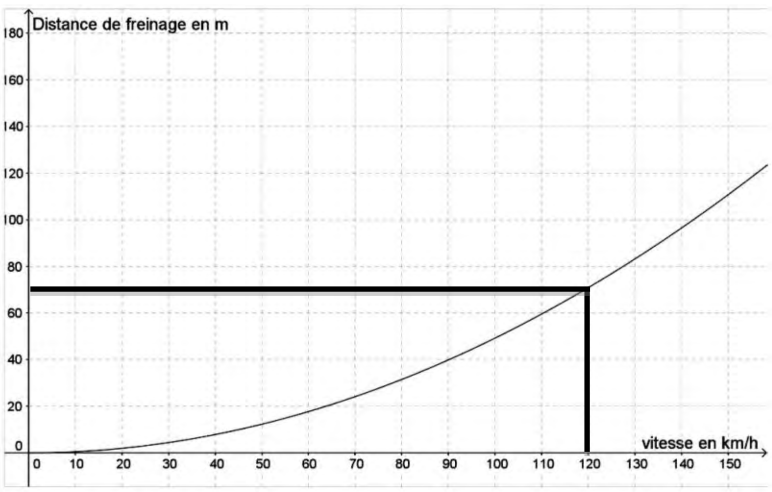
$$D_r = \frac{120 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times 2 \text{ s} = \frac{120\ 000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \times 2 \text{ s} = \frac{200}{3} \text{ m}$$

**Donc la distance de réaction du conducteur fatigué est 66,7 mètres (arrondie au 10$^{\text{ème}}$ de mètre).**

### 5) b) Calcul de la distance d'arrêt et interprétation

La distance d'arrêt est la somme des distances de réaction et de freinage. Le cerf ayant surgi à 150 m devant la voiture, la collision ne peut-être évitée que si la distance d'arrêt est inférieure à 150 m.

*Méthode 1 : Lecture graphique de la distance de freinage*



On peut lire sur le graphique que la distance de freinage pour un véhicule roulant à 120 km/h est d'environ 70 m et, de façon certaine, inférieure à 80 m.
Or, la distance de réaction est 66,7 m donc la distance d'arrêt est, en mètres, d'environ 70 + 67 = 137 et, de façon certaine, inférieure à 147.

**La collision pourra être évitée car la distance d'arrêt est strictement inférieure à 150 mètres.**

*Méthode 2 : Calcul de la distance de freinage*

D'après l'énoncé, la distance de freinage, exprimée en mètres, peut être calculée par la formule :

$$D_f = \frac{v^2}{254 \times c_{fl}} = \frac{120^2}{254 \times 0{,}8}$$

soit $D_f \approx 70{,}9$ à 0,1 près.

Puisque $D_r \approx 66{,}7$ m à 0,1 m près, on a $D_a \approx 66{,}7 \text{ m} + 70{,}9 \text{ m}$ à 0,2 m près et donc la distance d'arrêt est inférieure à 138 m.

**Puisque la distance d'arrêt est strictement inférieure à 150 mètres, la collision pourra être évitée.**

*Remarque :*

*On peut aussi calculer d'abord la distance de freinage maximale pour que la collision soit évitée (150 m – 67 m = 83 m) puis s'assurer par lecture graphique ou calcul que c'est bien le cas.*

### 5) c) Formule dans la feuille de calcul

Sur route sèche, la distance de freinage est donnée par la formule : $D_f = \frac{v^2}{254 \times 0{,}8} = \frac{v^2}{203{,}2}$.

Les valeurs de $v$ sont dans la colonne A, donc, dans la cellule B3, on peut entrer, par exemple, l'une des formules suivantes : = A3^2/203,2 ou = A3*A3/203,2

= A3^2/(254*0,8)

= A3^2/254/0,8

*Remarque :*

*D'autres formules sont possibles. On peut notamment écrire $A3 à la place de A3 (ce qui bloque la colonne A) et/ou ajouter des parenthèses autour du « numérateur » (A3^2) ou (A3*A3), mais ces ajouts sont inutiles ici.*

# DEUXIÈME PARTIE

## EXERCICE 1

### 1) Tableau présentant le nombre de fois où les 12 527 personnes interrogées sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017, selon leur classe d'âge

*Remarque :*
*Dans le tableau ci-dessous, les cases que le candidat devait compléter ont été grisées.*

| | De 15 à 25 ans | De 26 à 44 ans | De 45 à 60 ans | Plus de 60 ans | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Pas du tout | **22** | 82 | 415 | 147 | 666 |
| Une fois | 682 | **3 794** | 1 243 | 589 | **6 308** |
| Deux fois | **413** | 634 | 552 | 138 | 1 737 |
| Trois fois | 174 | 95 | **384** | **1 254** | 1 907 |
| Quatre fois ou plus | 251 | 418 | 923 | 317 | **1 909** |
| TOTAL | 1 542 | **5 023** | 3 517 | 2 445 | **12 527** |

*Remarque*
*Le détail des calculs n'était pas demandé. La technique consiste à remplir le tableau progressivement en repérant au fur et à mesure une ligne ou une colonne où il ne manque qu'une donnée… sans oublier de reporter dans le tableau l'effectif total (12 527) donné dans l'énoncé.*

### 2) Calcul de probabilités

On suppose que chacun a la même probabilité d'être choisi. Nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité. Ainsi, chaque probabilité s'obtient par le quotient du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles (ici 12527).

**a) Le numéro correspond à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017**

Sur les 12 527 personnes interrogées, 1 737 personnes sont allées exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.
La probabilité qu'une personne interrogée soit allée deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017 est donc de $\frac{1\,737}{12\,527}$, soit **environ 0,14 au centième près**.

**b) Le numéro correspond à une personne qui a moins de 45 ans**

Sur les 12 527 personnes interrogées, 1 542 ont de 15 à 25 ans et 5 023 ont de 26 à 44 ans,
et donc 1 542 + 5 023 ont moins de 45 ans.
La probabilité qu'une personne interrogée ait moins de 45 ans est donc de $\frac{1\,542 + 5\,023}{12\,527} = \frac{6\,565}{12\,527}$,
soit **environ 0,52 au centième près**.

**c) Le numéro correspond à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017**

Sur les 12 527 personnes interrogées, 1 254 ont plus de 60 ans et sont allées trois fois au restaurant et 317 ont plus de 60 ans et sont allées quatre fois ou plus au restaurant. Donc 1 254 + 317 = 1 571 personnes ont plus de 60 ans et sont allées au moins trois fois au restaurant.
La probabilité qu'une personne interrogée ait plus de 60 ans et soit allée au moins trois fois au restaurant est donc de $\frac{1\,571}{12\,527}$,
soit **environ 0,13 au centième près**.

# EXERCICE 2

*Complément de formation :*
*aide à la compréhension du programme fourni, écrit en Scratch, un langage de programmation par blocs.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *L'exécution du programme est déclenchée par l'événement « l'utilisateur clique sur le drapeau ».* | quand [drapeau] cliqué | *Question 1* | *Question 2* |
| *Attente de l'entrée d'un nombre par l'utilisateur. Avec le logiciel utilisé ici, ce nombre est automatiquement affecté à la variable* `réponse`. | demander [Choisissez un nombre] et attendre | *On entre 7* | *On entre 12,7* |
| *Instruction conditionnelle : le programme teste la valeur de la variable* `réponse`, *et selon le résultat du test, vrai ou faux, exécute les instructions qui suivent « alors » ou celles qui suivent « sinon ».* | si ⟨(réponse) < [10]⟩ alors<br>sinon | *L'inégalité « 7 < 10 » est vraie* | *L'inégalité « 12,7 < 10 » est fausse* |
| *Exécution d'un calcul (décidé après le test précédent) dont le résultat est affecté à la variable* `résultat`. | si ⟨(réponse) < [10]⟩ alors<br>mettre [résultat] à ((5) * (réponse)) + (3)<br>sinon<br>mettre [résultat] à ((2) * (réponse)) - (7) | *Le programme calcule* $5 \times 7 + 3$ | *Le programme calcule* $2 \times 12{,}7 - 7$ |
| *Affichage d'une phrase qui inclut la valeur de la variable* `résultat`. | dire (regroupe [Le nombre obtenu est] (résultat)) | *« Le nombre obtenu est 38 »* | *« Le nombre obtenu est 18,4 »* |

## 1) Résultat obtenu si l'on choisit d'entrer le nombre 7

Puisque $7 < 10$, *on calcule* $5 \times 7 + 3$, *qui est égal* à 38.

**Le résultat est 38.**

## 2) Résultat obtenu si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7

Puisque $12{,}7 > 10$, *on calcule* $2 \times 12{,}7 - 7$, *qui est égal* à 18,4.

**Le résultat est 18,4.**

## 3) Résultat obtenu si l'on choisit d'entrer le nombre $-6$

Puisque $-6 < 10$, on calcule $5 \times (-6) + 3$, qui est égal à $-27$.

**Le résultat est $-27$.**

# EXERCICE 3

## 1) L'affirmation « 117 est un nombre premier » est fausse.

*Pour invalider cette affirmation, il suffit de trouver un diviseur de 117 autre que 1 et 117.*

*Justification 1*

- 117 est impair, donc il n'est pas divisible par 2.
- La somme de ses chiffres est $1 + 1 + 7$, égale à 9, qui est divisible par 3 : on en déduit que 117 est divisible par 3, donc il n'est pas premier.

*Remarque :*

*Ici, on a rapidement trouvé un diviseur de 117 autre que 1 et lui-même.*
*Dès le départ, on pouvait savoir qu'il n'y aurait pas beaucoup de tests à faire, car* $\sqrt{117} \approx 10{,}8$ *à 0,1 près, et on sait qu'un nombre est premier si, et seulement si, il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à sa racine carrée.*

*Justification 2*

On décompose 117 en produit de facteurs premiers.
$117 = 3^2 \times 13$
117 a donc d'autres diviseurs que 1 et lui-même, par exemple 3.

*Remarque :*

*Cette décomposition permet de déterminer tous les diviseurs de 117 : 1, 3, 9, 13, 39 et 117.*

## 2) a) L'affirmation « Pour n'importe quel nombre entier $n$, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8 » est vraie.

Pour n'importe quel nombre entier $n$, on a :

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= n^2 + 4n + 4 - (n^2 - 4n + 4)\\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 + 4n - 4\\ &= 8\,n\end{aligned}$$

$(n+2)^2 - (n-2)^2$ s'écrit sous la forme $8\,n$, avec $n$ entier donc c'est bien un multiple de 8.

## 2) b) L'affirmation « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 32 » est fausse.

*Un contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.*
Par exemple,
si $n = 2$, $(n+2)^2 - (n-2)^2 = (2+2)^2 - (2-2)^2 = 16$
et 16 n'est pas multiple de 32.

*Remarque :*

*Pour trouver un contre-exemple, on peut utiliser le résultat de la question 2a : pour tout nombre entier n,*

$$(n+2)^2 - (n-2)^2 = 8n.$$

*Or* $32 = 8 \times 4$ donc *8n est un multiple de 32 si et seulement si n est un multiple de 4.*
*Par conséquent, tout nombre n non multiple de 4 peut être utilisé comme contre-exemple.*

## 3) L'affirmation « Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4 » est vraie.

Par exemple 30 est un entier pair supérieur à 7, il est divisible par 3 ($3 \times 10 = 30$) et 30 n'est divisible ni par 9, ni par 4.

*Remarque :*

*Un exemple suffit pour valider cette affirmation, qui porte sur une propriété d'existence.*
*Pour proposer un exemple, on peut chercher un nombre supérieur à 7 dont la décomposition en facteurs premiers contient un et un seul 2 (pour que le nombre soit pair, mais pas divisible par 4), et un et un seul 3 (pour que le nombre soit divisible par 3, mais pas par 9).*

*On peut ainsi proposer* $2 \times 3 \times 5$ ; $2 \times 3 \times 7$ ; $2 \times 3 \times 52 \times 11$ ; *etc.*

**4) L'affirmation « 6 est l'unique solution de l'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$ » est fausse.**

6 est bien une solution puisqu'en remplaçant $x$ par 6 dans chacun des membres, l'égalité est vérifiée :
d'une part, $(6-7)(6+4) = (-1) \times 10 = -10$,
et d'autre part $(6-7)(16-6) = (-1) \times 10 = -10$.
On montre que ce n'est pas la seule.

*Méthode 1*

Lorsque l'on remplace $x$ par 7, on obtient $0 \times (7+4) = 0 \times (16-7)$.
Cette égalité est vraie, donc 7 est une autre solution de l'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$.
Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

*Méthode 2*

L'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$ équivaut à $(x-7)(x+4) - (x-7)(16-x) = 0$
ce qui équivaut à $(x-7)(x+4-16+x) = 0$
donc à $(x-7)(2x-12) = 0$
c'est-à-dire $x-7 = 0$ ou $2x-12 = 0$
et donc $x = 7$ ou $x = 6$

L'équation admet donc deux solutions : 7 et 6.
Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

*Méthode 3 (hors programme du collège)*

Pour tout nombre $x$,

$$\begin{aligned}(x-7)(x+4)-(x-7)(16-x) &= x^2-7x+4x-28-(-x^2+16x+7x-112)\\ &= 2x^2-26x+84\\ &= 2(x^2-13x+42)\end{aligned}$$

Donc l'équation $(x-7)(x+4) = (x-7)(16-x)$ équivaut à $x^2-13x+42 = 0$.
Le discriminant est égal $13^2 - 4 \times 42$à, ce qui vaut 1.
L'équation $x^2-13x+42=0$ admet donc deux solutions $x_1 = \frac{13-1}{2} = 6$ et $x_2 = \frac{13+1}{2} = 7$.
Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

**5) L'affirmation « Si on réduit respectivement de 20 % et de 10 % la largeur et la longueur d'un rectangle alors l'aire du rectangle a diminué de 28 % » est vraie.**

On appelle $L$ la longueur du rectangle et $l$ sa largeur.
La largeur réduite de 20 % vaut $\left(1-\frac{20}{100}\right)l = (1-0{,}2)l = 0{,}8\,l$.
La longueur réduite de 10 % vaut $(1-0{,}1)L = 0{,}9L$.
L'aire du rectangle après réduction est donc de $0{,}8\,l \times 0{,}9\,L = 0{,}72\,l\,L$, soit $(1-0{,}28)\,l\,L$.
L'aire du rectangle a donc bien diminué de 28 %.

**6) L'affirmation « Si on réduit respectivement de 20 % et de 10 % la largeur et la longueur d'un rectangle de dimensions initiales 6 cm et 9 cm, alors le périmètre du rectangle obtenu a diminué de 15 % » est fausse.**

La largeur de 6 cm réduite de 20 % vaut $6 \times (1-0{,}2)$cm, soit 4,8 cm.
La longueur de 9 cm réduite de 10 % vaut $9 \times (1-0{,}1)$cm, soit 8,1 cm.
Le périmètre du rectangle obtenu est donc égal à $2 \times (4{,}8+8{,}1)$ cm, soit 25,8 cm.
Le périmètre du rectangle initial est égal à $2 \times (6+9)$ cm, soit 30 cm.

*Méthode 1*

Le taux de diminution du périmètre est égal à : $\frac{25{,}8-30}{30} = -0{,}14$.
Le périmètre du rectangle a donc diminué de 14 %, et non de 15 %.

*Méthode 2*

Le rapport entre le nouveau périmètre et le périmètre initial est $\frac{25{,}8}{30} = 0{,}86 *$;
Cela correspond à une diminution de 1 – 0,86, soit 0,14.
Le périmètre du rectangle a donc diminué de 14 %, et non de 15 %.

*Méthode 3*

Si le périmètre avait diminué de 15 %, le nouveau périmètre serait égal à :

$$30 \text{ cm} \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 30 \text{ cm} \times 0{,}85 \ = \ 25{,}5 \text{ cm}.$$

Or il est égal à 25,8 cm, donc la diminution n'est pas de 15 %.

# TROISIEME PARTIE

# SITUATION 1

## 1) Aspect du nombre mobilisé dans la situation

Le problème posé aux élèves est un problème de construction d'une collection (de biscuits) équipotente à une collection donnée (la collection d'assiettes). C'est un problème portant sur les quantités.

C'est donc **l'aspect cardinal** du nombre qui est en jeu.

*Remarque :*

*Le sujet parle de l'aspect du nombre « mobilisé » dans cette situation. Cependant, dans les conditions dans lesquelles le problème est posé (pas de contrainte sur le nombre de voyages), le recours au nombre n'est absolument pas nécessaire, comme les procédures des élèves étudiées ensuite le prouvent.*

## 2) Analyse des stratégies mises en œuvre par chacun des élèves

*Stratégie de l'élève A*

L'élève A répond correctement à la consigne.
Il effectue trois voyages, en rapportant un seul biscuit à chaque fois.
Cet élève construit donc la collection de biscuits élément par élément, en considérant successivement chacune des assiettes : un biscuit par assiette. Il effectue une correspondance « terme à terme », entre deux collections distantes, sans s'intéresser aux quantités.

*Stratégie de l'élève B*

L'élève B répond correctement à la consigne.
En conservant trois doigts levés sur l'une de ses mains, l'élève B construit une collection intermédiaire contenant autant de doigts que d'assiettes à remplir (autrement dit, une collection-témoin de la quantité) – peut-être par correspondance terme à terme, peut-être par affichage immédiat d'une quantité reconnue globalement, peut-être par dénombrement de la collection d'assiettes et affichage de trois doigts.
Face aux biscuits, il peut alors prendre autant de biscuits que de doigts levés (par correspondance terme à terme ou constitution immédiate de la quantité, ou constitution d'une collection de trois biscuits).
Il semble donc que cet élève soit capable d'appréhender un ensemble d'objets comme une collection, et de s'intéresser aux quantités associées.

*Stratégie de l'élève C*

L'élève C répond correctement à la consigne.
L'énoncé précise que cet élève effectue très rapidement un voyage, en rapportant exactement trois biscuits. On peut penser qu'il est capable de reconnaitre globalement la très petite quantité qu'est la quantité trois.

*Stratégie de l'élève D*

L'élève D répond correctement à la consigne.

Cet élève apporte tous les biscuits, puis effectue une correspondance terme à terme entre les collections, désormais proches. Il dépose ainsi un biscuit dans chacune des trois assiettes, puis, ayant compris qu'il ne devrait pas rester de biscuits à l'issue d'un voyage, rapporte les biscuits restants.
Il est difficile de dire si cet élève est capable de s'intéresser aux quantités.

### 3) Proposition d'une modification interne à l'énoncé de la situation, susceptible d'engager les élèves A et D dans une évolution dans la construction du nombre.

Les élèves B et C ont réussi la tâche en un seul voyage, en s'intéressant à la quantité d'assiettes en jeu. Ce n'est pas le cas des élèves A et D, qui, eux, ont eu besoin de plusieurs voyages.
Pour les aider à évoluer dans la construction du nombre, on pourrait leur demander d'aller chercher les biscuits en un seul voyage, avec un panier, en imposant qu'une fois les biscuits distribués dans les assiettes, il ne reste aucun biscuit dans le panier.
Ceci constituerait une première étape, pour amener les élèves à considérer non plus les assiettes une à une, mais la collection d'assiettes dans son ensemble et la quantité associée.
Dans un second temps, on pourrait demander aux élèves de passer une commande de biscuits à un marchand (adulte ou autre élève). Ceci les amènerait à communiquer une quantité, sous forme d'une collection-témoin (doigts ou dessin) ou de la désignation orale du nombre.

## SITUATION 2

### 1) Opération permettant de déterminer la contenance en litre d'un bidon d'huile, quand on sait que 5 bidons identiques remplis contiennent 9 litres d'huile.

Il s'agit de trouver la valeur d'une part dans un problème de partage d'une grandeur continue (9 L) en cinq parts égales. L'opération permettant de trouver la valeur de la part est la **division décimale** de 9 L par 5.

*Remarque :*

*La réponse au problème, non demandée mais indispensable pour analyser les productions d'élèves, est 1,8 L.*

### 2) Analyse de trois productions d'élèves

*Production de Julia*

Julia utilise une procédure schématique, en représentant par un trait chacun des 9 litres à partager (et peut-être par un trait chacun des 5 bidons ; il est aussi possible que ces 5 traits aient été tracés plus tard, une fois le premier tour de distribution effectué).
Elle effectue alors un premier « tour de distribution » : 1 litre pour chaque bidon, et elle barre 5 des 9 traits.
Il reste alors 4 litres à répartir entre les 5 bidons, ce qui la conduit à utiliser des fractions.
Elle obtient 8 demi-litres, et en attribue un à chaque bidon.
Elle conclut en codant par une écriture décimale le nombre de litres affectés à chaque bidon (un litre et un demi litre, qu'elle écrit correctement « 1,5 litres »), et en annonçant un reste cohérent avec sa démarche : 3 demi-litres.
Sa démarche est jusque-là correcte, mais elle ne lui permet pas d'aboutir : il resterait à partager les trois derniers demi-litres en 5 parts égales.

*Remarque :*

*La réponse attendue est 1,8 L.* Si *l'élève avait poursuivi ses partages en deux parties égales, sa démarche n'aurait pas abouti : on ne peut pas obtenir huit dixièmes (c'est-à-dire $\frac{4}{5}$) en ajoutant seulement des demis, quarts, huitièmes, etc.*
*Une telle démarche peut cependant aboutir, et de manière efficace, en partageant les 4 litres restants en dixièmes de litres : de manière analogue à la technique posée classique, on obtient 40 dixièmes de litres à partager en 5 parts égales (8 dixièmes de litres dans chaque bidon, sans reste).*

*Production de Karima*

Karima utilise une procédure numérique, avec des calculs posés, par essais et ajustements.
Elle recherche d'abord une décomposition additive de 9 sous la forme de 5 nombres égaux.

Elle essaie avec le nombre 2,5, puis avec 2,2. Elle amorce correctement ses calculs, mais n'écrit pas les résultats, se rendant certainement compte qu'elle n'obtiendra pas 9 (soit à partir du chiffre des dixièmes, non nul, soit à partir du nombre d'unités, trop grand).
Elle change alors de stratégie en posant la division de 9 par 5. Elle effectue alors convenablement la division euclidienne de 9 par 5, mais ne la poursuit pas au-delà du partage des unités.
Elle utilise alors de manière erronée le quotient et le reste de sa division : elle les rassemble dans l'écriture chiffrée 1,4, qu'elle semble considérer comme une possibilité de réponse correcte.
Elle pose alors l'addition itérée de 5 termes égaux à 1,4, dont elle n'écrit pas le résultat (qui est 7). Elle peut cependant l'avoir effectuée mentalement, peut-être seulement partiellement (le chiffre des dixièmes est 0).
Elle conclut en donnant 1,4 L comme solution, ce qui est incorrect.

*Production de Louis*

Louis utilise, comme Karima, une procédure numérique, avec des calculs, en faisant des essais et ajustements successifs ; il interprète pour sa part le problème comme une situation multiplicative, et recherche un nombre, qui, multiplié par 5, est égal à 9.
Il pose ainsi quatre multiplications dont les résultats sont corrects.
L'enchaînement des quatre essais semble réfléchi : il essaie successivement 1,5 (trop petit), puis 1,75 (encore trop petit), puis 2 (trop grand), et enfin avec un nombre compris entre 1,5 et 2, à savoir 1,80, qui convient. Il conclut correctement, en revenant au contexte du problème.

*Remarque :*

*Les traces dont on dispose ne permettent pas de déterminer la ou les techniques de calcul utilisées par cet élève pour effectuer les multiplications. Il n'y a en particulier aucune trace de produit partiel ni de retenue.*
*Il peut avoir effectué ces opérations en suivant la technique traditionnelle de la multiplication par un nombre à un chiffre (ici, écrit en haut). Il peut aussi les avoir effectuées mentalement (pour multiplier par 5, on peut multiplier par 10 puis diviser par 2), ou avec une calculatrice (mais la réponse 9,00 serait alors surprenante).*

### 3) Proposition de modifications, concernant les nombres en jeu dans l'exercice, qui peuvent être proposées par l'enseignant à Louis pour l'encourager à changer de procédure

La procédure mise en œuvre spontanément par Louis est correcte. Elle peut néanmoins être coûteuse en terme de calcul, si les premières tentatives sont éloignées de la solution du problème et/ou si la solution est un nombre décimal dont l'écriture à virgule comporte plus de décimales et/ou si le nombre de bidons est un nombre moins « commode » que 5 pour effectuer des multiplications répétitives.
Si l'enseignant veut faire évoluer sa procédure vers la division décimale, il peut proposer par exemple la même situation avec 27 litres d'huile et 8 bidons (solution : 3,375 L par bidon).

*Remarque :*

*Il est en fait délicat de proposer un nouvel énoncé sans information supplémentaire sur les connaissances de l'élève. Par exemple, l'élève peut savoir que le problème peut être résolu par une division décimale, mais ne pas l'utiliser par manque de maîtrise d'une technique opératoire. Il pourrait alors être profitable de lui proposer d'utiliser une calculatrice : le gain de temps entre plusieurs essais multiplicatifs successifs et une seule division décimale apparaîtrait plus nettement.*

## SITUATION 3

### 1) Principale notion du programme de cycle 3 sur laquelle cet exercice d'évaluation permet de revenir

L'énoncé de l'exercice fournit une recette de crêpes pour 6 personnes, et demande de prévoir la quantité nécessaire pour chacun des ingrédients pour préparer des crêpes pour 9 personnes.
La notion en jeu dans cette situation est la **proportionnalité** : la quantité de chaque ingrédient doit être proportionnelle au nombre de personnes.

*Remarque :*

*La* ***proportionnalité*** *n'est en fait que le modèle mathématique traditionnellement utilisé pour résoudre ce type d'exercice scolaire. Dans des conditions réelles de préparation de crêpes, le cuisinier peut s'autoriser à s'éloigner du modèle…*

## 2) Explicitation des procédures utilisées par chacun des trois élèves pour calculer la masse de farine à prévoir pour 9 personnes

Les trois élèves ont bien identifié la relation de proportionnalité entre le nombre de personnes et la masse de farine (même s'ils ne l'écrivent pas, leurs raisonnements en témoignent).

*Élève A*

Cet élève indique qu'il « [fait] à chaque fois le nombre et sa moitié parce que 6 et sa moitié font 9 » et obtient la masse de farine en ajoutant 250 g et 125 g.
Cette procédure est correcte, et la réponse (375 g) l'est également.
Sa procédure s'appuie sur les propriétés de linéarité (additive et multiplicative) de la relation de proportionnalité qui lie le nombre de personnes et la masse de farine à prévoir :
- comme $9 = 6 + 3$, la masse de farine pour 9 personnes est la somme des masses de farine pour 6 personnes et pour 3 personnes ;
- comme 3 est la moitié de 6, la masse de farine pour 3 personnes est la moitié de la masse de farine pour 6 personnes.

*Élève B*

Cet élève pose d'abord la division de 250 par 6. Il multiplie ensuite le quotient obtenu (41,6) par 9.
Cette procédure est correcte : c'est le « passage par l'unité ». L'élève cherche d'abord la masse de farine à prévoir pour une personne, avant de déterminer la masse de farine à prévoir pour 9 personnes.

Cependant, ici, la masse nécessaire pour 1 personne n'est pas un nombre décimal ($\frac{250}{6} = 41,\bar{6}$). L'élève n'en obtient donc qu'une valeur approchée au dixième, et sa réponse finale n'est alors qu'une valeur approchée du résultat attendu, mais tout à fait acceptable.

*Remarque :*

*En pratique, il est rare que pour faire des crêpes on pèse les ingrédients avec une précision inférieure au gramme ! C'est pourquoi la réponse de l'élève, au gramme près, ne peut pas être rejetée.*

*Élève C*

Comme l'élève B, l'élève C commence par poser la division de 250 par 6. Il ajoute ensuite trois fois le quotient obtenu (41) à 250.
Cette procédure est correcte : elle s'appuie sur les propriétés de linéarité additive et multiplicative. Puisque $9 = 6 + 1 + 1 + 1$, la quantité de farine pour 9 personnes s'obtient en ajoutant 3 fois la quantité de farine pour une personne à la quantité de farine pour 6 personnes.
Comme l'élève B, l'élève C ne peut obtenir la valeur exacte de la masse de farine pour une personne ; il en donne une valeur approchée au gramme près, en ayant conscience du fait que sa division n'est pas terminée (quotient : « 41, … »). La valeur qu'il obtient pour 9 personnes est alors une valeur approchée à 3 g près, mais qui reste recevable.

## 3) Influence des valeurs numériques de l'énoncé sur les procédures des élèves : une recette avec 300 g de farine pour 6 personnes plutôt que 250 g

Ce changement de valeurs n'aurait probablement pas modifié la procédure de l'élève A : pour 9 personnes, on prévoit 300 g (pour 6 personnes) auxquels on ajoute la moitié de 300 g (pour 3 personnes), soit 150 g.
Il n'aurait pas vraisemblablement pas non plus changé les procédures des deux autres élèves, mais aurait facilité leurs calculs et leur aurait permis d'obtenir des réponses exactes : la masse de farine pour une personne aurait alors été un nombre entier de grammes (50 g), que l'élève B aurait pu multiplier par 9, et que l'élève C aurait pu ajouter 3 fois à 300 g.

*Remarque :*

*On peut même penser que ce changement pourrait conforter les élèves B et C dans leurs procédures, en facilitant leurs calculs…*

# GROUPEMENT 2 – avril 2017

## PREMIERE PARTIE

## A - Projet d'aménagement

### 1) Calcul de la longueur de la clôture (en valeur exacte et arrondie)

La longueur de clôture nécessaire est égale au périmètre du trapèze ABCD, diminuée de la longueur du portail soit $AB + BC + CD + DA - 3{,}10$ m.
Calculons la longueur BC :
Dans le triangle BEC rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = BE^2 + EC^2$
d'où $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2}$
Comme ABED est un rectangle, on a $BE = AD = 30$ m et $AB = DE = 50$ m
E appartient au segment [DC], donc $DC = DE + EC$ et comme $DC = 70$ m, on a $EC = 70\text{ m} - 50\text{ m} = 20$ m
Ainsi : $BC = \sqrt{30^2 + 20^2}\text{ m} = \sqrt{900 + 400}\text{ m} = \sqrt{1300}\text{ m} = 10\sqrt{13}$ m.

La longueur L de clôture est donc :

$$L = AB + BC + CD + DA - 3{,}10 \text{ m}$$
$$L = \left(50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30 - 3{,}10\right) \text{ m}$$
$$L = \left(146{,}90 + 10\sqrt{13}\right) \text{ m}$$
$$\text{soit } L \approx 183 \text{ m}$$

**La longueur de clôture nécessaire est égale à $(\mathbf{146{,}90 + 10\sqrt{13}})$ m (valeur exacte) soit, arrondie au mètre près, 183 m.**

### 2) Calcul de l'aire de chacune des trois parties

L'aire de l'espace réservé au potager est l'aire du triangle BEC.

$$\frac{BE \times EC}{2}\text{ m}^2 = \frac{30 \times 20}{2}\text{ m}^2 = 300\text{ m}^2.$$

L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre AB.

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times 25^2}{2}\text{ m}^2 = \frac{625\pi}{2}\text{ m}^2$$

soit **une aire d'environ 982 $\mathbf{m^2}$ pour l'espace de plantations florales**.
L'aire de l'espace engazonné est égale à l'aire du rectangle ABED de laquelle on soustrait l'aire de l'espace de plantations florales.

$$AB \times EB - \frac{625\pi}{2}\text{ m}^2 = 50 \times 30\text{ m}^2 - \frac{625\pi}{2}\text{ m}^2 \approx 518\text{ m}^2$$

soit **une aire d'environ 518 $\mathbf{m^2}$ pour l'espace engazonné**.

**Les aires des espaces réservés au potager, aux plantations florales, au gazon sont, arrondies au mètre carré près, respectivement égales à 300 $\mathbf{m^2}$, 982 $\mathbf{m^2}$, 518 $\mathbf{m^2}$.**

## B - Plantations.

### 1) Pourcentage de remise accordée

Sans la remise, pour l'ensemencement, on aurait payé $520 \times 5$ euros soit 2600 euros.
Comme le prix facturé est en fait de 1950 euros, la remise est de $(2600 - 1950)$ euros soit 650 euros.
Ceci correspond à $\frac{650 \text{ euros}}{2600 \text{ euros}} = 0{,}25 = 25\ \%$.
**Le pourcentage de remise accordée est égal à 25 %.**

## 2) Encadrement du prix du pied de tomates

*Méthode 1 :*

Le prix des salades est $75 \times 0{,}22\ € = 16{,}50\ €$. Pour l'achat des salades et des 50 pieds de tomates, il a payé entre 50 € et 55 € donc pour les 50 pieds de tomates, il a payé entre 33,50 € et 38,50 €.

Donc pour un pied de tomates, il a payé entre $\dfrac{33{,}50\ €}{50}$ et $\dfrac{38{,}50\ €}{50}$ soit entre 0,67 € et 0,77 €.

**Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.**

*Méthode 2 :*

Appelons $x$ le prix d'un pied de tomate. Le prix payé est alors

$$75 \times 0{,}22 + 50x = 16{,}50 + 50x$$

On cherche alors $x$ tel que $50 \leq 16{,}50 + 50x \leq 55$

Cette double inégalité équivaut à $50 - 16{,}50 \leq 50x \leq 55 - 16{,}50$

Puis $33{,}50 \leq 50x \leq 38{,}50$

Puis : $\dfrac{33{,}50}{50} \leq \mathrm{x} \leq \dfrac{38{,}50}{50}$

et enfin : $0{,}67 \leq x \leq 0{,}77$.

**Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.**

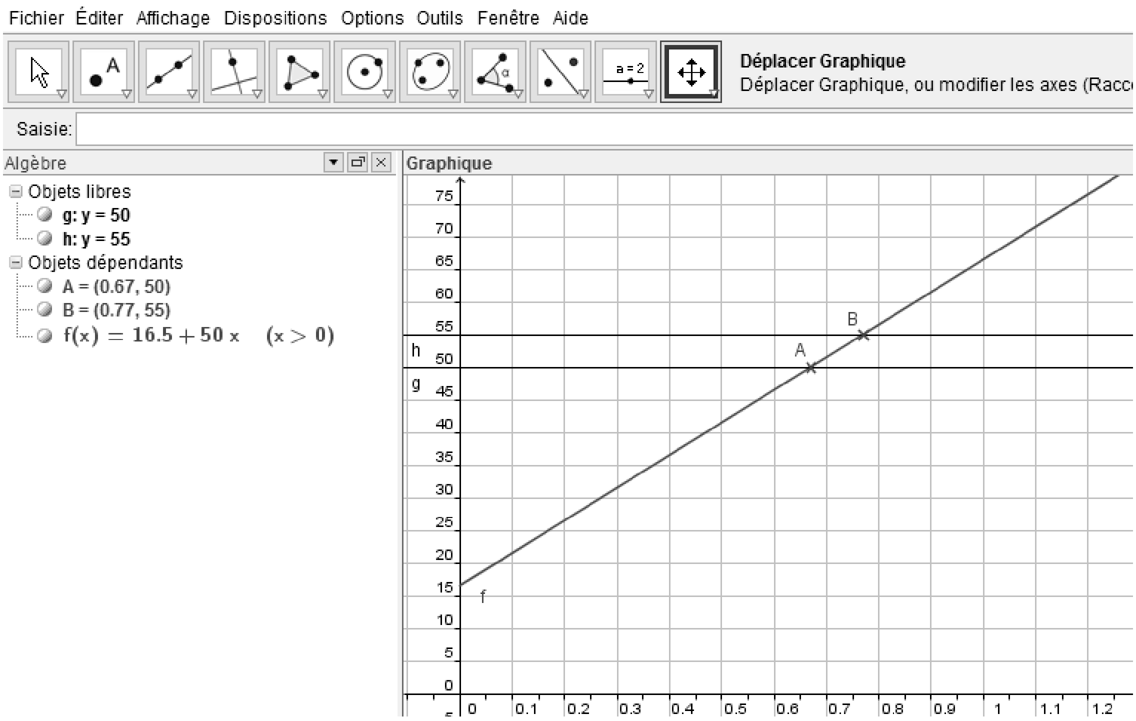
*Remarque :*

*On peut résoudre cette double inéquation en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 16{,}50 + 50x$ et de celles des fonctions $g : x \longmapsto 50$ et $h : x \longmapsto 55$.*

*Les solutions sont les abscisses des points situés entre les points A et B sur le segment [AB], A et B étant les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g d'une part et f et h d'autre part.*

*Cette méthode conduit parfois à ne pouvoir fournir qu'une valeur approchée des solutions.*

*Graphique réalisé sous Géogébra*



# C - Étude d'un agrandissement du potager

## 1) a) Encadrement de la longueur AM

M est un point du segment [AB]. Quand M est en A, $x = 0$, et quand M est en B, $x = 50$.

**Les valeurs de $x$ possibles sont les valeurs comprises entre 0 et 50 (exprimées en mètres).**

## 1) b) Aire du trapèze MBCG est égale à 1800 – 30$x$

Notons $A$ l'aire du trapèze MBCG

*Méthode 1 : avec la formule de l'aire d'un trapèze*

$$A = \frac{(\text{MB} + \text{GC}) \times \text{MG}}{2}$$
$$A = \frac{(50 - x + 70 - x) \times 30}{2}$$
$$A = \frac{(120 - 2x) \times 30}{2}$$
$$A = (120 - 2x) \times 15$$
$$A = 1800 - 30x$$

*Méthode 2 :*

L'aire du trapèze MBCG est égale à la somme des aires du triangle EBC et du rectangle MBEG (avec E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle) :

$$A = \frac{\text{BE} \times \text{EC}}{2} + \text{MB} \times \text{MG}$$
$$A = 300 + (50 - x) \times 30$$
$$A = 300 + 1500 - 30x$$
$$A = 1800 - 30x$$

**L'aire du trapèze MBCG est égale à 1800 – 30$x$, l'unité étant le m$^2$.**

## 2) Valeurs de formules dans un tableur

**a)** Dans la cellule B2, la formule saisie peut être $\boxed{\textbf{=1800-30*B1}}$ .

**b)** L'aire calculée dans la ligne 3 est l'aire du demi-disque de diamètre [AM].

En fonction de $x$, l'expression de cette aire est donnée par :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{\text{AM}}{2}\right)^2}{2}, \text{soit} \frac{\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}, \text{soit} \frac{\pi \times \frac{x^2}{4}}{2} \text{soit finalement} \frac{\pi \times (x)^2}{8}.$$

**La formule à saisir dans la cellule B3 est donc $\boxed{\textbf{=PI()*B1*B1/8}}$ .**

## 3) Lectures graphiques

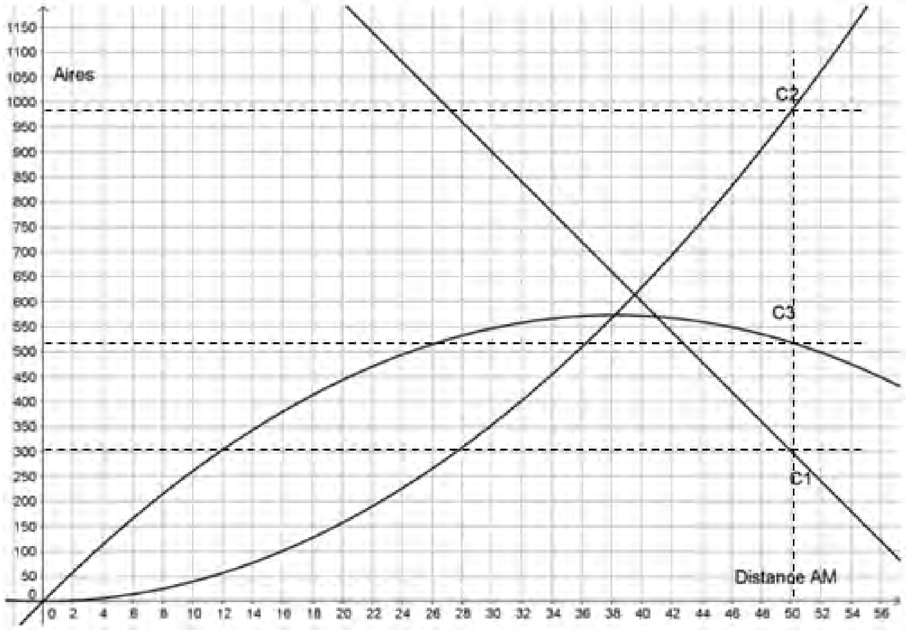
## 3) a) Partie du jardin correspondant à chacune des courbes C1, C2 et C3

*Méthode 1 :*

La fonction donnant l'aire du potager en fonction de $x$ est $f : x \longmapsto 1800 - 30x$.
Cette fonction est affine, sa représentation graphique est donc une droite. C'est la courbe C1.
L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre $x$. Quand $x$ augmente, cette aire augmente. La fonction donnant l'aire de l'espace de plantations florales est donc une fonction croissante. Sa courbe représentative est donc la courbe C2.
La courbe C3, par élimination, est donc la courbe représentant la fonction donnant l'aire de la partie engazonnée.

*Méthode 2 :*

Les calculs effectués au 2) de la partie A fournissent une valeur approchée de l'image de 50 par les fonctions donnant l'aire de chacune des parties du jardin en fonction de la distance AM. On lit les ordonnées respectives des points d'abscisse 50 sur chacune des courbes (300, environ 520 et environ 980).



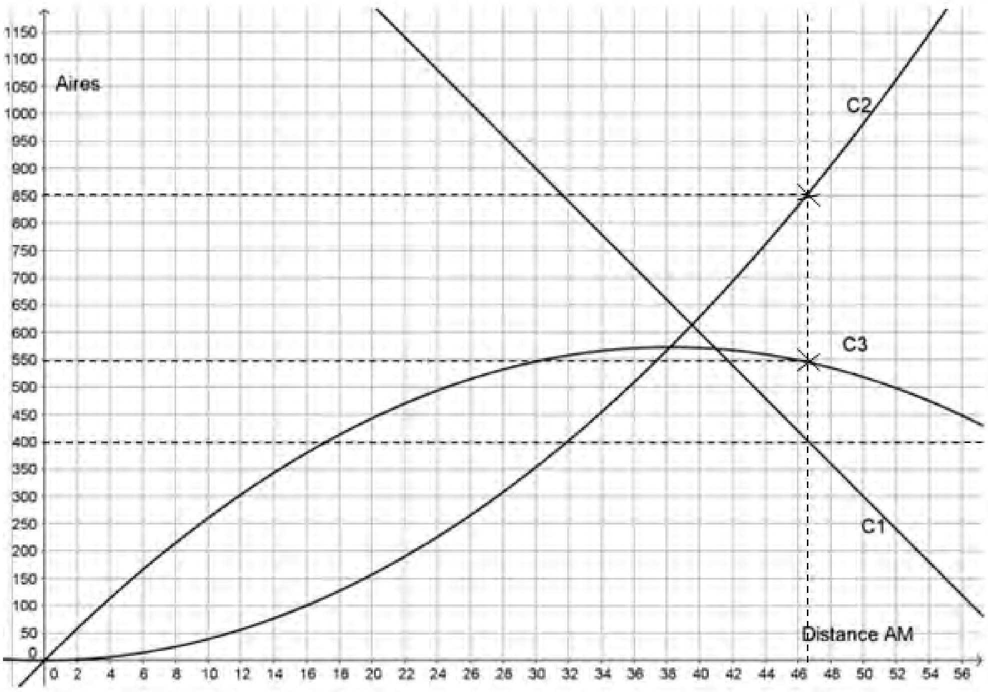

On en déduit que les courbes C1, C2 et C3 représentent respectivement les aires du potager, de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée en fonction de $x$.

## 3) b) Point d'intersection des courbes C2 et C3

Le point d'intersection des courbes C2 et C3 a pour ordonnée l'aire commune des deux espaces floral et engazonné. Son abscisse est la valeur de $x$ pour laquelle les deux aires sont égales. Cela signifie que quand $x$ est égal à environ 38 mètres, l'aire de l'espace floral est égale à l'aire de l'espace engazonné, et vaut environ 575 m$^2$.

## 3) c) Valeur approchée des aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée

Pour lire ces valeurs sur le graphique, on repère l'abscisse du point de la courbe $C_1$ qui a pour ordonnée 400. Ensuite, on lit l'ordonnée des points des courbes $C_2$ et $C_3$ qui ont cette abscisse.



Lorsque l'aire du potager vaut 400 m², l'aire de l'espace floral vaut environ 850 m², et l'aire de l'espace engazonné vaut environ 550 m².

## 4) Calculs d'aires

Lorsque l'aire du potager vaut 750 m², on a $1800 - 30x = 750$

On résout cette équation : $-30x = 750 - 1800$

$$-30x = -1050$$

$$x = \frac{-1050}{-30}$$

$$\boldsymbol{x = 35.}$$

**Lorsque l'aire du potager vaut 750 m², $x$ vaut 35 m.**

**L'aire de l'espace de plantations florales vaut alors $\frac{\pi \times 35^2}{8}$ m² soit $\frac{1225\,\pi}{8}$ m²;**

**soit, arrondie au mètre carré, 481 m².**

Soit A l'aire de l'espace engazonné :

A = aire du rectangle AMGD − aire de l'espace de plantations florales

$$A = \left(35 \times 30 - \frac{1225\pi}{8}\right) \text{m}^2$$

$$A \approx 569 \text{ m}^2$$

**L'aire de l'espace engazonné vaut alors, arrondie au mètre carré, 569 m².**

*Remarque :*

*Il est pertinent de contrôler les résultats obtenus à l'aide des représentations graphiques. On lit l'abscisse du point d'ordonnée 750 sur $C_1$ : 35.*

*On lit alors les ordonnées du point d'abscisse 35 sur $C_2$ puis $C_3$ avec la précision permise par le graphique.*

# DEUXIÈME PARTIE

## EXERCICE 1

### 1) L'affirmation « un adhérent sur six a entre 18 et 25 ans » est VRAIE

Comme les trois quarts des adhérents sont mineurs, un quart des adhérents sont majeurs. Le tiers des adhérents majeurs ont plus de 25 ans, donc les deux tiers des adhérents majeurs ont entre 18 et 25 ans. Les adhérents ayant entre 18 et 25 ans représentent donc les deux tiers du quart des adhérents :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

*Remarque :*

*On peut se représenter la situation à l'aide d'une représentation graphique (un tableau ici) "bien choisie". Le partage en quatre doit être aisé pour exprimer les quarts et de même le partage en trois doit également l'être pour exprimer les tiers. On choisit donc un tableau 4 lignes, 3 colonnes.*

| *Adhérents mineurs* | | | *Adhérents majeurs* |
|---|---|---|---|
| | | | *plus de 25 ans* |
| | | | *moins de 25 ans* |
| | | | |

*Sur le schéma on "lit"* $\frac{2}{12}$ *et* $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

### 2) L'affirmation « durant les soldes, si on baisse un prix d'un article de 30 % puis de 20 % alors ce prix a baissé de 50 % » est FAUSSE

*Méthode 1 :*

Lorsque l'on baisse le prix de 30 %, on le multiplie par 0,7. Puis quand on le baisse de 20 %, on le multiplie par 0,8. Au final, le prix a été multiplié par $0{,}7 \times 0{,}8$ soit 0,56 , ce qui correspond à une baisse de 44 %.
L'affirmation est fausse.

*Rappel :*

Soit x un prix initial, le prix après une baisse de t% est donné par $x - \frac{t}{100}x$ soit $x\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
Après une hausse de t % le nouveau prix est donné par $x + \frac{t}{100}x$ soit $x\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

*Méthode 2 :*

Prenons un prix de 100 €. Le prix après diminution de 30 % est de 70 €.

Après une baisse de 20 % sur ces 70 €, le nouveau prix est $70\text{ €} - \frac{20}{100} \times 70\text{ €}$ soit 56 €.

Une baisse de 50 % sur le prix de 100 € donne un nouveau prix de 50 €.
Les deux prix obtenus diffèrent donc l'affirmation est fausse.

### 3) L'affirmation « la moyenne de la série ne change pas » est VRAIE

*Rappel :*

La moyenne d'une série statistique est donnée par :

$$m = \frac{somme\ des\ valeurs\ de\ la\ série}{nombre\ de\ valeurs\ de\ la\ série}$$

Si $n$ est le nombre de valeurs de la série et la moyenne de la série étant 5, la somme des valeurs est égale à $5n$.
Quand on ajoute une valeur supplémentaire égale à 5, la somme des valeurs devient $5n + 5$ et le nombre de valeurs devient $n + 1$. La nouvelle moyenne est alors

$$\frac{5n + 5}{n + 1} = \frac{5(n + 1)}{n + 1} = 5$$

La moyenne ne change pas.

### 4) L'affirmation « pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit et d'ajouter 1 » est VRAIE

Notons $n$ un nombre entier. Son carré est $n^2$.
Si on multiplie le nombre entier qui le précède, $n-1$, par le nombre entier qui le suit, $n+1$, et on ajoute 1, on obtient :
$(n-1)(n+1)+1 = n^2-1^2+1 = n^2-1+1 = n^2$

**EXERCICE 2 :**

### 1) Valeur moyenne des précipitations journalières

Il y a 30 valeurs. Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on additionne toutes les valeurs et on divise par le nombre total de valeurs soit 30 :

$$\bar{x} = \frac{4\times 0+6\times 0{,}3+4\times 1{,}3+4\times 1{,}7+3\times 2{,}5+3\times 7+2\times 13+1\times 21+2\times 28+1\times 42}{30}\text{ mm}$$

$\bar{x} \approx 6{,}2$ mm

**La moyenne des précipitations journalières au cours du mois d'avril 2016, arrondie au dixième de millimètre est égale à 6,2 mm.**

### 2) Calcul de ma médiane

*Méthode 1 :*

La médiane M d'une série statistique est un nombre tel que la moitié au moins des données du caractère sont inférieures ou égales à M et la moitié au moins sont supérieures ou égales à M.
On cumule les effectifs pour chacune des valeurs : il y a 14 valeurs inférieures ou égales à 1,3 (donc la médiane est supérieure à 1,3) et 18 valeurs inférieures ou égales à 1,7. Il y a 16 valeurs supérieures ou égales à 1,7.
La moitié au moins des valeurs sont inférieures ou égales à 1,7 et la moitié au moins des valeurs sont supérieures ou égales à 1,7 donc **la médiane de la série est 1,7 mm.**

*Méthode 2 :*

Comme il y a 30 valeurs, rangées par ordre croissant, la médiane est la demi-somme des 15$^{\text{ème}}$ et 16$^{\text{ème}}$ valeur. Il y a 14 valeurs inférieures ou égales à 1,3. Puis il y a 4 valeurs égales à 1,7. La 15$^{\text{ème}}$ valeur et la 16$^{\text{ème}}$ valeur valent 1,7.
**La médiane est donc 1,7 mm.**
**L'interprétation** de cet indicateur statistique peut se formuler ainsi : durant le mois d'avril, il y a au moins 15 jours durant lesquels les précipitations ont été inférieures ou égales à 1,7 mm et 15 jours durant lesquels les précipitations ont été supérieures ou égales à 1,7 mm.

### 3) Étendue de la série

**L'étendue de la série** est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.
C'est donc **42 mm**.

### 4) Proportion du nombre de jours de précipitations

Le nombre de jours où la hauteur des précipitations est supérieure ou égale à 13 est $2+1+2+1$ soit 6.
**La proportion** que ce nombre de jours représente, **par rapport au nombre de jours dans le mois,** exprimée **en pourcentage,** est égale à :

$\frac{6}{30}\times 100$ soit **20** %.

### 5) Volume de pluie

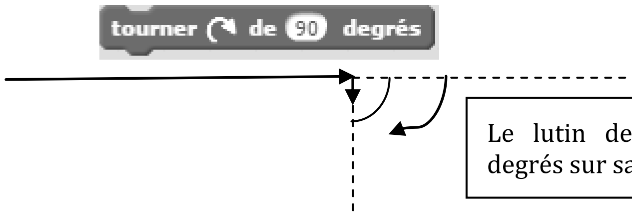
Le volume de pluie tombée sur cette piste est le volume d'un pavé droit, dont la longueur et la largeur sont les dimensions de la piste, et la hauteur est la hauteur cumulée des précipitations du mois.
Ainsi 1 mm = 1 litre/m² car le volume d'un pavé droit d'aire de base 1 m² et de hauteur $10^{-3}$ m a pour volume 1 m²$\times 10^{-3}$ m soit $10^{-3}$ m³ ou encore 1 L (comme 1 m³=1000 L).
La hauteur cumulée des précipitations du mois est 187,3 mm, convertie en mètres : 0,1873 m.

Le volume du pavé droit dont une base est le rectangle correspondant à la piste de décollage est donc égal à : 3200 m × 50 m × 0,1873 m soit 29968 m$^3$.
Sachant que 1 m$^3$=1 000 L, le volume du pavé droit est 29 968 000 litres.
Le volume de pluie tombée au cours du mois d'avril 2016 est égal à **29 968 m$^3$** ou **29 968 000 L ou $\mathbf{2,9968 \times 10^7}$ L** (ce qui représente environ 30 millions de litres ! ou encore environ 150 000 baignoires de 200 L !)

*Remarque :*
*Une hauteur de 1 mm de précipitation correspond à un rapport d'un volume de 1L sur une surface d'aire 1 m²* *(ou équivalent à un litre par mètre carré).*

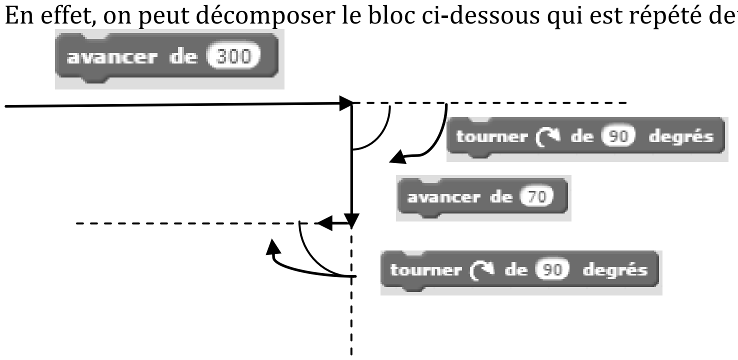
## EXERCICE 3 :

*Remarque :*
*Les programmes fournis dans le sujet sont des scripts obtenus avec le logiciel Scratch[1]. Ce logiciel permet, entre autres, de programmer des déplacements de lutins (que l'on peut afficher ou non). Les instructions sont alors relatives au personnage et plus précisément à la direction du lutin.*



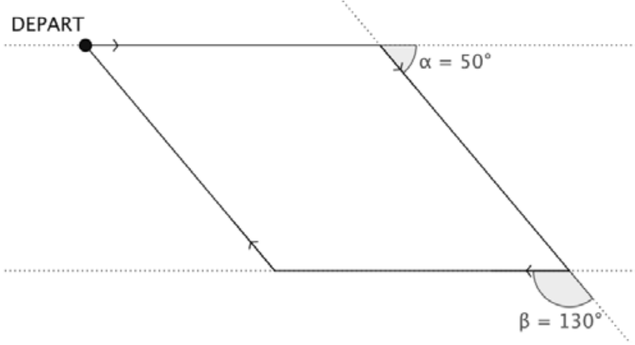

Le lutin de Scratch tourne de 90 degrés sur sa droite.

**Le programme A dessine un rectangle de dimensions 300 pixels sur 70 pixels.**
En effet, on peut décomposer le bloc ci-dessous qui est répété deux fois :




Le lutin de Scratch tourne de 90 degrés sur sa droite, puis avance dans la direction où il se retrouve.

**Le programme B dessine un losange de côtés 100 pixels.**




[1] Disponible en ligne https://scratch.mit.edu/

**EXERCICE 4 :**

## 1) Distance parcourue pendant la remontée en fonction de n

Pendant la descente, le batelier parcourt 120 km en $n$ jours, donc la distance parcourue quotidiennement, en kilomètre, est $\frac{120}{n}$ avec $n$ entier naturel.
Pour exprimer la distance parcourue lors de la remontée, on peut exploiter la deuxième ou la troisième phrase de l'énoncé.
D'une part, pendant la remontée, la distance parcourue quotidiennement est inférieure de 6 km à celle parcourue pendant la descente. Elle vaut donc, en kilomètre : $\frac{120}{n} - 6$.
D'autre part, comme le batelier met un jour de plus pour remonter que pour descendre, pendant la remontée, le batelier parcourt 120 km en $n + 1$ jours. La distance parcourue pendant la remontée peut donc s'écrire aussi $\frac{120}{n+1}$.

## 2) Égalité des deux expressions

Les deux expressions obtenues à la question précédente permettent d'obtenir l'égalité demandée : $\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$.

## 3) Transformation de l'équation

En partant de l'égalité précédente, on obtient successivement :

*Résolution 1 :*

$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$

$\frac{120n}{n(n+1)} = \frac{120(n+1)}{n(n+1)} - \frac{6n(n+1)}{n(n+1)}$

$120n = 120(n+1) - 6n(n+1)$

$20n = 20(n+1) - n(n+1)$

$20n = 20n + 20 - n(n+1)$

$0 = 20 - n(n+1)$

$n(n+1) = 20$ avec $n$ entier naturel.

*Résolution 2 :*

$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$

$\frac{120}{n+1} - \frac{120}{n} = -6$

$\frac{120n - 120(n+1)}{(n+1)n} = -6$

$\frac{120}{(n+1)n} = 6$

$(n+1)n = 20$ avec $n$ entier naturel.

## 4) Résolution de l'équation et interprétation du résultat

Travaillant dans l'ensemble des entiers naturels, on déduit de cette égalité que $n$ et $(n+1)$ sont diviseurs de 20.
Les décompositions multiplicatives de 20 en produit de deux facteurs entiers sont : $1 \times 20$ ; $2 \times 10$ et $4 \times 5$.
La seule qui convient pour $n(n+1)$ est $4 \times 5$ , c'est à dire $n = 4$.
**Le batelier met 4 jours pour descendre la rivière, et 5 jours pour la remonter.**

*Remarque :*
*On aurait pu aussi procéder par essais successifs en parcourant les entiers dans l'ordre croissant (il suffit dans ce cas-là d'aller de $n = 1$ jusqu'à $n = 4$). De même la résolution de l'équation du second degré ($n^2 - n - 20 = 0$) est une méthode qui peut être acceptée même si elle ne relève pas du cycle 4 et donc du programme du concours.*

# TROISIEME PARTIE

## SITUATION 1

### 1) Explicitation des procédures et deux compétences acquises par les élèves 1, 2 et 3

*Élève 1 :*

a) Cet élève procède par addition posée en colonne de treize termes égaux à 6. Ensuite, il trouve, probablement par calcul mental, le total 87, qui est faux. On peut émettre l'hypothèse qu'il a écrit les chiffres de gauche à droite (8 unités et 7 dizaines)

b) Cet élève a donné du sens aux 13 groupements de 6, il a reconnu une situation additive. Il sait modéliser correctement la situation et la traduire par une addition itérée.

*Élève 2 :*

a) Cet élève dessine les œufs, en procédant par paquets de 6 œufs placés en ligne. Il dessine 13 paquets de 6 œufs en écrivant après chaque paquet de 6 le chiffre 6. Il dénombre, par comptage un à un ou peut-être six par six, la quantité d'œufs dessinés, et trouve le résultat attendu, 78.

b) Cet élève sait représenter une situation à l'aide d'un schéma. Il sait dénombrer les éléments de la collection (par comptage ou par calcul).

*Élève 3 :*

a) Cet élève a reconnu une situation multiplicative, et a posé en colonne la multiplication de 13 par 6.

b) Cet élève sait reconnaître une situation multiplicative et la traduire par une multiplication. Il sait effectuer une multiplication posée d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre (dans cet exemple, cela induit une connaissance de la table de 6).

### 2) Compétences acquises et analyse des erreurs pour les élèves 4, 5 et 6

*Élève 4 :*

a) Il sait reconnaître une situation multiplicative et la traduire par une multiplication posée.

b) Il oublie d'effectuer la multiplication de 6 par 1, chiffre des dizaines de 13, et se contente d'additionner la retenue avec le chiffre des dizaines de 13. Ceci est probablement dû à une confusion avec la manière de traiter les retenues dans une addition.

*Élève 5 :*

a) Il sait poser et effectuer une addition en colonne sans retenue (même si ce n'est pas l'opération attendue ici).

b) Son erreur est de faire une addition à la place d'une multiplication. Cette erreur est la conséquence d'une mauvaise compréhension de la situation. Cet élève peut avoir choisi l'addition car c'est une opération qu'il maitrise bien, ou en la choisissant au hasard, pour faire apparaître coûte que coûte un calcul dans le cadre (effet de contrat didactique). On note donc chez lui une erreur sur le choix de l'opération tandis que le calcul effectué est correct.

*Élève 6 :*

a) Il sait représenter la situation par un schéma sur lequel figurent les groupements (boîtes) de 6 œufs et choisir l'addition itérée pour dénombrer les œufs.
Dans l'addition posée, il utilise en acte la propriété d'associativité : il effectue des sommes partielles de quatre 6 comme les paquets semblent grouper en ligne dans sa schématisation.

b) Une première erreur de cet élève se situe dans le traitement de son addition itérée de 6. Il effectue des groupements de 6, puis arrive à l'addition posée en colonne $24 + 24 + 24 + 6$. L'alignement des chiffres dans cette addition n'est pas correct, car le 6 est aligné avec le chiffre des dizaines des autres termes. Ceci le conduit à effectuer en réalité $24 + 24 + 24 + 60$. Son résultat est donc faux.

Sa phrase réponse contient également une erreur, car il écrit « boîtes » au lieu de « œufs ». Ceci peut être dû au fait que dans l'énoncé, le texte précise que « le fermier compte ses boîtes », pouvant laisser penser à l'élève que c'est le nombre de boîtes que l'on cherche à déterminer finalement.

### 3) Aide pour l'élève 5 en vue de corriger son erreur

Pour amener l'élève 5 à corriger son erreur, l'enseignant pourrait dans un premier temps lui **faire prendre conscience** que 19 ne peut **pas être le bon résultat**. L'enseignant pourrait pour cela lui donner des boîtes à œufs, et 19 jetons. En lui demandant de placer les jetons dans les boîtes, il constaterait que ces 19 jetons ne suffisent pas à remplir 13 boîtes.
Ensuite, pour l'aider à corriger son erreur, l'enseignant pourrait lui demander de réaliser le même exercice en proposant **un recours à la manipulation sur un nombre de boîtes moins élevé** avec par exemple 2 boîtes de 6 œufs. Puis avec 3 boîtes, il pourrait en cela s'aider du matériel boîtes et jetons. Et enfin, quand l'élève aurait saisi qu'il s'agit bien d'une situation multiplicative (qu'il traitera éventuellement par une addition itérée), le faire revenir sur l'exercice initial. La manipulation ne doit pas permettre d'obtenir le résultat mais doit permettre d'accéder à la modélisation du problème.
L'enseignant peut aussi, pour **faire apparaître plus rapidement l'itération**, considérer avec lui 5 boîtes de 3 jetons ou 7 boîtes de 2 jetons. En proposant ainsi plusieurs exemples, on vise à **faire émerger chez l'élève le modèle adéquat** pour traiter ce type de situations multiplicatives.

L'enseignant peut aussi lui proposer de **dessiner pour représenter le problème** et se rendre compte que son calcul $13 + 6$ ne correspond pas à la situation. De plus, le schéma induirait peut-être des procédures correctes.

L'enseignant pourrait aussi **faire reformuler à l'élève les phrases de l'énoncé pour en assurer une meilleure compréhension.**

*Remarque :*

*L'enseignant peut expliquer à l'élève comment faire » n'est certainement pas une réponse attendue dans la mesure où elle ne place pas l'élève en situation de résoudre le problème posé.*

### 4) Modification de l'énoncé

Les élèves 1 et 6 ont tous les deux procédé par additions itérées de 6. Pour faire évoluer leur procédure vers l'utilisation de la multiplication, on pourrait changer le nombre de boîtes en choisissant un nombre plus grand, par exemple 42. Ainsi la procédure par additions itérées deviendrait fastidieuse et les encouragerait à utiliser l'écriture multiplicative.

## SITUATION 2

### 1) Deux compétences travaillées

Pour les compétences travaillées dans cet exercice, on pouvait en choisir deux parmi les suivantes:

- Reconnaître et distinguer les problèmes relevant de situations multiplicatives et plus particulièrement de la proportionnalité.
- Calculer avec des nombres décimaux, notamment multiplier ou diviser un nombre décimal par 10,100.
- Faire des liens entre les unités de mesure décimales et les unités de numération.
- Résoudre des problèmes impliquant des conversions simples d'une unité usuelle à une autre.
- Établir des relations entre les unités de longueur et les unités de numération.

### 2) a) Interprétation d'une erreur

L'erreur de Théo réside dans son traitement de la multiplication de 0,7 par 100. Théo a ajouté deux zéros à droite dans l'écriture à virgule du nombre décimal 0,7. L'origine de cette erreur est probablement la transposition aux nombres décimaux d'une règle valable uniquement pour les nombres entiers : « pour multiplier par 100, il faut ajouter deux zéros à la droite du nombre ».

### 2) b) Explicitation d'une procédure et interprétation mathématique

La procédure d'Eugénie repose sur la valeur positionnelle des chiffres dans le nombre. Les chiffres du nombre donné doivent être décalés de deux rangs vers la gauche : le 7 du rang des dixièmes rejoint le rang

des dizaines. Elle obtient ainsi 7 dizaines, c'est à dire 70. Il est possible qu'elle ait utilisé au moins mentalement un tableau de numération comme indiqué en remarque.
La justification mathématique peut s'écrire ainsi :
$0{,}7 \times 100 = 7 \times \frac{1}{10} \times 100 = 7 \times 10$ : les dixièmes multipliés par 100 deviennent des dizaines.

*Remarques :*

*1) Dans la multiplication par 100, la valeur des chiffres dans le nombre change : elle est multipliée par 100. La virgule ne « bouge » pas.*

| *Centaine* | *Dizaine* | *Unité* | | *Dixième* |
|---|---|---|---|---|
| | | *0* | *,* | *7* |
| *0* | *7* | *0* | *,* | |
| | | | | |

*2)*

$10 \times \frac{1}{10}\, u = 1\, u\ par\ définition\ du\ dixième\ et\ donc$

$100 \times \frac{1}{10}\, u = 10 \times 10 \times \frac{1}{10}\, u = 10\, u = 1\ dizaine.$

*3) Attention, dans la multiplication par 10, 100, 1000, c'est bien la valeur des chiffres dans le nombre qui change et non la position de la virgule.*

## SITUATION 3

*Remarque :*

*Contrairement à ce que pourrait laisser croire la production « calcul 1 », la multiplication de deux nombres décimaux non entiers n'apparait qu'en 6^e^ d'après les repères de progressivité des programmes.*

### 1) Description des erreurs

*Calcul 1 :*

Dans ce calcul, il y a une seule erreur, celle de ne pas avoir correctement décalé le deuxième produit partiel, correspondant à la multiplication de 3709 par 3 qui correspond également à l'oubli de la multiplication de 3709 par 0.

*Calcul 2 :*

L'erreur dans ce calcul est l'alignement des produits partiels à droite. L'élève ne tient pas compte de la valeur des chiffres dans le nombre : le produit partiel $2531 \times 6$ fournit des unités alors que les produits partiels $2531 \times 4$ et $2531 \times 1$ fournissent respectivement des dizaines et des centaines dans le résultat.

*Calcul 3 :*

L'erreur dans ce calcul est l'oubli du placement de la virgule dans le résultat obtenu par addition des produits partiels.

*Calcul 4 :*

L'erreur dans ce calcul est la non prise en compte de la retenue dans l'addition des produits partiels : $6 + 4$ conduit à une retenue de une unité au rang supérieur.

### 2) Proposition de contrôle des résultats

On pourrait inciter les élèves à **travailler sur les ordres de grandeur** en choisissant des nombres pour lesquels le calcul mental est aisé : dans l'exemple 1, le produit obtenu doit être supérieur à $30 \times 3$ soit 90. Ce résultat permet d'invalider celui fournit. Pour l'élève ayant produit le calcul 3, on peut encourager à trouver des nombres proches de ceux proposés pour lesquels le calcul serait également aisé mentalement : 60 et 50 par exemple. On obtiendrait alors 3000 qui permet d'invalider le résultat proposé.

Ces articulations entre calcul mental et calcul posé, calcul exact et calcul approché sont à exercer chez les élèves. Elles donnent du sens à chacun des types de calcul et montrent par exemple l'intérêt de disposer de techniques de calcul mental permettant rapidement d'avoir un moyen de contrôle de la validité des résultats produits par application d'une technique de calcul posé.

On pourrait également proposer la calculatrice comme outil de vérification.
On pourrait faire invalider les résultats des élèves 1 et 3 par l'utilisation d'une calculatrice, soit en faisant effectivement calculer ces produits, ou alors en travaillant sur les ordres de grandeur. Par exemple pour le calcul 1, taper $37 \times 3$, pour constater que c'est beaucoup plus grand que 14. De même pour le calcul 3, taper $62 \times 48$ et constater que c'est plus petit que 30 000.

On peut aussi encourager les élèves à comparer, à deux, les résultats obtenus et les calculs effectués.

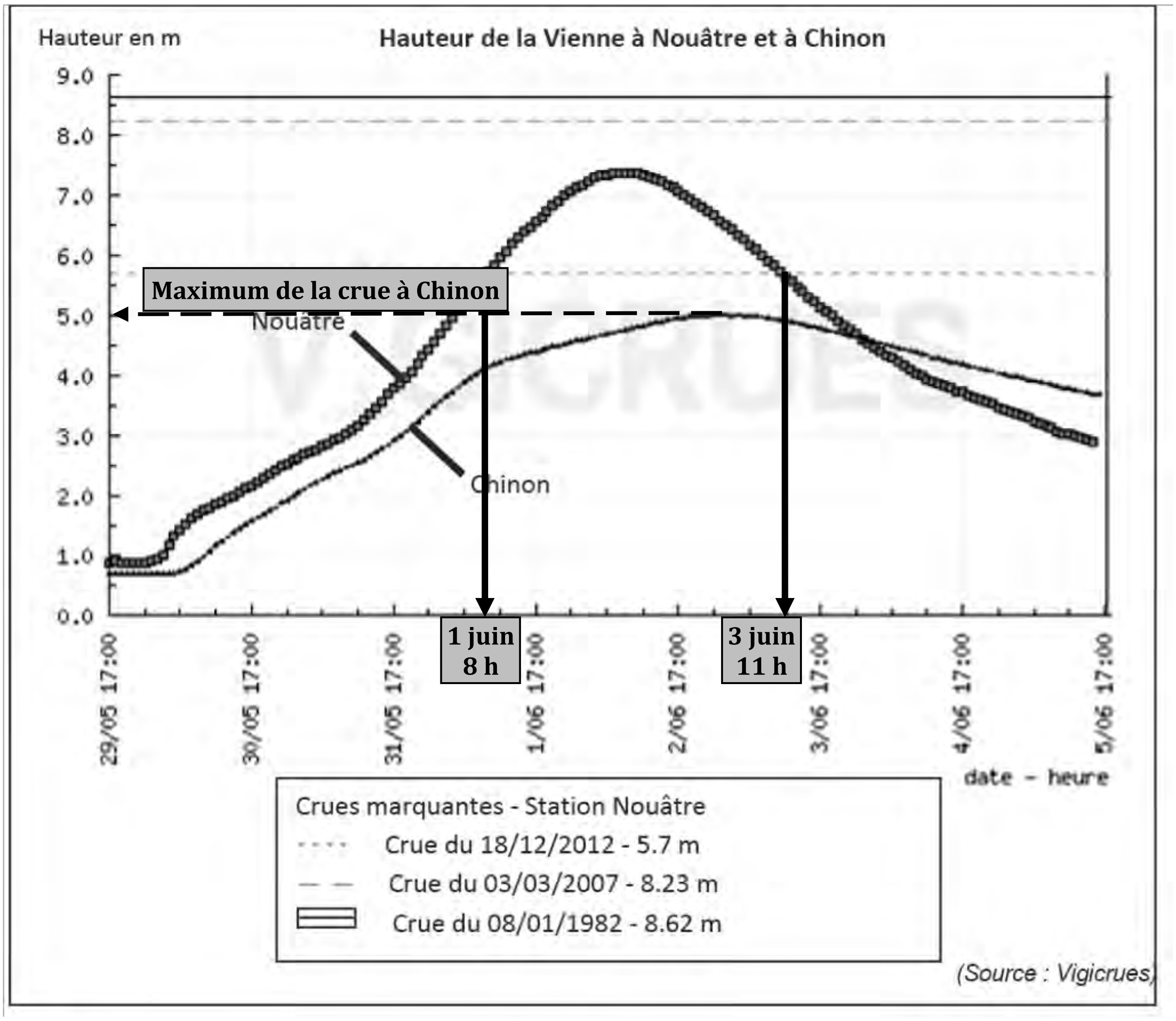
*Remarque :*

*Dans l'exemple 2, le résultat obtenu doit être supérieur à 2531 × 100 soit 253 100. Ce calcul automatisé permet là encore d'invalider le calcul exact effectué.*
*Dans l'exemple 4, le recours au calcul mental sur des nombres "plus simples" ne permet pas d'invalider le résultat fourni.*

# GROUPEMENT 3 – avril 2017

## PREMIÈRE PARTIE

## PARTIE A : étude d'une crue de la Vienne




On trouve sur la figure ci-dessus les lectures graphiques auxquelles il est fait référence dans les questions 1) et 2).

### 1) Hauteur maximale de la Vienne atteinte à Chinon entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h

Par lecture graphique, la hauteur maximale de la Vienne à Chinon entre le 29 mai 2016 à 17 h et le 5 juin 2016 à 17 h est de **5 mètres**.

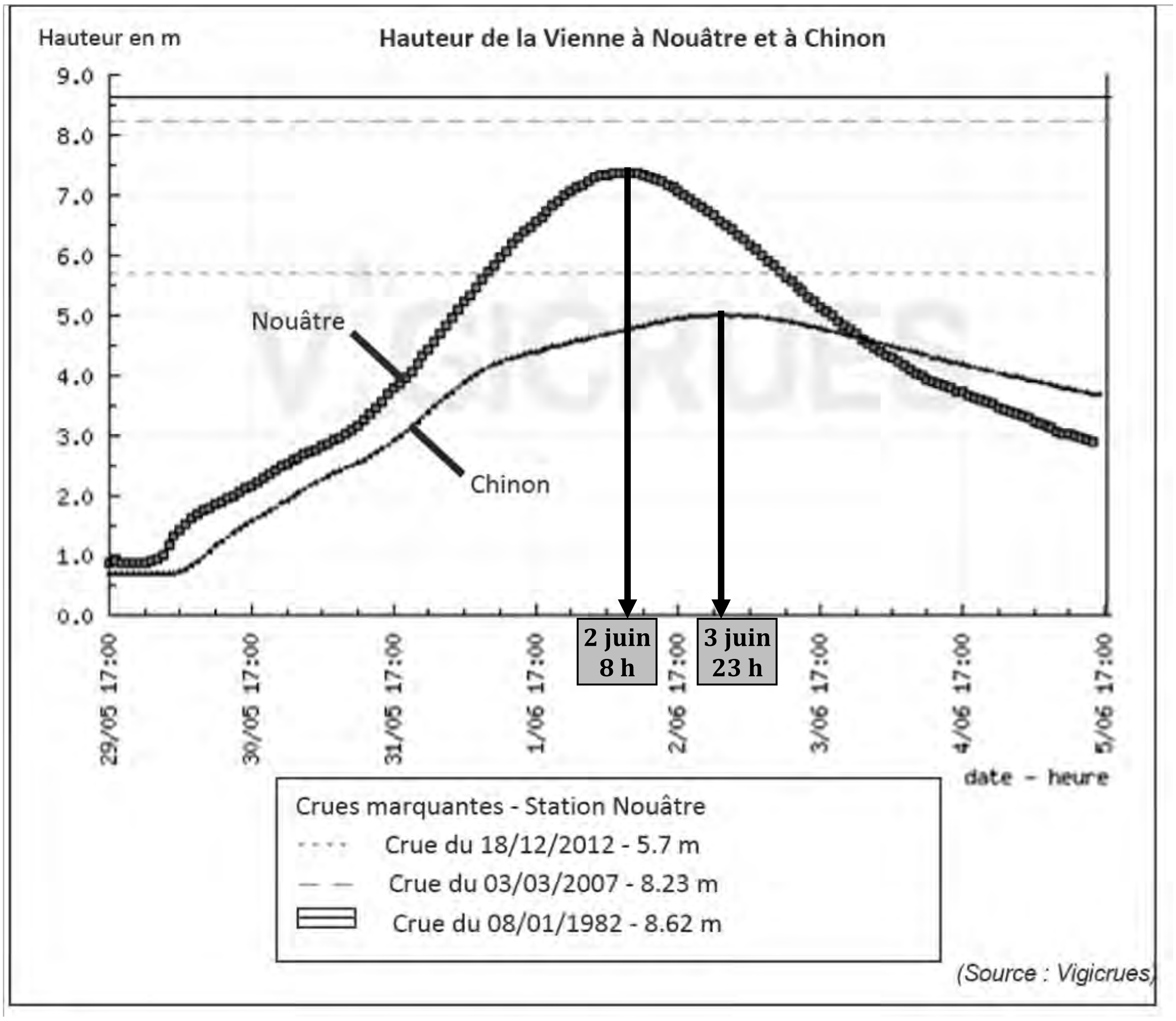
### 2) Nombre d'heures durant lequel le niveau d'eau a été supérieur au niveau maximum de la crue du 18 décembre 2012

Par lecture graphique, on repère les abscisses des deux points d'intersection de la courbe avec la droite en pointillée soit : le 1 juin à environ 8 h et le 03 juin à environ 11 h. Donc le niveau d'eau est supérieur au niveau maximum de la crue du 18 décembre 2012 pendant environ **51 heures**.

*Remarque :*

*Compte tenu de l'épaisseur du tracé de la courbe, et de l'échelle utilisée pour les abscisses, il parait raisonnable d'accepter une approximation de 3 h pour les valeurs lues sur le graphique.*

### 3) a) Nombre d'heures écoulées entre le pic de la crue de Nouâtre et le pic de la crue de Chinon




Toujours par lecture graphique, le pic de la crue de Nouâtre est atteint le 02 juin à environ 8 h et celui de Chinon est atteint le 02 juin à environ 23 h soit une durée d'environ **15 heures.**

*Remarque :*

*Compte tenu de l'épaisseur des tracés des courbes, et de l'échelle utilisée pour les abscisses, il parait raisonnable d'accepter pour le pic de la crue de Nouâtre une valeur comprise entre 5 h et 11 h (le 2 juin) et pour le pic de la crue de Chinon une valeur comprise entre 17 h (le 2 juin) et 5 h (le 3 juin).*

### 3) b) Station la plus en amont de la rivière

D'après le graphique, le pic de la crue de Nouâtre est antérieur à celui de Chinon, on peut donc en déduire que **c'est Nouâtre qui est situé le plus en amont de la rivière.**

*Remarque :*

*On suppose ici que seule l'interprétation du graphique est à prendre en compte (il n'est pas attendu d'inclure dans le raisonnement des éléments géographiques comme par exemple la présence ou non d'affluents).*

# PARTIE B : précipitations et récupérateur d'eau

## 1) a) Volume d'eau tombée sur la toiture de la grange

Calcul de l'aire de la toiture : $40 \text{ dm} \times 62 \text{ dm} = 2480 \text{ dm}^2$
Calcul du volume d'eau récupérée pour 31,7 mm de précipitation : $2480 \text{ dm}^2 \times 0{,}317 \text{ dm} = 786{,}16 \text{ dm}^3$ .
Sachant que 1 $\text{dm}^3$ correspond à 1 L, on en déduit que **le volume d'eau tombée sur la toiture est d'environ 790 L**.

*Note concernant la hauteur de précipitation :*

*La hauteur de précipitation quantifie et mesure la quantité de précipitation tombée, pluie, grêle, neige, par définition, sur une surface horizontale pendant une unité de temps.*

## 1) b) Volume d'eau recueillie dans le réservoir

Le volume d'eau recueillie dans le réservoir correspond à 90% du volume d'eau tombée sur le toit,
soit $\dfrac{790 \text{ L} \times 90}{100} = 711 \text{ L}$.

**Le volume d'eau recueillie est de 711 L.**

## 1) c) Remplissage de la citerne

Calcul du volume de la citerne en $\text{dm}^3$ : le volume de la citerne est celui d'une sphère de rayon 6,2 dm et d'un cylindre de rayon 6,2 dm et de hauteur 16,6 dm.

$V_{\text{citerne}} = \dfrac{4}{3}\pi(6{,}2 \text{ dm})^3 + \pi(6{,}2 \text{ dm})^2 \times 16{,}6 \text{ dm}$ ;     donc $V_{\text{citerne}} \approx 3003 \text{ dm}^3$

La citerne contient donc environ 3003 L, son quart est environ 750 L. Or, 711 L est inférieur à 750 L et représente donc moins d'un quart de la citerne.

**L'affirmation est donc vraie**.

## 2) a) Pourcentage d'augmentation des précipitations

La hauteur des précipitations relevée en mai 2015 est de 46,6 mm et celle relevée en mai 2016 est de 121,1 mm.

*Méthode 1 :*

Soit $x$ le pourcentage d'augmentation, on peut écrire :

$46{,}6 \text{ mm} \times \left(1 + \dfrac{x}{100}\right) = 121{,}1 \text{ mm}$

donc $\dfrac{x}{100} = \dfrac{121 \text{ mm}}{46{,}6 \text{ mm}} - 1$ ;    soit $x \approx 160$.

**L'augmentation des précipitations est donc de 160 %.**

*Méthode 2 :*

On calcule l'augmentation de la hauteur des précipitations : (121,1 mm – 46,6 mm) que l'on rapporte à 100. Ce qui peut se traduire par le tableau de proportionnalité suivant (où $x$ représente le pourcentage d'augmentation) :

| | |
|---|---|
| 121,1 mm – 46,6 mm | 46,6 mm |
| $x$ | 100 |

D'où $x = \dfrac{(121{,}1 - 46{,}6) \times 100}{46{,}6} \approx 160$.

**L'augmentation des précipitations est donc de 160 %.**

## 2) b) Quand la cuve sera-t-elle à nouveau pleine ?

90 % de la pluviométrie est récupérée dans la cuve.

Pour qu'elle soit pleine, il faut que le volume d'eau tombée du toit soit d'environ $\dfrac{3003 \text{ dm}^3}{0{,}9}$.

La hauteur des précipitations qu'il faut pour remplir la cuve est $h = \dfrac{3003 \text{ dm}^3}{0{,}9 \times 2480 \text{ dm}^2}$

soit environ 1,345 dm ou encore135 mm en arrondissant au mm.
On fait le cumul des précipitations présentes dans le tableau à partir d'octobre 2015, jusqu'à atteindre ou dépasser 135 mm : 26,0 mm + 43,9 mm + 18,8 mm + 77,9 mm = 166,6 mm.

**Il faut donc attendre janvier 2016 pour que le cumul des précipitations dépasse 135 mm.**

# PARTIE C : péniche et pont

## 1) Rayon de l'arche

On appelle $x$ la mesure en m du rayon OA. D'après l'énoncé (CO) est l'axe de symétrie de la figure donc le triangle AIO est rectangle en I. On en déduit aussi que I est le milieu de [AB]
d'où $\mathrm{AI} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = 12$ m.

*Remarque :*

*Dans les réponses qui suivent, afin d'alléger l'écriture des calculs, on s'autorise un abus de notation dans les calculs, en assimilant les longueurs et leurs mesures en mètres, par exemple en écrivant AI = 12 au lieu de AB = 12 m.*

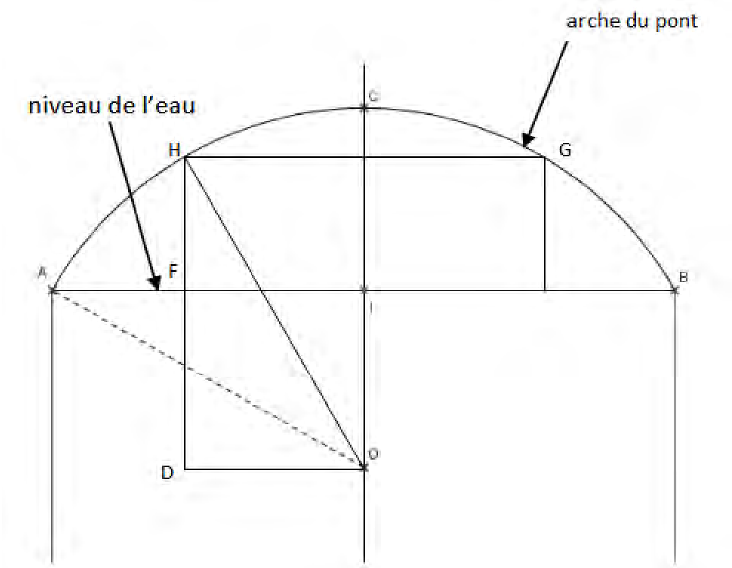
D'après le théorème de Pythagore on a :
$x^2 = \mathrm{AI}^2 + \mathrm{IO}^2 = 12^2 + (x-5)^2 = 12^2 + x^2 - 10x + 25 = x^2 - 10x + 169$
Il vient : $10x = 169$ d'où $x = 16{,}9$.

**Le rayon OA de l'arche est bien de 16,9 mètres.**

## 2) Passage de la péniche sous le pont

*Méthode 1 :*

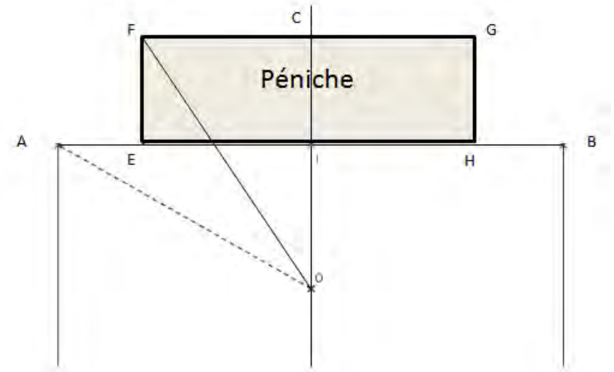
Soit J un point de l'arche et K son projeté orthogonal sur (OC) tel que IK = 4 m.




On cherche à savoir si la longueur JK est supérieure ou égale à la moitié de celle de la péniche.
Le triangle OJK est rectangle, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :
$\mathrm{OJ}^2 = \mathrm{JK}^2 + \mathrm{KO}^2$
$\mathrm{JK}^2 = \mathrm{OJ}^2 - \mathrm{KO}^2 = 16{,}9^2 - 15{,}9^2$.
D'où $\mathrm{JK} = \sqrt{16{,}9^2 - 15{,}9^2} = \sqrt{32{,}8}$ et $\sqrt{32{,}8} \approx 5{,}73$ .
La longueur JK est donc d'environ 5,73 m.

**La longueur JK est inférieure à 6 mètres, donc la péniche ne pourra pas passer sans dommage.**

*Méthode 2 :*




On suppose que la péniche est positionnée sous le pont de telle sorte que (OC) soit un axe de symétrie de celle-ci (donc I milieu de [EH]). On cherche à calculer OF pour le comparer au rayon OA de l'arche. On appelle J l'intersection de (OC) et de (FG).

Le triangle OFJ est rectangle en J.

On peut appliquer le théorème de Pythagore.

$\mathrm{OF}^2 = \mathrm{FJ}^2 + \mathrm{OJ}^2 = 6^2 + 15{,}9^2$

d'où $\mathrm{OF} = \sqrt{6^2 + 15{,}9^2} = \sqrt{288{,}81}$ et $\sqrt{288{,}81} \approx 16{,}99$.

La longueur OF est donc 16,99 m en arrondissant au cm.

**Le rayon de l'arche du pont étant de 16,9 mètres, la péniche ne passera pas sans dommage.**

# DEUXIÈME PARTIE

## EXERCICE 1

### L'affirmation 1 « La couleur de la 147e perle sera rouge.» est vraie.

Une série est composée de 6 perles.

$147 = 24 \times 6 + 3$ donc la 147e perle s'obtient en enfilant 24 séries de 6 perles puis 3 perles : 1 jaune et 2 rouges.

**La couleur de la 147e perle est donc rouge.**

### L'affirmation 2 « Au final, il a payé 112 € pour cet article. » est vraie.

*Méthode 1 :*

Soit $P$ le prix initial de l'article acheté par Arthur. D'après l'énoncé, le montant de la réduction est donné par le calcul $P \times 0{,}3$. On doit donc résoudre l'équation $P \times 0{,}3 = 48$ €

soit $P = \dfrac{48\text{ €}}{0{,}3} = 160$ €.

**Ainsi, le prix effectivement payé est 160 € − 48 € = 112 €.**

*Méthode 2 :*

Si le prix final de l'article après remise de 48 € est 112 €, son prix initial est 112 € + 48 € = 160 €.

La réduction de 30 % d'un article coûtant 160 € se calcule ainsi : $160\text{ €} \times \dfrac{30}{100}$ .

**On obtient bien une réduction d'un montant de 48 €.**

**L'affirmation 3 « Pour les 24 km de randonnée, sa vitesse moyenne est de 5 km/h. » est fausse.**

Si le randonneur marche pendant 12 km à 6 km/h, la durée de marche est $\frac{12\text{ km}}{\frac{6\text{ km}}{1\text{ h}}} = 2\text{ h}$.

Si le randonneur marche pendant 12 km à 4 km/h, la durée de marche est $\frac{12\text{ km}}{\frac{4\text{ km}}{1\text{ h}}} = 3\text{ h}$.

Ainsi, le randonneur a marché pendant 5 h pour parcourir 24 km.

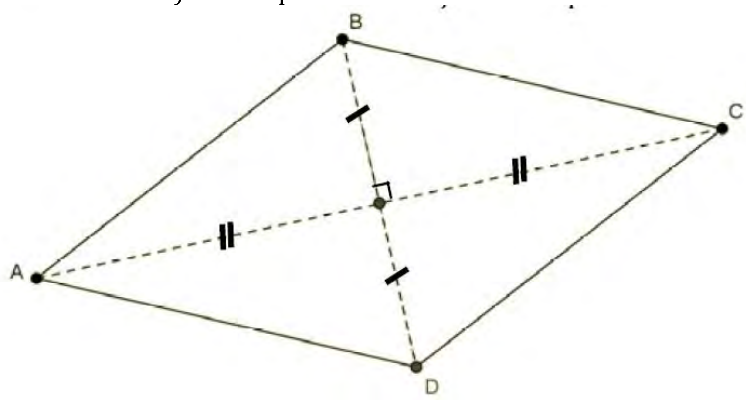
**Sa vitesse moyenne est donc $\frac{24\text{ km}}{5\text{ h}} = 4,8\text{ km/h}$.**

**L'affirmation 4 « ABCD est un carré » est fausse.**

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, on peut donc affirmer que c'est un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires, ce parallélogramme est donc un losange. Néanmoins, on ne peut pas affirmer qu'il s'agit d'un carré car on se sait rien sur la longueur des diagonales.

*Autre méthode : à l'aide d'un contre-exemple*

Le quadrilatère ABCD de la figure ci-dessous satisfait aux conditions énoncées (diagonales perpendiculaires et de même milieu) et n'est pas un carré.




# EXERCICE 2

Le lancer du dé à 6 faces conduit à 6 issues équiprobables : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Le lancer du dé à 4 faces conduit à 4 issues équiprobables : 1, 2, 3 et 4.

## 1) a) Probabilité d'obtenir 3

La probabilité d'obtenir un 3 avec le dé à 6 faces est $\frac{1}{6}$, celle avec le dé à 4 faces est $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{6},$$

donc **la probabilité d'obtenir un 3 est plus importante avec le dé à 4 faces**.

## 1) b) Probabilité d'obtenir un multiple de 3

Les multiples de 3 présents sur le dé à six faces sont 3 et 6. Le seul multiple de 3 présent sur le dé à quatre faces est 3.

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 avec le dé à 6 faces est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, celle avec le dé à 4 faces est $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4},$$

donc **la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est plus importante avec le dé à 6 faces**.

## 1) c) Probabilité d'obtenir un nombre plus grand sur le dé à 4 faces

L'ensemble des issues possibles lors du lancer des deux dés peut être donné par le tableau ci-dessous :

| Dé à 6 faces / Dé à 4 faces | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1 ; 1) | (1 ; 2) | (1 ; 3) | (1 ; 4) | (1 ; 5) | (1 ; 6) |
| 2 | (2 ; 1) | (2 ; 2) | (2 ; 3) | (2 ; 4) | (2 ; 5) | (2 ; 6) |
| 3 | (3 ; 1) | (3 ; 2) | (3 ; 3) | (3 ; 4) | (3 ; 5) | (3 ; 6) |
| 4 | (4 ; 1) | (4 ; 2) | (4 ; 3) | (4 ; 4) | (4 ; 5) | (4 ; 6) |

Sur les 24 cas possibles, il y en a 10 pour lesquels le nombre inscrit sur le dé à 4 faces est supérieur ou égal à celui inscrit sur le dé à 6 faces (cases grises).

**La probabilité cherchée est donc** $\mathbf{\frac{10}{24} = \frac{5}{12}}$.

## 2) a) Probabilité d'obtenir une somme paire

On reprend le tableau précédent en y faisant apparaître la somme des nombres obtenus sur les deux dés :

| Dé à 6 faces / Dé à 4 faces | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Sur les 24 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels la somme est paire.

On peut alors calculer **la probabilité d'obtenir une somme paire** :

$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

*Autre méthode :*

La somme sera paire si les nombres sur chacun des deux dés ont la même parité.

La probabilité que les deux nombres soient pairs est $\frac{1}{4}$.

La probabilité que les deux nombres soient impairs est $\frac{1}{4}$.

**La probabilité d'avoir une somme paire est donc :**

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

## 2) b) Probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3

| Dé à 6 faces / Dé à 4 faces | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

On reprend ci-dessus le tableau précédent dans lequel les cases présentant une somme strictement supérieure à 3 ont été grisées.
Sur les 24 cas possibles, il y en a 21 pour lesquels la somme est strictement supérieure à 3.

Cela permet de calculer **la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3** :

$$\frac{21}{24} = \mathbf{\frac{7}{8}}.$$

*Autre méthode :*

Seuls trois couples ont une somme strictement inférieure à 3 : (1 ; 1), (1 ; 2) et (2 ; 1).
Il y a donc 21 $(24 - 3)$ couples avec une somme strictement supérieure à 3 d'où le calcul de la probabilité demandée.

# EXERCICE 3

## 1) Réponse pour la valeur 5

Si l'élève prend la valeur 5, le programme remplace $x$ par 5 dans l'expression $3x + 7$.
Il calcule donc $3 \times 5 + 7$ et trouve 22.
Or $22 \neq 40$.

**Le logiciel affiche donc : « Et non désolé, ce n'est pas le nombre mystère, essaie encore ! » lorsque l'élève entre le nombre 5.**

## 2) Nombre mystère

Pour trouver le nombre mystère, il faut résoudre l'équation $3x + 7 = 40$ soit $x = 11$.
Donc le nombre mystère est 11.

**Pour obtenir en retour le message « Bravo ! Tu as trouvé le nombre mystère. », l'élève doit entrer le nombre 11.**

# EXERCICE 4

*Remarque préliminaire :*

*L'énoncé nous fournit la formule $D = \frac{V}{3 \times T}$ donnant le débit D de la perfusion en fonction du volume V à perfuser et de la durée T de la perfusion. Afin d'alléger les écritures, dans tout ce corrigé, D, V et T ne désigneront pas les grandeurs mais leurs mesures avec pour unités respectives le millilitre pour le volume, l'heure pour la durée et la goutte par minute pour le débit.*

## 1) Débit de la perfusion

1,5 L représente 1500 mL et une journée représente 24 heures.

La mesure du débit, en gouttes par minute, s'obtient en utilisant la formule donnée soit $\mathrm{D} = \frac{1500}{3 \times 24} = \frac{125}{6}$.

$\frac{125}{6} \approx 21$ en arrondissant à l'unité comme demandé.

**Le débit doit donc être de 21 gouttes par minute pour transfuser 1,5 L en un jour.**

## 2) Volume perfusé en une heure et quart

Le débit de la perfusion est de 6 gouttes par minute et la durée de la perfusion est une heure et quart, soit cinq quarts d'heure. On a donc ici :

$\mathrm{D} = 6$ et $\mathrm{T} = \frac{5}{4}$.

Il vient : $\mathrm{V} = \mathrm{D} \times 3 \times \mathrm{T} = 6 \times 3 \times \frac{5}{4} = 13{,}5$.

**Donc le volume de liquide perfusé en une heure et quart sera 13,5 mL avec un débit de 6 gouttes par minute.**

## 3) Durée de la perfusion pour un volume de 250 mL et un débit de 8 gouttes par minute

On a ici : $\mathrm{V} = 250$ et $\mathrm{D} = 8$.

De la formule $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{V}}{3 \times \mathrm{T}}$, on déduit en multipliant par T et en disant par D les deux membres de l'égalté :

$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{V}}{3\mathrm{D}} = \frac{250}{3 \times 8} = \frac{125}{12}$

La durée de cette perfusion est donc $\frac{125}{12}$ h.
Comme 1 h = 60 min, on peut exprimer cette durée en minutes :
$\frac{125}{12} \times 60 = 625$ min.
On a : $625 \text{ min} = 10 \times 60 \text{ min} + 25 \text{ min} = 10 \text{ h} + 25 \text{ min}$.
**La durée de la perfusion est donc 10 h et 25 min.**

# TROISIÈME PARTIE

# SITUATION 1

## 1) Objectif d'apprentissage de ces activités

Dans ces deux activités, le nombre est un outil pour prévoir le résultat d'un ajout, le résultat d'un retrait ou un complément.

Ces deux activités ont donc un objectif commun : **utiliser le nombre pour anticiper un résultat.**

## 2) Différences des tâches demandées dans l'étape 1 de l'activité 1 et dans l'activité 2

Dans les deux activités, les élèves ne peuvent pas voir les éléments des collections (ni les objets présents dans la boîte, ni les cailloux dans les mains jointes).
L'activité 1 (étape 1) est un problème dans lequel des éléments sont ajoutés à une collection déjà constituée.
L'activité 2 est un problème de réunion de deux collections.
Ainsi les tâches demandées diffèrent de par la nature des problèmes proposés : augmentation d'une collection dans un cas et réunion de deux collections dans l'autre.

*Remarque :*

*Dans la classification de G. Vergnaud, l'activité 1 (étape 1) relève d'une transformation positive d'états dans laquelle on recherche l'état final. L'activité 2 relève d'une composition d'états dans lequel on recherche l'état composé.*

## 3) Deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre dans l'étape 1 de l'activité 1

Les procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour calculer le résultat de l'ajout d'objets à la collection de départ peuvent être :

- Utilisation d'un matériel ou du dessin pour représenter la collection de départ et les objets rajoutés, puis recomptage de l'ensemble des objets.
- Dénombrement par comptage de la collection finale, par représentation mentale des objets contenus dans la boîte : l'élève s'appuie sur les nombres pour imaginer les collections et les objets les constituant afin de les compter.
- Mise en mémoire du nombre d'objet de la collection de départ, puis surcomptage à partir de ce nombre. La mémoire du nombre d'objets ajoutés va permettre d'arrêter ce surcomptage au bon nombre.
- Recours à des résultats mémorisés (doubles, répertoire additif…)
- Recours à des groupements afin de prendre appui sur des collections connues (des paquets de 5, des paquets de 10) et sur des résultats déjà mémorisés (par exemple 4 et 3, c'est comme 5 et 2 qui fait 7 ou encore utilisation de doubles connus : par exemple, pour ajouter 6 et 7, on peut faire 6 et 6 qui font 12 et encore 1 qui fait 13).

## 4) Variable didactique pour ces situations

Jouer sur la « taille des nombres » ferait évoluer les procédures vers le calcul en prenant appui sur certains résultats déjà mémorisés. Proposées au CP pour des nombres compris entre 20 et 50, ces activités pourraient notamment conduire les élèves à mettre en œuvre des procédures prenant appui sur la notion de dizaine.

# SITUATION 2

## 1) Notion abordée - Connaissances et savoir-faire mis en jeu.

La notion abordée ici est la **soustraction.**
Les élèves ont à produire le résultat de quatre soustractions posées en ligne, par la méthode de leur choix.
Ils doivent :

- Connaitre le signe de la soustraction et le sens de l'écriture d'une égalité.
- Savoir poser et effectuer une soustraction de deux nombres à deux ou trois chiffres (avec retenue).
- Connaitre les nombres entiers et savoir les décomposer en utilisant des dizaines ou des centaines de façon à mettre en évidence une procédure de calcul réfléchi (par jalonnement ou par sauts, par appui sur la propriété de conservation des écarts).

## 2) Étude des productions des élèves

## 2) a) Procédures utilisées par Antoine, Barbara et Clara

Les procédures utilisées par Antoine, Barbara et Clara sont toutes différentes.

Antoine effectue un jalonnement en partant du nombre le plus grand et en décomposant le nombre le plus petit pour effectuer des soustractions plus aisées. Ses résultats sont tous justes, il est simplement à noter une utilisation erronée du signe = dans ses écritures de droite.

Barbara effectue une opération posée pour chaque calcul, en utilisant la technique par cassage (autrement appelé par emprunt). Un résultat est erroné sur les quatre. On peut penser que cette erreur est imputable au deux zéros du nombre 800 qui oblige à casser la centaine (et non plus la dizaine puisque le chiffre des dizaines est 0) pour traiter la soustraction au niveau des unités.

Clara effectue le calcul en ligne et donne directement le résultat. Sa technique est incorrecte, tous les résultats sont erronés. En fait, il est fort probable qu'elle calcule des écarts entre chiffre de même rang, en prenant pour chaque rang le plus petit soustrait au plus grand ; par exemple, pour $613 - 209$, elle calcule $6 - 2 = 4$, puis $1 - 0 = 1$ et $9 - 3 = 6$ et elle donne 416 comme réponse.

## 2) b) Différences entre les procédures de Barbara et de Dominique

Barbara et Dominique ont tous les deux effectué une soustraction posée, mais ils ont employé deux techniques différentes.

Barbara a utilisé la technique dite par cassage (qui conduit à effectuer des conversions par cassage d'une unité de rang supérieur dès lors qu'on ne peut effectuer la soustraction des unités d'un rang donné).

Dominique a utilisé la règle des écarts constants (la différence ne change pas si on ajoute la même valeur aux deux nombres soustraits).

## 2) c) Réussites et erreurs de Barbara et deClara

Barbara trouve les résultats de 91 – 52, de 613 – 209 et de 607 – 54. Par contre, elle commet une erreur dans la soustraction de 800 et 153. La présence de deux zéros dans 800 la perturbe dans la mise en œuvre de la technique. Ainsi, au rang des unités simples, ne pouvant retirer 3 à 0, elle cherche à convertir une dizaine en unités, ce qui suppose de casser une dizaine. Le chiffre des dizaines étant un zéro, elle casse une centaine pour la convertir en 10 dizaines. Elle note bien qu'il lui reste 7 centaines. Elle devrait ensuite convertir l'une des 10 dizaines obtenues en unités afin de pouvoir retirer 3. Elle écrit bien un 1 devant le chiffre 0 des unités mais au lieu d'indiquer 9 comme chiffre des dizaines, elle en fait apparaître 11 (la dizaine est ajoutée et non retirée).

Les résultats de Clara aux quatre soustractions sont tous faux. Les calculs sont posés en ligne et les chiffres sont soustraits en procédant rang par rang. Cependant, les soustractions s'effectuent à chaque fois de façon à retirer le plus petit au plus grand. Par exemple, pour effectuer 91 – 52, elle calcule 9 – 5 et 2 – 1.
On peut aussi remarquer que, pour la dernière soustraction dans laquelle on a un nombre de deux chiffres soustrait à un nombre de trois chiffres, les chiffres associés pour ses soustractions ne sont pas ceux de même rang (centaine, dizaine, unité) comme on pouvait l'imaginer au regard de ses trois premiers calculs ; elle commence par soustraire les chiffres à gauche dans l'écriture de chaque nombre, ici 6 et 5 et calcule $6 - 5 = 1$, puis elle continue avec le chiffre qui suit dans chacun des nombres en calculant $4 - 0 = 4$ et enfin comme elle n'a plus de chiffre à soustraire dans le dernier nombre, elle recopie au rang des unités le chiffre 7 qui lui reste du premier nombre, d'où son résultat 147.

### 2) d) Accompagnement pédagogique pour remédier aux difficultés rencontrées par Clara

Il faudrait amener Clara à prendre conscience que sa procédure est erronée (exemple pour le calcul 91 – 52) :

- En prenant appui sur le calcul : lui demander d'ajouter son résultat (41) au nombre le plus petit (52) et lui demander de comparer le nombre ainsi obtenu avec le plus grand (91).
- En prenant appui sur du matériel de numération (par exemple des cubes pour les unités, des barres pour les dizaines, des plaques pour les centaines) : lui demander de représenter 91 et de retirer 52. Cela va la conduire à retirer 5 barres et 2 cubes à la collection initiale. Or, au moment de retirer les deux cubes, Clara pourra alors constater qu'il ne s'agit pas d'enlever un cube à deux cubes (comme elle le fait dans sa procédure lorsqu'elle retire une unité à deux unités).

Elle pourra alors envisager d'abandonner sa procédure. Le travail avec le matériel pourra être poursuivi pour construire un raisonnement correct, par exemple basé sur la procédure de cassage de la dizaine.

L'analyse à la question précédente de sa réponse à la quatrième soustraction montre qu'un travail de repérage des différentes unités et de leur signification dans l'écriture e chiffre d'un nombre est aussi sans doute nécessaire ; pour cela, l'utilisation d'un matériel type compteur peut être pertinente : elle permet de voir que c'est l'augmentation ou la diminution du nombre d'unités qui va entrainer à un moment donné un changement du chiffre des dizaines, puis des centaines et non l'inverse.

## SITUATION 3

### 1) Deux connaissances ou savoir-faire mathématiques nécessaires

Les connaissances ou savoir-faire mathématiques nécessaires à la réussite de cet exercice peuvent être :

- Savoir gérer des déplacements sur un quadrillage à mailles carrées en suivant les lignes.
- Savoir orienter un personnage (connaitre sa droite et sa gauche).
- Savoir coder un déplacement en utilisant le jeu d'instructions fourni.
- Savoir résoudre un problème pour chercher : gérer les essais, tenir compte de plusieurs contraintes, estimer la qualité d'une réponse.

### 2) a) Analyse de chaque production en termes de réussites et d'erreurs

*Oriane :*

Elle code correctement son déplacement en utilisant les instructions de programmation données. Elle tient compte de la contrainte de temps (correspondant à un déplacement de moins de vingt cases) et conclut correctement sa recherche. Cependant, à trois reprises, l'instruction de pivotement n'est pas correcte (confusion droite/gauche).

*Samuel :*

On peut lire trois séquences de code qui correspondent à trois lignes. La première correspond à un déplacement correct qui permet de récolter deux quilles. La deuxième est rigoureusement identique et n'est pas cohérente avec la position atteinte après le premier déplacement. À la fin de la dernière séquence, on retrouve une instruction non répertoriée (av 4). Sa conclusion est cohérente avec le code fourni, mais celui-ci ne tient pas compte de la contrainte de temps (sa séquence durerait 26 secondes).

### 2) b) Deux dispositifs de remédiation à l'attention d'Oriane

On peut envisager deux facteurs susceptibles d'expliquer les erreurs d'Oriane :

- Une confusion entre gauche et droite liée à un défaut de latéralisation.
- Des erreurs liées au conflit entre l'orientation de la carte et celle du sujet au cours de son déplacement.

Les dispositifs de remédiation à proposer à l'attention d'Oriane vont dépendre du ou des facteurs les plus pertinents pour expliquer ses erreurs.

Si la difficulté principale est la confusion droite/gauche, on pourra proposer un exercice de latéralisation afin d'aider Oriane à repérer correctement droite t gauche.

Si, comme c'est le plus probable, la principale difficulté est liée aux questions d'orientation relative, on proposera des situations mettant en jeu des changements de registre afin de favoriser la prise de conscience du choix du référent pour indiquer le sens d'une rotation (différence entre tourner vers la gauche de la carte et tourner vers la gauche du sujet se déplaçant) :

- Programmer un automate (type BlueBot[1]) sur un quadrillage (passage du registre langagier au registre matériel).
- Faire vivre la séquence codée à un camarade qui suit le code fourni (passage du registre symbolique au registre gestuel).

*Remarque :*

*Le Blue-Bot est un robot de plancher s'appuyant sur une programmation de type « flèches-instructions » dérivée du langage Logo de Seymour Papert (« avance ! », « recule ! », « pivote à gauche ! », « pivote à droite ! »). Il possède une fonctionnalité de liaison Bluetooth avec une tablette tactile.*

1 http://inshea.fr/sites/default/files/fichier-orna/EG_Blue-Bot_0.pdf

# GROUPEMENT 4 – avril 2017

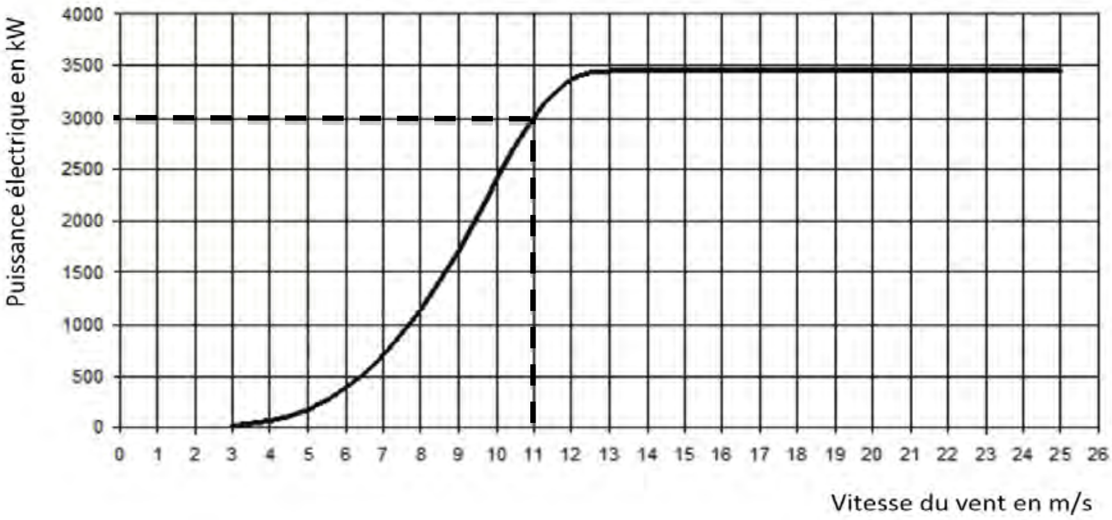
## PREMIÈRE PARTIE

## PARTIE A : puissance électrique d'une éolienne

Sur ce graphique, sur l'axe des abscisses on représente la vitesse du vent en m/s et sur l'axe des ordonnées la puissance électrique en kW.

### 1) Puissance électrique de l'éolienne quand la vitesse du vent est 11 m/s

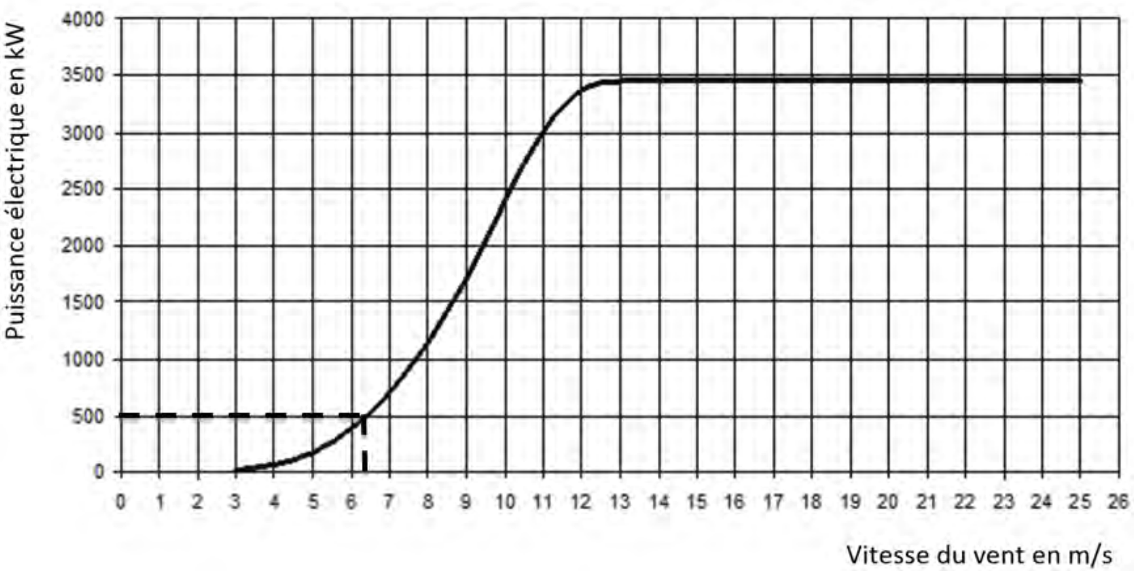
Pour trouver la puissance correspondant lorsque le vent a une vitesse de 11 m/s il suffit de repérer le point de la courbe d'abscisse 11 et de lire l'ordonnée correspondante : 3000.




**Pour une vitesse du vent de 11 m/s , la puissance électrique de l'éolienne est 3000 kW.**

### 2) Vitesse du vent pour obtenir une puissance électrique supérieure à 500 kW

De la même manière pour connaitre la vitesse minimale il suffit de lire sur le graphique l'abscisse des points dont l'ordonnée est supérieure à 500 kW.

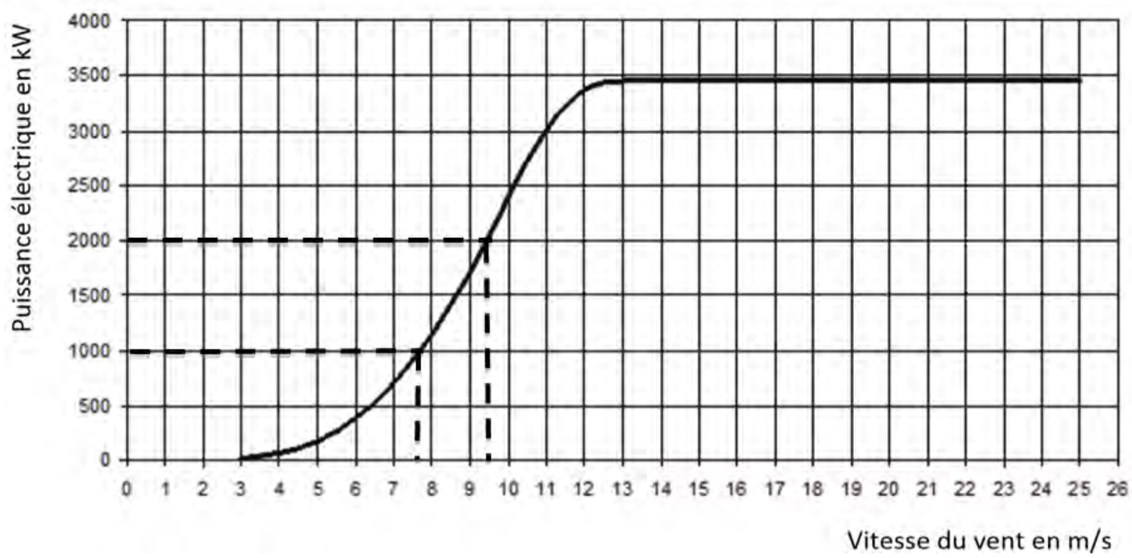



**Par lecture graphique, le vent doit avoir une vitesse d'environ au moins 6,3 m/s pour obtenir une puissance électrique d'au moins 500 kW.**

### 3) Proportionnalité ou non entre vitesse et puissance

Une situation de proportionnalité correspond à une fonction linéaire qui a pour représentation graphique une droite passant par l'origine, ce qui n'est pas le cas ici.
**Il n'y a donc pas proportionnalité entre vitesse du vent et puissance électrique produite.**

### 4) Vitesses du vent avec une puissance électrique comprise entre 1000 et 2000 kW




**Par lecture graphique, la vitesse du vent doit être environ comprise entre 7,6 et 9,4 m/s pour que la puissance électrique obtenue soit comprise entre 1000 et 2000 kW.**

### 5) Puissance maximale fournie par l'éolienne

**L'ordonnée maximale des points de la courbe correspond à la puissance maximale obtenue qui est donc de 3500 kW.**

### 6) Conversions de m/s en km/h

Comme précédemment on lit sur le graphique la vitesse du vent doit être supérieure à 11 m/s pour obtenir une puissance supérieure à 3000 kW.

$$11\text{m/s} = \frac{11\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{11 \times 3600\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{39600\text{ m}}{1\text{ h}} = \frac{39{,}6\text{ km}}{1\text{ h}} = 39{,}6\text{ km/h}$$

**La vitesse 11 m/s correspond à 39,6 km/h.**

## PARTIE B : calcul de la puissance récupérable d'une éolienne

*Remarque préliminaire :*

*1) Les calculs effectués dans cette partie s'appuient sur la formule $P_{disponible} = \frac{1}{2} r \times S \times V^3$ donnée par l'énoncé, dans laquelle $P_{disponible}$ est la puissance disponible de l'éolienne, r est la densité de l'air, S l'aire de la surface balayée par les pales de l'éolienne et V la vitesse du vent.*
*Afin d'alléger les écritures, dans tout ce corrigé, $P_{disponible}$, r, D, S et V ne désigneront pas les grandeurs mais leurs mesures avec pour unités respectives le watt pour la puissance $P_{disponible}$, le kg/m³ pour la densité r, le m pour le diamètre D, le m² pour l'aire S et m/s pour la vitesse V.*

*2) La question 1) b) demande d'établir la formule $P_{récupérable} = 998{,}816\pi \times V^3$. Si dans cette formule, P et V désignent des grandeurs et non leurs mesures comme le laisse entendre l'énoncé, on aboutit à une écriture incorrecte car la puissance n'est pas homogène au cube d'une vitesse comme pourrait le laisser croire l'écriture d'une telle égalité.*

### 1) Éolienne de diamètre 112 m et ayant pour coefficient de performance 0,52

#### 1) a) Aire de la surface balayée

L'aire d'un disque S se calcule à l'aide de la formule suivante, où D est le diamètre : $S = \pi \times \frac{D^2}{4}$.
On a donc pour les mesures :
$S = \pi \times \frac{112^2}{4} = 3136\pi$
**L'aire de la surface balayée par les pales de l'éolienne est de $3136\pi$ m².**

#### 1) b) Puissance récupérable

**A l'aide des formules** : $\mathbf{P_{récupérable} = C_p \times P_{disponible}}$ **et** $\mathbf{P_{disponible} = \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3}$
on trouve : $P_{récupérable} = C_p \times P_{disponible} = C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3$
d'où le calcul
$P_{récupérable} = 0{,}52 \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \times 56^2 \times V^3 = 998{,}816\pi \times V^3$
**La mesure de la puissance récupérable de l'éolienne (mesurée en watt) est bien égale à $\mathbf{998{,}816\pi \times V^3}$ avec V mesure de la vitesse du vent (mesurée en m/s).**

#### 1) c) Puissance récupérable en kW

La mesure en watt de la puissance récupérable est :
$P_{récupérable} = 998{,}816\pi \times V^3 = 998{,}816 \times \pi \times 6^3 = 215744{,}256\,\pi$
soit $P_{récupérable} \approx 677780{,}57$ .
1 000 W = 1 kW
**donc la puissance récupérable de l'éolienne est égale à environ 677,78 kW.**

#### 1) d) Si la vitesse du vent est multipliée par 2

La puissance récupérable est un multiple de $V^3$ donc lorsque V est multiplié par 2, $V^3$ est multiplié par 8 et donc la puissance récupérable aussi.
**Si la vitesse du vent est multipliée par 2, alors la puissance récupérable est multipliée par 8.**

#### 1) e) Non proportionnalité entre la puissance récupérable et la vitesse du vent

La puissance récupérable est un multiple de $V^3$ et non de V.
**La puissance récupérable n'est donc pas proportionnelle à la vitesse.**

### 2) Valeur maximale de $P_{récupérable}$

D'après 1) b), on a : $P_{récupérable} = 0{,}52 \times P_{disponible} = C_p \times \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3$.
D'après l'énoncé, la valeur maximale de $C_p$ est $\frac{16}{27}$.
La valeur maximale de $P_{récupérable}$ est :
$\frac{16}{27} \times \frac{1}{2} \times 1{,}225 \times \pi \times \frac{D^2}{4} \times V^3 = \frac{16 \times 1{,}225 \times \pi}{27 \times 2 \times 4} \times D^2 \times V^3$.
**Donc $\mathbf{P_{récupérable}} < 0{,}29 \times \mathbf{D^2 \times V^3}$.**

## PARTIE C : étude de la production éolienne en France en 2015

#### 1) a) Énergie produite par une éolienne en Centre-Val de Loire

En Centre-Val de Loire, le facteur de charge éolien moyen est de 25,8%.
D'après l'énoncé on a : $E = P \times t \times f$.
On a donc dans cette région : $E = 4\text{ MW} \times 365\text{ j} \times 24\text{ h/j} \times 0{,}258$.

**E = 9 040,320 MWh.**

### 1) b) Puissance éolienne en Centre-Val de Loire

On connait l'énergie totale produite par l'ensemble de la région en 2015 :

$E_{totale} = 1{,}98 \times 10^6$ MWh = $P_{totale} \times 365$ j $\times$ 24 h/j $\times$ 0,258 = $P_{totale} \times 2\,260{,}08$ h

$P_{totale} = \dfrac{1{,}98 \times 10^6 \text{ MWh}}{2\,260{,}08 \text{ h}}$

$\mathbf{P_{totale}} \approx$ **876 MW.**

*Remarque :*

*Cela correspond à environ 219 éoliennes de 4MW chacune.*

### 2. Énergie électrique produite en France

Sachant que l'énergie produite par l'éolien en France correspond à 4,5% de la production énergétique totale, cette dernière vaut environ $\dfrac{21{,}9 \times 10^6 \text{MWh}}{0{,}045}$ ce qui correspond à environ 487 millions de MWh.

**L'énergie électrique produite en France en 2015 est d'environ 487 millions de MWh.**

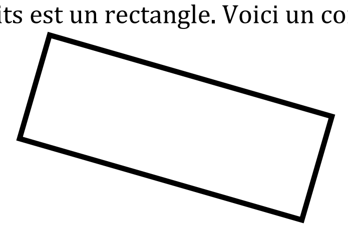
## DEUXIÈME PARTIE

### EXERCICE 1

### 1) Affirmation 1 : *« Un quadrilatère qui a trois angles droits est un carré. »*

**FAUX.**

Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle. Voici un contre-exemple.



Pour être un carré il faudrait qu'il ait au moins deux côtés consécutifs de même longueur ou ses diagonales perpendiculaires ce qui n'est pas indiqué dans l'énoncé.

### 2) Affirmation 2 : *« Le boucher se trompe ; il aurait dû lui faire payer 2,250 kg de viande. »*

**VRAI.**

Sur quatre steaks hachés, un seul steak est gratuit.

*Méthode 1 :*

Sur une part de viande hachée, trois quarts de cette part reste à payer. On déduit que sur 3 kg de viande hachée, les trois quarts de 3 kg restent à payer ( $\dfrac{3}{4} \times 3$ kg = 2,25 kg ).

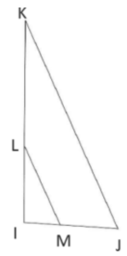
Il est donc vrai que le boucher s'est trompé ; Solène aurait dû payer 2,25 kg de viande et non 2 kg de viande.

*Méthode 2 :*

Sur une part de viande hachée, seulement un quart de cette part est gratuite. On déduit que sur 3 kg de viande hachée, seulement le quart de 3 kg ( soit $\dfrac{1}{4} \times 3$ kg , soit 0,75 kg) de cette viande est gratuit.

Il est donc vrai que le boucher se trompe ; Solène aurait dû payer 2,25 et non 2 kg de viande.

**3) Affirmation 3 :** *« Les droites (ML) et (KJ) sont parallèles. »*




**VRAI.**

Dans le triangle IJK, M appartient à [IJ] et L appartient à [IK]. D'après le théorème de Thalès, si $\frac{\text{IM}}{\text{IJ}} = \frac{\text{IL}}{\text{IK}}$, alors les droites (ML) et (JK) sont parallèles.

$\frac{\text{IM}}{\text{IJ}} = \frac{0{,}8}{2}$ et $\frac{\text{IL}}{\text{IK}} = \frac{1{,}6}{4}$

Puisque $\frac{0{,}8}{2} = \frac{1{,}6}{4}$, les droites sont parallèles.

On conclut donc que l'affirmation est vraie.

**4) Affirmation 4 :** *« Le carré d'un nombre entier positif premier admet exactement trois diviseurs positifs. »*

**VRAI.**

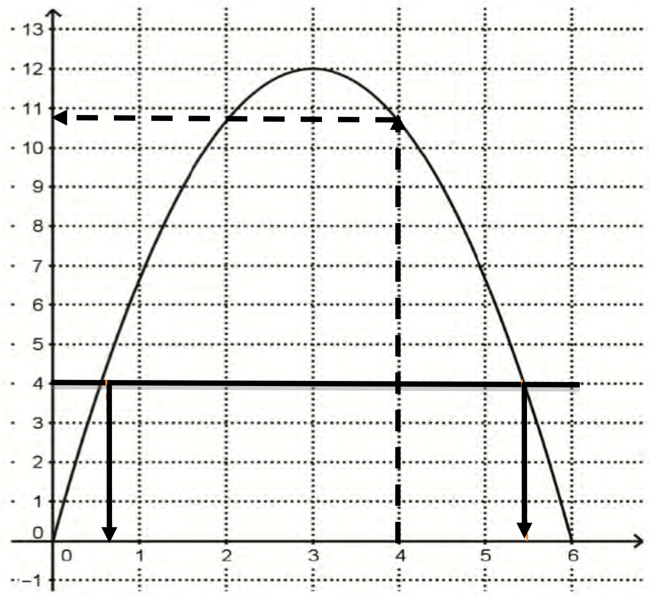
Le nombre étant positif premier, noté p, il admet comme diviseurs 1 et lui-même, p. Le carré de ce nombre $p^2$ admet alors comme diviseur 1, p et $p^2$ soit exactement trois diviseurs.

**5) Affirmation 5 :** *« 4 a pour antécédent un nombre compris entre 10 et 11. »*

**FAUX.**

*Remarque préalable :*

*Comme on peut l'observer sur le graphique fourni, 4 figure sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.*




*Première explication possible à propos du 4 figurant sur l'axe des ordonnées*

L'affirmation est fausse car 4, présent en ordonnée, **a deux antécédents et aucun des deux n'est compris entre 10 et 11** ; d'après lecture sur le graphique, on constate qu'un antécédent est un nombre compris entre 0 et 1 et l'autre antécédent est un nombre compris entre 5 et 6.

*Deuxième explication à propos du 4 figurant sur l'axe des abscisses*

L'affirmation est fausse car 4, présent en abscisse, a pour **image** un nombre compris entre 10 et 11, et non pour antécédent.

## EXERCICE 2

Les deux dés en question sont respectivement vert et rouge et ils sont lancés simultanément. Cela conduit à considérer 36 cas (binômes (V, R)) possibles et équiprobables.

### 1) a) Probabilité d'obtenir exactement 400 points

Selon les règles du jeu, avec un seul lancer, on gagne 400 points dans un seul cas : celui où on obtient une paire de 4.

**La probabilité est alors de $\frac{1}{36}$.**

### 1) b) Probabilité d'obtenir exactement 50 points

La règle indique que si un joueur obtient un résultat autre qu'une paire, il obtient 50 points. Il y a six paires possibles sur les trente-six binômes possibles, la probabilité d'obtenir une paire est $\frac{1}{6}$, qui correspond à $\frac{6}{36}$.

« Obtenir un résultat autre qu'une paire » correspond à l'évènement contraire d'« obtenir une paire ».

La probabilité d'obtenir un résultat autre qu'une paire est alors $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

*Autre méthode :*

Il y a six paires parmi les trente-six binômes possibles, ce qui correspond à trente binômes qui ne sont pas des paires.

**La probabilité d'obtenir un résultat autre qu'une paire est donc $\frac{30}{36}$ qui correspond à $\frac{5}{6}$.**

### 2) Probabilité de gagner la partie lors du troisième lancer

Pour gagner la partie elle doit avoir au moins 1000 points, il lui manque donc au moins 350 points.
Il faut donc qu'elle obtienne en un seul lancer soit une paire de 1, soit une paire de nombres supérieurs ou égaux à 4 (4, 5 ou 6) pour dépasser 350 points.

La probabilité d'obtenir une paire de 1 est $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir une paire supérieur ou égale à 4 est $\frac{3}{36}$ ou $\frac{1}{12}$.

Ces deux évènements sont incompatibles donc la probabilité de leur réunion est la somme des probabilités de chacun des évènements.

**La probabilité que Paola gagne la partie est alors $\frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.**

### 3) Probabilité de gagner au moins 1000 points en 1 ou 2 coups

La probabilité de gagner au moins 1000 points en un coup est $\frac{1}{36}$ (lorsque l'on obtient la paire de 1).

Lors d'un lancer, on peut gagner 50 (autre qu'une paire), 200 (paire de 2), 300 (paire de 3), 400 (paire de 4), 500 (paire de 5), 600 (paire de 6) ou 1000 (paire de 1) points.

*Rappel :*

La probabilité de deux événements consécutifs indépendants est le produit des probabilités de chacun de ces événements.

Ici le premier et le second lancer sont deux évènements consécutifs indépendants.
Le tableau de la page suivante récapitule ce qui peut se passer au premier lancer et pour chaque cas, ce qu'il faut obtenir au second lancer pour atteindre ou dépasser les 1000 points, avec la probabilité de chacune de ces occurrences.

| **Si au premier lancer, on obtient …** | **Alors on gagne … points** | **Il manque encore au moins … points** | **…, et pour cela il faut obtenir au second lancer …** | **La probabilité est alors …** |
|---|---|---|---|---|
| (1,1) | 1000 | rien, c'est gagné | n'importe lequel des lancers possibles (évènement certain) | $\frac{1}{36} \times 1$ |
| (2,2) | 200 | 800 | (1 ; 1) | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ |
| (3,3) | 300 | 700 | (1 ; 1) | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ |
| (4,4) | 400 | 600 | (1 ; 1) ou (6 ; 6) | $\frac{1}{36} \times \frac{2}{36}$ |
| (5,5) | 500 | 500 | (1 ; 1) ou (5 ; 5) ou (6 ; 6) | $\frac{1}{36} \times \frac{3}{36}$ |
| (6,6) | 600 | 400 | (1 ; 1) ou (4 ; 4) ou (5 ; 5) ou (6 ; 6) | $\frac{1}{36} \times \frac{4}{36}$ |
| Autre qu'une paire | 50 | 950 | (1 ; 1) | $\frac{1}{36} \times \frac{5}{36}$ |

*Rappel :*

Tous ces évènements sont incompatibles donc la probabilité de leur réunion est égale à la somme des probabilités de chacun des évènements.
La probabilité de gagner au moins 1000 en deux lancers s'obtient en ajoutant tous les résultats écrit dans la troisième colonne du tableau ci-dessus, ce qui donne une probabilité égale à $\frac{77}{36 \times 36}$.

**La probabilité de gagner au moins 1000 en deux lancers est égale à $\frac{77}{36 \times 36}$.**

*Le tableau ci-après résume autrement la situation étudiée.*

| | | **Premier lancer** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **50** | **200** | **300** | **400** | **500** | **600** | **1000** | |
| **Second lancer** | **50** | | | | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{5}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{5}{36}$ |
| | **200** | | | | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36 \times 36}$ |
| | **300** | | | | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36 \times 36}$ |
| | **400** | | | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36 \times 36}$ |
| | **500** | | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36 \times 36}$ |
| | **600** | | | | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{4}{36 \times 36}$ |
| | **1000** | $\frac{1}{36} \times \frac{5}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| | | | | | | | | | $\mathbf{\frac{77}{36 \times 36}}$ |

**EXERCICE 3**

*Complément de formation : une aide à la compréhension du programme fourni, écrit en Scratch, un langage de programmation par blocs.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *L'exécution du programme est déclenchée par :* *l'**évènement*** *« l'utilisateur clique sur le drapeau ».* | quand [drapeau] cliqué | *Question 1)a)* | *Question 1)b)* |
| *Attente de l'entrée d'un nombre par l'utilisateur.* *Avec le logiciel utilisé ici, ce nombre est automatiquement affecté à :* *la **variable réponse**.* | demander Choisissez un nombre et attendre | *On entre 10* | *On entre –2* |
| *Ici, le nombre est affecté à :* *la **variable x**.* | mettre x à réponse | $x = 10$ | $x = -2$ |
| *Exécution d'un calcul dont le résultat est affecté à :* *la **variable A*** (A = x – 8). | mettre A à x - 8 | *Le programme calcule* 10 – 8 = 2 | *Le programme calcule* –2 – 8 = –10 |
| *Exécution d'un calcul dont le résultat est affecté à :* *la **variable B*** (B = x * 3). | mettre B à A * 3 | *Le programme calcule* 2 × 3 = 6 | *Le programme calcule* –10 × 3 = –30 |
| *Exécution d'un calcul dont le résultat est affecté à :* *la **variable C*** (C = B + 24). | mettre C à B + 24 | *Le programme calcule* 6 + 24 = 30 | *Le programme calcule* –30 + 24 = –6 |
| *Exécution d'un calcul dont le résultat est affecté à :* *la **variable D*** (D = C + x). | mettre A à C + x | *Le programme calcule* 30 + 10 = 40 | *Le programme calcule* –6 + (–2) = –8 |
| *Affichage du résultat de :* *la **variable D**.* | montrer la variable D | *Le programme affiche 40* | *Le programme affiche* –8. |

## 1) a) Application du programme de calcul au nombre 10

Si *x* prend la valeur 10 alors :

- A prend la valeur 2 (car 10 – 8) ;
- B prend la valeur 5 (car A × 3 = 2 × 3 = 6) ;
- C prend la valeur 30 (car B + 24 = 6 + 24) ;
- D prend la valeur 40 (C + x = 30 + 10).

**Le résultat affiché, la valeur de D, vaut 40.**

## 1) b) Application du programme de calcul au nombre −2

Si *x* prend la valeur –2 alors :

- A prend la valeur – 10 (car –2 – 8) ;
- B prend la valeur – 21 (car A × 3 = –10 × 3 = –30) ;
- C prend la valeur – 6 (car B + 24 = – 30 + 24) ;
- D prend la valeur – 8 (car C + x = – 6 – 2).

**Le résultat affiché, la valeur de D, vaut – 8.**

*Remarque pour 1)a) et 1)b) :*
*Il est possible aussi de transformer les écritures de manière à n'avoir qu'une seule équation de D en fonction de x :*

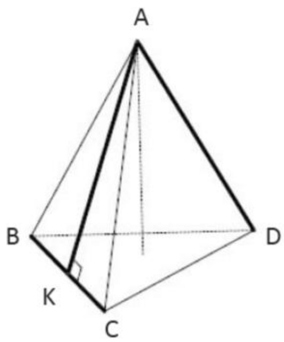
$A = x - 8$ ;
$B = A \times 3 = (x - 8) \times 3 = 3x - 24$ ;
$C = B + 24 = 3x - 24 + 24 = 3x$ ;
$D = C + x = 3x + x = 4x$ .

*On trouve donc* $D(10) = 4 \times 10 = 40$.

## 2) Modification de l'algorithme

D'après la remarque de l'exercice précédent, pour avoir le même résultat à l'affichage, **il faut afficher le résultat du calcul $4x$**.

## EXERCICE 4




## 1) a) Dimensions du rectangle

Les quatre faces étant équilatérales avec des arêtes communes, on sait donc que toutes les arêtes sont de même longueur, soit 5,5 cm.
K est le pied de la hauteur dans le triangle équilatéral ABC ; (KA) est donc également médiatrice du segment [BC] donc K est le milieu de [BC] donc on a BK $=$ KC $=$ 2,75 cm.
On sait que, dans le triangle ABC, [AK] est la hauteur issue de A, le triangle AKC est donc rectangle en K.
La longueur d'un côté du rectangle en question est donnée par la somme des longueurs KB, BC et CK, soit $\text{KB} + \text{BC} + \text{CK} = 2 \times \text{BC} = 2 \times 5{,}5 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$ (ou 2,75 cm $+$ 5,5 cm $+$ 2,75 cm).
La longueur de l'autre côté du rectangle est KA. Pour la calculer, il faudra appliquer le théorème de Pythagore au triangle AKC rectangle en K, soit $\text{AC}^2 = \text{AK}^2 + \text{KC}^2$.
On a alors, avec l'abus de notation signalé en page 66 :
$\text{AK}^2 = \text{AC}^2 - \text{KC}^2 = 5{,}5^2 - 2{,}75^2 = 30{,}25 - 7{,}5625 = 22{,}6875$
d'où $\text{AK} = \sqrt{22{,}6875}$ cm (en valeur exacte) soit $\text{AK} \approx 4{,}8$ cm.

**Les dimensions du rectangle sont : 11 cm de longueur et $\sqrt{22,6875}$ cm de largeur**

## 1) b) Volume du sachet de thé de Yanis

Le volume V du sachet de thé de Yanis vaut environ 19,4 cm$^3$ car :

$$V = \frac{\frac{\text{BC} \times \text{AK}}{2} \times \frac{5{,}5 \times \sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{\frac{5{,}5 \times \sqrt{22{,}6875}}{2} \times \frac{5{,}5 \times \sqrt{6}}{3}}{3}$$

$V \approx 19{,}4 \text{ cm}^2$

**Le volume du sachet est d'environ 19,4 cm$^3$.**

## 2) L'affirmation de Dounia

Pour obtenir le sachet « grand format », si toutes les longueurs des arêtes du tétraèdre de départ sont multipliées par 1,3, le volume sera multiplié par $(1{,}3)^3$ et donc par 2,197, soit environ deux fois de plus que le volume du tétraèdre de départ.

**Dounia a donc raison**.

# TROISIÈME PARTIE

## SITUATION 1

*Préambule :*

Le problème additif proposé à une classe de CP peut être interprété de plusieurs façons, par exemple comme relevant d'une *composition d'états* : on a deux *parts* (les deux collections de billes) et on cherche le *tout*. Il peut aussi être interprété comme relevant d'une *transformation d'états* : on connaît l'*état initial* (la collection de 12 billes), la *transformation positive* (les 9 billes gagnées), on cherche l'*état final* (le nombre total de billes à la fin de la partie) [1].

Pour le résoudre, on peut recourir à diverses stratégies.

- Faire appel au comptage (recomptage après réunion des deux collections) ou faire appel au surcomptage (à partir de 12 ou de 9). Dans ces deux cas, une aide pourrait être apportée par le recours à un schéma représentant les deux collections de billes ou par les doigts des deux mains (en surcomptant et en commençant par 12, on a suffisamment de doigts pour arriver au résultat cherché).
- Proposer un outil qui permet de garder la mémoire de la quantité de type boulier sur lequel on peut faire apparaitre la quantité initiale (12 c'est une ligne de 10 et 2) et la quantité ajoutée (une ligne moins une boule). On y fait les échanges : compléter la ligne des 2 en prenant 8 à 9 ou compléter la ligne des 9 en prenant 1 à la ligne des 2 isolés). Ceci permet de faire apparaitre alors les décompositions/recompositions et la quantité finale 21 (deux lignes et une boule isolée).
- Faire appel au calcul mental. On peut faire appel au calcul mémorisé si on dispose, dans son propre répertoire, du résultat de $12 + 9$.
  Ou bien, on peut faire appel aux calculs réfléchi et mémorisé : par exemple, utiliser le complément à la dizaine en faisant :
  $12 + 9 = 9 + 1 + 11 = 10 + 11 = 21$ ou bien $12 + 9 = 12 + 8 + 1 = 20 + 1 = 21$ (recours implicite aux propriétés de l'addition et aux tables d'addition).
  Ou avec usage des doubles :
  $12 + 9 = 9 + 12 = 9 + 9 + 3 = 18 + 3 = 18 + 2 + 1 = 20 + 1 = 21$.
- Faire appel au calcul posé : bien que les nombres en jeu ne soient pas grands, un élève pourrait poser l'opération en utilisant un des algorithmes de l'addition qu'il aurait déjà rencontré.

### 1) Procédures de Léanne, Miléna et Zélie

**Léanne** a représenté les deux collections de billes (par des « ronds » plus ou moins noirs). Ensuite, elle a probablement recompté tous les éléments dessinés comme s'il s'agissait d'une seule collection ou surcompté en partant d'une des collections.

Vu le dessin de **Zélie**, on peut supposer qu'en partant de 12, cet élève a surcompté sur les doigts des mains dessinées ou bien a surcompté après avoir levé neuf doigts (cinq doigts d'une main et puis les quatre de l'autre).

**Miléna** recourt à un algorithme de l'addition posée en colonnes (ce qui n'était vraiment pas nécessaire, étant donné les nombres en jeu).

### 2) Production d'Enzo

Non, la production de cet élève ne permet pas d'évaluer la maîtrise d'une procédure relevant du calcul. Bien que Enzo écrive un calcul en ligne ($12 + 9 = 21$), rien n'indique s'il a fait appel :

- au comptage (comme Léanne) ;
- ou bien au calcul :
  - à un algorithme de l'addition (comme Miléna) en posant le calcul dans sa tête ;
  - ou au calcul mental, réfléchi ou mémorisé, comme décrit dans le préambule.

[1] Pour des compléments sur les problèmes additifs, cf. Vergnaud G. (1999), *Le moniteur de mathématiques*, Nathan

## SITUATION 2

### 1) Procédures des élèves A, B et C

***Élève A****. Usage du complément à la dizaine supérieure*

Il cherche le complément à la dizaine supérieure de 29 (soit 1)
Puis il décompose explicitement 47 en $46 + 1$ pour ensuite calculer $29 + 1$ puis $30 + 46$ qui se calcule facilement à l'aide de la numération décimale.

***Élève B****. Probablement, décomposition canonique des deux nombres*

Il peut avoir ajouté d'une part les dizaines des deux nombres entre elles (2 dizaines plus 4 dizaines égale 6 dizaines égale 60) et d'autre part les unités ($9 + 7 = 16$). Il ajoute ensuite les deux résultats $60 + 16 = 76$
Il peut aussi avoir décomposé 47 en $31 + 16$ pour ensuite calculer $29 + 31$ puis $60 + 16$ qui se calcule facilement à l'aide de la numération décimale.
Contrairement aux calculs de l'élève A, les décompositions et associations demeurent implicites.

***Élève C****. Probablement, décomposition canonique de 47*

Il a vraisemblablement décomposé 47 en $40 + 7$ pour ensuite calculer $29 + 40 = 69$ (sans l'écrire) et calculer enfin $69 + 7$, peut-être en décomposant 7 en $1 + 6$ pour associer $69 + 1$ et calculer enfin $70 + 6$.
Comme pour les calculs de l'élève B, les décompositions et associations demeurent aussi implicites.

### 2) Un élève de cycle 3

Pour effectuer les calculs de la **ligne a**, l'élève a fait appel aux propriétés de commutativité de l'addition ($53 + 4 = 4 + 53$) et puis d'associativité de l'addition ($96 + 4$) car il reconnait sans doute le complément à 100 de 4.

Pour effectuer les calculs de la **ligne b**, l'élève effectue une décomposition multiplicative de 14 en $7 \times 2$ puis utilise la propriété d'associativité de la multiplication ($2 \times 5 = 10$). Il a sans doute en tête l'idée de simplifier les calculs en utilisant la table de 10 plutôt que celle de 5.

Pour effectuer les calculs de la **ligne c**, l'élève décompose sans doute 12 en $10 + 2$ puis recourt à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.
Mais il se trompe car il n'écrit pas l'étape intermédiaire : $6 \times 12 = 6 \times (10 + 2)$, ce qui permettrait d'écrire en dernière étape : $6 \times 10 + 6 \times 2$. Il écrit : $6 \times 12 = 6 \times 10 + 2 \times 10$.

## SITUATION 3

*Méthode 1 :*

Un élève de cycle 3 peut effectuer des essais-ajustements sans forcément avoir d'idée de l'ordre de grandeur des nombres cherchés et ce, jusqu'à obtention de 129.
Exemple : $10 + 11 = 21$ ; $11 + 12 = 23$ …

Dans les méthodes proposées dans la suite, l'élève de cycle 3 se dit qu'ajouter deux nombres consécutifs c'est presque doubler l'un des deux nombres.

*Méthode 2 :*

Il peut également commencer ses essais par $60 + 61$ (129 c'est environ 12 dizaines), il teste donc avec deux nombres proches de 6 dizaines et poursuit jusqu'à trouver le résultat :
$60 + 61 = 121$ ; $61 + 62 = 123$ ; $62 + 63 = 125$ ; $63 + 64 = 127$ ; $64 + 65 = 129$.

*Méthode 3 :*

Il peut commencer par $60 + 61$, se rendre compte qu'il manque 8 pour arriver à 129 et partager donc équitablement 8 entre les deux nombres de départ pour obtenir ainsi 129 :
$60 + 61 = 121 \quad et \quad 121 + 8 = 129 \quad donc \quad (60 + 4) + (61 + 4) = 129.$

*Méthode 4 :*

Pour avoir une valeur approchée des numéros des pages il cherche la moitié de 129 (calcul posé ou réfléchi).

- Il peut calculer 129 : 2 et trouver 64,5 ;
- il peut s'arrêter à la partie entière du quotient : 64.

Il calcule alors $64 + 65$ et trouve le résultat.

*Méthode 5 :*

Un élève de cycle 3 pourrait arrondir 129 à 130, trouver la moitié de 130 (65) et essayer $65 + 66 = 131$ puis revenir à $64 + 65 = 129$ (ou directement calculer $64 + 65$).

***Méthode 6** (utilisation de la numération) :*

Il peut partager équitablement le nombre de dizaines de 129 (12 dizaines égales à 6 dizaines plus 6 dizaines) puis chercher à décomposer les 9 unités qui restent en la somme de deux nombres consécutifs, soit 4 et 5 : $6\text{d} + 4 + 6\text{d} + 5 = 64 + 65 = 129$.

## SITUATION 4

### 1) Stratégies, réussites et erreurs de chacun des élèves

| Prénom | Procédure | Réussite ou erreur(s) |
|---|---|---|
| ***Jérémy*** | Jérémy rédige les étapes de calcul réfléchi en lignes.<br>Il démarre les calculs par une multiplication pour s'approcher de 42 puis ajuste à l'aide d'addition(s) et/ou soustraction(s). | Il utilise incorrectement le mot chiffre à la place du mot nombre.<br>Tous les résultats (intermédiaires et final) sont corrects.<br>Les écritures en ligne sont mathématiquement erronées mais permettent de suivre les étapes de calcul :<br>$7 \times 8 \neq 56 - 10$ … |
| ***Coline*** | Coline rédige les étapes de calcul réfléchi en lignes.<br>Elle démarre les calculs par une multiplication puis prolonge à l'aide d'addition(s) et/ou soustraction(s) sans forcément réussir à atteindre 42 (mais note d'une croix les essais infructueux et un V pour les réussites). | Les calculs effectués sont corrects.<br>Les réussites et non réussites sont repérées.<br>Les écritures en ligne sont mathématiquement erronées mais permettent de suivre les étapes de calcul.<br>Dans le deuxième calcul, Coline utilise un nombre qui ne fait pas partie de la liste proposée (5). Il est possible qu'elle modifie la procédure précédente pour obtenir 42. |
| ***Swan*** | Swan recopie les nombres donnés et les raye quand ils sont utilisés.<br>Swan écrit les multiplications en ligne et les additions ou soustractions en colonnes.<br>Swan écrit d'abord $4 \times 10 = 40$ et le barre, écrit $7 \times 4 = 28$ puis calcule (on reconnaît les traces de l'algorithme par emprunt de la soustraction) $10 - 8 = 2$ et $2 + 3 = 5$ et calcule (on voit les traces des retenues) enfin $5 + 28 = 33$ mais le barre car ce n'est pas 42 et n'a plus de nombres à utiliser. | Swan utilise incorrectement le mot chiffre à la place du mot nombre.<br>Tous les calculs intermédiaires sont justes mais le lien entre les calculs n'est pas facile à repérer.<br>Le compte n'est pas bon. |

| | | |
|---|---|---|
| ***Zoé*** | Zoé recopie les nombres donnés et les raye quand ils sont utilisés.<br>Elle effectue d'abord une multiplication $(3 \times 10 = 30)$ et puis deux additions :<br>$30 + 8 = 38$ ; $38 + 4 = 42$ | Les calculs effectués sont corrects et posés en colonnes.<br>Le compte est bon. |

## 2) Compétences travaillées au cours de cette séance d'apprentissage

Dans cette activité de calcul réfléchi, les compétences particulièrement travaillées sont les suivantes :

- **chercher** : l'activité « comptes est bon » nécessite la prise d'initiative (choix des nombres, des opérations) qui va conduire à faire des essais, les tester, à partir du repérage des erreurs produire des ajustements … Il s'agit d'organiser les données sans forcément en laisser toutes les traces.
- **raisonner** : résoudre un problème de « compte est bon » nécessite de mettre en place des étapes de calculs, ces étapes écrites constituent la partie visible des opérations mentales effectuées suite à l'analyse des contraintes du problème posé, des nombres proposés , des combinaisons possibles entre eux par le biais des opérations : compréhension de l'énoncé, recherche, production et rédaction d'une solution font appel au raisonnement.
- **calculer** : le « compte est bon » est typiquement une activité nécessitant d'organiser différents calculs, avec contraintes. La forme des calculs n'est pas imposée mais les étapes doivent apparaitre.
- **communiquer** : il s'agit d'écrire les étapes de calculs pour rendre explicite la procédure utilisée (la communiquer) ; le type de communication est implicitement imposé par le contexte de la situation « compte est bon ».

Les deux autres compétences sont moins développées dans cette activité :

- **représenter** : pas de représentation autre que celles des calculs : le seul choix consiste à écrire les calculs en ligne et en colonne, pas de représentation des quantités, par exemple.
- **modéliser :** l'activité étant purement calculatoire, la modélisation n'est pas une compétence visée.

# GROUPEMENT 5 – mai 2017

## PREMIÈRE PARTIE : un problème de boîte

## PARTIE A : étude d'un cas particulier

### 1) Calcul du volume de la boîte

La boîte obtenue forme un pavé droit, ou encore un prisme droit, à base carrée.
Sa base est un carré dont la longueur du côté est : $25 \text{ cm} - 2 \times 2 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$ et dont l'aire est : $(21 \text{ cm})^2 = 441 \text{ cm}^2$
Sa hauteur est 2 cm.

**Son volume est donc égal à :** $V = Aire(base) \times hauteur = 441 \text{ cm}^2 \times 2 \text{ cm} = \mathbf{882\ cm^3}$

### 2) Aire de la surface de carton

*Méthode 1 : par soustraction d'aires*

L'aire $A$ de la surface de carton utilisée s'obtient en enlevant quatre carrés de 2 cm de longueur de côté au carré initial de 25 cm de longueur de côté.
D'où $A = (25 \text{ cm})^2 - 4 \times (2 \text{ cm})^2 = 625 \text{ cm}^2 - 4 \times 4 \text{ cm}^2 = 625 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = \mathbf{609\ cm^2}$.

*Méthode 2 : par addition d'aires*

Les quatre bords de la boîte ABFE, BCGF, CDHG et DAEF étant superposables, l'aire $A$ de la surface de carton utilisée s'obtient en ajoutant à l'aire de la base, le quadruple de l'aire de l'un de ces bords, par exemple ABFE. Ce dernier est un rectangle de longueur 21 cm et de largeur 2 cm.
L'aire $A$ de la surface de carton utilisée est donc :
$A = 441 \text{ cm}^2 + 4 \times 21 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 441 \text{ cm}^2 + 4 \times 42 \text{ cm}^2 = 441 \text{ cm}^2 + 168 \text{ cm}^2 = \mathbf{609\ cm^2}$.

## PARTIE B : étude du cas général

### 1) Valeurs possibles de $x$

$x$ est une longueur, sa mesure (quelle que soit l'unité choisie) est donc un nombre réel positif.
Par ailleurs, puisque l'on doit pouvoir rabattre deux bords à partir d'un même côté du carré initial, le double de la longueur $x$ doit être inférieur à 25 cm.

**Ainsi la longueur $x$ est comprise entre 0 cm et 12,5 cm.**

*Remarque :*

*L'énoncé cultive une certaine ambiguïté entre la longueur et sa mesure. La phrase « On note x la longueur…. » semble indiquer que la lettre x désigne une longueur (c'est-à-dire une grandeur), mais dans la suite de l'énoncé il s'agit en fait de sa mesure exprimée en centimètres. Il aurait plus correct d'écrire : « On note x la mesure, exprimée en centimètres, de la longueur du côté du carré enlevé…. ». Dans la suite de l'énoncé on considèrera, afin de simplifier l'écriture des calculs, que x, $V(x)$ … désignent des mesures dans les unités adéquates et sont donc des nombres.*

### 2) Expression du volume $V$ en fonction de $x$

Comme déjà indiqué dans la partie A, le volume de la boîte est celui d'un pavé droit, ou encore d'un prisme droit, de base carrée.
Sa base est un carré de côté : $25 - 2x$ et d'aire : $(25 - 2x)^2$.
Sa hauteur est égale à : $x$.

**Son volume est donc égal à :** $\boldsymbol{V}(x) = Aire(base) \times hauteur = (25 - 2x)^2 \times x = \boldsymbol{x(25 - 2x)^2}$.

## 3) Expression de l'aire de la surface de carton en fonction de $x$

*Méthode 1 : par soustraction d'aires*

L'aire $A$ de la surface de carton utilisée s'obtient en enlevant quatre carrés de $x$ cm de longueur de côté (les chutes) au carré initial de longueur de côté 25 cm.

D'où $\boldsymbol{A(x)} = 25^2 - 4 \times x^2 = \mathbf{625 - 4}\boldsymbol{x^2}$.

*Méthode 2 : par addition d'aires*

Comme déjà indiqué dans la partie A, les quatre bords de la boîte ABFE, BCGF, CDHG et DAEF sont superposables, et l'aire $A(x)$ de la surface de carton utilisée s'obtient en ajoutant à l'aire de la base, le quadruple de l'aire de l'un de ces bords, par exemple ABFE.
Celui-ci est ici un rectangle de longueur : $25 - 2x$ et de largeur : $x$.
L'aire $A$ de la surface de carton utilisée est donc :

$A(x) = (25 - 2x)^2 + 4 \times (25 - 2x) \times x$
$A(x) = 625 - 100x + 4x^2 + 4 \times (25x - 2x^2)$ en développant l'expression $A(x)$
$A(x) = 625 - 100x + 4x^2 + 100x - 8x^2$
$A(x) = 625 - 4x^2$

ou, en commençant par factoriser $A(x)$

$A(x) = (25 - 2x)^2 + 4 \times (25 - 2x) \times x$
$A(x) = (25 - 2x)(25 - 2x) + 4x)$
$A(x) = (25 - 2x)(25 + 2x)$
$\boldsymbol{A(x) = 625 - 4x^2}$.

## 4) Vérification des résultats de la partie A

Dans la partie A, on a étudié le cas particulier où $x = 2$
En reprenant les formules trouvées aux questions 2) et 3) de cette partie, on retrouve :

$V(2) = 2 \times (25 - 2 \times 2)^2 = 2 \times 21^2 = 2 \times 441 = 882$ (mesure en cm³)

et $A(2) = 625 - 4 \times 2^2 = 625 - 4 \times 4 = 625 - 16 = 609$ (mesure en cm²).

## 5) a) Formule entrée en B2

La colonne B donne la valeur de $V(x)$ en fonction de la valeur de $x$ correspondante dans la colonne A.
L'expression algébrique de cette fonction a été obtenue à la question 2 de la partie B.
Il suffit de la traduire.
Ainsi, la formule suivante, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, donne l'ensemble des valeurs de la colonne B : **= A2*(25-2*A2)^2**
Autre solution évitant le recours à la notation avec exposant : **= A2*(25-2*A2)*(25-2*A2)**.

## 5) b) Existence et encadrement des solutions

On utilise la relation : 1 L = 1 000 cm³
La question est donc de savoir s'il existe des valeurs de $x$ pour lesquelles $V(x) = 1000$ (mesure en cm³).
Comme on a $V(2) = 882$, qui est inférieur à 1 000 et $V(3) = 1083$, qui est supérieur à 1000, on peut en déduire qu'il existe une première solution comprise entre 2 cm et 3 cm.
Par ailleurs, on a $V(6) = 1014$, qui est supérieur à 1000 et $V(7) = 847$, qui est inférieur à 1000, on peut en déduire qu'il existe une seconde solution comprise entre 6 cm et 7 cm.

**Ainsi le problème « obtenir une boîte de volume égal à 1 litre » possède deux solutions $x_1$ et $x_2$ telles que :**
**2 cm $< x_1 < 3\ cm$ et 6 cm $< x_2 < 7\ cm$.**

*Remarque :*

*Les affirmations précédentes s'appuient sur la continuité de la fonction V (notion hors du programme du collège). C'est cette propriété qui permet d'affirmer que si la fonction prend deux valeurs distinctes, alors elle prend toutes les valeurs qui leur sont intermédiaires.*
*Attention, dans le cadre d'algorithmes qui porteraient sur des grandeurs discrètes (par exemple avec uniquement des valeurs entières) cette propriété ne serait plus valable.*

## 5) c) Amélioration de l'encadrement

La démarche la plus simple à suivre pour affiner les encadrements précédents et en obtenir d'amplitude 0,1 cm consiste à :

- rentrer dans une première colonne des valeurs de $x$ avec un pas de 0,1 (c'est-à-dire de 0,1 en 0,1) :
    - en partant de 2 et en allant jusqu'à 3 pour encadrer $x_1$ ;
    - en partant de 6 et en allant jusqu'à 7 pour encadrer $x_2$.
- dans la colonne voisine, à l'aide d'une formule analogue à celle obtenue à la question 5) a), faire calculer par le tableur les valeurs correspondantes de $V(x)$
- pour encadrer $x_1$, trouver les deux valeurs successives de $x$ pour lesquelles $V(x)$ passe d'une valeur inférieure à 1 000 à une valeur qui lui est supérieure ; et respectivement supérieure et inférieure pour encadrer $x_2$.

*Remarque :*

*En répétant cette démarche, on peut obtenir des encadrements d'amplitude 0,01, puis 0,001, etc. Cette itération conduit à des résultats aussi précis que souhaité, en restant toutefois dans la limite des capacités de calcul du tableur.*

*Complément :*

À titre d'illustration, voici ce que donne la mise en œuvre de cette démarche pour obtenir des valeurs approchées au centième près des deux solutions.

F2 $f_x$ =E2*(25-2*E2)^2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | V(x) | | | x | V(x) | x | V(x) | |
| 2 | 0 | 882 | | | 2 | 882 | | | |
| 3 | 1 | 529 | | | 2,1 | 908,544 | | | |
| 4 | 2 | 882 | | | 2,2 | 933,592 | | | |
| 5 | 3 | 1083 | | | 2,3 | 957,168 | | | |
| 6 | 4 | 1156 | | Encadrement | 2,4 | 979,296 | | | |
| 7 | 5 | 1125 | | de | 2,5 | 1000 | | | |
| 8 | 6 | 1014 | | x1 | 2,6 | 1019,304 | | | |
| 9 | 7 | 847 | | | 2,7 | 1037,232 | | | |
| 10 | 8 | 648 | | | 2,8 | 1053,808 | | | |
| 11 | 9 | 441 | | | 2,9 | 1069,056 | | | |
| 12 | 10 | 250 | | | 3 | 1083 | | | |
| 13 | 11 | 99 | | | 6 | 1014 | 6,00 | 1014 | |
| 14 | 12 | 12 | | | 6,1 | 999,424 | 6,01 | 1012,5672 | |
| 15 | 12,5 | 0 | | | 6,2 | 984,312 | 6,02 | 1011,12883 | |
| 16 | | | | | 6,3 | 968,688 | 6,03 | 1009,68491 | |
| 17 | | | | Encadrement | 6,4 | 952,576 | 6,04 | 1008,23546 | |
| 18 | | | | de | 6,5 | 936 | 6,05 | 1006,7805 | |
| 19 | | | | x2 | 6,6 | 918,984 | 6,06 | 1005,32006 | |
| 20 | | | | | 6,7 | 901,552 | 6,07 | 1003,85417 | |
| 21 | | | | | 6,8 | 883,728 | 6,08 | 1002,38285 | |
| 22 | | | | | 6,9 | 865,536 | 6,09 | 1000,90612 | |
| 23 | | | | | 7 | 847 | 6,10 | 999,424 | |
| 24 | | | | | | | | | |

Pour $x_1$, on est dans un cas particulier puisque le calcul effectué par le tableur suggère que 2,5 en est la valeur exacte (et pas seulement une valeur approchée à 0,1 près) ; ce que le calcul confirme.

Pour $x_2$, les calculs effectués par le tableur selon cette démarche conduisent successivement aux encadrements en cm : $6 < x_2 < 6{,}1$ puis $6{,}09 < x_2 < 6{,}10$ , et l'on pourrait poursuivre pour affiner l'encadrement.

## 6) a) Lecture graphique du volume obtenu à la question 1 de la partie A

Ce graphique est celui de la courbe représentative du volume de la boîte (placé en ordonnée) en fonction de la longueur du côté du carré de base (placé en abscisse).

Dans la question 1 de la partie A, on étudie le cas particulier où $x = 2\ cm$

Pour obtenir, par lecture graphique, une valeur approchée de $V(2)$, il faut :

- tracer la droite d'équation : $x = 2$ , qui est une droite parallèle à l'axe des y ;
- déterminer son point d'intersection avec la courbe représentative du volume ;

- lire ensuite sur l'axe des y, l'ordonnée de ce point d'intersection, dont la valeur est égale à $V(2)$.

La précision du graphique permet d'affirmer que la valeur de V(2) est comprise entre 850 cm³ et 900 cm³. En s'avançant un peu, on peut penser que cette valeur est légèrement plus proche de 900 cm³ que 850 cm³, mais il est difficile d'aller au-delà.

### 6) b) Lecture graphique du volume maximal

Il s'agit de déterminer le point de la courbe représentative ayant la plus grande ordonnée.
C'est cette ordonnée qui correspond au volume maximal qu'il est possible d'obtenir.
L'abscisse de ce point donne, pour sa part, la valeur de la longueur du côté du carré qui conduit à ce volume maximal.

La précision du graphique permet d'affirmer que le volume maximal est compris entre 1150 cm³ et 1200 cm³ (en étant sensiblement plus proche de 1150 cm³ que de 1200 cm³) et que la valeur de $x$ pour laquelle ce maximum est atteint est comprise entre 4 cm et 4,5 cm.

### 6) c) Lecture graphique des valeurs pour lesquelles la boîte a pour volume 1 L

Rappelons qu'un volume de 1 L correspond à 1 000 cm³.
Il s'agit donc ici de :

- tracer la droite d'équation $y = 1000$ (il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des x) ;
- déterminer ses points d'intersection avec la courbe représentative du volume ; il y en a deux ;
- lire aussi que précisément que possible (éventuellement en s'aidant de mesures) les abscisses $x_1$ et $x_2$ de ces deux points d'intersection.

La droite d'équation $y = 1000$ coupe une première fois la courbe au point de coordonnées (2,5 ; 1000).
La valeur approchée au millimètre près de $x_1$ est donc 2,5 cm (ou 25 mm).
Cette même droite coupe ensuite la courbe en un point dont l'abscisse est comprise entre 6 cm et 6,5 cm.
L'écart entre ce point d'intersection et le point de coordonnées (6 ; 1000) (qui n'est pas sur la courbe) rapporté à l'écart entre deux graduations successives en demi-centimètres permet de proposer 6,1 cm (ou 61 mm) comme valeur approchée au millimètre près de $x_2$.

## PARTIE C : couvercle de la boîte

### 1) Hauteur JE de la pyramide

*Méthode 1 : en raisonnant algébriquement à partir des formules*

La boite et son couvercle sont respectivement un prisme et une pyramide de même base (ABCD et EFGH sont superposables) et dont les hauteurs sont respectivement AE = 6 cm et JE.
Le volume de la boîte est égal à $V(boite) = base \times hauteur = Aire(\text{EFGH}) \times \text{AE}$.
Le volume du couvercle est égal à $V(couvercle) = \dfrac{1}{3} \times base \times hauteur = \dfrac{1}{3} \times Aire(\text{EFGH}) \times \text{JE}$.
Ces deux volumes sont donc égaux si $\dfrac{1}{3} \times \text{JE} = \text{AE}$
c'est-à-dire si $\text{JE} = 3 \times \text{AE} = 3 \times 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$.

*Remarque :*

***De façon générale, le raisonnement précédent montre qu'un prisme étant donné, pour qu'une pyramide ayant même base ait aussi même volume que ce prisme, il faut que sa hauteur soit égale au triple de la hauteur du prisme.***

*Méthode 2 : À l'aide de calculs numériques portant sur chacun des deux volumes*

Le volume de la boîte s'obtient :

- soit en utilisant la formule générale du volume d'un pavé droit :
  La boîte a pour base un carré de longueur du côté $25 \text{ cm} - 2 \times 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ et pour hauteur 6 cm.
  Son volume est $V(boîte) = 13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 1014 \text{ cm}^3$.
- soit en utilisant la formule algébrique obtenue à la question 2 de la partie B.
  On est dans le cas où $x = 6$ cm, la mesure en cm³ du volume de la boîte est donc :
  $V(6) = 6 \times (25 - 2 \times 6)^2 = 6 \times 13^2 = 6 \times 169 = 1014$ .

- soit tout simplement par lecture du tableau de valeurs de la question 5 de la partie B.

Le couvercle est une pyramide dont la base carrée EFGH a pour aire $13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$
L'expression de son volume en fonction de la hauteur JE est donc :
$V(couvercle) = \frac{1}{3} \times 169 \text{ cm}^2 \times \text{JE}$
Pour que les deux volumes soient égaux, on doit avoir :

$$\frac{1}{3} \times 169 \text{ cm}^2 \times \text{JE} = 1014 \text{ cm}^3$$

d'où $169 \text{ cm}^2 \times \text{JE} = 3 \times 1014 \text{ cm}^3 = 3042 \text{ cm}^3$

et finalement $\text{JE} = \frac{3042 \text{ cm}^3}{169 \text{ cm}^2} = 18 \text{ cm}.$

**En conclusion, pour que le couvercle ait même volume que la boîte, l'artisan pâtissier doit choisir une hauteur de 18 cm pour JE.**

## 2) Patron de la pyramide

### Nombre et nature des faces

Le couvercle EFGHJ est une pyramide à base carrée.
C'est un solide qui possède 5 faces :

- la face EFGH est un carré dont la longueur du côté est égale à $25 \text{ cm} - 2 \times 6 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$.
- les 4 autres faces sont des triangles rectangles :
  - J, E et A étant alignés, la droite (JE) est orthogonale au plan (EFGH). Elle est donc perpendiculaire à la fois à la droite (EF) et à la droite(EH).
    Les faces JEF et JEH sont deux triangles rectangles en E dont les côtés de l'angle droit mesurent 8 cm (pour JE) et 13 cm (pour EF et EH), et sont superposables.
  - La droite (GF) est orthogonale au plan (EFBA) auquel appartient la droite (JF). Ainsi les droites (GF) et (JF) sont perpendiculaires et le triangle GFJ est un triangle rectangle en F.
    De même, la droite (GH) est orthogonale au plan (HEAD) auquel appartient la droite(JH). Ainsi les droites (GH) et (JH) sont perpendiculaires et le triangle GHJ est un triangle rectangle en H.
    Notons que les triangles GFJ et GHJ sont superposables : ils ont chacun un angle droit, leurs côtés [GF] et [GH] sont chacun égaux à 13 cm, et leurs seconds côtés de l'angle droit, [FJ] et [HJ], sont respectivement les hypoténuses des triangles EFJ et EHJ dont on a vu qu'ils étaient eux-mêmes superposables.

### Construction d'un patron

*Remarque :*

*Comme tout solide, une pyramide à base carrée possède plusieurs patrons. Nous proposons ici un des patrons qui est souvent choisi.*

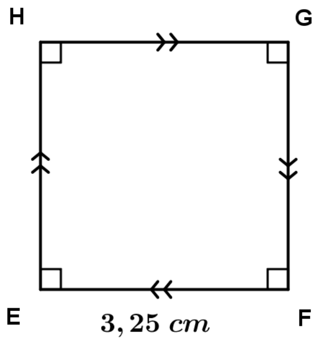
Pour obtenir ce patron, nous procéderons comme si nous dépliions chaque face latérale en la faisant pivoter autour du côté de la base à laquelle elle est jointe jusqu'à l'amener dans le plan de cette base.
Les quatre faces triangulaires auront chacune un côté commun avec la base carrée et pour chacune, le troisième sommet correspondra au sommet J de la pyramide.
Nous noterons $J_1$, $J_2$, $J_3$ et $J_4$, ces 4 sommets des faces triangulaires du patron correspondants au sommet J de la pyramide.

*Remarque :*

*Les figures de cette question ne sont pas obligatoirement aux bonnes dimensions à cause des contraintes d'édition, mais nous avons fait en sorte qu'elle soit toutes à la même échelle.*

*Étape 1 : tracé à l'échelle $\frac{1}{4}$ de la face carré EFGH.*

Dans la réalité, le carré a un côté de longueur 13 cm (vu précédemment).
Sur cette représentation à l'échelle $\frac{1}{4}$, la longueur du côté du carré doit être de $\frac{13 \text{ cm}}{4} = 3{,}25 \text{ cm}$.

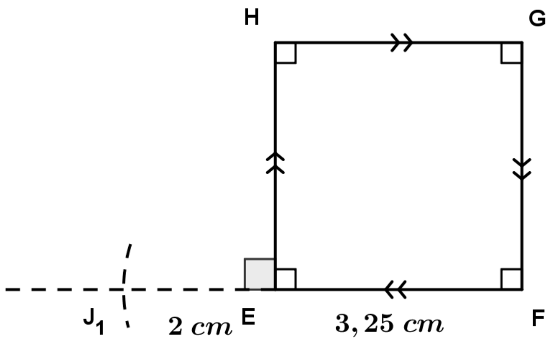



*Étape 2 : tracé de la face $HEJ_1$*

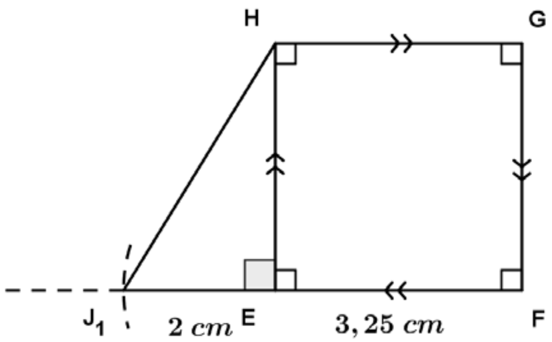
Étape 2a : placement du point $J_1$

On sait d'une part que l'angle $\widehat{HEJ_1}$ est droit (les droites (HE) et (EJ) sont perpendiculaires) et d'autre part que, sur le patron à l'échelle $\frac{1}{4}$, on a :

$$EJ_1 = \frac{1}{4} \times EJ = \frac{1}{4} \times 8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

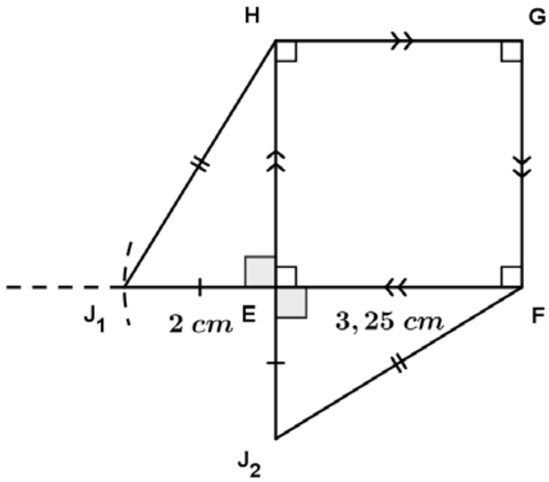



Étape 2b : tracé la face $EHJ_1$ en joignant H et $J_1$




*Étape 3 : tracé de la face $EFJ_2$*

On procède comme pour la face précédente mais cette fois-ci à partir du côté EF de la base.
À noter que pour la longueur $EJ_2$, on peut utiliser soit la règle graduée pour prendre la longueur 2 cm, soit le compas pour reporter la longueur $EJ_1$ puisque $EJ_2 = EJ_1$.
On codera aussi sur le graphique l'égalité entre les segments $J_1H$ et $J_2F$ puisque les triangles $J_1HE$ et $J_2FE$ sont superposables.

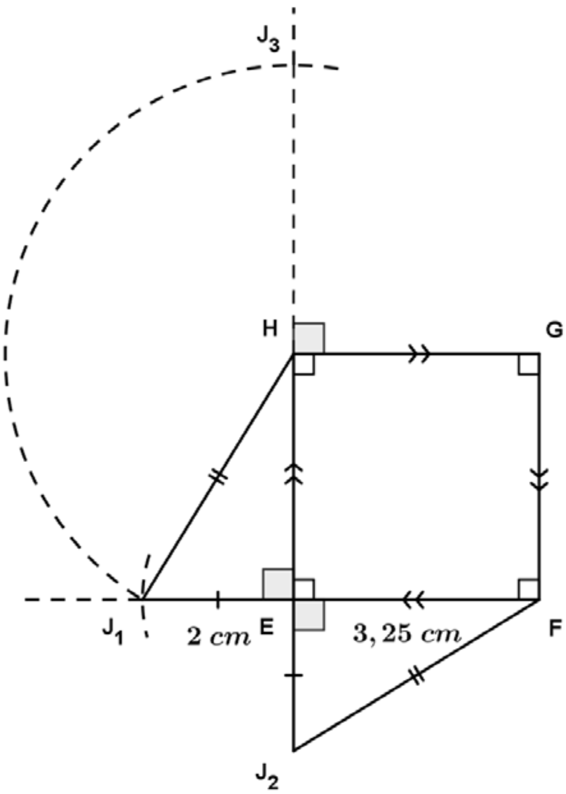



*Étape 4 : tracé de la face $GHJ_3$*

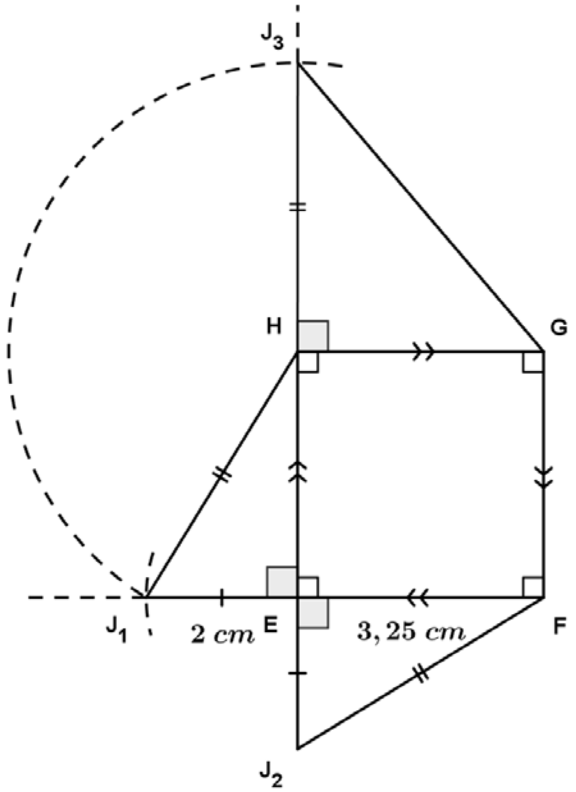
Étape 4a : placement du point $J_3$

On sait d'une part, que l'angle $\widehat{GHJ_3}$ est droit (les droites (HE) et (EJ)sont perpendiculaires) et d'autre part, que les segments $HJ_1$ et $HJ_3$ sont égaux puisqu'ils correspondent tous deux à une même arête du solide.

On prolonge donc la droite (EH) pour avoir la perpendiculaire à (GH) passant par H, puis on trace un arc du cercle de centre H et passant par $J_1$ pour reporter la longueur $HJ_1$. Leur intersection est $J_3$.

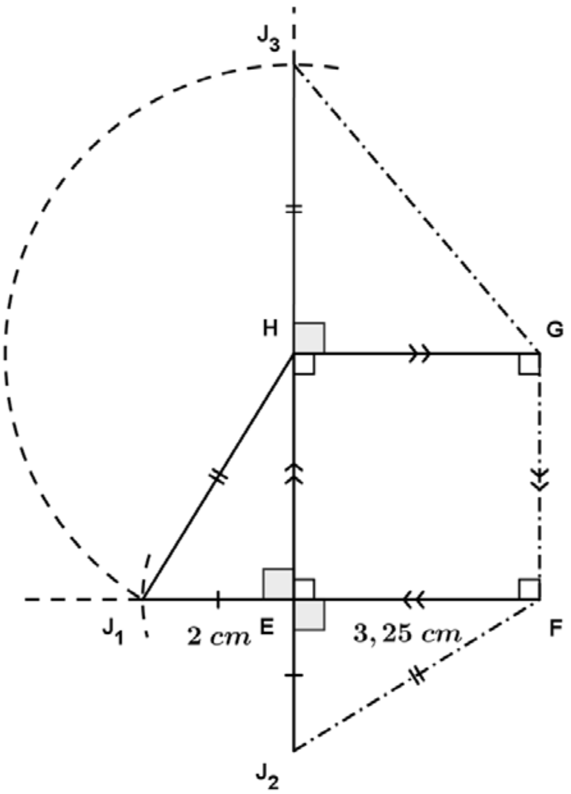


Étape 4b : tracé de la face $GHJ_3$ en joignant G et $J_3$




*Étape 5 : tracé de la face $GFJ_4$*

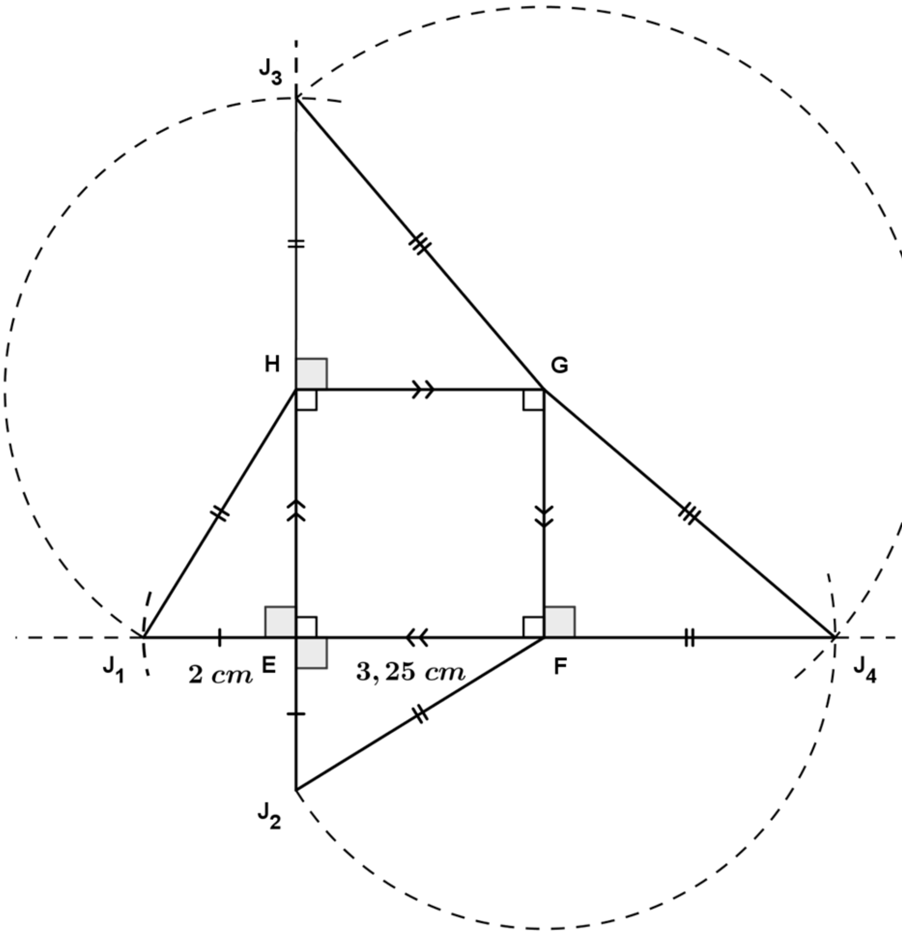
Remarquons que nous connaissons graphiquement les longueurs des trois côtés de cette face (elles sont en pointillés ci-dessous)




On dispose donc sur $J_4$ des trois informations suivantes :

- $GJ_4 = GJ_3$ , car ces deux segments correspondent à une même arête du solide ;
- $FJ_4 = FJ_2$, pour la même raison ;
- l'angle $\widehat{GFJ_4}$ est droit puisque le triangle est rectangle.

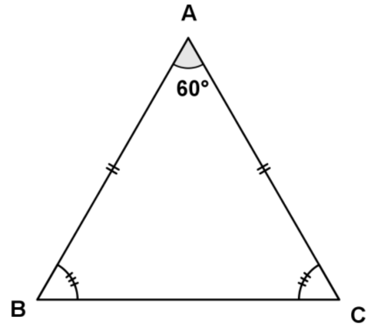
Deux de ces renseignements suffisent pour placer $J_4$, le troisième permet de vérifier la validité de l'ensemble de la construction.




## PARTIE D : décoration de la boite

### 1) Justification de la nature du triangle ABC

Comme AB et AC sont deux rayons d'un même cercle, ils sont égaux et l'on peut déjà affirmer que ABC est un triangle isocèle en A.
Par ailleurs, comme B et C sont deux sommets consécutifs d'un hexagone régulier de centre A, la mesure de l'angle au centre $\widehat{BAC}$ est égal à $\frac{1}{6}$ de tour, c'est-à-dire à $\frac{360°}{6} = 60°$.
On est donc dans la situation suivante :



Pour conclure, on utilise la propriété suivante :

« un triangle isocèle ayant un angle de mesure 60° est un triangle équilatéral »

- soit en la citant comme un résultat connu ;
- soit en la redémontrant comme ci-dessous :

Comme le triangle ABC est isocèle en A, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.
Comme la mesure de la somme des angles de tout triangle vaut 180°, la mesure de la somme de ces deux angles vaut $180° - 60° = 120°$ et la mesure de chacun d'eux est donc égal à 60°.

Le triangle ABC a donc trois angles égaux à 60°, **il est donc équilatéra**l.

## 2) Reproduction en vraie grandeur de la figure

Notons qu'ici tous les instruments de géométrie et de mesure sont autorisés.
Notons aussi que les propriétés utilisées pour effectuer cette reproduction n'ont pas à être justifiées.

Même si le programme de construction n'est pas demandé, nous en proposons deux parmi le grand nombre de chemins qu'il était possible de suivre pour réaliser cette reproduction de figure.
Dans le premier programme, on part du carré ; dans le second, on s'appuie au départ sur des cercles.

*Construction n°1 :*

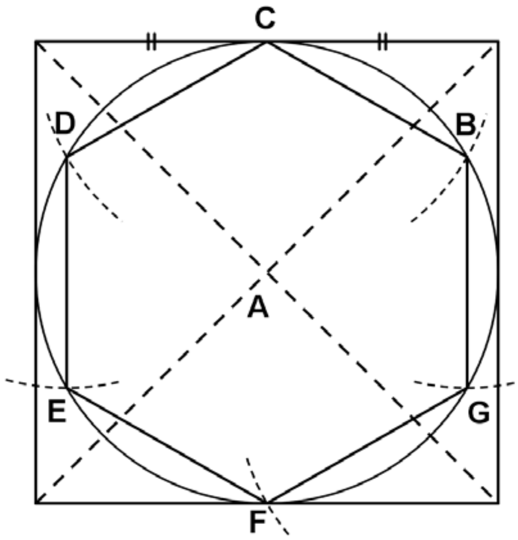
- Tracer un carré de 6 cm de longueur de côté.
- Placer le milieu C de l'un des côtés du carré (en traçant sa médiatrice ou tout simplement en mesurant).
- Tracer les deux diagonales du carré. On note A leur point d'intersection.
- Tracer le cercle de centre A et de rayon AC (ce rayon est 3 cm) ; veiller à être précis et à assurer la tangence entre ce cercle et le carré initial.
- Tracer le cercle de centre C et de rayon CA (c'est-à-dire encore 3 cm). Il coupe le premier cercle en deux points B et D qui sont des sommets de l'hexagone.
- En conservant le même rayon, tracer les cercles de centre B et D. Ces deux cercles recoupent le cercle initial respectivement en G et E.
- Toujours avec le même rayon, tracer le cercle de centre G. Il recoupe le cercle initial en F.
- Tracer l'hexagone BCDEFG
- Eventuellement effacer les traits de construction.

*Construction n°2 :*

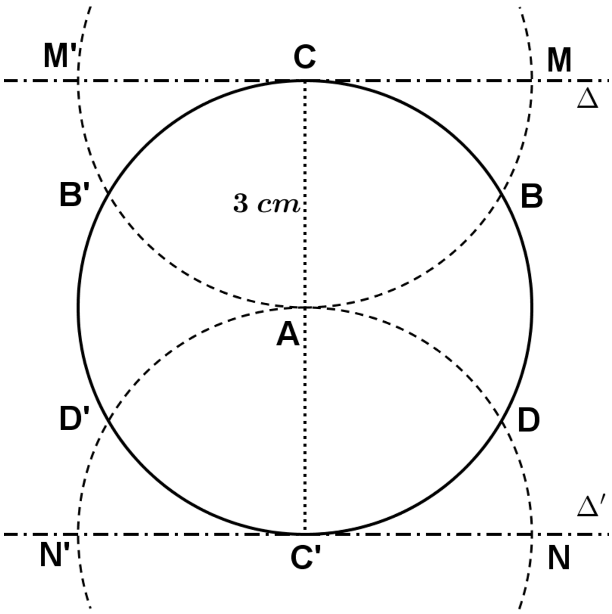
- Tracer le cercle de centre A et de rayon 3 cm.
- Placer deux points C et C' diamétralement opposés sur ce premier cercle.
- Tracer les droites $\Delta$ et $\Delta'$ perpendiculaires respectivement en C et C' au diamètre [CC'].
- Tracer le cercle de centre C passant par A. Il coupe le cercle initial en deux points B et B' et la droite $\Delta$ en deux points M et M' (situés à 3 cm de part et d'autre de C) de telle façon que M, B, B' et M' sont placés dans cet ordre sur le cercle.
- Tracer le cercle de centre C' et passant par A. Il coupe le cercle initial en deux points D et D' et coupe la droite $\Delta'$ en deux points N et N' (situés à 3 cm de part et d'autre de C') de telle façon que N, D, D' et N' sont placés dans cet ordre sur le cercle et que sur le cercle initial D soit situé entre D et C'.
- Tracer l'hexagone régulier BCB'D'C'D.
- Tracer le carré MM'N'N.
- Éventuellement effacer les traits de construction.

On trouvera sur la page suivante les figures obtenues avant l'effacement des traits de construction pour le premier cas, avant l'effacement et le tracé du carré et de l'hexagone dans le second.

*Construction 1*




*Construction 2*




## 3) Calcul de l'aire de l'hexagone

L'hexagone peut se décomposer en six triangles superposables au triangle ABC.
Son aire est donc égale à six fois celle du triangle ABC, qu'il s'agit donc de déterminer.

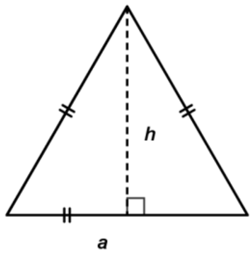
De façon générale, l'aire d'un triangle de base $b$ et de hauteur $h$ vérifie :

$$Aire\ (triangle) = \frac{1}{2} b \times h.$$

*Méthode 1 : en utilisant, si on la connait, l'expression de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.*

Détermination de l'aire du triangle ABC.

Dans un triangle équilatéral de côté $a$, sa hauteur $h$ vérifie : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.



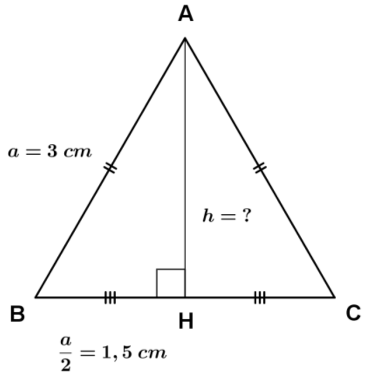

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ainsi l'aire de ce triangle équilatéral est : $Aire = \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Ici le côté $a$ du triangle équilatéral ABC est égal au rayon du cercle inscrit dans le carré de 6 cm de côté, donc à la moitié de la mesure de la longueur du côté de ce carré, c'est-à-dire à 3 cm.
On a donc : $Aire(\text{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times\ (3\text{ cm})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$.

Détermination de l'aire de l'hexagone
On a : $Aire(Hexagone) = 6 \times Aire(\text{ABC})$
$Aire(Hexagone) = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2 = \frac{54\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$ (c'est la valeur exacte demandée).
Dans la mesure où $\frac{27}{2}$ est un nombre décimal, on pouvait aussi donner $13{,}5\sqrt{3}\text{ cm}^2$ comme valeur exacte.

*Méthode 2 : en calculant la hauteur du triangle équilatéral ABC*

Détermination de l'aire du triangle ABC
Notons H le milieu de [BC]. Le triangle ABC étant équilatéral, H est aussi le pied de la hauteur issue de A. Nous avons donc la situation suivante, dans laquelle on connait AB = 3 cm et BH = 1,5 cm et où il s'agit de déterminer la hauteur AH :




Le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle ABH rectangle en H donne :
$$\text{AH}^2 + \text{BH}^2 = \text{AB}^2 \text{ d'où } \text{AH}^2 = \text{AB}^2 - \text{BH}^2 = 3^2 - 1{,}5^2 = 9 - 2{,}25 = 6{,}75$$
On obtient $\text{AH} = \sqrt{6{,}75}\text{ cm}$
puis $Aire(\text{ABC}) = \text{BC} \times \text{AH} = 1{,}5\text{ cm} \times \sqrt{6{,}75}\text{ cm} = 1{,}5 \times \sqrt{6{,}75}\text{ cm}^2$.

Détermination de l'aire de l'hexagone
On a : $Aire(Hexagone) = 6 \times Aire(\text{ABC})$
$Aire(Hexagone) = 6 \times 1{,}5 \times \sqrt{6{,}75}\text{ cm}^2 = 9\sqrt{6{,}75}\text{ cm}^2$

*Remarque :*
*On peut vérifier que les valeurs exactes obtenues par ces deux méthodes sont bien égales à l'aide d'un calcul portant sur les racines carrées :*

$$9\sqrt{6{,}75} = 9\sqrt{\frac{675}{100}} = 9\sqrt{\frac{27 \times 25}{100}} = 9\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{9}{2}\sqrt{27} = \frac{9}{2}\sqrt{9 \times 3} = \frac{9}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{27}{2}\sqrt{3}.$$

Arrondi au $mm^2$

Rappelons que : $1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$. L'arrondi au $mm^2$ s'obtient donc à partir d'une valeur approchée en $cm^2$ en conservant les deux premiers chiffres après la virgule.
À partir de la valeur approchée 23,3826….. $cm^2$, on pouvait proposer comme arrondi au $mm^2$ de l'aire de l'hexagone soit 23,38 $cm^2$, soit 2 338 $mm^2$.

*Remarque :*

*Pour contrôler ce calcul, on pouvait comparer ce résultat à l'aire du carré (36 $cm^2$) ou encore à celle du disque ($\pi \times (3\ cm)^2 = 9\pi\ cm^2 \approx 28{,}27\ cm^2$) dans lesquels cet hexagone est inscrit.*
*On obtient bien une valeur qui leur est inférieure, assez légèrement comme attendu dans le cas du disque.*

# DEUXIÈME PARTIE

## EXERCICE 1

### 1) Calcul du prix soldé

Suite à la réduction de 30 %, le prix soldé en euros est égal à :

$$(1 - 0{,}30) \times 132\ € = 0{,}70 \times 132\ € = \mathbf{92{,}40\ €}.$$

### 2) Calcul du prix initial connaissant le prix soldé

Si le prix initial en euros vaut p, alors après une réduction de 30 % le prix devient :

$$0{,}70 \times p = 29{,}40\ € \quad \text{d'où } p = \frac{29{,}40\ €}{0{,}70} = \mathbf{42}\ €.$$

### 3) Fin de solde : réductions cumulées de 50 % ?

Une réduction de 30 % suivie d'une réduction supplémentaire de 20 % revient à multiplier le prix initial par le coefficient multiplicatif $(1 - 0{,}30) \times (1 - 0{,}20) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.

Ce coefficient multiplicatif de 0,56 est égal à (1 – 0,44) ; il correspond à une baisse cumulée de 44 %. L'annonce du propriétaire est donc **inexacte.**

### 4) Calcul du pourcentage de réduction après augmentation et solde

Une augmentation de 5 % suivie d'une réduction de 30 % revient à multiplier le prix initial par le coefficient multiplicatif $(1 + 0{,}05) \times (1 - 0{,}30) = 1{,}05 \times 0{,}7 = 0{,}735$
Ce coefficient multiplicatif de 0,735 est égal à (1 – 0,265).

Il correspond à un **pourcentage de réduction par rapport au prix initial de 26,5 %.**

## EXERCICE 2

*Remarque :*

*Ce qui caractérise un algorithme et le programme associé est l'importance de l'ordre des instructions dans l'écriture du texte. C'est pourquoi nous avons numéroté les lignes d'instruction ; dans l'exécution à la main, on exécute dans l'ordre des instructions (sauf instruction contraire de changement de ligne d'instruction, ce qui n'est pas le cas du programme étudié ici).*

### 1) Vérification du résultat 64 après avoir entré le nombre 7

Si on exécute « à la main », ligne après ligne, le programme, on obtient successivement :

- en ligne 2, on demande « donnez-moi un nombre impair » et on répond « 7 »
  alors la variable **réponse = 7** ;
- en ligne 3, **x = réponse = 7** ;
- en ligne 4, $\mathbf{y = réponse + 2 = 7 + 2 = 9}$ ;
- en ligne 5, après avoir calculé $x \times y + 1 = 7 \times 9 + 1 = 64$,

le programme affiche : « Le résultat est : 64 ».
**Le résultat obtenu est 64.**

## 2) Calcul du résultat lorsque 19 est le nombre de départ

Avec un raisonnement analogue en remplaçant 7 par 19, le résultat devient : $19 \times 21 + 1 = \mathbf{400.}$

## 3) Le résultat est toujours un carré et un multiple de 4

**Le résultat est toujours un carré**

Si l'on note x le nombre de départ, le résultat est : $x \times y + 1 = x \times (x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1$
Il s'agit alors de remarquer que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ donc **le résultat est bien toujours un carré**.

*Remarque :*
*Il ne suffit pas de le vérifier sur deux exemples ($64 = 8^2$ et $400 = 20^2$)*

**Le résultat est toujours un multiple de 4**

*Méthode 1 :*

Si x est un nombre impair, il existe un entier n tel que $x = 2n + 1$, et le résultat vaut :
$(x + 1)^2 = (2n + 1 + 1)^2 = (2n + 2)^2 = (2(n + 1))^2 = 2^2(n + 1)^2 = \mathbf{4(n + 1)^2}$
et **le résultat est donc bien un multiple de 4.**

*Méthode 2 :*

Si x est un nombre impair, alors $x + 1$ est un nombre pair et il existe un entier k tel que $x + 1 = 2k$, et le résultat vaut :
$(x + 1)^2 = (2k)^2 = \mathbf{4k^2}$
et **le résultat est donc bien un multiple de 4.**

**EXERCICE 3**

## 1) Détermination du nombre de tickets à 100 €

Si $x$ désigne le nombre de tickets à 100 €, le nombre total de tickets offerts est :
$x + 200 + 444 + 330 = x + 974$
La moyenne m des gains vaut, en euros :

$$\mathrm{m} = \frac{x \times 100 + 200 \times 0 + 444 \times 5 + 330 \times 10}{x + 974} = \frac{x \times 100 + 5520}{x + 974} = 8{,}12$$

$x$ vérifie donc l'équation : $x \times 100 + 5520 = (x + 974) \times 8{,}12$
d'où $100x + 5520 = 8{,}12x + 7908{,}88$
soit $(100 - 8{,}12)x = 7908{,}88 - 5520$
soit $91{,}88x = 2388{,}88$
d'où $x = \dfrac{2388{,}88}{91{,}88} = 26.$
**Il y a 26 tickets à 100 €.**

## 2) a) Nouvelle moyenne en remplaçant les tickets à 100 € par des tickets à 1000 €

La nouvelle moyenne des gains vaut :

$$\mathrm{m} = \frac{26 \times 1000\text{ €} + 200 \times 0\text{ €} + 444 \times 5\text{ €} + 330 \times 10\text{ €}}{26 + 974} = \frac{26000\text{ €} + 5520\text{ €}}{1000} = \frac{31520\text{ €}}{1000} = 31{,}52\text{ €}$$

**La moyenne des gains vaut 31,52 €.**

## 2) b) La médiane n'est pas modifiée

Il y a en tout $26 + 974$, soit 1000 tickets offerts. Si on ordonne de façon croissante les tickets suivant leurs valeurs en tant que des bons d'achat, alors la médiane M se situera entre la 500$^{e}$ et la 501$^{e}$ valeur.

Remplacer les bons d'achats à 100 € par des bons d'achat à 1000 € ne change que la valeur des vingt-six plus grandes valeurs de ces bons d'achat. Les valeurs du 500e et du 501e bon ne sont pas changées et la médiane restera donc identique.

## EXERCICE 4

### 1) Caractère insatisfaisant, du point de vue mathématique, des quatre propositions

*Remarque :*

*Il s'agit à chaque fois de distinguer, d'une part le nombre, et d'autre part ses différentes écritures possibles, en étant attentif à la diversité de celles-ci. On privilégiera en conséquence des formulations du type : « un nombre décimal peut s'écrire….. »*

**Omar :**

Un nombre décimal peut avoir une écriture finie avec une virgule mais :

- il peut aussi être représenté par une écriture fractionnaire (sans virgule), comme par exemple $\frac{3}{2}$ ;
- les nombres entiers, qui sont des nombres décimaux, ont une écriture décimale sans virgule (par exemple, comme 6).

*Remarque :*

*La proposition d'Omar traduit une représentation fréquente mais erronée des nombres décimaux. Selon cette représentation, le marqueur du caractère décimal d'un nombre serait la présence de la virgule : « il y a une virgule dans l'écriture, le nombre est décimal ; il n'y a pas de virgule, le nombre n'est pas décimal ». Cette représentation erronée est* à prévenir lorsque l'on conçoit des séquences d'enseignement…

**Lucie :**

Sa proposition sous-entend :

- d'une part, que les nombres entiers ne sont pas des nombres décimaux,
- d'autre part que tous les nombres situés entre deux entiers sont décimaux, ce qui est faux. Ainsi entre les entiers 1 et 2, on peut trouver des nombres rationnels non décimaux comme $\frac{4}{3}$ ou $\frac{13}{6}$, ou encore des nombres irrationnels correspondants par exemple à la mesure d'une longueur réelle non décimale (comme avec la diagonale d'un carré de côté de longueur 1, qui, bien que comprise entre les deux entiers 1 et 2, n'est pas décimale et vaut $\sqrt{2}$).

**Léo :**

Il faudrait définir ce que Léo entend par partie entière et partie décimale pour que la définition soit compréhensible et ensuite proposer sa définition en la modifiant : « un nombre qui peut s'écrire ... ».
Dans sa formulation, Léo laisse à penser que ce qu'il nomme « partie entière » et « partie décimale » sont deux parties d'une écriture (et non d'un nombre), la virgule servant graphiquement de séparateur entre ces deux parties indépendantes.

*Remarque :*

*La proposition de Léo tend à renforcer la conception erronée et fréquente selon laquelle un « décimal » est constitué de deux nombres distincts et sans véritable lien entre eux. C'est cette conception erronée qui conduit certains élèves à écrire : $10 \times 24{,}5 = 240{,}50$.*

**Aminata :**

Il faudrait avoir une formulation plus précise ; d'une part, en faisant apparaitre l'idée que l'écriture fractionnaire est l'une des écritures d'un nombre décimal (mais n'est pas la seule) et en élargissant les dénominateurs possibles à l'ensemble des puissances de 10.
On peut ainsi faire évoluer la proposition d'Aminata en « un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction avec un dénominateur pris parmi les nombres 1, 10, 100, 1000…

Exemples : $\frac{3}{10}$ ; $\frac{523}{100}$ ; $\frac{2\,642}{100\,000}$ ».

### 2) Phrase susceptible d'être institutionnalisée

La version précisée précédente d'Aminata convient. Cette proposition est dans l'esprit d'une introduction des nombres décimaux à partir des fractions décimales. Les fractions décimales étant une écriture (ou une désignation) d'un nombre décimal.
Conviendrait également une proposition basée sur l'écriture décimale (appelée aussi écriture à virgule dans les programmes) : un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres et éventuellement une virgule. Le défaut de cette proposition est qu'elle n'apporte pas beaucoup de sens mais en revanche, elle permet une reconnaissance efficace d'un nombre décimal si l'écriture est observable. Il est important, dès l'école primaire, de travailler en mathématiques le proverbe « l'habit ne fait pas le moine » en travaillant différentes représentations d'un même objet et différents ostensifs (par exemple, l'affirmation « 3,0 est l'écriture d'un nombre entier » est correcte).

## TROISIÈME PARTIE

**SITUATION 1**

### 1) Type de problèmes sur lequel porte cet exercice

Cette question est relativement floue. Nous faisons ici l'hypothèse qu'il s'agit de se référer à la classification des problèmes relevant des structures additives proposée par Gérard Vergnaud[1]. Cette dernière est parfois évoquée dans les guides du maître associés aux manuels des élèves et par exemple la ressource « Le moniteur de Mathématiques »[2] y fait spécifiquement référence.

Nous analysons le problème suivant en se référant à cette catégorisation :

« Jade monte au deuxième étage de la Tour Eiffel. Elle a déjà monté 568 marches. Il reste 136 marches. Combien de marches y a-t-il pour monter au deuxième étage ? »

Il peut être considéré comme un problème « Partie-Partie-Tout », une des parties étant le nombre de marches déjà montées, l'autre partie les marches restant à monter pour atteindre le deuxième étage. La question porte ainsi sur la recherche du tout.

Il peut également être interprété comme un problème de composition de transformations. Les deux transformations « monter des marches » sont des transformations positives et leurs valeurs sont connues. La question porte ici sur la recherche de la transformation totale.

### 2) Intérêt des schémas dans la procédure des élèves A et C

L'élève A représente la tour Eiffel et fait apparaître deux repères. La graduation du premier repère (en partant du bas) est associée au nombre de marches déjà montées depuis le sol (568). Le second auquel est associé le nombre 136 n'a pas le même statut. 136 représenterait l'écart entre les deux graduations et la question du problème porte sur le nombre associé à la seconde graduation. Il est donc difficile, à partir des informations portées sur son schéma, de savoir si ce schéma a un intérêt dans la procédure de l'élève et l'aide dans la reconnaissance de l'opération. L'élève A a reconnu un problème d'addition et a trouvé le résultat de l'addition en posant l'opération. L'élève A maîtrise cet algorithme : les calculs sont justes et les retenues placées au bon endroit en fonction de leur signification.

Pour l'élève C, la réponse au problème serait obtenue en effectuant une soustraction. Il n'a donc pas correctement interprété l'énoncé : il soustrait le nombre de marches restant à monter (136) au nombre de marches déjà montées (568).

---

[1] On pourra consulter son article dans la revue Petit x. Num. 22. p. 51-69 : Psychologie et développement cognitif et didactique des maths - un exemple : les structures additives.

[2] Le moniteur de mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes, Fichier pédagogique. Edition Nathan.

Pour trouver le résultat de sa soustraction, il représente d'abord la quantité 568 à l'aide du matériel préconisé dans la ressource « J'apprends les Maths », méthode Picbille[3]. Les cinq valises matérialisent les cinq centaines, les six boîtes, les six dizaines et les huit billes, les huit unités. À partir de cette collection organisée de cardinal 568, il retire, en les barrant, 136 (une valise, trois boîtes et six billes) et lit la réponse sur son schéma : quatre valises, trois boîtes et deux billes, soit 432. Il n'a donc pas recours à un calcul mais s'appuie sur le schéma pour trouver le résultat de la soustraction.

## 3) Analyse des productions des élèves B, C et D. Hypothèses sur l'origine de leurs erreurs

**Analyse de la production de l'élève B**

L'élève B se représente bien la situation et recourt à l'addition des deux données pour répondre à la question posée. Pour calculer la somme des deux nombres, il utilise la technique opératoire (addition posée), aligne correctement les chiffres de chaque nombre et effectue correctement les sommes partielles de nombres à un chiffre. Son erreur se situe au niveau du sens de la retenue.

Hypothèse sur l'origine de son erreur

Il est probable qu'il ait ajouté 8 unités et 6 unités et obtenu 14 puis placé au bon rang « 4 », chiffre des unités du résultat mais ensuite le « 1 » a été placé au rang des centaines et non des dizaines. L'élève peut penser que la « retenue » se place en haut de la colonne la plus à gauche.

**Analyse de la production de l'élève C**

L'analyse détaillée de la production de l'élève C a été faite à la question précédente

Hypothèse sur l'origine de son erreur

Son erreur se situe au niveau de la représentation qu'il se fait de la situation. Il soustrait le nombre de marches restant à monter du nombre de marches déjà montées. Le mot « reste » peut avoir influencé son choix.

*Remarque :*

*La présence du mot « reste » n'est pas due au hasard. Pour ce qui concerne les problèmes du champ additif (c'est-à-dire se résolvant à l'aide d'une addition ou d'une soustraction), les concepteurs de la banque outil Eduscol ont volontairement introduit des exercices pour lesquels la sémantique de l'énoncé n'est pas en cohérence avec l'opération mathématique à effectuer.*

**Analyse de la production de l'élève D**

Comme l'élève B, l'élève D se représente bien la situation et recourt à l'addition des deux données pour répondre à la question posée. Pour calculer la somme des deux nombres, il utilise la technique opératoire (addition posée), aligne correctement les chiffres de chaque nombre et effectue correctement les sommes partielles de nombres à un chiffre. Son erreur se situe au niveau de la somme des unités qui dépasse 9 : il écrit donc « 14 » nombre à deux chiffres au rang des unités…

Hypothèse sur l'origine de son erreur

Il ne semble pas maîtriser la technique opératoire de l'addition, voire la numération lorsqu'il s'agit de considérer 14 unités comme 1 dizaine et 4 unités.

## 4) Aides à proposer

### 4) a) À l'élève C pour qu'il comprenne mieux la situation

Plusieurs pistes sont envisageables, nous en citons quelques unes :

- Il serait possible de repartir de sa réponse « 432 » pour que l'élève la mette en lien avec les autres données et le contexte de l'énoncé en précisant ce que désigne chacun des nombres.

[3] J'apprends les maths CP avec Picbille. Edition Retz. 2016.

- Il est possible de demander à l'élève C de reformuler le problème avec d'autres mots et ainsi l'amener à utiliser un lexique du registre de l'addition.

- Il est envisageable de lui proposer le même problème à résoudre (toujours des escaliers à monter mais pas ceux de la tour Eiffel !) avec des nombres inférieurs pour ensuite revenir à la résolution du problème posé en l'aidant à identifier les analogies avec le précédent.

- Il est envisageable de lui proposer un problème de même type mais dans un autre contexte. Par exemple : « Jade a déjà enfilé 25 perles, il lui reste 9 perles à enfiler pour finir son collier. Combien de perles constituent son collier ? » pour ensuite revenir à la résolution du problème posé en l'aidant à identifier les analogies avec le précédent.

**4) b) Aux élèves B et D pour qu'ils puissent progresser**

Pour ces élèves de CE2, il s'agirait de revisiter la technique opératoire de l'addition avec un appui éventuel sur les abaques si ce support est familier pour les élèves : il s'agit de redonner du sens à la « retenue » en lien avec les connaissances sur la numération décimale de position.

En faisant apparaître explicitement le dispositif spatial sous-jacent à l'addition posée avec les différentes colonnes (unités, dizaines, centaines, …) et en utilisant, si nécessaire, un code couleur pour chaque unité de numération, le statut de la retenue, ici « 1 » serait à nouveau interrogé.

Il est également possible de leur proposer de poser des additions de plus de deux nombres pour que, au cours de l'addition, les nombres à deux chiffres obtenus soient supérieurs à 18 et permettent de réinterroger le statut de leurs chiffres, la retenue pouvant être 2 ou 3 ou…

En complément, il est possible de travailler sur les ordres de grandeur pour contrôler les résultats.

## SITUATION 2

### 1) Connaissances mathématiques intervenant dans la mise en œuvre de chaque technique opératoire de la soustraction

*Document 1*

Dans ce document, les connaissances mobilisées concernent uniquement l'aspect décimal de la numération et plus précisément le lien entre les différentes unités de numération :
62, c'est 6 dizaines et 2 unités, et c'est aussi 5 dizaines et 12 unités…
À noter aussi ici, un appui sur la représentation du matériel multibase pour mettre en évidence ces différentes décompositions des nombres.

*Document 2*

On s'appuie ici sur une propriété spécifique de la soustraction, celle de la « conservation des écarts ».
Si on ajoute le même nombre aux deux termes d'une soustraction, la différence (l'écart) entre les nouveaux nombres trouvés est le même que l'écart entre les nombres initiaux.
Pour ce qui concerne la numération, on s'appuie sur les échanges : une dizaine vaut dix unités, une centaine vaut dix dizaines.

### 2) Propriété mathématique intervenant dans la méthode proposée dans le document 3

Propriété de la conservation des écarts : ajouter ou enlever le même nombre aux deux termes de la soustraction pour se ramener à un calcul facile, à un calcul « malin » (ici en une ou deux étapes).

### 3) Un avantage et un inconvénient…

*Document 1*

Avantage
La technique opératoire proposée prend la forme d'un algorithme. Par la décomposition en sous-unités, elle ramène toute soustraction initiale à des soustractions entre un nombre à 1 ou 2 chiffres et un nombre à 1 chiffre, opérations qui peuvent s'effectuer mentalement.

Inconvénient
Cette méthode peut conduire à une succession d'échanges et à une surcharge d'écritures si on a une série de 0 pour le premier nombre.
Exemple : pour effectuer la soustraction 3004 – 1837, une première application de l'algorithme conduit en préalable casser 3 milliers en 2 milliers et 10 centaines, puis casser 10 centaines en 9 centaines et 10 dizaines, et finalement casser 10 dizaines en 9 dizaines et 10 unités. D'où les écritures suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} & {}^{2} & {}^{9} & {}^{9} & \\ & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} & {}_{1}4 \\ - & 1 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 8 \end{array}$$

Remarquons toutefois que dans cet exemple aussi, on peut conserver l'efficacité et la simplicité d'utilisation de cet algorithme : il suffit de considérer que 3 004 est composé de 300 dizaines et de 4 unités et peut aussi se décomposer en 299 dizaines et 14 unités, ce qui conduit directement à l'écriture précédente.

*Document 2*

Avantage
La technique opératoire proposée prend la forme d'un algorithme. Elle ramène toute soustraction initiale à des soustractions entre un nombre à 1 ou 2 chiffres (au plus 19) et un nombre à 1 ou 2 chiffres (au plus 10), opérations qui peuvent s'effectuer mentalement.

Inconvénient
La justification est assez élaborée et de compréhension moins immédiate. Pour un nombre important d'élèves, la propriété de conservation des écarts reste délicate à appréhender avant la fin du cycle 2, et la signification des différentes retenues leur reste opaque.

*Document 3*

Avantage
Dans le cadre de l'apprentissage d'une technique opératoire de la soustraction, ce document invite les élèves à s'intéresser et à s'adapter aux particularités des nombres en présence. La démarche proposée les incite à utiliser autant que possible les ressources du calcul mental, avant d'envisager un calcul posé.

*Remarque :*
*On reconnait ici l'esprit (et la lettre) des programmes 2015 du cycle 2 qui précisent :*
*« Les opérations posées permettent l'obtention de résultats notamment lorsque le calcul mental ou écrit en ligne atteint ses limites. Leur apprentissage est aussi un moyen de renforcer la compréhension du système décimal de position et de consolider la mémorisation des relations numériques élémentaires. Il a donc lieu lorsque les élèves se sont approprié des stratégies de calcul basées sur des décompositions/recompositions liées à la numération décimale, souvent utilisées également en calcul mental ou écrit. »*

Inconvénient
Pas tout à fait un inconvénient, mais conséquence de la remarque précédente. Les limites rencontrées diffèrent pour chaque élève. La démarche proposée dans le document 3 ne s'applique pas aisément pour tous les calculs de soustraction. Elle ne se suffit pas à elle-même et doit être complétée par l'introduction d'une technique opératoire posée en colonne et l'institutionnalisation d'un algorithme ; la pertinence du passage à cet algorithme pouvant être appréciée de façons différentes par les élèves en fonction de leurs habiletés en calcul mental.

## SITUATION 3

### 1) Savoir mathématique abordé dans ces trois extraits de manuels

Le savoir abordé par ces trois extraits est présent dans les programmes de Cycle 2 sous l'intitulé « Calculer avec des nombres entiers : multiplication par une puissance de dix ».
En regard, dans la colonne « Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève », on trouve :

Utiliser ses connaissances sur la numération :
« 24 × 10, c'est 24 dizaines, c'est 240 unités ».

*Remarque :*

*En s'appuyant sur le second extrait, on pouvait élargir la formulation de ce savoir en : « multiplier un nombre entier par une puissance de dix (ou par un multiple d'une puissance de dix) ».*

## 2) Analyse au regard de l'apprentissage visé

Les trois manuels de cycle 3 donnent une technique permettant de donner le résultat d'une multiplication par une puissance de dix.

Dans l'extrait du manuel A, le résumé « l'essentiel », très court, se limite à une simple règle formelle « l'écriture de zéros à droite » accompagné de l'exemple avec le nombre 25.

Dans le manuel B, « Je retiens », fait référence à la numération en reprenant la formulation trouvée dans les programmes : une multiplication par 10 ou 100 est interprétée comme un changement d'unité. Il évite de donner une règle formelle d'écriture du produit mais donne du sens à cet apprentissage en l'appliquant au calcul mental (calcul de produits par des multiples de puissances de 10) et au calcul approché (recherche d'ordre de grandeur).

Le manuel C fait aussi explicitement référence à la numération avec les notions d'unités, dizaines et centaines. La règle d'écriture est justifiée en référence au chiffre des unités qui change de rang, induisant ainsi le décalage des autres. Pour que le chiffre des unités se retrouve au rang des dizaines (centaines) « tu places donc un (deux) zéros à droite ». Dans les exemples fournis, il insiste sur la position du chiffre des unités par un soulignage. S'y insère un rappel de la commutativité de la multiplication spécifiée à ces cas particuliers.

## 3) Difficultés rencontrées en Cycle 3

Au cycle 3, les élèves vont utiliser des nombres décimaux, nombres pour lesquels la règle « pour multiplier par 10, on écrit un zéro à droite » n'est plus valable. Les élèves qui n'auront retenu que cette règle seront donc en difficulté.
L'approche limitée du manuel A (dans l'extrait fourni) risque de provoquer des erreurs du type :
$4{,}2 \times 10 = 4{,}20$.
L'approche du manuel B s'appuyant sur les liens entre unité, dizaine, centaine (et leur rapport 10 pour 1) peut être plus facilement étendue aux nombres décimaux en prolongeant vers les dixièmes, centièmes, etc.
La règle d'écriture donnée par le manuel C ne sera plus valable mais on pourra conserver l'importance donnée à la position des chiffres dans l'écriture du nombre.

*Remarque :*

*S'appuyer sur la numération (et éventuellement sur un tableau de numération), permet de remplacer les règles « ajouter des zéros » ou « déplacer la virgule » par « ce sont les chiffres qui changent de valeur et donc de place dans l'écriture du nombre ». Ce principe a l'avantage d'être aussi valable lorsque l'on divise un nombre par une puissance de 10.*

# EXERCICES ÉLABORÉS
# À PARTIR
# DES CONCOURS BLANCS
# ET EXAMENS
# PROPOSÉS DANS LES ESPE

# SUJETS

# VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMENS DES ESPE)

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse.
Justifier cette réponse.

**1)** Soit $n$ un entier naturel.

**Affirmation 1 :** Le nombre $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ est un multiple de 13.

**2)** On considère le nombre $10^9 - 9$.

**Affirmation 2 :** Lorsqu'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

**3)** Sur une carte au $\frac{1}{25000}$, deux villages sont distants de 7 cm.

**Affirmation 3 :** Ces deux villages sont distants de $\frac{35}{8}$ cm sur une deuxième carte au $\frac{1}{40000}$.

**4)** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

**Affirmation 4 :** La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique est de $\frac{20}{32}$.

**5)** Dans un référendum local, 40 % des femmes et 70 % des hommes ont répondu « OUI » à la question posée.

**Affirmation 5 :** Sachant que l'électorat contient 65 % de femmes et que l'on a comptabilisé aucun vote blanc ou nul, la majorité des votants a répondu « NON ».

**6)** **Affirmation 6 :** 1 cL de liquide occupe un volume égal à 0,001 dm$^3$.

**7)** **Affirmation 7 :** Quand on divise 12 par 13, la 134$^e$ décimale et la 542$^e$ décimale du quotient sont les mêmes.

**8)** On sait que la moyenne de cinq nombres distincts est 4 et que, quand on enlève le plus grand de ces nombres, la moyenne baisse de 2.

**Affirmation 8 :** On ne peut pas déterminer le nombre enlevé.

**9)** **Affirmation 9** : 189 est la somme de trois entiers impairs consécutifs.

**10)** **Affirmation 10 :** Un multiple de 45 est nécessairement un multiple de 9.

**11)** **Affirmation 11 :** Deux triangles rectangles ayant chacun un côté de longueur 6 cm et un côté de longueur 8 cm sont nécessairement isométriques.

**12)** **Affirmation 12** : Le nombre 1400 a exactement 12 diviseurs positifs.

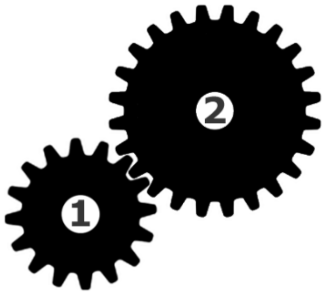
**13)**

**Affirmation 13 :** Le nombre $\frac{2}{21} \times \frac{35}{12}$ est un nombre décimal.

**14)**

**Affirmation 14 :** Le nombre $\frac{(\sqrt{48} + \sqrt{363})}{\sqrt{3}}$ est un nombre rationnel.

**15)** On considère l'engrenage suivant composé de deux roues, l'une comportant seize dents et l'autre vingt-quatre dents :




**Affirmation 15** : Lorsque la roue 2 de l'engrenage fait soixante-quatre tours, la roue 1 fait exactement quatre-vingt-seize tours.

**16)** Des photos, toutes de même format (18 cm sur 24 cm) et toutes mises bord à bord dans le même sens, recouvrent un panneau carré dont le côté mesure entre 3 et 4 mètres.

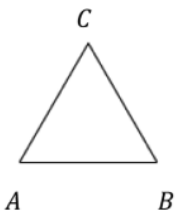
**Affirmation 16 :** Il y a 300 photos sur le panneau.

# PROBLÈME D'ALGORITHMIQUE ET DE GÉOMÉTRIE
# d'après des sujets de Marseille, Lyon et La Roche-sur-Yon

Dans ce problème, on s'intéresse à l'usage d'un langage de programmation dans la construction de figures planes.

## PARTIE A : construction de triangles

On a implémenté sous Scratch le bloc « triangle » ci-dessous. La figure obtenue est un triangle dont les sommets seront nommés A, B et C dans la suite du sujet.
Le point A correspond au point de coordonnées (0 ; 0).


### 1) Réalisation de la figure

On rappelle que l'instruction « avancer de 100 » correspond à une avancée de 100 pixels (points lumineux de l'écran).

a) Préciser, en la justifiant, la nature du triangle ABC.

b) Construire le triangle AB*C* en prenant comme échelle 1 cm pour 20 pixels.

### 2) Amélioration de l'implémentation

On souhaite simplifier le bloc « triangle » en utilisant la commande ci-dessous :


Quelles instructions faut-il insérer dans la commande « répéter 3 fois » pour obtenir le même triangle ABC ?

### 3) Utilisation du bloc « triangle »

Le bloc « triangle » est désormais inséré dans le programme suivant :

a) En faisant tourner à la main ce programme, compléter la figure tracée à la question 1.
On note D le nouveau sommet.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ADBC ? Justifier.

### 4) Évolution de la figure

a) Construire à la règle et au compas le point E symétrique du point B par la symétrie d'axe (AC). *On laissera les traits de construction apparents.*

b) Les points E, A et D sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

Que peut-on conclure concernant le point A ?

On note F le point d'intersection des droites (EC) et (DB).

c) Quelle est la nature du triangle DEF ?

d) Montrer que les droites (CD), (AF) et (BE) se coupent en un même point. Caractériser ce point par rapport au triangle DEF.

e) Montrer que : Aire (DEF) = 4 Aire (ABC).

## PARTIE B : construction de losanges

*Figure 1*

Pour réaliser la figure 1 ci-dessus avec des instructions données dans le langage de programmation *Scratch*, on a défini le bloc « Motif » suivant qui dessine un losange :

***Motif***

On a également utilisé l'un des deux Programmes A ou B ci-dessous.

***Programme A***


***Programme B***


## 1) Analyse des programmes

a) Déterminer le programme qui correspond à la figure 1 et indiquer par une figure à main levée le résultat que l'on obtiendrait avec l'autre programme.

b) A quoi correspond le nombre 55 dans la boucle « répéter 8 fois » du Programme A ?

c) Quelle est la transformation qui permet de passer d'un motif au suivant lors de la réalisation de deux boucles successives du programme A ? du programme B ?

## 2) Adaptation d'un programme

On souhaite réaliser la figure 2 ci-dessous :

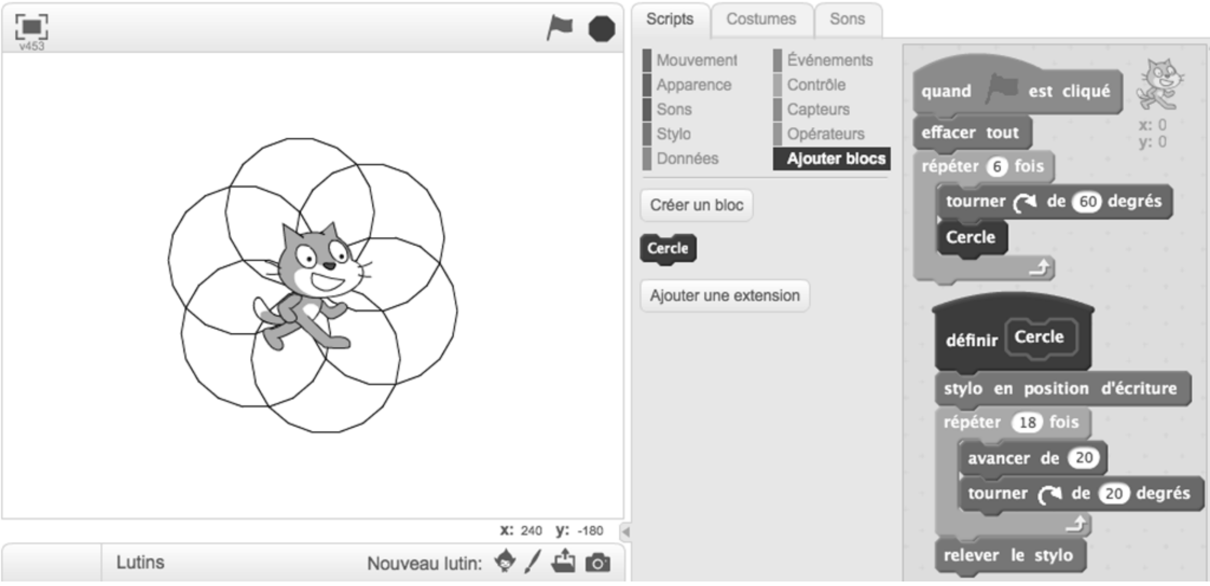
*Figure 2*

Pour ce faire, on envisage d'insérer l'instruction `ajouter 1 à la taille du stylo` dans le **Programme** utilisé à la question 1.

Où faut-il insérer cette instruction dans ce programme ?

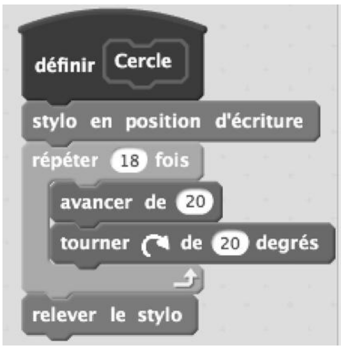
## PARTIE C : construction de rosaces

La figure ci-dessous présente une copie d'écran réalisée après exécution du programme.




### 1) Analyse du bloc « Cercle »

On s'intéresse tout d'abord au bloc « Cercle » reproduit ci-dessous :



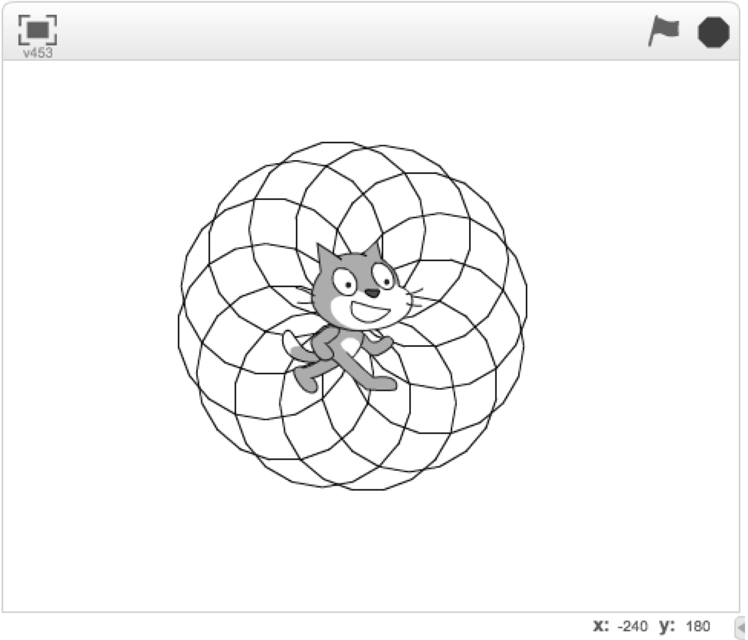

a) Expliquer pourquoi le chat ne dessine pas vraiment un cercle. Que dessine-t-il ?

b) On décide de modifier le bloc « Cercle » afin que le dessin ressemble encore plus à un cercle. Faire une proposition de modification de ce bloc.

### 2) Modification du programme principal

Le programme principal, présenté ci-dessous, fait appel au bloc « Cercle » :


Comment modifier ce programme pour obtenir l'affichage ci-après ?


v453
x: -240 y: 180

# EXERCICE DE NUMÉRATION d'après un sujet de Clermont-Ferrand

1) Le plus grand des nombres qui s'écrivent en base dix avec deux chiffres est 99.
   a) Quelle est l'écriture en base dix du plus grand des nombres qui s'écrivent en base sept avec trois chiffres ?
   b) Quelle est l'écriture en base dix du plus grand des nombres qui s'écrivent en base treize avec deux chiffres ? (On considèrera que les chiffres en base treize sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c)
2) On considère un nombre dont l'écriture en base quatre comporte trois chiffres.
   a) Déterminer un encadrement de ce nombre en base dix.
   b) Montrer que l'écriture de ce nombre en base huit comporte toujours deux chiffres, mais que ce n'est pas forcément le cas en base sept.

3) Parmi les nombres qui s'écrivent avec trois chiffres en base quatre, combien ont trois chiffres différents ?

4) Déterminer, en base quatre (et sans passer par la base dix) :
   a) La somme des nombres $\overline{31}^4$ (écriture en base quatre) et $\overline{123}^4$.
   b) Le produit de $\overline{123}^4$ par $\overline{10}^4$.
   c) Le produit de $\overline{323}^4$ par $\overline{23}^4$ en posant l'opération.

# EXERCICE SUR FRACTIONS, DECIMAUX ET ALGORITHMIQUE d'après un sujet de Toulouse

On considère les nombres : $p = \frac{146}{113}$ $\quad q = \frac{32}{25}$ $\quad r = \frac{64}{27}$ $\quad s = \frac{195}{150}$

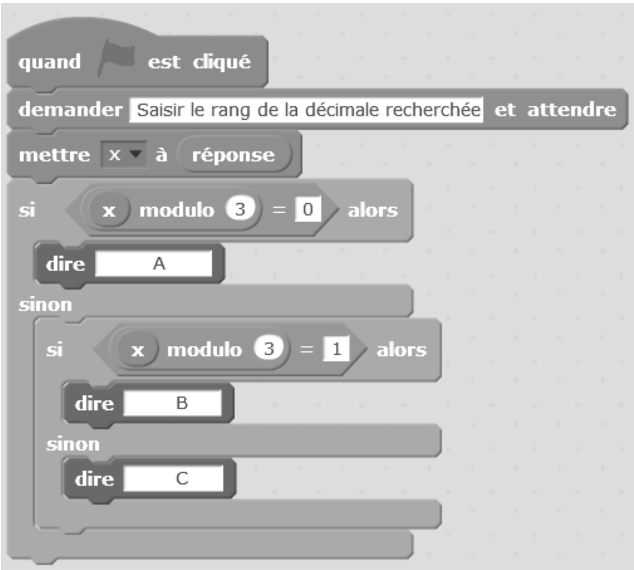
1) Quels sont les nombres décimaux parmi les nombres $p$, $q$, $r$ et $s$ ? Justifier.
2) Effectuer le calcul posé de la division de 64 par 27 (en s'arrêtant à 4 chiffres après la virgule) et déterminer la trente-septième décimale de l'écriture à virgule de $\frac{64}{27}$.
3) On souhaite automatiser la détermination de la décimale de l'écriture à virgule de $\frac{64}{27}$ à un rang quelconque.

   On utilise pour cela un langage de programmation.

   Dans ce langage, la commande 

permet de calculer le reste dans la division euclidienne du nombre entier a par le nombre entier b.

   Dans le script suivant, indiquer par quelles valeurs remplacer les lettres A, B et C afin d'obtenir, à l'affichage, la décimale d'un rang saisi de l'écriture à virgule de $\frac{64}{27}$.



# GÉOMÉTRIE, GRANDEUR ET MESURE, PROPORTIONNALITÉ d'après un sujet de Besançon

## Exercice 1

On considère un triangle ABC, isocèle en A. Le cercle de diamètre [AB] coupe [BC] en B et M. On appelle O le milieu du segment [AB].

1) Faire une figure aux instruments (règle non graduée et compas seuls) que vous complèterez au fur et à mesure de l'exercice.

2) Démontrer que M est le milieu de [BC].

Soit P le symétrique de M par rapport à O. (Rappel : On dit qu'un point P est le symétrique d'un point M par rapport à un point O si et seulement si O est le milieu du segment [MP].)

3) Démontrer que APBM est un rectangle.

4) Démontrer que AP = MC.

5) Soit R le symétrique de P par rapport à A. Démontrer que PBCR est un rectangle.

## Exercice 2

1) Un spectacle a duré 3 heures et 25 minutes. Exprimer la mesure de cette durée, en prenant l'heure comme unité, sous forme d'une fraction irréductible. Ce nombre est-il un décimal ?

2) Une mesure de durée est exprimée sous la forme 3 heures et p minutes $(0 < p < 60)$. Pour quelle valeur de p la mesure en heures de la même durée sera-t-elle exprimée par un nombre décimal ?

## Exercice 3

Un site de comparateur de prix a repéré des lots constitués avec les mêmes cahiers dans 3 grandes surfaces.

Dans la grande surface A, 8 cahiers coûtent 4 €

Dans la grande surface B, 3 cahiers coûtent 2 €

Dans la grande surface C, 7 cahiers coûtent 4 €

Dans quelle grande surface les cahiers sont-ils le plus cher ?

Voici les réponses de 4 élèves :

**Elève A :** Le magasin A est plus cher, car si on divise 4 par 8 on trouve 2, si on divise 3 par 2 on trouve 1 et si on divise 4 par 7 on trouve aussi 1.

**Elève B :** Le magasin le plus cher c'est le A et le C car 4 € c'est plus que 2 €.

**Elève C :** Les 8 cahiers du magasin A coûtent 4 € et les 7 cahiers du magasin C aussi. Les cahiers du magasin C sont plus chers car on en a moins pour le même prix. Mais le plus cher, c'est le magasin B car pour 4 € on en a que 6.

**Elève D :** Les cahiers sont plus chers dans le magasin B car pour 8 cahiers il faudrait payer 7 € et que 5 € dans le magasin C.

1) Indiquer deux procédures correctes qu'un élève de cycle 3 peut mettre en œuvre pour résoudre ce problème.

2) Analyser ces réponses en décrivant les procédures utilisées et en faisant des hypothèses, le cas échéant, sur l'origine des erreurs.

# ANALYSE D'ERREURS
# d'après un sujet de concours blanc de Marseille

## EXERCICE 1

Vous trouverez ci-dessous un exercice proposé à des élèves de CM2.

*Lis attentivement la petite devinette suivante :*
« *Je suis un nombre décimal et mon écriture ne contient que trois chiffres.*
*Mon chiffre des unités est 2.*
*Mon chiffre des dixièmes est le même que le chiffre des centièmes du nombre 135,798.*
*Mon chiffre des dizaines est le double de mon chiffre des unités.*
*Qui suis-je ?* »

1) Résoudre la devinette.

2) Quelle est la compétence évaluée dans cet exercice ?

3) Analyser les réponses des trois élèves ci-dessous en précisant ce qui est juste et ce qui est erroné.

| Élève A | Élève B | Élève C |
|---|---|---|
| 429 | 92,4 | 42,3 |

## EXERCICE 2

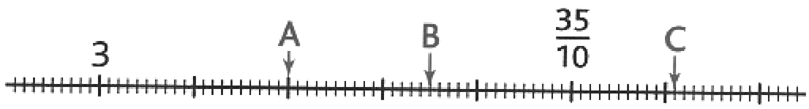
Voici quelques erreurs régulièrement repérées chez les élèves.
Pour chacun des items ci-dessous, donner une explication quant à l'origine possible de l'erreur.

1) $2{,}7 + 3{,}5 = 5{,}12$

2) $6{,}34 < 6{,}251$

3) $52{,}14 \quad 10 = 520{,}140$

4) Voici un morceau de droite graduée.

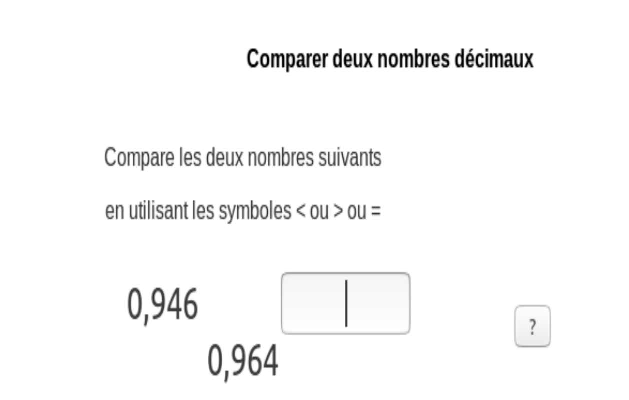



Écris les fractions correspondant aux points de la droite.
Pour l'abscisse du point C un élève propose $\frac{46}{10}$.

# ANALYSE DE DOCUMENT SUR LES DECIMAUX
# d'après un sujet de Besançon

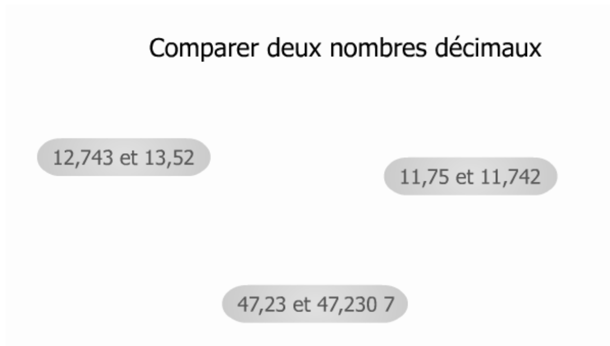
Un exercice en ligne, extrait du site MatouMatheux, est proposé (voir illustration 1).
Lorsque l'élève demande l'aide (avec le point d'interrogation), voici ce qu'il obtient, au premier clic (voir illustration 2).

*Illustration 1*




Voici une copie d'écran de ce que l'élève peut lire.
Il est attendu que l'élève compare 0,946 et 0,964.
Il doit utiliser les symboles <, > ou =.
Le point d'interrogation permet à l'élève d'accéder à l'aide.

*Illustration 2*




Voici une copie d'écran lorsque l'élève a sélectionné le bouton « ? ». Les fenêtres « 12,743 et 13,42 » d'une part, et « 11,75 et 11,742 » d'autre part, sont actives. Par contre, les fenêtres « 47,23 et 47,2307 » ne sont pas actives.

Si l'élève sélectionne la fenêtre « 12,743 et 13,42 », il obtient l'écran représenté ci-dessous à gauche (voir illustration 3).
Sinon, il obtient l'écran représenté ci-dessous à droite (voir illustration 4).

*Illustration 3*

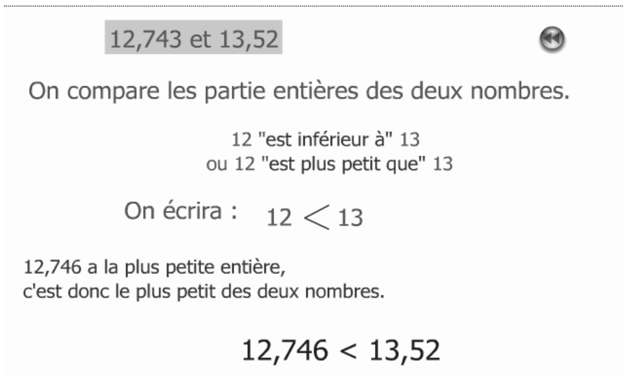
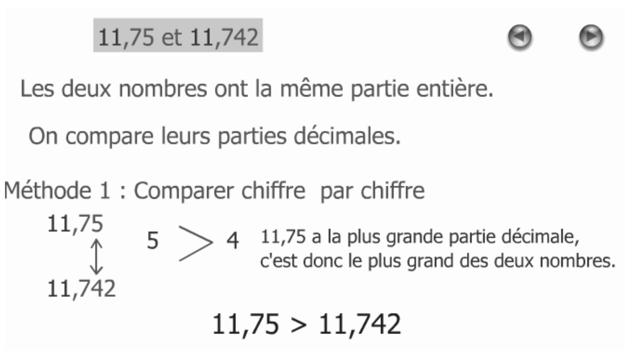



*Illustration 4*




*Remarque :*

*Les coquilles qui peuvent être relevées dans les illustrations ci-dessus ne sont pas le fait des rédacteurs de ces annales ; elles proviennent des copies d'écran du site MatouMatheux[1].*

---

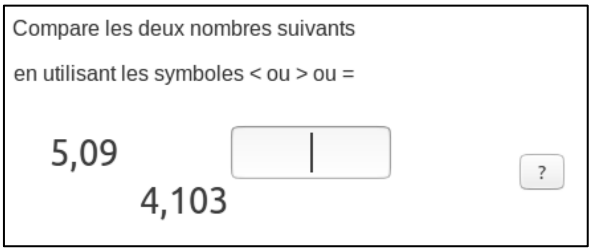
[1] http://matoumatheux.ac-rennes.fr/cours/decimaux/comparer.htm

1) Un élève veut répondre à la première question posée : « Comparer les deux nombres suivants en utilisant les symboles < ou > ou = », sachant que les deux nombres qu'il doit comparer sont 0,946 et 0,964. Il veut utiliser l'aide. Pour cela, il sélectionne le bouton « ? ».

a) Citez une compétence mathématique que l'élève doit utiliser pour que cette aide soit utile ?

b) Dans l'aide, on explique que « 5 étant plus grand que 4, le nombre 11,75 est supérieur à 11,742 ». Sur quelle connaissance mathématique repose cette explication ?

2) La deuxième question du site MatouMatheux est la suivante :




L'élève répond « < » (le signe « inférieur à »).

Proposez une interprétation de cette erreur.

# ANALYSE D'UN PROBLÈME ADDITIF d'après un sujet de Lyon

Voici l'énoncé d'un problème proposé à des élèves de l'école élémentaire :

« *Deux enfants, Yann et Jean-François, ont le même nombre de billes. Ils jouent l'un contre l'autre et Yann gagne 12 billes. Combien a-t-il de billes de plus que Jean-François à la fin du jeu ?* ».

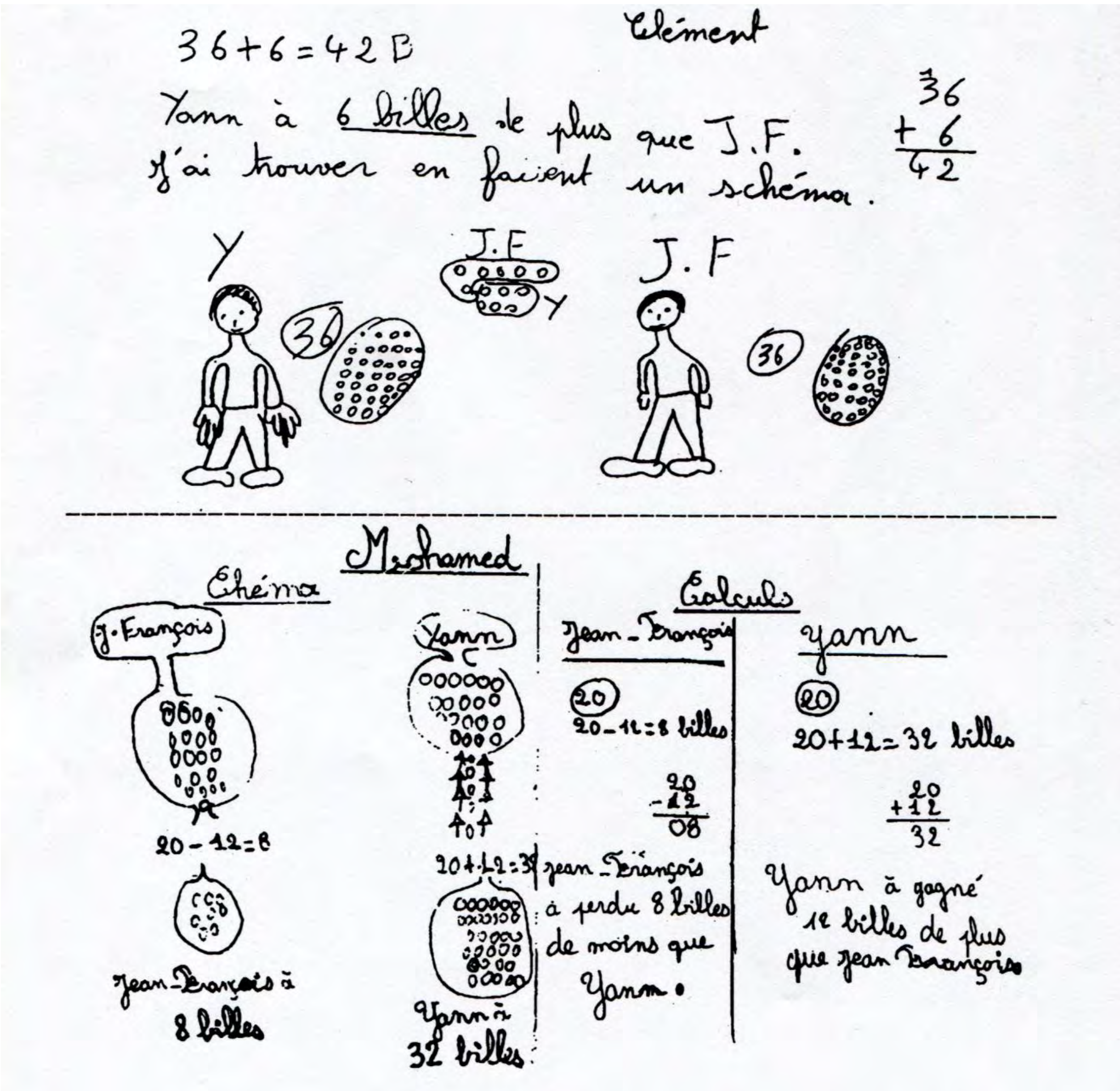
1) Résoudre ce problème.

2) Identifier deux difficultés que les élèves peuvent rencontrer pour résoudre le problème proposé.

3) On trouvera, ci-dessous, les productions de deux enfants en réponse au problème posé. Décrire et analyser ces productions (procédure employée, réponse, erreurs).

4) En reprenant l'une des difficultés identifiées dans la question 2, quelle aide le maître pourrait-il proposer aux élèves qui n'arrivent pas à résoudre ce problème ou qui se sont trompés ?

5) Quelles sont les compétences en résolution de problème travaillées dans cet exercice ? Vous justifierez en vous appuyant sur l'extrait de programme du cycle 3 placé en annexe.



# ANNEXE

Mathématiques : Programme pour le cycle 3 (extrait)

| |
|---|
| **Chercher**<br>Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.<br>S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.<br>Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. |
| **Modéliser**<br>Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.<br>Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.<br>(…) |
| **Représenter**<br>Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, …<br>(…) |
| **Raisonner**<br>Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.<br>(…)<br>Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose. |
| **Calculer**<br>Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).<br>Contrôler la vraisemblance de ses résultats.<br>Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat. |
| **Communiquer**<br>Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.<br>Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. |

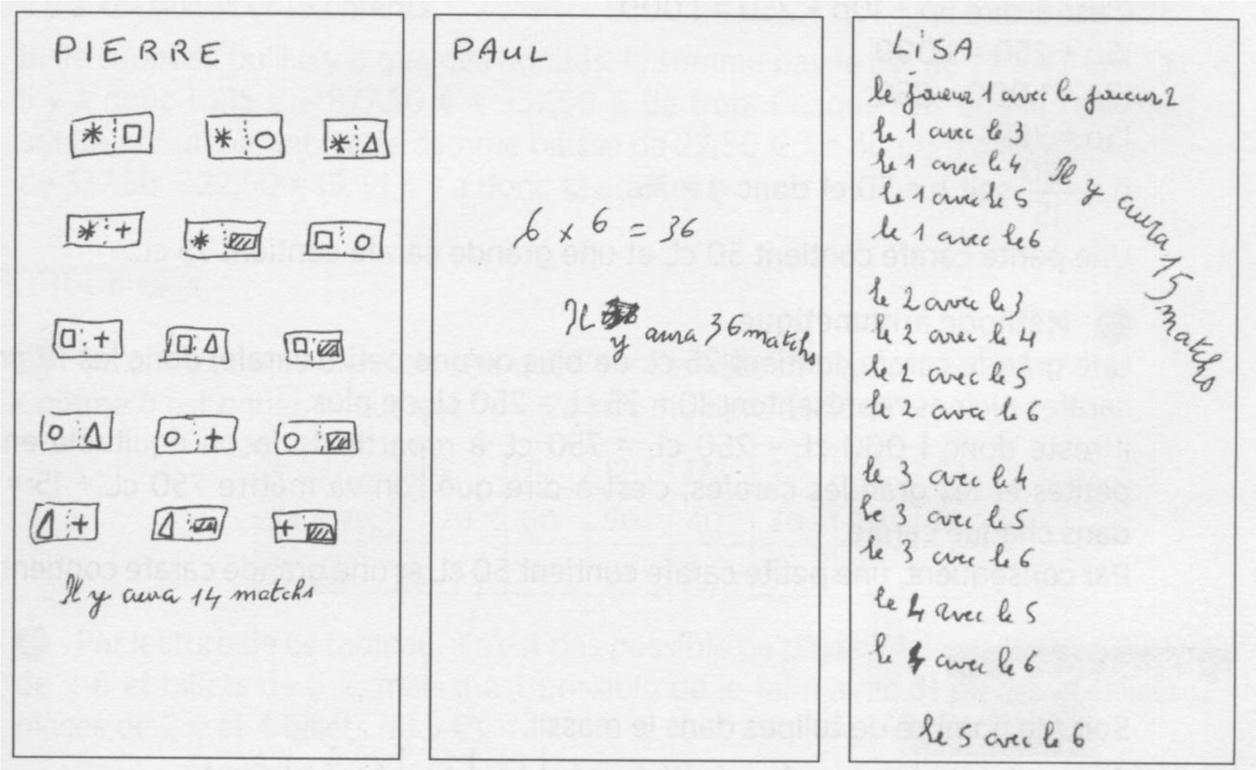
# PROBLEME DE RECHERCHE EN CYCLE 3
# d'après un sujet de La Roche sur Yon

Le problème suivant a été posé dans une classe de cycle 3.

*Six joueurs de badminton participent à un tournoi. Combien le responsable de la rencontre doit-il organiser de matchs pour que les joueurs se rencontrent tous une et une seule fois ?*

1) Résoudre le problème.

2) Les productions de trois élèves sont présentées ci-dessous. Décrire précisément la démarche de chaque élève et analyser les éventuelles erreurs.



# DIVISION AU CYCLE 3
# d'après un sujet de Besançon

**Analyse de documents pédagogiques sur l'enseignement de la division**

## PARTIE A : analyse d'une séance en CE2

En annexe 1 figure un extrait du manuel Cap Maths CE2 (Hatier, 2011) présentant le support écrit d'une séance. L'objectif de cette séance porte sur la résolution de problèmes de partage.

1) Exprimer les solutions de chaque problème de la partie « Chercher » au moyen d'une égalité.

2) Citer deux connaissances ou compétences préalables nécessaires à cette activité (partie « Chercher »).

3) Les élèves sont mis en équipes de deux. Ils sont d'abord invités à répondre à la première question de la partie « Chercher ». Après un temps de recherche, l'enseignant organise une mise en commun.

   a) Décrire deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour répondre à la question 1 concernant le nombre de rubans de Tim.

   b) Expliciter deux types d'erreurs envisageables pour la question 1.

   c) Quel est le rôle d'une mise en commun à l'issue de la première question ?

   d) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses ?

4) Dans un deuxième temps, les élèves doivent résoudre les deux autres questions de la partie « Chercher ». Le déroulement est identique à celui de l'étape précédente.

   a) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses de la question 3 ?

   b) Analyser le choix des nombres dans les 3 problèmes de l'activité « recherche ».

5) Quels éléments de synthèse pourrait-on mettre en avant à l'issue de cette activité ?

6) Six exercices numérotés de 4 à 9 sont proposés à la suite de la partie « Chercher ». Analyser ces six exercices du point de vue de la division euclidienne.

## PARTIE B : la division en CM2

1) Les deux problèmes suivants (ERMEL CM2, Hatier) sont proposés aux élèves :

| Problème 1 | Problème 2 |
|---|---|
| Michel veut faire des étagères de bibliothèque.<br>Avec toute une planche de 350 cm, il découpe 8 étagères de même longueur.<br>Quelle est la longueur des étagères ? | Une planche mesure 350 cm.<br>Combien de morceaux de 8 cm de long Jean peut-il faire avec cette planche ? |

   a) Résoudre les deux problèmes proposés. Comparer ces deux problèmes en proposant un point commun et une différence.

   b) La calculatrice peut-elle constituer une aide pour la résolution de ces deux problèmes ? Justifier votre réponse.

2) Dans le cadre de l'Évaluation nationale d'entrée en sixième, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8. En Annexe 2 sont reproduits les travaux d'Aliette et de Christian.

   a) Décrire pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée. Analyser les erreurs éventuelles.

   b) Quelle aide pourrait-on apporter à Christian ?

# ANNEXE 1

**Extrait de CapMaths CE2, Hatier 2011**

**CHERCHER** **Combien de parts ?**

Maïa et Tim découpent des rubans dans des bandes de différentes couleurs.
Dans chaque bande, ils doivent découper le plus possible de rubans.
Maïa découpe des rubans qui mesurent tous 2 cm de long et Tim des rubans qui mesurent tous 6 cm de long.

1. Ils ont chacun une bande rouge de 32 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

2. Ils ont chacun une bande bleue de 67 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

3. Ils ont chacun une bande jaune de 248 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

**EXERCICES**

4. Une bande mesure 30 cm.
**Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?**

5. Une bande mesure 78 cm.
**Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?**

6. Dans une bande, Maïa a découpé 9 rubans de 7 cm chacun.
À la fin, il lui reste un petit ruban de 4 cm de long.
**Quelle était la longueur de la bande ?**

*7. Une bande mesure 200 cm.
**Combien de rubans de 9 cm peux-tu découper ?**

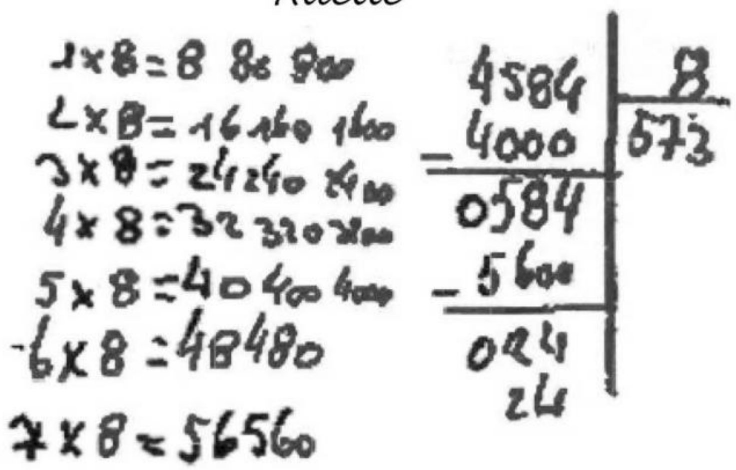
*8. Un mini-car permet de transporter 8 passagers.
**Combien faut-il prévoir de mini-cars pour emmener 54 passagers en promenade ?**

*9. Les 52 élèves de CE1 et de CE2 se répartissent en équipes de 7.
Les élèves restants seront arbitres.
**Combien y aura-t-il d'arbitres ?**

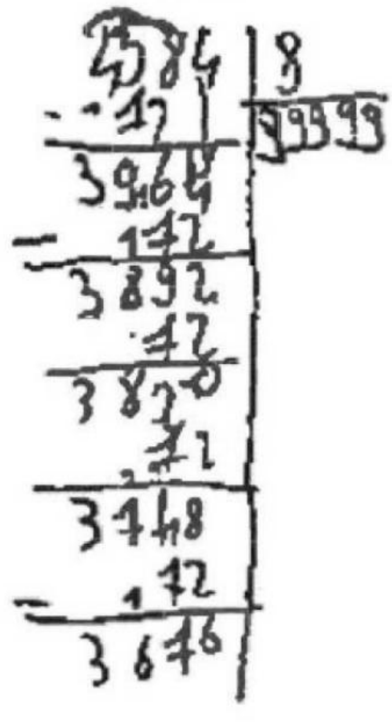
# ANNEXE 2

**Productions d'Aliette et Christian**

Aliette



Christian



# LA DIVISION DE LA GS AU CM2
# d'après un sujet de La Roche sur Yon

*On s'intéresse dans ce sujet à différents aspects du travail sur la division tout au long de l'école primaire.*

## PARTIE A : un problème en grande section

On s'intéresse à la situation suivante tirée de l'ouvrage « Apprentissages numériques et résolution de problèmes en GS », Hatier ERMEL, 2005 :

**Fabrication de maracas**

L'activité consiste à fabriquer des maracas pour la Fête de la musique. Les enfants sont répartis en groupes de 4 ou 5. Ils doivent réaliser un maraca chacun. Pour cela, ils ont à leur disposition :
– des rouleaux de carton (papier de toilette) ;
– du papier d'aluminium (ou mieux de la Cellophane) ;
– des élastiques pour fermer le bout des rouleaux ;
– des grains de maïs (de l'ordre de 80 à 100 par groupe).

La consigne doit clairement exprimer la tâche à exécuter, mais aussi les contraintes spécifiques :
– il doit y avoir le même nombre de grains dans chaque maraca ;
– on doit utiliser le plus possible de grains.

Voici un exemple de consigne possible : « Vous allez fabriquer un maraca chacun avec les rouleaux et les grains de maïs. Pour cela, vous faites le partage des grains, mais faites attention à ce que chacun de vous en ait autant, et il doit en rester le moins possible. »

1) Quelle est la procédure experte (non accessible à des élèves de maternelle) qui permet de résoudre ce problème ?

2) Décrire une procédure permettant à un groupe d'élèves de grande section de réussir la tâche.

3) Décrire une procédure permettant à un groupe d'élèves de grande section de valider ou d'invalider le résultat obtenu par le groupe.

## PARTIE B : étude de la progression suivie par une collection de manuels de la classe de CE1 à la classe de CM1

On s'intéresse ici à différentes étapes de la progression proposée par la collection Euromaths (Hatier).

### La division en CE1

*Les questions suivantes portent sur les documents figurant en annexe 1 (étapes 80 et 81 du manuel de l'élève).*

1) Activité de l'étape 80.

a) Proposer trois procédures distinctes de résolution de la deuxième question de l'activité de découverte de l'étape 80. Ces procédures devront être correctes et accessibles à un élève de CE1. Elles seront présentées en les rangeant comme on pourrait le faire lors d'une mise en commun, en justifiant l'ordre de présentation choisie.

b) Qu'apporte cette deuxième question de l'activité de découverte par rapport à la question qui la précède ?

2) En quoi l'activité de l'étape 81 constitue-t-elle une nouvelle activité de découverte après celle de l'étape 80 ?

### La division en CE2

*Les questions suivantes portent sur les documents figurant en annexe 2 (étape 70 du manuel de l'élève).*

3) Citer deux variables didactiques sur lesquelles les auteurs ont joué lors de la conception de l'activité de découverte pour faire évoluer les procédures des élèves par rapport au CE1.

4) Les exercices proposés.

a) Sur quelle connaissance l'élève peut-il s'appuyer pour répondre à l'exercice 1 sans effectuer de calcul ?

b) Résoudre l'exercice 2 en utilisant la méthode mise en avant dans l'activité de découverte.

### La division en CM1

*On s'intéresse aux documents figurant en annexe 3.*

5) Prendre connaissance de l'activité de découverte et effectuer, en suivant la méthode proposée, les deux dernières divisions de l'exercice 2.

## PARTIE C : étude d'une autre technique opératoire de la division euclidienne posée

*On s'intéresse au document figurant en annexe 4. Il est issu du manuel « J'apprends les maths CE2 » (Retz).*

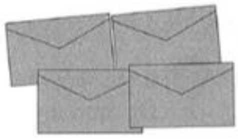
1) Les auteurs demandent au début de l'activité de procéder « sans dessiner les centaines, les dizaines ni les unités ». Décrire un matériel pédagogique qu'un enseignant pourrait cependant décider d'utiliser pour illustrer la technique proposée.

2) Rédiger étape par étape, à la manière de ce qui est fait en annexe 4, un algorithme de calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne de 7053 par 34, tel qu'il pourrait figurer dans le cahier d'un élève de CM1.

# ANNEXE 1

## Activité de découverte de l'étape 80 du manuel de l'élève (*Euromaths* CE1, Hatier)

**Découverte** Activité préparatoire : répartir équitablement des objets.



1. Il faut répartir 28 images dans 4 enveloppes.
Les enveloppes doivent contenir le même nombre d'images.
   - **Combien** d'images faut-il mettre dans chaque enveloppe ? .......
   - **Reste-t-il** des images ? ..................

2. Il faut distribuer 32 cartes entre 5 enfants.
Chaque enfant doit avoir le même nombre de cartes.
   - **Combien** de cartes chaque enfant recevra-t-il ? ...........
   - **Reste-t-il** des cartes ? ................

3. On veut partager un ruban de 36 cm en deux morceaux de même longueur.
**Quelle est la longueur** de chaque morceau ? ........................

## Activité de découverte de l'étape 81 du manuel de l'élève (*Euromaths* CE1, Hatier)

**Découverte**

1. Il faut répartir 35 images dans des enveloppes.
Chaque enveloppe doit contenir 5 images.
**Combien** d'enveloppes faut-il ? .......................

2. À la fête foraine, 32 personnes attendent pour monter dans le train fantôme.
Chaque wagonnet contient 4 personnes.
**Combien** de wagonnets faut-il ? ......................

3. Dans un ruban de 20 cm, Lilou découpe des petits morceaux de 3 cm.
**Combien** de morceaux au maximum peut-elle découper ? ................

# ANNEXE 2

**Etape 70 du manuel de l'élève (*Euromaths* CE2, Hatier)**

## DÉCOUVERTE

Les enfants préparent des sachets
de confiseries pour la fête de l'école.

**1** Théo met 100 truffes en sachets ;
dans chaque sachet, il met 8 truffes.

Calcule le nombre maximum de sachets
qu'il va pouvoir remplir.
Indique s'il reste des truffes et combien.

**2** Pour calculer le nombre de sachets que Théo peut remplir, Leïla fait des essais :
– si Théo remplit 10 sachets, cela fait 8 × 10 = 80, ce n'est pas assez ;
– s'il remplit 20 sachets, cela fait 8 × 20 = 160, c'est trop ;
– s'il remplit 15 sachets, cela fait 8 × 15 = 120, c'est encore trop.

• Continue le travail de Leïla pour trouver l'encadrement de 100 entre deux multiples consécutifs de 8, et place 100 sur la droite.

8 × 10 8 × 11 8 × 12 8 × 13 8 × 14 8 × 15

• Complète : 100 = (8 × …) + …
Théo a rempli … sachets et il reste … truffe(s).

Tu viens de faire la division de 100 par 8.
100 est le dividende et 8 est le diviseur.
100 = (8 × 12) + 4 est l'écriture en ligne de la division.

**3** Compare cette méthode avec la tienne.

## EXERCICES

**1** Tony doit mettre 240 chocolats dans des sachets de 10. Il dit qu'il trouve le nombre de sachets qu'il remplira en calculant mentalement.
Trouve toi aussi ce nombre en calculant mentalement.

**2** Gaëlle met 130 caramels en sachets. Dans chaque sachet, elle met 6 caramels.
Calcule le nombre de sachets qu'elle remplit et le nombre de caramels qui restent.

# ANNEXE 3

**Etape 46 du manuel de l'élève (Euromaths CM1, Hatier)**

## DÉCOUVERTE

❶ Calcule le quotient et le reste de la division de 7 053 par 34.

❷ Voici comment Qwang a disposé les calculs pour effectuer cette division. Compare sa méthode avec la tienne.

a. Je cherche le nombre de chiffres au quotient.

$$\left.\begin{array}{l}34 \times 10 = 340\\ 34 \times 100 = 3\,400\\ 34 \times 1\,000 = 34\,000\end{array}\right\} \rightarrow 34 \times 100 < 7\,053 < 34 \times 1\,000$$

Le quotient est entre 100 et 1 000, il a donc 3 chiffres.

b. Je construis le répertoire de 34

$34 \times 2 = 68$
$34 \times 3 = 102$
$34 \times 4 = 136$
$34 \times 5 = 170$
$34 \times 6 = 204$
$34 \times 7 = 238$
$34 \times 8 = 272$
$34 \times 9 = 306$

c. Je pose la division, je mets trois points au quotient et je calcule.

$$\begin{array}{r|l} 7\,0\,5\,3 & 3\,4 \\ \hline -\,6\,8\,0\,0 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline 2\,5\,3 & \\ -\,2\,3\,8 & \\ \hline 1\,5 & \end{array}$$


## EXERCICES

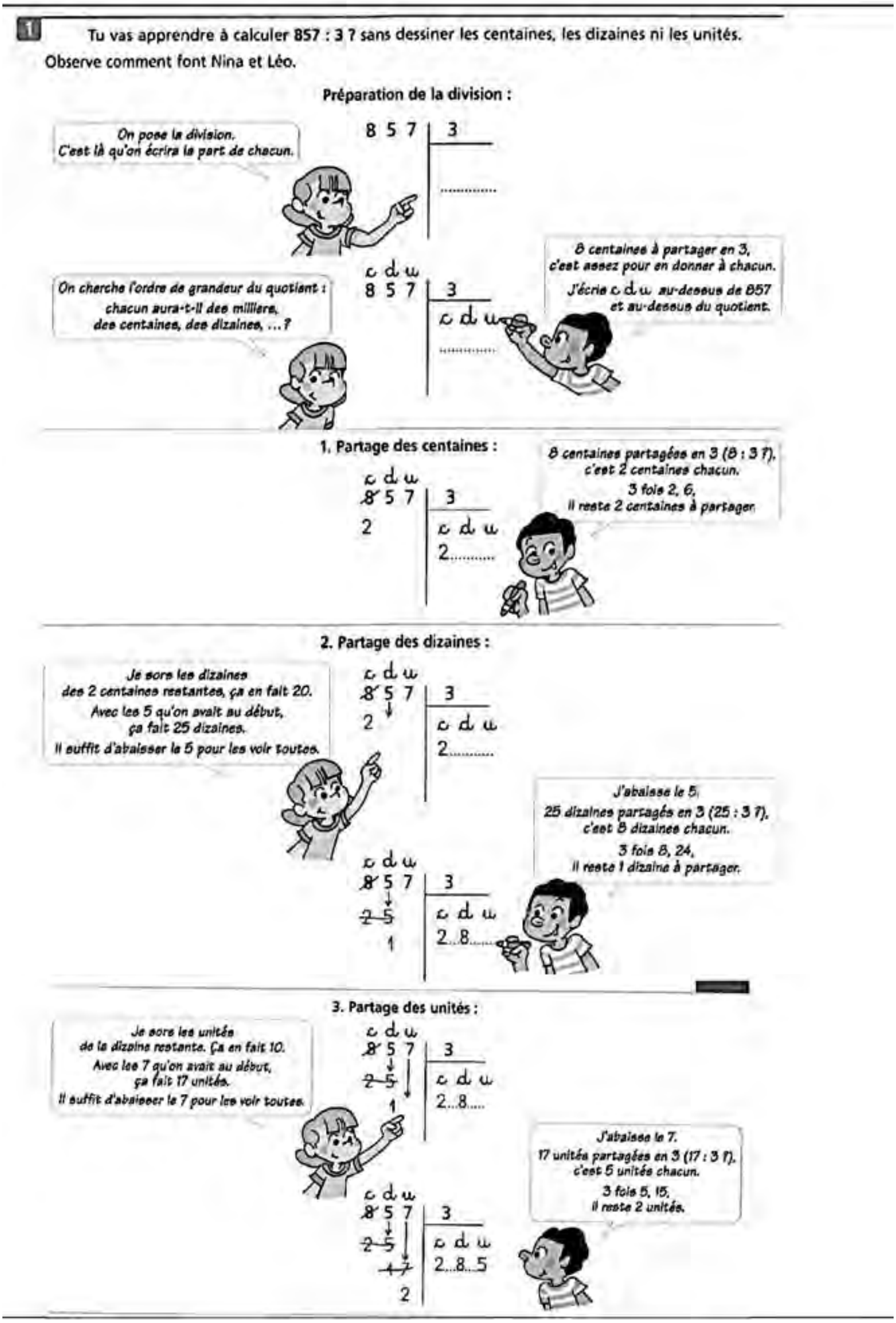
**2** • Indique le nombre de chiffres du quotient des divisions suivantes.

a. $2\,4\,5 \,|\, 9$　　b. $2\,5\,7\,4 \,|\, 1\,3$　　c. $7\,8\,5\,4 \,|\, 2\,7$　　d. $4\,5\,4\,5 \,|\, 4\,5$

• Effectue ensuite ces divisions. Vérifie-les avec ta calculatrice.

## ANNEXE 4

### Extrait du manuel de l'élève (*J'apprends les maths*, CE2, Retz)



**1** Tu vas apprendre à calculer 857 : 3 ? sans dessiner les centaines, les dizaines ni les unités.
Observe comment font Nina et Léo.

**Préparation de la division :**

*On pose la division.*
*C'est là qu'on écrira la part de chacun.*

8 5 7 | 3

*On cherche l'ordre de grandeur du quotient : chacun aura-t-il des milliers, des centaines, des dizaines, … ?*

*8 centaines à partager en 3, c'est assez pour en donner à chacun.*
*J'écris c d u au-dessus de 857 et au-dessus du quotient.*

**1. Partage des centaines :**

*8 centaines partagées en 3 (8 : 3 ?), c'est 2 centaines chacun.*
*3 fois 2, 6,*
*il reste 2 centaines à partager.*

**2. Partage des dizaines :**

*Je sors les dizaines des 2 centaines restantes, ça en fait 20.*
*Avec les 5 qu'on avait au début, ça fait 25 dizaines.*
*Il suffit d'abaisser le 5 pour les voir toutes.*

*J'abaisse le 5.*
*25 dizaines partagés en 3 (25 : 3 ?), c'est 8 dizaines chacun.*
*3 fois 8, 24,*
*il reste 1 dizaine à partager.*

**3. Partage des unités :**

*Je sors les unités de la dizaine restante. Ça en fait 10.*
*Avec les 7 qu'on avait au début, ça fait 17 unités.*
*Il suffit d'abaisser le 7 pour les voir toutes.*

*J'abaisse le 7.*
*17 unités partagées en 3 (17 : 3 ?), c'est 5 unités chacun.*
*3 fois 5, 15,*
*il reste 2 unités.*

# CALCUL MENTAL ET CALCUL EN LIGNE AU CYCLE 3

## PARTIE A : calcul mental

1) Dans les Instructions Officielles (BOEN du 26/11/2015), le calcul mental est préconisé quotidiennement dans les classes. Donner deux raisons pour justifier une pratique régulière du calcul mental pour les apprentissages des élèves de cycles 2 et 3.

2) Dans une séance de calcul mental, un enseignant propose à ses élèves de CE1 les calculs suivants « $59 + 7$ », « $49 + 8$ », « $39 + 6$ ». Donner la procédure attendue par l'enseignant avec des élèves de ce niveau pour obtenir les résultats exacts.

3) Dans une classe de CE2, un enseignant propose la devinette suivante : « Je pense à un nombre. Je lui enlève 9. J'obtiens 38. Qui suis-je ? ».

a) Donner une procédure par essai-erreur aboutissant à la réponse correcte qu'un élève de CE2 peut mobiliser.

b) Donner une réponse erronée, non provoquée par une erreur de calcul, prévisible en justifiant son apparition.

4) Lors de la résolution d'un problème en classe de CM2, les élèves sont confrontés au calcul : $346{,}31 + 67{,}9$. L'enseignant demande une valeur approchée du résultat en mobilisant un calcul mental. Quelle réponse valable peut-on attendre d'un élève de ce niveau ?
Même question pour le calcul : $6 \times 43{,}9$.

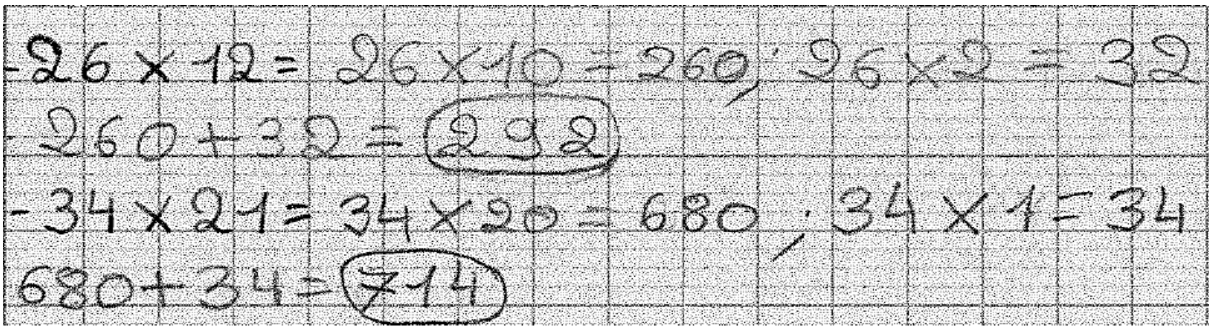
## PARTIE B : calcul en ligne

Un professeur des écoles de CM2 propose les calculs suivants à effectuer en ligne :

$$26 \times 12$$
$$34 \times 21$$

1) Donner une procédure correcte de calcul en ligne envisageable pour un élève de CM2 pour chacun de ces calculs.

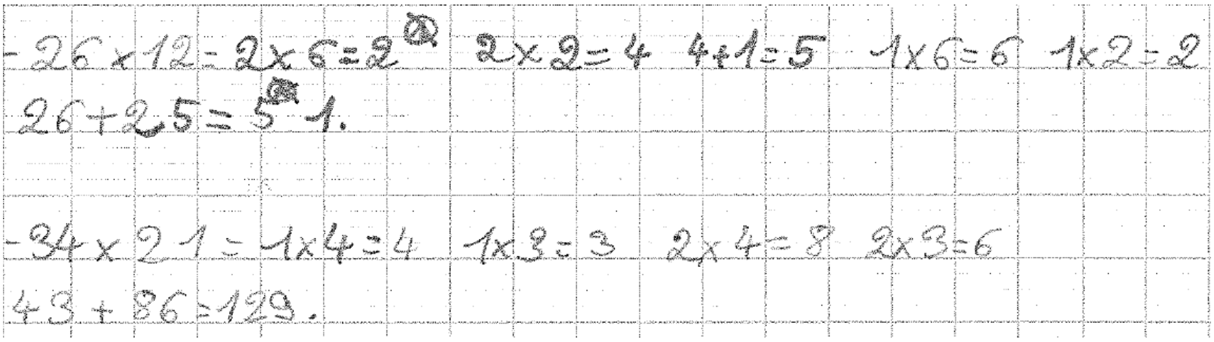
2) Melissa, élève de CM2, propose les réponses suivantes :


- 26 × 12 = 26 × 10 = 260 ; 26 × 2 = 32
- 260 + 32 = 292
- 34 × 21 = 34 × 20 = 680 ; 34 × 1 = 34
680 + 34 = 714

a) Relever deux erreurs dans la production de Melissa.

b) Concernant le calcul $34 \times 21$, proposer une aide à Melissa pour faire évoluer sa production vers un écrit mathématiquement juste.

3) Liliana, élève de CM2, propose les réponses suivantes :


- 26 × 12 = 2 × 6 = 2 2 × 2 = 4 4 + 1 = 5 1 × 6 = 6 1 × 2 = 2
26 + 25 = 51.

- 34 × 21 = 1 × 4 = 4 1 × 3 = 3 2 × 4 = 8 2 × 3 = 6
43 + 86 = 129.

a) Donner une interprétation cohérente du calcul 34 × 21 proposé par Liliana.

b) Vérifier que l'interprétation donnée en a) est cohérente avec le calcul proposé par Liliana pour $26 \times 12$.

c) En quoi le calcul mental peut-il aider Liliana à vérifier la justesse de ses calculs ?

4) En se basant sur la copie de Melissa, le professeur des écoles propose la trace écrite suivante :

$$26 \times 12 = 26 \times 10 + 26 \times 2 = 260 + 52 = 260 + 40 + 12 = 312$$

Il demande alors aux élèves de vérifier, à la calculette que l'égalité $26 \times 12 = 26 \times 10 + 26 \times 2$ est bien exacte. Un groupe d'élève s'étonne de ne pas trouver les mêmes résultats de chaque côté de l'égalité : d'un côté, ils trouvent 312 ; mais de l'autre côté, ils trouvent 572.

a) Expliquer d'où provient ce problème.

b) Le professeur des écoles utilise alors ce problème pour introduire un nouvel mathématique, lequel ?

## PARTIE C : utilisation d'un environnement numérique

Un professeur des écoles de cycle 2 prépare une séance de calcul mental. Il doit choisir entre deux ressources :

(A) le logiciel « Calcul Mental, Calcul Réfléchi » des éditions Nathan (voir annexe) car sa classe est équipée d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur. Le maître projette les exercices et les élèves écrivent les résultats sur une feuille ;

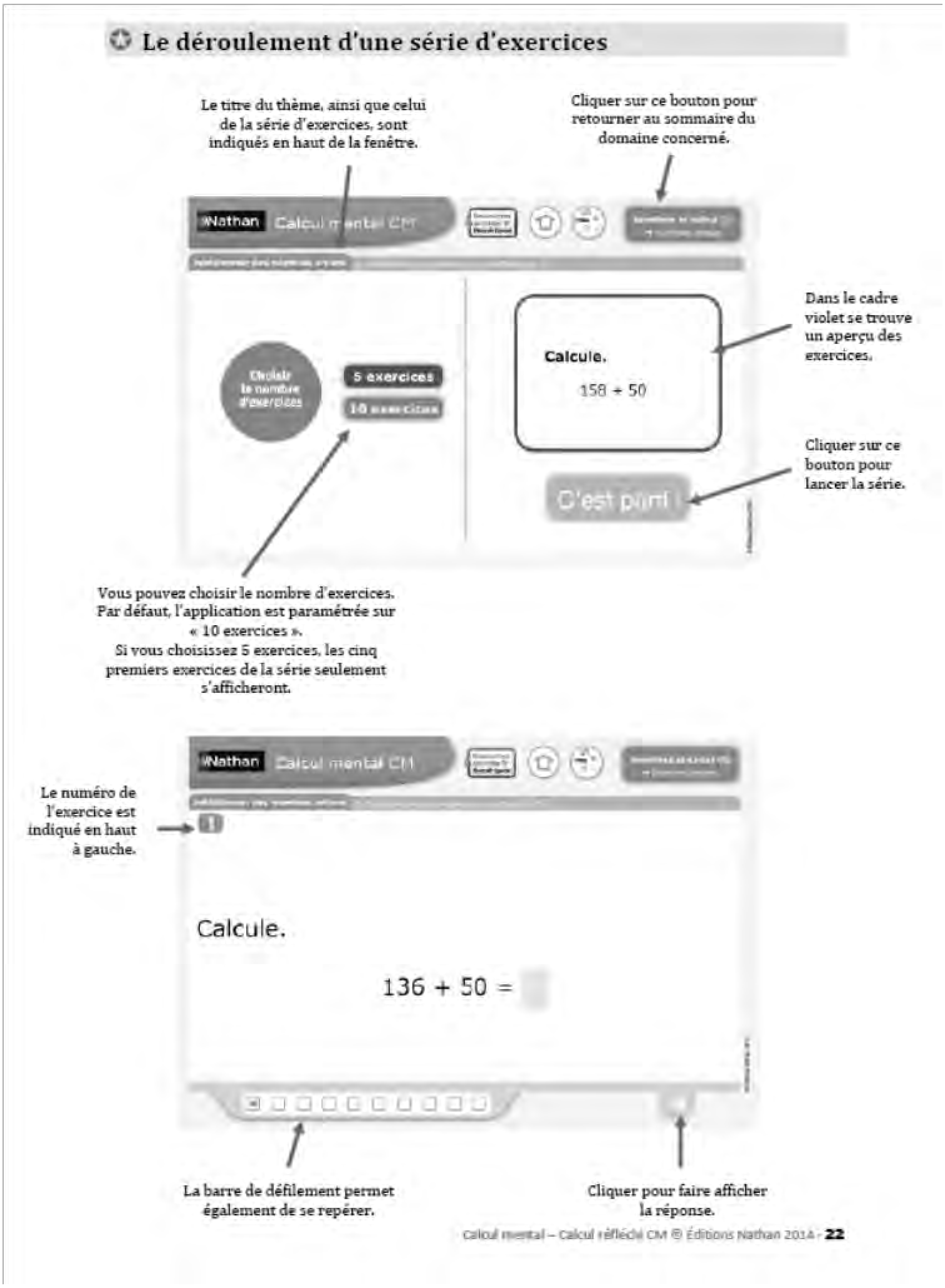
ou

(B) le procédé « La Martinière » car chaque élève possède une ardoise. Le maitre dicte un calcul, au premier « top », les élèves écrivent le résultat sur l'ardoise ; au second « top », les élèves montrent leur ardoise.

Donner un avantage et un inconvénient de chaque ressource en justifiant les propositions.

## ANNEXE

Document issu du site http://www.nathan.fr/webapps/cpg2-0/default.asp?idcpg=1278&idunite=22417



# LA SOUSTRACTION
# d'après un sujet de Lyon

**Critique de document pédagogique concernant une technique de la soustraction.**

Les questions suivantes portent sur les extraits de « Vivre les Maths CE2 » édition 2016 séances 81 et 82 en annexe.

1) Quelle propriété mathématique est illustrée dans les exercices de la séance 81 ?

2) Les exercices de la séance 81 préparent-ils aux deux méthodes présentées dans l'exercice 1 de la séance 82 ?

3) Les auteurs du manuel n'ont pas choisi de faire effectuer une soustraction telle que 92 – 39 dès la séance 81. Donner un argument qui plaide pour ce choix.

4) Commenter les étapes de la méthode 1 de la séance 82 appliquée à la soustraction 702 – 56.

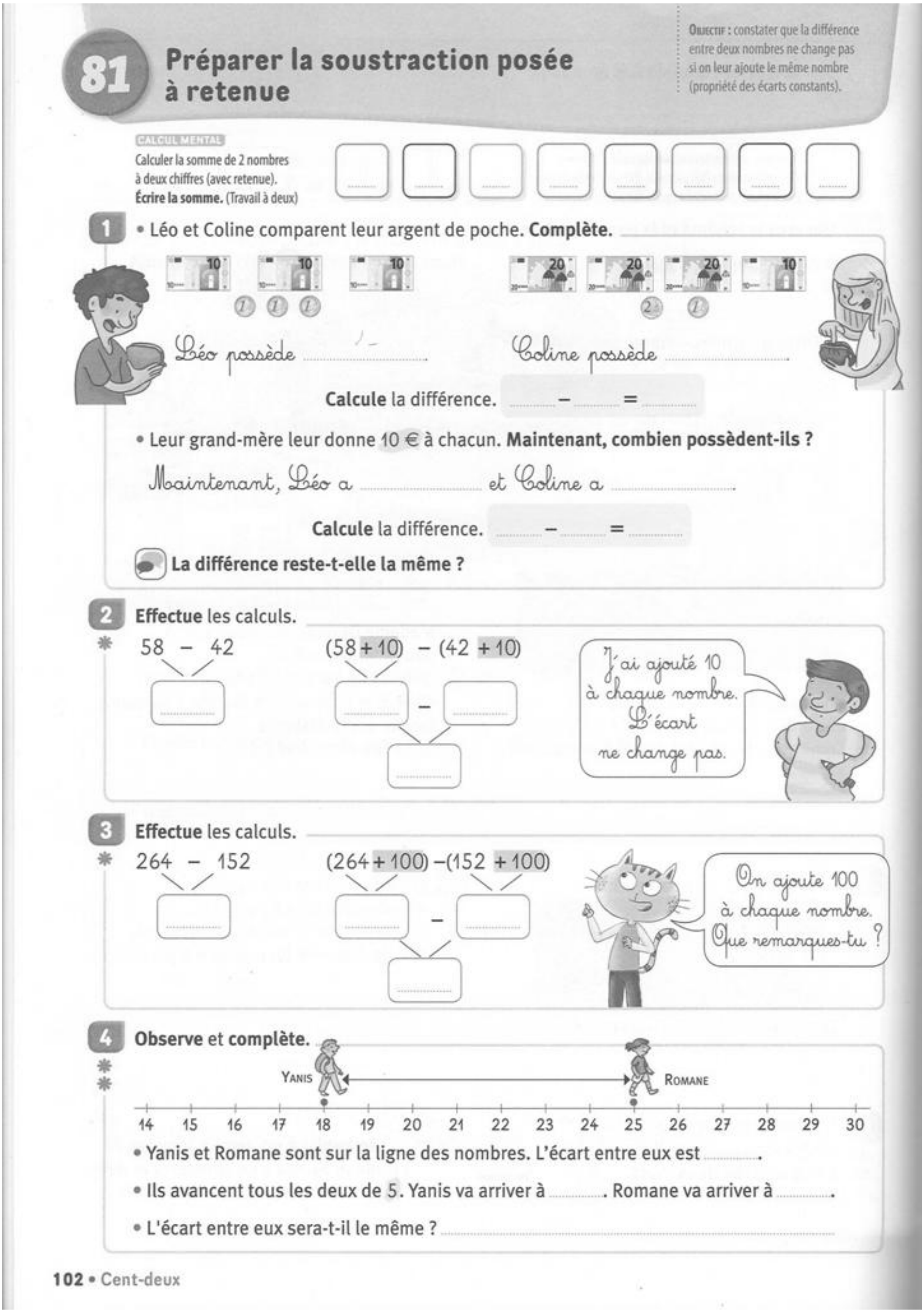
5) Comparer les deux méthodes de ce manuel pour la technique de la soustraction posée en répondant aux questions suivantes :

- Sur quel(s) principe(s) mathématique(s) s'appuient-elles ?
- Quelles connaissances préalables (savoirs et savoir-faire) doivent avoir les élèves ?
- Quelle(s) vérification(s) proposée(s) ?

6) Un élève ne comprend pas les « petits 1 » écrits dans la méthode 2. Comment l'enseignant peut-il l'aider à faire le lien entre les exercices de la séance 81 et la méthode 2 ?

7) Les deux problèmes n°1 des séances 81 et 82 (celui avec Léo et Coline et celui avec Farah) relèvent tous deux de la soustraction. Donner deux différences entre ces problèmes (hormis le strict contexte),

# ANNEXE



**81** **Préparer la soustraction posée à retenue**

OBJECTIF : constater que la différence entre deux nombres ne change pas si on leur ajoute le même nombre (propriété des écarts constants).

CALCUL MENTAL
Calculer la somme de 2 nombres à deux chiffres (avec retenue).
**Écrire la somme.** (Travail à deux)

**1** • Léo et Coline comparent leur argent de poche. **Complète.**

Léo possède ..........  Coline possède ..........

**Calcule** la différence. ...... – ...... = ......

• Leur grand-mère leur donne 10 € à chacun. **Maintenant, combien possèdent-ils ?**

Maintenant, Léo a .......... et Coline a ..........

**Calcule** la différence. ...... – ...... = ......

**La différence reste-t-elle la même ?**

**2** **Effectue** les calculs.

58 – 42  (58 + 10) – (42 + 10)

J'ai ajouté 10 à chaque nombre. L'écart ne change pas.

**3** **Effectue** les calculs.

264 – 152  (264 + 100) –(152 + 100)

On ajoute 100 à chaque nombre. Que remarques-tu ?

**4** **Observe** et **complète.**

YANIS  ROMANE

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

• Yanis et Romane sont sur la ligne des nombres. L'écart entre eux est ..........

• Ils avancent tous les deux de 5. Yanis va arriver à .......... Romane va arriver à ..........

• L'écart entre eux sera-t-il le même ? ..........

102 • Cent-deux

# 82 La soustraction posée à retenue

**Objectif :** étudier deux techniques de la soustraction posée à retenue.

**CALCUL MENTAL**

Problème : calculer le complément entre 2 centaines.
« Une citerne peut contenir 1 500 L.
Combien de litres faut-il ajouter pour la remplir si elle contient déjà 1 200 L ? »

**1** **Lis** le problème. **Observe** les deux méthodes pour faire la soustraction.

Farah a des billes en terre et des billes en verre.
En tout elle a 592 billes. 239 billes sont en terre.
**Combien a-t-elle de billes en verre ?**

MÉTHODE 1

| c | d | u |
|---|---|---|
| | 8 | |
| 5 | $\cancel{9}$ | 12 |
| − 2 | 3 | 9 |
| 3 | 5 | 3 |

2u − 9u, impossible !
Je prends 1 dizaine à 9 dizaines,
je la transforme en 10 unités.
12u − 9u = 3u
8d − 3d = 5d

MÉTHODE 2

| c | d | u |
|---|---|---|
| 5 | 9 | 12 |
| − 2 | 3 + 1 | 9 |
| 3 | 5 | 3 |

2u − 9u, impossible !
J'ajoute 10 unités à 2 unités mais
je dois aussi ajouter 1 dizaine à 3 dizaines.
12u − 9u = 3u
9d − 4d = 5d

**Vérifie** la soustraction en faisant une addition.

**2** **Effectue** les soustractions.

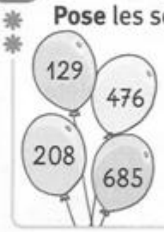
Vérifie en faisant une addition.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 9 | 7 | 1 |
| − | 5 | 2 | 8 |
| | . | . | . |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 | 6 | 3 |
| − | 2 | 4 | 9 |
| | . | . | . |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 8 | 5 | 2 |
| − | 2 | 7 | 4 | 8 |
| | . | . | . | . |

**3** Avec ces quatre nombres, on peut effectuer six soustractions.
**Pose** les soustractions, puis **effectue**-les.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 685 | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| − 129 | − . . . | − . . . | − . . . | − . . . | − . . . |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |

**4** **Quel est le chiffre manquant ? Complète.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 3 1 | 7 | 2 9 2 | 4 |
| − 4 0 8 | ou | − 1 8 8 | ou |
| 5 2 . | 3 | 1 0 . | 6 |

**La petite question**

**Quel était le nombre de carrés de chocolat de la tablette entière ?**

..........

103 • Cent-trois

# ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
# Numération au cycle 2 d'après un sujet de La Roche sur Yon

**Le « Ziglotron » et le « Grand ziglotron » au cycle 2**

Cette partie prend appui sur des extraits du fichier et du guide pédagogique Cap Maths CP, Hatier 2016, et du fichier Cap Maths CE2, Hatier 2016, reproduits en annexe.

**Annexe 1** : Extrait du Guide Pédagogique Cap Maths CP, Hatier 2016, pages 10 et 11.

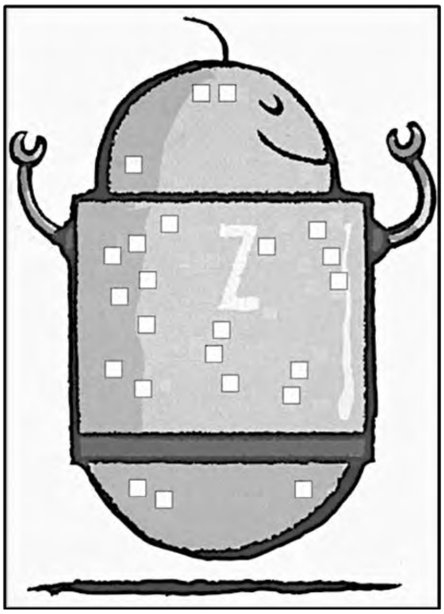
**Annexe 2** : Extrait du Guide Pédagogique Cap Maths CP, Hatier 2016, page 134.

**Annexe 3** : Extrait du Fichier de l'élève Cap Maths CP, Hatier 2016, page 53.

**Annexe 4** : Extrait du Fichier de l'élève Cap Maths CE2, Hatier 2016, page 45.

## 1) Analyse de l'annexe 1 « Le ziglotron »

On s'intéresse d'abord à **l'annexe 1 « Le Ziglotron »**. Le Ziglotron est une représentation d'un petit robot sur une fiche. Il s'agit d'y coller la bonne quantité de gommettes pour remplacer les «boutons» manquants, représentés par des petits carrés blancs. Ces gommettes sont à disposition dans des barquettes. Cette séance a lieu en début d'année de CP.



a) Quel est le rôle de la phase 1 ?

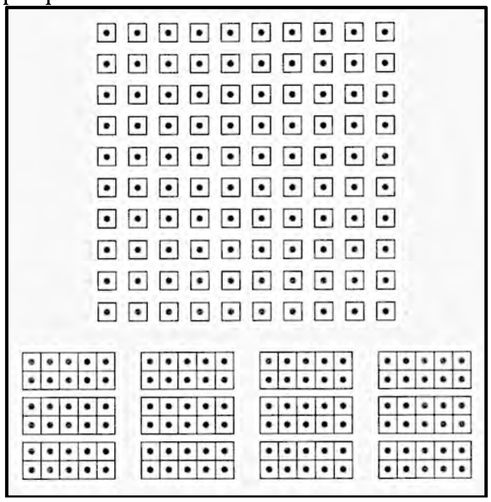
b) Indiquer deux procédures correctes qu'un élève peut mettre en œuvre pour réussir la tâche dans la phase 2.

c) Indiquer deux erreurs possibles dans cette phase 2.

d) À la fin de ce document, il est indiqué dans la rubrique « à suivre » : « En séance 4 et 5, ce travail sera repris avec d'autres contraintes : réussir en 1 seul voyage, demander oralement la bonne quantité de gommettes, la demander par écrit ». Indiquer les objectifs qui seront visés par l'introduction de chacune de ces nouvelles contraintes.

## 2) Analyse de l'annexe 2 « Le grand ziglotron »

On s'intéresse maintenant à **l'annexe 2 « Le Grand Ziglotron »**. Cette séance se situe un peu plus tard dans l'année (période 2). Cette fois, les gommettes se présentent sous forme de gommettes isolées ou groupées par 10, sous forme de plaques.



a) Pourquoi est-il précisé dans la consigne de la phase 1 que « les marchands ne peuvent pas donner plus de 9 boutons isolés » ?

b) Citer deux procédures correctes et deux erreurs que peuvent faire les élèves qui doivent remplir le bon de commande.

c) Citer deux erreurs que peut faire l'élève qui joue le rôle du marchand.

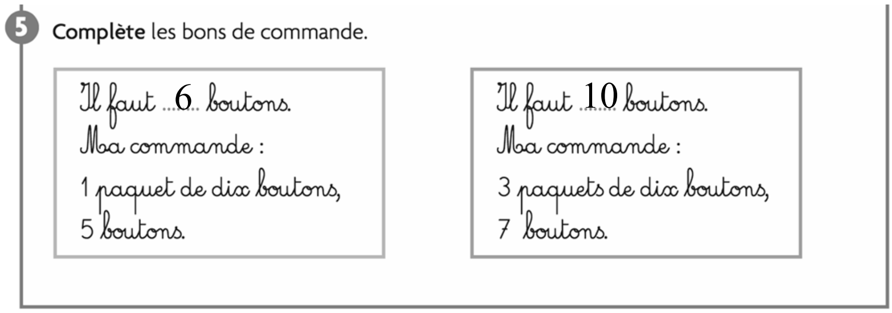
d) Proposer une trace écrite pour la synthèse de cette séance.

## 3) Analyse de l'annexe 3

On s'intéresse maintenant à **l'annexe 3**, présentant deux exercices d'application de la séance précédente.

a) Les procédures proposées à la question 2) b) sont-elles toujours envisageables pour répondre correctement à l'exercice 4 ?

b) Voici une copie du fichier de Marina. Analyser ses erreurs à l'exercice 5 et proposer une piste de remédiation.




## 4) Analyse de l'annexe 4

On s'intéresse pour terminer à **l'annexe 4**, présentant une série de cinq exercices du fichier CE2 de Cap Maths.

a) Décrire une procédure correcte qu'un élève peut mettre en œuvre pour réussir l'exercice 1.

b) Résoudre les exercices 4 et 5.

c) Décrire deux erreurs possibles pour l'exercice 4 en émettant une hypothèse sur leur origine.

d) Célia, une autre élève de CE2, est bloquée à l'exercice 5. Après avoir proposé la solution « 25 billets de 100€ et 3 billets de 10€ », elle ne parvient pas à trouver d'autres solutions. Quelle aide pourrait-on lui apporter ?

## Annexe 1

### Extrait du guide du maitre Cap Maths CP, Hatier 2016 , page 10

| | Tâche | Matériel | Connaissances travaillées |
|---|---|---|---|
| **APPRENDRE** Nombres/Problèmes | Les nombres, mémoire des quantités<br>RECHERCHE **Le ziglotron (1)**<br>– Compléter une collection en allant chercher les objets manquants (en 2 voyages au plus) | pour la classe :<br>– environ 300 gommettes de la taille des boutons du ziglotron, mises dans 3 boites<br>par élève :<br>– un des 3 ziglotrons sur lequel des boutons ont été noircis par l'enseignant (respectivement 3, 6, 8 boutons laissés blancs) › **fiche 5**<br>– une feuille de papier | – **Quantités équipotentes** (ayant la même quantité d'éléments)<br>– **Représentation d'une quantité** (collection témoin, mot-nombre, décomposition et mots-nombres…) |

**APPRENDRE**

**Les nombres, mémoire des quantités (1)**

**– Élaborer une procédure pour résoudre un problème de réalisation d'une collection ayant autant d'objets qu'une collection donnée.**

**– Représenter une quantité (collection témoin, mot-nombre, décomposition et mots-nombres).**

**RECHERCHE**

**Le ziglotron (1) :** Les élèves doivent trouver un moyen pour ramener exactement la quantité de boutons qui manquent sur le ziglotron. Pour cela, ils doivent réussir en faisant au plus deux voyages vers la réserve de boutons où ils peuvent se servir eux-mêmes.


AVERTISSEMENT Les quantités de boutons manquants ont été choisies dans le domaine numérique de 1 à 10 pour être compatibles avec les attendus des nouveaux programmes de GS (notamment en matière d'écriture des nombres). En fonction des connaissances initiales des élèves, il est possible de choisir des quantités plus importantes.

**PHASE 1 Présentation du problème**

• Présenter les ziglotrons : ce sont des robots qui ne fonctionnent que si tous leurs boutons sont en place (éventuellement en montrer un qui marche : aucun bouton n'est absent).

• Montrer ensuite un ziglotron sur lequel il manque des boutons ainsi que la boite de gommettes, et demander aux élèves ce qu'il faut faire (ne pas prendre en compte les réponses du type « il faut compter »).

• Préciser la tâche :

➡ *Gribouille a joué avec les ziglotrons et il a arraché plusieurs boutons (ceux qui sont absents sur le dessin). Il faut donc réparer les ziglotrons. Heureusement, on dispose d'une boite de boutons (des gommettes). Je la place sur mon bureau (ou dans un autre coin éloigné des élèves). Il faut aller chercher dans la boite juste ce qu'il faut de gommettes pour réparer votre ziglotron, pas une de plus, pas une de moins. Il faut donc rapporter juste ce qu'il faut de gommettes. Attention, posez vos gommettes à côté du ziglotron. Vous ne les collerez que lorsque vous serez surs d'en avoir juste assez.*

• Demander à quelques élèves de reformuler la tâche.

Cette première séance a pour but l'**appropriation de la situation.** Les élèves ont droit à deux tentatives pour réussir : ils peuvent donc corriger ou recommencer leur première prise de gommettes. Ils peuvent réussir en utilisant le dénombrement, ou en utilisant une autre procédure (voir commentaire de la phase 2).
**Il est important que la consigne n'induise ni l'idée de comptage ni celle de nombre,** puisque c'est ce qu'il s'agit de faire découvrir par les élèves. Il faut donc éviter les consignes du type *« combien manque-t-il de gommettes ? »* ou *« compte les gommettes qui manquent ».*
Par la suite (séances 4 et 5), des contraintes seront apportées pour obliger les élèves à utiliser les nombres : réussir du premier coup, passer la commande oralement, puis par écrit.

**Annexe 1 (suite)**

**Extrait du guide du maitre Cap Maths CP, Hatier 2016 , page 11**

**PHASE 2 Recherche d'une procédure**

• Distribuer à chaque élève un des trois ziglotrons (3, 6 et 8 boutons absents).

• Inviter les élèves à réfléchir à ce qu'ils vont prendre dans la boite. Puis, par petits groupes (par rangées ou par tables, par exemple), ils vont chercher leurs gommettes. Ils se servent eux-mêmes, sous le contrôle de l'enseignant, puis retournent à leur place pour poser les gommettes à côté de leur ziglotron, sans les placer sur celui-ci.

• Lorsque tous les élèves ont été servis, préciser :

⇒ *Si vous pensez avoir réussi, vous pouvez coller les gommettes. S'il y en a trop, collez celles qui sont en trop en bas de la feuille. Si vous pensez ne pas avoir assez de gommettes ou en avoir trop, vous pouvez revenir une fois et en remettre ou en reprendre dans la boite. À votre retour, vous les collez sur le ziglotron.*

**Procédures possibles :**
– représenter les boutons manquants par une quantité équivalente, par exemple par correspondance terme à terme : objets dessinés, doigts levés… ;
– rapporter une quantité aléatoire de boutons, puis corriger en en prenant de nouveaux ou en en rendant ;
– dénombrer (par reconnaissance immédiate ou par comptage d'un en un, selon les quantités) et garder le nombre en mémoire ;
– décomposer la quantité en quantités directement perceptibles et garder en mémoire les nombres associés (par exemple, 3 et 3 pour la quantité de 6 gommettes).

**Erreurs possibles :**
– se fier à une simple estimation ;
– oublier le nombre obtenu ;
– se tromper au cours du dénombrement.

COLLECTIF

**PHASE 3 Mise en commun et synthèse**

• Recenser les réussites et les échecs, puis inviter les élèves à formuler les méthodes utilisées, par exemple en les reproduisant à partir d'un nouveau ziglotron devant les autres élèves.

**SYNTHÈSE**

• Reformuler le problème à résoudre, en insistant sur le fait qu'il faut avoir juste assez de gommettes, pas plus, pas moins.

• Rappeler les procédures correctes qui ont été effectivement utilisées, sans en valoriser aucune.

INDIVIDUEL

**PHASE 4 Reprise de l'activité**

• L'activité est reprise, en particulier pour les élèves qui n'ont pas réussi (par exemple, en atelier différencié : résolution du problème avec l'appui de l'enseignant).

**À SUIVRE**

**En séances 4 et 5**, ce travail sera repris avec d'autres contraintes : réussir en un seul voyage, demander oralement la bonne quantité de gommettes, la demander par écrit.

**Annexe 2**

**Extrait du guide du maitre Cap Maths CP, Hatier 2016, page 134**

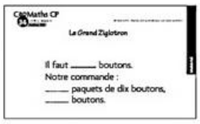
| | | | |
|---|---|---|---|
| **APPRENDRE** Nombres | **Dizaines et unités : valeur positionnelle des chiffres**<br>RECHERCHE **Le grand ziglotron (2)**<br>– Commander des boutons vendus à l'unité ou groupés par dix (pour recouvrir un ensemble de places vides) | <u>par équipe de 2 :</u><br>– un des 3 ziglotrons (23, 20 ou 37 boutons) **› fiches 31, 32 et 33**<br>– un bon de commande **› fiche 34**<br>– une feuille blanche et des ciseaux<br><u>pour un marchand :</u><br>– 1 boite avec 50 boutons isolés et 1 boite avec 100 plaques de dix boutons **› fiche 30** | **– Dizaines et unités**<br>**– Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre**<br>– Lecture des nombres jusqu'à 39 |

## APPRENDRE

### Dizaines et unités : valeur positionnelle des chiffres (2)

– Utiliser les groupements par dix pour réaliser une quantité.
– Comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

### RECHERCHE




**Le grand ziglotron (2) :** Les élèves reçoivent un ziglotron auquel il manque tous ses boutons. Des boutons sont disponibles chez un marchand, vendus à l'unité ou groupés par dix. Les élèves doivent compléter un bon de commande afin d'obtenir « juste ce qu'il faut de boutons » pour réparer celui qui leur a été remis, sans la possibilité de commander plus de 9 boutons isolés.

**PHASE 1 Présentation des nouvelles conditions**

• Organiser les équipes de 2 et distribuer les différentes fiches avec les ziglotrons (un ziglotron par équipe).

• Désigner les élèves qui joueront les marchands (2 ou 3 selon le nombre d'élèves de la classe).

• Montrer un ziglotron et un bon de commande et présenter la tâche :

➡ *Il faut à nouveau commander juste ce qu'il faut de boutons, mais cette fois :*
*– il faut écrire sur le bon de commande le nombre total de boutons nécessaires et, en dessous, le nombre de plaques et le nombre de boutons isolés que vous demandez ;*
*– les marchands ayant été dévalisés, ils ne peuvent pas donner plus de neuf boutons isolés ;*
*– vous ne devez pas parler aux marchands ; pour vous servir, ils doivent se débrouiller avec le bon de commande ;*
*– vous ne devez pas découper les plaques ni coller tout de suite les boutons, mais vous devez garder ce que le marchand vous a donné. Nous discuterons ensemble pour savoir si vous avez réussi.*

ÉQUIPES DE 2

**PHASE 2 Résolution du problème**

• Demander aux élèves d'une même équipe de se mettre d'accord sur ce qu'ils vont écrire sur le bon de commande. Puis un seul se déplace.

• Être attentif au respect des contraintes, notamment par les marchands.

• Ne pas faire de validation expérimentale avant la mise en commun. Demander aux élèves de conserver leur bon de commande complété avec ce que le marchand leur a remis.

COLLECTIF

**PHASE 3 Mise en commun et synthèse**

• Faire vérifier en premier la conformité de quelques commandes :
➡ *Sont-elles lisibles ?*
➡ *Sont-elles conformes aux contraintes (en particulier, pas plus de 9 boutons isolés) ?*

• Faire discuter ensuite leur pertinence (voir commentaire) :
➡ *Permettent-elles d'aboutir ?*
➡ *Permettent-elles d'obtenir le nombre voulu de boutons ?*

• En cas d'erreur, rechercher son origine :
➡ *Se situe-t-elle au moment de la prise d'information sur le ziglotron ?*
➡ *Se situe-t-elle au moment de la commande ?*
➡ *Se situe-t-elle au moment de la remise par le marchand de ce qui est demandé ?*

• Si nécessaire, faire procéder à la fin à une vérification en plaçant les boutons sur le ziglotron.


CapMaths CP
34 UNITÉ 5 - Séance 5
Guide p. 134

Le Grand Ziglotron

Il faut .............. boutons.
Notre commande :
............. paquets de dix boutons,
............. boutons.

Matériel

**Fiche 30**

**Annexe 3**

**Extrait du Fichier Elève Cap Maths CP, Hatier 2016, page 53**

## Dizaines et unités

**4** **Complète** les bons de commande.

Il faut 34 boutons.
Ma commande :
........ paquets de dix boutons,
........ boutons.

Il faut 20 boutons.
Ma commande :
........ paquets de dix boutons,
........ boutons.

**5** **Complète** les bons de commande.

Il faut ........ boutons.
Ma commande :
1 paquet de dix boutons,
5 boutons.

Il faut ........ boutons.
Ma commande :
3 paquets de dix boutons,
7 boutons.

cinquante-trois • 53

**Annexe 4**

**Extrait du Fichier de l'élève Cap Maths CE2, Hatier 2016, page 45**

DICO 6•7

## Milliers, centaines, dizaines et unités

**1** Lou veut fabriquer un grand collier de 137 perles.
Les perles sont vendues par boites de 10.
**Entoure les boites que doit acheter Lou pour fabriquer son collier.**
Elle veut en acheter le moins possible.

**2** Les craies sont vendues par boites de 10.
**Trouve le nombre de boites qu'il faut acheter pour chaque quantité de craies.**
Il faut en acheter chaque fois le moins possible.

| nombre de craies | nombre de boites |
|---|---|
| 548 | |
| 1 500 | |
| 3 580 | |
| 4 008 | |

**3** Les élastiques sont vendus par boites de 100.
**Trouve le nombre de boites qu'il faut acheter pour chaque quantité d'élastiques.**
Il faut en acheter chaque fois le moins possible.

| nombre d'élastiques | nombre de boites |
|---|---|
| 600 | |
| 2 000 | |
| 1 280 | |
| 5 086 | |

**4** **Combien y a-t-il de dizaines :**
a. dans 45 ? ............ b. dans 145 ? ............ c. dans 1 045 ? ............ d. dans 1 450 ? ............

**5** **Combien de billets de 10 € et de 100 € faut-il pour payer la somme de 2 530 € ?**
Trouve quatre solutions différentes.

a. ........ billets de 100 € et ........ billets de 10 €
b. ........ billets de 100 € et ........ billets de 10 €
c. ........ billets de 100 € et ........ billets de 10 €
d. ........ billets de 100 € et ........ billets de 10 €

# ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
# Géométrie plane au cycle 3 d'après un sujet de Nice

Vous trouverez en annexe une collection de six figures à partir de laquelle un enseignant propose le jeu du portrait suivant à ses élèves de CM2 :

> *« J'ai quatre sommets,*
> *Mes diagonales ne sont pas perpendiculaires,*
> *Mes côtés n'ont pas la même longueur,*
> *Je possède au moins un angle droit.*
> *QUI SUIS-JE ?*
> *Tu dois répondre par une lettre : figure ... »*

1) Quelle est la figure recherchée ? Vous expliciterez soigneusement votre démarche en indiquant ligne par ligne ce que le texte apporte (ou pas) comme informations.
2) Est-il possible de supprimer une ligne (ou une phrase) dans ce jeu du portrait ? Si oui, laquelle ou lesquelles ? Justifier votre réponse par une propriété mathématique.
3) Relever deux difficultés liées à la formulation des phrases utilisées dans ce jeu du portrait.
4) Expliciter trois compétences que peuvent mobiliser les élèves lors de la mise en œuvre de cette activité.
5) Les figures sont présentées sur un support quadrillé. Donner un exemple qui illustre comment ce support peut faciliter les procédures des élèves et un exemple qui montre au contraire que ce support peut être source de difficulté.

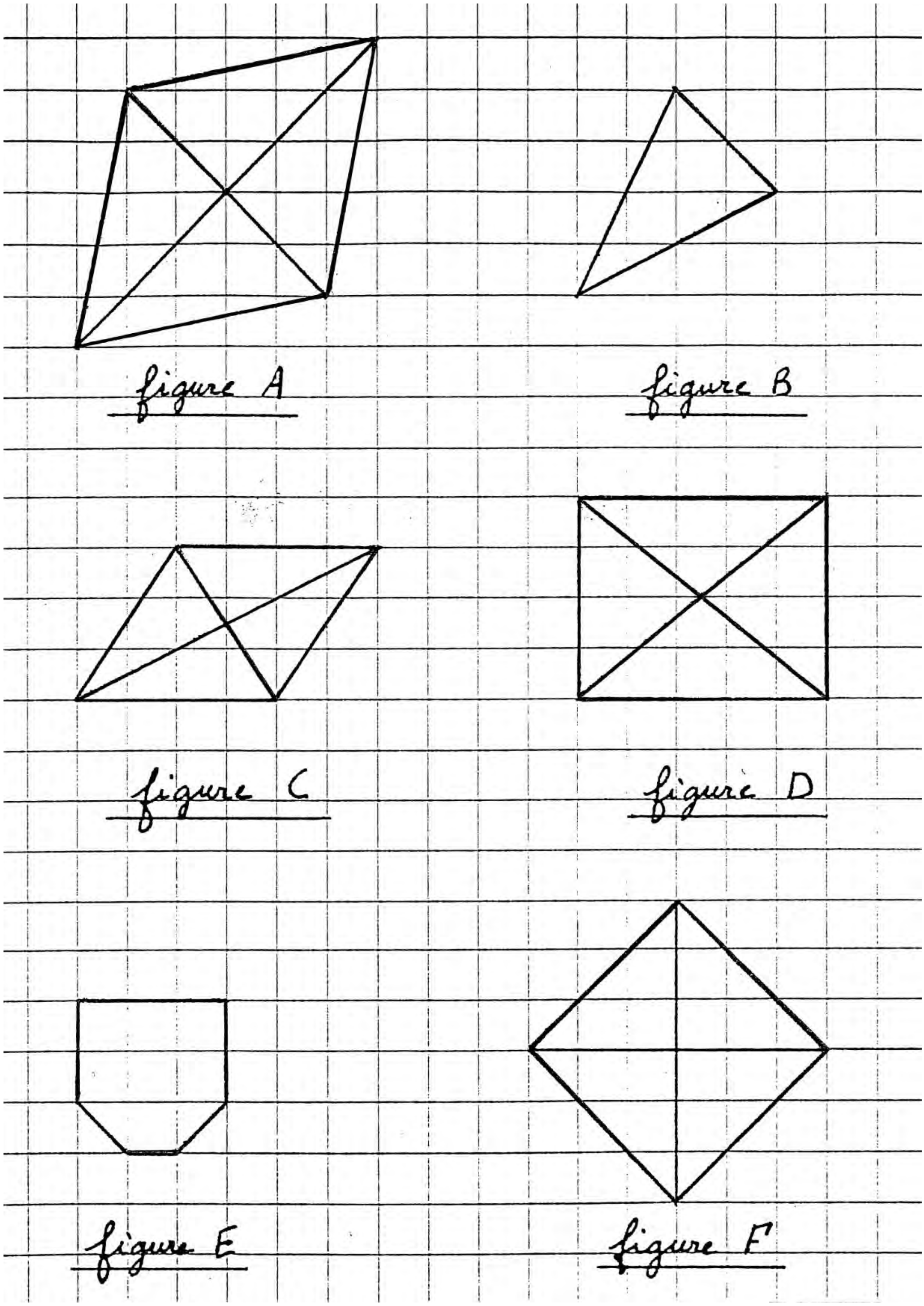
Un peu plus tard dans l'année, l'enseignant présente toujours la même collection de figures (voir annexe) en demandant cette fois de répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes :

> a) La figure A est un losange.
> b) La figure B est un triangle isocèle.
> c) La figure C possède un axe de symétrie.
> d) La figure D est un rectangle.
> e) La figure F est un carré.
> f) Toutes ces figures sont des polygones.

6) Quelle(s) différence(s) principale(s) voyez-vous, en termes de savoirs visés, entre cette activité et celle du jeu du portrait ?

7) Justifier pourquoi ce questionnaire a lieu après le jeu du portrait.

**Annexe**



# EXERCICES ÉLABORÉS
# À PARTIR
# DES CONCOURS BLANCS
# ET EXAMENS
# PROPOSÉS DANS LES ESPE

# CORRIGÉS

# VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMENS DES ESPE)

**1)** Soit $n$ un entier naturel.

**Affirmation 1 :** Le nombre $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ est un multiple de 13.

**VRAI**

**Justification :**

Pour tout n ≥ 0, on a : $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n \times 1 + 3^n \times 3 + 3^n \times 3^2 = 3^n \times (1 + 3 + 3^2) = 3^n \times 13$.

**2)** On considère le nombre $10^9 - 9$.

**Affirmation 2 :** Lorsqu'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

**VRAI**

**Justification :**

*Méthode 1 (réalisation du calcul)*

$10^9 - 9 = 1\,000\,000\,000 - 9 = 999\,999\,991$.

L'écriture chiffrée du nombre contient huit fois le chiffre 9 et une fois le chiffre 1. La somme des chiffres du nombre est 73.

*Méthode 2 (utilisation de l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a + 1)$)*

$10^9 - 9 = 10^9 - 10 + 1 = 10 \times (10^8 - 1) + 1$.

Or $10^8 - 1 = (10 - 1) \times (10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0)$

$= 9 \times (10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$.

Donc $10^9 - 9 = 10 \times 9 \times (10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) + 1$.

Ou $10^9 - 9 = 9 \times 10^8 + 9 \times 10^7 + 9 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 1$.

L'écriture chiffrée du nombre contient huit fois le chiffre 9 et une fois le chiffre 1.

La somme des chiffres du nombre est 73.

*Méthode 2bis (utilisation de l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a + 1)$)*

$10^9 - 9 = (10^9 - 1) - 8 = (10 - 1) \times (10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) - 8$

Donc $10^9 - 9 = 9 \times (10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) - 8$.

Ou $10^9 - 9 = 9 \times 10^8 + 9 \times 10^7 + 9 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 1$.

L'écriture chiffrée du nombre contient huit fois le chiffre 9 et une fois le chiffre 1.

La somme des chiffres du nombre est 73.

**3)** Sur une carte au $\frac{1}{25000}$, deux villages sont distants de 7 cm.

**Affirmation 3 :** Ces deux villages sont distants de $\frac{35}{8}$ cm sur une deuxième carte au $\frac{1}{40000}$.

**VRAI**

**Justification :**

*Rappel :*

*La notion d'échelle exprime la relation de proportionnalité existant entre les distances repérées sur une carte et les distances réelles, toutes les grandeurs en jeu étant exprimées dans la même unité de mesure.*

*L'échelle d'une carte de randonnée correspond au coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir la distance sur la carte à partir de la distance réelle. On a alors : distance sur la carte = distance réelle × échelle.*

*Méthode 1 (calcul de toutes les distances en utilisant les coefficient de proportionnalité)*

On note $d$ la mesure de la distance réelle (exprimée en cm) : $7 = d \times \frac{1}{25\,000}$.

Alors $d = 7 \times 25\,000 = 175\,000$.

Sur une carte au $\frac{1}{40\,000}$, cette distance est représentée par une mesure (exprimée en cm) de :

$$175\,000 \times \frac{1}{40\,000} = \frac{175\,000}{40\,000} = \frac{35 \times 5000}{8 \times 5000} = \frac{35}{8}.$$

*Méthode 2 (calcul de toutes les distances en utilisant les relations de proportionnalité)*

Première carte : 1 cm sur la première carte représente 25 000 cm dans la réalité.

| | | |
|---|---|---|
| **Distance réelle (en cm)** | 25 000 | $7 \times 25\,000 = 175\,000$ |
| **Distance sur la première carte (en cm)** | 1 | 7 |

De plus, sur la deuxième carte :

| | | |
|---|---|---|
| **Distance réelle (en cm)** | 40 000 | 175 000 |
| **Distance sur la deuxième carte (en cm)** | 1 | $\frac{1 \times 175\,000}{40\,000} = 4{,}375$ |

De plus $\frac{35}{8} = 4{,}375$.

Les deux villages sont donc distants de $\frac{35}{8}$ cm sur la deuxième carte.

*Méthode 3 (calcul direct de la distance sur la deuxième carte)*

Les relations entre distance réelle et distances sur les deux cartes sont les suivantes :

| Distance réelle (en cm) | Distance sur la première carte (en cm) | Distance sur la deuxième carte (en cm) |
|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{25\,000}$ | $\frac{1}{40\,000}$ |

Pour passer d'une carte au $\frac{1}{25\,000}$ à une carte au $\frac{1}{40\,000}$, il suffit de multiplier toutes les distances de la première carte par $\frac{25\,000}{40\,000} = \frac{5}{8}$.

Donc sur la carte au $\frac{1}{40\,000}$, les deux villages sont distants de :

$$7 \text{ cm } \times \frac{5}{8} = \frac{35}{8} \text{ cm}.$$

**4)** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

**Affirmation 4 :** La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique est de $\frac{20}{32}$.

**FAUX**

**Justification :**

*Méthode 1 (calcul du nombre de cartes qui ne sont pas des piques ni des as)*

Dans un jeu, il y a 8 piques et 4 as dont celui de pique, soit un nombre de cartes égal à : $8 + 4 - 1 = 11$.

Dans le jeu de 32 cartes, 11 cartes sont soit des piques soit des as. Il y a donc $32 - 11$, soit 21 cartes qui ne sont ni des piques, ni des as.

La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique dans le jeu est $\frac{21}{32}$.

La probabilité n'est pas égale à $\frac{20}{32}$.

*Méthode 2 (calcul de la probabilité de l'événement contraire à « tirer un pique ou un as »)*

Dans un jeu, il y a 8 piques et 4 as dont celui de pique, soit un nombre de cartes égal à $8 + 4 - 1 = 11$.

La probabilité de l'événement « obtenir un pique ou un as » dans le jeu de cartes est alors $\frac{11}{32}$.

L'événement « n'obtenir ni un as, ni un pique » est l'événement contraire, donc sa probabilité est égale à :

$1 - \frac{11}{32} = \frac{32 - 11}{32} = \frac{21}{32}$.

La probabilité n'est pas égale à $\frac{20}{32}$.

*Méthode 3 (dénombrement des cartes qui ne sont ni des piques ni des as)*

Un jeu de 32 cartes est composé des cartes suivantes, parmi lesquelles les cartes piques et as sont grisées :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| As♥ | R♥ | D♥ | V♥ | 10♥ | 9♥ | 8♥ | 7♥ |
| As♣ | R♣ | D♣ | V♣ | 10♣ | 9♣ | 8♣ | 7♣ |
| As♦ | R♦ | D♦ | V♦ | 10♦ | 9♦ | 8♦ | 7♦ |
| As♠ | R♠ | D♠ | V♠ | 10♠ | 9♠ | 8♠ | 7♠ |

Il reste alors 21 cartes non grisées.

La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique dans le jeu est $\frac{21}{32}$. La probabilité n'est pas égale à $\frac{20}{32}$.

**5)** Dans un référendum local, 40% des femmes et 70% des hommes ont répondu « OUI » à la question posée.

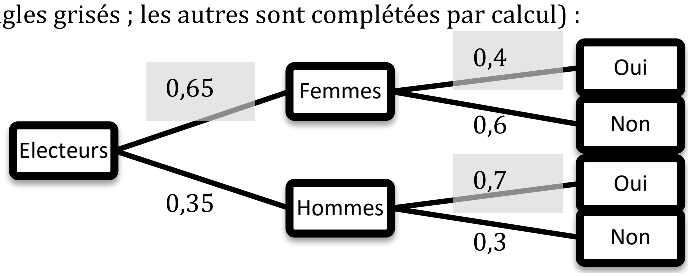
**Affirmation 5 :** Sachant que l'électorat contient 65% de femmes et que l'on a comptabilisé aucun vote blanc ou nul, la majorité des votants a répondu « NON ».

**FAUX**

**Justification :**

*Méthode 1 (utilisation d'un arbre pondéré)*

Le problème peut être représenté par l'arbre pondéré suivant que l'on complète (les données de l'énoncé figurent dans les rectangles grisés ; les autres sont complétées par calcul) :




Par conséquent, le pourcentage d'électeurs ayant voté « NON » est donné par le calcul suivant :

$$0,65 \times 0,6 + 0,35 \times 0,3 = 0,495 = \frac{49,5}{100}.$$

Ceci ne constitue pas la majorité des électeurs.

*Méthode 2 (calcul direct du pourcentage)*

Les femmes ayant répondu « OUI » représentent 40 % × 65 % soit 26 % des électeurs. Les hommes ayant répondu « OUI » représentent 70 % × 35 % soit 24,5 % des électeurs. On a donc 26 % + 24,5 % soit 50,5 % des électeurs qui ont répondu « OUI ». Par conséquent, 49,5 % des électeurs a répondu « NON », ce qui ne constitue pas la majorité des électeurs.

*Méthode 3 (calcul du nombre d'électeurs ayant voté « NON » sur un panel de 100 électeurs)*

Sur 100 électeurs, 65 sont des femmes et donc 35 (= 100 – 65) sont des hommes.

Puisque 40 % des femmes ont voté « OUI », 60 % d'entre elles ont voté « NON », soit $65 \times \frac{60}{100} = 39$.

Puisque 70 % des hommes ont voté « OUI », 30 % d'entre eux ont voté « NON », soit $35 \times \frac{30}{100} = 10{,}5$.

Par conséquent, le nombre d'électeurs ayant voté « NON » dans un panel de 100 électeurs est alors : $39 + 10{,}5 = 49{,}5$.
Ceci ne constitue pas la majorité des électeurs.

**6) Affirmation 6 :** 1 cL de liquide occupe un volume égal à 0,001 dm$^3$.
**FAUX**

**Justification :**

*Rappel :*
*La relation $1\ dm^3 = 1\ L$ doit être connue. Cette relation permet de résoudre les problèmes de conversion des volumes en contenances et réciproquement.*

*Méthode 1 (conversion du volume en contenance)*
Puisque $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, on a : $0{,}001\ \text{dm}^3 = 0{,}001\ \text{L} = 0{,}001 \times 1\ \text{L} = 0{,}001 \times 100\ \text{cL} = 0{,}1\ \text{cL}$.

*Méthode 2 (conversion de la contenance en volume)*
Puisque $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$, on a : $1\ \text{cL} = \frac{1}{100}\text{L} = \frac{1}{100}\text{dm}^3 = 0{,}01\ \text{dm}^3$.

**7) Affirmation 7 :** Quand on divise 12 par 13, la 134$^{\text{ème}}$ décimale et la 542$^{\text{ème}}$ décimale du quotient sont les mêmes.
**VRAI**

**Justification :**
On effectue la division de 12 par 13 :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 0 | | | | | | | | 1 3 |
| - | 1 | 1 | 7 | | | | | | | | 0, 9 2 3 0 7 6 9 … |
| | | | 3 | 0 | | | | | | | |
| | | - | 2 | 6 | | | | | | | |
| | | | | 4 | 0 | | | | | | |
| | | | - | 3 | 9 | | | | | | |
| | | | | | 1 | 0 | 0 | | | | |
| | | | | | - | 9 | 1 | | | | |
| | | | | | | | 9 | 0 | | | |
| | | | | | | - | 7 | 8 | | | |
| | | | | | | | 1 | 2 | 0 | | |
| | | | | | | - | 1 | 1 | 7 | | |
| | | | | | | | | | 3 | … | |

Ainsi $\frac{12}{13} = 0{,}923076923076\ldots$

La partie décimale de l'écriture à virgule de $\frac{12}{13}$ est périodique de période 6 (la séquence 923076 de 6 chiffres se répète indéfiniment après la virgule).

*Méthode 1 (calcul du nombre de périodes de 6 entre 542 et 134)*

On a $542 - 134 = 408 = 6 \times 68$.
Ainsi entre la 134^e^ et la 542^e^ décimale il y a un multiple de 6 décimales, c'est-à-dire un nombre entier de périodes. Donc, ces décimales sont les mêmes.

*Méthode 2 (explicitation des 134^e^ et 542^e^ décimales)*

On cherche le nombre de périodes de 6 chiffres avant d'atteindre la 134^e^ (respectivement la 542^e^) décimale.
On effectue pour cela la division euclidienne de 134 (respectivement 542) par 6 :
$134 = 22 \times 6 + 2$ et $542 = 90 \times 6 + 2$.
Alors les deux décimales sont les mêmes (et égales à la deuxième décimale, c'est-à-dire 2).

**8)** On sait que la moyenne de cinq nombres distincts est 4 et que, quand on enlève le plus grand de ces nombres, la moyenne baisse de 2.

**Affirmation 8 :** On ne peut pas déterminer le nombre enlevé.
**FAUX**

**Justification :**

*Méthode 1 (solution arithmétique)*

La moyenne des cinq nombres est de 4. La somme des cinq nombres est donc de $5 \times 4 = 20$.
La moyenne des 4 nombres restants est de 2. La somme des 4 nombres restants est donc de $4 \times 2 = 8$.
On en déduit que le nombre enlevé est $20 - 8 = 12$.

*Méthode 2 (solution algébrique)*

On note $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ cinq nombres distincts ($e$ étant le plus grand) dont la moyenne est égale à 4.
On peut alors écrire : $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 4$.
Soit $a+b+c+d+e = 4 \times 5 = 20$ (I).
D'autre part, d'après l'énoncé : $\frac{a+b+c+d}{4} = 4 - 2$.
Donc $a+b+c+d = 2 \times 4 = 8$ (II).
En remplaçant $a+b+c+d$ par sa valeur dans l'égalité (I), on obtient $8 + e = 20$.
Donc $e = 20 - 8 = 12$.

**9) Affirmation 9** : 189 est la somme de trois entiers impairs consécutifs.
**VRAI**

**Justification :**
$189 = 61 + 63 + 65$ ; or 61, 63 et 65 sont des nombres impairs et consécutifs.

**10) Affirmation 10 :** Un multiple de 45 est nécessairement un multiple de 9.
**VRAI**

**Justification :**
Soit n un multiple de 45. Il existe un nombre entier k tel que : $n = 45 \times k$.

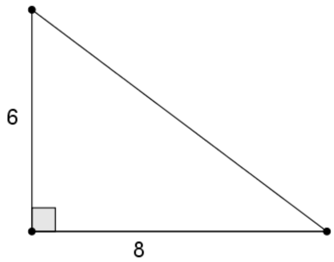
On a : $n = 45 \times k = 5 \times 9 \times k = 9 \times (5k)$.
Puisque k est un nombre entier, le nombre (5k) est aussi un nombre entier.
On déduit de l'égalité $n = 9 \times (5k)$, que n est un multiple de 9.

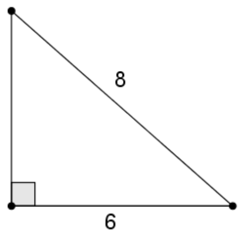
**11) Affirmation 11 :** Deux triangles rectangles ayant chacun un côté de longueur 6 cm et un côté de longueur 8 cm sont nécessairement isométriques.

**FAUX**

**Justification :**

Les triangles rectangles ci-dessous (représentés après réduction) ont chacun un côté de longueur 6 cm et un côté de longueur 8 cm et ne sont pas isométriques : selon le théorème de Pythagore, l'un a côté de longueur 10 cm et l'autre a un côté de longueur $\sqrt{28}$ cm.




**12) Affirmation 12** : Le nombre 1400 a exactement 12 diviseurs positifs.

**FAUX**

**Justification :**

*Méthode 1 (identification de tous les diviseurs positifs de 1400)*

En dressant la liste de tous les diviseurs de 1400, on obtient :

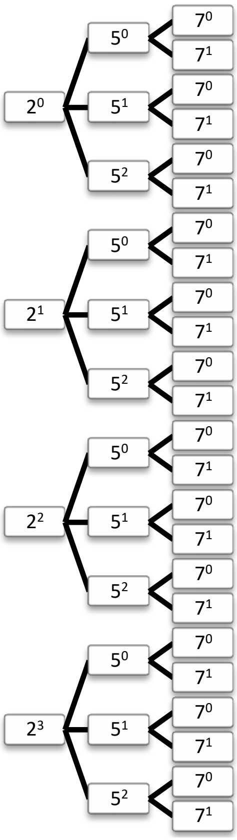
| | |
|---|---|
| 1 | 1400 |
| 2 | 700 |
| 4 | 350 |
| 5 | 280 |
| 7 | 200 |
| 8 | 175 |
| 10 | 140 |
| 14 | 100 |
| 20 | 70 |
| 25 | 56 |
| 28 | 50 |
| 35 | 40 |

On constate qu'il existe 24 diviseurs positifs de 1400.

Dans les méthodes suivantes, on décompose 1400 en produit de facteurs premiers :
$1400 = 14 \times 100 = 2 \times 7 \times 10^2 = 2 \times 7 \times (2 \times 5)^2 = 2^3 \times 5^2 \times 7$.

*Méthode 2 (identification de tous les diviseurs positifs de 1 400 à partir de la décomposition en facteurs premiers)*

L'arbre suivant présente tous les diviseurs positifs de 1 400 à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers :




On constate qu'il existe $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs positifs de 1 400.

*Méthode 3 (identification d'au moins 13 diviseurs de 1400)*

A partir de la décomposition de 1400 en produit de facteurs premiers, on peut constater que les nombres 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 14 ; 20 ; 25 ; 28 ; 100 ; et 1400 (par exemples) sont des diviseurs positifs de 1400. Ce dernier a donc au moins 13 diviseurs positifs.

*Méthode 4 (calcul du nombre de diviseurs de 1400)*

La décomposition en produit de facteurs premiers nous permet de calculer le nombre de diviseurs de 1400, sans dresser la liste de ceux-ci : en réalisant le produit de tous les exposants des facteurs premiers présents dans la décomposition du nombre auxquels on a ajouté 1.
Dans le cas de 1400, cela donne : $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$.
Donc 1400 a exactement 24 diviseurs positifs.

*Remarque :*

*Cette dernière méthode peut s'expliquer à l'aide d'un arbre comme celui présenté dans la méthode 2.*

**13) Affirmation 13 :** Le nombre $\frac{2}{21} \times \frac{35}{12}$ est un nombre décimal.

**FAUX**

**Justification :**

*Rappel :*

*Un nombre rationnel est un nombre décimal s'il peut être écrit comme une fraction de la forme* $\frac{a}{10^n}$ *(où a est un nombre entier et n un nombre entier naturel).*

*Un nombre rationnel est un nombre décimal si et seulement si, lorsqu'il est écrit sous la forme d'une fraction irréductible, le dénominateur de cette fraction ne contient dans sa décomposition que des puissances de 2 et/ou de 5.*

$$\frac{2}{21} \times \frac{35}{12} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 7 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{5}{2 \times 3 \times 3}.$$

Le dénominateur de la fraction irréductible obtenue contient dans sa décomposition des nombres autres que 2 ou 5. Ce nombre n'est donc pas un nombre décimal.

**14) Affirmation 14 :** Le nombre $\frac{(\sqrt{48}+\sqrt{363})}{\sqrt{3}}$ est un nombre rationnel.

**VRAI**

**Justification :**

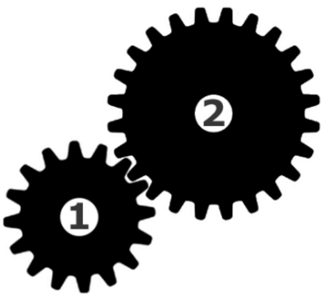
*Rappel :*

*L'ensemble des nombres entiers est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels. Autrement dit, tout nombre entier n est un nombre rationnel (il peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{1}$).*

$$\frac{(\sqrt{48} + \sqrt{363})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16 \times 3} + \sqrt{3 \times 121}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 11\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 15.$$

Ce nombre est un entier naturel. C'est donc aussi un rationnel.

**15)** On considère l'engrenage suivant composé de deux roues, l'une comportant seize dents et l'autre vingt-quatre dents :




**Affirmation 15** : Lorsque la roue 2 de l'engrenage fait soixante-quatre tours, la roue 1 fait exactement quatre-vingt-seize tours.

**FAUX**

**Justification :**

*Méthode 1 (recherche du nombre total de tours effectués par la roue 1)*

Nommons n le nombre de tours effectués par la roue 1 lorsque la roue 2 fait soixante-quatre tours. Nous savons que n satisfait la relation : $16 \times n = 24 \times 64$.

On en déduit que : $n = \frac{24 \times 64}{16} = 96$.

L'affirmation est donc vraie.

*Méthode 2 (identification du nombre de tours effectués par la roue 1 par tour de roue 2)*

Lorsque la roue 2 fait un tour, ses 24 dents sont rentrées en contact avec la roue 1 : la roue 1 a fait 24/16 tour (en effet, un tour de roue 1 vaut 16 dents).

Ainsi, si la roue 2 fait 64 tours, la roue 1 en fera $64 \times \frac{24}{16} = 96$.
L'affirmation est donc vraie.

*Méthode 3 (recherche du nombre de dents qui rentrent en contact)*

Lorsque la roue 2 fait 64 tours, il y a $64 \times 24$ dents qui rentrent en contact avec la roue 1.
Lorsque la roue 1 fait 96 tours, il y a $96 \times 16$ dents qui rentrent en contact avec la roue 2.
Or $64 \times 24 = 96 \times 16 = 1536$ donc l'affirmation est vraie.

*Méthode 4 (identification de la rotation de la roue1 par décalage de dent de la roue 2)*

Un décalage d'une dent de la roue 1 correspond à $\frac{1}{16}$ de tour de la roue 1.
64 tours de la roue 2 correspondent à $64 \times 24 = 1536$ décalages de une dent.
Or le décalage d'une dent de la roue 1 correspond au décalage d'une dent de la roue 2.
1536 décalages de une dent de la roue 1 correspond à $1536 \times \frac{1}{16} = 64$ tours de la roue 1.

*Méthode 5 (proportionnalité)*

| **Tour de roue 1** | 1 | ? |
|---|---|---|
| **Tour de roue 2** | $\frac{16}{24}$ | 64 |

Toute méthode pour trouver la quatrième proportionnelle est acceptée : $\dfrac{64 \times 1}{\frac{16}{24}} = 64 \times \frac{24}{16} = 96$.

**16)** Des photos, toutes de même format (18 cm sur 24 cm) et toutes mises bord à bord dans le même sens, recouvrent un panneau carré dont le côté mesure entre 3 et 4 mètres.

**Affirmation 16 :** Il y a 300 photos sur le panneau.

**VRAI**

**Justification :**

Puisque ces photos recouvrent ce panneau carré, cela signifie que la longueur du côté de ce carré est multiple de 18 cm et aussi multiple de 24 cm. Cherchons le plus petit de ces multiples, leur PPCM.
$18 = 2 \times 3 \times 3$ et $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.
Ainsi : $PPCM(18\,;24) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 8 \times 9 = 72$.
La longueur du panneau carré est donc un multiple de 72 cm (situé entre 3 m et 4 m).
Cherchons le multiple de 72 compris entre 300 et 400. On a : $72 \times 4 = 288$; $72 \times 5 = 360$ ; $72 \times 6 = 432$.
La longueur du côté du panneau carré est donc 360 cm.
Comme $\frac{360}{18} = 20$ et $\frac{360}{24} = 15$, le panneau contient 20 lignes de 15 photos (ou bien 15 lignes de 20 photos).
Le nombre de photos recouvrant le panneau est donc $20 \times 15 = 300$.

# PROBLÈME D'ALGORITHMIQUE ET DE GÉOMÉTRIE d'après des sujets de Marseille, Lyon et La Roche-sur-Yon

## PARTIE A : construction de triangles

### 1) Réalisation de la figure

#### a) Nature du triangle ABC

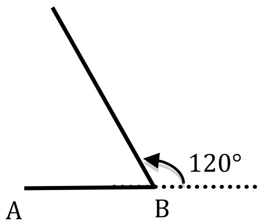
*Méthode 1 : mesure des longueurs des côtés*

Dans le bloc « triangle », les longueurs des trois côtés du triangle correspondent à 100 pixels. Le triangle ABC possède ainsi trois côtés de même longueur. **ABC est par conséquent un triangle équilatéral.**

*Méthode 2 : mesure des angles du triangle*

Les deux premières instructions 

conduisent à la figure suivante :




Nous pouvons en déduire l'angle en B dans le triangle ABC est le supplémentaire de l'angle de 120°.
Donc $\widehat{\mathrm{B}} = 180° - 120° = 60°$.
De même, les deux instructions suivantes conduisent à : $\widehat{\mathrm{C}} = 60°$.

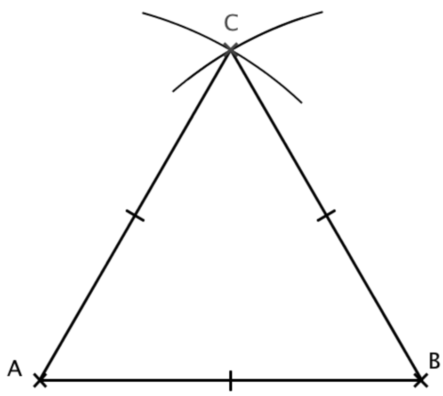
Or la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Par conséquent : $\widehat{\mathrm{A}} = 180° - 60° - 60° = 60°$.
Un triangle dont les angles sont de 60° est un triangle équilatéral.

**ABC est, par conséquent, un triangle équilatéral.**

#### b) Construction du triangle ABC

Dans la suite de la correction, on notera $a$ la longueur des côtés du triangle équilatéral ABC.

Dans la construction demandée, 1 cm représente 20 pixels. Le programme fait construire un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 100 pixels. Or $100 = 5 \times 20$.
Donc 100 pixels sont représentés par 5 cm.
La longueur des côtés du triangle ABC à construire est de 5 cm. Une construction possible, à la règle graduée et au compas est la suivante :



## 2) Amélioration de l'implémentation

Dans le bloc « triangle », on constate que le bloc d'instructions 

est répété trois fois.

Il suffit donc d'insérer ce bloc d'instructions dans la commande « répéter 3 fois », pour obtenir le même triangle ABC.

**Le script obtenu prend alors la forme simplifiée suivante :**

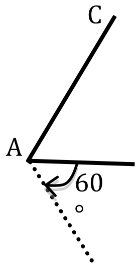

## 3) Utilisation du bloc « triangle »

### a) Construction de la figure obtenue avec le programme

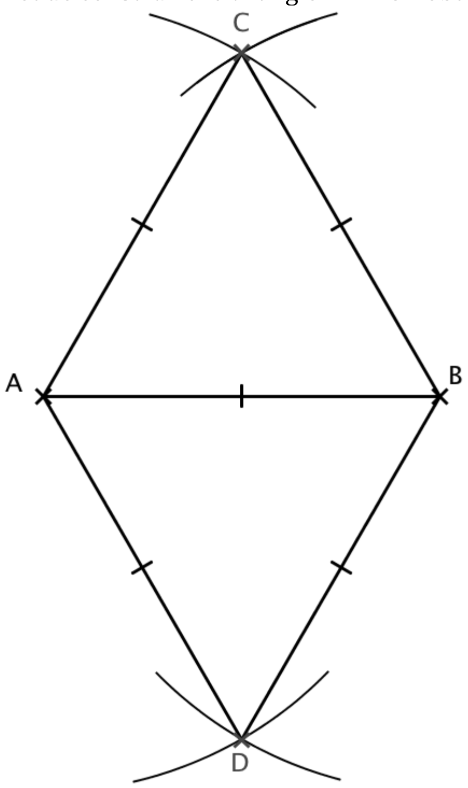
En exécutant le programme, on obtient d'abord le triangle ABC.

Puis l'instruction 

conduit à faire déplacer le curseur sur une nouvelle demi-droite issue de A :




Le deuxième bloc « triangle » permet de construire le triangle ADB. On obtient alors la figure suivante :



**b) Nature du quadrilatère *ADBC***

Le programme permet la construction successive de deux triangles équilatéraux ABC et ADB, C et D appartenant chacun à l'un des deux demi-plans distincts définis par la droite (AB). Tous les côtés du quadrilatère ADBC ont par conséquent même longueur. On en déduit que ADBC est un losange.
D'autre part, on a : $\widehat{\mathrm{ACB}} = 60°$ (le triangle ABC est équilatéral). On en déduit que ADBC n'est pas un carré.

**ADBC est un losange (non carré).**

## 4) Évolution de la figure

### a) Construction du symétrique de B par rapport à (AC) à la règle et au compas

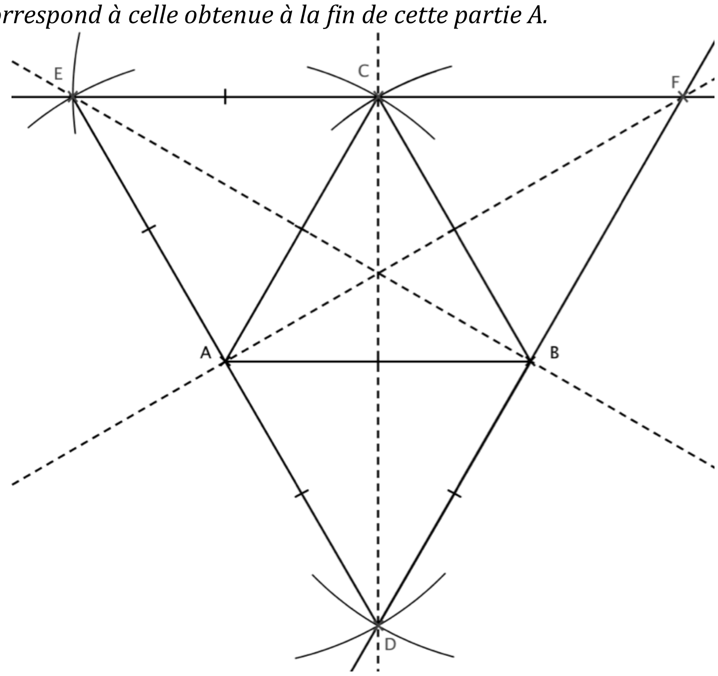
*Remarque :*

*Ni le programme de construction ni sa justification ne sont attendus. Nous les donnons pour la formation du candidat.*

Le point B et son symétrique par rapport à la droite (AC) se situent à égale distance de cette droite, donc à égale distance de tout point donné de cette droite. Par conséquent : EA = BA = $a$ et EC = BC = $a$.
Le point E est alors le point d'intersection du cercle de centre A et de rayon $a$ et du cercle de centre C et de rayon $a$. (Dans notre construction $a$ = 5 cm).

*Remarque :*

*La figure présentée correspond à celle obtenue à la fin de cette partie A.*




### b) Discussion sur l'alignement des points E, A, D

*Méthode 1 : $\widehat{EAD}$ est un angle plat*

Puisque E est le symétrique de B par rapport à (AC) : EA = BA = $a$ et EC = BC = $a$.
De plus, BC = BA = AC.
On en déduit : EA = EC = AC = $a$.
Ainsi EAC est un triangle équilatéral. Par conséquent $\widehat{\mathrm{EAC}} = 60°$.
Puisque ABC est un triangle équilatéral : $\widehat{\mathrm{CAB}} = 60°$.
Enfin, par construction, le triangle ABD est également équilatéral, donc $\widehat{\mathrm{BAD}} = 60°$.
D'où $\widehat{\mathrm{EAD}} = \widehat{\mathrm{EAC}} + \widehat{\mathrm{CAB}} + \widehat{\mathrm{BAD}} = 60° + 60° + 60° = 180°$.
On en déduit que l'angle $\widehat{\mathrm{EAD}}$ est un angle plat.

**Les points E, A, D sont donc alignés.**

*Méthode 2 : (EA) et (AD) sont confondues*

Puisque E est le symétrique de B par rapport à (AC) : EA = BA = $a$ et EC = BC = $a$.
On en déduit : AB = BC = CE = EA = $a$.
Ainsi ABCE est un losange. Par conséquent les droites (EA) et (CB) sont parallèles.
D'autre part, nous avons montré (question 3) que ADBC est également un losange. Alors les droites (AD) et (CB) sont parallèles.
Les droites (EA) et (AD) sont parallèles à une même troisième droite (CB) donc elles sont parallèles entre elles.
Or A est un point commun à aux deux droites (EA) et (AD). Celles-ci sont donc confondues.

**Autrement dit, les points E, A, D sont alignés.**

**Propriété du point *A***

*Méthode 1 :*

D'après le b) de la question 3, le quadrilatère ADBC est un losange et en particulier : AC = AD = $a$.
De plus, on a démontré dans la question précédente que EA = BA.
Or AB = $a$.
Donc EA = $a$.
On en conclut : EA = AD.
Or les points E, A, D sont alignés.

**Par conséquent le point A est le milieu du segment [ED].**

*Méthode 2 :*

On sait que EA = BA = $a$ (par symétrie) et que AD = AB (par construction du bloc « triangle »).
Ainsi EA = AD, or E, A, D sont alignés,

donc **le point A est le milieu du segment [ED].**

**c) Nature du triangle DEF**

*Méthode 1 : égalité des longueurs de tous les côtés du triangle DEF*

<u>Calcul de ED :</u>
Le point A est le milieu du segment [ED] (question précédente), donc ED = 2 EA.
Or EA = $a$.

Donc **ED = 2$a$.**

<u>Calcul de EF :</u>

Par construction le point C est un point du segment [EF].
D'après la question 3, le quadrilatère ADBC est un losange, donc les droites (AC) et (DB) sont parallèles.
Par ailleurs le point A est le milieu du segment [ED].
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux d'un triangle, le point C est alors le milieu du segment [EF].
Alors EF = 2 EC.
Or (question précédente) EC = BC = $a$.

On en déduit : **EF = 2$a$.**

<u>Calcul de FD :</u>
De même le point B est un point du segment [DF].
Puisque le quadrilatère ADBC est un losange, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
Par ailleurs le point C est le milieu du segment [EF].
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux d'un triangle, le point B est le milieu du segment [DF].
Alors DF = 2 DB.
Or DB = $a$.

On en déduit : **DF = 2$a$.**

On en conclut que tous les côtés du triangle DEF ont la même longueur.

**Le triangle DEF est équilatéral.**

*Méthode 2 : les angles dans le triangle DEF sont tous égaux à 60°*

Dans le triangle EAC, tous les côtés ont la même longueur égale à $a$ (voir b) de la question 4).
Ce triangle est donc équilatéral. Par conséquent $\widehat{AEC} = 60°$.
Puisque D (resp. F) est un point de la droite (EA) (resp. (EC)), on a également : $\widehat{DEF} = \widehat{AEC} = 60°$.

*Méthode 2-1 : calcul de tous les angles*

Dans le losange ADBC : $\widehat{ACB} = 60°$ (voir b) de la question 3).
Donc $\widehat{ADB} = 60°$.
Or E (resp. F) est un point de la droite (DA) (resp. (DB)), donc $\widehat{EDF} = \widehat{ADB} = 60°$.
Or la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
On en déduit : $\widehat{EFD} = 180° - \widehat{EDF} - \widehat{DEF} = 180° - 60° - 60° = 60°$.
Par conséquent les angles dans le triangle DEF sont tous égaux à 60°.

**Le triangle DEF est équilatéral.**

*Méthode 2-2 : le triangle DEF est isocèle*

Le point A est le milieu du segment [ED] (question précédente), donc : $ED = 2 \quad EA$.
Or EA = $a$.
Donc ED = $2a$.
Par construction le point C est un point du segment [EF].
D'après la question 3, le quadrilatère ADBC est un losange, donc les droites (AC) et (DB) sont parallèles.
Par ailleurs le point A est le milieu du segment [ED].
D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux d'un triangle, le point C est alors le milieu du segment [EF]. Alors $EF = 2 \quad EC$.
Or (question précédente) EC = BC = $a$.
On en déduit : EF = $2a$.
Ainsi le triangle DEF est isocèle en E. Alors $\widehat{EDF} = \widehat{EFD}$.
Or la somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
On en déduit : $2 \times \widehat{EFD} = 180° - \widehat{DEF} = 180° - 60° = 120°$.
D'où $\widehat{EFD} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.
Par conséquent les angles dans le triangle DEF sont tous égaux à 60°.

**Le triangle DEF est équilatéral.**

**d) Les droites (CD), (AF) et (BE) se coupent en un même point**

Puisque le point A est le milieu du segment [ED] : $ED = 2 \quad EA = 2a$ (car $EA = a$).
Or le triangle DEF est équilatéral (question précédente).
On en déduit la longueur de ses côtés : EF = DF = ED = $2a$.
De plus $C \in [EF]$ et EC = $a$.
Ainsi le point C est le milieu du segment [EF].

De même on peut montrer que le point B est le milieu du segment [DF].

**Les droites (FA), (DC) et (EB)** sont alors les médianes du triangle DEF.
Puisque celui-ci est équilatéral, ces droites sont donc également médiatrices, hauteurs et bissectrices du triangle DEF.
Elles **sont concourantes en un point qui est à la fois centre de gravité, centre du cercle circonscrit, orthocentre, et centre du cercle inscrit pour le triangle DEF.**

**e) Aire (DEF) = 4 Aire (ABC)**

*Méthode 1 : pavage du triangle DEF*

D'après ce qui précède :
$CF = \dfrac{1}{2} \times EF = \dfrac{1}{2} \times 2a = a$ et $BF = \dfrac{1}{2} \times DF = \dfrac{1}{2} \times 2a = a$.
De plus BC = $a$.
On en déduit que le triangle BFC est lui aussi équilatéral.
Le triangle DEF est alors pavé par quatre triangles équilatéraux de côté $a$, identiques au triangle ABC.

**Par conséquent : Aire (DEF) = 4 Aire (ABC).**

*Méthode 2 : calcul de l'aire des triangles*
L'aire du triangle ABC est égale à :
Aire (ABC) $= \frac{1}{2} \times h \times a$ où $h$ désigne la longueur de la hauteur du triangle ABC.
La hauteur issue de D dans le triangle DEF est [DC], la diagonale du losange ADBC (en effet, la diagonale [DC] est perpendiculaire à la seconde diagonale [AB], or [AB] est parallèle à [EF] et ainsi, [DC] est perpendiculaire à [EF]).
La longueur [DC] est $2 \times h$ car les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu.
L'aire du triangle DEF est donc :
Aire (ABC) $= \frac{1}{2} \times 2 \times h \times 2 \times a = 4 \times \frac{1}{2} \times h \times$ a.
On en déduit que $\mathbf{Aire}\ (\mathbf{DEF}) = \mathbf{4} \quad \mathbf{Aire}\ (\mathbf{ABC})$.

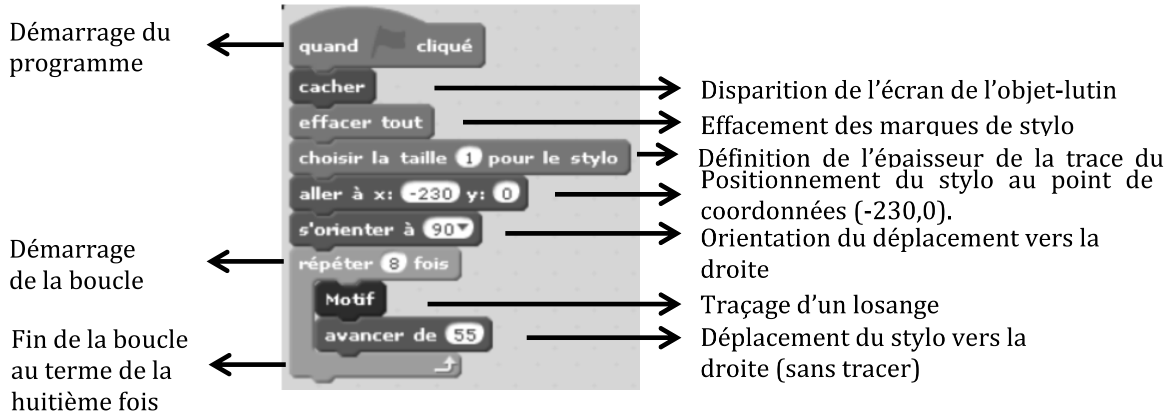
## PARTIE B : construction de losanges

### 1) Analyse des programmes

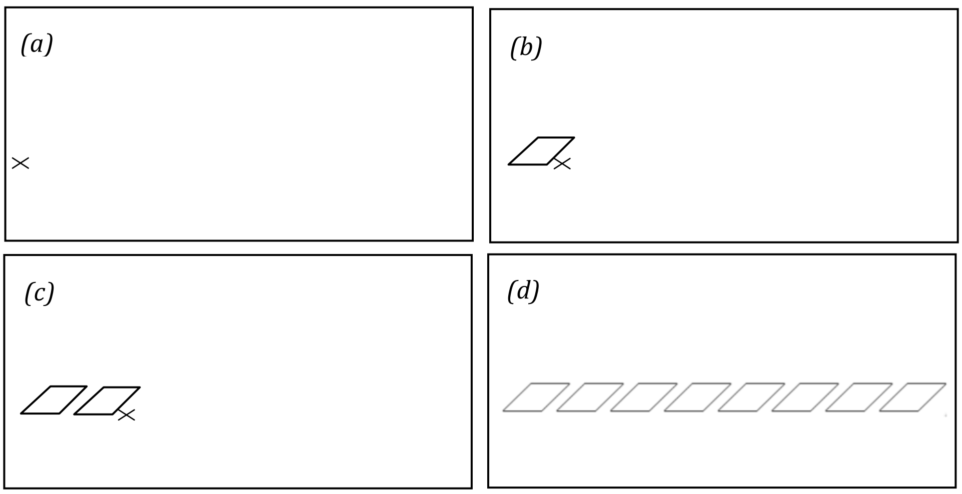
#### a) Détermination du programme correspondant à la figure 1

*Remarque :*
*Les justifications ci-dessous ne sont pas attendues du candidat. Nous les présentons pour une meilleure compréhension du résultat.*

Dans le programme A, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :

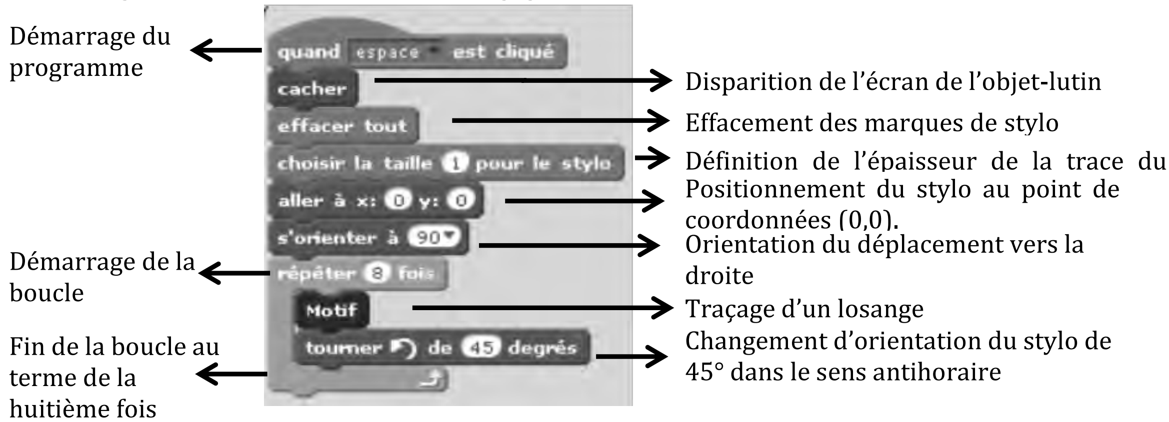



Ainsi juste avant de commencer la boucle, le stylo est sur le point désigné par une croix dans la figure suivante (a). À la fin de la première boucle, le stylo est décalé et l'écran correspond à (b). A la fin de la deuxième boucle l'écran correspond à (c) … A la fin de la huitième boucle, l'écran correspond à (d) :

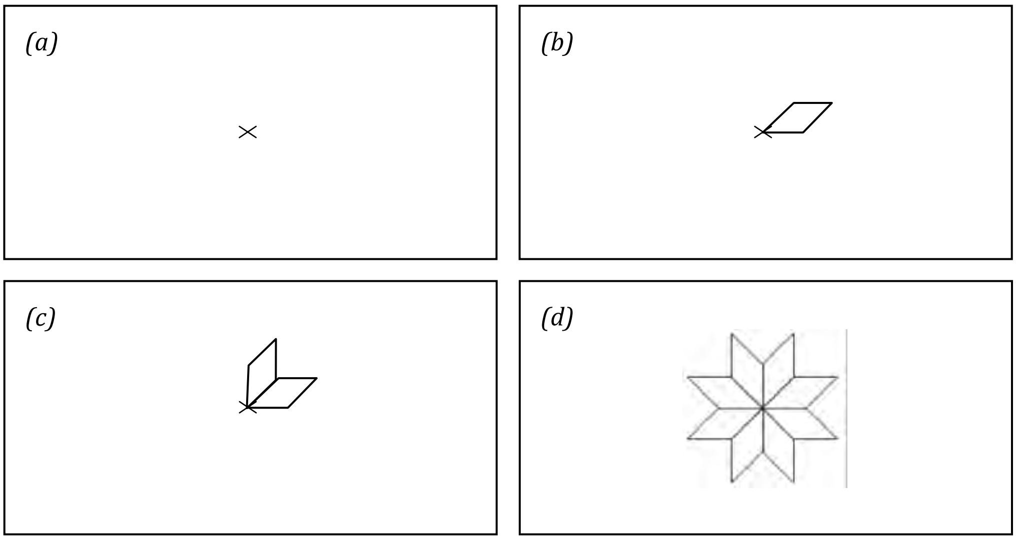


**On en conclut que le programme A conduit à la figure 1.**

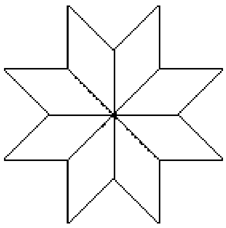
Dans le programme B, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :




Ainsi juste avant de commencer la boucle, le stylo est sur le point désigné par une croix dans la figure suivante (a). A la fin de la première boucle, l'écran correspond à (b), le stylo revient au même endroit et part dans une direction différente. A la fin de la deuxième boucle l'écran correspond à (c) … A la fin de la huitième boucle, l'écran correspond à (d) :




**Le programme B donne ainsi la figure ci-dessous :**



### b) Signification du nombre 55

Comme nous l'avons explicité dans la question précédente, **le nombre 55 correspond à la mesure (en pixels) de la longueur du déplacement du stylo (sans tracé) à la suite de la réalisation d'un motif.**

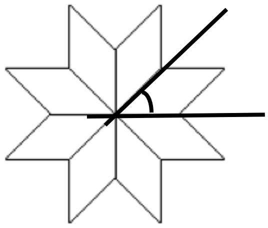
### c) Transformation qui permet de passer d'un motif au suivant dans le programme A

Le programme A conduit à la figure ci-dessous :

Dans le programme A, **la transformation qui permet de passer d'un motif au suivant correspond à une translation de 55 pixels vers la droite.**

**Transformation qui permet de passer d'un motif au suivant dans le programme B**

Le programme B conduit à la figure :



Dans le programme B, **la transformation qui permet de passer d'un motif au suivant correspond à une rotation d'angle 45° et de centre le point de coordonnées (0,0).**

## 2) Adaptation d'un programme

La nouvelle figure correspond à la figure 1 dans laquelle les traits des losanges deviennent de plus en plus épais. L'instruction 

permet de gérer l'augmentation de l'épaisseur du trait. Puisque ce trait augmente à chaque nouveau losange, l'instruction doit être intégrée dans la boucle « répéter 8 fois ».

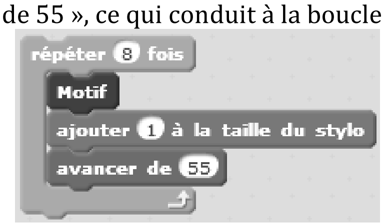
Pour que le premier motif ne soit pas modifié, il faut insérer 

après l'instruction « Motif ».

Deux possibilités sont envisageables :

- soit juste après l'instruction « Motif », ce qui conduit à la boucle suivante :


- soit après l'instruction « avancer de 55 », ce qui conduit à la boucle suivante :

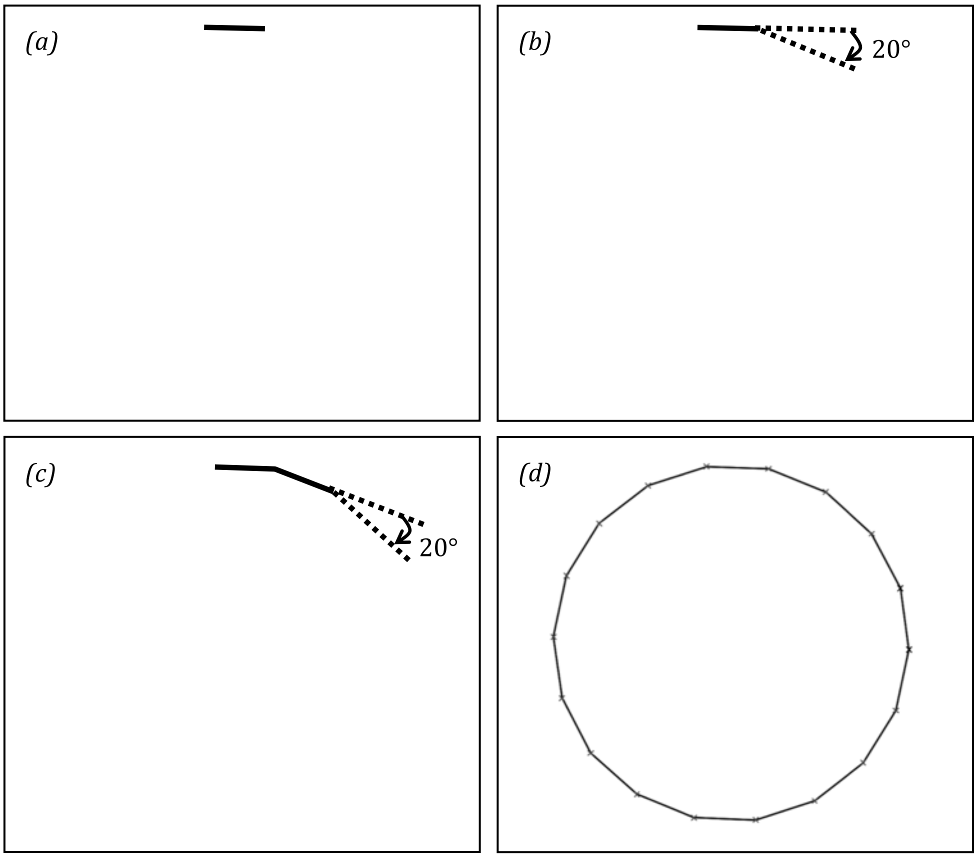



# PARTIE C : construction de rosaces

## 1) Analyse du bloc « Cercle »

### a) Ce que dessine le chat

L'instruction « avancer de 20 », avec le stylo en position d'écriture, provoque le tracé d'un segment de longueur 20 pixels (voir figure ($a$) ci-dessous).
Après ce segment, le stylo tourne de 20° (figure ($b$)), puis cette instruction est répétée : un segment de 20 pixel est tracé, le stylo est ensuite tourné de 20° (figure ($c$))…
L'instruction est répétée 18 fois :
Le chat dessine donc 18 segments *de même longueur* (une ligne brisée).
De plus, à chaque occurrence, le stylo tourne de 20°. Or $18 \times 20° = 360°$.
Par conséquent le résultat est une ligne brisée fermée, c'est-à-dire un polygone à 18 côtés (figure ($d$)).
De plus, tous ses côtés ont la même longueur. Le polygone obtenu est régulier.




Le grand nombre de côtés du polygone dessiné ainsi que leur faible longueur donne l'impression d'un cercle.

**Le chat ne trace pas un cercle mais un polygone régulier à dix-huit côtés.**

*Remarque :*

*La longueur des segments tracés (20 pixels) n'a pas d'incidence sur la nature de la figure obtenue : c'est l'égalité des longueurs des segments tracés qui conduit à la régularité du polygone. Si l'on remplace 20 pixels par 8 pixels, on obtient un polygone régulier à 18 côtés plus petit.*

### b) Proposition de modification du bloc « Cercle »

Pour que le dessin ressemble encore plus à un cercle, on peut tout d'abord augmenter le nombre de côtés du polygone régulier dessiné. Pour cela, il est pertinent de choisir un nombre de côté diviseur de 360, afin de faire tourner le chat d'un nombre entier de degrés. Les diviseurs de 360 sont les suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 24 ; 30 ; 36 ; 40 ; 60 ; 72 ; 90 ; 120 ; 180 ; 360.
Le bloc « Cercle » présenté fait tracer 18 côtés et tourner d'un angle de 20°. Si on choisit de faire tracer par exemple 36 côtés, il faudra alors tourner de 10° après le tracé de chaque côté car $36 \times 10° = 360°$.

De plus, il est possible de changer la longueur des côtés du polygone. Pour que celui-ci ressemble plus à un cercle, on diminuera donc la longueur des côtés.
Dans ce cas, c'est l'instruction avancer de 20 qui devra être modifiée.
Pour rester dans le modèle du bloc proposé, on pourra choisir une longueur de côtés en lien avec l'angle de rotation.
Par exemple si on fait tracer 36 côtés, on choisira des côtés de longueur 10, ce qui conduira à l'instruction : avancer de 10.
Mais d'autres choix sont possibles : il faudra alors veiller à ce que la figure obtenue reste dans la fenêtre de tracé.

**On pourra donc choisir l'un des triplets de données suivants avec l'instruction modifiée associée :**

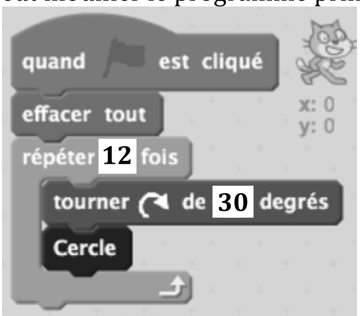
| ***Nombre de côtés*** | ***Angle de rotation*** | **Modèle du bloc** | | **Autres exemples de possibles** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ***Longueur des côtés*** | ***Instruction modifiée*** | ***Longueur des côtés*** | ***Instruction modifiée*** |
| 20 | 18° | 18 | répéter 20 fois<br>avancer de 18<br>tourner ↻ de 18 degrés | 10 | répéter 20 fois<br>avancer de 10<br>tourner ↻ de 18 degrés |
| 24 | 15° | 15 | répéter 24 fois<br>avancer de 15<br>tourner ↻ de 15 degrés | 10 | répéter 24 fois<br>avancer de 10<br>tourner ↻ de 15 degrés |
| 30 | 12° | 12 | répéter 30 fois<br>avancer de 12<br>tourner ↻ de 12 degrés | 10 | répéter 30 fois<br>avancer de 10<br>tourner ↻ de 12 degrés |
| 36 | 10° | 10 | répéter 36 fois<br>avancer de 10<br>tourner ↻ de 10 degrés | 8 | répéter 36 fois<br>avancer de 8<br>tourner ↻ de 10 degrés |
| 40 | 9° | 9 | répéter 40 fois<br>avancer de 9<br>tourner ↻ de 9 degrés | 10 | répéter 40 fois<br>avancer de 10<br>tourner ↻ de 9 degrés |
| 60 | 6° | 6 | répéter 60 fois<br>avancer de 6<br>tourner ↻ de 6 degrés | 5 | répéter 60 fois<br>avancer de 5<br>tourner ↻ de 6 degrés |
| 72 | 5° | 5 | répéter 72 fois<br>avancer de 5<br>tourner ↻ de 5 degrés | 4 | répéter 72 fois<br>avancer de 4<br>tourner ↻ de 5 degrés |
| 90 | 4° | 4 | répéter 90 fois<br>avancer de 4<br>tourner ↻ de 4 degrés | 5 | répéter 90 fois<br>avancer de 5<br>tourner ↻ de 4 degrés |
| 120 | 3° | 3 | répéter 120 fois<br>avancer de 3<br>tourner ↻ de 3 degrés | 4 | répéter 120 fois<br>avancer de 4<br>tourner ↻ de 3 degrés |
| 180 | 2° | 2 | répéter 180 fois<br>avancer de 2<br>tourner ↻ de 2 degrés | 4 | répéter 180 fois<br>avancer de 4<br>tourner ↻ de 2 degrés |
| 360 | 1° | 1 | répéter 360 fois<br>avancer de 1<br>tourner ↻ de 1 degrés | 3 | répéter 360 fois<br>avancer de 3<br>tourner ↻ de 1 degrés |

## 2) Modification du programme principal

Sur l'affichage proposé, on constate deux fois plus de « cercles » (il y en a 12) que sur l'affichage obtenu après le programme initial. Il est alors nécessaire de doubler le nombre de répétitions du bloc « Cercle ». Dans le programme initial, le stylo tourne de 60° à chaque répétition : il réalise ainsi un tour complet (360°) au bout des 6 répétitions.

*Méthode 1 : changement des valeurs des angles dans le programme principal*

Si on double les répétitions du bloc « cercle » et si on veut éviter de réaliser deux fois le même tour, il est alors nécessaire de diviser par deux l'angle de la rotation du stylo, soit 30°.
Pour obtenir l'affichage proposé, on peut modifier le programme principal de la manière suivante :




*Méthode 2 : doublement de la boucle*

Si on double la boucle dans le programme principal et si on veut éviter que la figure de la deuxième boucle ne repasse sur la première, on peut faire tourner le stylo de 30° entre les deux boucles.
Pour obtenir l'affichage proposé, on peut alors modifier le programme principal de la manière suivante :


*Remarque :*

*Dans la méthode 2, on précise « on peut faire tourner le stylo de 30° », mais d'autres modifications sont également possibles en jouant sur les angles. En effet, on pourrait faire tourner le stylo de 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330° entre les deux boucles pour obtenir le même résultat final. On pourrait également jouer sur le sens horaire ou antihoraire de la rotation.*

# EXERCICE DE NUMÉRATION d'après un sujet de Clermont-Ferrand

### 1) a) Écriture en base dix du plus grand des nombres à trois chiffres en base sept

*Méthode 1 :*

Dans une base donnée, le plus grand des nombres s'écrivant avec trois chiffres s'obtient en prenant pour chaque chiffre la plus grande valeur possible. Le nombre recherché s'écrit donc $\overline{666}^7$ en base sept.
Or : $\overline{666}^7 = 6 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 6 \times 7^0 = 6 \times 49 + 6 \times 7 + 6 = \mathbf{342}$

*Méthode 2 :*

Le plus petit des nombres s'écrivant avec quatre chiffres en base sept est $\overline{1000}^7$.
Or $\overline{1000}^7 = 1 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 0 \times 7^0 = 343$. Le plus grand des nombres qui s'écrivent en base sept avec trois chiffres est celui qui précède ce nombre, c'est donc **342**.

### 1) b) Écriture en base dix du plus grand des nombres à deux chiffres en base treize.

*Méthode 1 :*

Le nombre recherché s'écrit $\overline{cc}^{13}$ en base treize (la valeur en base dix du chiffre $c$ est 12).
On a alors : $\overline{cc}^{13} = c \times 13 + c = 12 \times 13 + 12 =$ **168**.

*Méthode 2 :*

Le plus petit des nombres s'écrivant avec trois chiffres en base treize est $\overline{100}^{13}$.
Or : $\overline{100}^{13} = 1 \times 13^2 + 0 \times 13^1 + 0 \times 13^0 = 169$. Le plus grand des nombres qui s'écrivent en base treize avec deux chiffres est celui qui précède ce nombre, **c'est donc 168**.

### 2) a) Encadrement en base dix

Un nombre $n$ dont l'écriture en base quatre comporte trois chiffres est compris (au sens large) entre le plus petit et le plus grand des nombres s'écrivant avec trois chiffres dans cette base. Ce nombre est donc compris entre $\overline{100}^4$ et $\overline{333}^4$.
$\overline{100}^4 = 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 16$
$\overline{333}^4 = 3 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 3 \times 4^0 = 3 \times 16 + 3 \times 4 + 3 = 63$.

On a donc l'encadrement : **16 ≤ n ≤ 63.**

### 2) b) Écriture en base huit et sept

$16 = 2 \times 8 + 0 = \overline{20}^8$ et $63 = 7 \times 8 + 7 = \overline{77}^8$ ,

donc $\overline{20}^8 \leq n \leq \overline{77}^8$, ce qui prouve que ***n* a toujours deux chiffres en base huit**.

$16 = 2 \times 7 + 2 = \overline{22}^7$ et $63 = 1 \times 49 + 2 \times 7 + 1 = 1 \times 7^2 + 2 \times 7 + 1 = \overline{121}^7$,
ainsi on a $\overline{22}^7 \leq n \leq \overline{121}^7$,

ce qui prouve que ***n* ne comporte pas toujours deux chiffres en base sept** (il peut en comporter trois).

### 3) Les nombres écrits avec trois chiffres différents en base quatre

*Méthode 1 : arbre des choix*

Trois valeurs possibles pour le chiffre de rang trois (au rang des « seizaines ») : 1, 2 ou 3 (pas 0 sinon, le nombre n'est pas à trois chiffres).
Trois valeurs possibles pour le chiffre de rang deux (au rang des « quatraines ») : exclure le chiffre choisi au rang trois (0 peut être utilisé).
Deux valeurs possibles pour le chiffre de rang un (au rang des unités) : exclure les chiffres choisis aux rangs deux et trois).
On a donc $3 \times 3 \times 2$ soit **18 nombres** écrits avec trois chiffres différents en base quatre.

*Méthode 2 : exhaustion de cas*

Il s'agit de lister tous les nombres possibles en s'organisant pour ne pas en oublier, par exemple en les rangeant dans l'ordre croissant : $\overline{100}^4$, $\overline{101}^4$, $\overline{102}^4$, … , $\overline{321}^4$ puis de dénombrer les éléments de cette liste. On trouve **18 nombres**.

## 4) a) Somme de $\overline{31}^4$ et $\overline{123}^4$

On peut très bien réaliser l'algorithme de l'addition posée usuelle :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 1 & 2 & 3 \\ + & & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Cette addition s'explique de la manière suivante :

$1 + 3 = \overline{10}^4$ : on pose 0 et on retient 1.
$1 + 2 + 3 = \overline{12}^4$ : on pose 2 et on retient 1.
$1 + 1 = \overline{2}^4$.

**On obtient donc $\overline{31}^4 + \overline{123}^4 = \overline{220}^4$.**

## 4) b) Produit de $\overline{123}^4$par $\overline{10}^4$

*Méthode 1 : sens de la multiplication*

Multiplier un nombre par $\overline{10}^4$ en base quatre (donc par 4 en base dix) revient à multiplier chacun des chiffres qui compose le nombre par $\overline{10}^4$.
Les unités deviennent ainsi des « quatraines » (ici 3 unités deviennent 3 quatraines, donc le 3 s'écrit au deuxième rang), les « quatraines » deviennent des « seizaines » (ici 2 quatraines deviennent 2 seizaines, donc le 2 s'écrit au troisième rang) et les « seizaines » deviennent des «soixante-quatraines » (ici 1 « seizaine » devient 1 « soixante-quatraine », donc le 1 s'écrit au quatrième rang).
Cela revient à décaler chacun des chiffres d'un rang vers la gauche (et à écrire un 0 au rang des unités). Ainsi : $\overline{123}^4 \times \overline{10}^4 = \overline{1230}^4$.

*Remarque :*

*Nous retrouvons ici le principe de multiplication par 10 dans la base dix, à savoir décaler d'un rang vers la gauche tous les chiffres du nombre et écrire un 0 au rang des unités.*

*Méthode 2 : multiplication posée*

On pose la multiplication de manière usuelle en calculant les produits intermédiaires en base quatre. (On fait apparaître la ligne des 0 inutile en pratique ordinaire.)

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & \times & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ + & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

## 4) b) Produit de $\overline{323}^4$par $\overline{23}^4$

$$\begin{array}{cccccc} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & & & 3 & 2 & 3 \\ & & \times & & 2 & 3 \\ \hline & {\scriptstyle 1} & 2{\scriptstyle 1} & 3 & 0 & 1 \\ + & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

**On a $\overline{323}^4 \times \overline{23}^4 = \overline{22021}^4$.**

# EXERCICE SUR FRACTIONS, DECIMAUX ET ALGORITHMIQUE d'après un sujet de Toulouse

## 1) Identification des nombres décimaux

*Étude du nombre p :*

113 est un nombre premier et $146 = 2 \times 73$,
donc les nombres 113 et 146 sont premiers entre eux car ils n'ont aucun diviseur commun.
La fraction $\frac{146}{113}$ est donc irréductible.
Or seuls les nombres qui admettent une écriture fractionnaire irréductible dont le dénominateur est de la forme $2^n \times 5^m$ , sont des nombres décimaux.
Par conséquent, ***p* n'est pas un nombre décimal**.

*Étude du nombre q :*

$32 = 2^5$ et $25 = 5^2$

Le dénominateur de la fraction $\frac{32}{25}$ est une puissance de 5.

Le nombre **q est donc un nombre décimal**.

*Remarque :*

*Il n'est pas nécessaire de savoir que la fraction $\frac{32}{25}$ est irréductible pour conclure qu'elle représente un nombre décimal.*

*Étude du nombre r :*

$64 = 2^6$ et $27 = 3^3$
Les nombres 64 et 27 sont premiers entre eux car ils n'ont aucun diviseur commun.
La fraction $\frac{64}{27}$ est donc irréductible.
Or son dénominateur n'est pas de la forme $2^n \times 5^m$.
Par conséquent, ***r* n'est pas un nombre décimal**.

*Étude du nombre s :*

$195 = 3 \times 5 \times 13$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

Alors : $\frac{195}{150} = \frac{3 \times 5 \times 13}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{13}{2 \times 5} = \frac{13}{10} = 1{,}3$.

Le nombre ***s* est donc un nombre décimal**.

**En conclusion, seuls q et s sont des nombres décimaux.**

**2) Calcul posé de la division de 64 par 27**

Le nombre *r* est un nombre rationnel non décimal. Il possède donc une écriture à virgule illimitée et périodique que nous pouvons déterminer en posant la division de 64 par 27 :

```
   6 4        | 27
 - 5 4        |-------
 -----        | 2,3703…
   1 0 0      |
  - 8 1       |
  -----       |
     1 9 0    |
   - 1 8 9    |
   -------    |
       1 0    |
    -    0    |
   -------    |
       1 0 0  |
       - 8 1  |
       -----  |
         1 9  |
          …
```

**Ainsi :** $\mathbf{\frac{64}{27} = 2,370\underline{370}...}$

**Trente-septième décimale de l'écriture à virgule de** $\mathbf{\frac{64}{27}}$

Dans l'écriture à virgule illimitée de *r*, on observe une période de longueur trois dans la partie décimale, et plus précisément :

- aux rangs 1, 4, 7, … c'est-à-dire aux rangs s'écrivant sous la forme $1 + 3k$ (où $k$ désigne un nombre entier naturel), la décimale est égale à 3 ;
- aux rangs 2, 5, 8, … c'est-à-dire aux rangs s'écrivant sous la forme $2 + 3k$, la décimale est égale à 7 ;
- aux rangs 3, 6, 9, … c'est-à-dire aux rangs s'écrivant sous la forme $3k$, la décimale est égale à 0.

Or : $37 = 1 + 3 \times 12$.
La trente-septième décimale correspond alors à un rang s'écrivant sous la forme $1 + 3k$.

**Par conséquent la trente-septième décimale de l'écriture à virgule de *r* est égale à 3.**

**3) Valeurs de A, B et C permettant d'obtenir l'affichage d'une décimale d'un rang donné dans l'écriture à virgule de r**

Dans le programme, x désigne le rang qui est choisi lorsque l'on fait fonctionner le programme.

La commande x modulo 3 calcule le reste de la division euclidienne de x par 3 :

- « x = 0 » signifie que le rang est de la forme $3k$ ;
- « x = 1 » signifie que le rang est de la forme $3k + 1$ ;
- « x = 2 » signifie que le rang est de la forme $3k + 2$.

En s'appuyant sur les résultats de la question précédente :

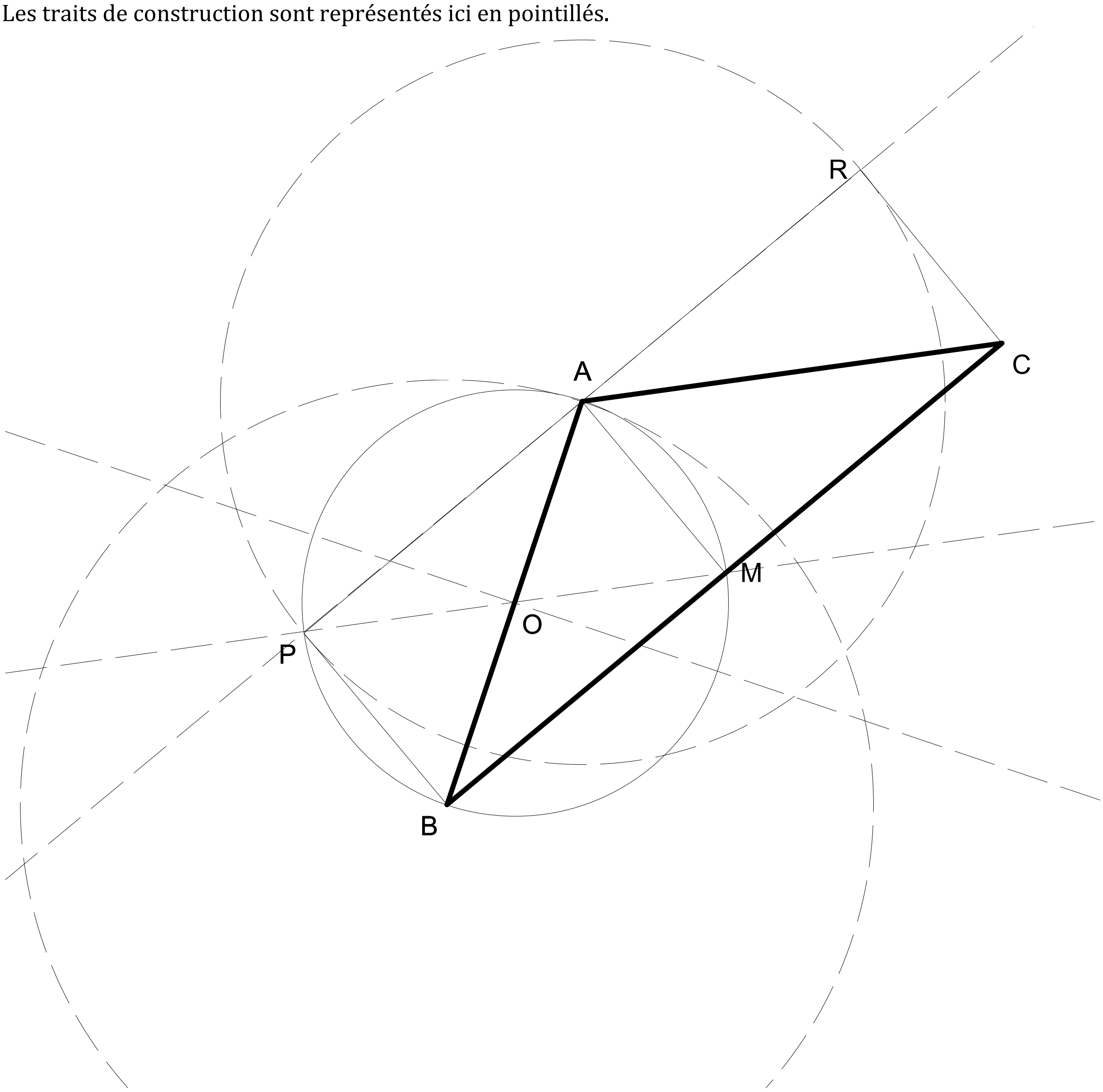
- si «x = 0 », alors la décimale est égale à 0 : **on doit donc remplacer A par 0** ;
- si «x = 1 », alors la décimale est égale à 3 : **on doit donc remplacer B par 3** ;
- si «x = 2 », alors la décimale est égale à 7 : **on doit donc remplacer C par 7.**

# GÉOMÉTRIE, GRANDEUR ET MESURE, PROPORTIONNALITÉ d'après un sujet de Besançon

## EXERCICE 1

### 1) Figure aux instruments (règle non graduée et compas)

Les traits de construction sont représentés ici en pointillés.




### 2) M est le milieu de [BC]

M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M.
La droite (AM) est perpendiculaire à la droite (BC), il s'agit donc de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Or le triangle ABC est isocèle en A, donc la hauteur issue de A est également la médiatrice de [BC].

Par conséquent **M est le milieu de [BC].**

## 3) APBM est un rectangle

*Méthode 1 : les diagonales*

P est le symétrique de M par rapport à O, donc O est le milieu de [PM].
Les diagonales [AB] et [PM] du quadrilatère BMAP ont le même milieu O, donc BMAP est un parallélogramme.
$OM = OA$ car M est sur le cercle de diamètre [AB].
P est le symétrique de M par rapport à O, donc $OP = OM = OA$.
On en déduit que $PM = AB$.

**Le parallélogramme APBM possède des diagonales de même longueur, il s'agit donc d'un rectangle.**

*Remarque :*

*On peut aussi montrer l'égalité $PM = AB$ en montrant que P est sur le cercle par symétrie (l'image du cercle par la symétrie de centre O est lui-même).*

*Méthode 1 bis : les diagonales*

P est le symétrique de M par rapport à O, donc O est le milieu de [PM].
Les diagonales [AB] et [PM] du quadrilatère BMAP ont le même milieu O, donc BMAP est un parallélogramme.

Le triangle ABM est rectangle en M donc **le parallélogramme APBM possède un angle droit, il s'agit donc d'un rectangle**.

*Méthode 2 : la symétrie centrale*

O est le milieu de [AB] donc le point B est le symétrique du point A par rapport à O.
Le segment [PB] est donc le symétrique du segment [AM] par rapport à O.
Les segments [PB] et [AM] sont donc parallèles et de même longueur.
Le quadrilatère APBM est donc un parallélogramme, or il possède un angle droit en M,

donc **APBM est un rectangle.**

## 4) AP = MC

BMPA est un rectangle, ses côtés opposés [AP] et [MB] ont donc la même longueur.
M est le milieu de [BC] donc MB = MC.

On a AP = MB et MB = MC donc **AP = MC.**

## 5) PBCR est un rectangle

*Méthode 1 : symétrie centrale*

Les segments [PR] et [BC] sont parallèles (car APBM rectangle).
R est le symétrique de P par rapport à A, donc PR = 2 PA
M est le milieu de [BC] donc BC = 2 MC.
La question 4 donne AP = MC, donc 2AP = 2MC, ainsi PR = BC. Le quadrilatère PCBR possède donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur, il s'agit donc d'un parallélogramme.
Le parallélogramme PBCR a un angle droit en B (car APBM est un rectangle) c'est donc un rectangle.

*Méthode 2 : symétrie axiale*

(AM) est médiatrice des segments [PR] et [BC] (perpendiculaire passant par leur milieu).
Ainsi [RC] est le symétrique de [PB] par rapport à (AM) ; les segments [RC] et [PB] sont donc parallèles et de même longueur.
PBCR est donc un parallélogramme. De plus PBCR admet un angle droit en B.

**PBCR est donc un rectangle.**

# EXERCICE 2

## 1) Expression de la mesure de durée sous forme d'une fraction irréductible non décimale

3 h 25 mn peut s'écrire $(3 + \frac{25}{60})$ h ou $(3 + \frac{5}{12})$ h ou encore $\mathbf{\frac{41}{12}}$ **h**.

La fraction $\frac{41}{12}$ est irréductible (il n'y a pas de facteur commun, hormis 1, entre 41 et 12).
Le dénominateur 12 est un multiple de 3 et pas uniquement de puissances de 2 et de 5.
**La fraction irréductible n'est donc pas un décimal.**

## 2) Valeur de p pour laquelle 3 heures et p minutes s'exprime sous forme d'un nombre décimal d'heure

3 heures et p minutes peut s'écrire $(3 + \frac{p}{60})$ heures avec $0 < p < 60$ *ou* $0 < \frac{p}{60} < 1$.
3 est un entier naturel donc un nombre décimal.
Pour que $\left(3 + \frac{p}{60}\right)$ soit un nombre décimal, il faut et il suffit que $\frac{p}{60}$ soit lui– même un nombre décimal.
Pour que $\frac{p}{60}$ soit un décimal, il faut et il suffit que la fraction $\frac{p}{60}$ mise sous forme irréductible ne présente que les facteurs premiers 2 et 5 au dénominateur.
Or $60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$.
Il faut et il suffit que p soit un multiple de 3 pour que le dénominateur de $\frac{p}{60}$ ne présente que les facteurs premiers 2 et 5.
**Les valeurs de p qui conviennent sont donc les multiples de 3 compris dans l'intervalle [3 ; 57] car 0 < p < 60.**

# EXERCICE 3

## 1) Procédures correctes d'un élève de cycle 3.

*Procédure 1 :*

Chercher le nombre de cahiers pour un même prix (par exemple 4 €). Le nombre de cahiers le moins élevé donnera le magasin le plus cher.
Magasin A : 8 cahiers pour 4 €
Magasin B : 6 cahiers pour 4 €
Magasin C : 7 cahiers pour 4 €
**Le magasin B propose les cahiers les plus chers.**

*Remarque :*
*Cette procédure est envisageable dès le début du cycle 3.*

*Procédure 2 :*

Chercher le prix pour un cahier dans chaque magasin et comparer les prix unitaires.
Magasin A  4 € : 8 = 0,5 €
Magasin B  2 € : 3 ≈ 0,66 €
Magasin C  4 € : 7 ≈ 0,57 €
**Le magasin B propose les cahiers les plus chers.**

*Remarque :*
*Si les élèves n'ont pas de calculatrice à disposition, cette procédure n'est envisageable qu'à partir du CM2 car les relations entre les nombres entrainent des calculs de division avec quotient décimal et un arrondi au centime d'euros.*

*Procédure 3 :*

Chercher le prix à payer pour un même nombre de cahiers (par exemple $3 \times 7 \times 8 = 168$ cahiers). Le prix le plus élevé donnera le magasin le plus cher.

Magasin A : $(3 \times 7) \times 4$ € $= 84$ €
Magasin B : $(7 \times 8) \times 2$ € $= 112$ €
Magasin C : $(3 \times 8) \times 4$€ $= 96$ €

**Le magasin B propose les cahiers les plus chers.**

*Remarque :*
*Cette procédure est possible pour des élèves de cycle 3 mais peu probable (le plus petit multiple commun de 3, 7 et 8 est difficile à identifier), même si une calculatrice a été mise à disposition des élèves.*

## 2) Analyse de réponses d'élèves

| | Procédure et réponse | Erreur et origine possible de l'erreur |
|---|---|---|
| Elève A | L'élève a voulu, pour les magasins A et C diviser le prix total par le nombre de cahiers. Sa procédure est donc correcte pour ces deux magasins. Pour le magasin B, il a voulu diviser le nombre de cahiers par le prix total.<br>Sa réponse est fausse. | L'erreur se trouve à deux niveaux :<br>- celui de l'instanciation de la procédure :<br>il divise le nombre de cahiers par le prix total (erreur classique lorsque le diviseur est supérieur au dividende et que le diviseur apparaît en premier dans l'énoncé) ;<br>- celui du type de division utilisée :<br>il utilise la division euclidienne alors que le problème relève de la division décimale, sans doute parce la division euclidienne est mieux connue. |
| Elève B | L'élève compare les prix totaux et conclut.<br>Sa réponse est fausse. | L'élève ne tient pas compte du nombre de cahiers par lot.<br>L'erreur a certainement pour origine la représentation qu'il se fait de la situation. On demande de comparer les prix des cahiers ; or l'énoncé donne les prix des cahiers 4 € et 2 €. Il est alors naturel pour lui de comparer 4 € et 2 €.<br>Il faut ajouter que l'énoncé comporte un implicite fort ; en effet il faut interpréter la question « dans quel magasin les cahiers sont-ils les plus chers ? » comme demande de comparer le prix des cahiers à l'unité. |
| Elève C | L'élève cherche combien de cahiers on peut avoir pour 4 € dans les 3 magasins (pour cela il utilise sans doute la propriété multiplicative de la linéarité).<br>Puis il considère que moins on a de cahiers pour 4 €, plus les cahiers sont chers.<br>Sa réponse est juste | Pas d'erreur. |
| Elève D | L'élève cherche combien il faut payer pour 8 cahiers dans chaque magasin. Pour cela il semble ajouter autant d'euros qu'il faut ajouter de cahiers (soit 1 € par cahier).<br>Sa réponse est juste mais sa démarche est erronée. | L'élève est confronté à un obstacle classique dans les problèmes de proportionnalité appelé « modèle additif » qui consiste à considérer qu'une augmentation sur l'une des grandeurs (ici le nombre de cahiers) augmente de la même valeur l'autre grandeur (ici le prix). Cet exemple montre qu'il est possible de « répondre juste » à l'aide d'une procédure erronée. |

# ANALYSE D'ERREURS
# d'après un sujet de concours blanc de Marseille

## EXERCICE 1

### 1) Résolution de la devinette

On cherche un nombre à trois chiffres : D U, d composée d'unités, de dizaines et de dixièmes.
On sait que le chiffre des unités U du nombre décimal cherché est égal à **2**.
Le chiffre des dixièmes d (à droite du chiffre des unités) est **9** (chiffre des centièmes de 135,7**9**8).
Le chiffre des dizaines D (à gauche des unités) est le double de 2, il est donc égal à **4**.

Le nombre ne contenant que trois chiffres, **on peut en conclure le nombre cherché est 42,9.**

### 2) Compétence évaluée

L'élève doit connaitre les règles de fonctionnement de notre système décimal, en particulier la valeur du chiffre en fonction de son rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

**C'est l'aspect positionnel de notre système de numération qui est évalué.**

### 3) Analyse des réponses des trois élèves ci-dessous

On remarquera que les trois élèves ont bien proposé un nombre à trois chiffres.

| élève | Ce qui est juste | Ce qui est erroné |
|---|---|---|
| **A** | Il a trouvé dans l'ordre les trois chiffres constituant le nombre cherché. | Il a oublié de placer la virgule entre le chiffre 2 et le chiffre 9.<br>Une explication de cet oubli peut être simplement que l'élève s'est appuyé sur le tableau de numération et qu'il a oublié de positionner la virgule en transcrivant son résultat. |
| **B** | - Il a trouvé dans le désordre les chiffres constituant le nombre cherché ;<br>- son chiffre des unités est correct ;<br>- il reconnait le 9 comme étant le chiffre des centièmes dans le nombre 135,798 ;<br>- il sait ce qu'est un double. Il sait qu'après le chiffre des unités il y a une virgule. | - il confond chiffre des dizaines et chiffre des dixièmes lorsqu'il positionne le chiffre 9 ;<br>- il refait la même erreur lorsqu'il positionne le 4 comme chiffre des dixièmes. La confusion entre les mots dixième et dizaine peut s'expliquer par des sonorités très proches. |
| **C** | - Son chiffre des unités est correctement placé ;<br>- il sait ce qu'est un double ;<br>- il sait qu'après le chiffre des unités il y a une virgule. | - il confond le chiffre des centièmes et le chiffre des centaines du nombre 135,798.<br>Là encore, la confusion entre les mots centième et centaine peut s'expliquer par des sonorités très proches. |

# EXERCICE 2

## 1) Addition de deux décimaux

$2{,}7 + 3{,}5 = 5{,}12$

L'élève a une conception erronée de la notion de nombre décimal. Il perçoit un nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers naturels séparés par une virgule. Il calcule ainsi séparément la somme $7 + 5$ puis la somme $2 + 3$ et place mécaniquement la virgule entre les deux résultats obtenus.

## 2) Erreur de comparaison

$6{,}34 < 6{,}251$

Deux explications sont possibles :

- L'élève a une conception du nombre décimal comme juxtaposition de deux entiers : il constate que les deux nombres ont la même partie entière puis compare les parties décimales. Il pense que ces parties décimales sont les nombres entiers naturels 34 et 251. Comme 34 est inférieur à 251, il déduit à tort que 6,34 est inférieur à 6,251.
- L'élève applique à tort aux nombres décimaux une règle valide sur les entiers : plus il y a de chiffres, plus le nombre est grand. 6,34 s'écrit avec trois chiffres, il est donc inférieur à 6,251 qui s'écrit avec quatre chiffres.

## 3) Multiplier un nombre décimal par une puissance de 10

L'élève applique à tort une règle valide sur les entiers, à savoir « multiplier un nombre par 10 c'est ajouter un zéro à ce nombre ». Il perçoit un nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers naturels séparés par une virgule et applique la règle aux deux parties du nombre.

*Remarque :*

*Multiplier un nombre par 10 relève du calcul mental.*
*Multiplier un nombre par 10 c'est le rendre 10 fois plus grand. Ainsi la valeur de chaque chiffre du nombre devient 10 fois plus grand, les unités deviennent des dizaines, les dizaines deviennent des centaines… ce qui peut se traduire en s'appuyant sur le tableau de numération par la propriété suivante :*

*« Quand on multiplie par 10, les chiffres changent de valeur, ils sont décalés d'un rang vers la gauche. »*

| *Centaines* | *Dizaines* | *Unités* | *Dixièmes* | *Centièmes* | *Millièmes* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *7* | *0* | *8* | | |
| *1* | *7* | *0* | *8* | | | $\times 10$ |

$17{,}08 \times 10 = 170{,}8$

*De même :*

- *Quand on multiplie par 100 : les chiffres sont décalés de deux rangs vers la gauche (de manière à agrandir le nombre).*
- *Quand on multiplie par 1000 : les chiffres sont décalés de 3 rangs vers la gauche (de manière à agrandir le nombre).*

## 4) Fractions décimales sur une droite graduée

L'élève a dénombré les graduations à partir de $\frac{35}{10}$ ; il surcompte probablement de dixième en dixième, « trente-six dixièmes, trente-sept dixièmes, etc » jusqu'à « quarante-et-un dixièmes ».

Il ne prend pas en compte la valeur des sous graduations : pour lui une graduation correspond à $\frac{1}{10}$ alors qu'il s'agit de $\frac{1}{100}$.

Il peut aussi dénombrer les graduations qui séparent $\frac{35}{10}$ de C, il en trouve 11, donc il conclut en additionnant 35 et 11 sans se soucier du sens accordé aux dixièmes.

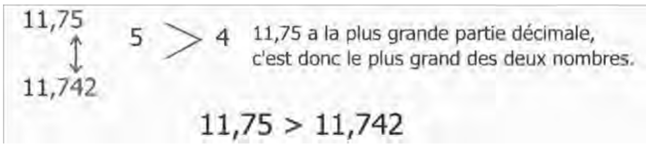
# ANALYSE DE DOCUMENT SUR LES DECIMAUX d'après un sujet de Besançon

## 1) a) Compétences mathématiques

On peut citer les deux compétences mathématiques suivantes que l'élève doit utiliser pour que cette aide soit utile.

- Lorsque la question est « comparer 0,946 et 0,964 », l'élève doit comprendre que les deux nombres ont la même partie entière et que l'aide qu'il doit sélectionner est « Comparer 11,75 et 11,742 ». Pour cela, il lui faut identifier les spécificités des nombres à comparer dans les exemples fournis sur le site.
- L'élève doit être capable d'identifier et de comparer les parties entières de deux nombres décimaux.

## 1) b) Connaissances mathématiques




Dans l'aide rappelée ci-dessus, tout repose sur l'explication « 5 étant plus grand que 4, le nombre 11,75 est supérieur à 11,742 » ; cela suppose des connaissances sur la numération et la signification des chiffres dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

Pour comparer deux nombres décimaux, tels que 11,75 et 11,742, il faut revenir au sens de cette écriture :

11,75 = 1 dizaine +1 unité + 7 dixièmes + 5 centièmes

11,742 = 1 dizaine + 1 unité + 7 dixièmes + 4 centièmes + 2 millièmes

Comme les deux nombres possèdent 1 dizaine, 1 unité (ou 11 unités), 7 dixièmes mais l'un possède 5 centièmes alors que l'autre possède 4 centièmes et que 5 est supérieur à 4, alors $11{,}75 > 11{,}742$.

La connaissance mathématique mobilisée est celle de l'algorithme de comparaison de deux nombres que l'on peut formuler de la sorte :

> Pour comparer deux nombres, on compare les chiffres rang à rang en commençant par les unités de rang le plus élevé (chiffres des dizaines dans l'exemple ci-dessus).
> Si les deux chiffres d'un même rang sont identiques, on passe au rang inférieur (dans l'exemple, on est passé des dizaines aux unités, puis aux dixièmes et aux centièmes).
> Si les deux chiffres d'un même rang sont différents (comme c'est le cas au rang des centièmes dans l'exemple), le plus grand nombre est celui dont le chiffre est le plus grand à ce rang.

Implicitement pour s'engager dans cet algorithme de comparaison, l'élève doit inhiber un critère de comparaison qui reposerait sur la longueur du nombre – technique fonctionnant pour comparer des nombres entiers.

## 2) Interprétation d'erreur

La réponse de l'élève est $5{,}09 < 4{,}103$. On peut interpréter cette erreur de plusieurs façons.

*Première explication possible :*

L'élève compare la longueur des nombres (nombre de chiffres) : 5,09 s'écrit avec trois chiffres alors que 4,103 en comporte quatre donc $5{,}09 < 4{,}103$. Cette erreur provient d'un prolongement erroné d'une propriété exacte sur les entiers naturels.

*Deuxième explication possible :*

L'élève compare 09 et 103 comme $09 < 103$ et il ne tient compte que de la partie décimale des nombres alors $5{,}09 < 4{,}103$.

*Troisième explication :*

L'élève ayant retenu partiellement le résultat énoncé à la question précédente, il compare les chiffres à partir du rang des dixièmes et comme $0 < 1$ alors $4{,}09 < 5{,}103$

*Quatrième explication :*

L'élève confond les symboles < et >.

# ANALYSE D'UN PROBLÈME ADDITIF
# d'après un sujet de Lyon

## 1) Résolution du problème

*Méthode 1 : arithmétique*

Au début du jeu les deux enfants ont le même nombre de billes. À la fin du jeu Yann en a gagné 12 et Jean-François en a perdu 12. À ce moment-là, Yann en a **donc 24 de plus** que Jean-François.

*Méthode 2 : algébrique*

Soit $n$ le nombre de billes de Yann et de Jean-François au début du jeu. À A la fin du jeu, Yann possède $(n + 12)$ billes et Jean-François en possède donc $(n - 12)$. La différence entre les deux enfants à la fin du jeu est $(n + 12) - (n - 12) = 12 + 12 = 24$ billes.

*Méthode 3 : de proche en proche*

Au début du jeu Yann et Jean-François ont le même nombre de billes. Si Yann gagne une bille, c'est qu'il la prend à Jean-François, donc Jean-François perd une bille, ainsi la différence entre les deux enfants est de 2 billes. Si Yann gagne deux billes, c'est qu'il les prend à Jean-François, donc Jean-François perd deux billes, ainsi la différence entre les deux enfants est de 4 billes. De proche en proche, si Yann gagne 12 billes, c'est qu'il les prend à Jean-François, donc Jean-François perd 12 billes, ainsi la différence entre les deux enfants est de 24 billes.

## 2) Difficultés du problème

- Difficulté (1) à se construire une représentation correcte de la situation et en particulier à comprendre que si Yann gagne des billes alors Jean-François en perd le même nombre.
- Difficulté (2) à comprendre la signification des termes utilisés pour effectuer une comparaison (confusion « de plus » « en plus »).
- Difficulté (3) à raisonner sur des quantités inconnues de billes. Certains élèves ne parviennent pas à les représenter, pour eux ce manque de données rend le problème impossible à résoudre.
- Difficulté (3 bis) de raisonnement sur des transformations d'états sans connaitre les états initiaux et finaux.

*Remarque :*

*On pourrait également penser qu'il y a un implicite dans l'énoncé. Les enfants joue l'un contre l'autre ne signifie pas forcément qu'il se prenne des billes mutuellement, Ils pourraient gagner des billes dans une pioche commune (ce qui changerait complétement le résultat du problème).*

## 3) Analyse des productions d'élèves

Les deux élèves schématisent la situation de départ. Ils représentent les deux enfants et leur attribuent arbitrairement un même nombre de billes initial (36 chez Clément et 20 chez Mohamed).

**Clément** dessine les 12 billes gagnées et sépare ces 12 billes en deux paquets de 6 billes qu'il attribue à Yann et à Jean-François. Il a effectué deux additions probablement pour chercher le nombre final de billes qu'un enfant possèderait après avoir gagné 6 billes. Il conclut en donnant une réponse erronée sans rapport avec le résultat de son addition mais en rapport avec le nombre 6 qu'il a décelé dans sa répartition. Sa représentation du problème est erronée. On peut penser qu'à la lecture de l'énoncé, les mots « même nombre de billes » l'ont conduit à réaliser un partage équitable des 12 billes et que le mot « gagne » l'a amené à effectuer des additions.

**Mohamed** a schématisé la perte de 12 billes chez Jean-François et le gain correspondant chez Yann. Il calcule (en ligne et en posant les opérations) correctement le nombre de billes final obtenu par chaque enfant. Il reprend ces résultats pour donner des réponses erronées au problème. Il utilise les nombres de billes finaux des deux d'élèves pour tenter une comparaison. Il semblerait que cet élève ait cherché à répondre à un problème connu et familier en répondant aux attentes supposées de l'enseignant (dessin, calcul, réponse écrite) et qu'il ait donné une signification erronée aux termes « de plus » (considéré comme « ce qu'on a ajouté») et « de moins » (ce qu'on a ôté). On peut aussi faire l'hypothèse qu'au cours de sa recherche il a perdu le sens des résultats qu'il a obtenu à ses calculs car le début de sa démarche est correct mais il n'arrive pas à exploiter les nombres 8 et 32 pour conclure.

## 4) Une aide pour les élèves en difficulté

- Aide correspondant à la difficulté 1 : l'enseignant peut faire reformuler l'énoncé par l'élève, l'illustrer sur un exemple (de proche en proche) éventuellement une mise en situation (manipulation) avec du matériel.
- Aide correspondant à la difficulté 2 : l'enseignant peut proposer un travail spécifique sur la distinction des formules « de plus » et « en plus » en proposant par exemple aux élèves de donner des exemple de situations de comparaison dans lesquelles on pourrait dire « de plus » et des situations de transformations dans lesquelles on utiliserait « en plus ».
- Aide correspondant à la difficulté 3 et 3 bis : l'enseignant peut proposer aux élèves de choisir un nombre de billes de départ et éventuellement de refaire ensuite le problème avec d'autres nombres de départ (ce qui implique alors une difficulté supplémentaire : les élèves doivent avoir chacun plus de 12 billes au départ).

## 5) Compétences travaillées

On peut citer les six compétences du programme :

*Chercher :*

Les élèves doivent s'engager dans une démarche (décider de schématiser ou de jouer effectivement la scène ou encore de travailler sur du numérique).

*Modéliser :*

Les élèves doivent reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives.

*Représenter :*

Les élèves peuvent utiliser des outils pour représenter le problème : dessins, schémas, matériel.

*Raisonner :*

Les élèves doivent construire une démarche, en particulier comprendre que si Yann gagne $n$ billes alors Jean-François perd $n$ billes.

*Calculer :*

Compétence évidente dans ce problème additif (et en particulier contrôler la vraisemblance des résultats)

*Communiquer :*

Les élèves doivent expliquer leur démarche.

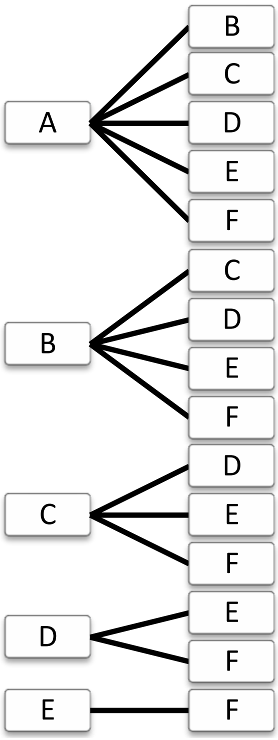
# PROBLEME DE RECHERCHE EN CYCLE 3
# d'après un sujet de La Roche sur Yon

## 1) Résolution du problème

*<u>Procédure 1 :</u> recherche exhaustive des combinaisons*

*Méthode 1 (par un arbre de choix)*

On nomme les joueurs A, B, C, D, E et F. On établit la liste de tous les matchs.




**Il doit y avoir 15 matchs.**

*Méthode 2 (par un tableau à double entrée)*

On nomme les joueurs A, B, C, D, E et F.

On place les noms des joueurs dans un tableau à double entrée, dans lequel chaque croix représente un match à jouer.

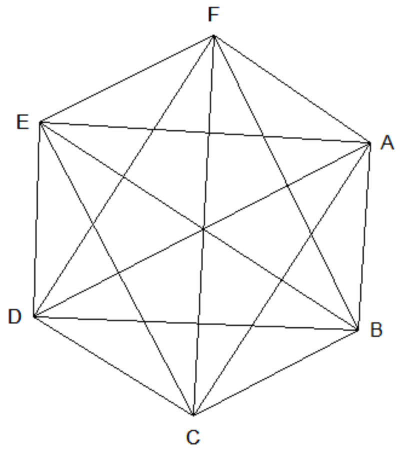
Il suffit alors de compter les croix pour connaitre le nombre de matchs à jouer pour que les joueurs se rencontrent tous une fois.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | × | × | × | × | × |
| B | | | × | × | × | × |
| C | | | | × | × | × |
| D | | | | | × | × |
| E | | | | | | × |
| F | | | | | | |

**Il doit y avoir 15 matchs.**

*Méthode 3 (par une représentation graphique)*

On place chaque joueur au sommet d'un polygone, les côtés et diagonales représentent alors les matchs à réaliser. Il suffit de compter les segments apparents sur le schéma.




**Il doit y avoir 15 matchs.**

*Méthode 4 (par identification des couples de joueurs)*

On nomme les joueurs A, B, C, D, E et F.
On écrit les combinaisons envisageables : (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (B, C), (B, D), (B, E), (B, F), (C, D), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F), (E, F).
On dénombre 15 combinaisons, donc **il doit y avoir 15 matchs.**

*Procédure 2 :* *recherche du nombre de matchs de proche en proche*

*Méthode 1 (par ordre décroissant)*

Le premier joueur joue 5 matchs, il reste 4 matchs au deuxième joueur, il reste 3 matchs au troisième joueur, il reste 2 matchs au quatrième joueur, il reste 1 match au cinquième joueur.
Soit : $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

**Il doit y avoir 15 matchs à jouer.**

*Méthode 2 (par ordre croissant)*

S'il n'y a que deux joueurs, il y a 1 match. Un troisième joueur arrive, il doit jouer les deux joueurs, donc 2 matchs. Un quatrième arrive, il joue 3 matchs. Un cinquième joueur arrive, il joue 4 matchs. Le dernier joueur arrive, il joue 6 matchs.
Soit : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

**Il doit y avoir 15 matchs à jouer.**

*Procédure 3 :* *recherche du nombre de matchs par une fausse supposition*

*Méthode 1 (en identifiant le nombre de matchs par joueur)*

Il y a 6 joueurs et on suppose que chaque joueur joue 5 matchs.
Le nombre supposé de matchs est : $6 \times 5 = 30$.
Mais chaque match est alors compté deux fois.
D'où : $30 \div 2 = 15$.

**Il doit y avoir 15 matchs à jouer.**

*Méthode 2 (en identifiant le nombre maximal de matchs)*

Il y a 6 joueurs et on suppose que chaque joueur joue 6 matchs.
Le nombre supposé de matchs est : $6 \times 6 = 36$.
Or chaque joueur ne peut jouer contre lui-même, il faut donc enlever 6 matchs : $36 - 6 = 30$.
De plus, chaque match est compté deux fois. D'où : $30 \div 2 = 15$.

**Il doit y avoir 15 matchs à jouer.**

## 2) Analyse des productions

| Nom | Type de stratégie | Explicitation de la démarche | Analyse du calcul | Validité de la réponse |
|---|---|---|---|---|
| **Pierre** | Stratégie par recherche exhaustive des combinaisons.<br>(version schématique à rapprocher de la procédure 1 – méthode 4 (voir question 1)) | Pierre passe par une représentation de la situation assez explicite : il dessine les terrains.<br>Pour chaque joueur, il a choisi un symbole différent.<br>La disposition de ces symboles sur les terrains est bien organisée. Il commence par faire rencontrer le joueur « étoile » avec les cinq autres. Puis il passe à au joueur « carré » : celui-ci rencontre bien seulement 4 joueurs.<br>Pierre a bien pensé à ne pas dessiner deux fois le match « étoile/carré ».<br>Et ainsi de suite. Pierre parvient à dessiner tous les matchs sans en oublier.<br>Sa démarche est correcte. | Sa réponse, 14 matchs, n'est pas correcte.<br>Il a probablement fait une erreur dans le dénombrement final des terrains. | Réponse erronée. |
| **Paul** | Stratégie par recherche du nombre de matchs (à rapprocher de la procédure 3 – méthode 2 (voir question 1)). | Paul pense reconnaître une situation multiplicative. Il écrit une multiplication en ligne. On peut faire l'hypothèse qu'il considère qu'il y a 6 joueurs qui doivent faire 6 matchs chacun. Avec ce raisonnement, chaque joueur jouera contre lui-même et chaque match contre un autre joueur est compté deux fois.<br>Sa démarche est incorrecte. | Le calcul<br>$6 \times 6 = 36$<br>est juste. | Réponse erronée. |
| **Lisa** | Stratégie par recherche exhaustive des combinaisons<br>(version écrite à rapprocher de la procédure par arbre de choix (voir question 1)). | Lisa attribue à chaque joueur un numéro de 1 à 6, puis elle fait la liste de tous les matchs. Elle commence par le joueur 1, auquel elle fait rencontrer les cinq autres.<br>Comme Pierre, l'écriture des matchs est bien organisée. Elle passe au joueur 2 et ne lui fait pas rencontrer le joueur 1, puisque cela est déjà fait. Et ainsi de suite jusqu'au joueur 5.<br>Sa démarche est correcte. | Lisa compte le nombre de matchs (15) et écrit une phrase réponse.<br>Son dénombrement est correct. | Lisa ne fait pas d'erreur.<br>Sa réponse est juste. |

# DIVISION AU CYCLE 3
# d'après un sujet de Besançon

## PARTIE A : analyse d'une séance en CE2

### 1) Expression des solutions

Les trois problèmes de la partie « chercher » sont des problèmes de partages équitables résolus par division euclidienne.

*Problème 1 :*

| | |
|---|---|
| $32 = 16 \times 2$ | Maïa fera 16 rubans |
| $32 = 5 \times 6 + 2$ | Tim fera 5 rubans |

*Problème 2 :*

| | |
|---|---|
| $67 = 33 \times 2 + 1$ | Maïa fera 33 rubans |
| $67 = 11 \times 6 + 1$ | Tim fera 11 rubans |

*Problème 3 :*

| | |
|---|---|
| $248 = 124 \times 2$ | Maïa fera 124 rubans |
| $248 = 41 \times 6 + 2$ | Tim fera 41 rubans |

### 2) Connaissances nécessaires

La notion de multiplication sera certainement attendue pour les situations 2 et 3.
Connaître les tables de multiplication par 2 et par 6.
Effectuer des multiplications par un nombre à 1 chiffre.
Calculer en utilisant des écritures additives, soustractives, multiplicatives ou mixtes.
Mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour la multiplication (ou calculer en utilisant une calculatrice)

*Remarque :*

*Seules deux connaissances ou compétences sont attendues.*

### 3) a) Procédures possibles pour répondre à la question 1

*Procédure utilisant du matériel :*

Réalisation effective du découpage d'une bande de 32 cm fournie aux élèves.

*Procédure schématique :*

On trace un segment de longueur 32 cm et on place des repères tous les 6 cm. On conclut en comptant le nombre de repères. On peut également schématiser une bande de 32 cm, marquer des bandes de 6 cm puis compter le nombre de bandes.

*Procédure additive :*

On additionne $6 + 6$ puis $6 + 6 + 6$ jusqu'à atteindre ou dépasser 32 puis on compte le nombre de termes $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ on trouve 5 rubans.

*Procédure soustractive :*

On coupe un ruban de 6 cm, il reste $32\text{ cm} - 6\text{ cm} = 26\text{ cm}$ et ainsi de suite.
On compte le nombre d'étapes pour conclure.

*Procédure multiplicative :*

De proche en proche grâce à la table du 6 pour s'arrêter lorsque l'on dépasse 32. On a $6 \times 4 = 24$ ; $6 \times 5 = 30$ ; $6 \times 6 = 36$… donc Tim peut couper 5 rubans.

## 3) b) Deux types d'erreurs envisageables pour la question 1

*Erreur dans la gestion du reste :*

Considérer le reste comme un ruban.
« J'ai découpé 5 rubans, il reste 2 cm d'où 6 rubans au total »

*Erreurs dans les calculs :*

Additions itérées, soustractions itérées, multiplications.

*Erreurs dans le comptage :*

Comptage du nombre de fois où l'on a ajouté ou retiré 6.

*Erreur due à la prise d'information :*

Dans l'énoncé on dit « ils doivent découper le plus possible de rubans », ce problème d'optimisation peut être négligé et les élèves peuvent alors répondre tout nombre entier inférieur à la réponse maximale.

## 3) c) Rôle de la mise en commun

Il s'agit de confronter les méthodes, de faire valider ou invalider des procédures par les élèves, mais aussi de permettre aux élèves bloqués de repartir.
Le but est double :
- permettre aux élèves bloqués de relancer leur travail
- faire ressortir une ou des procédures efficaces pour les questions suivantes.

## 3) d) Vérification des réponses

Il est possible de proposer un schéma ou un découpage effectif et les élèves peuvent ensuite vérifier si le nombre de nombre de rubans qu'ils ont trouvé est le même que celui obtenu sur le schéma ou par le découpage.
On peut aussi utiliser le calcul (avec ou non une calculatrice) pour vérifier les résultats des élèves. La proposition « 4 rubans de 6 cm » donner lieu au calcul $4 \times 6 = 24$ et $24 < 32$. On peut donc effectivement couper 4 rubans. Il reste dans ce cas là 8 cm de bande. On peut donc découper un autre ruban et il restera 2 cm de bande. La proposition est donc fausse.

## 4) a) Vérification des réponses de la question 3

Une vérification en utilisant du matériel à découper ou une vérification schématique semblent inappropriées pour cette question (longueur de bande à découper trop importante par rapport à la longueur des bandes de Maïa et de Tim). Il est possible de vérifier si la réponse proposée est valable par le calcul (avec ou sans calculatrice). On multiplie le nombre de ruban proposé par leur longueur et on compare le résultat à la longueur de la bande à découper. La proposition « 41 rubans de 6 cm » pourra donner lieu au calcul $41 \times 6 = 246$ et $246 < 248$ donc on peut effectivement couper 41 rubans et on ne peut pas en couper plus car le morceau restant ne mesure que 2 cm.
Il est utile ici de proposer des calculatrices aux élèves, l'objectif étant la vérification de leur résultat et non une évaluation de leur compétence en calcul.

## 4) b) Analyse du choix des nombres

*Concernant les choix de 2 et 6 :*

Le diviseur 2 permet d'utiliser des procédures s'appuyant sur le calcul de doubles et de moitiés de nombres entiers tout en rendant rapidement l'addition itérée inefficace. Il permet également de s'engager dans une procédure accessible aux élèves (comptage de 2 en 2 à partir de 2)
Le diviseur 6 donne lieu à des calculs plus compliqués mais, la table du 6 devrait être connue.

*Concernant les choix de 32, 67 et 248 :*

Le problème 1 : 32 cm
Ce problème propose une situation sans reste (plus simple pour une première approche) et une avec reste. Le domaine numérique est connu des élèves, la recherche du résultat ou la vérification peut se faire concrètement.

Le problème 2 : 67 cm
La procédure par addition itérée est encore efficace pour 6 mais semble moins pertinente pour 2. La démarche par essais multiplicatifs pour les rubans de 2 cm à ce stade est favorisée. On peut remarquer aussi que 67 est proche du double de 32.

Le problème 3 : 248 cm
Cette situation propose des nombres qui rendent difficiles-l'approche multiplicative.
La gradation vise clairement à amener les élèves à passer de procédures du type schéma/additions itérées (ou soustractions) à des procédures multiplicatives.

## 5) Éléments de synthèse

Il est possible, en synthèse, aborder les deux éléments suivants : la notion d'encadrement d'un nombre par des multiples et l'égalité de division euclidienne.
On peut toujours encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs d'un autre nombre. Par exemple 248 est entre $6 \times 41 = 246$ et $6 \times 42 = 252$. Il est donc possible de découper 41 rubans de 6 cm. Il reste alors 2 cm de bande, ce qui est traduit par l'égalité : $248 = 41 \times 6 + 2$. L'objectif est d'amener la notion de division euclidienne.

## 6) Analyse du point de vue de la division euclidienne

*Remarque :*

*Les exercices 4 à 7 reprennent le contexte de la partie « Chercher » ; il s'agit de bandes dans lesquelles des rubans de différentes longueurs sont découpées. Les exercices 8 et 9 sont donnés dans d'autres contextes : répartition dans des bus et constitution d'équipes.*

**Les exercices 4, 5 et 7** reprennent la même tâche que celle de la partie « Chercher » : trouver le nombre de rubans que l'on peut découper dans une bande. Il s'agit donc de chercher le quotient d'une division euclidienne. La difficulté varie selon le choix des nombres pour la longueur de la bande, la longueur des rubans et la relation entre ces deux longueurs. Dans l'exercice 4, il n'y a pas de reste car 30 est un multiple de 5. Dans les deux autres exercices, il y a un reste.

**L'exercice 6**, la tâche est de retrouver la longueur de la bande, connaissant le nombre et la longueur des rubans ainsi que le reste. Il s'agit donc de retrouver le dividende, à partir du quotient, du diviseur et du reste (écriture de l'égalité de division euclidienne). C'est une situation multiplicative et non plus une situation de partage.

**Dans l'exercice 8**, la réponse est le quotient plus un (il faut 7 mini-cars complets et un mini-car supplémentaire pour emmener les enfants qui restent). Le dividende est encadré par deux multiples consécutifs du diviseur.

**Dans l'exercice 9**, la réponse à la question est le reste de la division euclidienne.

# PARTIE B : la division en CM2

## 1) a) Les deux problèmes

*Résolution :*

Problème 1 : Les étagères ont une longueur de mesure 43,75 cm car $350 : 8 = 43{,}75$.

Problème 2 : Jean peut faire 43 morceaux de 8 cm car $350 = 43 \times 8 + 6$.

*Point commun :*

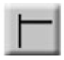
Ces deux problèmes sont résolus par la division de 350 par 8.

*Différences :*

- Dans le problème 1, il s'agit de la division décimale, dans le problème 2 de la division euclidienne.
- Le problème 1 est un problème de division partage ou division partition (recherche de la valeur d'une part), alors que le problème 2 est un problème de division quotient ou division quotition ou encore division groupement (recherche du nombre de parts).

## 1) b) La calculatrice

Pour le premier problème, la calculatrice donne directement le résultat. Elle constitue donc une aide et permet de se concentrer sur la modélisation du problème.

Pour le second problème, une fois l'opération reconnue, la calculatrice peut aider à trouver le quotient. Si elle ne possède pas de touche  elle donnera une valeur décimale et il faudra penser à ne garder que la partie entière 43. Elle pourra donc poser problème pour des élèves qui n'ont pas encore assimilé le sens de la division.

## 2) a) Les procédures et les erreurs

*Aliette : technique dite des meilleurs multiples du diviseur*

A gauche de sa copie, Aliette écrit le début de la table de 8 puis elle en déduit un répertoire des multiples de 80 et de 800.
A droite de sa copie, Aliette réalise une division en potence de 4584 par 8. Elle n'écrit pas le dernier reste (sans doute parce qu'il est nul) mais semble l'avoir calculé. Son quotient est exact.
Elle raisonne directement sur le dividende en cherchant dans son répertoire le meilleur multiple de 800 qu'elle peut soustraire à 4584. Elle fait ensuite de même avec le meilleur multiple de 80 qu'elle peut soustraire à 584 puis le meilleur multiple de 8 qu'elle peut soustraire à 24.

*Christian : technique dite des groupements de numération du dividende*

Cet élève semble essayer d'utiliser la technique traditionnelle de la division posée. Il ne réalise pas qu'il peut commencer à diviser 43 centaines par 8 et essaie donc de diviser 458 dizaines par 8. Comme 72 est le plus grand multiple de 8 qu'il connaît, il écrit 9 au quotient et retranche 72 à 458 (mais il se trompe dans cette soustraction). Il obtient 396, il abaisse le 4 (certainement un geste technique dont il se souvient sans y avoir mis de sens) et retranche encore $9 \times 8$ à 3964 tout en écrivant encore 9 au quotient… et ainsi de suite…
Cet élève semble mimer des gestes techniques sans en comprendre le sens ce qui génère un calcul sans cohérence.

## 2) b) Une aide pour Christian

Cet élève n'a pas compris la technique qu'il tente d'utiliser. On pourrait proposer du matériel de numération de type échange pour aider Christian à comprendre la technique traditionnelle, tout en l'accompagnant d'une verbalisation adaptée, en contextualisant cette division dans le cas d'un partage.
4584 est proposé sous forme de 4 plaques de 1000, 5 plaques de 100, 8 plaques de 10 et 4 plaques de 1.

*1ère étape : on cherche le nombre de chiffres du quotient*

Peut-on partager 4 plaques de 1000 (ou 4 milliers) entre 8 ? Non. Le quotient n'aura donc que 3 chiffres : des centaines, des dizaines et des unités.

*2ème étape : on effectue la division posée*

On ne peut pas partager 4 plaques de 1000 entre 8. On échange les plaques de 1000 contre des plaques de 100. On a donc 45 plaques de 100 à partager en 8 (ou 45 centaines à partager entre 8). 45 centaines divisées par 8, cela fait 5 centaines au quotient et il reste 5 centaines. On continue de la même façon à poser la division…

*3ème étape : vérification du résultat.*

Le quotient dans la division euclidienne de 4584 par 8 est 573 et le reste est 0.
$573 \times 8 + 0 = 4584$.

# LA DIVISION DE LA GS AU CM2 d'après un sujet de La Roche sur Yon

## PARTIE A : un problème en grande section

### 1) Procédure experte pour résoudre le problème

Il doit y avoir le même nombre de grains dans chaque maraca, et il doit rester le moins possible de grains, donc l'opération qui permet de résoudre le problème est la division euclidienne : on divise le nombre total de grains par le nombre d'enfants ; le nombre de grains à mettre dans chaque maraca est le quotient et le nombre de grains restants correspond au reste de la division euclidienne.

### 2) Procédure correcte envisageable en grande section pour résoudre le problème

*Première procédure (non numérique)*

Les élèves peuvent s'organiser pour faire des tours de distribution « un à un » : à chaque tour, l'élève donne un grain (et un seul) à chaque membre du groupe, jusqu'à ce qu'il ne reste plus assez de grains pour faire un nouveau tour.

*Deuxième procédure (numérique avec des « petits » nombres)*

Les élèves peuvent faire des tours de distribution de paquets de même cardinal : par exemple, les élèves peuvent se mettre d'accord pour prendre chacun 5 grains, puis, quand la collection se sera réduite, prendre chacun 2 grains, etc. jusqu'à ce qu'il ne reste plus assez de grains pour donner un grain supplémentaire à chacun.

### 3) Procédure de validation envisageable en grande section

*Première procédure (non numérique)*

Pour tester l'équipotence des collections, les élèves peuvent les aligner côte à côte les grains de maïs des leurs collections respectives, et effectuer une correspondance terme à terme.

*Deuxième procédure (non numérique)*

Pour tester l'équipotence des collections réalisées, les élèves peuvent réaliser une correspondance paquet par paquet en alignant des paquets de 2 ou 3 grains de maïs de chaque collection.

*Troisième procédure (numérique)*

Les élèves peuvent dénombrer chacune des collections réalisées (à condition de savoir dénombrer une collection d'une vingtaine d'objets), et conclure si les cardinaux sont égaux ou non.

*Quatrième procédure (numérique)*

Les élèves peuvent dénombrer des petits paquets de chacune des collections et comparer les cardinaux (« Ici, il y en a 5, et encore 5 et encore 4, et là c'est pareil/ce n'est pas pareil »).

## PARTIE B : étude de la progression suivie par une collection de manuels de la classe de CE1 à la classe de CM1

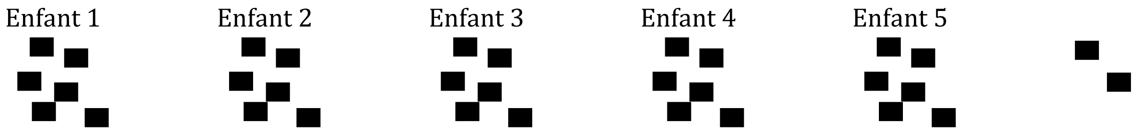
### 1) a) Procédures possibles en CE1 organisées en progression

Nous présentons ici cinq procédures accessibles à des élèves de CE1, et organisées de la simple à la plus experte.
En effet, l'enseignant peut d'abord s'appuyer sur des procédures avec des dessins puis sur des procédures faisant intervenir des additions ou des soustractions, opérations familières des élèves, en mettant en évidence qu'elles aboutissent aux mêmes résultats que les premières procédures. Il pourrait enfin

s'appuyer sur une procédure utilisant la multiplication pour mettre en lumière son caractère économique par rapport aux précédentes.

*Procédure 1 (représentation graphique : dessin ou schéma)*

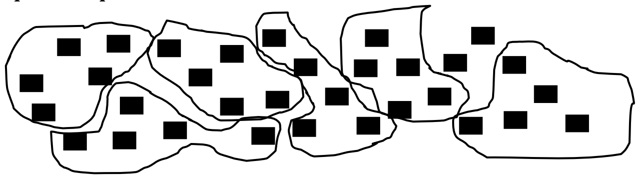
L'élève dessine les cinq enfants (ou distingue cinq parties distinctes sur sa feuille représentant les cinq enfants), puis « répartit » les 32 cartes (ou une représentation schématisée de ces cartes), en les dessinant une à une, à tour de rôle, dans l'espace réservé à chacun des cinq enfants :




Ensuite il dénombre la part d'un enfant (6) et les éléments restants (2).

*Procédure 1 bis (représentation graphique : dessin ou schéma)*

L'élève dessine les 32 cartes, puis il forme des groupes de 5 cartes en les entourant (représentant des tours de distribution), jusqu'à ce qu'il reste moins de 5 cartes :



Il dénombre enfin les groupes formés (6) et les éléments restants (2).

*Procédure 2 (addition itérée avec calcul de tous les résultats intermédiaires)*

L'élève effectue des additions itérées de 5 et calcule tous les résultats jusqu'à atteindre 30 ou 35 : $5 + 5 = 10$ ; $10 + 5 = 15$ ; $15 + 5 = 20$ ; $20 + 5 = 25$ ; $25 + 5 = 30$ ; $30 + 5 = 35$ (« c'est trop »).
Ensuite il détermine le nombre de fois où il a ajouté 5 pour atteindre 30 (6 fois), et calcule l'écart entre 30 et 32 (2).

*Procédure 2 bis (addition itérée par blocs)*

L'élève effectue des additions itérées de 5 en utilisant des sommes partielles jusqu'à atteindre 30 ou 35 :
$5 + 5 = 10$ ; $10 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ ; $30 + 5 = 35$ (« c'est trop »).
Ensuite il détermine le nombre de fois où il a ajouté 5 pour atteindre 30 (6 fois), et calcule l'écart entre 30 et 32 (2).

*Procédure 3 (soustraction itérée)*

L'élève procède par soustractions itérées de 5 à partir de 32, jusqu'à atteindre un nombre strictement plus petit que 5 : $32 - 5 = 27$ ; $27 - 5 = 22$ ; $22 - 5 = 17$ ; $17 - 5 = 12$ ; $12 - 5 = 7$ ; $7 - 5 = 2$.
Ensuite il détermine le nombre de fois où il a retiré 5 (6 fois) et lit le nombre restant (2).

*Procédure 3 bis (soustraction itérée par blocs)*

L'élève procède par soustractions itérées de 5 à partir de 32 en utilisant des sommes partielles, jusqu'à atteindre un nombre strictement plus petit que 5 : $32 - 10 = 22$ ; $22 - 20 = 2$.
Ensuite il détermine le nombre de fois où il a retiré 5 (6 fois) et lit le nombre restant (2).

*Procédure 4 (procédure multiplicative)*

L'élève procède par essais multiplicatifs pour encadrer 32 par deux multiples de 5 consécutifs (soit par une liste exhaustive des premiers multiples de 5, soit par appui sur des faits mémorisés) : il sait que dans la table de 5, $5 \times 6 = 30$ et $5 \times 7 = 35$.
Il conclut alors qu'il peut donner 6 cartes à chacun. Il reste alors : $32 - 30 = 2$.

### 1) b) Apport de la deuxième question

Dans la première question, le reste est nul : $28 = 4 \times 7$.
Dans la deuxième question le partage aboutit à un reste non nul.

La deuxième question permet de mettre en évidence que dans une situation de partage (équitable), il peut y avoir un reste.

### 2) Intérêt de l'activité de l'étape 81

Dans chacune des deux étapes, deux des trois problèmes réfèrent respectivement à des contextes similaires : des enveloppes et des images ; des rubans.
Dans l'étape 80, les problèmes proposés sont des problèmes de « division-partition » : il s'agit de rechercher la valeur d'une part (le nombre d'images par enveloppe, le nombre de cartes par joueur, la longueur de chaque ruban) dans un partage équitable.
Dans l'étape 81, les problèmes proposés sont des problèmes de « division-quotition » : il s'agit de rechercher le nombre de parts (le nombre d'enveloppes, le nombre de wagonnets nécessaires, le nombre de morceaux de ruban) dans un partage équitable.

### 3) Identification de variables didactiques

*Première variable didactique : le cardinal de la collection.*

En choisissant un « grand » nombre d'objets dans la collection, on rend fastidieuses les procédures avec dessin d'une collection-témoin de la quantité ainsi que les procédures par additions ou soustractions itérées.

*Deuxième variable : la relation arithmétique entre le cardinal de la collection et le nombre de parts.*

Les deux multiples de 8 les plus proches de 100 ne font pas partie de la table de multiplication par 8, de telle sorte que les élèves vont devoir s'organiser pour approcher au plus près 100 par un multiple de 8 à deux chiffres. Ceci peut induire la procédure d'encadrement qui aura ainsi des chances de prendre du sens.

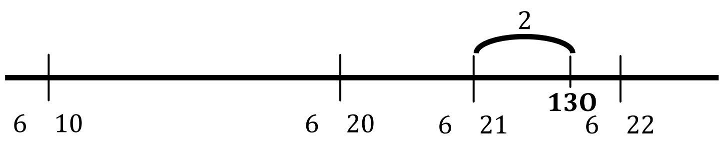
### 4) a) Connaissance pour répondre à l'exercice 1 sans effectuer de calcul

On peut répondre à la question sans calcul, en s'appuyant uniquement sur le décodage de l'écriture chiffrée : dans 240, il y a 24 dizaines, c'est-à-dire 24 paquets de 10.

**Donc avec 240 chocolats, on peut faire 24 paquets de 10.**

### 4) b) Résolution de l'exercice 2 en utilisant la procédure mise en avant dans l'activité de découverte

Si Gaëlle remplit 10 sachets, cela fait : $6 \times 10 = 60$. Ce n'est pas assez.
Si elle remplit 20 sachets, cela fait : $6 \times 20 = 120$. Ce n'est pas assez, mais ce n'est pas loin de 130.
$6 \times 21 = 126$ ; $6 \times 22 = 132$.




130 est donc compris entre $6 \times 21$ et $6 \times 22$. $130 = 6 \times 21 + 4$.

**Gaëlle a rempli 21 sachets et il reste 4 caramels.**

### 5) En CM1, deux divisions

*Calcul 7854 divisé par 27*

Étape 1 :

Je cherche le nombre de chiffres au quotient : $27 \times 100 = 2700$ ; $27 \times 1000 = 27000$.
Donc : $27 \times 100 < 7854 < 27 \times 1000$.

**Il y a donc 3 chiffres au quotient.**

Étape 2 :

Je construis le **répertoire de 27**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 1 = 27 | 27 2 = 54 | 27 3 = 81 | 27 4 = 108 | 27 5 = 135 |
| 27 6 = 162 | 27 7 = 189 | 27 8 = 216 | 27 9 = 243 | |

Étape 3 :

Je pose la division, en mettant trois points au quotient.

L'annexe 4 ne donne qu'un aperçu de la technique envisagée. Ainsi, on peut compléter la division de plusieurs façons.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 7 & 8 & 5 & 4 & 2 & 7 & \\ \cline{6-8}
- & 5 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cline{2-5}
 & 2 & 4 & 5 & 4 & + & 9 & 0 \\ \cline{6-8}
- & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ \cline{2-5}
 & & & 2 & 4 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 7 & 8 & 5 & 4 & 2 & 7 & \\ \cline{6-8}
- & 5 & 4 & 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ \cline{2-5}
 & 2 & 4 & 5 & 4 & & & \\
- & 2 & 4 & 3 & 0 & & & \\ \cline{2-5}
 & & & 2 & 4 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 7 & 8 & 5 & 4 & 2 & 7 & \\ \cline{6-8}
- & 5 & 4 & \downarrow & & 2 & 9 & 0 \\ \cline{2-3}
 & 2 & 4 & 5 & & & & \\
- & 2 & 4 & 3 & \downarrow & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 2 & 4 & & &
\end{array}
$$

*Calcul 4545 divisé par 45*

Étape 1 :

Je cherche le nombre de chiffres au quotient : : $45 \times 100 = 4500$ ; $45 \times 1000 = 45000$.
Donc : $45 \times 100 < 4545 < 45 \times 1000$.

**Il y a donc 3 chiffres au quotient.**

Étape 2 :

**La construction du répertoire est inutile** ici car on voit que l'on peut soustraire $45 \times 100$ à 4545.

Étape 3 :

On écrit donc 100 au quotient (ou 1••).

De là, **trois possibilités d'écrire la division posée** :

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & \\ \cline{6-8}
- & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{2-5}
 & & & 4 & 5 & + & & 1 \\ \cline{6-8}
 & & - & 4 & 5 & 2 & 9 & 0 \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & \\ \cline{6-8}
- & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-5}
 & 0 & 0 & 4 & 5 & & & \\
 & & - & 4 & 5 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & \\ \cline{6-8}
- & 4 & 5 & \downarrow & & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-3}
 & & & 4 & & & & \\
 & & - & 0 & \downarrow & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 4 & 5 & & & \\
 & & - & 4 & 5 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

## PARTIE C : étude d'une autre technique opératoire de la division euclidienne posée

### 1) Utilisation d'un matériel

On peut illustrer cette méthode avec un matériel dans lequel on trouve des unités isolées, des unités regroupées par groupes de dix (dizaines) et des dizaines regroupées par groupes de dix (centaines).
Cela peut être par exemple des petits cubes emboitables (unités), empilés par barres de dix (dizaines), puis rangés dans des plaques (ou sachets) de dix barres (centaines).

*Remarque :*

*On a privilégié un matériel de type « groupements » à un matériel de type « échanges » (boulier, abaques) pour pouvoir mieux illustrer les relations entre unités qui sont en jeu ici (« je sors les dizaines des deux centaines restantes » et « je sors les unités de la dizaine restante »).*

### 2) Algorithme de calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne de 7053 par 34

*Première étape : je pose la division euclidienne de 7053 par 34*

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array}
$$

*Deuxième étape : je cherche l'ordre de grandeur du quotient*

7 milliers à partager en 34, c'est insuffisant pour en donner à chacun.
70 centaines à partager en 34, c'est assez pour en donner à chacun.
J'écris *c d u* au-dessus de 7053 (70 centaines, 5 dizaines, 3 unités), et au-dessus du quotient :

$$\begin{array}{rrrr|lll} & c & d & u & & & \\ 7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & \\ \cline{5-7} & & & & c & d & u \end{array}$$

*Troisième étape : je partage les centaines*

$34 \times 2 = 68$ et $34 \times 3$ est plus grand que 70. Donc 70 centaines en 34, c'est 2 centaines chacun.
J'ai donné 68 centaines, il reste 2 centaines à partager.

$$\begin{array}{rrrr|lll} & c & d & u & & & \\ 7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & \\ \cline{5-7} - & 6 & 8 & & c & d & u \\ \cline{1-4} & 2 & & & 2 & & \end{array}$$

*Quatrième étape : je partage les dizaines*

Je sors les dizaines des 2 centaines restantes, cela fait 20 dizaines.
Avec les 5 qu'on avait au début, cela fait 25 dizaines.
25 dizaines à partager en 34, c'est insuffisant pour en donner à chacun.
J'écris 0 dizaines au quotient, et il reste encore 25 dizaines à partager.

$$\begin{array}{rrrr|lll} & c & d & u & & & \\ 7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & \\ \cline{5-7} - & 6 & 8 & & c & d & u \\ \cline{1-4} & 2 & 5 & & 2 & 0 & \end{array}$$

*Cinquième étape : je partage les unités*

Je sors les unités des 25 dizaines restantes : cela fait 250 unités.
Avec les 3 qu'on avait au début, cela fait 253 unités.
253 unités à partager en 34, on a : $34 \times 5 = 170$.
Or 170 c'est loin de 253, on peut donner plus de 5 unités à chacun.
On essaye avec 8 : $34 \times 8 = 272$.
Or 272, c'est plus grand que 253, on ne peut pas donner 8 unités à chacun.
On essaye avec 7 : $34 \times 7 = 238$.
238, c'est bon, on peut donner 7 unités à chacun.
On écrit 7 au quotient. 253 - 238 = 15 ; il reste 15.

$$\begin{array}{rrrr|lll} & c & d & u & & & \\ 7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 4 & \\ \cline{5-7} - & 6 & 8 & & c & d & u \\ \cline{1-4} & 2 & 5 & 3 & 2 & 0 & 7 \\ - & 2 & 3 & 8 & & & \\ \cline{2-4} & & 1 & 5 & & & \end{array}$$

# CALCUL MENTAL ET CALCUL EN LIGNE AU CYCLE 3

## PARTIE A : calcul mental

### 1) Raisons d'une pratique régulière du calcul mental

Seulement deux raisons parmi les suivantes sont attendues du candidat :

- Calcul mental et raisonnement :
    - le calcul mental permet de développer des stratégies de calcul ;
    - le choix des stratégies en fonction des nombres en jeu témoigne d'un raisonnement.
- Calcul mental, connaissances des nombres et des propriétés des opérations : la pratique du calcul mental permet :
    - d'enrichir les conceptions numériques, en particulier les différentes désignations et décompositions des nombres ;
    - d'accroitre la familiarité avec les nombres, les relations entre les nombres ;
    - de travailler/d'utiliser les propriétés des opérations ;
    - de diversifier ses procédures de calcul.
- Calcul mental et mémorisation : la pratique du calcul mental permet une mémorisation « spiralaire » des faits numériques (le répertoire des faits numériques s'enrichit et se construit au fur et à mesure de la pratique).
- Calcul mental et résolution de problème : l'habileté en calcul mental est un facteur déterminant pour la réussite en résolution de problème, car il décharge l'élève de la problématique du calcul.
- Calcul mental et calcul approché : le calcul approché est essentiel :
    - pour la recherche de l'ordre de grandeur d'un résultat afin d'en contrôler la vraisemblance ;
    - dans la vie quotidienne, souvent dans le cadre des mesures de grandeurs, selon le degré de précision attendu, afin par exemple de vérifier un prix, la validité d'une promotion…

### 2) Procédure attendue pour les calculs

Il s'agit de trois additions, le premier nombre s'écrit avec deux chiffres et le second avec un seul. Pour chaque somme, le chiffre des unités de l'un des deux nombres est « 9 ». S'il s'agit de mobiliser la même procédure pour les trois calculs, la procédure attendue par l'enseignant est probablement basée sur le passage par le complément à dix : ici ajouter 1 au nombre dont le chiffre des unités (au rang 1) est 9. Le second nombre est donc décomposé sous la forme : « $1 + \ldots$ ».

- Pour le calcul $59 + 7$ : décomposer « 7 » en « $1 + 6$ » de façon à « compléter le 9 de 59 à la dizaine supérieure » : $59 + 7 = 59 + (1 + 6) = (59 + 1) + 6 = 60 + 6 = 66$. (associativité de l'addition)
- Pour le calcul $49 + 8$ : décomposer « 8 » en « $1 + 7$ » de façon à « compléter le 9 de 49 à la dizaine supérieure » : $49 + 8 = 49 + (1 + 7) = (49 + 1) + 7 = 50 + 7 = 57$.
- Pour le calcul $39 + 6$ : décomposer « 6 » en « $1 + 5$ » de façon à « compléter le 9 de 39 à la dizaine supérieure » : $39 + 6 = 39 + (1 + 5) = (39 + 1) + 5 = 40 + 5 = 45$.

*Remarque :*

*On pourrait également envisager une décomposition soustractive du nombre dont le chiffre des unités est 9, en un multiple de dix moins 1*

*$59 + 7 = (60 - 1) + 7 = (60 + 7) - 1 = 67 - 1 = 66$ (associativité et commutativité)*

### 3) a) Une procédure par essai erreur envisageable pour répondre à la devinette

Une procédure par essai-erreur consisterait à tester des nombres (choisir un nombre, soustraire 9) et, en fonction du résultat obtenu, à réajuster le premier choix. Elle pourrait, par exemple, être transcrite de la manière suivante :

$40 - 9 = 31$ ; « c'est trop petit »

$50 - 9 = 41$ ; « c'est trop grand »

45 – 9 = 36 ; « c'est trop petit »
47 – 9 = 38 ; « c'est bon ! ».

*Remarque :*
*On pourrait également envisager des essais en partant de nombre non multiples de 10.*
*49 – 9 = 40 ; « c'est trop grand »*
*48 – 9 = 39 ; « c'est trop grand »*
*47 – 9 = 38 ; « c'est bon ! ».*

### 3) b) Une réponse erronée prévisible

Une réponse erronée fréquente pour ce genre d'énoncé repose sur la prégnance du terme « enlève » présent dans l'énoncé, qui implique une représentation soustractive du problème. L'élève utilise les deux données numériques et l'opération « soustraction » pour produire le résultat erroné suivant : 38 – 9 = **29**.

**La réponse erronée proposée est alors 29.**

### 4) Calcul approché

*Calcul approché de 346,31 + 67,9*

L'élève peut arrondir les termes aux entiers supérieurs ou inférieurs mais les calculs restent compliqués à faire mentalement (346 + 67 ou 346 + 68 ou 347 + 67 ou 347 + 68). Le plus pertinent serait d'arrondir chaque terme au multiple de dix le plus proche : « 346,31, c'est presque 350 et 67,9, c'est presque 70 donc 346,31 + 67,9, c'est presque 350 + 70 = 350 + 50 + 20 = 420 ».

**La valeur approchée du résultat serait 420.**

*Remarque :*
*Les calculs approchés dépendent du contexte pour estimer la précision attendue. La question de ce sujet est ouverte, donc les réponses apportées peuvent être variées si elles sont justifiées. Ainsi, les réponses suivantes peuvent également être acceptées :*

*« 346,31 + 67,9 : c'est presque 345 + 65 »*
*« 346,31 + 67,9 : c'est presque 345 + 70 »*
*« 346,31 + 67,9 : c'est presque 340 + 60 »*
…

*Calcul approché de 6 × 43,9*

L'élève peut dire « 43,9 : c'est presque 44
donc 6 × 43,9 : c'est presque 6 × 44 = 6 × 40 + 6 × 4 = 240 + 24 = 264 »
(ou encore 6 × 44, c'est 6 fois 4 dizaines et 6 fois 4, donc 24 dizaines et 24 égale 264).

*Remarque :*
*Les réponses suivantes peuvent également être acceptées :*
*« 6 × 43,9 : c'est presque 6 × 40 ».*
*« 6 × 43,9 : c'est presque 6 × 45 ».*

## PARTIE B : calcul en ligne

### 1) Procédure de calcul en ligne attendue pour 26 × 12 et 34 × 21

Les procédures proposées doivent être basées sur des décompositions additives et/ou multiplicatives des nombres en jeu et l'utilisation des propriétés (associativité, commutativité, distributivité) des opérations. Les procédures les plus « classiques », s'appuyant pour la première étape sur la décomposition canonique de l'un des facteurs, sont :

*Décomposition de 26 :*

$26 \times 12 = 20 \times 12 + 6 \times 12 = 2 \times 10 \times 12 + 72$

soit $26 \times 12 = 2 \times 120 + 72 = 240 + 72 = 240 + 60 + 12 = 312$.

*Décomposition de 12 :*

$26 \times 12 = 26 \times 10 + 26 \times 2 = 260 + 52 = 260 + 40 + 12 = 312$

ou bien $26 \times 12 = 26 \times 10 + 26 \times 2 = 260 + 52 = 250 + 10 + 52 = 250 + 52 + 10 = 312$.

*Mais aussi :*

$26 \times 12 = 25 \times 12 + 1 \times 12 = 25 \times 4 \times 3 + 12 = 100 \times 3 + 12 = 300 + 12 = 312$
utilisant une décomposition additive de 26 et une décomposition multiplicative de 12.

*Décomposition de 21 :*

$34 \times 21 = 34 \times 20 + 34 \times 1 = 34 \times 2 \times 10 + 34$

soit $34 \times 21 = 68 \times 10 + 34 = 680 + 34 = 680 + 20 + 14 = 714$

ou bien $34 \times 21 = 34 \times 20 + 34 \times 1 = 34 \times 10 \times 2 + 34$

soit $34 \times 21 = 340 \times 2 + 34 = 680 + 34 = 680 + 20 + 14 = 714$.

*Décomposition de 34 :*

$34 \times 21 = 30 \times 21 + 4 \times 21 = 3 \times 10 \times 21 + 4 \times 20 + 4 \times 1$

soit $34 \times 21 = 3 \times 210 + 80 + 4 = 630 + 70 + 10 + 4 = 714$.

*Mais aussi :*

$34 \times 21 = 34 \times 3 \times 7 = (30 \times 3 + 4 \times 3) \times 7 = (90 + 12) \times 7 = 102 \times 7 = 714$
combinant décomposition additive de 34 et décomposition multiplicative de 21.

## 2) a) Deux erreurs dans la copie de Melissa

Une erreur concerne l'utilisation du signe « = » dans les écritures produites :

$26 \times 12 = 26 \times 10 = 260$.

Une autre erreur de nature différente concerne le calcul $26 \times 2 = 32$ certainement due au calcul suivant $6 \times 2 = 12$ que j'ajoute à 20 (oubli d'une partie des calculs dans l'utilisation de la distributivité).

## 2) b) Une aide pour Melissa

*Première aide possible*

Dans un premier temps, il s'agit de faire prendre conscience à Melissa de l'erreur concernant l'égalité $34 \times 21 = 34 \times 20 = 680$ (juste par compréhension de cette phrase ou par utilisation de la calculatrice).
Ensuite il s'agit de lui faire oraliser ses calculs « $34 \times 21$ c'est 34 fois 20 et 34 fois 1 » c'est-à-dire « 34 fois 20 PLUS 34 fois 1 » et transcrire cette phrase à l'écrit.

*Deuxième aide possible*

« 21 fois 34 c'est 20 fois 34 et 1 fois 34 » c'est-à-dire « 20 fois 34 PLUS 1 fois 34 »

*Troisième aide possible*

Visualiser le découpage particulier d'une grille de 21 lignes (colonnes) de 34 carreaux et calcul du nombre de carreaux de chaque partie pour trouver le nombre de carreaux de la grille.

## 3) a) Interprétation du calcul $34 \times 21$ proposé par Liliana

Liliana imagine probablement les étapes de la multiplication en colonne :

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 4 \\ \times & & 2 & 1 \\ \hline & & 3 & 4 \\ + & 6 & 8 & . \\ \hline & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

Elle effectue mentalement toutes les multiplications qui interviennent dans ce calcul (et dans le bon ordre) « 1 fois 4… 4 », « 1 fois 3… 3 », « 2 fois 4… 8 », « 2 fois 3… 6 ». Ensuite, elle sait qu'elle a ainsi composé deux nombres qu'il faut additionner mais elle se trompe dans les nombres créés (43 et 86 au lieu de 34 et 680).

*Remarque :*

*Lors de la réalisation du calcul posé, cette élève a certainement l'habitude de remplacer le « 0 », chiffre des unités du nombre constitué de 68 dizaines (deux dizaines multiplié par 34 unités) soit « 680 » par un point comme cela se fait souvent et sans justification dans certaines classes. Ainsi, elle considère deux nombres à deux chiffres dans son addition finale au lieu de la somme d'un nombre à deux chiffres avec un nombre à trois chiffres.*

## 3) b) Cohérence avec le calcul proposé par Liliana pour 26 × 12

De la même manière que précédemment, Liliana tente de poser mentalement la multiplication :

$$\begin{array}{cccc} & & {}^{1} & \\ & & 2 & 6 \\ \times & & 1 & 2 \\ \hline & & 5 & 2 \\ + & 2 & 6 & . \\ \hline & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Elle écrit les calculs intermédiaires en prenant garde à la retenue : « 2 fois 6… 12, j'écris 2 et je retiens 1 », « 2 fois 2… 4 et avec la retenue, 4 et 1… 5 », « 1 fois 6… 6 », « 1 fois 2… 2 ». Ensuite elle sait qu'elle a composé deux nombres qu'il faut additionner mais elle se trompe dans les nombres créés (26 et 25 au lieu de 52 et 260).

**L'interprétation donnée dans la question précédente pour 34 × 21 (sans retenue) est cohérente avec le calcul proposé pour 26 × 12.**

## 3) c) Le calcul mental comme aide pour vérifier la justesse des calculs

Le calcul mental et le calcul approché sont essentiels pour la recherche de l'ordre de grandeur d'un résultat afin d'en contrôler la vraisemblance. Dans le cas de Liliana, il suffit que cette élève se dise que son premier calcul ne peut pas être inférieur à $20 \times 10 = 200$ pour comprendre qu'elle a commis une erreur. De même, le résultat de son second calcul ne peut pas être inférieur à $30 \times 20 = 600$.
Il s'agit ici d'un moyen de contrôle.

## 4) a) Explication du problème rencontré lors de l'utilisation de la calculette

Certaines calculettes ne reconnaissent pas l'ordre conventionnel de priorité des calculs.
Ainsi si l'on tape $26 \times 10 + 26 \times 2$, la calculette fait le calcul suivant : $(26 \times 10 + 26) \times 2$ qui donne un résultat de 572 ($286 \times 2$).
D'autres calculettes (dites « scientifiques ») reconnaissent l'ordre conventionnel de priorité des calculs. Ainsi si l'on tape : $26 \times 10 + 26 \times 2$, la calculette considère d'abord les multiplications et produit le résultat attendu : 312 ($260 + 52$).

## 4) b) Introduction d'un nouvel élément mathématique

Le maître peut se baser sur cet exemple pour introduire les parenthèses pour enlever toute ambiguïté ($(26 \times 10) + (26 \times 2)$) ou la convention de priorité des opérations à partir de la comparaison de résultats de différents calculs bien choisis effectués à l'aide de la calculatrice.

## PARTIE C : utilisation d'un environnement numérique

### Avantages et inconvénients des supports

| | **Logiciel** | **La Martinière** |
|---|---|---|
| **Avantages** | Ludique. Environnement motivant.<br>On peut également supposer que le logiciel permet de travailler de manière individuelle, ainsi les exercices sont adaptables au niveau de chaque élève (individualisable) et exportable chez l'élève.<br>Sur ordinateur, le maître peut voir l'historique des calculs.<br>Le logiciel fait apparaître les calculs à effectuer. L'élève a les nombres et le signe opératoire en jeu sous les yeux, cela facilite sa gestion des opérations. | Mise en œuvre facile et rapide.<br>Le maître peut adapter les calculs à faire en fonction des difficultés ou des réussites constatées des élèves.<br><br>Si les calculs à effectuer sont énoncés par le maître, cela nécessite des compétences liées au passage de la numération orale à la numération écrite, ainsi que des capacités de mémorisation. |
| **Inconvénients** | Matériel (tout ce qui peut ne pas marcher lorsque l'on utilise l'informatique). | Pas de mémoire de jeu. Les réponses sont éphémères, les résultats une fois effacés ne sont plus présents.<br>Pas d'historique des calculs (pour rechercher et comprendre les erreurs éventuelles, pour traquer ce qui est connu et ce qui ne l'est pas encore) |

# LA SOUSTRACTION
# d'après un sujet de Lyon

## 1) Propriété mathématique

La propriété mathématique illustrée se nomme la « conservation des écarts » : lorsqu'on ajoute un même nombre à deux autres nombres l'écart entre ces deux nombres reste le même. Autrement dit, quels que soient les nombres $a$, $b$ et $c$, on a $a - b = (a + c) - (b + c)$.

## 2) Exercices et méthodes

La méthode 1 de la séance 82 est dite « soustraction par emprunt ».
Cette technique ne repose pas sur la conservation des écarts mais sur une compréhension du système de numération décimal de position.

La méthode 2 de la séance 82 repose effectivement sur la conservation des écarts. Ajouter 10 unités et 1 dizaine aux deux nombres à soustraire ne change pas le résultat car 10 unités = 1 dizaine.

Les exercices de la séance 81 ne préparent donc qu'à la méthode 2 de la séance 82.

## 3) Le problème de 92 – 39

En séance 81, seules des soustractions sans retenue sont présentées, contrairement à 92 − 39. L'objectif de cette page est de comprendre la propriété de conservation des écarts. Or la soustraction 92 – 39 est délicate à effectuer avec la conservation des écarts car il ne suffit pas d'ajouter 10 à chaque membre de la soustraction pour simplifier le calcul. Les auteurs choisissent donc de faire comprendre la propriété de conservation des écarts en ne proposant que des soustractions sans retenue.

## 4) Soustraction posée 702 – 56

Deux raisonnements sont possibles pour appliquer la méthode par emprunt au calcul 702 − 56 :

*Premier raisonnement*

2 u – 6 u : impossible.
J'enlève une dizaine à 70 dizaines ; je la convertis en 10 unités (702 est décomposé en 69 dizaines et 12 unités).

Je calcule : 12 u – 6 u = 6 u, 69 d – 5 d = 64 d.

Donc 702 – 56 = 646.

*Deuxième raisonnement*

2 u – 6 u : impossible,
Je ne peux pas prendre une dizaine à 0 dizaine ; j'enlève une centaine à 7 centaines et je la convertis en 10 dizaines ; puis j'enlève une de ces dizaines pour la convertir en 10 unités (702 est décomposé en 6 centaines 9 dizaines et 12 unités).
Je calcule : 12 u – 6 u = 6 u, 9 d – 5 d = 4 d, reste 6 c non impactées.
Donc 702 – 56 = 646.

Ces deux raisonnements peuvent se résumer sous la forme posée :

$$\begin{array}{cccc} & \cancel{7}_{6} & \cancel{0}_{9} & {}_{1}2 \\ - & & 5 & 6 \\ \hline & 6 & 4 & 6 \end{array}$$

## 5) Comparaison des deux méthodes

| | Principe mathématique | Connaissances préalables | Vérification |
|---|---|---|---|
| Méthode 1 :<br>par emprunt | Principes de numération positionnelle et décimal (groupement échange)<br>1 dizaine = 10 unités<br>1 centaine = 10 dizaines… | Connaissances en numération :<br>- principe de position (alignement des chiffres de même valeur)<br>- principe décimal (relations entre unités :<br>1 dizaine = 10 unités,<br>1 centaine = 10 dizaines, ...).<br>**Savoir soustraire un nombre à un chiffre d'un autre plus grand strictement inférieur à 20.** | Le manuel propose de vérifier le résultat de la soustraction par une addition ; ce qui suppose d'avoir au préalablement établi en acte l'équivalence<br>**a – b = c ⇔ c + b = a** |
| Méthode 2 :<br>par conservation des écarts | Conservation des écarts :<br>$a - b = (a + c) - (b + c)$ | Connaissances en numération : principe de position (alignement des chiffres de même valeur) et principe décimal (relations entre unités : 1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines, ...).<br>**Savoir soustraire un nombre à un chiffre d'un autre plus grand strictement inférieur à 20.**<br>Les élèves doivent avoir intégré la propriété de conservation des écarts pour comprendre le fondement de la technique proposée. | Le manuel propose de vérifier le résultat de la soustraction par une addition ; ce qui suppose d'avoir au préalablement établi en acte l'équivalence<br>**a – b = c ⇔ c + b = a** |

## 6) Le problème des « petits 1 »

Pour faire le lien avec les exercices de la séance 81, l'enseignant peut prendre appui sur du matériel de numération et l'utiliser pour illustrer les nombres de billes possédées par Farah.
Il pourra ainsi présenter les deux collections et montrer que le fait de leur ajouter à chacune un même nombre sous deux présentations différentes (1 dizaine à 592 et 10 unités à 239) facilite la comparaison sans modifier la différence des deux nombres.
Il peut aussi modifier le contexte de l'exercice pour se ramener à celui proposé dans l'exercice 1 de la séance 81, celui de la monnaie, et travailler avec des pièces et des billets.

Il peut également faire un lien plus théorique entre le calcul posé et le calcul en ligne issu de la séance 81, comme ci-dessous par exemple :

$$592 - 239 = (592 + 10) - (239 + 10) = (590 + 12) - 249$$

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 9 & {}_{1}2 \\ - & 2 & 3_{1} & 9 \\ \hline & 6 & 4 & 6 \end{array}$$

Ou encore en passant par un écrit intermédiaire :

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 9 & {}_{10+}2 \\ - & 2 & 3 & 9 \\ & & {}_{1} & {}_{0} \\ \hline & 6 & 4 & 6 \end{array}$$

## 7) Différence entre les problèmes 1 des séances 81 et 82

*Différence au niveau du sens de la soustraction :*

En séance 81, il s'agit d'un problème de comparaison d'états (combien Léo a de plus que Coline)
En séance 82, il s'agit d'un problème de composition de deux états où on connait le tout et une partie et on recherche l'autre partie.

*Différence au niveau des nombres en jeu :*

En séance 81, les élèves travaillent avec des nombres inférieurs à 100 (2 chiffres).
En séance 82, les élèves travaillent avec des nombres supérieurs à 100 (3 chiffres).

*Différence au niveau de la retenue :*

En séance 81, il n'y a pas de retenue pour la soustraction.
En séance 82, la soustraction est à retenue.

*Différence au niveau des procédures possibles :*

En séance 81, la réponse peut être donnée en comparant les billets et des pièces.
En séance 82, il est nécessaire d'effectuer la soustraction pour obtenir le résultat.

# ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
# Numération au cycle 2 d'après un sujet de La Roche sur Yon

## 1) a) Rôle de la phase 1

La phase 1 a pour rôle l'appropriation de la situation et du matériel par les élèves (dévolution). C'est la phase où le maitre précise les consignes et s'assure qu'elles sont comprises en les faisant reformuler par les élèves.

## 1) b) Procédures correctes

Seulement deux procédures parmi les suivantes sont attendues du candidat :

- Dénombrer, en les comptant, les boutons manquants et garder le nombre en mémoire. Aller ensuite à la réserve de gommettes, prendre le même nombre de gommettes en les dénombrant une à une.
- Décomposer la quantité de boutons manquants en quantités directement perceptibles et garder en mémoire les nombres associés (par exemple, 3 et encore 3 pour la quantité de 6 boutons manquants). Aller ensuite à la réserve et prendre chaque quantité associée (3 et encore 3 gommettes pour la quantité 6).
- Représenter les boutons manquants par une quantité équivalente par correspondance terme à terme, par exemple des doigts levés. Aller ensuite à la réserve et prendre une gommette pour chaque doigt levé.

*Remarque*

*Cette procédure est possible car il y a au maximum 8 boutons manquants.*

- Aller directement à la réserve et rapporter une quantité aléatoire de gommettes. Comparer par correspondance terme à terme la quantité de boutons manquants et la quantité de gommettes ramenée. S'il y a trop de gommettes, utiliser le deuxième voyage pour les rapporter à la réserve. S'il n'y a pas assez de gommettes, utiliser l'une des procédures précédentes pour aller chercher ce qui manque au deuxième voyage.

## 1) c) Deux erreurs possibles

Dans les procédures 1 et 2, l'élève peut oublier le ou les nombres à retenir.
Dans la procédure 1, l'élève peut se tromper en dénombrant les boutons manquants, ou se tromper en dénombrant les gommettes. De la même façon, l'élève peut se tromper en réalisant la collection de doigts dans la procédure 3, par exemple en prenant en compte deux fois le même bouton, ou en oubliant un bouton.
L'élève peut ne se fier qu'à une simple estimation de la quantité de boutons manquants, et partir à la réserve sans avoir pris d'information sur la quantité de gommettes à prendre. Il estime alors à nouveau la quantité de gommettes lorsqu'il les prend dans la réserve. Il peut se tromper dans son estimation.

## 1) d) Les objectifs visés

La contrainte « réussir en un seul voyage » a pour objectif d'invalider les procédures du type procédure 4, et d'inciter les élèves à dénombrer les boutons manquants, à garder le nombre en mémoire et à l'utiliser pour, ensuite, prendre la quantité nécessaire de gommettes.
La contrainte « demander oralement la bonne quantité de gommettes » a pour objectif d'invalider les procédures du type procédure 2 et 3, en incitant les élèves à dire le nombre total de gommettes nécessaires.
La contrainte « la demander par écrit » a pour objectif d'inciter les élèves à utiliser l'écriture chiffrée du nombre. Il est probable que tous les élèves n'auront pas recours à l'écriture d'un nombre. Certains essaieront peut-être de dessiner les gommettes. Par ailleurs, passer la commande par écrit permet de garder le nombre en mémoire sur un temps long, contrairement à une commande orale.

## 2) a) Rôle de la contrainte « les marchands ne peuvent pas donner plus de 9 boutons isolés »

Cette contrainte permet d'inciter les élèves à faire des groupements de 10 boutons.

Ainsi, la commande « 0 paquets de 10 boutons et 20 boutons isolés » ne sera pas honorée par le marchand et sera donc invalidée d'emblée.

## 2) b) Deux procédures correctes et deux erreurs

Les élèves peuvent réussir la tâche proposée par l'une des deux procédures suivantes :

- Les élèves réalisent des paquets de 10 boutons soit directement sur leur robot en les entourant, soit en comptant de dix en dix oralement. Quand il reste moins de 10 boutons non entourés, ils écrivent le nombre de paquets sur leur bon de commande dans la rubrique « paquets de 10 », et le nombre de boutons non entourés dans la rubrique « boutons isolés ».
- Les élèves dénombrent les boutons de leur robot en les comptant. L'écriture chiffrée de ce nombre (connue ou retrouvée sur la file numérique) leur donne alors la composition de leur bon de commande : le chiffre des dizaines pour les paquets de 10, et le chiffre des unités pour les boutons isolés.

Plusieurs erreurs sont envisageables ; deux parmi celles répertoriées ci-dessous sont attendues du candidat :

- Une erreur peut venir de l'absence de prise en compte de la contrainte « pas plus 9 boutons isolés » : l'élève commande par exemple 37 boutons isolés.
- Dans la procédure 1, les élèves peuvent se tromper en faisant les groupements, et entourant par exemple 9 boutons ou 11 boutons. Ils peuvent également se tromper en dénombrant les boutons non entourés, ou les paquets.
- Une erreur pourrait survenir chez un groupe qui se fierait à une simple estimation et qui écrirait « au hasard » sur le bon de commande.
- Dans la procédure 2, les élèves peuvent faire une erreur de dénombrement des boutons, en en oubliant ou en comptant deux fois le même.
- Les élèves peuvent également faire une erreur en cherchant l'écriture chiffrée du nombre sur la file numérique.
- Une autre erreur peut être liée à l'interprétation de l'écriture chiffrée : confusion sur la valeur des chiffres aux rangs des dizaines et unités (3 boutons et 7 paquets de 10 pour 37).
- Des difficultés à considérer les paquets de 10 comme une nouvelle unité peuvent amener des erreurs comme par exemple demander 30 paquets de 10 et 7 boutons seuls.

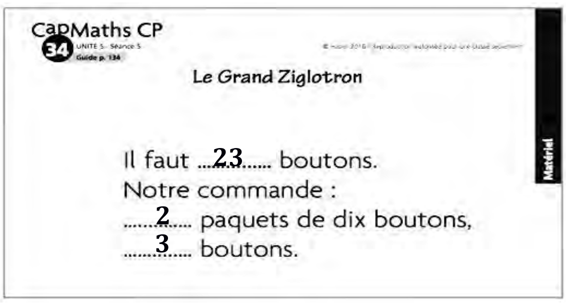
## 2) c) Erreurs envisageables pour l'élève dans le rôle du marchand

Pour l'élève jouant le rôle du marchand, voici les erreurs possibles :

- Le marchand peut ne pas reconnaître l'écriture chiffrée des nombres sur le bon de commande, et se tromper de nombre de plaques ou de boutons isolés.
- Il peut également se tromper en dénombrant les plaques ou les boutons isolés à donner.
- Il peut se tromper en donnant des plaques à la place des boutons isolés et des boutons isolés à la place des plaques.

## 2) d) Une synthèse

La synthèse serait une mise en relief de la procédure permettant de réaliser le plus rapidement la commande. Elle s'appuie sur un exemple vu en classe, compréhensible par tous les élèves (domaine numérique accessible).



CapMaths CP

34 UNITE 5 – Séance 5

Guide p. 134

Le Grand Ziglotron

Il faut ...23...... boutons.

Notre commande :

......2...... paquets de dix boutons,

......3...... boutons.

Matériel

Pour réussir la commande de 23 boutons, on peut commander **2** paquets de 10 et **3** boutons seuls.

23 = 10 + 10 + **3**

**2 3**

**2** paquets de 10 et **3** boutons

### 3) a) Transfert des procédures de la question 2) b) à l'exercice 4

La procédure 1 n'est plus envisageable, car les élèves ne disposent pas des boutons dessinés pour les entourer. Dans cet exercice, les élèves sont incités à utiliser la procédure 2 : dans l'écriture chiffrée d'un nombre, le deuxième chiffre (en partant de la droite) indique le nombre de paquets de 10 boutons et le premier chiffre (en partant de la droite) indique le nombre de boutons isolés.

### 3) b) Analyse des erreurs de Marina

Marina additionne les deux nombres du bon de commande pour trouver le nombre total de boutons. Cela revient à considérer un paquet de 10 boutons comme un seul bouton. Pour lui faire prendre conscience de son erreur, il faudrait lui montrer la quantité avec du matériel effectif ou bien en la dessinant (1 paquet de 10 et 5 isolés) et lui demander de compter les gommettes. Elle constaterait alors qu'elle n'en a pas 6 mais 15. Ensuite, on pourrait lui demander de corriger seule son erreur pour 3 paquets et 7 boutons en l'aidant à compter chaque paquet de 10 boutons comme 1 grande quantité (1 paquet, 2 paquets, 3 paquets, …).

### 4) a) Une procédure correcte

Un élève peut réussir l'exercice 1 en utilisant l'une de ces procédures :

- L'élève décompose 137 en 13 dizaines et 7 unités. Il en déduit qu'il lui faut 13 boites pour avoir les 13 dizaines, et encore une boite pour avoir les 7 unités. Il compte alors les boites par 1 et entoure alors 14 boites.
- L'élève compte de dix en dix pour chaque boite en entourant les boites une par une. Lorsqu'il arrive à 130 perles, il entoure encore une boite pour avoir les 7 manquantes.

### 4) b) Les exercices 4 et 5

*Exercice 4*

a) Dans 45, il y a 4 dizaines

b) dans 145, il y a 14 dizaines

c) dans 1045, il y a 104 dizaines

d) dans 1450, il y a 145 dizaines

*Exercice 5 : Quatre solutions différentes pour payer 2530 €*

a) 25 billets de 100 € et 3 billets de 10 €

b) 20 billets de 100 € et 53 billets de 10 €

c) 10 billets de 100 € et 153 billets de 10 €

d) 0 billet de 100 € et 253 billets de 10 €

### 4) c) Deux erreurs possibles

On peut envisager les erreurs suivantes pour l'exercice 4 :

- Une erreur possible est de répondre 4 à la question b, 4 à la question c et 5 à la question d. L'élève sait que ce chiffre indique un nombre de dizaines, mais il ne prend pas en compte les dizaines qui sont aussi dans les centaines, par exemple 10 dizaines dans 1 centaine de 145 (confusion entre le chiffre des dizaines et le nombre de dizaines).
- Une erreur possible est de répondre 5 à la question a, 15 à la question b et 105 à la question c. Cette erreur peut provenir du fait que dans l'exercice 1, il fallait prendre la dizaine supérieure pour avoir assez de perles. Ici, l'élève qui commet cette erreur peut avoir pensé que pour faire 45, il faut 5 boites (4 pour les 4 dizaines, et 1 pour les 5 tous seuls). De même, pour 145, il faut 15 « boites », et pour 1045, il faut 105 « boites ».

### 4) d) Une aide pour Célia

Une première aide pourrait consister à imposer un nombre de centaines (par exemple 1 centaine ou encore 0 centaine) et lui demander de chercher le nombre de dizaines restantes. Si cela ne suffit pas une deuxième aide pourrait consister à utiliser du matériel comme par exemple des billets de 100 € et des billets de 10 € et faire remarquer que 10 billets de 10 € valent 1 billet de 100 €, puis faire construire la somme correspondante à la solution proposée : 25 billets de 100 € et 3 billets de 10 €. Lui demander alors de faire des échanges de billets de 100 € contre les billets de 10 € correspondants, afin de produire d'autres solutions.

# ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
# Géométrie plane au cycle 3 d'après un sujet de Nice

## 1) Figure recherchée

La figure recherchée est la figure D. En effet, en considérant les informations ligne par ligne :
- « j'ai 4 sommets » permet d'éliminer B et E.
- « mes diagonales ne sont pas perpendiculaires » élimine A et F.
- « mes côtés n'ont pas la même longueur » n'apporte rien de plus.
- « je possède au moins un angle droit » élimine C.

**Il ne reste donc plus que la figure D.**

## 2) Possibilité de supprimer une ligne (ou une phrase) dans ce jeu du portrait

Il est préférable de ne pas supprimer la première phrase (« j'ai 4 sommets ») qui permet de savoir que la figure recherchée est un quadrilatère. Si cette première phrase est enlevée, on pourrait s'appuyer sur les diagonales pour trouver la figure car le triangle (figure B) n'a pas de diagonales. Mais on peut cependant étendre la notion de diagonale à d'autres polygones que les quadrilatères. Garder la première phrase permet donc d'éviter toute ambiguïté avec la figure E.

On peut donc supprimer ou bien « mes diagonales ne sont pas perpendiculaires » ou bien « mes côtés n'ont pas la même longueur »
En effet, tous les quadrilatères dessinés sont des parallélogrammes (car leurs diagonales ont même milieu). Or, dans un parallélogramme, si les diagonales sont perpendiculaires, alors les côtés consécutifs ont même longueur et si les côtés consécutifs ont même longueur, alors les diagonales sont perpendiculaires. Les deux informations sont donc redondantes.
La dernière information sur l'angle droit est nécessaire pour éliminer C.

## 3) Deux difficultés liées à la formulation

Exemples de difficultés liées à la formulation :
- « Mes côtés n'ont pas tous la même longueur » : cette phrase est la négation d'une généralisation « Mes côtés ont tous la même longueur ». Elle consiste à trouver des quadrilatères dont au moins un côté n'a pas la même longueur que les autres. Ce travail de réflexion et de déduction est difficile pour un élève de CM2. Il peut interpréter par exemple cette phrase de la manière suivante : « ce quadrilatère ne doit avoir aucun côté de même longueur ».
- « Je possède au moins un angle droit » : cette phrase peut être interprétée comme « Je possède un angle droit (et un seul) ».
- On peut aussi noter des difficultés de vocabulaire avec l'utilisation du terme « diagonale » qui sera davantage utilisé au collège.

## 4) Trois compétences mobilisables par les élèves

- Comprendre le vocabulaire de la géométrie plane employé dans le jeu du portrait : sommet, angle droit, perpendiculaire. Le mot « diagonale » (cf. précédemment) peut poser quelques difficultés et le maître pourra éventuellement en rappeler sa signification.
- Reconnaître de manière perceptive des droites perpendiculaires, des côtés de même longueur (à l'aide du support quadrillé) et savoir éventuellement utiliser les instruments de géométrie pour vérifier ces propriétés : équerre, compas ou règle graduée.
- Savoir faire des déductions pour prendre en compte les contraintes fixées, éliminer ou retenir certaines figures.

## 5) Support quadrillé

*Le support peut faciliter les procédures :*

Dans la mesure où il n'y a aucun codage sur les figures (absences d'identification des longueurs égales, des angles droits, etc.), les propriétés peuvent être vérifiées par l'utilisation des instruments de géométrie, ce qui est parfois causer des difficultés (problèmes de précision concernant les longueurs des côtés, les angles, etc.). La présence du support peut permettre de lever certaines ambiguïtés dues à certaines imprécisions ou maladresses de lecture ou de tracé : angles droits pour D ; diagonales perpendiculaires pour A et F ; côtés de même longueur pour A, B et F (hypoténuses de triangles rectangles facilement identifiables). De plus, les tracés ont manifestement été faits sans l'aide d'un logiciel de géométrie et ne sont pas très précis Par exemple, les côtés du dessin de la figure F ne sont pas très soignés et le support peut mieux marquer la différence entre le « dessin » et la « figure » qu'il est censé représenter.

*Le support peut être une source de difficulté :*

Pour reconnaître de manière perceptive des droites perpendiculaires lorsque celles-ci ne sont pas sur la trame du quadrillage. Par exemple, pour la figure A, les diagonales sont perpendiculaires

## 6) Différence(s) principale(s) avec le jeu du portrait

Dans cette nouvelle activité, la capacité principale visée est de reconnaître une figure plane à partir de son nom, de manière perceptive et/ou en ayant recours aux propriétés et aux instruments. Le jeu du portrait ne demandait pas la connaissance des principales propriétés associées à ces polygones, ni leur nom. D'ailleurs, l'énoncé précisait de ne pas répondre par le nom générique de la figure *(« Tu dois répondre par une lettre : figure … »)*.

## 7) Justification de la programmation du questionnaire

Le jeu du portrait servait à préparer cette activité en se centrant dans un premier temps sur le vocabulaire géométrique (sommet, diagonale, etc.) et la reconnaissance des propriétés géométriques (identification des droites perpendiculaires, des côtés de même longueur).