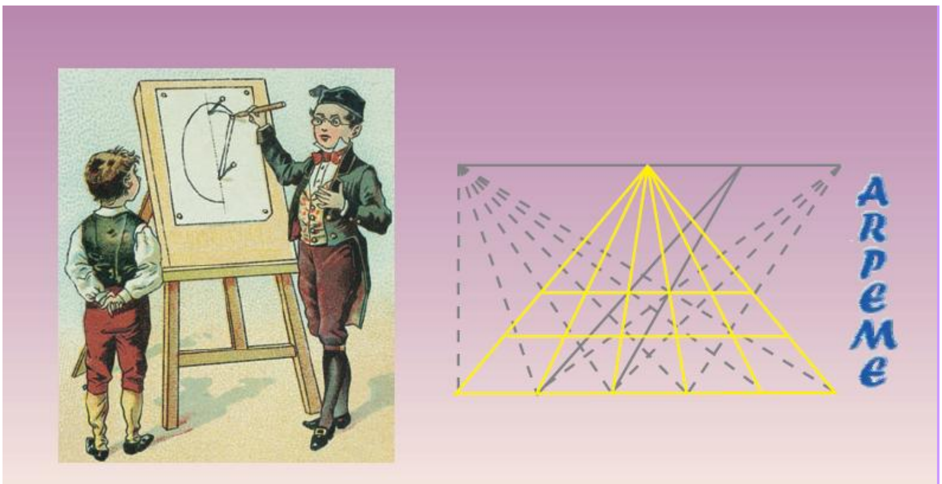
COPIRELEM

**Comisión permanente de los IREM
para la enseñanza de las matemáticas
en la escuela primarial**



La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia

COPIRELEM

Comisión permanente de los IREM
para la enseñanza de las matemáticas
en la escuela primarial

La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia

Traductores:

Pablo Carranza y **Alejendro Acosta**

Selección de artículos aparecídos en la obra *Libretas de apuntes de camino del COPIRELEM* – **Concertum: diez años de formación en matemáticas para maestros,** publicado por el ARPEME en mayo de 2003. ISBN 2-9515107-0-5

Sumario

Capitulo II – Herramientas generales para la formación de maestros 247

[1] A.I.S. significa Ayuda e integración escolar (Aide et intégration scolaire).

Introducción

Desde hace 30 años, la COPIRELEM (Comisión Permanente de los IREM para la enseñanza de las matemáticas en la Escuela Elemental) conduce, conforme a su misión, una reflexión constante en relación a la enseñanza de las matemáticas en la escuela y de la formación de maestros que deben asegurar esta enseñanza. El compromiso, en esta comisión, de formadores que provienen de diversos IREM de Francia, ha permitido compartir y difundir los trabajos, producto de investigaciones y de experiencias que concernen la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Los coloquios y cursos prácticos nacionales, organizados anualmente por la comisión, han permitido tanto la mutualización de las experiencias como la dufusión de los trabajos de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela, ademas de la contribución, en el transcurso de los años, a la estabilización de un cuerpo de conocimientos y a la promoción de una cultura común de los formadores para la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Cada una de estas manifestaciones ha dado lugar a la publicación de actas que reúnen reflexiones, proposiciones de trabajos, puestas en común de experiencias e investigaciones. La lectura de estos documentos pone en evidencia la diversidad de dominios de saberes a los que hace referencia la formación de maestros en matemáticas. Muestra además, una evolución de cuestionamientos didácticos y pedagógicos estudiados así como de respuestas aportadas.

Luego de estos treinta años de trabajos e investigaciones, los miembros de la COPIRELEM han estimado oportuno la realización de una síntesis del capital de conocimientos acumulados durante todo este tiempo. Esta síntesis prevé conservar la memoria de la evolución de la problemática de la formación.

Esta publicación en español es una selección de artículos que provienen de esta síntesis y su objetivo es dar a conocer los trabajos de la COPIRELEM en el extranjero. Reúne contribuciones de diferente tipo (puesta en común de situaciones de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, acciones de formación, artículos de investigación) de autores provenientes de diferentes horizontes, dando cuenta así de su originalidad.

En esta obra, la COPIRELEM desea que todo formador o investigador, que se interese por la formación en matemáticas de los docentes encuentre material tendiente a alimentar su reflexión, sus investigaciones y enriquecer su enseñanza.

Para una mejor comprensión de los diferentes artículos, un índice de siglas ha sido redactado al final de la obra y los términos de *didáctica (escritos en itálica y con asterisco) conducen a las explicaciones del glosario.**

Capitulo 1

Situaciones de formación para aprender saberes matematicos

Problemas y aprendizaje

En relación a la resolución de problemas

Marie-Lise Peltier (1997)

Este artículo propone pistas para la reflexión sobre las diversas interpretaciones de la expresión "resolución de problemas" y presenta las elecciones del autor para el segundo año de formación inicial de profesores de escuela.

Algunas pistas de reflexión sobre las diversas interpretaciones de la expresión "resolución de problemas"

Considero que la expresión "resolución de problemas" es polisémica y de hecho su polisemia parece aumentar.
Aun permaneciendo en las matemáticas y las ciencias en general, prácticamente se difundió a todas las disciplinas e inclusive parece estar convirtiéndose en una noción de pedagogía general.

En el dominio de la pedagogía se trata de una expresión genérica que califica un dispositivo de aprendizaje que contribuye a caracterizar un modelo pedagógico, entre otros. Según los diferentes enfoques o corrientes, encontramos las "situaciones problemas" como una alternativa a otros modelos normativos o incitativos de aprendizaje en unos, de transmisión o de investigación[1] en otros. En esta última acepción, la resolución de problemas es una noción transversal que no está realmente vinculada al campo disciplinario en el cual se sitúa.
Caracteriza a veces la actividad del alumno que ha sido puesto en una situación en la que debe plantearse preguntas o buscar respuestas; a veces el trabajo del maestro que debe construír estas situaciones, o a veces la trampa que el maestro le coloca al alumno para forzarlo a aprender.

Si nos detenemos ahora en la noción de "resolución de problema" en matemáticas, encontramos nuevamente diversos puntos de vista.

- Para algunos, la resolución de problemas caracteriza en esencia la actividad matemática. En este sentido, al proponerle a los alumnos resolver problemas se les sitúa un poco en la misma posición del investigador de matemáticas. Sabemos que existen diferencias notorias entre los problemas que se plantean y que procuran resolver los matemáticos, y los problemas que el maestro incita a los alumnos a plantearse y que deben luego resolver. Sin embargo, parece razo-

[1] cf. Pensée pédagogique et modèles philosophiques : le cas de la situation problème M. Fabre, dans RFP n° 120 (1997)

nable proponer un aprendizaje de las matemáticas que les permite a los alumnos acercarse progresivamente a la actividad matemática en sí misma.

- Otros enfatizan más la actividad de investigación. El maestro plantea problemas a los alumnos para desarrollar su aptitud para razonar, para emitir hipótesis, para tener ideas, para innovar. En esta acepción, se privilegia el aspecto heurístico. Ciertos maestros proponen entonces síntesis acerca de las diferentes maneras de buscar una solución, sobre diferentes modos de razonamiento: deducción, analogía, generalización, estimación y aproximación con ensayos sucesivos, etc.

- Para otros, entre los cuales se encuentra un buen número de maestros de escuela elemental, la actividad de resolución de problemas se presenta más bien como un aspecto metodológico. En cierto modo volvemos a encontrar aquí un punto de vista "transversal" que puede desarrollarse en las diferentes disciplinas. Sin embargo, siendo que en la mente de muchos maestros, "matemáticas" es sinónimo de lógica y rigor, es en el tiempo dedicado a las matemáticas que estos maestros proponen actividades que se refieren a este aprendizaje metodológico. Encontramos entonces un trabajo sistemático sobre la lectura y la recopilación de información, la búsqueda de posibles interrogantes, la selección de la información relevante según la pregunta que se ha planteado, la búsqueda de la información que hace falta, la organización de la información (en tablas, esquemas, gráficos, etc), el tratamiento de esta información (se trata generalmente de tratamientos que hacen intervenir la comparación, el orden, los cálculos, eventualmente los trazados); finalmente la redacción y la presentación de las respuestas (es a menudo difícil hablar en este caso de soluciones, porque se trata más bien de respuestas a preguntas que de la solución a un problema).

Los soportes que se escogen para desarrollar estas competencias (denominadas "transversales" en los textos oficiales) se toman a menudo del ambiente que rodea a los alumnos. Existen diversas elecciones que se pueden hacer:

- Ciertos maestros, por la elección de los documentos que utilizan como material, insisten en uno de los aspectos de las matemáticas y lo desarrollan: las matemáticas son un instrumento para otros dominios científicos (la biología, la geografía, la historia...)
- Otros insisten más en las matemáticas al servicio de la vida cotidiana, buscando preparar al alumno a lo que éste puede encontrar fuera de la escuela (compras, gastos, horarios, mapas y planos).
- Ciertos maestros desarrollan este último punto de vista integrando un doble objetivo: educar al alumno como futuro ciudadano (elecciones, medio ambiente, gráficos económicos), y como futuro consumidor (comparación de publicidades, de suscripciones, etc.)

- Desde un punto de vista didáctico, el problema es central en el proceso enseñanza / aprendizaje, ya que va a permitir a los alumnos construir conocimientos.

Para asegurar esta función los problemas deben respetar una especie de pliego de condiciones importante:

- Deben hacer intervenir concretamente la noción cuyo aprendizaje se desea lograr.
- Deben permitir al alumno a la vez utilizar los conocimientos antigüos, ponerlos a prueba, probarlos respecto al problema y adaptarlos, completarlos o rechazarlos si no son convenientes.
- También deben conducir al alumno a contemplar en parte los nuevos conocimientos que el problema integra y que son justamente aquellos a los que apunta la enseñanza.

Este bosquejo rápido muestra la manera en la que se pueden presentar divergencias importantes respecto a las expectativas de los profesores en formación inicial o contínua. Divergencias que pueden ser de hecho incomprensiones, cuando el formador no se ha puesto en la tarea de aclarar el punto de vista que va a adoptar al enfrentarse al tema de la “resolución de problemas” para presentárselo a los profesores en formación.

Mis elecciones para la formación de profesores de escuela

Mi objetivo no es hacer aquí un estudio crítico de tal o cual postura o de tal o cual punto de vista; en primer lugar porque varios me parecen complementarios, y por otra parte porque se necesitaría un estudio más profundo de la cuestión, así como un debate en el seno de nuestro grupo de trabajo. Me parece sin embargo importante decir que cuando actualmente propongo a los profesores en formación pensar acerca de esta cuestión de la “resolución de problemas”, estoy pensando en hacerlos reflexionar desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, enfatizando el rol de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza / aprendizaje de nociones matemáticas.

Claro está que los aspectos metodológicos, que conciernen el aprendizaje de los diferentes modos de investigación o la lectura y el tratamiento de la información, me parecen necesarios; pero en mi opinión éstos no deberían confundirse con la actividad de resolución de problemas como proceso para construír conocimientos. Esta confusión es para muchos maestros una fuente de desviaciones, de las cuales la más frecuente consiste, por un lado, en colocar en el programa de la clase una sesión titulada “resolución de problemas” durante la cual los niños aprenden elementos de naturaleza metodológica, totalmente desconectados de las matemáticas o que al menos no ponen en juego conocimientos matemáticos cuyo aprendizaje se ha propuesto como objetivo. Por otro lado proponen en otras sesiones de matemáticas una enseñanza, a menudo de *tipo ostensivo*, en las que el alumno sólo tiene que escuchar y luego imitar al maestro con ejercicios de aplicación que éste propone y vinculados a lo que ha mostrado.

Para que los alumnos de la escuela desarrollen competencias metodológicas en el marco de la enseñanza de las matemáticas, me parece necesario proponer enunciados que realmente pongan en juego un saber matemático, en coherencia con las nociones a cuyo aprendizaje apuntan. No me parece que este trabajo metodológico deba necesariamente ser objeto de una sesión específica semanal, debería ser propuesto de manera habitual , en el marco de las sesiones ordinarias de matemáticas, y cada cierto tiempo debería ser objeto de síntesis metodológicas.

Llevo a cabo sesiones de formación en PE2 (profesores en segundo año de formación) que tiene como objetivo conducir a estos profesores a reflexionar sobre lo que es la actividad matemática, sobre el sentido que le doy a la expresión (que se ha convertido en un eslogan) de "aprendizaje a través de la resolución de problemas", sobre sus eventuales desviaciones, articulando este trabajo con el estudio de ciertos temas matemáticos.

Lo que busco es hacer emerger ciertas condiciones que debe cumplir un problema para permitir una actividad efectiva y matemática de parte de los alumnos, contribuyendo al aprendizaje de una noción matemática bien definida. Para esto, en el dominio numérico, escojo el estudio de la división euclidiana. Es un tema que los profesores conocen generalmente bastante bien (lo que me permite no consagrar demasiado tiempo a la información matemática complementaria), y que tiene la ventaja de haber sido bien estudiado desde un punto de vista didáctico.

Escojo luego un tema geométrico (la simetría axial) porque muchos profesores piensan que es imposible proponer problemas de geometría en la escuela elemental. El problema que se propone cumple las características de los problemas numéricos. La elección de la simetría axial se sustenta por el hecho que esta transformación figura en los programas del segundo y tercer ciclo (de la educación superior en Francia) y que muy a menudo se proponen actividades muy parecidas a los niños desde los 5 años hasta la clase de 5to año (alumnos de 12 años), sin que se haya reflexionado sobre lo que podría ser una progresión sobre un tema "longitudinal". Además me parece posible hacer que los profesores perciban en el curso de esta sesión, que ciertas propiedades de la simetría axial pueden ser utilizadas implícitamente por los alumnos en tareas de reproducción por plegado (teniendo así un estatuto de conocimientos - instrumentos), y pueden ser aclaradas y convertirse en objetos de saber, en el curso de la síntesis. En fin, este trabajo me permite precisar sobre los diferentes roles de las manipulaciones según los ciclos de la escuela primaria.

Las sesiones se refieren a una estrategia de tipo denominado de *transposición*[1] comprenden una corta fase de puesta en situación de los profesores en formación sobre el(los) problema(s) y una síntesis compuesta de un análisis didáctico de la situación y de los aportes de información o de la organización de los conocimientos de los profesores sobre la noción matemática que se pone en juego en el problema.

En esta síntesis, privilegio el saber al que apunta el problema y la actividad matemática del alumno. Efectivamente, me parece primordial, para evitar

[1] Término introducido por A. Kuzniak e su tesis de doctorado en la Universidad Paris 7 (1995)

las desviaciones que he mencionado, desarrollar en los profesores en formación el punto de vista según el cual: "resolvemos problemas matemáticos para hacer matemáticas, pero también para aprender matemáticas".

Durante la realización de este módulo, articulo el estudio de otros temas matemáticos con otros aspectos profesionales del oficio de profesor de escuela.

Luego, al fin del módulo, presento brevemente la evolución del lugar y del rol concedidos a los problemas en los programas oficiales de matemáticas en diferentes épocas.

La resolución de problemas : una actividad que fragiliza al niño ?

Yves Girmens - Marcelle Pauvert (1997)

Este artículo propone una reflexión de fondo y abre un interrogante sobre la dificultad del niño que se encuentra en situación de búsqueda
En presencia de un problema de exploración, el niño se desestabiliza : debe aceptar no poder encontrar pronto una solución y aceptar que se equivoca.
Cómo hacer para que esta práctica no sea causa de dificultades ?
Cómo hacer para preparar a los profesores en formación inicial, a conducir esta situación tan desestabilizante tanto para el niño como para el maestro ?

Qué entendemos por fragilidad de un niño ? El niño fragilizado está en dificultad?

Podemos pensar que toda actividad en la que el niño es confrontado a una situación nueva para él (donde le será imposible reproducir una conducta probada) tiene un efecto desestabilizante.

El momento de fragilidad comenzará a partir que el niño no encuentre referencias conocidas.

En la escuela, algunas actividades como el aprendizaje de una noción nueva, la resolución de un problema, van a poner a prueba el equilibrio del niño y van a engendrar momentos de preocupación frente a lo desconocido.

Solicitamos al niño que intente una experiencia, que arriesgue una respuesta, mientras que èl tiene pocos indicios o no los tiene para saber si la respuesta conviene o no.

Toda situación de búsqueda necesita que el niño acepte la inestabilidad, el riesgo de equivocarse, de no poder responder.

La fragilidad del niño que es un estado natural por la que pasa en toda situación de aprendizaje, se agravará por factores tales como perturbaciones psíquicas, carencias sociales, relación negativa con la escuela…Esta fragilidad es susceptible de evolucionar hacia una verdadera inhibición del niño frente a lo nuevo, lo imprevisto : percibimos esto cuando vemos un niño bloqueado!

A medida que transcurre la escolaridad, se demanda al niño la adaptación en relación a un número creciente de conocimientos, entonces esta fragilidad será cada vez menos asumida por el alumno que no ha asimilado bien ciertos conocimientos, de manera que este alumno corre el riesgo de verse sumergido en un fracaso permanente.

Se plantean interrogantes a los que no podemos escapar :

- La heterogeneidad de los alumnos, sus desigualdades frente a lo que es desconocido e incierto serían mejor aceptadas y asumidas por los maestros en 1er y 2do ciclo (alumnos de 6 a 10 años) que en 3er ciclo (alumnos de 11 y 12 años) ?

- Cómo hacer para que los momentos de fragilización no contribuyan a poner en dificultad al alumno?

- Cómo un maestro puede continuar proponiendo situaciones de exploración a los niños en dificultades, sabiendo que los sumergirá en la confusión, que va a revelar sus fracasos ?

- Es tolerable para el maestro, plantear problemas a los alumnos en dificultades ?

- Una mejor atención a la fragilidad del niño en toda situación nueva puede prevenir sus futuras dificultades ?

-Cómo preparar futuros maestros para que acepten que, frente a un problema, los alumnos dudan, se equivocan y quizás no encuentran la solución ?

-Frente a los alumnos que "se quedan en blanco", el maestro (a fortiori debutante) frecuentemente se encuentra desestabilizado : no es para calmar la angustia que le produce esta situación que responde brindando al alumno una ayuda directa de tipo inyuctiva ?

Resolver un problema : una actividad que da inseguridad

Al alumno :

En presencia de un problema, el alumno se siente inseguro. Existen en efecto varios factores que pueden contribuír a fragilizar al alumno :

- *el hecho que no se puede dar una respuesta inmediata ; hay que aceptar « no saber »*, diferir la respuesta.

Esta actitud, que es propia a la actividad matemática, va al encuentro de la cultura en la que se encuentra el niño.

- *el hecho que no se sabe qué es menester hacer* : el niño tiene la responsabilidad de sacar informaciones, de elegir, de comprometerse en las tentativas, de controlar los efectos de sus elecciones...

No existe un método establecido ; además, el niño que no logra encontrar la solución al problema, comienza a dudar de él...

- *una representación inadaptada de la actividad matemática :* muchos niños han aprendido la convicción que « para responder, hay que aplicar una regla o efectuar una aperación » .

- *el tiempo para la exploración del problema se define en relación al grupo clase* : algunos alumnos pueden necesitar mas tiempo de lo previsto para apropiarse del problema.

Qué siente el niño al que se le dice que el tiempo de búsqueda terminó mientras que él no ha tenido aún el tiempo de entrar en el problema ?

- *el hecho de sentirse solo* frente a una tarea que lo supera puede ser causa de angustia para el alumno.

- *la dificultad vinculada a la elección de los conocimientos que pondrá en juego :* los conocimientos mas recientes son aún frágiles, todavía no disponibles mientras que los conocimientos antigüos, más sólidos, aparecen como las mejores herramientas.

Al maestro :

El malestar del maestro principiante frente a los alumnos en situación de búsqueda tiene varios componentes :

- la retiscencia para aceptar que los alumnos no encuentran la respuesta inmediatamente, tantean, dudan..., lo que puede provocar una tensión con la idea que él tiene de su oficio de docente.
- la retiscencia para dejar tiempo suficiente a los alumnos (sensación de "tiempo perdido").
- la tentación de rectificar los errores y de responder a los alumnos indicándoles lo que deben hacer.
- la preocupación provocada por una cierta agitación vinculada al tiempo de exploración, lo que puede hacerlo dudar de su capacidad de « sostener » una clase.
- el deseo de efectuar una corrección, lo que se traducirá, durante la puesta en común, por una inclinación a « mostrar » solo las respuestas que espera (aquí domina una cierta concepción de su deber de docente).

La actividad de resolución de problemas ubica tanto al alumno como al docente en una posición inconfortable y fragiliza a ambos. Al alumno en su posición de quien aprende y al maestro en su posición de detentor del saber.

La fragilidad del alumno no es entonces una condición normal, inherente al acto de aprender ?
En esta hipótesis, la fragilidad no demanda una tratamiento específico pero se la debe considerar en la práctica de enseñanza.

Cuáles son las prácticas a instaurar para permitir a los niños superar esta fragilidad y evitar que se convierta en un motivo de dificultad ?

- Poner en ejecución dispositivos que pueden conducir al alumno a modificar su relación a la actividad matemática : *rallyes matemáticos, talleres de resolución* de problemas, problemas que finalizan con la construcción de un objeto, de manera de hacer descubrir a los niños el gusto por la búsqueda, el placer del desafío.
- Luego de los momentos de búsqueda, organizar debates en los que los niños podrán presentar sus ideas y argumentarlas.
- Valorizar y desarrollar el trabajo en grupos.
- Prever una gestión de la situación de búsqueda a nivel del grupo clase (desarrollo, rol del maestro) y sostenerla.
- Analizar los procedimientos posibles y las dificultades que pueden encontrar los alumnos y prever ayudas en momentos precisos con la finalidad de

« desbloquear » a los alumnos sin destruír el problema (es decir sin transformar el trabajo del alumno en tarea de ejecución)

- Incentivar a los alumnos a utilizar « escritos de búsqueda » y valorizar esos escritos. Distinguir el escrito de búsqueda del escrito de comunicación de la solución.

Pistas de trabajo en formación

Cómo podemos ayudar a un maestro principiante a administrar este equilibrio entre la necesidad de favorecer la búsqueda del niño y la necesidad de construír-se una identidad docente ?

Cómo podemos ayudar al maestro principiante a poner en ejecución una práctica que no haga de la resolución de problemas una actividad fragilizante para el niño?

a) actuar sobre las representaciones de los problemas en matemáticas que tienen los maestros.

Muchos maestros en formación tienen una cierta relación al problema de matemáticas en la que encontramos dos líneas dominantes :

- la representación que ellos tienen de la actividad matemática : « en matemáticas se aprenden conocimientos y se los aplica » ; esto los conduce a ver el problema solo como una situación de aplicación o de entrenamiento.
- el resurgimiento de situaciones complejas frente a los problemas vividos cuando eran alumnos, lo que los vuelve retiscentes a aceptar que los alumnos « exploren ».

A fin de permitirles desmitificar este tipo de actividad y de encontrar lo que está en juego, parece indispensable hacerles vivir « en el interior » situaciones de búsqueda.

Una vez que la sesión termina, convendrá analizar el desarrollo de la misma a fin de poner en evidencia los roles de las diferentes fases asi como la manera en que el formador a administrado o conducido las diferentes fases.

En las situaciones propuestas, será fructífero cambiar ciertos parámetros :

- trabajo individual o trabajo en grupo,
- momento de confrontación de las producciones seguido de un debate argumentado o de una corrección efectuada por el maestro...

a fin de permitir a los futuros maestros medir el impacto y las consecuencias.

Podemos pensar que un maestro podrá conducir convenientemente una situación de resolución de problemas solamente si está convencido a través de su experiencia, de la necesidad de fijar y de respetar ciertas modalidades.

b) permitir a los futuros maestros que se construyan una identidad docente

Poner en evidencia que observar a los alumnos durante el trabajo, provocar verbalizaciones y escuchar lo que expresan, aporta la satisfacción (el placer) de informarse sobre el funcionamiento cognitivo de los alumnos. Esto permite que los profesores en formación comprendan cómo se pueden proponer problemas a los alumnos, a partir de estas elecciones conscientes, apoyándose en criterios claros.

Eso va a la par con un trabajo sobre la desdramatización de los errores, sobre el sentido que se les puede dar y la manera en que se los puede explotar.

c) trabajar sobre las exigencias de la preparación de una situación de búsqueda

Será conveniente clarificar los criterios de la elección del problema luego trabajar en la elaboración de la consigna, la organización, la gestión colectiva y prever las intervenciones del maestro así como las ayudas que se les dará oportunamente.

d) ayudar a los futuros maestros a establecer la relación maestro-alumno mostrando la necesidad de inscribirlo en la relación del maestro a la clase.

- trabajar en la relación de ayuda : qué significa ayudar ? en qué momento ayudar? cómo ?

Hacer tomar conciencia a los futuros maestros que su posición frente a los alumnos durante la fase de exploración no es confortable :

* Por una parte hay en el alumno que explora y que no encuentra, la demanda , mas o menos explícita, que el maestro (el adulto que sabe) le ayude a "hacer". Sin embargo, por su lado el maestro tiene el deseo profundo que "el alumno descubra una pista" y logre resolver el problema (esta tendencia espontánea que es exacerbada en el maestro debutante), se ve tentado, por una explicación, por dar explicaciones complementarias, de poner al alumno en la vía y de acortar el tiempo de búsqueda.

* Por otra parte, el maestro está deseoso de preservar lo máximo posible el carácter de « problema », entonces se prohíbe en dar una ayuda directa al alumno, igualmente si se esfuerza en sostener y estimular al alumno en su exploración tranquilizándolo.

A fin de permitir a los maestros debutantes asumir esta tensión, una reflexión podrá ser tomada según dos ejes:

1. *la ayuda individual a un alumno que se encuentra en la etapa de exploración :*

Cómo dirigirse a él ? Qué tipo de preguntas hacerle para que logre desbloquearse? Cómo permitirle utilizar sus errores ?

2. *el dispositivo colectivo de ayuda en un problema :*
Puede resumirse como una suma de ayudas individuales ?
No hay aquí necesidad de prever tiempos de pausa durante los cuales los niños podrán encontrar ayudas ?
No es indispensable preparar, a priori, elementos de ayuda, bajo la forma de un soporte escrito, que se reservará y que se dará a los alumnos en caso de necesidad y en el momento deseado?
Cómo preparar tales documentos de ayuda ? En resúmen, hasta dónde el maestro puede negociar para que aún haya « problema » para el alumno ?

Será posible abordar este cuestionamiento con los futuros maestros a la ocasión de una sesión de « trabajos prácticos » teniendo por objeto instalar, a un determinado nivel, un taller de resolución de problemas.

- **Trabajar sobre la actividad de formulación oral**

Se trata de hacer tomar conciencia que pedidos constantes de parte del maestro, seguidos de respuestas breves, no dan lugar a la *formulación* ;* sino al contrario, que un verdadero trabajo de formulación exige que el maestro plantee preguntas de manera calma y solemnemente y que espere del alumno una respuesta bajo la forma de una frase completamente formulada.

Dispositivos de ayuda para la resolución de problemas

Catherine Aurand - Yves Girmens - Marcelle Pauvert (1997)

La exploración de un problema es frecuentemente desestabilizante para el niño. Pero con la ayuda de ciertos dispositivos, a veces conocidos, a veces originales, se puede ayudar al niño a asumir este tipo de situación. Este artículo intenta realizar un inventario de estos dispositivos, indicando de manera precisa las condiciones de su puesta en ejecución : taller de resolución de problemas, rallye matemático y entrevista individual con los alumnos.

EL TALLER DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

1- Las modalidades

Según el diccionario, el taller es un lugar donde artesanos, obreros, o un artista con sus alumnos, llevan a cabo un trabajo en común.
El taller es un lugar que se define por herramientas, técnicas, destrezas al servicio de la fabricación de un cierto tipo de objetos o de productos.
En la escuela, el taller es un espacio donde los escolares trabajan en común, para realizar una producción individual : es un lugar de ejecución y de aprendizajes técnicos pero también es un lugar de intercambios, un lugar donde es posible hablar, solicitar ayuda y explicar.

Se pueden distinguir dos tipos de talleres que responden a necesidades diferentes:
a) ***El taller de funcionamiento autónomo:*** los alumnos toman iniciativas, tratan sus ejercicios en el orden que prefieren, pueden elegir las herramientas a utilizar, tienen acceso a su cuaderno o a sus manuales los que pueden consultar cuando lo desean, y pueden hacer preguntas a sus camaradas.
De esta manera, en un taller, los alumnos pueden trabajar a su conveniencia, sea individual o colectivamente, pero cada uno deberá entregar una producción personal de la cual es responsable.
Es conveniente explicitar bien a los niños este contrato de trabajo, que para ellos no es habitual.
En este caso el maestro al no estar presente en los grupos no interviene, entonces se le escapa (en gran parte) la actividad de los alumnos; el único soporte del que dispone para evaluar el trabajo de los alumnos es la producción escrita (por lo tanto podrá interesarse por los escritos de los alumnos que sirvieron de soporte para la exploración)

Así en un taller autónomo, aunque no se pueda contar de manera cierta con una interacción entre los alumnos por el hecho de haberles dejado entera libertad, se deben tomar en cuenta los intercambios, por el simple hecho que los niños trabajan en el seno de un grupo.
Es la razón por la que la dimensión de grupo para el taller autónomo es importante y la composición de los grupos-talleres no se efectúa de manera aleatoria (cf. FIJALKOW (6).

b) El taller dirigido por el maestro : el objetivo es permitir al alumno superar sus dificultades a través del trabajo y la reflexión individualizados bajo la conducción del maestro. El maestro puede provocar la reflexión de los alumnos, intervenir sobre sus estrategias y sus representaciones.
Luego de cada taller, es necesario « regresar » al trabajo realizado a fin de permitir a los alumnos hacer un balance y « compartir » los frutos de este trabajo.
c) El trabajo en grupos, se caracteriza por el hecho que se debe realizar una tarea común con la participación de todos los miembros del grupo y que al finalizar el trabajo, el grupo deberá mostrar una producción colectiva.
Se recurre a un trabajo en grupo cuando se desea favorecer un debate argumentado en relación a la búsqueda de la solución a un problema y suscitar la colaboración entre los alumnos para llegar a una producción común : ésto contribuye también a desarrollar en los alumnos la aptitud para comunicar, para formular, para justificar un punto de vista, para cooperar[1].
Cuando el maestro pone en funcionamiento un trabajo en grupo, espera una interacción social fuerte entre los alumnos. (3).

Se percibe que, aunque el trabajo en talleres se distingue del trabajo en grupo, ya que no se demanda generalmente una producción colectiva, la eficacia del trabajo en talleres reposa por una gran parte en el hecho que los alumnos pueden intercambiar y comunicar en el seno del grupo sea en presencia o en ausencia del maestro.
Sin embargo en Francia, aunque la estructura de talleres está ampliamente expandida en la escuela maternal, aparece poco utilizada en la escuela elemental : testimonio de ello es la escasa bibliografía disponible concerniendo el trabajo en talleres en la escuela elemental.
Bajo reserva de una transposición prudente, es menester inspirarse en obras que conciernen estos talleres en la escuela maternal (ex. : Nicole DU SAUSSOIS (4)).
Se podrán asimismo tomar como referencias documentos que conciernen el trabajo en grupo, de los que ciertos aspectos se pueden transferir al trabajo en talleres (ver bibliografía).

[1]ASTOLFI J.P, 1992, L'école pour apprendre, ESF Editions, (groupes d'apprentissage, page 170).

2- Preguntas relativas al trabajo en talleres

a) Porqué se escoge un trabajo en talleres en un determinado momento ?
Parece interesante poner en funcionamiento un trabajo en talleres :

- Luego de la *institucionalización** de un saber para permitir al alumno apropiarse, de manera individual, de diversas destrezas vinculadas a los diferentes contextos en el que ése saber interviene.
- Para confrontar a los alumnos con problemas no familiares y permitirles poner en obra ciertas estrategias o adquirir ciertos métodos. El hecho de no sentirse solo frente una tarea nueva y de saber que puede contar con los otros, tranquiliza al alumno.

b) En qué, el trabajo en talleres puede ser una ayuda para la resolución de problemas y cuáles pueden ser sus repercuciones en el aprendizaje ?
Para un trabajo en talleres, es conveniente disponer de un soporte pedagógico adaptado (elección de enunciados apropiados) que ofrezca al alumno trabajos que le demanden esfuerzos en la medida de sus posibilidades y que teniendo en cuenta las diferencias en los aprendizajes, permita a los alumnos progresar, aprendiendo gracias al intercambio con sus pares.

Se puede, en un primer momento, proponer trabajos idénticos a todos los alumnos, posteriormente, proponer enunciados idénticos con datos numéricos diferentes según los individuos ; si los intercambios (verbales o visuales) son posibles pueden dar lugar a transmisiones de conocimientos : éstas estarán relacionadas a los procedimientos y no a la realización del problema.
Puede también resultar interesante utilizar enunciados que se refieran a la « multi presentación » propuesta por J. JULO (8), siempre con el objetivo de dirigirse a los alumnos según sus posiblidades.

El taller que es un espacio de iniciativa y de libertad, donde se facilita la comunicación, resulta un cuadro propicio para la exploración.
El niño que no está seguro puede encontrar en el taller una cierta seguridad, lo que puede ayudarlo a comprometerse en la tarea solicitada, sin complejos. Otro hecho a favor, es que al encontrarse en un grupo pequeño, el alumno es motivado a ser menos « transparente » que en la clase entera y animarse a intervenir.

El balance necesario al finalizar el taller debe permitir volver sobre las dificultades encontradas y remarcar ciertas destrezas.

c) Cuáles son los límites de tal dispositivo ?
El trabajo en talleres debe privilegiar un contenido matemático y no encerrarse en cuestiones metodológicas (ej : trabajos sobre enunciados).
El trabajo en talleres exige que un contrato específico (ver arriba) haya sido claramente comunicado a los alumnos y bien comprendido por ellos.
Para la metodología sería preferible dejar los conocimientos funcionar *en actos**.

Una *institucionalización** (guía o método definido) sería naturalmente para inmobilizar estos conocimientos y empobrecerlos.
Si al alumno se le permite elegir ciertos problemas, es necesario que haya de parte del maestro un cuestionamiento relativo a dicha elección, para evitar que el alumno se desinterese siempre por los mismos enunciados.
Todo trabajo realizado con autonomía supone que los alumnos disponen de los medios de validación de sus trabajos : situaciones en sí mismas, ficha de auto corrección, interacción entre los alumnos. El tratamiento de eventuales errores podrá ser realizado con la ayuda de entrevistas individuales con el maestro.
Es importante poder identificar lo que los alumnos han aprendido en los talleres: se puede contar con la transferencia al trabajo individual ?

Observación
Encontraremos en el **anexo 1**, a modo de ejemplo, una ficha de enunciados propuestos por maestros durante un curso de formación contínua animado por Marcelle PAUVERT, buscando favorecer la autonomía de alumnos de 3er año (alumnos de 8 años).
Se acompaña esta ficha con un documento de ayuda que puede darse a los alumnos a fin de evitar que recurrar al maestro.

3- Constitución de un taller: rol del maestro

Para poner en funcionamiento un taller de resolución de problemas, al maestro le incumbe determinar :

- La elección de los objetivos matemáticos y metodológicos del taller,
- La elección de los alumnos que constituyen el taller,
- La elección de los problemas que serán propuestos a los alumnos, condiciones de su validación en función de los objetivos establecidos y en función de la elección de los alumnos que forman el grupo,
- La definición del contrato de trabajo,
- La valorización del trabajo efectuado,
- Las entrevistas individuales que se puedan prever.

Observación
La fabricación de objetos en geometría es un contenido que se adapta bien a un fructífero trabajo en talleres : a partir de las tareas a cargo para la construcción, el taller podrá ser un cuadro propicio para el intercambio de competencias, sacando provecho de las que cada alumno posee.

Bibliografía sobre el tema del « trabajo de grupos » y talleres

(1) ASTOLFI J.P, 1992, L'école pour apprendre, ESF Editions.
(2) BARLOW M., 1994, Le travail en groupes des élèves, A. Colin.
(3) DOISE W., MUGNY G., 1981, Le développement social de l'intelligence, Inter éditions.
(4) DU SAUSSOIS N., 1991, Les activités en ateliers, A. Colin.

(5) FERRY G., 1970, La pratique du travail en groupe, Dunod.
(6) FIJALKOW, 1993, Entrer dans l'écrit, Bordas.
(7) MEIRIEU P., 1993, Itinéraires des pédagogies de groupes.
(8) JULO J, 1995, représentation des problèmes et réussite en mathématiques, PUR.

OTROS DISPOSITIVOS PARTICULARES DE AYUDA PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Se pueden detallar otros medios que son de dos tipos :

- sea una entrevista con el maestro que será para el alumno la ocasión de tomar conciencia (bajo la conducción del maestro) de la manera en que aborda el problema.

- sea la proposición de problemas en forma de juego, lo que puede contribuir a « desdramatizar » la resolución de un problema y hacerle adquirir de antemano la seguridad para efectuarlo.

1-La entrevista individual

La entrevista puede estar incluída en un taller : mientras que los alumnos identificados como no en dificultad trabajan autónomamente, el maestro organiza un taller específico reagrupando alumnos frágiles. Cuando uno de ellos ha avanzado lo suficiente (cuando el maestro lo juzgue oportuno) se realiza con él una entrevista para la cual el maestro se apoya en un protocolo preparado con anticipación, con el objetivo de permitir al alumno revivir los procedimientos utilizados y hacerle explicitar las decisiones tomadas.

Otro interés es dejar el tiempo necesario a éste alumno para verbalizar una acción, mientras que en el contexto de grupo mayor, un niño en dificultad no dispondrá siempre de tiempo para expresar sus frases dubitativas : esto permite al niño desarrollar la representación que tiene del problema a través de una producción del lenguaje.

El maestro aprovecha la entrevista individual con un alumno para conducirlo a descubrir un procedimiento, a elegir una herramienta apropiada.

La utilización de este dispositivo en el seno de la clase se encuentra forzosamente limitado tomando en consideración el tiempo que requiere y la necesidad de no dejar por demasiado tiempo a los otros alumnos.

Encontraremos en **anexo 2**, dos ejemplos de entrevistas individuales realizadas en una clase de 4to año.

Referencia : (9) VERMERSCH P., L'entretien d'explicitation, ESF Éditions.

2-Los rallyes matemáticos

El interés de un rallye reside en el hecho que es un juego, en el que puede haber una cooperación entre los alumnos y que no hay en juego ninguna cuestión escolar.

En efecto, cuando se propone un rallye en forma de competición individual, se corre el riesgo de dejar fuera de juego a los alumnos frágiles o en dificultades, es la razón por la que es preferible proponer un rallye en forma de competición inter-clases, lo que exige una producción única por clase, para la que todos los alumnos podrán contribuír.

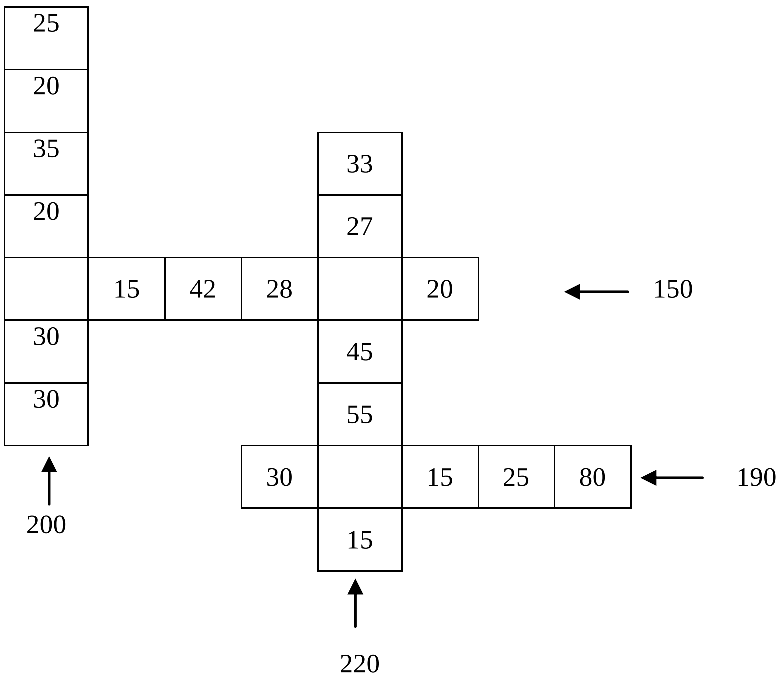
Entonces, es interesante proponer *problemas abiertos* (por ejemplo de combinatoria o referidos a trazos geométricos) que salen del modelo escolar y que pueden contribuir a modificar la relación que ciertos alumnos tienen con las matemáticas : hacer matemáticas, se convierte en "enfrentar un desafío", es "razonar, buscar, explorar" y no "hacer operaciones, aplicar reglas". Un rallye puede ser también para el alumno, la ocación de probar el placer de llegar al fin de un enigma y puede también ayudar al alumno poco seguro de sí, a encontrar un poco de confianza.

ANEXO 1

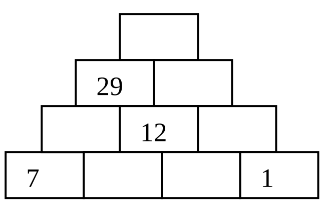
Presentación de los problemas

En una clase de 3er año, **taller de cálculo**, sin calculadora, 30 minutos.
Consigna : haz ejercicios en el orden que prefieras.
Si necesitas, solicitas una hoja de ayuda.

La grilla para completar :
La suma de los casilleros de cada columna y de cada línea está indicada por la flecha.



La pirámide de los números.
En esta pirámide de ladrillos, cada uno vale la suma de dos ladrillos sobre los cuales él reposa. Completar los números que faltan.



El tren.
Un tren circula con 650 pasajeros. Se detiene en una estación, 250 pasajeros descienden y 25 suben. El tren parte nuevamente. Se detiene en una 2da estación, 75 pasajeros descienden y 38 suben. Cuántos pasajeros hay cuando el tren parte de la segunda estación?

Las edades.
El Señor Durand tiene 47 años, la Sra. Durand tiene 2 años más. Ellos tienen una hija, Sofía. Si el Sr. Durand, la Sra. Durand et Sofía unen sus edades obtienen 108.
Cuál es la edad de Sofía ?

El cine.
En el cine REX, los niños pagan 22 francos et los adultos pagan 45 francos. Pedro tiene un billete de 100 francos. Cuántas personas él puede invitar al cine ?

Análisis de estos problemas

La grilla

Problema para resolver en 4 etapas, la disposición espacial ayuda a ubicarlos.
Sumar en columnas y en línea, reagrupando eventualmente los términos.
Encontrar los números que faltan por diferencia con los números de referencia o calculando las separaciones.
Si hay errores en los primeros casilleros habrá repercuciones en los siguientes. Identificación del error por comparación con los miembros del taller. Corrección a realizar solo o con ayuda.

La pirámide

6 etapas de cálculo : 3 diferencias o 3 separaciones 29 – 12 ; 17 – 7 ; 12 – 10 ; 3 sumas. Lectura de arriba hacia abajo luego de abajo hacia arriba para terminar por el casillero superior.

El tren

La cronología de los acontecimientos puede inducir la cronología de los cálculos en 4 etapas.
Los alumnos mas independientes podrán componer ciertas transformaciones.
Posibilidad de esquematización :

- sea de los acontecimientos del enunciado :

650 pasajeros

1era parada { 250 pasajeros descienden
25 pasajeros suben

2da parada { 75 pasajeros descienden
38 pasajeros suben

Cuántos ?

- sea la resolución :

650 -------- (- 250) ? ---- (+25) ---- ? ------ (- 75) ? ------ (+ 38) ------ ?

Las edades

Las etapas de resolución corresponden aquí al tratamiento de la información.

Sr. D : 47 ans Sra. D : 2 años más : 47 + 2 = 49; ella tiene 49 años.
Ambos tiene 96 años; búsqueda de la diferencia ou de la separación para encontrar la edad de Sofía.
La resolución puede esquematizarse retomando los casilleros superpuestos de la pirámide.

<table>
<tr><td>47</td><td>49</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">108</td></tr>
</table>

El cine

Función numérica : 1 butaca niño → 22F 1 butaca adulto → 45F

1 butaca niño	→ 22F	1 butaca adulto	→ 45F
2	→ 44F	2	→ 90F
3	→ 66F		

Encuadre para situar 100F.
Lectura del enunciado y selección de la información.
Posibilidad de reemplazar « persona » por « camarada » y modificar el tamaño de los números para abrir este problema.

Este análisis permite establecer :

* objetivos metodológicos :

- sensibilizar a los alumnos en relación al número de etapas utilizadas para resolver el problema.
- un problema puede tener varias respuestas acertadas.

*un objectivo referido a la noción :

-noción de separación, noción de diferencia, comparación de números.

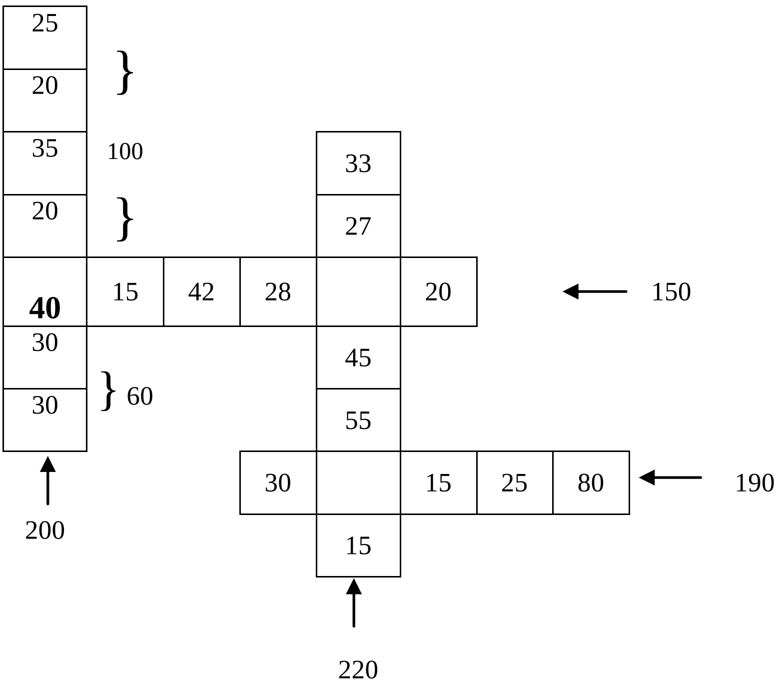
-Cálculos de adiciones y sustracciones

-Comprensión de la expresión: más que

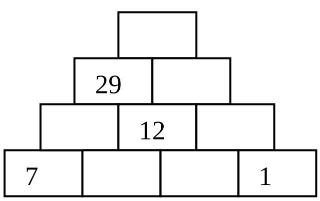
ANEXO 1 (continuación)

Taller de cálculo: ELEMENTOS PARA AYUDAR Y ESTIMULAR

1) Completar la grilla :
La suma de los casilleros de cada columna y de cada línea está indicada por la flecha



2) En esta pirámide de ladrillos, cuál es la separación que hay desde 12 para llegar a 29



Por dónde continuar ?

3) El tren y las paradas

650 pasajeros

1^{era} parada { 250 pasajeros descienden
25 pasajeros suben

2^{da} parada { 75 pasajeros descienden
38 pasajeros suben

Cuántos ?
Organiza las etapas de cálculo.

4) El Sr. Durand tiene 47 años, la Sra. Durand tiene 2 años más. Ellos tienen una hija Sofía.
Hagamos la pirámide

<table>
<tr><td>47</td><td>49</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">96</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">108</td></tr>
</table>

5) **El cine Rex**
Pedro es un niño. Cuánto paga ?
Tiene suficiente dinero para pagar los billetes a 4 amigos ?

ANEXO 2 : Dos entrevistas individuales

Estas entrevistas fueron realizadas con dos alumnos de 4to año, en ocación de la resolución de problemas aditivos.
Los niños fueron confrontados a dos problemas para resolver, cuando ellos estimaron haber terminado y haber respondido a la pregunta que se les planteaba, el maestro llevó a cabo la entrevista de explicitación con estos alumnos.
Primer problema : *Mamá gasta 350 francos el jueves y gasta 200 francos el viernes. Cuánto dinero ha gastado en estos dos días ?*

En principio se invita a cada niño a leer nuevamente el enunciado luego comienza la entrevista.
La primera parte de la entrevista es con el objetivo que el alumno explicite la idea que se hizo del problema ; la segunda parte tiene como finalidad conducirlo a explicitar el procedimiento utilizado.
A continuación se transcribe el diálogo entre el maestro y el niño.

Entrevista con Anahí

Profesor : qué es para ti, lo que acabas de leer ?
Anahí : la historia
P : es una historia... entonces ?
A : un cuento
P : un cuento ?
A : un problema.
P : y porqué es un problema ?
A : porque si mamá gasta 350 francos el jueves y 200 francos el viernes entonces ella va...
P : en qué tu reconoces que es problema ?
A : porque ella tiene 350 francos y si después gasta 200 francos, perderá dinero
P : me has dicho que esto podía ser una historia o un cuento ; hay diferencia entre un problema y una historia o un cuento ?
A : no, eso puede ser algo.
P : qué quieres decir ?
A: quiero decir, eso pueden ser dos cosas, como puede ser una historia pero no un problema o un cuento.
P : en qué se reconoce que es un problema y no simplemente un cuento ?
A : porque el problema es que si tu tienes 350 francos y que después tienes 200 francos porque los has gastado, has gastado 250 francos de 350.
P : pero qué es lo que hace el problema? Porqué hay un problema ?
A : porque se te pregunta cuánto has gastado en estos dos días.
P : y eso es una pregunta? Hay un problema porque hay una pregunta ?
Entonces, cómo tu te representas un problema ? Cuando en la escuela te dicen « vamos a hacer problemas » qué es lo que te dices ?
A : un problema es quizás como si…porque hay que encontrar cuánto es igual y la frase.

P : qué frase ?
A : la prase que hace decir cuánto ella tenía en total al principio.. !
P : cómo has escrito eso : ella a gastado francos.
A : si
P : y en general cuando hay que responder a un problema, como se hace para responder ?
A: hay que hacer una operación.
P : ah ! hay una operación. Y aquí en este problema, has hecho una operación ? qué operación ?
A : una adición.
P : y como supiste que era esta operación y no otra ?
A : para encontrar el número del principio, junté los dos. Hice "mas" porque los dos... eso me hará lo que ella tenía al principio. Ves ?

Entrevista con Jessica

P : qué es lo que acabas de leer ?
Jessica : es un problema.
P : qué es para ti un problema ?
J : un problema, para mi qué es ?
P : si tu tuvieras que decir a alguien qué es un problema, cómo se lo explicarías ?
J : yo explicaría que …cómo decir ?
P : en qué eso se reconoce como un problema ?
J : uf ! en qué se reconoce ? ... eso se reconoce, porque para mí, eso se reconoce por la...yo iba a decir por la pregunta.
P : y es algo ! Pero no solo en los problemas se plantean preguntas ! Si te pregunto la edad que tienes, es una pregunta y no es un problema.
Entonces que mas hay ? Qué representa para ti un problema ?
J : para mi, un problema es también… eso... me ayudo de los números.
P : hay números en un problema ?
J : si, si,…después ya está ! ya veo que esto es un problema.
P : y cuando hay un problema, se debe hacer algo ? cuando hemos leído el problema, debemos hacer algo?
J : si, se debe hacer una adición, una sustracción, o si es por ejemplo, es esto que hay que hacer, una multiplicación.
P : entonces cuando hay un problema, se observa enseguida si hay que hacer una operación ?
J : si, si, hay que mirar si hay que hacer « mas », « menos » o « por »
P : y cómo se sabe si hay que hacer « mas », « menos » o «por » cuando leemos el problema? Para ti, cómo lo sabes ?
J : cómo lo sé? ... lo sé...
P : por ejemplo, en este problema, qué operación has hecho ?
J : una sustracción.
P : y cómo supiste que había que hacer una sustracción ?
J : porque ella gasta.

« Dí, hazme un dibujo !»

Yves Girmens (1997)

Este trabajo es la exposición de una experiencia llevada a cabo en una clase de 1er año, en ocasión de un primer encuentro con un problema. Los niños deben representar el enunciado que les es dado, a través de un dibujo. Luego ellos deben elegir entre los dibujos aquellos que pueden ayudar a responder una pregunta recurriendo a la énumeración.

Origen de la experiencia y cuadro de trabajo

Realizando entrevistas individuales con alumnos en dificultad, hemos podido constatar que éstos no utilizaban una esquematización (representación en forma de esquema) como medio de apropiarse del sentido del problema planteado y quizás para tratarlo.
Como la idea que los alumnos tienen acerca de « resolver un problema » es « hacer una operación » el recurso para una representación esquemática está totalmente oculta.

Pensamos que con la esquematización del enunciado de un problema, se dispone de un medio natural de construír significaciones de ese enunciado. Esta esquematización completa y corrige la apropiación del enunciado en el registro de la lengua natural.
Podemos adelantar la hipótesis que al alumno con dificultades le es difícil crear un esquema funcional y que no puede, por su propia iniciativa, hacer evolucionar sus esquematizaciones hacia formas mas abstractas que construyan el sentido del problema.

Nuestra hipótesis :

El montaje precoz de actividades en torno de las esquematizaciones de un enunciado puede contribuír a desarrollar en el niño, la aptitud para comprender un enunciado matemático, para construír una representación y al mismo tiempo para darle los medios de mejorar sus esquematizaciones.
El objetivo será, que ellos elijan la esquematización mejor adaptada al problema a tratar.
No se trata, sobre todo de « caer » en el defecto de un aprendizaje metodológico de la resolución de problemas apoyándose en la esquematización, lo que constituiría una deriva comparable a la práctica que consiste en reducir el aprendizaje

de la resolución de problemas a un aprendizaje metódico de la “lectura de enunciados matemáticos”.

Se trata solamente, a la ocasión de la resolución de problemas, de conceder al esquema el lugar que le es propio, el de un « escrito intermediario » que el alumno puede utilizar para apropiarse de un problema y representarlo.

Présentation et analyse de l'expérience.

La experiencia es llevada a cabo en una clase de 1er año (alumnos de 6 años), en tal caso los alumnos jamás han sido confrontados a un problema de matemáticas.
La clase se compone en su mayoría de niños de origen extranjero.
La idea es presentarles un enunciado de tipo matemático (que contiene datos numéricos los que pueden ser relacionados) pero no contiene una pregunta, con el objetivo de hacer emerger las maneras de apropiarse y aprehenden el enunciado. Luego en un segundo momento, a partir de las “representaciones” que ellos han propuesto, se trata de poner en evidencia una interpretación del enunciado conforme al tipo de comprehensión que exige un problema en matemáticas.

Primera etapa :

El objetivo es conducir a los niños (que no saben ni leer ni escribir) a explicitar, mediante un dibujo (único tipo de escrito que pueden producir), un enunciado que aún no tiene forma de un problema clásico de matemáticas porque no contiene una pregunta.
La ausencia de preguntas abre sobre todo un abanico de interpretaciones que se traducen por dibujos diversos (comprende dibujos que hacen intervenir la imaginación) ; esto permite a los niños confrontar las diferentes interpretaciones posibles de un enunciado y de debatirlo.

Segunda etapa :

Una pregunta relativa al enunciado es ahora comunicada a los niños : la reflexión consistirá en buscar, entre los dibujos propuestos, los que pueden constituír una ayuda para responder a la cuestión planteada.
Esto debe permitir poner en evidencia tanto los dibujos que organizan los datos, dicho de otra manera, los que traducen una « lectura matemática » del enunciado, tanto los que hacen intervenir el imaginario (criterio : « no ayudan »), como los que no respetan la organización matemática de los datos.

Tercera etapa :

Los niños deben ahora buscar responder a la pregunta utilizando el esquema de su elección entre los esquemas propuestos.
Luego de un tiempo de exploración, la puesta en común pretende dar lugar a la explicitación de los criterios de elección y luego poner en evidencia las diferencias en los procedimientos de tratamiento según el dibujo elegido.

De esta manera, en un primer momento,el dibujo juega el rol de mediador en la comprensión de lo que es un enunciado matemático. En un segundo momento, deseamos permitir al niño percibir el interés por un cierto tipo de esquema, que obedece a ciertos criterios (relación de datos numéricos), como soporte del pensamiento para responder a la pregunta del problema.

Puesta en marcha

La sesión tiene lugar en una clase 1er año.
Los niños han trabajado sobre el número y el dominio numérico se extiende hasta 50 (dominio variable según los niños).
Los niños jamás han sido confrontados a un enunciado « tipo problema ».

Primer momento

Primera fase :

El siguiente enunciado es escrito en la pizarra:

En un lejano país, los cazadores han matado 12 tigres. Hacen falta dos cazadores para cargar un tigre y llevarlo al pueblo.

El enunciado es leído por la maestra que lo hace reformular por algunos niños. Cuando ella está segura que los niños han comprendido el enunciado, ella les comunica la consigna:

«Vas a hacer un dibujo que cuente esta historia » y explica agregando : ***« observando el dibujo yo debo comprender la historia »***

Cada niño dispone de una hoja A4 y trabaja individualmente.

Segunda fase :

La maestra selecciona una docena de dibujos que ella aficha a la pizarra . Reúne a los niños y provoca un debate en torno a la confrontación de los dibujos con el enunciado.
El debate se inicia con la pregunta : « El dibujo muestra todo lo que nos dice el texto ? »
La discusión permite clasificar los dibujos en diferentes tipos :

- Los que ilustran el enunciado en el plano semántico, sin tener en cuenta los números y recurriendo al imaginario.
- Los que tienen en cuenta el número de tigres pero que no utilizan la relación “uno para dos”
- Los que representan la relación « uno para dos » sin representar el número de tigres.
- Los que han tomado en cuenta todos los datos numéricos pero que han agregado una información no contenida en el enunciado : « algunos hombres llevan dos tigres »

Segundo momento

La maestra formula una nueva consigna :
« Ahora, voy a hacer una pregunta : cuántos cazadores hacen falta para transportar todos los tigres ? Vamos a observar si los dibujos afichados pueden ayudarnos a responder la pregunta. »

La maestra conduce luego un debate colectivo en torno a los diferentes dibujos, llevando a los niños a explicitar la manera de utilizar cada dibujo.
Durante esta discusión, algunos dibujos no son conservados porque no son de ninguna ayuda para responder a la pregunta (los que ilustran la historia sin utilizar los números y los que agregan información).

Tercer momento

La maestra da como nueva consigna :
« Van a responder a la pregunta planteada sirviéndose de un dibujo. »
Los niños han tomado sus dibujos trabajando de a dos.
La fase de exploración es seguida de una puesta en común que permite a los niños presentar sus procedimientos de enumeración poniendo en evidencia que esos procedimientos dependen del dibujo utilizado.

Prolongación

A partir de una situación vivida en ocación del carnaval, el siguiente enunciado a sido propuesto un poco mas tarde a los niños :

Para Carnaval, cada niño fabrica una máscara. Hacen falta dos piezas para hacer una máscara. Hay 13 niños. Cuántas piezas hacen falta ?

Acompañado de la siguiente consigna : "*puedes escribir o dibujar lo que tu quieras para responder a la pregunta. Escribirás el número de piezas necesarias al pie de la hoja ".*

Se trata aquí de un verdadero problema de matemática : siendo el objetivo conducir a los niños a producir "un escrito de búsqueda" (esquema o escrito simbólico) para representar el enunciado en vista de intentar responder a la pregunta planteada. En esta nueva situación, el escrito del alumno finaliza por la búsqueda de un número desconocido.
Cada niño dispone de una hoja A4. La sesión se desarrolla en tres partes : fase de apropiación del enunciado, exploración individual, puesta en común y balance.

La confrontación de las producciones de los niños a permitido poner en evidencia los siguientes puntos :

- hay que utilizar todas las informaciones que da el enunciado y solo esas.

- no es necesario dibujar los objetos de manera realista ; se pueden utilizar símbolos (barras o círculos)

-no es necesario dibujar todas las piezas : a partir del dibujo de las máscaras, ayudándose con el conteo de dos en dos se puede encontrar la respuesta.

-en lugar de hacer un dibujo, se puede escribir la secuencia de los enteros de 1 a 13 (que representan 13 máscaras) luego simulando mentalmente « 2 piezas para cada máscara » escribir en correspondencia la secuencia de los enteros de 1 a 26 (producción dada por un niño).

De esta manera esta situación ha permitido a cada niño, apoyándose sobre lo que él ha sido capaz de hacer para representar el problema, descubrir y hacer funcionar representaciones esquemáticas o simbólicas (otras que no era la suya) que sus camaradas han puesto en marcha para tratar el problema.

Observación :

Sin poner en duda la elección de ciertos autores de hacer reflexionar a los niños sobre esquematizaciones de problemas producidos por alumnos ficticios (porque este dispositivo puede resultar oportuno en ciertos momentos) nos parece necesario permitir a los niños **a la ocasión de resolución de problemas**, descubrir otras maneras de representar en forma escrita un problema : daremos así al niño los medios que ayuden a desarrollar sus competencias para representar un problema por un escrito funcional, les ayudaremos progresivamente a pasar de un escrito de tipo « esquema » a un escrito utilizando el simbolismo matemático.

Los talleres de investigación en matemáticas

Pierre Eysseric (1998)

Este artículo presenta una experiencia llevada a cabo durante varios años en algunas clase de escuela primaria del Departamento del VAR : la disposición de lugar y de tiempo para el placer de la investigación en matemáticas.
Luego de la presentación del proyecto inicial, el artículo analiza algunas dificultades encontradas, el desfasaje entre el dispositivo proyectado y las realizaciones efectivas, así como las perspectivas de un dispositivo como ése : faltan estudiar algunas cuestiones para mejorar el funcionamiento de estas actividades de investigación en clase y cernir mejor su impacto sobre los diversos aprendizajes, en particular el de las matemáticas.
Esta actitud se ilustra posteriormente con una exposición de una investigación efectuada en el otoño de 1997, en una clase de 5to año.
Finalmente este trabajo concluye con una serie de sujetos susceptibles de ser utilizados como punto de partida para la investigación en matemáticas en la escuela.

1- Presentación del dispositivo

Deseamos comenzar por la descripción del dispositivo tal como ha sido proyectado y examinaremos mas adelante las diferencias o las separaciones entre éste y las realizacones en las clases. Se trata de transponer en las clases de la escuela primaria el modo de trabajo que es el de los investigadores en matemáticas.

La imagen de círculos concéntricos centrados en el niño (o en el investigador) permite una descripción bastante simple de esta transposición.

1.1 De la investigación a la publicación.

El <u>primer círculo</u> está constituído por el niño y su sujeto de exploración, es decir una pregunta que él se plantea, que forma parte del campo de las matemáticas y a la cual desea poder responder; el sujeto puede ser propuesto por el niño o por un tercero (el docente por ejemplo) pero en todos los casos, el alumno debe apropiarse y sentirse responsable de la búsqueda de una solución al problema planteado.

El <u>segundo círculo</u> comprende dos o tres alumnos: los que tienen el mismo sujeto de búsqueda o amigos con los que habla libremente de su trabajo; su equivalente en la comunidad científica, son los colegas del laboratorio, a quienes nos acercamos en el pasillo o en la cafetería para que conozcan nuestra idea, un interrogante, un obstáculo encontrado, un artículo interesante,... Este círculo, aunque muy informal (no es sin importancia) es un espacio de libertad: se puede trabajar solo pero se tiene el derecho de intercambiar con los otros, de hablar sin dificultades de su trabajo; esto tiene una incidencia que no se puede descuidar, sobre la implicación de los niños en la actividad de exploración y el descubrimiento del placer de búsqueda.

El tercer círculo, es la clase (los alumnos y el docente) que funciona aquí un poco como un laboratorio con su director de investigación. Luego de un tiempo mas o menos largo de búsqueda, los niños deberán presentar su trabajo a toda la clase; se puede llegar con soluciones para proponer pero también con preguntas que quedan sin respuesta, sobre las que no se puede avanzar.

En este caso, se explica lo que se ha ensayado, los impases encontrados y cada uno puede intervenir para proponer nuevas pistas o para criticar lo que ha sido hecho. Al terminar este debate, dos casos pueden presentarse : sea se estima que las ideas intercambiadas permiten volver a trabajar sobre el sujeto, sea se llega a una verificación colectiva de impase y se toma la desición de documentarse o de re-enviar la cuestión al 4to. círculo (un referente matemático exterior a la clase que puede ser un investigador o un profesor de matemáticas). Cuando por el contrario, el niño estima haber resuelto el problema que se había planteado, sus soluciones son sometidas a la crítica sin piedad de los otros alumnos y del docente si es necesario; se trata entonces de convencer a toda la clase del valor de las respuestas propuestas. Si el trabajo presentado es aceptado, validado por la clase, podrá salir de ésta y ser publicado; esta publicación podrá tomar dos formas : exhibición en un pasillo, artículo en el periódico de la escuela, fax dirigido a otra clase que practica la exploración en matemáticas, correo enviado a un investigador que corresponde a la clase, ... Se está entonces en el cuarto círculo, pero antes de llegar ahí, muchas idas y vueltas entre el primero y el tercer círculo son con frecuencia necesarias y no es raro que un niño que ha llegado convencido de su respusta deba, al final de una disución a veces encarnizada, convenir que debe volver a trabajar sobre su obra. Tenemos por ejemplo el caso de este alumno de 5to año que llegó un día frente a sus camaradas, orgulloso por el descubrimiento que había logrado y muy seguro de convencer a todo el mundo. *«Existe una infinidad de fracciones, y se los voy a probar» declaró y se puso a dibujar en la pizarra un gran cuadrado. « lo divido así, tenemos 1/2; vuelvo a comenzar y tenemos 1/4.* » Y él continúa de esta manera hasta que su cuadrado está cubierto completamente de tiza blanca; concluye entonces diciendo: *« y etc, se puede siempre dividir y por lo tanto, las fracciones, es infinito!* » El resultado es entonces refutado por dos alumnos que piensan que no se puede continuar : el cuadrado está completamente blanco, no hay mas nada para dividir. El alumno retoma su argumentación pero no logra convencerlos. El maestro concluye la disución re-enviando a cada uno a la búsqueda: *« Deben trabajar sobre ésto; cuando tengan algo nuevo, vuelvan y hablaremos.* » La semana siguiente, el alumno ha afinado su demostración ; retoma como la primera vez, pero antes que el cuadrado estuviese todo blanco él se detiene y dice: *« Ven este pequeño cuadrado?. Bue, lo agrando, lo agrando, hago un zoom como para las fotos y recomienzo la división así, puedo siempre* *continuar!* » esta vez todo el mundo está convencido pero los litigantes quieren igualmente intervenir : buscando argumentos para convencer a la clase que su amigo estaba equivocado, ellos llegaron a la misma conclusión que él pero de otra manera. *« cuando se escriben las fracciones 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... se multiplica el número de abajo por dos y eso nos da cada vez una nueva fracción; como siempre se puede recomenzar y multiplicar por dos, se ve bien que las fracciones, es infinito!* » Estando todo el mundo de acuerdo, se decide pasar en limpio ambas argumentaciones y aficharlas en el pasillo. En este tercer círculo, el rol del docente como director de la exploración es esencial : es él quien regula los intercambios, quien administra las idas y vueltas entre búsqueda y comunicación hasta la *validación** de un resultado para comunicar o al constatar que no se sabe y se recurre a la ayuda exterior.

El cuarto círculo es exterior a la clase : al origen del proyecto, era un investigador, un especialista de las matemáticas a quien se podían enviar los trabajos de la clase (resultados, pero también preguntas que quedaban sin respuesta), alguien exterior a la clase, a la escuela y que pueda garantizar la calidad de los trabajos matemáticos realizados y así autorizar su publicación. De hecho se verá que en la práctica, con frecuencia las cosas pasaron de manera diferente en este cuarto círculo que se traduce sobre todo por la publicación, la comunicación fuera de la clase, de los trabajos de exploración de los niños.

Finalmente el último círculo es el congreso anual de los niños investigadores: todos los años los niños que han hecho, durante el año escolar, trabajos de exploración en matemáticas lo presentan en este congreso. Este es un poco el cierre de trabajo de todo un año, pero también para ciertos niños, un trampolín hacia otras investigaciones a través de los sujetos descubiertos durante la jornada – una especie de fiesta de las matemáticas donde la pasión de los niños con frecuencia sorprende a los padres acompañantes.

« Ellos están locos; es la finalización del año, se les ha hecho hacer matemáticas todo el día, y además están contentos! », nos ha dicho uno de ellos.

1.2 Un lugar y un tiempo para el placer en la búsqueda.

Luego de esta descripción de las diferentes etapas de la investigación en clase volvamos sobre algunas palabras claves que permiten comprender mejor las actividades propuestas.

- "Un lugar".

Las exploraciones en matemátics se desarrollan en la clase, con el docente. No es cuestión para nosotros transferir esta actividad fuera de la escuela como una especie de club matemático, o de confiarla a un interventor exterior. Los talleres de exploración o investigación matemática (que designaremos con ARM a continuación del texto) deben formar parte del trabajo de la clase y no situarse al costado. En la medida que nosotros esperamos un impacto de los ARM sobre los aprendizajes matemáticos de los niños, su inmersión en las actividades ordinarias de la clase nos parece fundamental. Queremos evitar producir un desdoblamiento de las matemáticas en la mente de los niños : por un lado las matemáticas del club o del interventor exterior, y por otro la de la clase, de la maestra o el maestro.

La unidad del lugar es una condición necesaria para el mantenimiento de la unidad de las matemáticas.

- "Un tiempo".

Los ARM son unos de los momentos de la actividad matemática de los niños en la clase; un momento importante, pero un momento limitado : según las clases, los ARM representan en promedio entre 30 min y 1 h por semana. El ARM, lugar de aprendizaje de un proceso, debe existir con (y no reemplazar) las situaciones de aprendizaje de los saberes que figuran en el programa de matemáticas de la clase. El objetivo a término es hacer evolucionar la imagen que los niños tienen de las matemáticas y permitirles abordar en otro estado de espiritu los aprendizajes mas clásicos.

- "El placer".

Queremos hacer descubrir a los niños que las matemáticas pueden ser fuente de placer a igual título que la lectura, la música, la pintura, ... Este descubrimiento pasa por la libertad: se puede tener placer si se hace matemáticas porque se está abligado a hacerlo ? y la pregunta del carácter obligatorio o facultativo de esta actividad puede ser legítimamente planteada. Hemos elegido proponer los ARM a todos los niños por dos razones.

Por una parte, un niño no puede descubrir que es posible investigar, explorar en matemáticas y encontrar allí placer, si no se le ofrece la oportunidad de hacerlo; por otra parte eso nos parecía indispensable para no aislar los ARM de los otros aprendizajes. Pero por otro lado abrimos, a pesar de todo, con los ARM, un espacio de libertad en la clase por el hecho que nos pasamos por un tiempo de las condiciones que impone el programa, y que el niño tiene la libre elección de los problemas que va a buscar resolver : solo está confrontado a cuestiones que han estimulado su curiosidad y que él se plantea realmente.

- "Investigar en matemáticas".

Luego de haber evocado el espacio de libertad de los ARM, diremos dos palabras que fijan el cuadro, el objeto de trabajo. Todo es posible; la sola condición es investigar y hacerlo en el campo de las matemáticas. Pero todos los actores del ARM (alumnos, docente, investigador) no ubican las mismas realidades detrás de estas palabras y a lo largo de todo el año, el contenido de los ARM va a ser objeto de una negociación en la clase. *« Es investigación ? Es matemáticas ? »*. Estas preguntas volverán al docente y a los alumnos sin cesar. Por un proceso análogo al que funciona en los personajes puestos en escena por Imre Lakatos en su obra « Pruebas y refutaciones » con el sujeto de los poliedros convexos, los niños van (siempre practicando la investigación en matemáticas) a hacer evolucionar su definición de ésta. Esta negociación permanente es un elemento fundamental para comprender el impacto de los ARM sobre el conjunto de los aprendizajes en la escuela (los alumnos manifiestan al comienzo de un ARM sus concepciones a la vez de las matemáticas y de la investigación y es la práctica de la exploración en matemáticas que va a conducirlos progresivamente a estudiar estas) et la implicación de los niños en este tipo,de actividad (muchos niños comienzan a existir como sujetos frente a las matemáticas, posibilidad que ellos no sospechaban). Intentaremos ilustrarlo con algunos ejemplos en la tercer parte.

2. Del proyecto a las realizaciones.

2.1 Una situación didáctica inhabitual.

Desde que hemos presentado los ARM a docentes, hemos sido confrontados a un doble movimiento que puede parecer a priori paradoxal : por una parte, entusiasmo por este tipo de actividad y por otra parte el temor de lanzarse a la misma. Y entre los docentes que actualmente practican los ARM en su clase, muchos dudaron durante años antes de comenzar. El temor de encontrarse enfrentados a problemas de matemáticas planteados por los niños y a los que no son capaces de responder es un argumento frecuente de los que tienen ganas de comenzar pero no osan dar el paso, lo que resumen con frecuencia diciendo : *"no somos lo suficientemente buenos en matemáticas para hacer eso*!*"*. La falta de tiempo también es con frecuencia invocado en particular por los docentes que han hecho la tentativa de los ARM, luego se han detenido : *"es muy interesante pero el tiempo no es elástico, no se puede hacer todo..."*. Téresa Assude, en su tesis profesional de profesor de escuela [Assude 97], intenta explicar sus retiscencias en relación a la temporalidad del dispositivo. En las situaciones didácticas tradicionales el docente tiene el dominio completo del tiempo ; en particular, siempre sabe lo que viene después, estando el desarrollo de las secuencias y de los aprendizajes regido por un texto del saber delimitado por programas oficiales y manuales. Ahora bien, la gran novedad en los ARM, es que no hay texto del saber a priori, porque lo que está en el centro es la actividad, no es un saber a construír, sino un estilo de trabajo (el de investigador en matemáticas). La consecuencia es una fuerte desestabilización del docente que no puede más dominar el futuro, conocer los acontecimientos que vienen, lo que T.Assude expresa de esta manera : *"el docente debe aceptar la repartición de las responsabilidades y la co-producción del texto del saber"* y esto le permite enunciar *"cinco reglas que permiten negociar el contrato de investigación o búsqueda y hacerlo avanzar :*

Regla 1 : se es co-responsable de la exploración del grupo.
Regla 2 : se plantean preguntas y se estudian problemas.
Regla 3 : se comunican los avances de nuestra investigación.
Regla 4 : se debe llegar a un producto terminado.
Regla 5 : los trabajos deben ser validados por la clase (incluído el docente)."

[Assude 97]

2.2 Qué es un sujeto de investigación ?

La acción de explorar en matemáticas es característica de los ARM ? Responderemos por la negativa a esta pregunta. La práctica de los ARM y el análisis de ésta nos condujo a distinguir bien lo que es un sujeto de investigación de un problema de investigación o de la fase de investigación de una situación de aprendizaje

En esta última, contrariamente a los ARM es el texto del saber a construír que está en primer término; habrá en las fases de exploración de una situación didáctica implicación y compromiso con el sujeto pero no un proceso de investigación. Sin embargo cuando un problema de exploración es propuesto a los alumnos, el objetivo es enseñarles a investigar y esto por el camino de la resolución de un problema preciso planteado por el docente.

En los ARM, deseamos transponer lo mas completamente posible el proceso del investigador; ahora bien, nos parece que este proceso con frecuencia comienza con la formulación del problema. Es lo que nos condujo a oponer sujeto de investigación a problema de investigación. En un caso, se trata de plantear preguntas a las que luego se intentará responder sobre un sujeto que se ha elegido o que nos han propuesto, en el otro caso, se debe responder a una cuestión planteda por un tercero.

Confundirlos tendría dos consecuencias no despreciables :

1) restringir fuertemente el espacio de libertad de los ARM ;
2) ocultar el aspecto "formulación de un problema" del aprendizaje del proceso de investigación .

En relación a esto, es importante remarcar que la diferencia entre un sujeto y un problema de investigación no se sitúa a nivel formal. Un sujeto de investigación puede muy bien ser devuelto a la clase por intermedio de un problema de investigación si está claro para todos los actores que se espera no solamente la resolución del problema sino todos los interrogantes que este problema puede conducir a plantearse. Igualmente ciertas circunstancias pueden llevar al cierrre de una situación de investigación que será por lo tanto percibida como un problema ordinario. Recientemente hemos hecho la experiencia con un grupo de adultos : apenas el sujeto fué expuesto, uno de los participantes formuló su pregunta, y en razón de su personalidad y de su situación en el grupo, su pregunta que es planteada al grupo como la pregunta a la que cada uno debía responder, provocando bloqueo en algunos debido a la desaparición del espacio de libertad : ellos no se sentían mas autorizados a plantear sus preguntas y, como la pregunta planteada no les interesaba, rechazaron la actividad.

2.3 Cómo iniciar la investigación en una clase.

Todos los docentes no comienzan la investigación en sus clases de la misma manera. Los testimonios recogidos y las observaciones realizadas desde hace cinco años nos permiten proponer una clasificación de estos comienzos en relación al grado de apertura de la pregunta de partida.

2.3.1 Apertura total.

Es en general el caso de los docente aguerridos que no temen el no dominio del tiempo. Fue el caso de un docente que, al regreso de su curso de formación a explica a los niños de su clase de 3er año las razones de su ausencia de una semana y les ha dicho que ella había hecho investigación en matemáticas; luego ella les ha propuesto hacer lo mismo y a iniciado el ARM de esta manera y con esta consigna : todo es posible con la condición que sea matemática y que se investigue. Otro ejemplo nos fue dado por una maestra de 3er año que ha comenzado distribuyendo a los alumnos una fotocopia del índice de una obra titulada "Cuentos de Provincia" y con la consigna: *"a partir de este documento, van a hacer investigación en matemáticas!"*. Tanto en un caso como en otro, se ha confrontado muy rapidamente a los niños, quienes durante las semanas precedentes hacían operaciones o que se planteaban pequeños problemas que tenían la forma de los resueltos en clase. De esta manera los alumnos manifestaban de entrada su representación de las matemáticas y el proceso de negociación evocado en 1.2 siendo lanzado por observaciones de ciertos niños: *"es esto investigación ?, ..."*.

2.3.2 Situaciones abiertas encuadradas.

Entonces, se trata de proponer una situación a los niños y de conducirlos a plantear preguntas. En general, un trabajo importante será hecho con la clase para clasificar las preguntas de matemáticas y las que sin ser no interesantes, hacen referencia a otro campo disciplinario, lo que es investigación y lo que no lo es.

Algunos ejemplos :

- Un docente de 3er año ha propuesto la siguiente situación : *"lanzamos tres dados"*, luego él ha solicitado a los alumnos de buscar todas las preguntas que fuera posible plantearse; las preguntas fueron escritas en la pizarra, en una fase colectiva, se clasificaron las preguntas, conduciendo esto a dar una primera definición de investigación en matemáticas. En fin, los niños han sido invitados a elegir una de las preguntas de las que se había decidido colectivamente que entraban en el campo de la investigación y de las matemáticas, luego intentar resolverla solos o en grupos de dos o tres.
- El mismo proceso puede ser considerado con ejemplos como: *"tenemos monedas de 1F, de 2F y de 5F"*, ...
- En una clase con dos niveles (2do y 3er año) se ha propuesto el siguiente sujeto: *"elegimos un número de tres cifras; con esas tres cifras ordenadas de mayor a menor, obtenemos un nuevo número; con estas mismas tres cifras ordenadas de menor a mayor obtenemos un segundo número, calculamos la diferencia de los dos, luego se recomienzan todas las operaciones, pero esta vez a partir del resultado obtenido, ... observamos y planteamos preguntas!"*.

  Un grupo de cinco o seis niños se apasionó por este sujeto durante mas de seis meses. Han conjeturado resultados, intentado avanzar en las explicaciones, ampliado el problema a los números de 2,

> luego 4, 5 e incluso 6 cifras ; han hecho un gran número de sustracciones, pero esto no era gratuito; esta situación había agudizado si interés por los números; descubrían fenómenos que deseaban explorar, comprender y las operaciones realizadas servían para esta operación.

2.3.3 Manipulación del material

Es sin dudas el comienzo mas frecuente en las clase. El pasaje por la manipulación de un material permite en un primer tiempo ocultar la representación dominante de las matemáticas (*"hacer matemáticas, es hacer cálculos"*), pero durante las fases de comunicación, a través de observaciones como: *pero qué es matemáticas?", ...* , el debate sobre las representaciones de las matemáticas y de la investigación surgirá.

He aquí algunos de los materiales que han sido utilizados : juegos de estrategia, máquinas de calcular, cuerdas y nudos, motivos geométricos para reproducir, sólidos para construír, máquinas con fichas que reproducen el funcionamiento de una computadora, ... enviamos a una publicación ulterior para una descripción mas detallada de los trabajos de investigación efectuados por los niños a partir de estos materiales. Una dificultad específica para estos puntos de partida merece ser señalada : sucede que hay niños que se encierran en la manipulación, juegan sin jamás hacer investigación en matemáticas ; entonces cómo hacer evolucionar la situación?

Una primera respuesta puede ser aportada por intermedio de las fases de comunicación en curso de las cuales cada niño deberá exponer el resultado de su trabajo y afrontar la mirada crítica de sus pares ; con frecuencia es a través de las preguntas sobre sus manipulaciones que los otros van a plantear al sujeto que el niño va a ser conducido a abandonar su etapa de juego verdaderamente. Pero nos podemos preguntar también si esta manipulación, este juego no es en sí mismo un elemento importante de la investigación : transformar el sujeto lo suficientemente familiar para poder luego interrogarlo. Esto podría explicar el hecho que algunos niños necesiten manipular mayor tiempo que otros antes de pasar a una "verdadera investigación", siendo los materiales propuestos mas o menos conocidos por ciertos niños. El investigador no pasa a veces mucho tiempo a familiarizarse con su sujeto antes de ser capaz de formular la pregunta que va intentar responder ? Y un observador exterior podría en estos momentos creer que no hace nada, porque efectivamente él no produce nada, no hay ninguna materialización de su trabajo. Ciertos niños de los que podríamos estar tentados de decir que no hacen nada, no están ellos en la misma situación?

2.3.4 Preguntas cerradas no tradicionales.

Se trata esencialmente de problemas lúdicos, extraídos de rallyes matemáticos, que aunque son generalmente cerrados, pueden fácilmente desembocar en una situación abierta : una vez la pregunta resuelta (o a veces antes de que lo sea), se agudiza la curiosidad y se tienen ganas de ir mas lejos, de plantearse otras preguntas.

2.4 La comunicación en los ARM.

Durante el primer contacto con los ARM, la mayoría de los observadores neófitos remarcan sobre todo la fase de acción : el murmullo permanente de los niños que efectúan sus exploraciones en matemáticas. Y cuando intentan transportar la actividad a sus clases, se limitan a reproducir ésta. Pero muy rápidamente, y lo que ha surgidado de manera unánime durante el curso de marzo ‘95, la actividad ubicada de esta manera no les satisface más ; ellos tienen la impresión de girar en círculo. Analizando juntos este sentimiento de frustración, han tomado conciencia de esta fase de comunicación que ellos habían hasta aquí descuidado porque es costosa en tiempo, menos lúdica y necesita una organización rigurosa. En efecto, es la comunicación más que la acción que constituye el verdadero motor del ARM : la comunicación favorece el proceso de negociación evocado en 1.2 y la evolución de las representaciones de los niños en relación a la investigación en matemática; es la comunicación a través de las reacciones suscitadas que permite, relanzar una investigación que no avanzaba; en fin qué significación puede tener la acción de investigar si no se tiene el proyecto de comunicar a otro el resultado de su trabajo. Entonces la comunicación ya debe existir « en proyecto » al momento de la acción (cf. Reglas 3,4 y 5 propuestas en [Assude 97]) ; es la que va a regular el conjunto del proceso del ARM y la ubicación de éste necesita la organización por el docente de esta comunicación de las investigaciones en la clase (exposiciones, afiches, periódicos, congresos, ...). Se encontrará en [Marill 96] (mémoire professionnel de PE) algunos análisis detallados del rol de la comunicación en los ARM.

En fin la comunicación de los resultados de las investigaciones fuera de la clase es en general la ocación de reorganizar saberes producidos, lo que representa una parte importante del trabajo de los investigadores.

3. Perspectivas

Luego de haber evocado, en el párrafo precedente, les puntos sobre los cuales al análisis de los ARM ha avanzado más, nos queda hacer un inventario no exhaustivo de interrogantes aún muy abiertos en relación a los ARM. Para muchos de ellos, tenemos intuiciones de respuesta, algunos testimonios que confirman íntimas convicciones, pero el trabajo realizado es aún insuficiente para dar respuestas bien consistentes y argumentadas. Estas preguntas son aquí, como durante el taller, planteadas espontáneamente para situar mejor el avance de nuestra reflexión y suscitar eventuales reacciones susceptibles de hacerla progresar.

3.1 Para qué sirven los ARM ?

Tiene un impacto real en los aprendizajes o en la manera de abordar las matemáticas y los problemas ? Numerosos testimonios nos hacen pensar que sí.

Niños en particular que antes se ubicaban en posición de espera cuando el docente anunciaba un problema de matemáticas, buscan (sin encontrar forzosamente)intentan hacer algo para resolver el problema.

Pero queda para efectuar un estudio mas científico sobre este impacto.

3.2 El placer de investigar: realidad o fantasma?

Aquí también los testimonios concuerdan, pero habría que realizar un estudio comparativo con los niños que no practican los ARM, retomando y mejorando este comienzo en su memoria profesional por V. Monteil [Monteil 95].

3.3 Los ARM: obligatorios o facultativos?

Más arriba hemos dicho en qué sentido (y porqué) hemos separado este interrogante, pero quizás habría que replanteárselo si un día se pasa la etapa de la experimentación. La pregunta puede entonces reaparecer a otro nivel, el del docente : hasta aquí, todos los docentes que han practicado los ARM eran voluntarios ; el dispositivo que ha funcionado de esta manera puede sobrevivir si el ARM es impuesto a cada docente como una actividad entre otras del programa?

3.4 La investigación si, pero porqué en matemáticas ?

Qué puede justificar el hecho de realizar un aprendizaje del proceso cientifico por el camino de la investigación en matemáticas ? El contenido de las investigaciones no debe estar ampliado a las ciencias ? a otras disciplinas ? Cómo situar los trabajos organizados en los ARM en relación a otras iniciativas como la de Georges Charpak con "La main à la pâte" ?

3.5 La memoria del trabajo de la clase.

Se ha podido observar que, según las clases, la memoria del trabajo, de una secuencia a otra, se organiza de manera diferente : algunos dejan esta memoria enteramente a cargo del alumno, otros al contrario, conservan el conjunto de los borradores de exploración de los niños con la fecha y el nombre de los autores. T.Assude en su memoria profesional [Assude 97] comenzó un estudio del funcionamiento de la memoria en los ARM, pero este trabajo aún embrionario merecía ser retomado y completado.

3.6 El rol del investigador.

No tenemos ni tendremos jamás un investigador para cada clase, entonces... quién puede reemplazar al investigador y que permanezca como persona-recurso, especialista de las matemáticas, garantía de calidad matemática de las investigaciones efectuadas ? Un profesor de matemáticas ? Un consejero pedagógico especialista de las matemáticas ? ... Estas diferentes pistas han sido consideradas y deben ser profundizadas, pero aparece un elemento importante : solo se puede reemplazar al investigador por alguien que tiene la experiencia, la práctica de la investigación. Si no se corre el riesgo, si no se toma cuidado de esto, de asistir a una deriva de los ARM hacia la producción de un texto del saber en detrimento del proceso de investigación. En resúmen, nos parece que el investigador (profesional) solo puede ser reemplazado por un investigador (eventualmente amateur).

3.7 La formación.

La formación para la práctica de los ARM a estado por el momento reservado a algunos voluntarios informados de la experimentación. Pero el lugar de este dispositivo en el cuadro de la formación de los profesores de escuela, y profesores de liceos y colegios queda para la reflexión. En paralelo, son para repensar o para pensar el lugar de una iniciación a la investigación en la formación de los docentes, como los vínculos entre el mundo de la investigación y el de la educación.

4. Crónica de una investigación :

Esta crónica ha sido redactada a partir, de la correspondencia entre una clase de 5to año (alumnos de 10 años) y M. Yves Lafont, encargado de investigaciones en CNRS (IML de Luminy) por una parte y del registro en audio del trabajo realizado por los niños durante la visita del investigador a sus clases, por otra parte. Para la retranscripción de los diálogos serán utilizadas alguna abreviaturas: C designará al investigador, M al maestro de la clase y E_i un alumno.

4.1 Trabajo en Taller de Investigación en Matemáticas:

- Construcción de una decena de sólidos (el material utilizado es Polydron: caras poligonales en plástico rígido que se encajan unas en otras).
- Observación de los sólidos ; conteo de las caras, de las aristas y de los vértices; organización de los resultados en una tabla.
- Formulación de un primer problema :

"Es más fácil contar las caras; pero para las aristas y los vértices es más difícil! Es posible encontrar una manera de calcular el número de aristas y de vértices sin contar ?"

- Este problema conduce a los niños a buscar una eventual relación entre el número de caras, el número de aristas y el número de vértices de un mismo sólido.

4.2 Formulación de los resultados obtenidos delante de la clase :

- A partir de los resltados obtenidos o consignados en sus tablas, varios niños han descubierto la ley de Euler:
  Número de caras + número de vértices - 2 = número de aristas
- Esta ley es expuesta a la clase, discutida y verificada sobre los diferentes sólidos fabricados.
- Habiéndose puesto de acuerdo toda la clase sobre la formulación de la ley, se prepara un correo para Yves Lafont.
- El niño que escribre el fax se equivoca : invierte aristas y vértices; de esta manera el documento que recibirá el investigador (fax del 27/11/97) contendrá resultados erróneos, lo que no era el caso al momento de la exposición en la clase...Además, se plantean dos preguntas al investigador :

Esta es una regla general para todos los sólidos ?
Se puede encontrar una ley que nos de el número de aristas y de vértices conociendo el número de caras?

4.3 Respuesta por fax del investigador:

Buen dia a la clase « Les Pies »
Recibí su fax, y me gustaría saber mas sobre ustedes. Por ejemplo, en qué año están? Cuántos son ? Cómo se llama el profesor ?
Su investigación es sobre un dominio muy interesante de las matemáticas, que se llama la *topología*. Pienso que se han confundido, sin duda entre los vértices y las aristas. Pueden enviarme los dibujos (o los patrones) de los sólidos que han construído ?
Esto dice que existe una fórmula que vale para muchos sólidos pero no para todos. Entonces prueben construír un sólido que se parezca a un salvavidas, es decir con un agujero al medio (las matemáticas llaman a esto un tore.
Intenten también construír *dos sólidos* (sin agüjero) que tengan el mismo número de caras, pero no el mismo número de vértices. Esto puede responder a su segunda pregunta."

4.4 Llegada del investigador a la escuela:

- Esta coincide con la recepción del texto transcripto mas arriba por los niños; se regresa al trabajo en ARM para :
  - corregir la ley si es errónea;
  - representar los sólidos fabricados para ilustrar la ley obtenida.

4.5 Trabajo ARM en presencia del investigador:

- A partir de los sólidos, tabla y ley son rectificadas.
- Varios niños se lanzan en la representación de los sólidos por uno de sus patrones; ésto desemboca en nuevos descubrimientos :
  - sólidos diferentes pueden tener igual número de caras con números de aristas y vértices que también difieren;
  - Sébastien propone al investigador un método para contar las aristas y los vértices de un sólido sobre su patrón.

4.6 Exposición, formulaciones de los descubrimientos de la mañana:

- Escritura corregida de la ley :
  Número de aristas = número de caras + número de vértices - 2
- Verificación colectiva de la ley sobre los diferentes sólidos (nuevos sólidos han sido fabricados durante el ARM de la mañana).
- Regreso a las dos preguntas que los niños habían planteado al investigador:
  - en relación a la primera, él les recuerda la sugerencia hecha en la respuesta escrita : probar de construír un sólido que se parece a un salvavidas.
  - pero la discusión declina rápidamente hacia la segunda pregunta :

se puede encontrar una ley que nos dé el número de aristas y de vértices conociendo el número de caras?

Marlène y Michaël responden "no" presentando dos sólidos con caras que han fabricado :

el sólido de Marlène (prisma con base hexagonal)

8 caras 12 vértices 18 aristas

el sólido de Michaël (octaedro regular)

8 caras 6 vértices 12 aristas

Ellos vuelven a contar, verifican la ley delante de la clase y dicen :

"No, no se puede porque 8 caras dan 6 y 12, o 12 y 18 para los vértices y las aristas."

Otro alumno toma la palabra :

"Yo diría que no, porque se está obligado a tener las caras y los vértices, o las caras y las aristas. Si se tienen las caras y los vértices, se pueden calcular las aristas :

Número de aristas = Número de caras + Número de vértices - 2

Si se tienen las caras y las aristas, se pueden calcular los vértices :

Número de vértices = Número de aristas + 2 – Número de caras."

- El niño escribe las dos fórmulas en la pizarra; luego continúa una discusión en torno a las fórmulas propuestas por los niños :

  Número de vértices = Número de aristas – Número de caras + 2

"Es lo mismo en un orden diferente :"

"Las dos fórmulas, son similares: en la primera, se agrega 2 a las aristas y luego se sacan las caras; en la segunda, se sacan primero las caras, luego se agrega 2, es similar !"
La fórmula: Número de caras = Número de aristas – Número de vértices + 2 , es propuesta para calcular las caras.
"No sirve para nada calcular las caras; es fácil contarlas !"

- Los niños toman visiblemente placer por este nuevo juego de "encontrar nuevas fórmulas", pero hay que señalar que la mayoría de las fórmulas son anunciadas apoyándose en números de una línea de la tabla (un sólido particular) :

"8 (caras) = 12 (aristas) -6 (vértices) + 2"

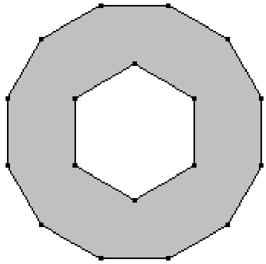
luego son verificadas sobre otros sólidos.

- El investigador les propone una fórmula que nadie había enunciado hasta el momento :
  Se puede escribir : Número de vértices = 2 – Número de caras + Número de aristas ?
  E: *"si, solo se ha cambiado el orden; pero para calcular habrá que ir a los "menos"."*

4.7 El salvavidas de Vivien :

- Durante la discusión recién descrita, Vivien construyó un sólido en forma de salvavidas ; lo presenta y se organiza el conteo de las caras, de las aristas y de los vértices.

Es un prisma recto con caras laterales cuadradas (12 exteriores y 6 interiores) et de base como se vé en la figura de abajo :



Vista de arriba

- En relación a las aristas no salientes "del agujero del salvavidas", surge una pregunta :

E_1: *"Esto es una arista?"*
E_2: *"si, es una arista, porque, se cuenta una cara, y otra cara al lado."*
C: *"se puede decidir que una arista es siempre el límite entre dos caras; como ésta, no se equivocará; habitualmente las aristas son un poco como una montaña; ahí se tienen aristas "casi planas" o como valles."*

- Un niño remarca que el "sobre" y el "debajo" son idénticos y que esto puede acortar el conteo.

- El conteo arriba tiene: 42 caras 78 aristas 36 vértices

Se calcula entonces: Número de caras + Número de vértices - 2
Y se encuentra ... 76.
Sería falsa la fórmula para el salvavidas de Vivien ?
E_1: *"Hay un error en el número de vértices; se han contado dos de menos."*
M: *"y si era el número de aristas falso!"*
C: *"O un error en la caras..."*
E_2: *"No, se sabe contar las caras; es fácil equivocarse !"*
E_3: *"Hay un error de 2, o sino la ley no funciona."*
C: *"Y porqué la ley no funcionaría con este sólido ?"*
E_3: *"Debe haber otra ley."*
C: *"Otra ley para qué sólidos ?"*
E_3: *"A partir de un número limitado de aristas, de vértices, de caras, no se cambia la ley."*
C: *"Cuando hay muchas caras, vértices o aristas ?"*
E_4: *"a partir de un cierto número de caras, hay que cambiar la ley !"*
Se anota la proposición en la pizarra:

Cuando el número de caras es muy grnade, se cambia la ley.

C: *"Sería interesante fabricar otros sólidos con muchas caras, vértices, aristas; con al menos 42 caras... Sería también interesante fabricar otro salvavidas ."*

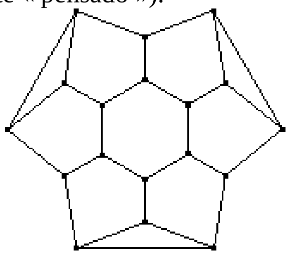
4.8 Retorno a la investigación individual (o en pequeños grupos) :

- Se verifica el conteo para el salvavidas de Vivien.
- Se fabrican otros sólidos para saber si la ley cambia, y cuándo cambia.
- Algunos utilizan este tiempo para apropiarse de las leyes que fueron escritas en la pizarra durante la discusión y las verifican con los sólidos.

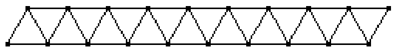
4.9 El sólido de Sebastien :

- El enunciado de la fabricación de un nuevo "gran sólido" interrumpe el trabajo y conduce a la clase a la discusión colectiva.

"Este es el nuevo sólido que he hecho ; él tiene agujeros pero son caras..." (han faltado piezas y él razona sobre un sólido en parte construído con piezas y en parte « pensado »).



« sobre »o « debajo »(los diferentes polígonos no son coplanarios)



El torno

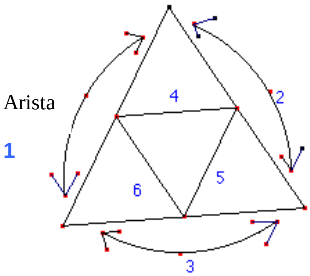
* el conteo arriba tiene : 38 caras 36 vértices 72 aristas
y se verifica que la ley funciona...
E: *"Puede ser que la ley cambia entre 38 y 42..."*
Nos detendremos aquí por un momento : la búsqueda continúa...

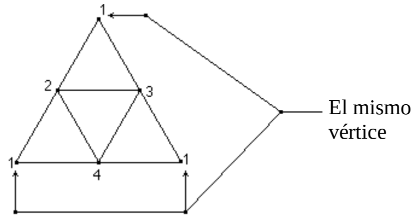
4.10 Discusión en torno al conteo de las caras del sólido de Sebastien :

E_1: *"Solo hay 19 caras, porque « todo esto »* (mostrando la parte superior del sólido)*, es una sola cara."*
* se recuenta con esta « convención » y se llega a 20 caras.
E_2 : *"No entiendo por ésto* (el torno)*, dices que tiene muchas caras; si fuese redondo* (alusión a un cilindro)*, solo tendría una cara."*
C : *"Eso, cambia el número de aristas ?"*
E_2 : *"Cuenta las ristas en pequeños trozos y él dice que lo de arriba , es una sola cara !... Para mí hay 3 caras, 2 aristas y no hay vértices !"*
* La discusión es animada sobre lo que es una arista o una cara para tales sólidos; se tocan aquí cuestiones de naturaleza topológicas...(equivalencia entre prisma y cilindro). La temática no se corta y será reenviada a una posible investigación ulterior.
"Tenemos dificultad para definir las caras de un salvavidas."

4.11 El conteo de los vértices y de las aristas sobre un patrón :

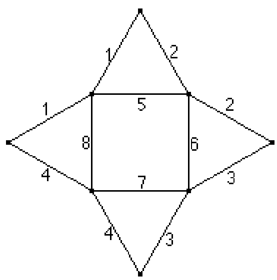
Sébastien presenta lo que ha encontrado por la mañana :
* la pirámide con base triangular (tetraedro): *"4 caras: triángulos regulares."*



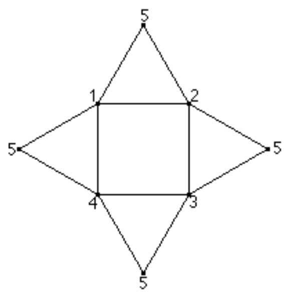


"Cuando se cierra "esto" y "esto", se van a tocar ! ... entonces 4 aristas."
"Todo esto ahora forman un solo vértice, entonces 4 vértices."
Crítica: *"Y para un patrón grande ?"*
Respuesta : *"Es igual ! Funciona para todas la pirámides..."*

- Y él recomienza con la pirámide de base cuadrada :

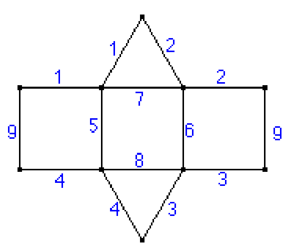


8 aristas

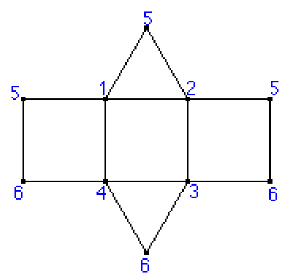


5 vértices

- No logra encontrar la extensión de su método que había propuesto a la mañana para el prisma de base triangular. Esto es lo que él había explicado al investigador :

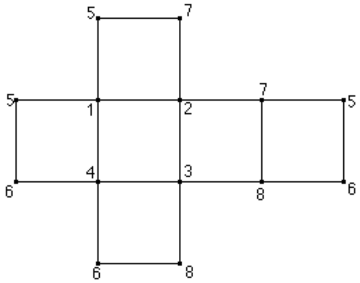


9 aristas



6 vértices

- Propone entonces de probar su método para el cubo; luego de algunas dudas lo logra para los vértices :



8 vértices

"5 " y "6" son identificados menos rápidamente que los otros:

"Cuando se pliega, esto se va a pegar allá arriba y forman el mismo vértice."

Para las aristas, colorear los agrupamientos 2 por 2 de los segmentos del borde del patrón le permite concluír con la ayuda del investigador...

4.12 Conclusión de la jornada :

- Se reenvía al próximo ARM las preguntas en suspenso y el pasaje en limpio de las formulaciones.
- Pero los niños querrían continuar y varios anuncian que tienen nuevos sólidos para testear.
- Se vuelve a comenzar con :

  - una ley que vincula caras, aristas y vértices, que funciona para todos los sólidos fabricados, salvo para el salvavidas de Vivien; si esta ley cambia cuando el número de caras es grande, es entre 38 y 42.

  - un método para contar las aristas y los vértices sobre el patrón que funciona bien para las pirámides pero aún no está a punto para los otros sólidos.

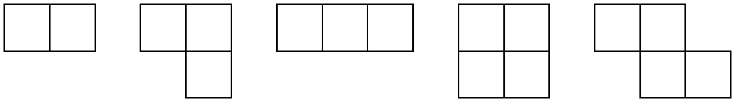
5. Algunas pistas para comenzar los ARM en una clase :

5.1 Sujeto n°1 : Cobertura de polinomios.

Un polinomio es un conjunto plano de cuadrados iguales (casilleros) tal que todo cuadrado esté unido a la figura por al menos uno de sus lados.
Ejemplos de polinomios :

Los dominós, los triminós, los tetraminós, les pentaminós, …

dominó triminós tétraminós



…

Cubrir un polinomio consiste en recubrirlo por polinomios mas pequeños de manera que todo casillero sea recubierto una vez y solo una.

El problema general de las condiciones para que se pueda cubrir un polinomio por un tipo de polinomio dado no está resuelto al día de hoy; pero numerosos casos particulares pueden ser abordados:

- Cobertura de un polinomio cuadrado por dominós.
- Cobertura de un polinomio cuadrado privado de un casillero, por un dominó.
- Los dos problemas precedentes para polinomios rectangulares.
- Cobertura de un polinomio cuadrado por triminós.
- …

5.2 Sujeto n°2 : Las pesas.

Se tienen un cierto número de piezas aparentemente idénticas. Una de ellas es falsa (es más liviana o más pesada que las otras, no se sabe). Se la quiere encontrar en **un número mínimo de pesadas** con la ayuda de una balanza de dos platillos (una pesada indica si el contenido de uno de los platillos es mas pesado, mas liviano o igual al del otro platillo).

5.3 Sujeto n°3 : 22, es el jefe.

Se estudia la siguiente codificación :
Se hace corresponder a cada letra el número correspondiente a su rango en el alfabeto, a cada palabra la suma de números que codifican sus letras.

Ejemplos:

JEFE es codificado por 3+8+5+6=22

La palabra-número DIEZ-OCHO es codificada por 4+9+24+8+21+9+20=95

A partir de esta situación, considerar las investigaciones matemáticas a efectuar…

5.4 Sujeto n°4 : 6174, 495 y Co.

Elegir un número de 4 cifras; por ejemplo : **7148**
Ordenar las cuatro cifras de mayor a menor; en el ejemplo se obtiene el número 8741
Odenar las cuatro cifras de menor a mayor; en el ejemplo se obtiene el número 1478
Calcular la diferencia de los dos números obtenidos :

8741 -1478 = **7263**

Re-comenzar todas las etapas a partir del número obtenido :

7148 → 8741
-1478
7263 → 7632
-2367
5265 → 6552
-2556
3996 → 9963
-3699
6264 → 6642
-2466
4176 →7641
-1467
6174 →7641
-1467
6174

Probar con otros números !
Se llega siempre a 6174 ? al final de cuántas operaciones ?
Los resultados de las diferentes sustracciones tienen otras particularidades ?
Y si se efectúa lo mismo con números de 3 cifras, qué sucede ?
…Se puede continuar y plantear otras preguntas par los números de 2 cifras, 5 cifras,...

5.5 Sujeto n°5 : Kapla.

Las planchuelas Kapla tienen 8 mm, 24 mm y 120 mm de dimensión:
3 espesores en su largo; 5 anchos en su largo.
Qué problemas matemáticos plantearse a partir de este material ?

5.6 Sujeto n°6 : El juego de la vida.

<u>Reglas de juego :</u>

- Un casillero vacío con 3 vecinos da un nacimiento.

	X	**X**	
	X	**N**	

Si se parte de la población de aquí arriba(casilleros con X), habrá un nacimiento en el casillero N.

- Un peón aislado, con un solo vecino, 4 antes, muere...
- Un peón que tiene 2 o 3 vecinos sobrevive.

				X	**X**
<u>**X**</u>		<u>**X**</u>		**X**	<u>**X**</u>
		<u>**X**</u>		**X**	
	<u>**X**</u>	**X**	<u>**X**</u>		

En la población de aquí arriba, los individuos <u>X</u> van a morir (algunos por aislamiento, otros sofocados), los individuos X sobreviven y habrán nacimientos (a encontrarlos !).

<u>Para jugar :</u>

Ubicar los peones en un cuadriculado para formar la población inicial. Luego seguir cada etapa de la evolución.

<u>**Deben encontrar las poblaciones más aptas para la superviviencia y el desarrollo.**</u>

5.7 Sujeto n°7 : Estudio del juego "AIREJUEGO".

<u>Material :</u> - varas de largos variados y en número suficiente (al menos 4 ejemplares de cada una)
- un arenero.
- papel, tijeras, goma de pegar y scotch.

<u>Regla de juego :</u> (4 jugadores)

- se distribuye a cada jugador 4 a 8 varas (cada jugador recibe el mismo lote de varas); también es posible sortear las varas que serán utilizadas.

- en el arenero cada uno debe realizar utilizando todas sus varas un polígono que tenga el área lo mas grande posible y dibujarlo en una hoja blanca.

- al terminar esta fase, se comparan las figuras obtenidas, se las ordena en relación al área de la mas grande a la mas pequeña y se atribuyen puntos a cada jugador:

- 5 puntos para la figura de mayor área
- 3 puntos para la siguiente
- 1 punto para la ante última figura
- nada para la figura de área más pequeña.

<u>Variantes</u> :

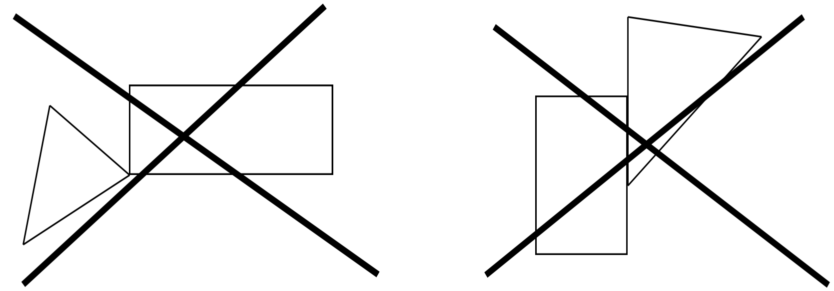
- EL AREA MAS PEQUEÑA GANA con la sub-variante :
  Los jugadores retiran cada uno 5 varas al azar : esta vez los polígonos no tendrán mas el mismo perímetro y el ganador (la figura de área mas pequeña) no será el que tendrá la vara mas corta.
- EL PERIMETRO MAS PEQUEÑO ...

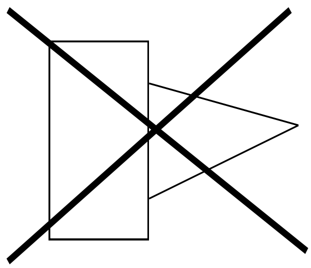
5.8 Sujeto n°8 : Estudio del juego "PERIJUEGO".

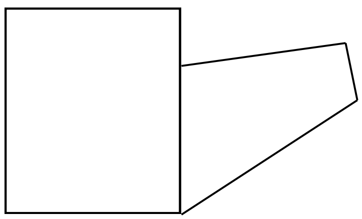
<u>Material</u> : - formas geométricas variadas en número suficiente (al menos 4 ejemplares de cada una) ; se podrán utilizar piezas de un puzzle como el tangram o piezas del maletín "La cosecha de las formas"...
- un arenero.
- una cuerda o un instrumento para medir largos.

<u>Regla de juego</u> : (4 jugadores)
- cada uno retira una forma geométrica.
- se distribuye a cada jugador un ejemplar de las 4 piezas que han sido sacadas.
- en el arenero cada uno debe realizar, utilizando las 4 piezas, una figura que tenga el mayor perímetro posible con las condiciones de yuxtaposición de las piezas que se detallan mas abajo y reproducir el contorno en una hoja blanca.
- al terminar esta fase, se comparan las figuras obtenidas, se las ordena respetando los perímetros del mas grande al mas pequeño y se atribuyen puntos a cada jugador:
  - 5 puntos para la figura de mayor perímetro
  - 3 puntos para la siguiente
  - 1 punto para la ante última figura
  - nada para la figura de menor perímetro.
- <u>variante</u> : se miden los perímetros y el número de puntos corresponde a la medida en mm del perímetro de la figura.

<u>Condiciones de yuxtaposición de piezas :</u>







2 piezas deben tener al menos un vértice común y dos lados pegados

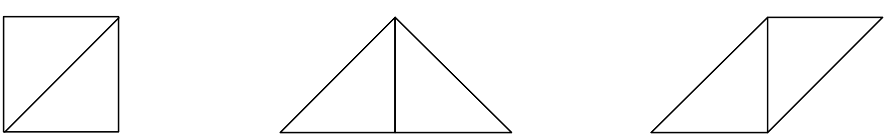
<u>Variante</u> :

- Con lotes de 4 que no son las mismas para cada jugador; esta vez las figuras no tendrán igual área y el ganador (figura de mayor perímetro) no será siempre quien tenga piezas de mayor área.

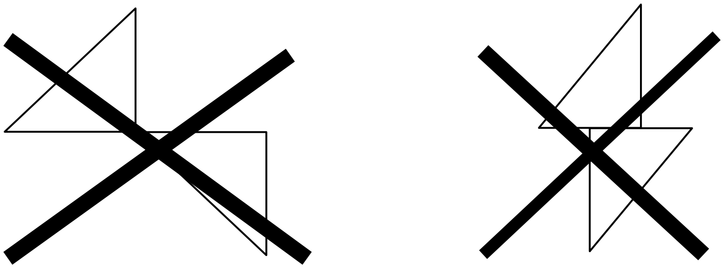
5.9 Sujeto n°9 : LES POLYVELAS.

Se realizan ensamblados de triángulos rectángulos isósceles idénticos (semi-cuadrados) por lados enteros :

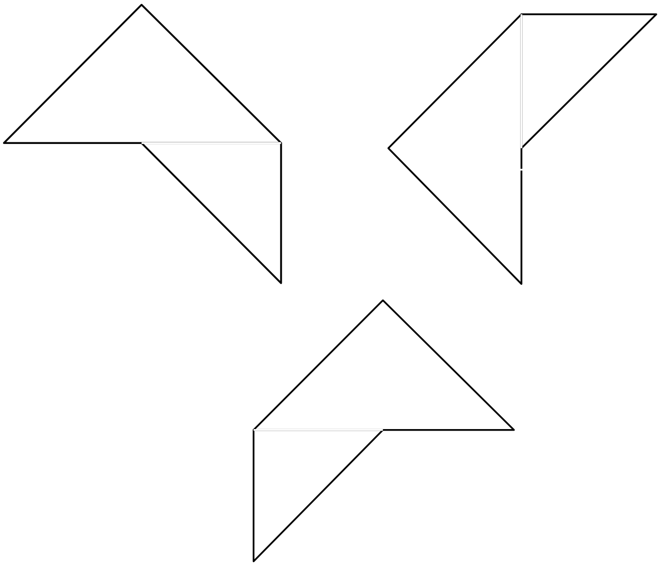
- Un lado grande con un lado grande o un lado pequeño con un lado pequeño :



- No ensamblados por ángulo o por partes de lados :

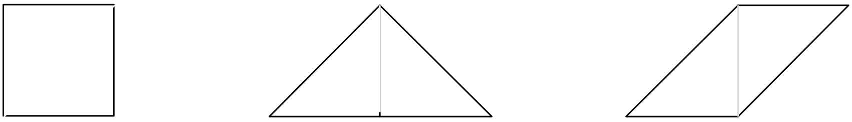


Dos piezas son consideradas como idénticas si una puede recubrir a la otra, eventualmente luego de un giro :



3 piezas idénticas

se pueden obtener 3 piezas diferentes ensamblando de esta manera 2 triángulos rectángulos isósceles ; se los llama "bivelas" :



Encontrar todos los ensambles diferentes de 3 triángulos rectángulos isósceles ("trivelas"). Utilizar papel cuadriculado para dibujar las piezas encontradas !
Se puede continuar la búsqueda con ensambles de 4 triángulos rectángulos isósceles ("tetravelas") luego de 5 ("pentavelas"), de 6 ("hexavelas"), …

Algunas pistas a seguir, pero es posible imaginar otras:
Cuál es la trivela que tiene mayor perímetro ?
Cuál es la trivela que tiene menor perímetro?
Ordenar las trivelas de manera creciente
Igual pregunta para tetravelas y pentavelas, …
Ensamblar las tetravelas para realizar una « serpiente » lo mas larga posible! Luego una serpiente que se muerda la cola…
Utilizando todas las tetravelas una sola vez y ensamblándolas por lados enteros, se puede obtener un rectángulo ?
Y todas las preguntas que deseen plantear al sujeto de estas polivelas y de los puzzles que ellas pueden permitir realizar !…

5.11 Sujeto n°11 : Estudio del juego de Oslo.

La finalidad del juego de Oslo es obtener **cualquier número entero natural no nulo**, partiendo de **4**, con ayuda de **aplicaciones sucesivas de las tres reglas siguientes**:

1. Poner un 0 al final del número (es decir multiplicar por 10);
2. Poner un 4 al final del número (es decir multiplicar por 10 y agregar 4) ;
3. Dividir por 2 si el número es par.

Ejemplo : se obtiene el número 30 con la secuencia de utilización de las reglas que se detallan debajo:
N°3 N°2 N°3 N°3 N°3 N°1 (la serie de los números es: 4, 2, 24, 12, 6, 3, 30)

Variantes :
- cambiar el número de partida (6 en lugar de 4 por ejemplo) ;
- tomar otras reglas ;
- limitar el número de aplicaciones sucesivas autorizadas para una misma regla ; …

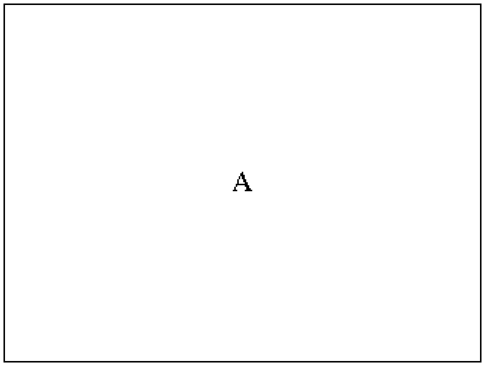
5.12 Sujeto n°12 : LAS MAQUINAS REGISTRADORAS.

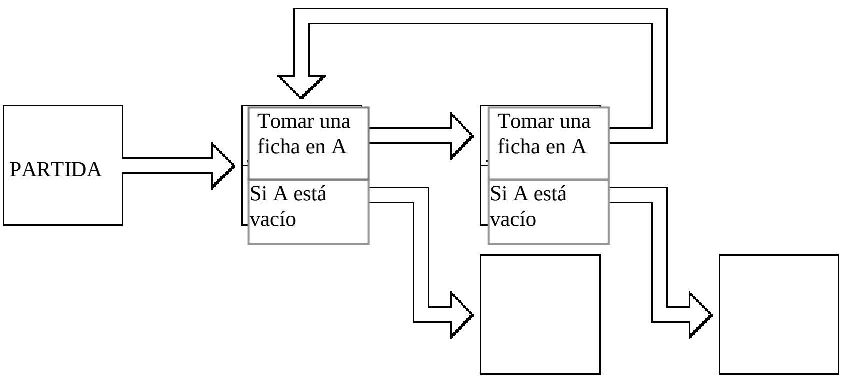
Se proponen tres máquinas que están constituídas por dos partes :

- registros : son las memorias; ubicar 8 fichas en el registro A lleva a colocar el número 8 en la memoria de A;
- una especie de juego de la oca con una partida y una llegada, en la que se desplaza un peón : hacer funcionar la máquina, es a partir de

una configuración dada por los registros, llevar el peón del casillero PARTIDA al casillero LLEGADA.

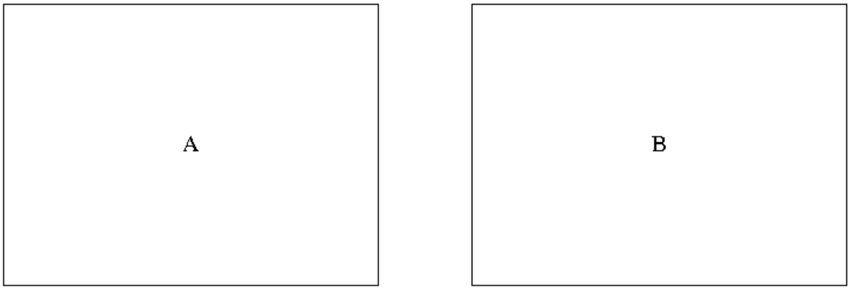
Haciendo funcionar las máquinas a partir de diversas configuraciones de partida para los registros, hay que descubrir la unión de cada una de ellas, … luego inventar nuevas !

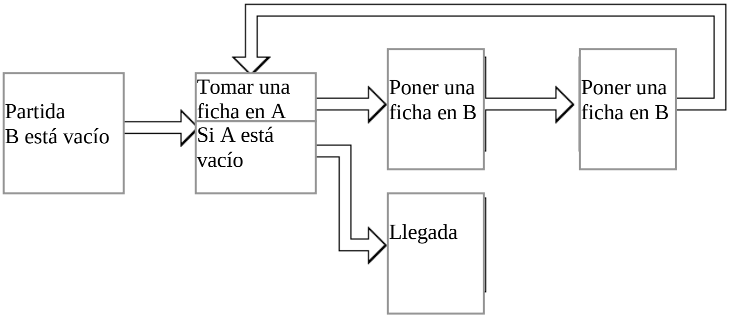


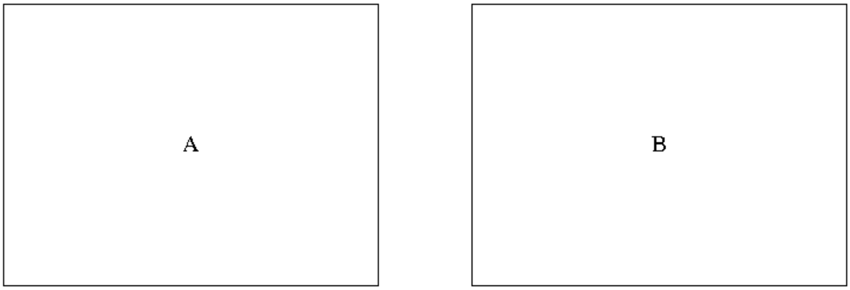


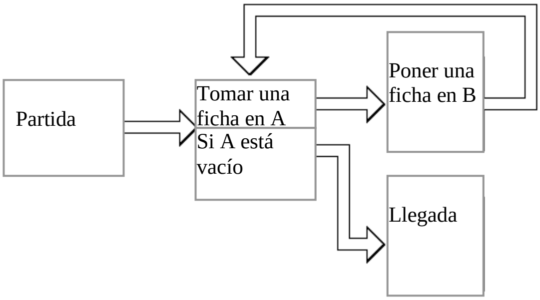
<u>Máquina n°1</u>

Máquinas n°2 y n°3









6. Bibliografía :

Arsac G. & al [1991] : *Problème ouvert et situation-problème.* Irem de Lyon.

Assude T. [1997] : *L'atelier de recherche mathématique : problèmes de temps et de mémoire,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Audin P. et Duchet P. [1989] : *La recherche mathématique à l'école: "Math en Jeans",* Séminaire de didactique des disciplines scientifiques, LSD2-IMAG, Grenoble.

Eysseric P. & al [1993] : *Le plaisir de chercher,* document vidéo, IUFM de Nice, Service audiovisuel du centre de Draguignan.

Eysseric P. & al [1996] : *Le plaisir de chercher,* in Le plaisir de chercher et autres textes ..., IUFM de Nice.

Eysseric P. [1999] : *Le plaisir de chercher,* in Repères, n° 35, avril 1999.

Lakatos I. [1976]: *Preuves et réfutations,* Hermann, 1984, Paris.

Legrand M. [1989] : *Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport à une communauté scientifique,* RDM, Vol. 9-3, p. 365 à 406, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Legrand M. [1993] : *Débat scientifique en cours de mathématiques,* Repères Irem n° 10, Topiques éditions.

Marill F. [1996] : *La communication dans la recherche mathématique à l'école,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Monteils V. [1995] : *Le plaisir de chercher,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Espacio y geometria

La enseñanza de la geometría en formación inicial

Alain Kuzniak (1995)

Este artículo presenta algunas reflexiones sobre la organización y la estructuración global de la enseñanza de la geometría para los estudiantes de PE1.

Organizamos estas reflexiones sobre la enseñanza de la geometría alrededor de temas que reagrupan los objetivos de un cierto número de actividades que se pueden encontrar fácilmente en las producciones destinadas a los formadores de profesores.

Hemos querido así evitar la frecuente confusión entre el objetivo de una actividad y su título. De hecho, más allá de saber si se estudian "los poliedros" o "la caja del pastelero", es importante conocer los objetivos y el lugar de estas actividades en la formación de los maestros.

Este documento trata un primer estado de la reflexión y el ángulo que hemos escogido, bastante ligado al programa de los cursos de PE1 (profesores en 1er año de formación), deberá posteriormente ser enriquecido y revisado con otras contribuciones y con un estudio más detenido de las actividades de formación de profesores.

1. Reflexiones sobre la geometría

a) ¿Una geometría para niños?

La geometría experimental

Así como la geometría de la secundaria no es la geometría del matemático, la de la escuela elemental tampoco lo es. Para comenzar, la geometría elemental, a diferencia del número, parece presentarse bajo diferentes facetas desde hace bastante tiempo.

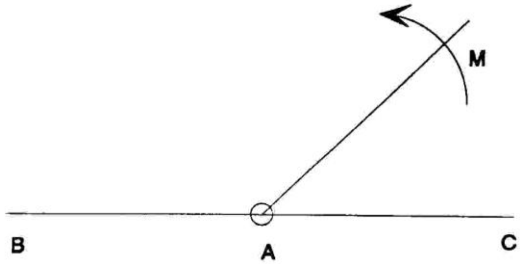
Haciendo referencia a Gonseth intentamos encontrar la relación entre estas diferentes geometrías. Según Gonseth[1], en el mejor de los casos la actividad geométrica resulta de una articulación armoniosa entre la "intuición", la "experimentación" y la "deducción".

[1] GONSETH F. (1926) 1974 *Les fondements des mathématiques*. Blanchard.

La experimentación a la que se refiere se aproxima a la de los físicos, aporta la prueba casi material de la existencia de propiedades. Gonseth cita por ejemplo, la "demostración" que hace Legendre[1] del siguiente teorema:

> *Por un punto tomado sobre una línea recta, podemos trazar una perpendicular de esta recta, y sólo una.*

Legendre (o más bien Blanchet) basa su razonamiento en la siguiente figura:



La línea recta AM comienza recostada sobre AC y gira sobre el punto A. El ángulo MAC es pequeño al comienzo y se va ampliando, contrariamente al ángulo adyacente MAB que se va reduciendo hasta llegar a 0. Es así como el ángulo MAC, que comienza siendo menor que MAB, se vuelve mayor que éste: por consiguiente habrá una posición AM de la línea recta móvil en la que estos dos ángulos serán iguales, y es evidente que habrá sólo una posición .

No sé realmente cual sería el destino de un candidato del *Capes*[2] que presentara hoy en día esta demostración, pero podemos estar seguros que jamás formaría parte de la educación nacional francesa y nunca sería, como Blanchet, profesor de clases preparatorias.

En el fragmento anterior no hay nada que corresponda a la demostración matemática como "secuencia de silogismos encadenados con rigor y continuidad". En vez de pasar al plano de la abstracción permanecemos en el mundo sensible, y en vez de acudir a la razón y a la lógica acudimos a la experiencia del mundo sensible. Esto es lo que podríamos denominar una "geometría experimental".

Si bien esta prueba dinámica se opone a las demostraciones estáticas de la geometría "abstracta", parece en cambio muy próxima a la percepción que el niño puede tener del espacio.

---

[1] De hecho se trata de una demostración de Blanchet, profesor de cursos preparatorios, en su versión moderna de la Geometría de Legendre. Esta demostración no figura en las ediciones aparecidas durante la vida de Legendre.

[2] Concurso de reclutamiento de futuros profesores de Colegio y Liceo

Otra posibilidad de prueba puede resultar del uso del plegado. Siguiendo la terminología presentada por Lebesgue[1] se trata de un plegado de segunda especie que permite cortar un ángulo en dos partes iguales.
Así sea por plegado o por "movimiento virtual", la construcción y la percepción son el alma de una geometría no deductiva, de tipo experimental. El razonamiento que privilegia esta aproximación es el razonamiento de tipo constructivo señalado también por J.F. Richard[2] en su reflexión sobre la resolución de problemas.

El rol del punto

Otro aspecto importante de la geometría concierne la unidad de base que funda la geometría elemental, y en particular la naturaleza y la importancia del punto. Éste puede ser tanto la noción de base de toda la geometría axiomática, como el resultado de la geometría del mundo sensible.
En esta segunda perspectiva, podemos retomar nuevamente a Legendre, citado nuevamente por Gonseth, que define su geometría a partir de los volúmenes de la siguiente manera:

> *"Todo cuerpo ocupa, en el espacio indefinido, un lugar determinado que se llama volumen.*
> *La superficie de un cuerpo es el límite que lo separa del espacio que lo rodea.*
> *El lugar donde las superficies de dos cuerpos se encuentran se llama línea.*
> *Un punto es un lugar donde dos líneas se cruzan."*

La noción de punto no es por lo tanto aquí la noción más simple sino que por el contrario aparece como el resultado de una desviación poco evidente. Notemos también que la recta no se define en esta aproximación del punto. El punto viene a ser el resultado del camino complejo que parte del mundo sensible para llegar hasta el mundo abstracto de la geometría.
No hay que creer que una geometría axiomática conforme al modelo de Hilbert pueda basarse solamente en el punto, y Whitehead edificó una geometría de este tipo a partir de la noción elemental de volumen.
En la geometría del niño el punto (extremidad de segmentos o intersección de líneas) no es una noción primera sino una noción construída que sigue de cerca la génesis que propone Legendre.

Conclusión

La geometría elemental del niño no incorpora la dimensión deductiva y parece reposar en la intuición y la experimentación. Constituye el tiempo de preparación para la construcción de la geometría que realiza el individuo que aprende.

---

[1] LEBESGUE H. (1950) 1987 *Leçons sur les constructions géométriques*. Editions Jacques Gabay

[2] RICHARD J.F. 1984 *La construction de la représentation du problème* Revue de Psychologie Française 1984, 29, 3/4.

Esta geometría parte de las formas y los volúmenes y conduce gradualmente a la noción de punto. Privilegia una aproximación constructiva del espacio y de algunos objetos geométricos.
Se trata de desarrollar imágenes y representaciones mentales gracias a numerosos experimentos con los objetos. La etapa posterior a este período de preparación es la aproximación a la geometría deductiva basada en el punto.
Uno de los puntos clave de la formación será la articulación armoniosa de estas dos fases. Sin embargo todo parece indicar, particularmente al analizar ejercicios de evaluación realizados al principio del 6to año (alumnos de 11 años), que hay una ruptura brutal del contrato entre estas dos concepciones en el programa escolar.

b) ¿ Qué geometría enseñar a los Profesores de escuela?

El futuro profesor de escuela, inclusive cuando no tiene un pasado matemático sobresaliente, no se sitúa en el período preliminar de la actividad geométrica que definimos anteriormente. Concibe la geometría como el estudio deductivo de un cierto número de propiedades de conjuntos del espacio.
Este espacio se convierte en un espacio global y homogéneo desde el punto de vista de un observador exterior. Se trata de una geometría puntual donde reina la deducción lógica y donde lo visto y lo experimentado han perdido la prioridad; por lo menos en la demostración, que es la forma estándar de la actividad.
El formador de profesores tendrá que enfocarse por lo menos en cuatro objetivos diferentes:

1. Llevar al estudiante a considerar la existencia de diferentes formas de actividad geométrica, particularmente aquella que se basa en la intuición y la experimentación.
2. Desarrollar su conocimiento y su experiencia sobre un cierto número de objetos geométricos.
3. Volver a darle sentido a la actividad deductiva.
4. Ayudarle a planificar y a organizar su enseñanza de la geometría.

Aprender a enseñar la geometría y aprender la geometría

En la práctica comprobamos que los formadores de profesores intentan simultáneamente modificar la percepción de la geometría que tienen los estudiantes, intentando presentarles conocimientos sobre los objetos geométricos (poliedros, figuras planas) y esto a través de situaciones de enseñanza que se parecen bastante a las de las clases de la escuela elemental. Bajo esta concepción, se privilegian las estrategias de homología como lo ilustra de manera interesante la situación de Jean Vincent sobre los poliedros.
Estas estrategias de homología se apoyan en el modelo constructivista consciente que tiene el formador. Se definen con dos tipos de semejanza:

- la semejanza entre la gestión pedagógica que el formador predicada y la que pone en ejecución para enseñar a sus estudiantes.
- la semejanza entre las situaciones propuestas a los estudiantes y a los niños.

Existen varias elecciones posibles respecto a las situaciones propuestas:

a)Los niños y los futuros profesores parten de la misma situación inicial.

b)La situación que se le presenta a los adultos es ligeramente más compleja pero se puede transferir fácilmente.

c) La situación que se le presenta a los estudiantes no podría transferirse fácilmente a la escuela elemental.

De hecho, la elección de estas situaciones depende de la manera en la que el formador vea las dificultades vinculadas a la noción abordada. En nuestra tesis[1] estudiamos las dos siguientes hipótesis.

Una situación simple permite una clara toma de consciencia del procedimiento pedagógico que se sigue, pero al mismo tiempo corre el riesgo de infantilizar al estudiante y/o de provocar un rechazo.

Una situación más compleja transmite a los estudiantes un saber matemático que no es trivial, pero la novedad de este saber puede ocultar el procedimiento pedagógico que se sigue.

Cuando tratamos de hacer que el profesor estudiante deje de lado su condición de alumno para hacerle adquirir el punto de vista del profesor, encontramos las estrategias basadas en la transposición.

Estas estrategias intentan provocar un distanciamiento respecto a la práctica transponiendo un saber sabio de tipo didáctico. El formador puede utilizar materiales de soporte como el análisis de errores y el análisis de documentos pedagógicos.

Otra perspectiva más ambiciosa, que privilegia el procedimiento pedagógico, es la propuesta por G. Le Poche. Utilizando un video que dejó el registro de la actividad que el formador llevó a cabo con los estudiantes, trata de alcanzar un distanciamiento efectivo retomando esta actividad. Esto le da una realidad más consistente al "paso al costado" que debe hacerse para que el estudiante tome la posición del maestro.

Volver a darle sentido a la actividad deductiva en la geometría

Otro aspecto importante de la formación es el sentido que es menester dar a la actividad deductiva y a la demostración en geometría.

El examen realizado al final de primer año de la formación favorece un trabajo bajo este enfoque, pero es fundamental determinar bien los temas que se presentan como pretextos para la demostración o la prueba.

Éstos no deben ser definidos en función de su situación en el programa escolar (en la secundaria) sino en función de su carácter ejemplar e interesante para la formación profesional de los estudiantes.

Algunas pistas que pueden considerarse:

- problemas de enumeración.
- problemas llamados "de arquitecto" o "de agrimensor" que normalmente están relacionados con las medidas.

[1] KUZNIAK A. 1994, *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*. Thèse, Université de Paris VII.

- problemas relacionados con la búsqueda de lugares geométricos.
- problemas que se derivan de construcciones que llevan a cuestionar la validez de las observaciones realizadas (el círculo de los nueve puntos, puntos de convergencia insospechados).

Ciertos formadores señalan una “resistencia” de los estudiantes a esta aproximación basada en las construcciones y los plegados. Este punto merecería un análisis y una confirmación.

2. Tres grandes temas de estructuración de la enseñanza de la geometría en la formación de los maestros

a) Espacio(s) de la geometría elemental

Esta parte nos parece problemática en la medida en que reina una cierta confusión provocada por los diferentes enfoques del espacio dados por filósofos, psicólogos y matemáticos. Se les da el mismo nombre a nociones completamente diferentes.

Debe quedar claro que no queremos cuestionar esta aproximación pluralista de un tema que es en esencia multidisciplinario, sólo queremos intentar aclarar lo proveniente de las matemáticas y obligarnos a emplear términos matemáticos sólo en su acepción matemática más usual.

Pensamos particularmente aquí en los espacios proyectivos y afines. Este esfuerzo de clarificación y de precisión nos parece importante tanto para los formadores de profesores como para sus estudiantes.

Los tomos de matemáticas con tendencias didácticas o pedagógicas introducen rápidamente varios tipos de espacios geométricos. Principalmente se trata de los espacios topológicos, proyectivos, afines y euclidianos. Se encuentran también en ocasiones el espacio cartesiano y el espacio de similitudes.

Esta presentación está basada en una construcción axiomática que no tiene en cuenta la génesis histórica (más bien inversa) de estas nociones. Este orden y la elección de los términos parece referirse más a Piaget y a la génesis psicológica del espacio en el niño.

Es imposible ignorar los aportes de Piaget en el marco de la formación en PE1, pero esto no debe conducirnos a equivocar el sentido matemático de las palabras empleadas.

Por otro lado, el pensamiento matemático moderno sobre la geometría se ha construído bajo la influencia fundamental del programa de Erlangen (definido en 1872 por F. Klein). Bajo esta concepción, la geometría deja de ser el estudio de un espacio dotado de ciertas propiedades para ser lo dado por un grupo de biyecciones de un conjunto substrato.

El objeto de la geometría es el estudio de subconjuntos de E “desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo”. Bajo esta perspectiva, la idea de invariante es fundamental.

En la formación de los maestros, nos parece importante preservar esta idea de invariante, además que parece no estar en contradicción con los aportes de la psicología genética.
Analizaremos rápidamente los diferentes espacios geométricos que ponen en juego estas invariantes.

El espacio topológico

La epistemología[1] de este conjunto es interesante para el tema que nos ocupa. Primero, debemos notar que a diferencia del espacio euclidiano, los matemáticos no ven este espacio como un espacio propiamente geométrico.
Por otro lado, la noción fundamental de *abierto*, conlleva una tentativa de definición de la localidad, pero ésta resulta indeterminada y no está vinculada a la noción de punto. Esta definición es asimétrica: la unión de un número cualquiera de abiertos es un abierto, pero en cambio sólo la intersección de un conjunto finito de abiertos sigue siendo un elemento del conjunto.
En consecuencia, al menos en los espacios separados, el punto no forma parte del conjunto de base. La reflexión topológica no se basa en el punto sino que se construye sobre la noción local de vecindad. El carácter global se define por extensión (reunión) de localidades (los abiertos).
Las propiedades topológicas serán entonces aquellas que permanecen invariables para las aplicaciones contínuas (aplicaciones que preservan la localidad). Se trata, por ejemplo, de nociones como exterior, interior, vecindad (por definición), o conexión.

El espacio proyectivo y el espacio afín

El lector puede referirse a los tomos clásicos de geometría de Berger o de Frenkel para encontrar las definiciones precisas y claras de estos espacios[2]
Simplemente notemos que:

- Se trata de espacios definidos a partir del espacio vectorial por una operación sobre un conjunto (espacio afín) o por el paso al cociente (espacio proyectivo). Son pues espacios “algebrizados” para permitir operaciones.
- Las “definiciones axiomáticas” propias (que permiten definir el espacio directamente a partir de las rectas y de las propiedades de conjuntos de intersección) existen pero no forman parte de la geometría elemental.
- En la práctica elemental usual, el espacio proyectivo “es visto” sobre todo como el completo proyectivo del espacio afín que evita los problemas de paralelismo.
- De hecho es imposible ver $P^2(R)$ en el espacio R^3 sin sumergirnos en singularidades como la superficie de Boy.

[1] SALANSKIS J.M. 1991 *L'herméneutique formelle. L'infini, Le continu, L'espace*. Editions du C.N.R.S.
[2] Una referencia más reciente puede ser : AUDIN M., Géométrie Belin

Las nociones fundamentales que aparecen aquí son de alineamiento, paralelismo e intersección de rectas. Teniendo en cuenta los conocimientos de los estudiantes, el formador corre un gran riesgo de sufrir el efecto *Jourdain*[1]
Hablará entonces de propiedades afines cuando el estudiante sólo ve (legítimamente) paralelismo. ¿Qué pueden representar para un estudiante polivalente cuya especialidad no son las matemáticas las nociones de espacio afín y de espacio proyectivo?

El espacio euclidiano o métrico

Se trata de hecho del espacio afín euclidiano, es decir el espacio afín cuyo espacio vectorial subyacente es euclidiano. La noción fundamental es entonces la de producto escalar; dicha noción permite definir una distancia sobre el espacio afín asociado, que se convierte de esta manera en un espacio métrico.
La existencia del producto escalar permite darle sentido a la ortogonalidad y a la noción de ángulo a través del grupo ortogonal. Es además el espacio que permite definir todas las transformaciones geométricas elementales. De cierta manera se trata del espacio paradigmático de toda geometría.
Nuevamente, la transposición que debe operar el formador de profesores de escuela para pasar de este *saber sabio** a un saber que sea a la vez accesible para el nivel de sus estudiantes y operatorio para su futuro oficio parece hacer prácticamente inevitable el *efecto Jourdain**.
La referencia teórica explica poco a los estudiantes y parece dotarlos más bien de una cubierta lingüística inútilmente pedante. Esta transposición nos parece imposible si nos limitamos al dominio de las matemáticas, es en cambio posible, pero delicada, si se trata de llamar la atención del estudiante hacia algunas nociones fundamentales y elementales de las matemáticas que ayuden a definir el espacio de la geometría.
En conclusión, parece necesario presentar las invariantes fundamentales de la geometría que mencionamos anteriormente evitando formalismos inútiles pero utilizando los términos académicos. Sobre todo para ayudar a identificar ciertas clases de invariantes topológicas o métricas. Definitivamente, los aspectos proyectivo y afín parecen *a priori** mucho menos pertinentes.
En la formación, esto conduce al formador de profesores a la *institucionalización** fuerte de estas nociones y a hacer uso de una estrategia transpositiva sin apoyarse (según nuestra experiencia) en una situación fundamental de formación que podría preparar un aporte relativamente magistral.
Los puntos que aparecen como fundamentales a señalar para los estudiantes son entonces los siguientes:

- invariantes topológicas simples.
- alineaciones

[1] Este efecto de contrato al que Brousseau se refiere, hace alusión a un personaje de Molière que habla en prosa sin saberlo en la obra *El Burgués Gentilhombre*. En el caso de de la enseñanza, el alumno manipula ingenuamente los objetos mientras que el profesor se dirige a un conocimiento: el alumno coloreará a conciencia una cenefa mientras el profesor se fija en el estudio de un grupo de transformaciones.

- paralelismo
- ortogonalidad y la noción de ángulo- medida

Según los miembros de nuestro grupo de trabajo, a veces se descuidan estos aspectos que forman parte de los espacios geométricos, durante la transmisión práctica a los alumnos. En efecto, la ideología dominante que privilegia una enseñanza que parte de lo complejo descuida la enseñanza directa de estas invariantes.

El quiebre continuo - discreto: importancia de las redes

Seremos muy breves respecto a esta oposición fundamental. Anteriormente llamamos la atención sobre la aparición del punto como resultado de una construcción del espacio que partía del volumen. Esta construcción es común en el niño y a la génesis histórica matemática de estas nociones, y se opone a la génesis axiomática que hoy en día se privilegia en la enseñanza de la geometría.

Como lo afirma René Thom (incluso intenta presentar una demostración), lo contínuo es ontológicamente anterior a lo discreto. Es decir que es más fácil concebir lo discreto a partir de lo continuo que a partir de lo inverso. La línea quebrada se concibe como un accidente de lo continuo, mientras que inversamente una entidad discreta no puede aceptar un accidente contínuo sin ser ella misma localmente contínua.

Esta concepción intuitiva permite construír la noción de punto como accidente de lo contínuo. Esta discretización necesaria del espacio pasará, en nuestra opinión, por el uso y la enseñanza de todo tipo de redes (la malla cuadrada siendo el más importante, pero no el único). El punto se presenta entonces simultáneamente relacionado a las nociones de mallas y de nudos de la red.

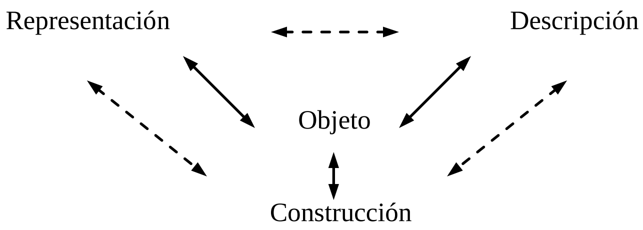
Las redes permiten igualmente la codificación de los desplazamientos y la representación de la idea de dirección. Finalmente, permiten pasar progresivamente de lo local a lo global sin privilegiar ninguna casilla de la red.

Los formadores utilizan redes de todo tipo, en vez de servirse de soportes vírgenes para introducir la noción de *variable didáctica**. La construcción de figuras sobre diferentes soportes pone en evidencia las diferencias de aprendizaje que pueden estar vinculadas al mismo enunciado cuando ciertos parámetros de la situación varían. Parece que las redes se enseñan principalmente en segundo ciclo (alumnos 8 a 10 años) , pero su uso y sobre todo su construcción durante el tercer ciclo (alumnos de 11 y 12 años) podría permitir remediar la carencia de actividades sobre el paralelismo y la ortogonalidad a la que hicimos referencia anteriormente.

b) Actividades sobre el objeto

En el siguiente esquema describimos el conjunto del proceso de estudio de un objeto tal como es visto por las instrucciones oficiales:

Uno de los objetivos esenciales de la formación es permitir a los estudiantes estructurar, a través de este prisma, su enseñanza de un cierto número de conjuntos geométricos. Por otro lado, los formadores parecen (hipótesis que debe ser confirmada) retener este aspecto de la geometría como inicio de la clase de geometría, y a menudo lo hacen a través de actividades sobre los objetos.



Veremos entonces algunos aspectos de estas actividades.

Estudio de objetos geométricos particulares.

Diferentes figuras geométricas son estudiadas detalladamente en la formación de los maestros. Se trata para los formadores de presentar los diferentes aspectos de la aproximación a un objeto geométrico en la escuela elemental. Las actividades se apoyan entonces en la representación, la descripción y la construcción de diferentes figuras

- Actividades de representación a partir de las dimensiones del cubo o de las vistas del octaedro.
- Actividades de descripción como la del juego del retrato.
- Actividades de construcción, sobre todo de poliedros, con un material específico, o a partir de plegados de construcciones con papel.

Estos estudios apuntan a la vez a un saber matemático y a un saber pedagógico. Para precisar mejor el procedimiento pedagógico esperado, es posible insistir en dos grandes tipos de actividades pedagógicas frecuentes en geometría: las actividades de emisión/recepción y las actividades de clasificación de corpus.

Actividades de emisión/recepción

Se trata de poner en ejecución la descripción de un objeto para construirlo o para reconocerlo gracias a la emisión de mensajes escritos.
Un ejemplo de estas actividades es el que propone Jeanne Bolon[1] sobre la construcción de cuadriláteros en la cual se organiza una actividad de emisión/ recepción con los estudiantes.
Estas actividades también son una fuente de trabajos de alumnos que pueden ser analizados en la formación o al momento del concurso.

[1] Referirse a *Géométrie, dictée de figures* (PLOT n° 48).
Por ejemplo: "Presentar una instrucción que le permita al grupo receptor construir un rectángulo de 4 por 3 centímetros. El mensaje no debe incluir el término *rectángulo*".

La clasificación de cuerpo de objetos.

En este caso se trata de volver a descubrir (o descubrir) las propiedades de las figuras geométricas que permiten organizar el conocimiento acerca de estas figuras.

El enfoque privilegiado *a priori* no es axiomático sino que opera sobre los conjuntos que permite organizar, como los sólidos o las figuras planas.

Un gran número de informes de este tipo de actividades de formación se pueden encontrar en los trabajos del Copirelem[1] El problema del registro escrito y de la institucionalización en geometría nos parece demasiado descuidado, seguramente porque estas actividades son tratadas a menudo a modo de homología. Podemos sencillamente señalar las tarjetas de identidad o los diccionarios de geometría.

3. Ayudas para la programación de una clase de geometría

Para concluir, abordaremos brevemente un punto que nos parece ha sido descuidado, al menos en las proposiciones de actividades de formación provenientes del Copirelem.

Se trata de la estructuración global de la enseñanza de la geometría. En efecto, el principal objeto de la formación en PE1 no es, (o no es solamente) la transmisión de un saber matemático sobre la geometría. También hay que ayudar a los estudiantes a situar y a planificar su propia enseñanza de la geometría.

Las estrategias de homología apuntan a una especie de transferencia automática por imitación de la formación a la enseñanza. Descuidan los fenómenos de transposición realizados por los estudiantes.

Según nuestro punto de vista, la reflexión sobre la programación de la enseñanza de este objeto complejo que es la geometría, debe permitir un distanciamiento que dé lugar a la reflexión. Frecuentemente, este aspecto esencial es dejado a la iniciativa del estudiante; éste toma entonces como referencia la progresión propuesta por los manuales, o a las proposiciones de *"Babin"* que se confunden a menudo con las instrucciones oficiales.

Proponemos aquí nuestra propia aproximación de este problema durante la formación.

Nuestro objetivo no es transmitir el modelo de una progresión tipo, sino hacer que el estudiante se sensibilice ante una noción menos rígida, la de programación por temas. La estructuración que se le propone a los estudiantes parte del plan de clase de geometría que les ha sido presentado durante el módulo.

La actividad propuesta es una actividad de síntesis que se realiza al final de módulo y que también debe permitir que los estudiantes se familiaricen con una cierta forma de visión de la enseñanza de la geometría.

Los estudiantes, divididos en grupos, deben completar una tabla muy sintética que ha sido obtenida a partir de la observación de la progresión en diferentes manuales (tres por grado del 1ro al 5to año). La tarea consiste en anotar el lugar

[1] N. del T. Copirelem : Coloquio permanente de los institutos de investigación de la enseñanza de las matemáticas (IREM) sobre la enseñanza elemental.

y la importancia que se le reserva a los diferentes tipos de actividades geométricas que aparecen en el módulo de formación.

1) Actividades que se refieren al espacio y a sus diferentes invariantes (naturaleza de estas invariantes y tipo de soportes o materiales utilizados).

2) Actividades centradas en el estudio de un objeto particular precisando este objeto y el tipo de aproximación que recuerdan (descripción, representación).

3) Actividades sobre las transformaciones geométricas.

Los estudiantes también deben observar los roles respectivos del plano y del espacio tridimensional, el rol de las construcciones y de los instrumentos de geometría, la idea de lo simple y lo complejo.

Finalmente, deben escoger una actividad que consideran interesante o problemática.

Esta actividad no consiste en descubrir los manuales que los estudiantes ya conocen. La síntesis que se realiza al final de la sesión permite insistir sobre la idea de un programa global de geometría en la escuela elemental y el hecho que las reagrupaciones propuestas por los manuales no son necesariamente obligatorias.

El objetivo del profesor debe ser no descuidar ciertos aspectos de la geometría. La elección de los objetos estudiados depende del nivel de los alumnos y de su pasado, esto con el fin de evitar ciertas tendencias que se observan frecuentemente en la escuela (trabajos sobre el cubo o, sobre todo, el retomar constantemente las mismas actividades sobre la simetría).

Plan de un curso de geometría en PE

	Actividades propuestas a los estudiantes.
Introducción	
Rol de la geometría.	
1) Sociedad, historia de las matemáticas	
• medida	
• período clásico	*El triángulo de Pascal y*
• período contemporáneo	*los fractales*
2) En la escuela primaria	
I) Espacios de la geometría	
1) Características del espacio en matemáticas.	
2) Diferentes tipos de espacio de representación para el niño, la clasificación por invariantes	
• topológico	
• alineaciones	
• paralelismo	*Los rompecabezas*
• ortogonalidad	*Las rayuelas*
• medida	*Estudio del material estructurado*
3) Importancia de las redes	
• noción de variable didáctica.	
• discretización del espacio.	*Estudio de trabajos de niños*
II) Actividades acerca de los objetos geométricos	
1) Reproducir, describir, representar y construir.	
2) Dos grandes tipos de situaciones	*El calidociclo*
pedagógicas	*El octaedro*
a) Situaciones de emisión recepción.	
b) Situaciones de clasificación de corpus.	*Descripción de cuadriláteros*
	los poliedros
III) Las relaciones entre objetos: transformaciones geométricas	
1) Búsqueda de invariantes en las transformaciones	
• alineaciones.	
• ángulos	
• isometrías	*Transformaciones "conchoidales" y*
2) Estudio de la simetría.	*"cisoidales"*
	Cenefas
IV) Ayudas para perfeccionar una	*Trabajos a partir del*
estructuración de progresión en geometría.	*Folleto : « Suivi Scientifique 6ème »*
	Análisis de manuales

Conjuntos de triángulos equiláteros

Catherine Houdement – Marie-Lise Peltier (1991)

Esta es una propuesta de actividad para profesores de escuela, en formación inicial o contínua. Se tratan aquí, cuestiones geométricas relativas a los polígonos, a la simetría axial y a la simetría central y cuestiones de medida relativas al área y al perímetro de figuras planas. Esta situación permite por homología reflexionar sobre la construcción de una secuencia de aprendizaje para alumnos de 3er ciclo (alumnos de 11-12 años).

1-OBJETIVOS

a) Objetivos matemáticos

- Reactivar en los profesores en formación los conocimientos sobre polígono, área, perímetro, convexidad, simetría axial, simetría central, sin realizar una revisión previa de estos conocimientos.

- Ilustrar la emergencia de una propiedad matemática por la selección entre objetos que tienen esta propiedad y objetos que no la tienen.

b) Objetivos didácticos

- Mostrar una primera utilidad del trabajo en grupo: intercambio y confrontación con vistas a constituír un material común de trabajo.

- Remarcar la noción de cuadro en la explotación hecha de las clasificaciones: cuadro numérico (enumeración, medida) y cuadro geométrico.

2-ACTIVIDAD 1

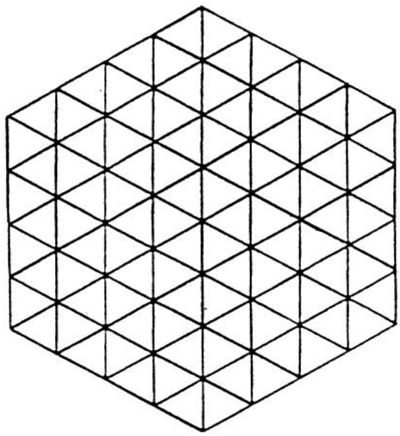
Finalidad: constitución de un stock de figuras planas obtenidas por conjuntos de triángulos equiláteros.

Organización: juego en parejas.

Material para cada pareja
- Grilla hexagonal de 96 triángulos equiláteros de 3 cm de lado
- Dados clásicos
- Lápices de color
- Tijeras

a) Fase 1

Consigna 1



" Ambos integrantes disponen de una grilla constituída por compartimentos triangulares. Ustedes deciden, arrojando el dado, cual es el jugador que va a comenzar; luego alternativamente lanzan el dado y colorean tantos compartimentos adyacentes como número de puntos indica el dado, tratando de formar el máximo de conjuntos diferentes. Si uno no puede jugar, pasa el turno.
Los conjuntos adyacentes obtenidos por lanzamientos diferentes de dados deben ser coloreados diferentes. El que no puede jugar pasa su turno.
El ganador de esta fase es el que acaba primero en colorear la grilla. "

Observaciones

1 - El profesor puede pedir a los jugadores que completen una hoja de ruta con los puntos obtenidos por cada uno punteando los que no pudieron ser jugados, esto con el fin de permitir una comprobación al final de la partida.

2 - También puede pedirles a los jugadores poner un signo para identificar los conjuntos que ellos mismos colorearon (por la elección de colores atribuídos a cada uno por ejemplo).

3 - Observamos diferentes estrategias entre los profesores en formación: algunos comienzan desde un borde, otros del centro; algunos colaboran, otros juegan de manera dispersa hasta que comprueban que esta estrategia es bloquea a ambos jugadores.

b) Fase 2

Objetivo
Distinguir la superposición sin inversión (diremos " las mismas formas " para designar formas que pueden superponerse) de la superposición después de la inversión (hablaremos entonces de " formas simétricas " o de " formas gemelas").

Consigna 2
" cuando la grilla está completamente coloreada, recortar las diferentes conjuntos y guardar un solo ejemplar de cada conjunto (dos conjuntos que solo pueden superponerse luego de la inversión están consideradas como distintos).
El grupo ganador de esta fase es el que obtuvo el máximo de conjuntos diferentes ".

Observación
En esta fase, el hecho de que los conjuntos hayan sido coloreados facilita la distinción entre superposiciones directas y superposiciones después de la inversión.

c) Fase 3

Objetivos
- Aplicar nuevamente el análisis precedente: distinción entre " las mismas formas " y " las formas simétricas ".
- Aumentar el stock de formas.

Consigna 3
" En grupos de 4 (luego de 8),comparen las formas obtenidas y conserven sólo un ejemplar de cada tipo. "

Observación
Al final de esta fase, el profesor puede contabilizar el número de conjuntos distintos de cada grupo. También puede pedirle a cada grupo constituir un segundo juego para tener más material más tarde.

Es interesante señalar el hecho que luego de cada reagrupación el número de conjuntos distintos aumenta, pero la búsqueda exhaustiva de todas los conjuntos posibles no es la finalidad de la actividad.

3-ACTIVIDAD 2

Finalidad
Hacer emerger un cierto número de propiedades de los conjuntos obtenidos.

a) Desarrollo

Material
El juego de piezas obtenidas durante el desarrollo de la consigna 3.

Organización
En grupos de cuatro (o de ocho).

Consigna

" con el juego de piezas que obtuvieron anteriormente, ustedes van a proponer diversas clasificaciones de estas piezas tratando de precisar el criterio que les permite realizar esta clasificación.
En cada grupo, un secretario anota los criterios utilizados y las clasificaciones correspondientes. "

Observación
El profesor indica las condiciones requeridas para que sea una clasificación efectiva.

Puesta en común
Cada grupo presenta las clasificaciones realizadas.

b) Las diversas clasificaciones: análisis y exploración en términos de propiedades matemáticas.

1) La **clasificación por el número de triángulos** que constituye el conjunto permite remarcar la noción de área (si se escoge el triángulo de base como unidad de área, la medida del área del conjunto es el número de triángulos utilizados).

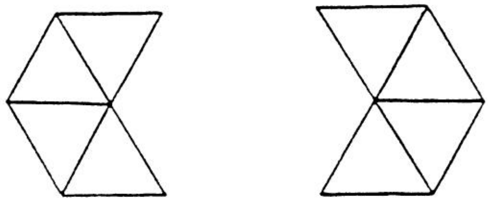
2) La **clasificación por el número de lados** permite precisar el origen del vocabulario vinculado a los polígonos, asociarlo con la clasificación por el número de vértices y recordar la propiedad: para los polígonos, el número de vértices es igual al número de lados.

3) La **clasificación por el número de lados de triángulos de base** en el contorno del conjunto permite puntualizar la noción de perímetro y diferenciar numéricamente las nociones de perímetro y de área. Comprobamos en efecto que dos conjuntos pueden tener el mismo perímetro sin tener igual área, de donde surge un nuevo interrogante: ¿ podemos encontrar conjuntos que tengan igual área y perímetros diferentes; conjuntos que tengan igual área, el mismo perímetro pero que sean de formas diferentes?

4) Los conjuntos que contienen figuras que no se pueden **superponer** directamente, sino luego de ser **invertidas**. Dos tales figuras serán designadas “figuras gemelas” .
La clasificación de los conjuntos según la existencia o no de figuras gemelas se trabaja de manera colectiva aunque no haya sido propuesto por los diferentes grupos.

Consigna
"Clasificar las figuras en dos grupos: figuras que tienen su gemela y las otras; y para cada figura que no tenga su gemela en el stock de sus piezas, busquen si es posible construírla "

Caractarísticas que se constatan
- Dos figuras gemelas pueden superponerse solamente después de ser invertidas. Esto no es evidente para todos los profesores; por ejemplo, los conjuntos que figuran abajo les parecen gemelos mientras que se superponen sin inversión.



- Cuando dos figuras son gemelas, podemos situarlas en el plano de tal modo que existe una simetría axial que transforma la primera en la segunda (y viceversa).

- Ciertas figuras no admiten una gemela.

Consigna
"Descubran cuáles son las particularidades de las figuras que no admiten figura gemela. "

Se trata aquí de descubrir la noción de eje de simetría: las figuras que no tienen gemelas admiten por lo menos un eje de simetría.

5) Esta fase puede ser prolongada por una **clasificación según el número de ejes de simetría.**

6) **Otras clasificaciones**, propuestas o impuestas:
- figuras convexas, figuras no convexas;
- figuras que tienen un centro de simetría (coinciden exactamente con su impresión después de una media vuelta), puesta en relación con la paridad del número de ejes de simetría;
- conjuntos que realizan o no un patron de sólido (selección por anticipación, *validación** eventual por construcción).

c) La institutionalización* escogida

- La simetría axial

Noción de eje de simetría, noción de invariante (figuras que tienen ejes de simetría), aspecto *estático** de la simetría axial.

Noción de transformación (figuras que se deducen una de la otra por simetría axial), aspecto *dinámico** de la simetría axial..

Relación de estos dos aspectos: una figura posee un eje de simetría **d** si y solo si es invariante por simetría axial de eje **d**.

- Vínculo con la simetría central.

d) Breve análisis didáctico

- El aspecto lúdico de la fase 1 permite entrar rápidamente en el análisis de las figuras obtenidas.
- La construcción del material por los profesores en formación permite una apropiación casi inmediata de las propiedades de las figuras obtenidas.
- La movilidad de las figuras estudiadas permite descubrir las propiedades intrínsecas de las figuras independientemente de su orientación en el plano.
- Las actividades de clasificación dicotómica tienen por objeto la emergencia de ciertos conceptos (convexidad, existencia de ejes de simetría). Reencontramos aquí un punto de vista piagetiano de la emergencia de ciertos conceptos.
- El material se presta bien a una distinción área perímetro de las figuras planas y permite remarcar la importancia de la elección de las unidades de medida para efectuar comparaciones.

El estudio posterior del desarrollo de la sesión permite puntualizar los diferentes roles de las fases de *acción**, de *formulación**, de *institucionalización** en el proceso de aprendizaje.

e) Trabajo individual

- **Redactar una ficha de preparación** de actividades para los alumnos a partir de conjuntos de figuras (cuadrados, triángulos rectángulos isósceles o triángulos equiláteros).

- **Construír un juego de cartas** que permita un trabajo de reconocimiento de formas a partir de los conjuntos obtenidos (el juego está constituído por conjuntos gemelos en posiciones variadas y por un conjunto que no tiene su gemelo). Proponer reglas de juego diversas (juego de pares, juego de memoria, juego del intruso, etc.).

4 - ACTIVIDAD 3

Prolongamientos posibles con lenguaje informático LOGO

Objetivos
- Estudio de triángulos regulares; propiedades angulares.
- Comparación de unidades de longitud.

Reproducción de conjuntos en la pantalla

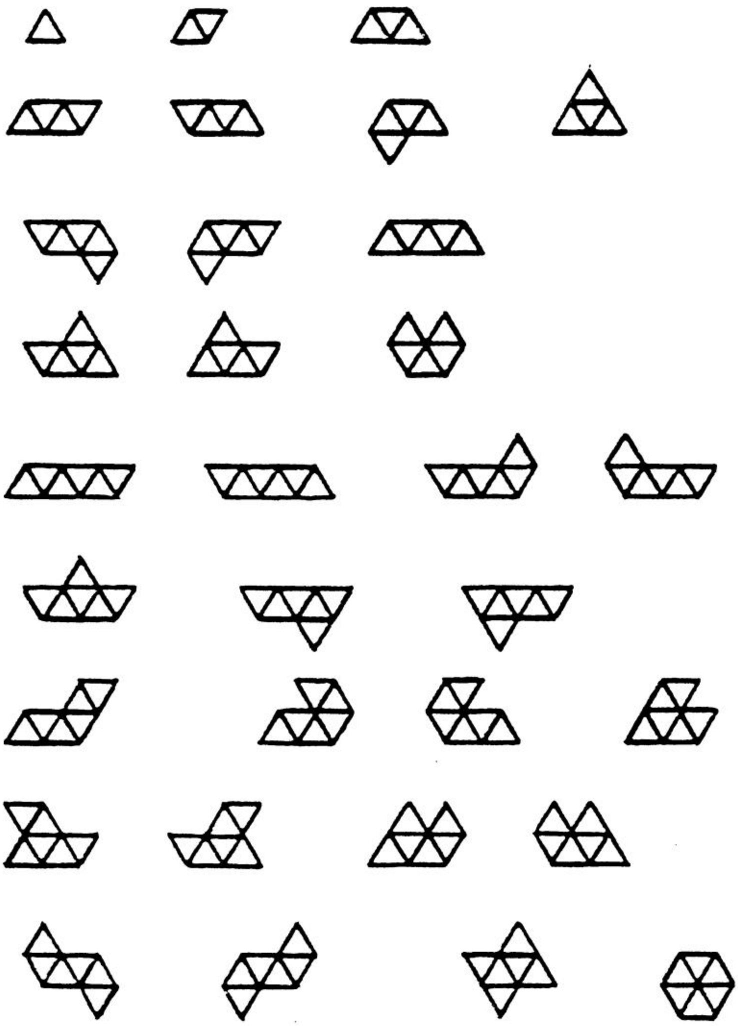
- En modo directo con las primitivas usuales.
- En modo directo con la primitiva " triángulo regular ".
- En modo de programa con dos opciones:
    - el profesor impone el lado del triángulo-pantalla en paso de tortuga;
    - el profesor pide un triángulo-pantalla que pueda superponerse al triángulo del juego. Podremos luego en este caso proponer un estudio de los perímetros de los diferentes conjuntos en función de la unidad de longitud escogida: lado de triángulo equilátero, centímetro, paso de tortuga, e identificar la proporcionalidad entre las diferentes medidas obtenidas.

Fabricación de conjuntos
- Con dificultad de perímetro.
- Con dificultad de área.

Trabajo individual

Construcción de una situación de clase que presenta un desarrollo análogo.

Inventario de los diferentes conjuntos que pueden ser obtenidos



Cuadriláteros particulares

Hervé PEAULT (1991)

Este artículo presenta actividades realizadas en el marco de la formación inicial de profesores de escuelas.
A partir de algunas actividades que pretenden resituar los conocimientos geométricos sobre los cuadriláteros, proponemos un ensayo de análisis didáctico y un estudio comparado por secuencias que figuran en manuales escolares.

Los cuadriláteros ocupan un lugar importante entre las figuras geométricas estudiadas en la escuela elemental.

Escogí este año consagrando varias sesiones en PE2 (Profesores en 2do año de formación). Estas sesiones fueron impartidas de la siguiente manera: 4 veces 2 horas, más la quinta sesión posterior sobre el tema de los triángulos que era a la vez un prolongamiento del trabajo y un medio de evaluación.

Objetivos
Permitir a cada uno apropiarse de *los* conocimientos sobre *los* cuadriláteros particulares.

Hacer vivir el tema a través de actividades basadas en problemas.

Hacer analizar estas actividades resituándolas en una concepción del aprendizaje y trabajar en esta ocasión algunos conceptos de didáctica (poco abordados en 1er año por algunos de los grupos concernidos).

Ofrecer los medios para analizar otras actividades (particularmente extraídas de manuales escolares) a partir de estos conceptos de didáctica.

Estos objetivos han sido presentados desde el principio a los profesores en formación.

Desarrollo
1) Actividades (4 h).
2) Análisis de las actividades (2 h).
3) Estudio de extractos de manuales sobre los cuadriláteros particulares. (2 h)
4) Estudio de extractos de manuales sobre los triángulos (2 h).

I - ACTIVIDADES

Actividad 1

Aprendizaje que se desea lograr
Saber reconocer y definir por condiciones necesarias y suficientes los diferentes tipos de cuadriláteros.
Tomar consciencia de las relaciones entre estos diferentes tipos.

Situación
Descubrir un cuadrilátero mediante la formulación de preguntas.

Material
Cada uno dispone de una hoja sobre la cual se dibujan 25 cuadriláteros diversos (cf. página siguiente). Un intruso (el n° 26) es un pentágono.

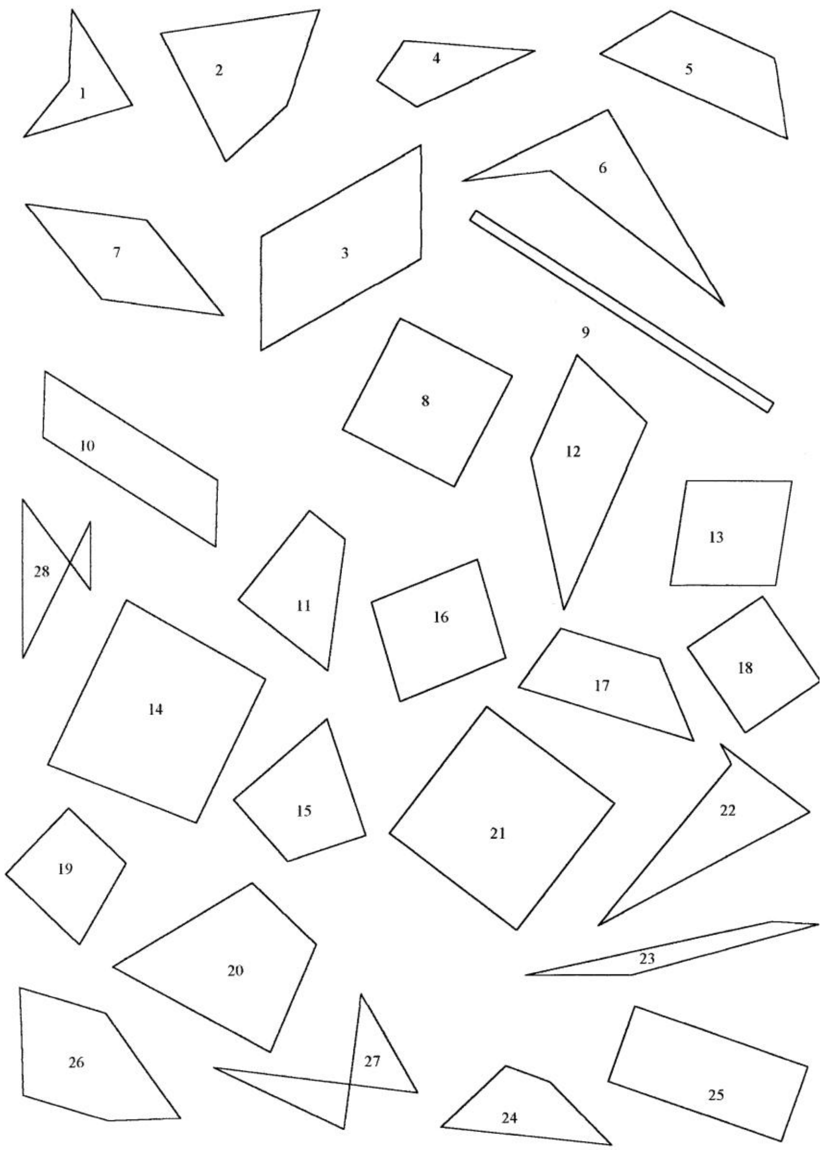
Organización
En grupos de 3 o 4 personas.

Consigna
" Escogí uno de los 25 cuadriláteros de la hoja: deben adivinar cuál. Para eso, ustedes deberán plantearme preguntas por escrito (cualesquiera salvo pedir el número); responderé por escrito a todas siempre que las preguntas tengan un sentido. Cuando un equipo esté seguro de haberlo encontrado, indicará el número de la figura. Traten a la vez de ser rápidos y de plantear un mínimo de preguntas. "

Desarrollo
La primera vez, la figura escogida es la N° 10 (paralelogramo no rectángulo), la segunda vez el 11 (trapecio rectángulo con 2 lados consecutivos planos) con la consigna complementaria de no utilizar las denominaciones usuales de los cuadriláteros. Los que acaban antes son invitados a buscar un sistema de preguntas que, a priori, permitiría reconocer cualquier cuadrilátero.

Observaciones
- El complemento de consigna para la segunda búsqueda (no utilizar los nombres usuales de los cuadriláteros) se reveló inútil, ningún grupo hizo referencia a los nombres de cuadriláteros (¿ es un efecto del contrato*?).
- Perpendicularidad y paralelismo son casi siempre estimados "a ojo", lo que conducirá a errores de apreciación para ciertas figuras.
- La distinción entre el 3 y el 10 podía hacerse sólo a partir de consideraciones de longitudes o de ángulos. Ninguna petición de medida ha sido formulada (¿ es un efecto del contrato*?), las preguntas para permitir la diferenciación fueron la mayoría de las veces de tipo: " ¿ acaso el lado mas grande mide tres veces más que el lado pequeño ? ".

Cuadriláteros



Para eliminar toda ambigüedad debido a la fotocopia, los dibujos 8 y 18 son cuadrados, los dibujos 7 y 16 son rombos, los dibujos 1 y 4 son cometas, etc.

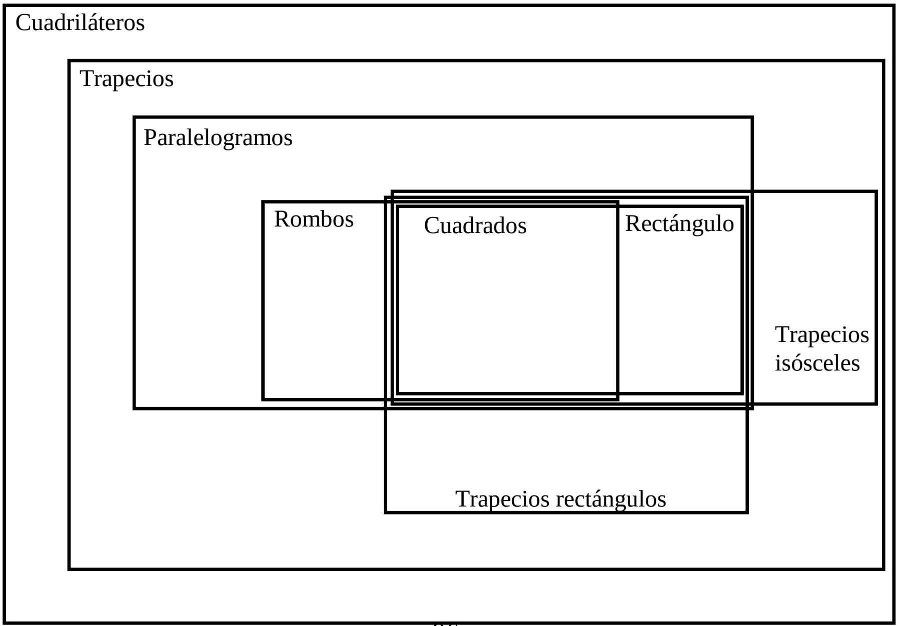
Puesta en común
Concierne al listado de los diferentes criterios utilizados (convexidad, paralelismo, perpendicularidad, igualdad de longitudes, igualdad de ángulos, diagonales - a las cuales hago referencia si ningún grupo las utilizó), el examen de algunos cuestionarios (particularmente para los que habían caído en errores o redundancias) y se efectúa la prolongación de la actividad a partir de una nueva consigna.

Nueva consigna para los grupos
" Solamente conservamos los criterios de convexidad, paralelismo de los lados, perpendicularidad de los lados, igualdad de los lados opuestos, igualdad de ángulos.

1) Tomando solo estos criterios, clasificar las figuras poniendo juntas las que son idénticas.

2) Con la ayuda de estos criterios, indicar para cada clase una o varias características suficientes. Atribuir los nombres genéricos, cuando son conocidos, a las clases o los agrupamientos de clases. "

Puesta en común
En esta instancia, se pretende caracterizar de modo preciso (condiciones necesarias y suficientes) diferentes tipos de cuadriláteros: cuadriláteros convexos, trapecios y trapecios rectángulos, trapecios isósceles, paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados, y establecer las inclusiones diversas. Éstas son recapituladas por un esquema del tipo:

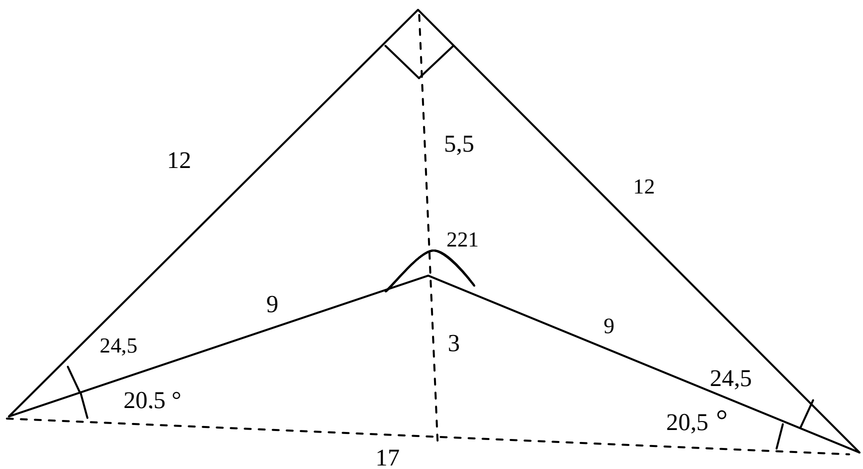


<u>Actividad 2</u>

Aprendizaje que se desea lograr
Saber organizar informaciones geométricas sobre cuadriláteros y obtener otras por deducción.
Realizar construcciones elementales con la ayuda de instrumentos usuales.

Situación
Reproducir un cuadrilátero oculto, a partir de informaciones dadas o solicitándolas.

Material
La figura de abajo está oculta.
Cada grupo dispone de papel blanco y de todos los instrumentos de trazado que desea.



Organización
En pequeños grupos.

Consigna
" Sobre una hoja dibujé un cuadrilátero. Ustedes debe reproducirlo. El dibujo que realizarán debe poder superponerse al mío. Verificaremos por transparencia.

Ustedes no pueden ver mi dibujo, pero le doy una parte de la información que le concierne
- *tiene por lo menos dos lados perpendiculares;*
- *tiene por lo menos dos ángulos iguales;*

- *los lados opuestos son iguales;*
- *una diagonal mide 17 cm;*
- *tiene por lo menos un eje de simetría;*
- *uno de los lados mide 9 cm.*

No hay certeza que las informaciones sean suficientes; si consideran que falta información, pueden formular nuevas preguntas por escrito (sin utilizar nombres de polígonos), pero lo menos posible. Cada pregunta suplementaria da un punto de penalización, más otro si la petición se refiere en una medida de longitud. Si su dibujo está demasiado alejado del original, no serán autorizados a verificarlo y tendrán 3 puntos de penalización. "

Puesta en común
En este momento se toman en cuenta las deducciones efectuadas y los errores**.** De manera notable, la inmensa mayoría consideran que se trata de un cuadrilátero particular (¿ es un *efecto del contrato*?*) por lo tanto de un rectángulo, luego de un cuadrilátero convexo de tipo *"cometa"*. Para muchos, es necesario mucho tiempo antes de pensar que pueda tratarse de una figura cóncava.

Por otro lado, a la pregunta " *¿ las diagonales se cortan en el medio de ambas? "* Respondí " *en el medio de una de ellas solamente* ". Esta respuesta provocó más tarde, contestaciones y nos hizo buscar palabras del tipo "diagonal" (diámetro, lado, altura, mediana) susceptibles de ser utilizadas tanto para designar un segmento como para designar la recta soporte.

Actividad 3

Aprendizaje que se pretende alcanzar
Saber organizar una construcción geométrica del cuadrilátero en función de la información disponible.
Poder considerar diversos métodos de construcción.

Situación
Elaborar consignas con ciertas restricciones o dificultades para la construcción de un cuadrilátero.

Organización
En grupos de 2 personas.

Consigna
" Voy a darle a cada grupo un papel que indica una construcción que se hará hacer por otro grupo (se trata siempre de un cuadrilátero). A partir de esta indicación, deberán redactar un mensaje que permitirá al grupo destinatario efectuar la construcción".

Ningún nombre de polígono (trapecio, cuadrado, etc) deberá ser empleado en el mensaje. Éste deberá ser redactado en forma de sucesión de acciones elementales las que serán de los tipos siguientes:

- *marcar un punto;*
- *trazar un segmento de longitud dada o que una 2 puntos dados;*
- *trazar una recta que pasa por 2 puntos;*
- *trasladar una longitud;*
- *trazar una perpendicular a una recta que pasa por un punto dado;*
- *trazar un círculo o un arco de círculo de centro y de radio dados.*

Los mensajes serán intercambiados; para la construcción, podrán utilizar la regla, la escuadra y el compás; una vez la construcción realizada, los receptores tratarán de adivinar cuál era la consigna de los emisores y compararemos las realizaciones y los mensajes. "

Construcciones a efectuar

- hacer construir un cuadrado que tiene una diagonal de 10 cm;
- hacer construir un paralelogramo cuyo lado mide 5 cm y una diagonal mide 10 cm;
- hacer construir un rombo cuyos lados miden 5 cm;
- hacer construir un trapecio ni rectángulo ni isósceles cuyos lados paralelos miden 4 cm y 7 cm;
- hacer construir un paralelogramo en el que una diagonal mide 5 cm y la otra 10 cm;
- hacer construir un paralelogramo no rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 10 cm;
- hacer construir un trapecio isósceles cuyos lados paralelos distan 5 cm y uno de ellos mide 7 cm;
- hacer construir un rectángulo que tiene un lado de 5 cm y una diagonal de 10 cm;
- hacer construir un rombo no cuadrado que tiene una diagonal de 8 cm;

Puesta en común

Se efectúa después que cada grupo haya realizado por lo menos una construcción. Los más rápidos son encargados de escribir un mensaje para una nueva construcción.

Se analizan varios mensajes, reenviando cada vez al siguiente interrogante: "*según vuestro punto de vista, existe un método de construcción más simple? "*

La puesta en común se prolongó en relación a problemas encontrados: *" ¿ cuáles son los procedimientos encontrados para trazar la paralela a una recta que pasa por un punto dado? ". " ¿ Cuáles son los procedimientos para trazar el punto medio de un segmento? "...*

II – ANALISIS DE LAS ACTIVIDADES

Este análisis es llevado a cabo de manera colectiva a partir del cuestionario que figura más abajo. Para cada pregunta, cada uno toma un tiempo de reflexión y anotamos todas las ideas. Trato de ayudar a sintetizar. El debate no sigue verdaderamente el orden en que aparecen las preguntas.

1) ¿ A través de estas 3 actividades, qué conocimientos matemáticos, qué destrezas o habilidades han sido estudiados? ¿ Consideran esto una ocasión de aprendizaje?

2) Entre los términos siguientes, u otros, cuáles les parecen que caracterizan mejor el modo en el que han trabajado: observación, iniciativa, manipulación, escucha, actividad, imitación, búsqueda, aplicación, pasividad, motivación, memorización, aprendizaje, juego, invención.... Cuando varios les parecen convenir, en qué orden y en qué medida las disposiciones correspondientes le parecen haber sido solicitadas?

3) ¿ Según vuestra opinión, estas 3 actividades han sido concebidas con la misma intención? ¿ Qué es lo que podría caracterizarlas en relación a otros modos de enseñar sobre el mismo sujeto?

4) ¿ En el curso de estas actividades, tuvieron dificultades que explícitamente no habían sido enunciadas?

5) Para cada uno de los problemas propuestos durante estas actividades, traten de encontrar los diferentes procedimientos de resolución que aparecieron. Estos procedimientos fueron condicionadas por el modo en el que el problema fue propuesto? Imaginen "variaciones" de estos problemas que habrían provocado otros modos de resolución.

6) ¿ Cómo supieron si su trabajo tuvo éxito o no? ¿ Por una apreciación exterior o por ustedes mismos (as)? ¿ Cómo?

El debate alrededor de estas cuestiones da un soporte para las nociones de "problema", " situación de aprendizaje ", procedimientos de resolución ", "variables didácticas ", " validación " "institucionalización", "contrato didáctico", " conocimientos herramientas / conocimientos objetos ".

Muy rápidamente se incorporan cuestiones vinculadas a la transposición de estas actividades en la escuela: " *¿ Podemos hacer esto en la clase? ¿ O por lo menos trabajar de modo análogo? ¿ Esto no sería costoso en tiempo y difícil de poner en ejecución?* " Y este trabajo es a veces percibido más como nueva norma de método de enseñanza (" *nos muestra cómo hay que hacer* ") que como medio de apropiarse de instrumentos de análisis.

III - ESTUDIO DE MANUALES SOBRE LOS CUADRILÁTEROS

Posteriormente, propuse extractos de manuales escolares de 2do año sobre el tema " cuadrado, rectángulo " o extractos de manuales escolares de 5to año (para alumnos de 12 años) sobre el tema " cuadriláteros particulares ".

Modalidades de trabajo
Lectura individual de cada uno de los extractos.
Estudio por grupos del cuestionario propuesto.
Puesta en común.

Cuestionario propuesto
- ¿ Cuáles son, en cada uno de los extractos, los conocimientos y las competencias a las cuales se hace referencia?

- ¿ Hay casos donde los autores preven que el aprendizaje se efectúa a partir de problemas que los niños deben resolver?

- En estos casos, enunciar los problemas y precisar los procedimientos de resolución que se puede esperar de los niños así como las variables didácticas de la situación.

- Cómo puede ser contemplada en cada caso la validación del trabajo de los niños?

- Cuál es el saber institucionalizado, en cada caso? ¿ En qué momento se produce?*

- En la medida que podamos juzgar esta documentación parcial, hay diferencias, entre los diferentes manuales escolares, en cuanto a las concepciones subyacentes del aprendizaje?

- ¿ Cómo prevería una o varias secuencias sobre el mismo tema y al mismo nivel?

IV - ESTUDIO DE MANUALES SOBRE LOS TRIÁNGULOS

Modalidad de trabajo
Trabajo escrito individual.
Los estudiantes disponen del cuestionario y los extractos indicados más abajo.

Cuestionario
1) Los triángulos particulares por los cuales generalmente nos interesamos son:

*- los triángulos **isósceles** " (que se puede caracterizar por la igualdad por lo menos de 2 lados);*
*- los triángulos "**regulares**" llamados "**equiláteros**" (que se puede caracterizar por la igualdad de los 3 lados);*
*- los triángulos "**rectángulos**" (que se puede caracterizar por la presencia de un ángulo recto).*

Realicen un esquema análogo al realizado para los cuadriláteros, poniendo en evidencia estas diferentes categorías y sus eventuales recortes.

2) Ustedes encontrarán adjuntos 4 extractos de manuales de 5to año que conciernen al estudio de los triángulos.

a) Para cada uno de ellos, cuáles son los conocimientos y las destrezas a los que se hace referencia? ¿ Qué observaciones les inspiran las proposiciones de los diferentes autores?

b) Inspirándose o no en estos extractos, den ejemplos de *situaciones-problemas** que les parecen pertinentes para el aprendizaje sobre los triángulos y aplicándolo en la clase de 5to año.

c) Desarrollen uno u otro de estos ejemplos en la perspectiva de una puesta en ejecución en una clase, precisando sus elecciones didácticas.

Explotación

Durante una sesión posterior, volvimos sobre este trabajo a partir de un documento que propuse, aportando elementos de respuesta a las preguntas precedentes.

Pirámides extrañas

Marianne Frémin (1992)

Este artículo es una exposición de las actividades propuestas en formación inicial o contínua.
La puesta en situación de los estudiantes por el formador permite por una parte un análisis de la construcción geométrica de pirámides " inclinadas" y por otra parte permite el bosquejo de la sesión por los alumnos considerando las dificultades encontradas.

1. INTRODUCCION

a) Contexto

En formación inicial o contínua, en el cuadro de la enseñanza de la geometría, sesión de tres horas, de las cuales aproximadamente dos son consagradas a la construcción y su análisis a nivel de los adultos y el resto a la elaboración y el análisis de una situación análoga para niños.

b) Intención

1. Hacer una contrucción en volúmen que presente dificultades inéditas y consistentes para los adultos.

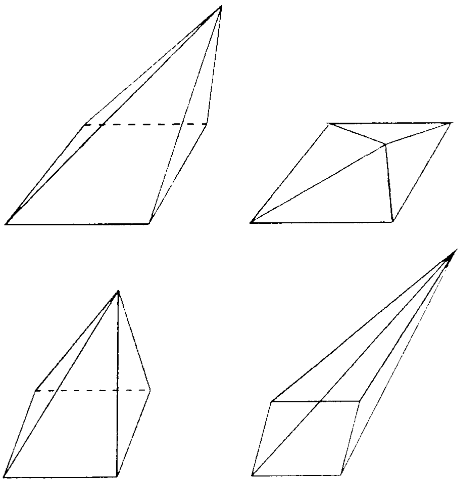
2. Analizar la situación, el rol motor de los intentos fallidos… luego volver a ...
3. Cómo hacer realizar una construcción análoga a los niños.

2. LAS PIRAMIDES EXTRAÑAS

a) Ubicación

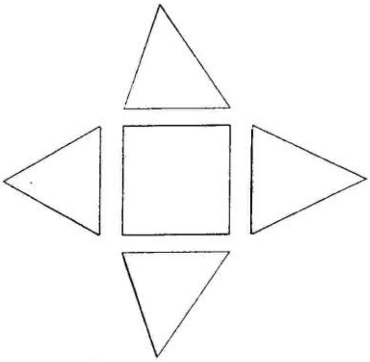
1. Consigna

Construír una pirámide, no una bella regular como la del museo del Louvre, sino una villana, así (mostrarla) :

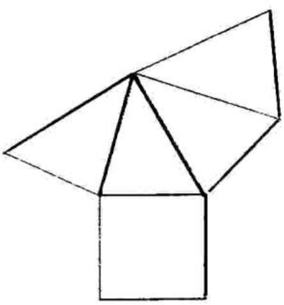


Luego de una pequeña pausa, desarmar una o dos : tienen una base cuadrada y cuatro caras triangulares.

Colocar las partes en la pizarra.



NB. Presto atención en colocar las partes de esta manera, para inducir un patrón formado por cuatro triángulos que bordean un cuadrado y evitar encontrarme con numerosas personas intentando este tipo de patrón: (luego del aprendizaje reciente en un curso de tecnología. Este patrón vuelve el curso mas difícil).



2. Material del animador

Tres o cuatro pirámides con base cuadrada « bien asimétricas », es decir cuya cúspide no sea, visiblemente vertical al centro o a los ejes de simetría del cuadrado, construídas en carton resistente, con caras independientemente encoladas con una cinta adhesiva (para que sean desmontables) .

3. Material del estudiante

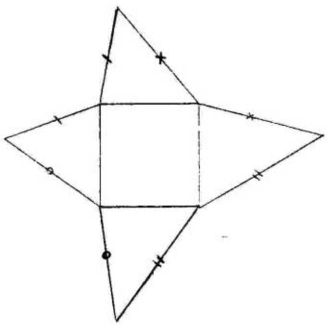
Material clásico de geometría (regla, escuadra, compás,...), cartón liso, cinta adhesiva, tijeras. El cartón cuadriculado puede facilitar la tarea en ciertos momentos.

4. Precisiones

Los estudiantes comprenden que es menester hacer un *patrón.* Es mejor no prever lengüetas y encolar bordes con bordes (las lengüetas perturban el análisis)

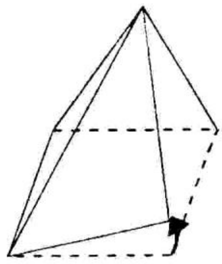
b) Primeras tentativas

1. Análisis técnico

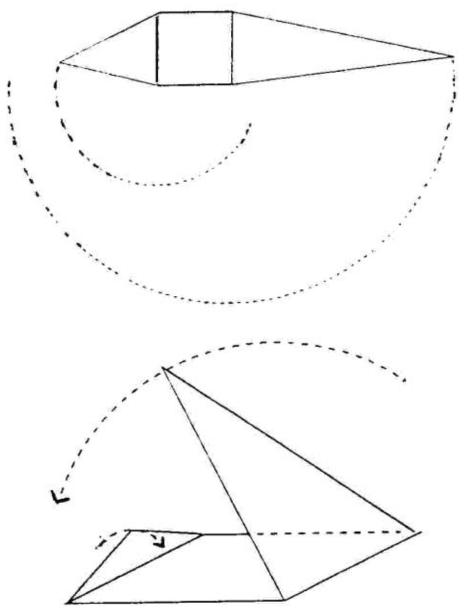


a) Condición en relación al largo de las aristas: dos aristas que se deben encolar juntas deben tener el mismo largo.

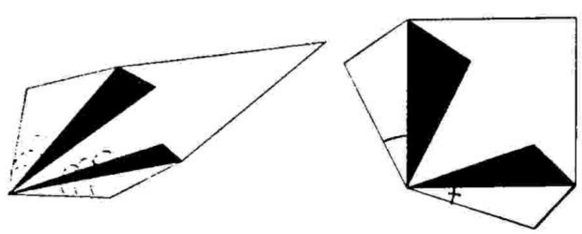
b) Riesgo de « torcimiento del cuadrado »



c) Desigualdades triangulares en relación a los largos



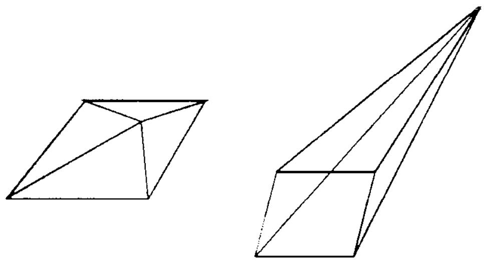
d) Desigualdades triangulares en relación a los ángulos



2. Comportamientos

Los estudiantes se lanzan rápidamente.
Las dificultades (a) y (b) aparecen sistemáticamente en cada tentativa, son ineludibles por lo tanto hay que tratarlas con prioridad.

Las tentativas que no respetan la condición de los largos (a) van a la papelera. Estos intentos fallidos permiten percibir dónde está la dificultad y superarlos en los ensayos siguientes. Numerosos estudiantes no necesitan un intento fracasado para pensar en respetar la condición de los largos.
El problema de « torcimiento » aparece pero no es formulado (las pirámides fallidas van a la papelera sin que las siguientes sean mejores).
Las dificultades (c) y (d) aparecen esporádicamente cuando alguien busca hacer una mirámide muy larga y excentrada (desigualdades triangulares en relación a los largos) o al contrario muy chata : (desigualdades triangulares en relación a los ángulos) y no tiene chance. Cuando una pirámide es errada de esta forma puede ocurrir que la siguiente se logre sin que la razón del fracaso o del éxito sea elucidada.
Es en razón de ello que trabajo primero sobre (a) y (b), dejando de lado las posibles manifestaciones de (c) y (d), luego cuando se ha entrado bien en acción en la elaboración de la « receta de la pirámide”, provoco la aparición de (c) y (d) proponiendo pirámides largas y excentradas o muy chatas y de esta forma completamos la receta.



c) Las realizaciones

1. Sea son demasiado regulares

-Como los vértices de un cubo.

-Poseen una simetría en relación a un plano mediano (dos triángulos isósceles se enfrentan)

Son producidas por estudiantes que eluden el problema de torcimiento.
Se les pide a los estudiantes otra pirámide más extraña.

2. Sea son ligeramente torcidas

El motivo puede buscarse en la imprecisión de los trazos y de los recortes.
Se pide a los estudiantes otra pirámide más prolija o diferente.

3.Sea es una pirámide "que se balancea"

Se le pide entonces a los estudiantes otra pirámide estable.

4. Sea la pirámide es correcta

Es raro.
En este caso, se demanda a los estudiantes otra pirámide bien diferente (mas puntiaguda, o mas chata o mas excentrada).

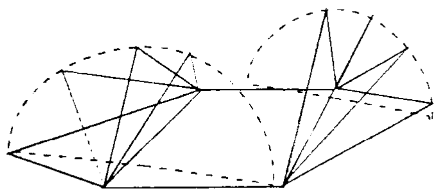
En el caso bastante improbable de una persona que haya descubierto el secreto de las pirámides con base cuadrada, se le puede proponer, para aguardar a sus camaradas, construír pirámides con base cuadrilátera (cualquiera) o pentagonal...

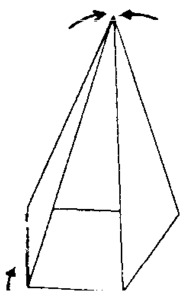
d) Primera puesta en común

1. El torcimiento es la dificultad esencial, bien percibida pero no analizada. Preguntas : "cómo evitar de hacerla torcida ?", « porqué se tuerce ? »

Para responder a las preguntas, se puede desarmar una pirámide fallida, luego se pueden mostrar dos cosas:

- Hacer girar alrededor de los lados del cuadrado los dos triángulos cuyan puntas no tienen ninguna chance de encontarse.





- Torcer exageradamente el cuadrado para que los vértices de los triángulos se encuentren.

2. Las otras dificultades solo aparecen raramente o no aparecen : cuando un estudiante a acertado en (a), no se jacta (inútil insistir, la encontrará en la receta), (c) y (d) son demasiado aleatorias para ser percibidas.

e) Retorno a las construcciones

Se solicita a cada estudiante que construya una pirámide « aún más regular ». Es una fase en la que el formador acciona localmente para ayudar a formular, para proponer una construcción muy diferente...

f) "Receta de la pirámide"

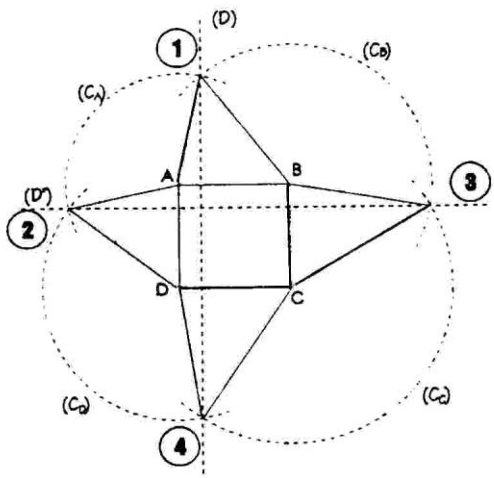
Durante la fase de construcción el formador propone localmente, cuando se instalan los logros, redactar una « receta de la pirámide", en un afiche que sirva para la explotación colectiva.

Se remarca que la respuesta al problema « cómo no hacer torcido ? » es naturalmente, " prestar atención de poner los vértices enfrentados"

g) Puesta en común

Se expresan las últimas dificultades de construcción.
Se examina y se comparan las recetas (lo que contribuye a ayudar a los estudiantes que no habían logrado la construcción).
He aquí tres "recetas correctas" susceptibles de obtener :

Receta 1



Elegir ① (2 grados de libertad)
Elegir ② sobre (C_A) (1 grado de libertad)
Construír ③ intersección de (C_B) y (D') (0 grado de libertad)
Construír ④ intersección de (C_D) y (D) (0 grado de libertad)

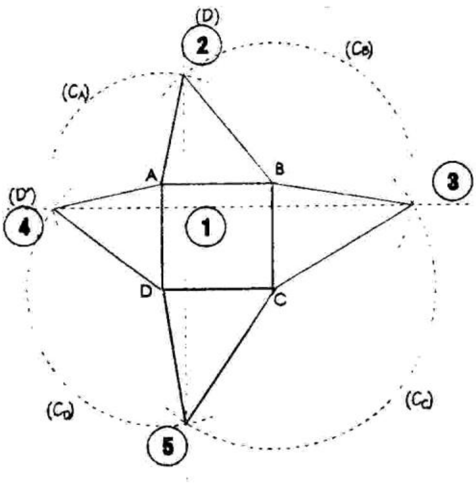
NB. La última igualdad de largos es automáticamente verificada : ④ se encuentra sobre (C_C).

Receta 2 (igual figura que la anterior)

Elegir① (2 grados de libertad)
Elegir ② sur (C_A) (1 grado de libertad)
Construír③ intersección de (C_B) y (D') (0 grado de libertad)
Construír ④ intersección de (C_D) y (Cc) (0 grado de libertad)

NB. El último frente a frente de vértices es automáticamente verificado : ④ se encuentra sobre (D).

Receta 3



Elegir ① verticalidad de la cúspide (2 grados de libertad)
Elegir ② sobre (D) (1 grado de libertad)
Construír ③ intersección de (D') y (C_B) (0 grado de libertad)
Construír ④ intersección de (D') y (C_A) (0 grado de libertad)
Construír ⑤ intersección de (C_D) y (D)(0 grado de libertad)

NB. La última igualdad de largos es automáticamente verificada : ⑤ se encuentra sobre (C_C).

Grados de libertad
En cada construcción, tenemos tres grados de libertad. Determinar una pirámide es elegir una cúspide en algún lado sobre el cuadrado : también tres grados de libertad.

Material útil para mostrar (o demostrar)
Cuadrados y triángulos rígidos que pivotean alrededor de los lados.
Cuadrado e hilos fijos en los vértices.

3. TETRAEDROS EXTRAÑOS

La actividad "pirámides extrañas" que a priori parece difícil para los estudiantes es finalmente lograda con éxito, y se encuentran orgullosos y sorprendidos de estos logros.
Se les puede solicitar que construyan una actividad análoga para una clase de alumnos de 5to año (alumnos de 10 años) lo que les obliga aún mas a extraer características interesantes de la situación.

a) La situación
Hacer construír « tetraedros extraños » a alumnos de 5to año.

b) Características comunes con « pirámides »
Situación de construcción.
Situación auto validante.
Rol motor de intentos fallidos.

c) Diferencias
No se plantea el problema de « torcimiento ».
Esto da confianza a los estudiantes en relación a las posibilidades de éxitos de los niños.

« Le napperon »
Un problema para trabajar sobre la simetría axial

Marie-Lise Peltier (1997 et 2000)

Este artículo relata une situación de formación inicial o contínua de profesores de escuela. Presenta une situación de formación de tipo homología transposición en PE2 (profesores en 2do año de formación) que tiene como finalidad iniciar un curso sobre la simetría axial y conducir a los profesores en formación a reflexionar acerca de la noción de problema en geometría en la escuela elemental.*

Introducción

Los programas de la escuela primaria ponen el acento en el rol de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Pero, aunque en el dominio numérico los profesores en formación se sienten capaces de construír o de elegir problemas que permiten a los alumnos desarrollar una real actividad intelectual y construír ciertos conocimientos, frecuentemente les es más difícil considerar en geometría una actividad que pueda ser un "problema" para los alumnos. Para muchos de ellos, los problemas en geometría están vinculados a la noción de demostración y remontan por lo tanto a los primeros años de la escuela secundaria. La enseñanza de la geometría en la escuela, frecuentemente les parece cercana a la "lección de cosa", es decir una sucesión de sesiones en las que se trata de introducir vocabulario, dar algunas definiciones, hacer "manipular" a los alumnos.
La situación de formación que se presenta aquí, hace intervenir la noción de simetría axial como respuesta a un problema y permite ubicar adelante:
-el rol de la anticipación: es necesario formular hipótesis, anticipar la acción, antes de ejecutarla.
-el rol de la manipulación: aquí la manipulación es soporte de la anticipación.
Tiene entonces por objetivos, permitir a los PE2 o a los profesores de escuela en formación contínua, reflexionar sobre los problemas considerando de forma diferente la noción de simetría axial en el plano y algunas de sus propiedades.
En el análisis didáctico de la sesión, se reflexiona también en relación al rol del error en la situación, a la noción de *teorema en acto**, a la *validación**.

Descripción de la actividad

Los profesores en formación deben reproducir un « napperon » (mantel individual) en papel, el cual está colocado sobre la pizarra. Se indica que este pequeño mantel debe realizarse plegando una hoja de papel y recortando todo lo que se desea, luego desplegar la hoja y compararla con el modelo. La consigna se dicta con una dificultad: los profesores deben efectuar todos los plegados deseados antes de recortar y todos los recortes deseados antes de desplegar el mantel.

1. Análisis previo

1.1. Las *variables de la situación**

La elección de los recortes del mantel est muy importante. En función de esta elección, se podrá centrar la reflexión:
-sobre las posiciones relativas de los diferentes recortes y sobre las cuestiones de orientación.
-sobre la forma de los recortes: estas pueden ser elegidas de manera tal que quien ejecuta la acción utilise implícitamente *theoremas en acto**[1] relativos a la existencia de eje(s) de simetría en ciertas figuras para obtener el resultado deseado. Por ejemplo para obtener un recorte que tenga la forma de un triángulo isósceles cortamos perpendicular al pliegue, lo que lleva nuevamente a aplicar la siguiente propiedad “en un triángulo isósceles el eje de simetría es también su altura”.

El número de ejes de simetría del pequeño mantel est también una variable a estudiar. (Anexo1).

- Un solo eje hace demasiado fácil la tarea como para proponerla en formación (exemple 1).
- La elección de dos ejes est interesante en la medida que el grado de complejidad sea razonable y el tiempo resulte lo bastante fácil a administrar. (ejemplos 2, 3).
- Es igualmente interesante el caso de 4 ejes, que puede elegirse para trabajar sobre los ejes de simetría de los polígonos usuales (ejemplos 4, 5, 6, 7).
- El de 6 ejes (ejemplo 8) necesita que sea plegado en tres. Este caso puede ser propuesto como una prolongación de actividad, a los profesores mas rápidos.

El hecho de dejar visibles o no los pliegues del modelo, de introducir pliegues parásitos, o de suprimirlos completamente, puede incidir en las estrategias de los profesores en formación, en la medida que constituyen indicadores pertinentes o no a tomar en cuenta.
Una fotocopia del modelo para cada profesor est aconsejable para permitir un análisis individual preciso, pero esta reproducción del modelo debe ser de dimensión diferente a las hojas que serán distribuídas para ser recortadas, a fin de evitar el recurso del calcado de los recortes del modelo.

1.2. Los criterios de concordancia al modelo

Las realizaciones serán consideradas como acordes al modelo si son respetados los siguientes elementos :

- el número de pliegues

[1] Noción tomada de G.VERGNAUD

- el número de recortes
- la forma de los recortes
- las posiciones relativas de los diferentes recortes
- la orientación de los recortes.

1.3. Los procedimientos esperados

- Identificación del número de ejes de simetría y realización de los pliegues que se asocian a ello, identificación de los elementos que se van a recortar,
- Plegado en dos, sin importar el número de ejes de simetría y reproducción de los recortes sobre este plegado en dos,
- Plegado en dos o en cuatro luego reproducción por recortes sobre papel y de esta forma plegado de todos los recortes del modelo completo,
-Plegado en dos o en cuatro, recorte de ciertas partes, desplegado y rectificación sobre la hoja desplegada.

1.4. La *validación**

La validación se efectúa por confrontación visual con el modelo. Evidentemente las realizaciones obtenidas no se pueden superponer al modelo. Lo que debe ser respetado, como ha sido indicado mas arriba, son las formas geométricas de los recortes, su número, sus posiciones relativas, su orientación.
Es necesario proponer modelos tales que los profesores en formación puedan decidir solos si han logrado o no reproducirlo, es entonces importante que los eventuales errores sean visibles y por ello es importante elegir los manteles con recortes de formas diferentes y en número diferente sobre cada uno de los ejes y sobre dos lados consecutivos del cuadrado.

1.5. Considerar ensayos y errores

Es interesante conservar los ensayos erróneos. Ellos tienen varias funciones.
- La primera, totalmente fundamental, es permitir a su autor llevar a cabo una reflexión y un análisis fino de los efectos del recorte sobre un papel plegado en 2, en 4, o en 6. El error puede ser entonces un punto de partida para afinar la reflexión : analizando el efecto de tal recorte sobre el papel desplegado, el profesor construirá hipótesis sobre las modificaciones que debe realizar para obtener el resultado deseado[1] El error adquiere, de esta manera, un estatus positivo, similar al estatus que tiene en la investigación.
-Una segunda función proviene del hecho que cada realización, que fue obtenida por plegado admitirá al menos un eje de simetría. Entonces, en una segunda parte del trabajo, será posible poner en evidencia los ejes de simetría de los diferentes manteles, hacer un balance sobre el mínimo motivo, conservándolo en cada caso,

[1] Asi por ejemplo, si un profesor efectúa un recorte en forma de semi círculo en un borde el papel plegado en cuatro en lugar de efectuarlo sobre un pliegue, constata al abrir que no ha obtenido los círculos deseados sino semi círculos sobre los bordes del mantel. Durante el siguiente ensayo, el profesor toma en cuenta la posición del círculo que debe recortar en relación al pliegue efectuado, entonces al eje de simetría correspondiente.

para obtener el mantel completo, aplicando a este motivo las simetrías axiales puestas en evidencia.

1.6. La síntesis y la institucionalización*

La síntesis se llevará a cabo al mismo tiempo, tanto sobre los aspectos matemáticos y didácticos:

- la noción de eje de simetría de una figura plana ;
- los ejes de simetría de figuras usuales (triángulos isósceles, rombo, rectángulo, octógono, cuadrado, semi círculo, círculo, etc. ;
- La noción de centro de simetría en el caso de un número par de ejes de simetría;

como sobre las nociones didácticas de *variables*, devolución*, teorema en acto*, validación*, institucionalización*.*

2. Desarrollo de la clase

En el plano material es importante prever :
- dos modelos de formato grande del mantel que se presenta en la pizarra, para poder plegar y manipular uno de ellos durante la puesta en común,
- dos modelos individuales como fue indicado en el párrafo 1.1,
- varias hojas de papel con las dimensiones que se requieren para la realización de los manteles (diferentes dimensiones que las de los modelos individuales)
- uno o varios manteles suplementarios mas complejos para administrar el tiempo (manteles que tienes ya recortes, eventualmente mas ejes de simetría para los profesores que terminan primero),
- tijeras para cada profesor.

2.1. Etapa de búsqueda

Se coloca un "pequeño mantel" sobre la pizarra (cf. anexo 1).
Consigna :
Deben reproducir este mantel. Para ello, ustedes deben efectuar todos los plegados que crean necesarios, luego sin desplegar, deben efectuar todos los recortes que crean necesarios, finalmente desplieguen y comparen sus realizaciones con el modelo. Si están conformes,han logrado la reproducción del modelo, si no, conserven sus realizaciones sin destruírla ni arrugarla ni desecharla (de esa forma podrán examinarla) y recomiencen con otro papel.

Se indican los criterios de aprobación :
Un mantel será considerado como "conforme" al modelo si las formas geométricas de los recortes son respetadas así como su número, sus posiciones relativas, su orientación.

Luego de un tiempo de búsqueda, constatamos que las estrategias son numerosas y variadas:
- algunos identifican rapidamente el número de ejes de simetría y realizan plegados en consecuencia;

- otros plegan solamente en dos e intentan reproducir los recortes sobre este plegado en dos;
- otros están aún mas desorientados y efectúan un primer plegado en dos o cuatro, recortan algunas partes, abren y olvidan la condición de la consigna, completando los recortes sobre la hoja desplegada.

En todos los casos podemos notar una atención permanente.

En el momento del desplegado los profesores pueden sorprenderse de los resultados obtenidos sea por la forma de los recortes, su número, sus posiciones relativas, su orientación.

La *validación** se hace individualmente por confrontación al modelo apoyándose en los criterios de éxito definidos precedentemente. La casi totalidad de los profesores en formación no tiene dificultades para efectuar correctamente esta comparación individual con el modelo. Sin embargo puede suceder que uno o dos profesores crea (equivocadamente) haber logrado con éxito la realización. Un cuestionario dirigido por parte del formador permite generalmente al profesor tomar consciencia de lo que no es conveniente. En ciertos casos es necesario que el formador llame la atención sobre ciertos « errores » individuales, particularmente en relación a las cuestiones de orientación o las cuestiones de posiciones relativas.

Generalmente, pocos profesores logran con éxito la tarea en el primer intento. Luego de haber constatado que su realización no es acorde al modelo, la mayoría retoman el primer ensayo, lo vuelven a plegar, lo abren varias veces, antes de afectuar plegados y recortes sobre la hoja nueva. Entonces, aquí se analizan los errores para ser superados.

La cantidad de ensayos antes de una realización acorde al modelo varía ampliamente entre un profesor y otro. Algunos tienen éxito inmediatamente, en este caso el formador les da individualmente otro mantel de reproducción mas compleja, para permitir a los otros terminar su actividad. Para otros, son necesarios varios intentos para que el resultado sea juzgado como satisfactorio por el autor.

2.2. Puesta en común de las producciones y de las estrategias

Cuando la totalidad de los profesores a obtenido un resultado satisfactorio, el formador propone una puesta en común de las diferentes estrategias utilizadas, (sea que ellas le hayan permitido lograr con éxito una realización o no) y de las producciones correspondientes (el formador cuida en elegir producciones erróneas y de diferentes tipos[1]).

[1] El formador elige manteles que han sido abandonados por ser considerados por su autor como no acordes al modelo, eventualmente manteles que de manera equivocada su autor consideraba como acorde. Se espera presentar en debate, manteles que no tienen el número de ejes de simetría requerido, manteles que no tienen la cantidad correcta de recortes, manteles que presentan inversiones en las posiciones relativas de los recortes, orientaciones erróneas, de manera que el análisis conduzca a poner en evidencia los diferentes criterios de conformidad con el modelo. Encontraremos en anexo 2 ejemplos de manteles realizados y que han sido expuestos para la puesta en común al momento de la realización del modelo n°3.

En el momento de esta puesta en común, los profesores proponen generalmente dos tipos de estrategias:
- Determinar los ejes de simetría, determinar un dominio fundamental en el cual se encuentra el motivo mínimo, determinar el plegado a efectuar para obtener este dominio fundamental, posicionar el papel plegado de manera de poder ejecutar los recortes en función del motivo identificado en el dominio fundamental. Esta estrategia es eficaz y experta, los profesores en formación la proponen a través de diversas formulaciones.
- Identificar los recortes que se repiten, plegar en función del número de repeticiones, recortar mitades o cuartos de motivos partiendo del análisis de las repeticiones. Esta estrategia puede ser eficaz, pero en numerosos casos, los profesores han hecho girar el papel plegado de tal manera que los recortes que deberían encontrarse al centro, se encuentran en los bordes y viceversa.

Las producciones son estudiadas colectivamente. Para las que no están conformes al modelo, los errores son delimitados y analizados (número de recortes, ubicación de los recortes, posición relativa, forma, orientación).

2.3. Síntesis

Punto de vista matemático

Noción de eje de simetría de una figura plana.

Elementos de simetría de las figuras usuales (triángulo isósceles, rombo, rectángulo, cuadrado, semi círculo, círculo, etc.)

Vínculo entre simetría axial y simetría central : cuando una figura admite dos ejes de simetría y solo dos, estos ejes son perpendiculares y su punto común es un centro de simetría de la figura.

Punto de vista didáctico

El rol de la anticipación: la anticipación es necesaria para responder a la consigna y efectuar el recorte solicitado.

El rol del error: en esta situación, el rol positivo del error se pone en evidencia : en efecto, es frecuentemente analizando una producción errónea que es posible prever lo que habría que hacer para obtener tal o tal resultado.

La *validación** : aquí, en parte está a cargo del profesor en formación.

La noción de *teorema en acto**. Demos dos ejemplos.

Para obtener un recorte que tenga la forma de un triángulo isósceles, el profesor recorta el plegado en forma perpendicular. Utiliza en acto una propiedad relativa al triángulo isósceles: “ el eje de simetría de un triángulo isósceles es la altura del triángulo”.

Para obtener un cuadrado partiendo del plegado en cuatro, el profesor recorta formando un ángulo de 45°, utiliza implícitamente la propiedad relativa al cuadrado : “ las diagonales del cuadrado son ejes de simetría y bicectrices de los angulos ”.

El rol de las manipulaciones en geometría. Está claro que para la mayoría de los profesores en formación, el rol de las manipulaciones en geometría permite a los alumnos construir un stock de experiencias. Sin embargo, es necesario recordar que estas experiencias podrán ser movilizadas si han sido descritas en el momento de la acción y sobre todo evocadas luego de haber sido llevadas a cabo, de manera diferida y sin volver a la etapa de la manipulación. Pero las manipulaciones tienen otras funciones que es necesario mencionar antes: pueden servir de soporte a la anticipación, que es el caso de la situación del mantel, pueden igualmente permitir una forma de validación pragmática en la escuela elemental.

La gestión del tiempo : el tiempo para realizar correctamente la tarea es muy variable. Es necesario prever prolongaciones (en este caso otros manteles para los que terminan antes) a fin de administrar convenientemente el tiempo de la sesión y la heterogeneidad del grupo.

Transferencia a la escuela elemental

Se busca una adaptación de esta situación para alumnos de clases de ciclo 2 y 3 (alumnos de 8 a 12 años)
El artículo publicado en « Grand N » n° 68 (2000-2001) ha sido distribuído.
El rol de las *variables didácticas** es entonces puesto en primer lugar.
Durante esta situación se estudia la actividad de los alumnos. Una primera etapa de manipulación libre que permita la entrada en la actividad es necesaria para poder devolver la tarea de reproducción a los alumnos. En esta fase de acumulación de experiencias, la mano trabaja, pero el pensamiento es escasamente solicitado. Al momento de la observación de sus realizaciones, algunos alumnos pueden desarrollar una actividad de pensamiento que busca justificar las constataciones que pueden hacer, pero esta actividad propiamente dicha, no es requerida para realizar la tarea solicitada.
En la segunda etapa, cuando se trata de reproducir el modelo, se moviliza el pensamiento al mismo tiempo que la mano. El niño desarrolla una real actividad cognitiva, anticipa su acción, la prevé, la manipulación sirve para realizar materialmente esta anticipación y validarla. Es aquí, en esta segunda etapa que podemos hablar de actividad matemática.
Para que la situación presentada tome sentido en una progresión sobre la simetría axial, deberá ser adaptada a la clase en la cual va a ser propuesta y deberá por supuesto ser seguida de numerosos ejercicios de entrenamiento y de nuevos problemas antes de los ejercicios de evaluación lo que será por otro lado razonable diferirlo en el tiempo. En efecto no es luego de un solo encuentro con una noción que es posible saber si los alumnos se han apropiado de ciertas propiedades de esa noción. Será necesario a la vez esperar que otras nociones hayan sido estudiadas, para evaluar la capacidad de los alumnos de reconocer situaciones que impliquen la simetría axial y tratarlas correctamente.

Conclusión

Para concluír esta sesión, el formador vuelve sobre la noción de problema y sobre la actividad matemática.
Hacer matemáticas, es resolver problemas desarrollando un razonamiento. Para que esta actividad cognitiva tenga lugar, el problema debe verificar ciertas características[1], particularmente las siguientes:
- **El problema debe poner en juego el conocimiento (la noción, la técnica) cuyo aprendizaje se desea lograr.** En este caso, una reproducción conforme al modelo del mantel necesita el reconocimiento de la existencia de uno o varios ejes de simetría, y la utilización de estos ejes como recta de plegado.
- **El problema debe ser "consistente", es decir que la respuesta no debe ser evidente sino sería un simple ejercicio de entrenamiento**. En la actividad propuesta lo que asegura la consistencia es la elección del modelo para un nivel de clase determinada.
- **El alumno debe poder comprometerse en la resolución con sus conocimientos anteriores, pero también debe haber una búsqueda de su parte para adaptarlos y hacerlos evolucionar.** La fase inicial de manipulación libre permite a los alumnos comprometerse en la tarea de reproducción, pero los criterios de conformidad al modelo los conducen a poner a prueba sus conocimientos y eventualmente hacerlos evolucionar.
- **La validación* debe estar lo máximo posible a cargo del alumno (hablamos de auto validación)**. En la situación del mantel, esta auto validación está garantizada para una gran número de alumnos. Sin embargo, para otros alumnos, el profesor deberá jugar su rol de mediador interrogando al alumno de manera de guiarlo hacia las cuestiones .
- **El problema debe poder servir de referencia para la noción y para la clase**. Este aspecto me parece muy importante subrayarlo. Si es necesario pensar en la enseñanza tomando en cuenta la heterogeneidad de los alumnos y previendo diferenciar ciertas actividades, una diferenciación a priori en el momento que los alumnos trabajarán sobre una noción nueva (o retomada del año anterior), para construir algunas de esas propiedades o para aprepiarse de ellas, sería lamentable excluir algunos alumnos de estas situaciones. Ellas permiten construír el sentido y hacer hipótesis como todas las posibilidades de recordar esta situación para mobilizar la memoria de los alumnos. Por otro lado me parece importante que cada alumno tenga “su chance” cada vez, sobre el estudio de una nueva noción y no tenga que padecer su eventual imagen de alumno con dificultad[2] antes de haberse enfrentado al problema propuesto.

---

[1] Estas características fueron puestas en evidencia por R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987).

[2] "El efecto Pygmalion" a sido evidenciado por varios investigadores, particularmente ROSENTHAL et JACOBON (1975). Las predicciones negativas de los docentes sobre ciertos alumnos se verificarían en razón que ellas son esperadas y en ciertos aspectos son los docentes los que las construyen. Podríamos decir que ciertos niños imitarían la imagen que les reenvían los docentes.

Sesión siguiente

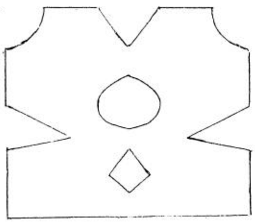
A esta sesión le sigue una sesión consagrada a repasar nociones relativas a la simetría axial cuyas grandes líneas son las siguientes :
Se presentan diferentes aspectos de la simetría axial :

- La simetría axial es una transformación puntual que transforma una figura en otra, es una isometría negativa involutiva (aspecto dinámico)
- La simetría axial es una transformación puntual que tiene numerosas invariantes (punto de vista estático) lo que pedagógicamente corresponde a la búsqueda de los ejes de simetría de las figuras usuales.

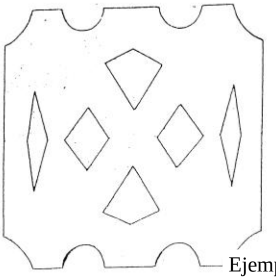
En el plano didáctico el formador pone en evidencia el rol del análisis matemático para comprender una progresión de la simetría axial en la escuela elemental, para imaginar las situaciones y los materiales que favorecen los cambios de puntos de vista estático y dinámico, el pasaje de lo global a lo local, etc.
La secuencia de formación sobre el tema de la simetría se termina por el estudio de algunas páginas de manuales. Este estudio se focaliza en un punto preciso. Por ejemplo el estudio de la introducción de la noción en diferentes manuales en un nivel dado, o bien el análisis de la progresión en el 3er ciclo (alumnos de 11 y 12 años), en los manuales de una misma colección, ou aún el análisis de los resúmenes o ayuda memoria para delimitar lo que está institucionalizado en uno o varios manuales, etc.

En ciertos casos, este trabajo sobre la simetría axial puede ser retomado en el cuadro de una unidad de formación facultativa « arte y matemáticas » consagrada al estudio de los diseños de motivos repetitivos en forma de rosa, guardas, mosaicos en las artes gráficas, plásticas o en la arquitectura.

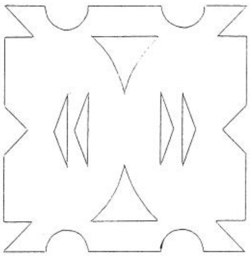
Anexo 1



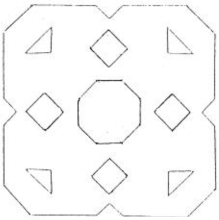
Ejemplo 1



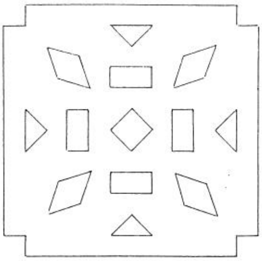
Ejemplo 2



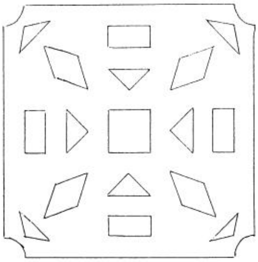
Ejemplo 3



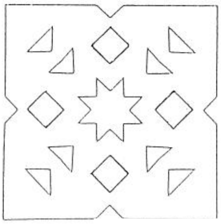
Ejemplo 4



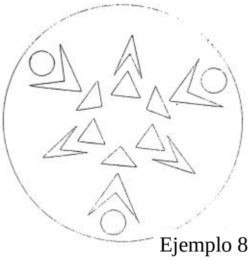
Ejemplo 5



Ejemplo 6

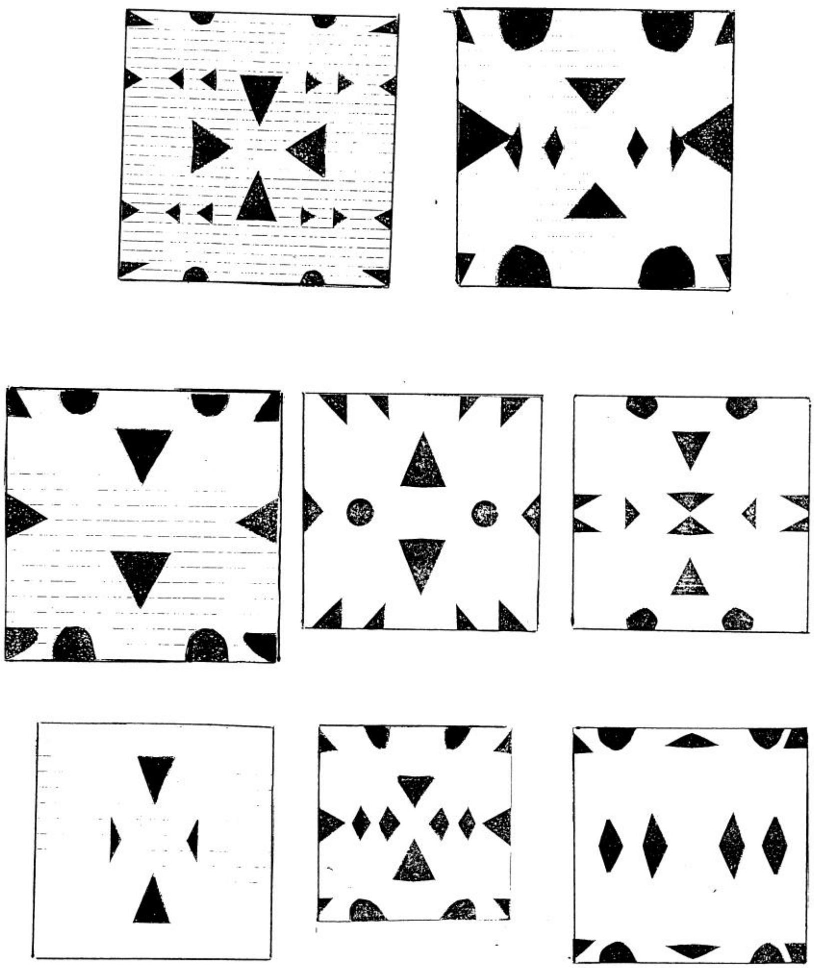


Ejemplo 7



Ejemplo 8

Anexo 2



Los objetos de la escuela : el octomóvil

Nicole Bonnet (2001)

Este artículo presenta los resultados de un taller realizado durante un coloquio. A partir de un objeto, se invita a los participantes a poner en marcha un proceso científico para fabricarlo. Luego se tratará de explotar sus propiedades intrínsecas que constituyen un pretexto para trabajar la geometría plana. Esta actividad es directamente explotable en formación inicial y continua de profesores de escuela.

1. Introducción

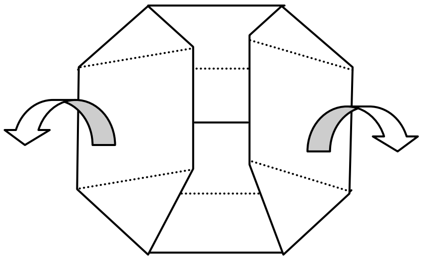
En lo que sigue, se pueden distinguir dos niveles. El primero consiste en el estudio, en vista de la fabricación, de un objeto no plano llamado « octomóvil ». Puede ser considerado como una especie de "sólido". Es un objeto tecnológico. En segundo lugar, este objeto está considerado como productor de objetos achatados variados los cuales van a ser mirados bajo un aspecto geométrico.

2. Puesta en marcha y consigna

El objeto es presentado de manera rápida remarcando que fue fabricado con cartulina blanca poco costosa, poco voluminosa, fácil a transportar, a conservar y re-utilizable.

El responsable del taller no manipula demasiado el objeto, deja que los participantes realicen sus descubrimientos. La consigna se revela muy estricta : « pueden girarlo en todos los sentidos, pero no pueden desarmarlo, ni escribir sobre. En un primer tiempo, deben observarlo a fin de fabricar uno que sea idéntico. Anotarán todo lo que les parece que les traerá problemas o lo que se cuestionen. Luego van a reflexionar acerca de las posibilidades de utilización en clase ».

Un octomóvil es distribuído a cada persona.

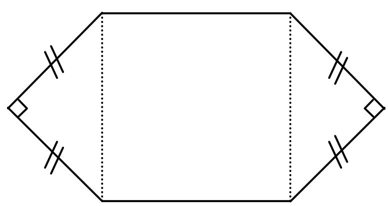


Durante el tiempo de una primera apropiación del objeto, se deja a disposición material sobre la mesa sin emitir comentario alguno : cartulina blanca, cartulina cuadriculada, reglas tijeras, compas y cola.

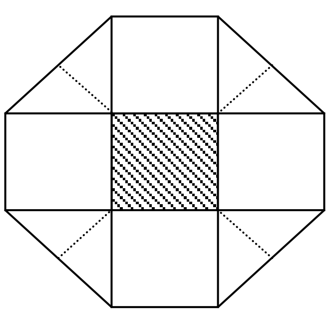
3. Procedimientos de construcción

El tiempo para la constucción es de aproximadamente tres cuarto de hora.
Un estudiante utilizó cartulina blanca y cartilina cuadriculada unicamente por la diferencia de color. Esto le ha permitido descubrir ciertas simetrías axiales de las diferentes figuras que toma el octomóvil chato cuando se lo manipula. Una de las dificultades reside en la distinción del objeto manipulado en tres dimensiones y del objeto considerado "de plano" (ver las observaciones del grupo 2)
Igualmente él ha fabricado octomóviles de dimensiones diferentes. En general, cuando luego de una primera construcción errónea, los alumnos me pide autorización para fabricar otro, mi respuesta es : "si,pero uno mas grande".
Otros estudiantes han elegido la cartulina blanca y han efectuado trazos con el compás o han utilizado el modelo como plantilla.
Dos colegas han utilizado la cartulina cuadriculada « para ir mas rápido ».
Al final de la construcción una persona ha decorado el octomóvil con pequeñas imágenes sacadas de un folleto turístico. Ha intentado buscar si ciertos arreglos permitían descomposiciones/recomposiciones de imágenes interesantes luego de rotaciones sucesivas.

Las piezas de base han sido rápidamente encontradas por los participantes.



Un participante ha buscado si podía construír el octomóvil sin encolado. Esto a inducido la idea que podría fabricarse con una solo trozo. Esta reacción se presenta con ciertos PE2 pero jamás espontáneamente en los niños de 4to o de 5to año (alumnos de 9-10 años). Lo que muestra que la idea de "patrón" (desarrollo en un solo trozo) no es natural.
Los PE2 cometen el error frecuente de trazar la pieza siguiente, que no funciona :

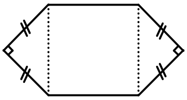


Atención : este recorte no funciona

Todos los participantes son conscientes que es necesario arreglar los trazos y los recortes, sino el octomóvil funciona mal. Este ejercicio finaliza por lo tanto con un pedido de cuidados que con frecuencia tenemos con los alumnos en geometría.

4. Producciones y remarcas de los diferentes grupos

Grupo 1 :
Los participantes han observado y descripto las figuras elementales presentadas en el octomóvil puesto de plano : cuadrado, triángulo rectángulo isósceles, hexágono octógono, cruz, diagonal. La figura que posteriormente será nombrada como "figura o pieza de base", es ésta :



Al final del 3er ciclo (alumnos de 12 años), el trabajo de repaso de vocabulario geométrico parece con frecuencia oportuno.
*Variables didácticas** aparecen rápidamente : naturaleza del soporte utilizado: cartulina cuadriculada o blanca ; instrumentos de trazado : compás, escuadra…
Se han realizado observaciones en relación a las simetrías (retorno).
Finalmente los participantes han encontrado el desarrollo en un solo trozo luego han buscado si era posible encolar poco o no encolar.
Se ha planteado una última pregunta : "Cuál debe ser el tamaño del hexágono para que el desarrollo sea posible en una hoja determinada ?" Se da una respuesta al final del artículo, mais pero no es seguro que sea del nivel de 3er ciclo.

Grupo 2 :
Los participantes se preguntaron si se trataba de un objeto matemático para concluír que sería mas seguro llamarlo objeto tecnológico. Va a inducir un trabajo matemático que parece totalmente pertinente: descripción, búsqueda de las propiedades del objeto achatado o no, reproducción, etc.
Ellos han buscado si era posible asociar varios octomóviles encolados, que funcionen de tal manera que la acción sobre uno desencadene acciones sobre los otros.

El grupo propuso las siguientes utilizaciones :

- El cambio de escala se acompaña de los problemas siguientes :
  - Construír un triángulo rectángulo isósceles conociendo su hipotenusa
  - Construír un octomóvil en el que el cuadrado de la "pieza de base" posee un lado de 6 cm de largo.
- La construcción de un octomóvil con un mínimo en cortes de tijera (este problema alcanza el grupo que buscaba un "patrón" en un único trozo).

- Las competencias pretendidas pueden inclinarse a la anticipación y creación de imágenes mentales. Una ficha de fabricación (anexo 1) utilizada en clase ha sido distribuída a los participantes (se trata para los niños de completar los cuadros vacíos que aquí están escritos en itálica).
- El estudio de las simetrías axiales de las figuras que se obtienen luego de las manipulaciones del objeto y posicionamiento de plano.
- La búsqueda del número de rotaciones del objeto en tres dimensiones para que retome su posición de partida. Ella se ve favorecida por la construcción con cartulina de dos colores diferentes.
- El cálculo del número de "fotos" del objeto plano (llamadas "diferentes posiciones" en anexo 3). Este número es limitado.
- La constitución de un objeto interdisciplinario matemáticas/artes plásticas/tecnología.

<u>Grupo 3</u> :
Dos preguntas han provocado debates entre los miembros del grupo. Son de dos tipos : las preguntas tecnológicas y las preguntas matemáticas. (Sucede lo mismo para los alumnos.)
El hexágono es regular o no ? Respuesta no.
El octógono es regular o no ? Respuesta no.
Se puede fabricar un octomóvil sin cola ? Respuesta si : scotch es suficiente.
También es interesante hacer constatar a los alumnos que las dimensiones del objeto plano terminado son proporcionales a las de la "pieza de base".

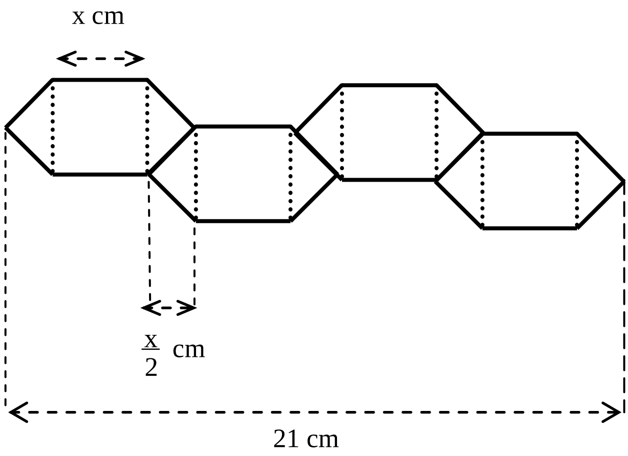
El grupo ha propuesto dos sesiones que permiten utilizar el octomóvil.
Sesión 1 : observación, reproducción.
Estrategia : hacer cuatro hexágonos regulares. Parece imposible que durante la apropiación los alumnos puedan imaginar el trazado en un solo trozo.
Balance: puesta en evidencia de las dificultades encontradas, descripción de las figuras obtenidas.
Sesión 2 : proyecto de cobertura.
Consigna : debería proprorcionarles una cartulina pero deseo economizar. Cuántas piezas de base puedo construír en un formato A4 ?
Se propone una cobertura en anexo 2.

<u>Grupo 4</u> :
Este grupo se preguntó :

- Cómo circunscribir los encolados a las zonas útiles (una de las respuestas es hacer rayar estas zonas a los alumnos antes que ellos coloquen la cola).
- Qué tipo de cola emplear ? (fuerte tipo scoth, de contacto o suave).
- Se puede fabricar un objeto móvil próximo al octomóvil que posea dos triángulos isósceles no rectángulos (o equiláteros) sobre la pieza de base? Además, han sido abordados los siguientes puntos concerniendo :

- Las competencias tecnológicas indispensables para 3er ciclo : la fabricación del octomóvil necesita el arte del trazado, la práctica del plegado y el dominio de los encolados.
- Los conocimientos geométricos para fabricar el octomóvil : reconocer figuras simples en una figura compleja (la forma de la base), saber construír esta forma. En relación a ésto, este grupo ha trabajado mucho con cartulina blanca. He mostrado producciones de alumnos y los participantes se dieron cuenta de la dificultad que para los alumnos de escuela elemental representa trazar un cuadrado y dos cuartos de cuadrado ensamblados sobre los lados opuestos de éste. Aquí se trata de un ejercicio de precisión finalizada. El maestro no demandará un esfuerzo de cuidado unicamente para quedar conforme, sino para que el objeto gire sobre sí mismo.

El problema de la construcción de un conjunto de cuatro figuras de base en un solo trozo a sido igualmente planteado. Cuál debe ser el lado del cuadrado para que la construcción entre en una hoja de formato 15 x 21 ?



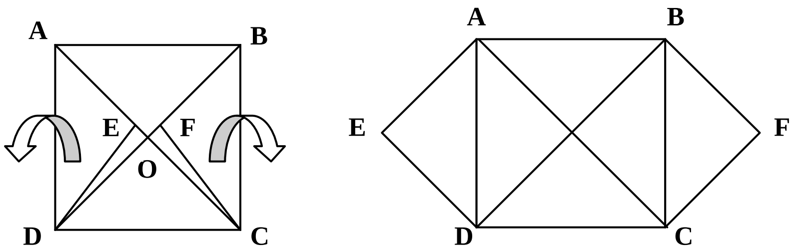
Un rápido cálculo $\left(4x + 5\frac{x}{2} = 21\right)$ da con las condiciones impuestas quí,
$x = 3{,}5$ cm.

5. Conclusión

He aquí una proposición de sesión para alumnos de 3er ciclo
El octomóvil propuesto a los alumnos es fabricado en cartulina cuadriculada. El cuadrado central mide 4 cm de lado.

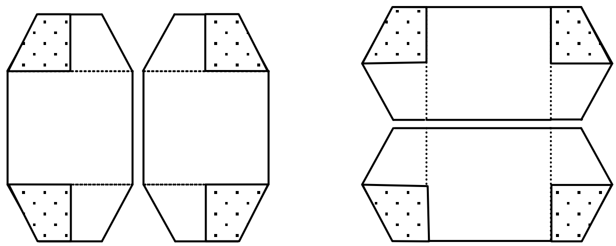
<u>Sesión 1</u> :

Observación del objeto a fin de hacer emerger el vocabulario, manipulación y fabricación del objeto.
Los alumnos mas rápidos construyen un octomóvil de dimensiones diferentes.
Sesión 2 :
Búsqueda de todas las fotografías posibles cuando el octomóvil está en posición « plano » (anexo 3) y nuevo descubrimiento de esta forma cuando el maestro la muestra sobre un poster.
Completar la ficha técnica o bien poner en orden las cuatro etapas de la fabricación antes de completar la ficha.
Sesión 3 : trabajo a elección
Escritura del o de los programas de construcción para realizar una pieza de base sobre papel blanco. Es prudente remarcar que la figura de base presenta pliegues según [AD] y [BC] y que los vértices E y F de los triángulos rectángulos se confunden en O centro del cuadrado.



Lectura de programas de construcción escrito por el maestro y trazado de esta pieza de base sobre papel blanco.
He observado que los alumnos de 4to y 5to año no sabían trazar arcos de círculos y sobrecargaban la figura con círculos completos. Un trabajo mas detallado de construcciones de las figuras complejas parece oportuno.
Sesión 4 : fabricación de un octomóvil en cartulina
Se fabrica solo una pieza de base y con mucha atención y cuidado.
Para las otras tres, se utiliza "el método de los agüjeros" : con ayuda de la punta seca del compás, se ubican los puntos A, B, C, D, E y F, luego se traza con lápiz y se recorta...

Algunas pistas de perspectivas : fabricación de dos cuadrimóviles cuya marca (trazo del objeto sobre el papel) es un cuadrado o un rectángulo. Fabricación de un hexamóvil, de un octomóvil regular, de un ciclomóvil cuyas marcas son un hexágono regular, un octógono regular y un disco. La pregunta planteada por el grupo 4 (*se puede fabricar un objeto móvil que posea dos triángulos isósceles no rectángulos o equiláteros* ?) sobre la pieza de base no parece posible. Sin embargo esto ha permitido encontrar otro octomóvil.

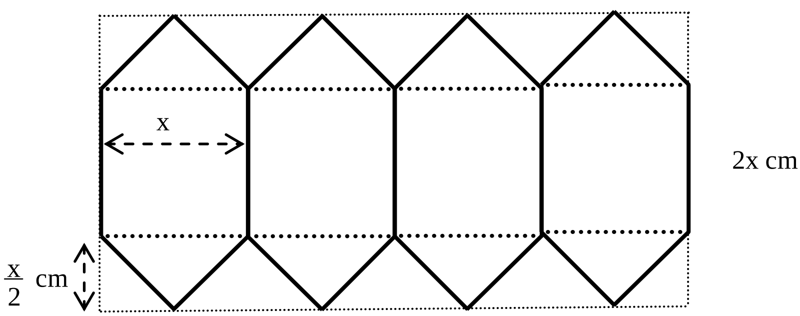


Estas son cuatro piezas de base. (de a dos idénticas)
Recortar sobre el trazo contínuo exterior de las figuras. Plegar según los punteados
Encolar sobre las superficies punteadas

Finalmente, otra pista consiste en la resolución de un problema que podría dar lugar a una exploración en 3er ciclo.
"Fabricar un octomóvil" el mas grande posible en una hoja de formato A4. Se expresarán en números enteros, en cm.

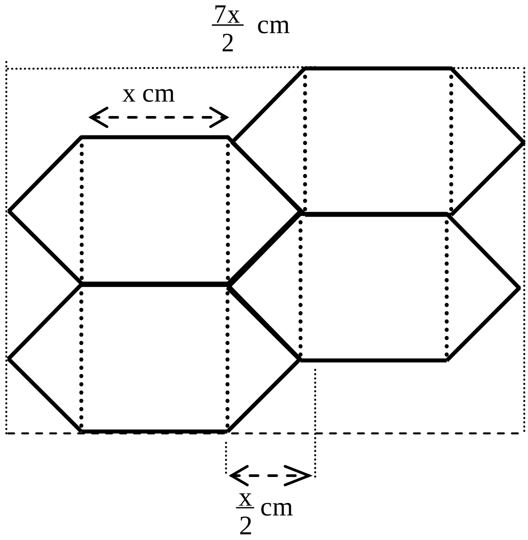
Indicios de solución :

Proposición 1



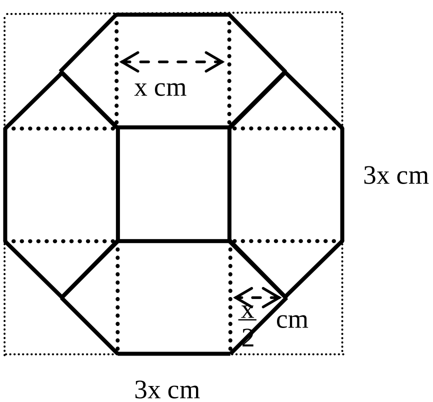
Encuadre por un rectánguloe de 4x x 2x

Proposición 2



Encuadre de un rectángulo de $\frac{7x}{2} \times \frac{5x}{2}$

Proposición 3



Encuadre por un rectángulo de 3x x 3x

Siendo la solución demandada en un número entero de centímetros, la proposición 1 da x = 7 cm, mientras que la proposición 2 da x = 8 cm y la 3 da 7 cm. La segunda proposición es entonces la mejor.

Anexo 1 **FICHA DE FABRICACION DEL OCTOMOVIL**

1. Material

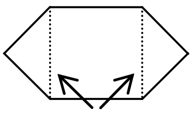
- *Cartulina cuadriculada o blanca*
- *Lápiz negro*
- *Tijeras…*
- *Regla.*
- *Compás (**si se traza sobre cartulina blanca)***
- *Cola*

2. Fabricación

- Trazar cuatro figuras de bases idénticas ayudándose con el cuadriculado.

- Describir la figura de base :

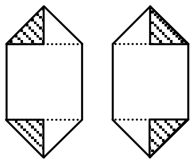
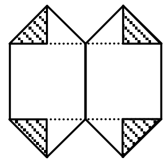
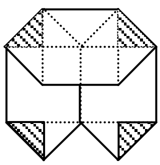
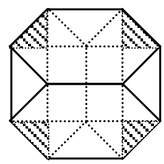
La figura de base es un hexágono no regular. Está formado por un cuadrado y dos triángulos isósceles rectángulos.
El lado del cuadrado mide 4 cm y la base del triángulo mide también 4 cm. Los triángulos son adyacentes a los lados opuestos del cuadrado.



Pliegues para marcar

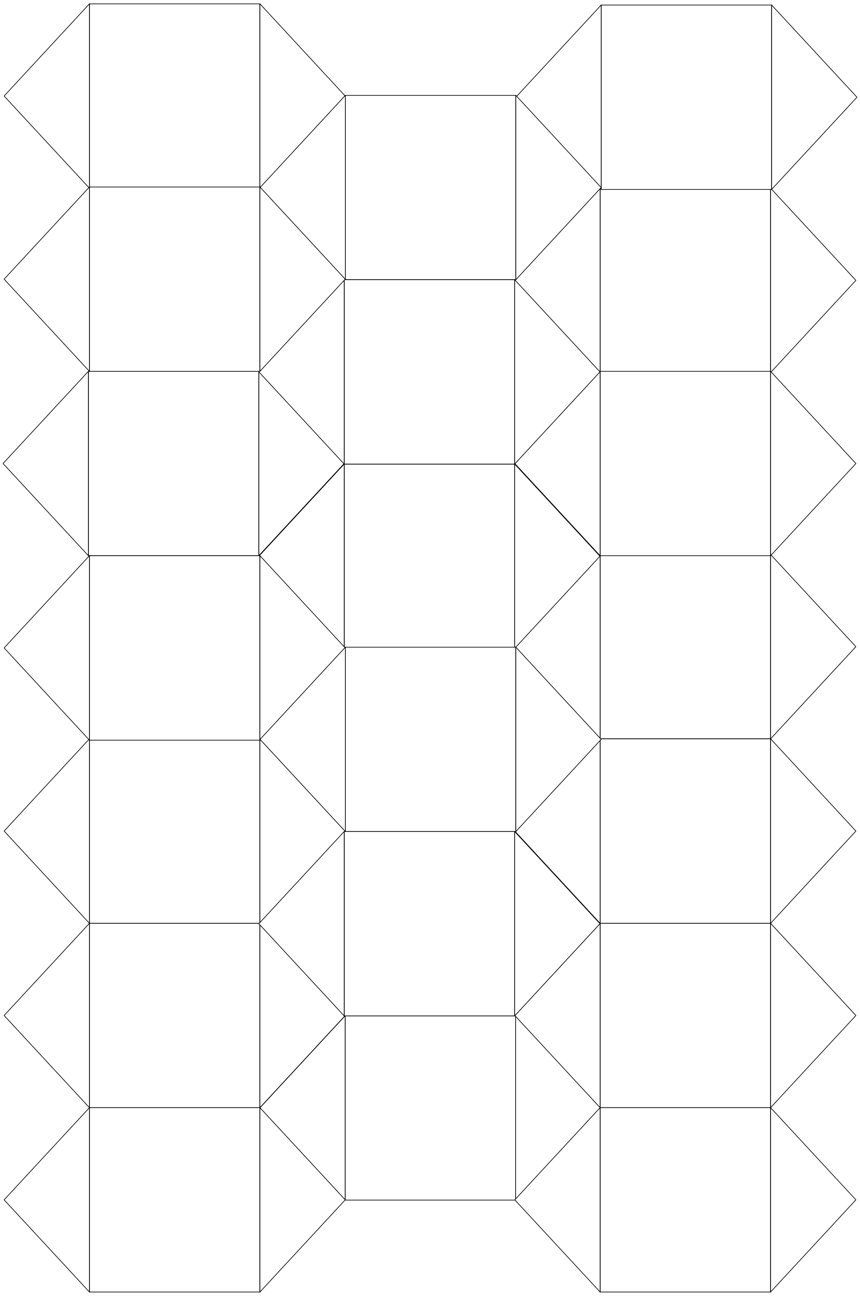
Recortar estas cuatro figuras y plegar sobre las líneas punteadas

3. Ensamblado

Primera etapa : *Ubicar verticalmente dos piezas de base.* *Colocar la cola sobre las partes rayadas* 	**Segunda etapa** : *Colocar una pieza al lado de la otra* 
Tercera etapa *Colocar encima una tercer pieza como lo indica la figura y presionar. Atención que nada se mueva !* 	**Cuarta etapa** *Colocar la cuarta pieza como lo indica la figura y hacer presión. Esperar que la cola esté seca. Ahora a jugar con el octomóvil.* 

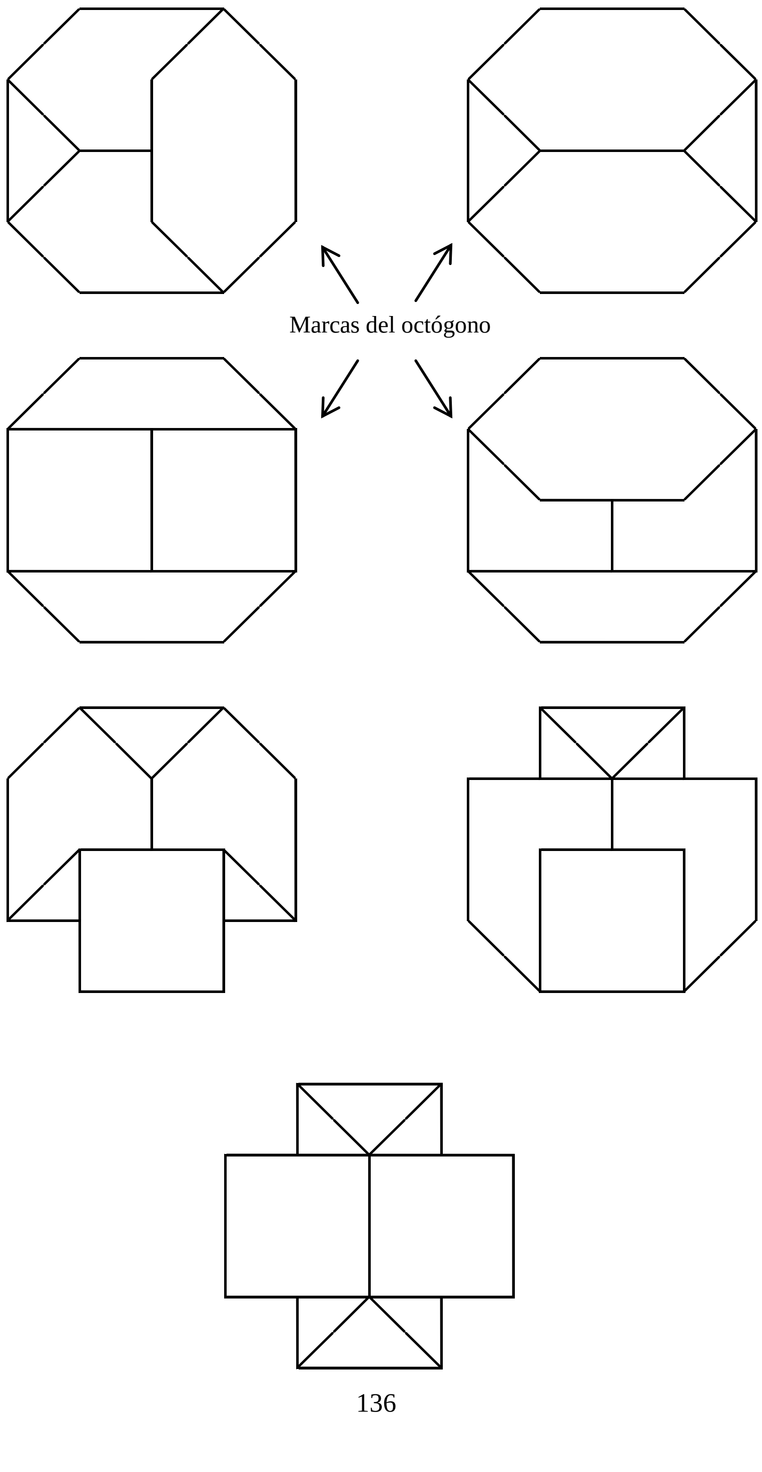
Anexo 2

COBERTURA



Anexo 3

LAS DIFERENTES POSICIONES DEL OCTOMÓVIL



Magnitudes y medidas

Area de superficies planas

Marie-Lise Peltier - Catherine Houdement (1992)

Este artículo propone un dispositivo destinado a la formación inicial y contínua previsto para dos sesiones de tres horas. Se basa en un problema de regla de tres simple: buscar un máximo de formas de dividir una hoja de papel en dos partes que puedan superponerse.
Los autores describen el desarrollo de varias maneras, identificando los objetivos al inicio. Finalmente el análisis del dispositivo se efectúa en dos planos: el plano matemático y el plano didáctico.

1. Objetivos

a) Objetivos matemáticos

- En un primer momento, independientemente de la enumeración en papel cuadriculado, del cálculo numérico y de la utilización de fórmulas:
    - Construír el concepto de área,
    - Construír la noción de medida,
    - Hacer funcionar la adición de medidas de área.
- Distinguir área, perímetro y forma de una superficie.
- Utilizar la simetría central como herramienta de resolución de problemas y deducir algunas propiedades.
- Introducir las fracciones, producir igualdades entre fracciones, compararlas, ordenarlas.

b) Objectivos didácticos

La situación presentada ilustra las nociones de *herramienta* * y de *objeto** porque permite poner en juego dos conceptos matemáticos : el área como *objeto*, la simetría central como *herramienta* implícita de resolución del problema propuesto. Esta situación permite también introducir las fracciones como codificaciones que son necesarias debido a la insuficiencia de los enteros para tipos de superficies de igual área.

2. Actividad

a) Primera fase

Objetivo

Construír superficies de igual área , pero de formas diferentes y definir la noción de área (fuera del contexto numérico).

Material

- Páginas de guías telefónicas (formato A4) en gran número.
- Tijeras, instrumentos usuales de geometría.

Organización

Trabajo individual

Consigna 1

« Deben cortar cada hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta sin que se pierda nada ni que no haya necesidad de encolar (es decir que con las dos partes será posible reconstituír la hoja inicial : deben buscar el máximo de partes diferentes que respondan a esta consigna de partición que designaremos por (P) ».

Procedimientos observados

- Los estudiantes comienzan por plegar en dos, siguiendo las medianas luego las diagonales del rectángulo. En general en este momento, algunos piensan que han encontrado todas las divisiones posibles, entonces es necesario darles nuevamente la consigna precisando que deben intentar encontrar otras.
- El procedimiento siguiente consiste en plegar la hoja de manera que dos vértices opuestos se superpongan . Generalmente esta partición da lugar a la idea que existe un número infinito de soluciones.

Otros procedimientos encontrados son los siguientes :

- Plegado en 8 o 16 seguido de desplegados y recortes por las líneas de plegado elegidas mas o menos bien (los éxitos y los fracasos se relacionan con estas elecciones !).
- Búsquedas a partir de la construcción de segmentos de igual medida partiendo de dos vértices opuestos diametralmente.
- Procedimientos que consisten en construír una línea de partición simétrica en relación a una mediana, luego en razón del fracaso, evolución de este procedimiento hacia la construcción de una línea de partición simétrica en relación al centro de la hoja.

Observación

Podemos constatar numerosas tentativas que no conducen al resultado final, pero a través de estos ensayos, sus autores formulan nuevas hipótesis sobre las propiedades de la línea de partición. Numerosos estudiantes encuentran bastante rápido cómo construír una línea de partición poligonal que permite resolver el problema efectuando trazos simétricos desde el centro de la hoja, otros buscan líneas de partición curvilíneas a mano alzada o trazando círculos.

Síntesis

Los estudiantes muestran algunas particiones realizadas. Verifican la superposición exacta de las dos partes y la reconstitución posible de la hoja inicial con las dos partes, explican a sus camaradas el procedimiento utilizado para obtener la línea de partición.

b) Apporte del profesor y primera *institucionalización**

Sobre el área

- Las dos partes que corresponden a una misma partición (P) pueden superponerse, por lo tanto tienen la misma forma y el mismo perímetro.
- Dos partes que corresponden a particiones (P) diferentes no pueden superponerse directamente, sin embargo en ambas se verifica la propiedad : *« con dos partes análogas a cada una de ellas se puede reconstituír la hoja entera »* Son, por lo tanto, "extendidas" tanto una como la otra; contienen siempre la misma cantidad de papel; corresponden siempre a « media hoja »; se dice que tienen el **igual área**.

Resultados

- Dos superficies que tienen **igual área** no tienen necesariamente la **misma forma**.
- Dos superficies que tienen **igual área** no tiene necesariamente el **mismo perímetro**.
- Dos superficies que pueden **superponerse** tienen **igual área, la misma forma**, el mismo perímetro.
- Con cualquier parte que corresponda a una partición (P), se puede (mediante el recortado y el encolado, sin superposición y sin pérdida de papel) construír cualquier otra parte que corresponda a otra partición (P).

Será conveniente llamar, momentáneamente, familia G a la familia de partes obtenidas.

Sobre la simetría

La propiedad verificada por la línea de partición para responder a la consigna es la siguiente : esta línea es **simétrica en relación al centro del rectángulo**.

c) Segunda fase

Objetivos matemáticos

- Re-utilizar la noción de área y de simetría central.
- Crear un stock de formas de áreas diferentes pero fácilmente comparables.
- Introducir un código con fracciones y hacerlo funcionar.

Lo que está en juego
Permitir a todos, crear superficies de formas originales y ornamentadas.

Organización
Trabajo individual o en grupos de dos.

Material
El mismo que se utilizó anteriormente

Consigna 2
« Deben recomenzar la actividad de la consigna anterior pero con rectángulos que tengan el igual área que las formas anteriores, es decir con mitades de hojas rectangulares ».

Observaciones
Los estudiantes pueden así re-utilizar lo que hicieron, lo que vieron hacer por otros al momento de la fase 1. Notamos en esta etapa, que ellos sienten placer en dar vía libre a su imaginación y que toman consciencia que ***se puede aumentar libremente el perímetro de la superficie sin aumentar el área.***

Se constituye así, una segunda clase de superficies del mismo área que designamos H. Se materializan las dos clases que se obtuvieron de las hojas grandes de papel (tipo *paper board*) sobre las que se pegan varias superficies de una misma clase.

Cuando se trata de introducir un código a las clases construídas, que sea representativo de las superficies que contienen, el grupo acuerda generalmente en designar la clase G por ½, porque contiene mitades y la clase H por ¼, porque contiene los cuartos de hojas. Se registra esta codificación en grandes hojas que materializan las clases.

Consigna 4
« Van a construír, en grupos de dos (o de 4), superficies que tengan el mismo área que la página de la guía telefónica, pero de formas diferentes ».

Procedimientos observados
Los estudiantes ubican de diferentes maneras, una al lado de la otra :

- Dos superficies de la familia ½, correspondientes a una partición (P), es decir que se pueden superponer perfectamente.
- O dos superficies de la familia ½, correspondientes a dos particiones (P) diferentes, por lo tanto de igual área pero de formas diferentes.
- O una superficie de la familia ½ y dos superficies de la familia ¼.
- O cuatro superficies de la familia ¼.

Síntesis

Las diferentes proposiciones se presentan y se discute al respecto. En caso de desacuerdo, se realiza nuevamente el recorte y el encolado para reconstituir la página de la guía a partir de la hoja propuesta. Las superficies que se mantienen forman una nueva clase de superficies de igual área las que se decide codificar por 1 porque se trata de superficies que tienen igual área que una hoja de la guía telefónica.

La descripción de los diferentes procedimientos da lugar a su traducción en términos de codificación en francciones :

- Los dos procedimientos que se citan primero se traducen por
  ½ + ½ = 1 o por 2 x ½ = 1 (leído como « *dos por un medio* »)
- El tercero por
  ½ + ¼ + ¼ = 1 o por ½ + 2 x ¼ = 1.
- El último por
  ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 o por 4 x ¼ = 1.

Consigna 4

« Van a trabajar en grupos de cuatro, construír nuevas clases de superficies de igual área ».

Procedimientos observados

- Partición (en dos partes) de rectángulos correspondientes a un cuarto de hoja de la guía telefónica y que pueden superponerse.
- Reunión de superficies de diferentes clases obtenidas.

Puesta en común

Se comparan las diferentes clases propuestas, se adhieren sobre hojas grandes las superficies de cada clase. En función de las superficies que contiene cada clase, ésta es codificada y se otorgan escrituras variadas a los diferentes procedimientos utilizados para construir las superficies de la clase.

Durante la puesta en común, generalmente se obtienen numerosas clases y por lo tanto numerosas escrituras, por ejemplo :

1/8 + 1/4 = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3 x 1/8 = 3/8
1/2 + 1/4 = 3/4 ; 1 + 1/4 = 5/4 ; 1 + 1/2 = 3/2 = 6/4 ;
1 + 1/2 1/4 = 7/4 ; etc.

Consigna 5

« Van a ordenar las diferentes clases obtenidas : para ello, pueden construír para cada clase, un rectángulo de la familia en la cual una de las dimensiones está fija, por ejemplo el ancho de la hoja de la guía telefónica. ».

Puesta en común

El orden de las clases en función de la relación « es menos extensa que » se materializa acomodando las grandes hojas que representan las clases, que es justificada por la superposición de los rectángulos de las diferentes clases que tienen una dimensión común y da lugar a una serie de escrituras del tipo:

$1/8 < 1/4 < 3/8 < 1/2 < 3/4 < 1 < 3/2 < 7/4 < 2$

Una nueva aplicación de estas diferentes fases puede ser propuesta a partir de superficies planas distribuídas (cf. anexo). Durante la puesta en común de este trabajo individual, se constata que es posible escoger cualquier clase como unidad y que las codificaciones que se deducen son proporcionales a las codificaciones de partida.

3. Análisis de la actividad

Análisis matemático

Esta serie de actividades es un ejemplo de una progresión sobre una magnitud y la medida vinculada a esa magnitud.
El profesor retoma con los estudiantes la explicitación del rol de las diferentes etapas :
1. Para definir la magnitud área :

- Definición de una relación de equivalencia en un conjunto de superficies, aquí la relación « tener igual área ».
- Construcción del conjunto cociente, aquí las clases de superficies que tienen igual área.
- Caracterización de las clases, aquí por una codificación en fracciones y por la eleccion de un representante « rectángulo » de cada clase.
- Construcción de una relación de orden en el conjunto cociente

2. Para construír una codificación numérica que es una medida : construcción de una aplicación del conjunto cociente en el conjunto de los números reales:

- Positiva
- Aditiva
- Monótona
- Perfectamente determinada por la elección de una unidad, aquí la hoja A4.
- Verificando las siguiente propiedades : la desigualdad triangular, las superficies vacías tienen una área nula, existen superficies no vacías de área nula.

Observación

Esta situación permite distinguir naturalmente objeto matemático, dimensión medible, medida.
Por otra parte, aparece como una introducción pertinente a la necesidad de los números enteros y mas precisamente de las fracciones. Efectivamente, permite darle sentido a las escrituras fraccionarias:

- Definición de $1/n$ por $1/n + 1/n + \ldots + 1/n = 1$

y por $n \times 1/n = 1/n \times n = 1$;

- Producción de igualdades variadas de los números ;
- Comparación y orden de fracciones y de escrituras fraccionarias. En fin permite evocar cuestiones de la simetría central que aparece como una herramienta de resolución del problema de partición.

Análisis didáctico

Esta situación permite destacar :

- El aspecto auto-validante de la primer consigna en la primera fase : el estudiante, él mismo sin intervención de otra persona es quien decide si la partición que ha hecho conviene o hay que eliminarla ;
- El rol de la hipótesis errónea en esta fase : frecuentemente es a partir de una línea de división que no conviene que el estudiante logra encontrar las propiedades, que debe verificar esta línea para responder a la consigna ;
- El aspecto *herramienta** de la noción de simetría central que los estudiantes utilizan luego de un cierto tiempo de búsqueda, aunque no haya sido objeto de un aprendizaje anterior : se aborda la noción de simetría por su definición, es percibida por su aspecto funcional ; aquí es posible escoger de *institucionalizar* (o no)*esta noción para descubrir su aspecto objeto de saber y estudiar las propiedades utilizadas para construir la línea de división;
- El aspecto *objeto** del concepto de área, que aquí está en evidencia no por una definición, sino por una relación de equivalencia;
- El aspecto *herramienta** de la noción de fracción, que aparece aquí como una codificación que da cuenta de manipulaciones finalizadas antes de convertirse en *objeto de saber institucionalizado* y de ser aplicados en otros contextos.

4. Prolongaciones

a) Sobre el área

A nivel matemático

Transferencia de las nociones estudiadas hacia otros materiales.

Actividades para la re- aplicación de nociones aprendidas.

A nivel didáctico

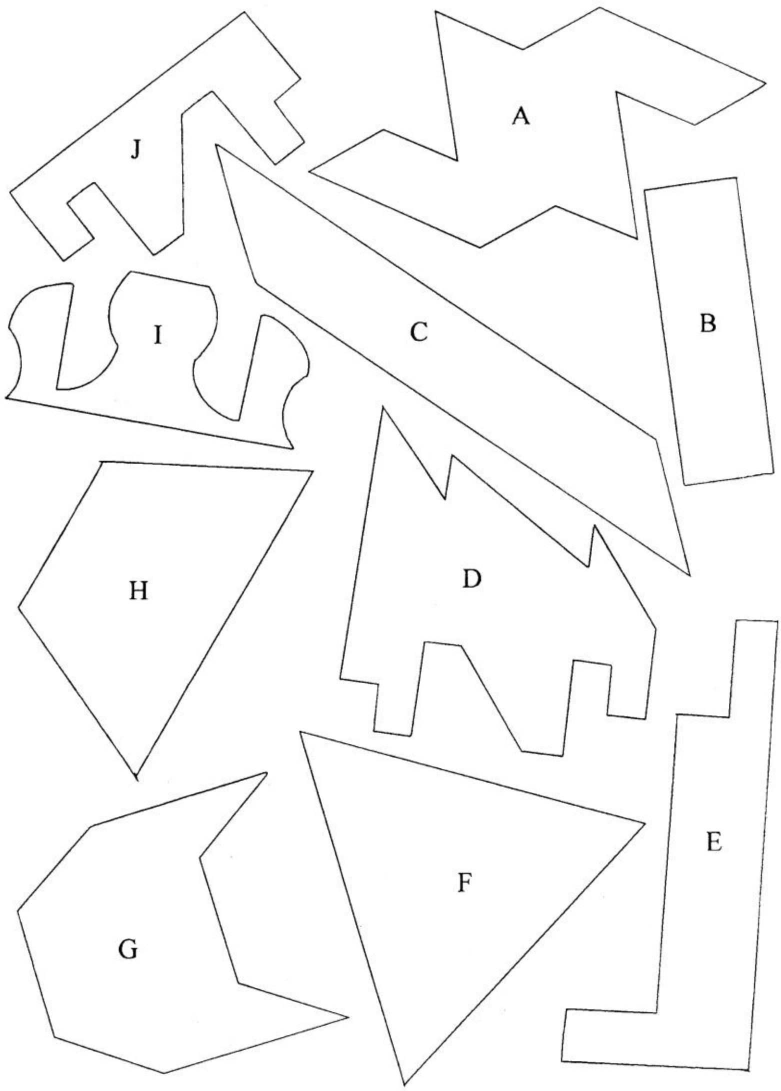
Estudio de manuales a partir de un cuestionario de tipo :

- Cómo se introduce la noción de área en los manuales escolares ?
    - Aspecto numeración;
    - Aspecto encuadre;
    - Rol del cuadriculado;
    - Introducción de la unidad;
    - Fórmulas.
- Cuál es la parte y el tipo de manipulaciones que se propone a los alumnos ?
- Cómo considera el manual las distinciones :
    - Area / numeración ;
    - Area / número ;
    - Area / superficie ;
    - Area / perímetro ?

b) Sobre los racionales

Esta es una de las situaciones “faro” para trabajar la prolongación de la noción de número entero. Forma parte en este caso, de la progresión sobre la introducción de los racionales.

ANEXO



Una mínima aproximación a la noción de magnitud en PE1

Maryvone Le Berre - Catherine Taveau (1995)

Este artículo propone un dispositivo destinado a la formación inicial previsto para dos sesiones de tres horas. Las situaciones descritas tienden a disociar « área » y « perímetro ». Las modalidades de organización se esfuerzan en considerar la diversidad de las respuestas que los estudiantes pueden producir para los ejercicios propuestos.

Este texto describe dos sesiones de formación de tres horas destinadas a estudiantes de PE1(profesores en 1er año de formación) sobre el tema « áreas y perímetros ». El dispositivo completo es el siguiente :

- Un test de diagnóstico (30 minutos) utilizado para constituír los grupos de trabajo de la primera sesión.
- Una primera sesión de tres horas sobre la noción de área.
- Una segunda sesión de tres horas para diferenciar área y perímetro y una síntesis general.
- Posteriormente, durante el año, un test final y un análisis del proceso seguido.

Objetivos que se relacionan a la noción

Aprehender las nociones de largo y de área como magnitudes medibles, sobre los que se pueden definir operaciones (comparación, adición, multiplicación por escalar), antes de pasar a la medida.
Planteamos la hipótesis que la mayoría de los estudiantes tienen conocimientos y representaciones truncadas sobre el sujeto, por ejemplo se trata esencialmente para ellos, como para sus futuros alumnos, de conocer y aplicar fórmulas.
La mayoría jamás a escuchado hablar de "magnitudes". Sin embargo estimamos que bajo el título « medida » en la presentación de los programas, los PE1 deberían reconocer que se trata de « magnitudes y medida de esas magnitudes ». Deberían saber lo que se entiende por ejemplo por « disociar magnitud y forma, magnitud y número ».

Objetivos didácticos

- Entrenamiento para el *análisis a priori** ;
- Reconocimiento de la noción de *variable didáctica** en dos ejemplos;
- Noción de *teorema del alumno*.

En coherencia con la prioridad que se da a los objetivos sobre las nociones, a los estudiantes se los posiciona como alumnos durante la mayor parte de las dos sesiones. Sin embargo, el dispositivo en sí está concebido para permitir una transposición, lo que supone tomar el tiempo necesario durante las sesiones y /o al momento del repaso, para explicitar y analizar ciertas elecciones, en particular:

- Identificación de los conocimientos y representaciones inciales de los estudiantes ;
- Trabajo diferenciado sobre un mismo problema jugando con las *variables** de la tarea;
- Apoyo en la puesta en común y el debate entre pares.

1. El test

Ver fichas 1 a 3 en anexo.

<u>Ficha 1</u> : Tiene como única función permitir eliminar posibles ambigüedades sobre los términos empleados.

<u>Ficha 2</u> : Pretende identificar diferentes niveles de conocimiento en relación al área del triángulo.
<u>Inventario de los procedimientos previstos</u>

- Bloqueo (la altura no existe para el triángulo B) y no hay respuesta.
- Juicio a ojo : « A es mas grande ».
- Medición de las bases y las alturas « prototípicas » y cálculo. Aunque sin error de cálculo, las respuestas podrán ser : *áreas iguales, casi iguales o desiguales.*
- Medición y cálculo tomando el ancho de la banda como altura para los dos triángulos.
- Razonamiento del tipo *« igual base e igual altura para los dos triángulos».*
- Utilización de superficies intermedias (paralelogramos, rectángulos,…).
- Recorte de un triángulo para compararlo con otro.

<u>Ficha 3</u> : Extraída de una evaluación nacional para el ingreso a 6to año (alumnos de 11 años), sirve para detectar un posible *teorema del alumno** muy persistente.
<u>Inventario de procedimientos previstos</u>

<u>Para el área</u> :

- Conteo de los cuadrados.

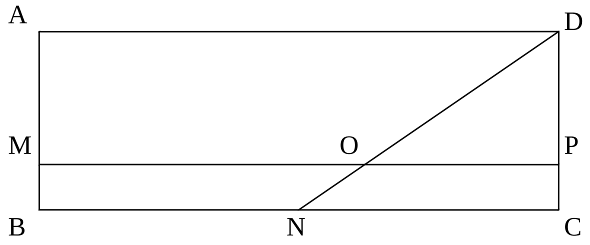
<u>Para el perímetro</u> :

- Juicio a ojo (por lo tanto sobre el área).
- Puesta en ejecución del *teorema del alumno « si el área es mas grande, el perímetro es mas grande».*
- Conteo de los « cuadrados del borde ».
- Conteo de los lados de los cuadrados del borde.
- Descomposición de los dos perímetros en dos partes : una « frontera común » y dos partes de igual largo.

2. Primera sesión : comparación de áreas.

Esta primera sesión tiene por objetivo la distinción entre superficie, área, medida del área, objetivo que puede ser anunciado desde el inicio. Esta sesión debe hacer emerger procedimientos de comparación de áreas sin recurrir a la medida, o haciendo intervenir la medida sea desde un punto de vista unidimensional, sea desde un punto de vista bidimensional.

a) Un problema.



MB es igual al cuarto de AB, N es el punto medio de [BC].
Las superficies MBNO y ODP tienen igual área ?

b) Análisis a priori de los procedimientos de resolución.

Razonamiento por diferencia

Para demostrar la igualdad de las áreas, basta con demostrar la de las áreas del rectángulo MBCP y del triángulo NCD.

Esta puede obtenerse de diferentes maneras :

Algebraica: nombrando a y b las medidas de los largos de los lados del rectángulo ABCD, se obtiene fácilmente que ambas son iguales a : ab/4.

Geométrica : es factible cubrir el rectángulo por cuatro rectángulos que se pueden superponer a MBCP, y por cuatro triángulos que se pueden superponer a NCD.

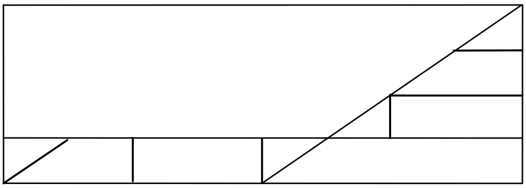
Numérica : si el enunciado no da ninguna información sobre los largos, ésto supone una medición, por lo tanto en principio una incertidumbre. De hecho puede haber dos procedimientos bastante diferentes:

1. Medición de los datos « útiles para el cálculo », largo y ancho del rectángulo, base y altura del triángulo, sin considerar la dificultad del enunciado.
2. Consideración de las dificultades del enunciado sea para guíar sea para corregir la medición. Por ejemplo, se puede medir AB y de allí deducir BM, o medir los dos « arreglándose » para que uno sea el cuádruple del otro, y es un arreglo que puede permanecer implícito. Tomar en cuenta explícitamente las relaciones entre anchos acerca del procedimiento numérico y el algebraico aunque no se trate del mismo objeto.

Comparación directa

Algebraica : supone determinar los anchos MO y OP (respectivamente 5a/8 et 3a/8) utilizando la propiedad de Tales o una relación de similitud por ejemplo, luego de conducir un cálculo algebraico difícil para los PE1 (encontramos 9ab/64).

Geométrica : cobertura de las dos superficies con unidad común. Recorte de una superficie para cubrir la otra, por ejemplo :



Numérica : luego de la medición. Si las medidas son números enteros, la incertidumbre vinculada a la medición corre el riesgo evidentemente de ser completamente evacuada.

c) Composición de los grupos y elección de los enunciados.

La heterogeneidad de los estudiantes puede ser muy grande ante tal problema. Nos parece capital que cada uno pueda trabajar en su nivel. La ficha 2 del test (comparación de las áreas de dos triángulos) permite prever al menos dos tipos de dificultades : (1) bloqueo, duda en el trabajo de manipulación, por la ausencia de conocimientos suficientemente seguros.

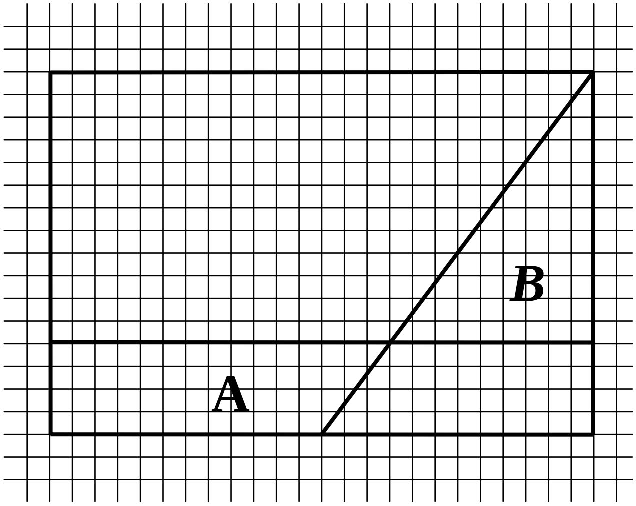
(2) recurso sistemático a la medición de los anchos y cálculo sin análisis de la figura.

Nos parece prudente constituír grupos « homogéneos » en relación a estos comportamientos previstos, proponiendo versiones diferentes del problema.

Primera versión

Para los que produjeron respuestas erróneas o que no respondieron a la ficha 2, sería importante en un primer tiempo facilitar la mobilización de los procedimientos por recorte o cobertura, de lo que surge la elección de un soporte cuadriculado y de valores « favorables » para a, b y a/b.

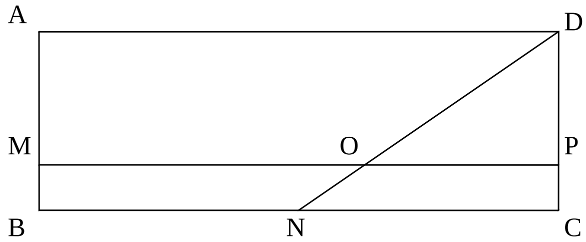
El papel cuadriculado permite igualmente comunicar gráficamente los datos.



Las áreas de las superficies A y B son iguales ?

Segunda versión

Para los que privilegian medición de los anchos y cálculo, la elección apunta a descalificar (relativamente) este método, en beneficio de métodos geométricos, de donde surge la elección del papel blanco con medidas en cm poco cómodas.

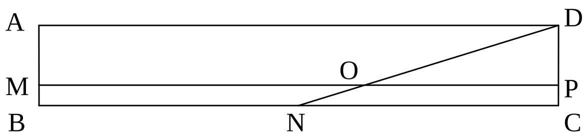


AB = 4MB ; N es el punto medio de [BC] : las superficies MONB y ODP tienen igual área ?

Tercera versión

Faltan los que han respondido de manera satisfactoria al test utilizando uno de los procedimientos siguientes : «*igual altura, igual base* », *« utilización de superficies intermedias », « recorte de un triángulo y comparación con otro ».*

El objetivo principal es hacer emerger la diversidad de los procedimientos y ver que este problema puede resolverse a diferentes niveles. No parece acertado, sin embargo que aparezca el razonamiento por diferencia. Se ha optado por un rectángulo muy alargado, una forma poco cómoda lo que esperamos favorezca una discusión sobre la validez de la cobertura.



AB = 4MB ; N es el punto medio de [BC] : las superficies MONB y ODP tienen igual área ?

Consigna

Todos los grupos tienen la misma consigna :

1. Responder a la pregunta.
2. Buscar todos los medios posibles para responder a la pregunta.
3. Cómo un alumno de 3er ciclo (alumnos de 11-12 años) podría proceder para responder a la pregunta ? (modificando según las necesidades, algunas dimensiones o el papel soporte...)

La cuestión 2 y sobre todo la 3 conducen a discutir las dificultades vinculadas a ciertas variables elegidas. Permiten también manejar la heterogeneidad del grupo (tanto por el nivel como por la velocidad del trabajo) preparando el trabajo en común.

d) Desarrollo de la sesión

Constitución de los grupos y distribución de las fichas de trabajo

La consigna es común y escrita en la pizarra. Se advierte a los estudiantes que al cabo de una hora cada grupo deberá redactar un afiche resumiendo los procedimientos de resolución identificados (respuesta a la cuestión 2 de la consigna).

Puesta en común

- Inventario y análisis de los procedimientos de resolución. Tratamiento de los posibles errores.
- Entre los procedimientos propuestos, cuáles son los que utilizan explícita o implícitamente una medida ? Y los que utilizan la medida de largos ? Esbozo de clasificación y de jerarquización de procedimientos.
- Identificación de los valores de las variables para cada figura y de sus efectos.

Ejercicios de refuerzo

Trabajo individual o en grupos, ver anexo 2.

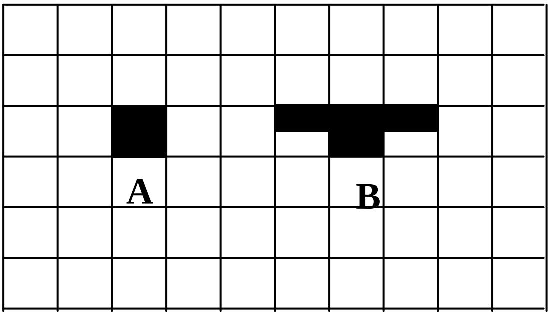
3. Segunda sesión: diferenciación área/perímetro. Síntesis sobre la noción de magnitud geométrica. Aproximación a los problemas de enseñanza.

La segunda sesión debe permitir abordar la noción mas general de magnitud y mostrar la pertinencia para la enseñanza. En principio se trata de precisar las relaciones entre área y perímetro, dos magnitudes diferentes para una misma superficie y de rectificar un error corriente, que a podido aparecer durante el test inicial. Este último objetivo no puede evidentemente ser enunciado.

a) Diferenciación área/perímetro.

El problema

Se desearía encontrar una superficie cuya área es mas pequeña que la de A y cuyo perímetro es mas grande que el de B. Es eso posible ?



Fase 1 : Partida inicial, luego trabajo en grupos homogéneos.

Se escribe el problema en la pizarra. Los estudiantes tienen cinco minutos para comprender la consigna y expresarse, sin escribir.

Se los invita a dar su respuesta espontáneamente. El formador recibe las respuestas y las contabiliza : *es posible, es imposible, otra respuesta,* haciendo explicitar la posición de los que se ubican en la 3er categoría (*no puedo saber sin ensayarlo, depende de la figura, no tengo ninguna idea, etc)*

Los estudiantes se reagrupan según sus respuestas y se da la siguiente consigna :

Respuesta : *Es posible*

Consigna : *Justificar.Pueden modificar una figura o las dos de manera que la respuesta sea: "es imposible" ?*

1. Respuesta : *Es imposible*
   Consigna : *Justificar. Pueden modificar una figura o las dos de manera que la respuesta sea: "es posible" ?*

2. Respuesta : *No sé*
   Consigna : *Pueden modificar una figura o las dos, de manera que :*
   (1) la respuesta sea : «Es posible » ;
   (2) la respuesta sea : « Es imposible» ?

Si algunos grupos no llegan a la conclusión *« siempre es posible teóricamente »*, se intercala la fase 1bis.

Fase 1bis : Trabajo en grupos heterogéneos

Se mezclan rapidamente los grupos precedentes.

Consigna : *Se trata de saber si el problema presentado tiene o no una solución, en principio para la figura dada, luego en general, para todos los casos de figura. Deben ponerse de acuerdo sobre una respuesta en común.*

Observaciones :

- Presentando la cuestión: « siempre es posible », nos situamos implícitamente en una teoría general que necesitará considerar figuras ideales, de los casos límites y el empleo del razonamiento deductivo. Esta cuestión puede permanecer abierta, pero su estatus de cuestión teórica debe ser remarcada.
- Un determinado número de procedimientos (cobertura, recorte de superficies) desarrollados e incluso estimulados en la primera secuencia, muestran aquí sus límites. Los medios de validación cambian al mismo tiempo que el estatus de la cuestión. También es para destacar.
- Esta cuestión muy abierta permite relanzar o mantener la búsqueda de cada uno, evitando que unos no convenzan demasiado rápido a los otros.

Fase 2 : Conclusión

Es suficiente un solo ejemplo para validar la respuesta « es imposible », la fase 1bis ha hecho desaparecer esta respuesta. Puede resultar útil, en un primer momento, volver sobre las respuestas espontáneas y sobre las razones que hicieron cambiar de opinión.

El objetivo de la actividad se anuncia a continuación: Se trata de señalar la existencia de un *teorema del alumno* resistente y de desmontarlo:

Contrariamente a una « intuición » muy expandida, área y perímetro de una superficie no varían siempre en el mismo sentido.

Entonces se puede abrir la discución y luego aportar elementos de análisis didáctico sobre el origen de este error apoyándose en los trabajos de M.J.Perrin (1984).

b) Síntesis sobre las nociones matemáticas abordadas.

Contiene los siguientes puntos:

- Noción de magnitud, magnitud medible;
- La medida de una magnitud supone la elección de una unidad, mas que nada de un sistema de unidades;
- La medida de áreas como producto de medidas de largos.

c) Aproximación a los problemas de enseñanza.

Algunas hipótesis adelantadas por M.J. Perrin (1984) son presentadas y defendidas :

"Los problemas de área ponen de manera esencial en relación los cuadros numéricos y geométricos. Un cierto número de dificultades muy conocidas por los alumnos están vinculadas al tratamiento de los problemas de área sea desde

el punto de vista de las superficies (consideradas como partes del plan), sea del punto de vista de los números, sin establecer relación entre estos puntos de vista. Por otra parte, una identificación demasiado precoz de las magnitudes con los números parece favorecer la amalgama entre las diferentes magnitudes, en particular, áreas y largos…El desarrollo en la enseñanza del concepto de área como magnitud permitiría a los alumnos establecer las relaciones necesarias entre los cuadros numéricos y geométricos"

Estas hipótesis conducen a desarrollar actividades permitiendo disociar las magnitudes de los objetos por una parte (segmentos, líneas quebradas, superficies) y de los números por otra parte antes de abordar la medida y las relaciones entre medidas.

La exposición se apoya en ejemplos de actividades y ejercicios (construir una figura de igual perímetro que una figura dada sin regla graduada...)

d) Variantes y prolongaciones posibles.

- Hacer analizar errores de los alumnos (se puede utilizar por ejemplo evaluaciones dadas a los alumnos el inicio de 6to año) antes de introducir los elementos del análisis de M. J. Perrin.
- A partir de manuales escolares y otros documentos, buscar o analizar actividades para los alumnos permitiendo diferenciar área y perímetro, o trabajar sobre área o largo, sin utilizar la medida.

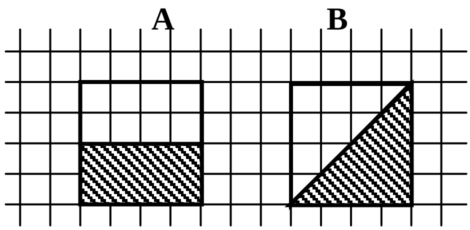
Bibliographie

- Brousseau G., *Problèmes de mesurage en CM*, Grand N n°50, 1991-1992.
- Combier G., Philippon M., *Aire et périmètre*, IREM Lyon, 1994 (Activités pour la sixième, accessible aux étudiants).
- Douady R., Perrin M.J., *Aires de surfaces planes*, petit x n°6 et n° 8, 1984-1985, IREM de Grenoble ; et Grand N n°39-40, 1986.
- Douady R., Perrin M.J., *Mesures des longueurs et des aires*, Brochure n°48, IREM de Paris VII.
- Dubois C., Fénichel M., Pauvert M., *Se former pour enseigner les mathématiques*, A. Colin.
- Rouche N., *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier.
- APMEP(Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), *Grandeur mesure* (MOTS VI), brochure n°46, 1982

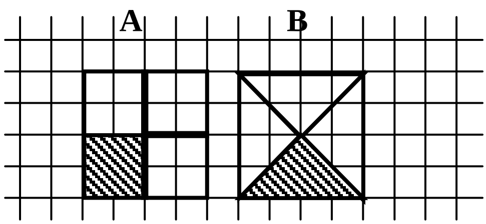
Anexo 1 – Ficha 1

Para cada situación, señalar el número de la respuesta correcta :

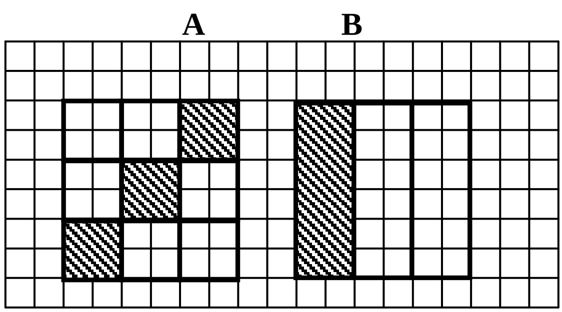
1-el área de la superficie rayada A es mas grande que la de B.
2-el área de la superficie rayada A es igual que la de B.
3- el área de la superficie rayada A es mas pequeña que la de B.



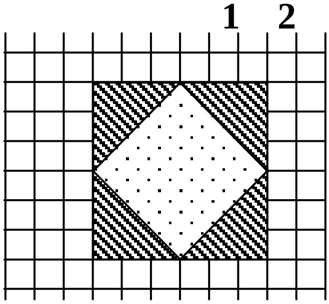
1 2 3



1 2 3



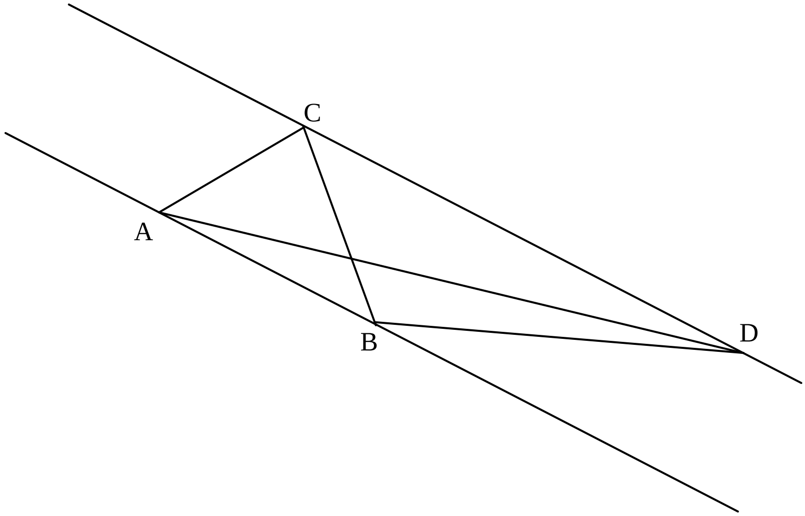
1 2 3



superficie A = superficie rayada
superficie B = superficie punteada.

1 2 3

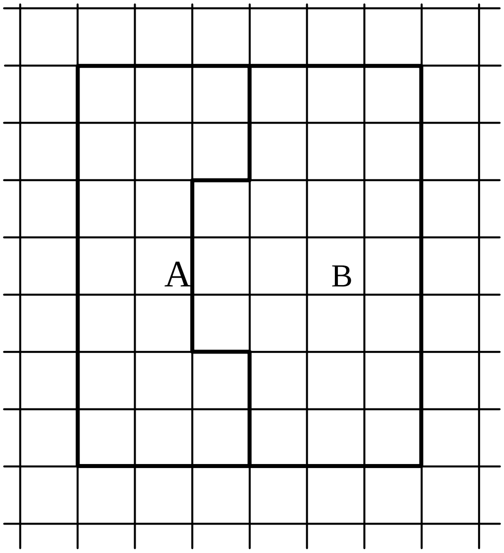
Anexo 1 – Ficha 2



Las rectas (CD) y (AB) son paralelas. Señalar el número de la respuesta correcta :

1. El área del triángulo ABC es mas grande que la del triángulo ABD.
2. El área del triángulo ABC es igual que la del triángulo ABD.
3. El área del triángulo ABC es mas pequeña que la del triángulo ABD.

Anexo 1 – Ficha 3



Un terreno ha sido dividido como lo indica esta figura.

Señalar en cada caso la respuesta que conviene :

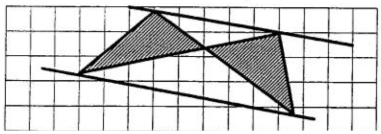
a	*El área de la parcela A es la mas grande*	*Las dos parcelas tienen igual área*	*El área de la parcela B es la mas grande*

Explica tu elección :

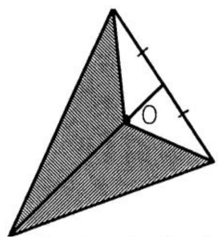
b	*El perímetro de la parcela A es el mas grande*	*Las dos parcelas tienen el mismo perímetro.*	*El perímetro de la parcela B es el mas grande*

Explica tu elección :

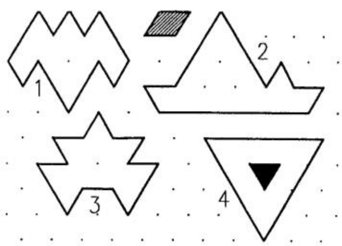
Anexo 2 : extraído de « Cinq sur cinq » 6ème et 5ème Hachette, 1994- 1995



Comparar las áreas de los triángulos rayados.

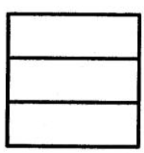


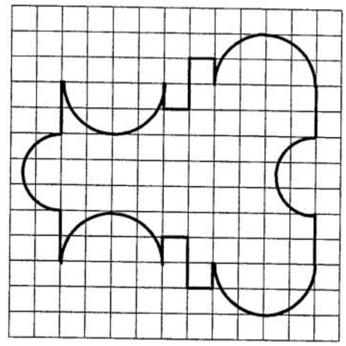
a) Comparar las áreas de los triángulos rayados (observar los no rayados)
b) Dónde ubicar el punto O de manera que el triángulo mayor sea dividido en cuatro triángulos de igual área?



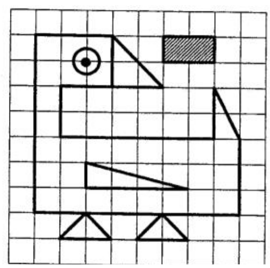
Determinar el área de cada una de las figuras, tomando como unidad de área el rombo rayado.

Se divide este cuadrado en tres rectángulos que pueden superponerse. Cuál es el perímetro del cuadrado y de cada rectángulo si el área de cada uno de ellos es de 12cm2 ?

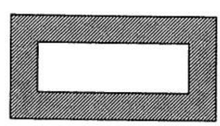




Construír un rectángulo que tenga igual área que esta figura (los arcos de círculos son semi-círculos).



Juego de la oca: determinar el área de la “oca” tomando como unidad de área el rectángulo rayado.



Calcular el área de la banda rayada sabiendo que tiene 1cm de ancho y que el perímetro del rectángulo mayor es de 26 metros.

Estructuras multiplicativas

Categorización de los problemas multiplicativos y tentativas de unificación.

Alain Descaves (1992)

Luego de dar una definición general de un problema multiplicativo, el artículo presenta rapidamente tres categorías posibles de estos problemas poniendo de relieve enfoques diferentes. Concluye proponiendo una perspectiva de unificación.

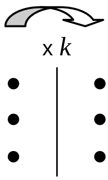
1- Qué es un problema multiplicativo ?

Se designa comunmente como problema multiplicativo un problema que exige la puesta en ejecución de una multiplicación o de una división. Esta definición es insuficiente, incluso peligrosa, porque puede limitar la pragmática de la resolución de estos problemas para el reconocimiento y para la ejecución de una técnica operatoria.
Se puede (como lo hace el psicólogo Vergnaud), extender el campo de los problemas multiplicativos al interior del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (cf. 2.2). Somos entonces confrontados a un campo inmenso que pone en juego tanto los conceptos de multiplicación y de división como los de proporción, de función lineal, de relación, de múltiplo, de divisor, de número racional, de fracción, etc.

Se pueden nombrar, como lo hace el didáctico Brousseau (cf. 2.1), diversos conocimientos que se enseñan en la escolaridad obligatoria, vinculados a la multiplicación y a la división y utilizados en los problemas. Además identificar las condiciones de su empleo por los alumnos (dificultades, éxitos, fracasos) y unirlos a los conocimientos culturales previstos y utilizados en diversas instituciones. Se describe entonces la diversidad de los saberes en el cuadro de su contextualización.

Nos parece conveniente dar una definición mas formal de los problemas multiplicativos.

De esta manera llamamos problema multiplicativo a todo problema susceptible, en un cierto dominio de validez, de una modelización por ecuaciones con una incógnita, o por una tabla de proporcionalidad de tipo :



La incógnita *x* que ocupa uno de los cuatro lugares, es decir una modelización de la forma *f(a)* = *b* o *f* es una función lineal. Un problema multiplicativo no tiene forzosamente una solución en el campo de validez considerada (particularmente si el campo no se extiende a los racionales).

Esta definición no responde a la cuestión de la resolución. Los alumnos pueden por supuesto resolver un problema multiplicativo sin modelizarlo.

2- Categorización de las situaciones modelizables por un problema multiplicativo.
2.1. Enfoque didáctico

Categorización vinculada a las prácticas escolares de referencia (concepciones).
Brousseau identifica un cierto número de variables pertinentes a las situaciones : los números, los tipos de magnitudes, la situación didáctica, los conocimientos anteriores de los alumnos (vinculados por ejemplo a técnicas) etc.
Para Brousseau « *El conocimiento del que los docentes se ocupan, como objetivo o como obstáculo para sus actividades no es una simple colección de componentes : estos están organizados en concepciones. Una concepción permite tratar (reconocer y resolver) una sub-clase de situaciones consideradas como comparables (identificadas) con la ayuda de los mismos esquemas, de los mismos términos y con procedimientos vecinos, justificados por « razonamientos parecidos » o tratados con la ayuda de propiedades y de conocimientos lógica y fuertemente vinculados.*
Las concepciones son diferentes si una no permite aprehender sin dificultad los problemas que la otra permite dominar. Un mismo alumno puede utilizar varias concepciones ignorando sus relaciones o al contrario uniéndolas en una concepción mas general. El conjunto de concepciones de esta manera articuladas y los problemas que pueden tratar forman el campo conceptual de la noción matemática.» [1]

Las categorizaciones propuestas están entonces vinculadas con la ayuda de la concepción.
Brousseau identifica cinco grandes categorías de concepciones vinculadas a la división, ellas misma subdivisibles.

1) Las particiones
2) La búsqueda del término desconocido de un producto
3) La división "fracción",
4) La aplicación lineal

---

[1] G.Brousseau, « *Représentations et didactique du sens de la division* » in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1989.

5) La composición de las aplicaciones lineales

Igualmente, para la multiplicación es posible identificar concepciones vinculadas :

- a la adición reiterada ;
- al producto cartesiano (árbol y tabla) ;
- al producto-medida, las concepciones ligadas a las magnitudes contínuas distinguiéndose de las que son ligadas a lo « discreto ».

2.2 Enfoque cognitivo y matemático

Categorización vinculada a representaciones simbólicas.
Vergnaud reubica los problemas multiplicativos en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Este campo es *«a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones : proporción simple y proporción múltiple, función lineal y no lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensión, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, relación, número racional, múltiplo y divisor, etc"*[1]

Un cierto número de teoremas en este campo dan su función a los conceptos, por ejemplo las propiedades lineales :

$$f(nx) = nf(x) \text{ et } f(ax+by) = af(x) + bf(y).$$

Las relaciones de base las mas simples son para Vergnaud, cuaternarias y no ternarias contrariamente a las estructuras aditivas.

Es posible generar cuatro clases de problemas elementales :

1 - La multiplicación.
ej : "Tengo 3 paquetes de yogurt. Hay 4 yogurts en cada paquete. Cuántos yogurts tengo ?"

1	a
b	•

[1] G. Vergnaud. *Théorie des champs conceptuels* in Revue de didactique des mathématiques, Vo1.10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

2 - La división-partición.
ej : "Pagué 40 francos por tres botellas de vino. Cuál es el precio de una botella?"

$$\boxed{\begin{array}{c|c} 1 & \bullet \\ b & c \end{array}}$$

3 - La división-cociente.
ej : "Pedro tiene 24 francos y desea comprar paquetes de bombones a 6 francos el paquete. Cuántos paquetes puede comprar ?

$$\boxed{\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \bullet & c \end{array}}$$

4 - La 4ta proporcional.
ej : "3 ovillos de lana pesan 200 g. Hacen falta 8 para hacer un pullover. Cuánto pesa el pullover ?"

$$\boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ c & \bullet \end{array}}$$

Los problemas ternarios existen igualmente, por ejemplo los productos de medidas, vinculados a las dimensiones simples (largo, tiempo, etc) a las dimensiones productos (área, volúmen, etc.) a las dimensiones cociente (velocidad, densidad, etc).

La dificultad de los problemas multiplicativos depende también, según Vergnaud, del tamaño de los números, de la naturaleza y del valor de los cocientes y del coeficiente de proporcionalidad, de la dimensión, de las magnitudes contínuas o discretas,etc.

2.3. Punto de vista cognitivista

Categorización vinculada a las representaciones cognitivas (icónicas en particular) desencadenadas a partir de la lectura de los enunciados.
Las significaciones desencadenadas por la lectura de los enunciados reposan en el reconocimiento de « formas », en su puesta en relación y su tratamiento simbólico. Una “forma” puede por ejemplo estar vinculada a una palabra desencadenante (dividir, en total, etc)
Para categorizar los problemas multiplicativos, el punto de vista cognitivista obliga a pensar el problema de la interpretación de los enunciados en función de las posibilidades de representación y de tratamiento que el sujeto dispone. Estas

representaciones cognitivas son de diferentes tipos (icónicas, simbólicas de tipo lingüística o vinculadas a la escritura matemática y a su correspondencia oral). Este problema de la interpretación depende también de las posibilidades de correspondencia entre los diferentes sistemas de representaciones.

Para caracterizar los problemas multiplicativos conviene entonces integrar diferentes niveles de análisis : cognitivo, pragmático y cultural.

Para que los profesores de escuela se sensibilicen a estas diferentes categorizaciones, es posible darles un corpus de enunciados de problemas multiplicativos y demandarles que realicen la clasificación. También es posible pedirles inventar uno o varios enunciados correspondientes a las diferentes clases vinculadas a estas categorizaciones.

3- Enfoques pedagógicos de los problemas multiplicativos.

3.1. La fragmentación de las concepciones.

La ausencia de modelos unificadores (en particular en los manuales) desemboca en la fragmentación de las concepciones. El aprendizaje consiste, en un cuadro behavorista, en multiplicar las concepciones estímulo-respuestas : una operación es asociada a cada uno de los modelos.
Los manuales escolares presentan sin embargo un corpus de problemas a fin que los alumnos identifiquen la « herramienta correcta ». Pero como no se les da ninguna ayuda, los alumnos permanecen confrontados a la diversidad de situaciones.

3.2. Tentativas de unificación.

Entre las tentativas de unificación de los problemas multiplicativos se pueden retener tres concepciones :

- La unificación que se funda en una estructuración espontánea en los alumnos (madurez, equilibrio) luego de la confrontación con las diferentes concepciones.
- La unificación que proviene de la representación en las tablas de proporcionalidad, los operadores que juegan un rol muy importante en este enfoque (ejemplo de los años de la « matemática moderna »
- La unificación por la algebrización (vinculada esencialmente a la posibilidad de poder nombrar la incógnita) que permite el descubrimiento de reglas de transformación de lo escrito (ej : $X \times a = b$ implica $b \div a = X$). Son las modelizaciones matemáticas y sus relaciones que permiten la unificación de los problemas multiplicativos. Las estructuras de sentido son internas a las matemáticas. En esta concepción son las matemáticas que determinan las formas de la realidad y no las matemáticas que son relativas a la aplicación

con el mundo[1]. La algebrización no excluye ni el recurso a otros sistemas simbólicos del tipo Vergnaud, ni la reflexión sobre las diferentes concepciones tipo Brousseau. Sin embargo va bien al encuentro de prácticas ordinarias.

[1] A. Descaves. *Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes,* Pédagogies pour demain, Didactiques, Hachette, 1992.

La tabla de Pitágoras

Nicole Bonnet (1996)

Cómo hacer aprender las tablas de multiplicación a niños que se resisten? Se trata de hacerlos memorizar de otra manera que « de memoria » en un vaivén de "aprendo para jugar, juego para aprender", gracias al juego de la tabla de Pitágoras.
El autor presenta aquí un dispositivo para la formación inicial y contínua, estrechamente vinculado a un proceso de enseñanza probada en las clases de ZEP.

INTRODUCCION

En el cuadro de trabajo con una clase de 4to y 5to año situados en Z.E.P.[1] de NEVERS, he puesto en marcha un dispositivo que apunta al aprendizaje de las tablas de multiplicación que se apoya en el juego de la tabla de Pitágoras[2], ligeramente modificada. Describo aquí la manera en que he utilizado este punto de partida en formación de formadores : he propuesto un recorrido en cuatro etapas que pretende la apropiación del juego y un análisis a priori de dispositivos de enseñanza que se apoyan en esta herramienta.

- Primera etapa : apropiación del juego
- Segunda etapa : dispositivo de trabajo
- Tercera etapa : puesta en común y síntesis de las producciones
- Cuarta etapa : complementos y comentarios

Mi propósito se completa con comentarios consecutivos a la transferencia del proceso en formación contínua de docentes. En último lugar, presento la puesta en marcha efectiva tal como ha sido efectuada en clase de 4to y 5to año (alumnos de 9 y 10 años).

---

1 Z.E.P. : zone d'éducation prioritaire (zona de educación prioritaria)

2 In : « Jeux 2 », publication A.P.M.E.P. (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) n° 59

<u>PRIMERA ETAPA</u> : APROPIACION DEL JUEGO POR LOS PROFESORES EN FORMACION

Trabajo de a dos

Fase 1: descubrimiento del juego (20 minutos) :

Consigna :
« Esta es la descripción del juego con una regla (distribuír el documento 1)[1]
Disponen de una plancha de juego y cartones . Jueguen ! ».

Fase 2 : Identificación de estrategias locales (20 minutos) :

Consigna :
« Ciertamente este no es un juego enteramente de azar. Identifiquen las estrategias locales y redáctenlas».

Esta demanda se efectúa para que la formulación y la enunciación sean mas claras.

El formador pedirá a las parejas que enuncien las estrategias y las anotará en la pizarra. Se preveen dos tipos de formulaciones posibles :

- Las que relevan estrategias (tácticas locales) ;
- Las que revelan conocimientos en juego.

El formador las anotará en orden cronológico.

Observaciones :
Pienso que las estrategias locales no surgirán todas en esta etapa. Si me equivoqué, la fase 3 es inútil. En ese caso, conviene igualmente clasificar las estrategias escritas en la fase 2.

Fase 3 : Emergencia mas detallada de las estrategias (10 minutos)

Consigna :
« Esta es la grilla de un juego ya comenzado (documento 2), primero van a determinar un jugador A y un jugador B. Las reglas del juego no son modificadas, salvo que no se roba del mazo. Si no pueden jugar más, pasen su turno. Cuando « ponen un cartón » hay que tachar el número de vuestra columna y transportarlos a la grilla de abajo que es la memoria del juego ».

[1] El conjunto de documentos (numerados de 1 a 10) se encuentra al final del artículo

1. Las estrategias locales son las siguientes :

- S1 : Deshacerse de los cartones demasiado alejados del juego
- S2 : Poner lo antes posible los cartones que existen en varios ejemplares (conviene entonces mirar su juego, pero también el de su vecino).
- S3 : Poner lo mas tarde posible los cartones que solo existen en un ejemplar (casilleros rayados salvo 4, 9, 16 y 36)

2. Estas diferentes fases permitirán a los profesores darse cuenta que la correcta comprensión de un juego necesita un tiempo bastante largo de apropiación y que se necesita jugar varias veces.
Hacer emerger las estrategias aporta interés al juego : al no ser un juego de azar total las estrategias dan al jugador el poder de ganar. Además éste tendrá interés por adquirir conocimientos matemáticos (repertorio multiplicativo, descomposición multiplicativa de un número, disposición espacial de los números que figuran en la tabla de Pitágoras, conocimiento del número de repeticiones de cada número, lectura de una tabla de doble entrada).

SEGUNDA ETAPA : DISPOSITIVO DE TRABAJO

Duración aproximada : 1 hora

Esta etapa debería permitir a los participantes construir elementos de respuesta al interrogante : « hay que conocer la tabla de multiplicación para jugar o jugar bien para aprender la tabla de multiplicación ? ».

Los profesores se reparten en grupos de 4 personas. Se debe producir un afiche al final de la exploración.

Presentación del origen de los soportes y del proceso :
Se trataba de una búsqueda conducida en una clase de niveles de 4to y 5to año en la que los alumnos tenían dificultades en relación a la tabla de Pitágoras.

El test inicial (documento 3) había dado los siguientes resultados:

4to año A : media 8,6 / 10 ; B : media 2,5 / 10
5to año A : media 9,1 / 10 ; B : media 4,8 / 10

Observando los resultados del test A, en principio había pensado que los alumnos no tenían tantas dificultades, pero el tiempo impartido había sido lo suficientemente largo para que ellos utilicen otros procedimientos que la memoria rápida (cálculo a partir de un múltiplo conocido, conteo con los dedos o simplemente trampas).

El test B, que pone en juego otras competencias diferentes a la memorización es mas revelador.

El mismo test ha sido propuesto en esta clase luego de una decena de sesiones de enseñanza. Los resultados son los siguientes :

4to año A : media 9,5 / 10 ; B media 5,5 / 10
5to año A : media 9,9 / 10 ; B : media 9,4 / 10
Un claro mejoramiento global puede percibirse a través de las medias.

Consigna de trabajo para los profesores en formación :

« Estas son herramientas (documentos 1, 2, 3 (ya dados), documentos 4, 5, 6, 7, 8), que podrían servir en una clase de 4to y 5to año cuyo problema principal es el aprendizaje de la tabla de Pitágoras. Cuál es la puesta en marcha que consideran ? »

Hipótesis:

- El trabajo a partir de este juego favorece otra forma de memorización que el aprendizaje de memoria. Se trata de construír el sentido y no solamente repetir rituales de tipo : « 2 por 3 hacen 6 ; 8 por 5 hacen 40 ... »
- El aspecto lúdico es motivante.

Observación

Puede ocurrir que la noción de identificación de los casilleros, en la tabla de Pitágoras, haya que re-trabajarla, pero éste no es el objetivo de este estudio.

TERCERA ETAPA : PUESTA EN COMUN, SINTESIS DE LAS PRODUCCIONES

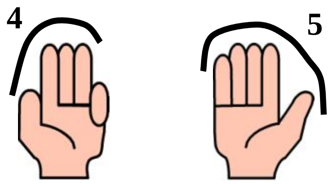
Duración aproximada : 30 minutos

Exhibición de las producciones de los profesores y comentarios :
Las siguientes preguntas han sido y podrán ser objeto de debates :

- Para qué sirve el juego de la tabla de Pitágoras ?
- Según las diversas proposiciones de puesta en marcha, cuáles son las condiciones subyacentes que emergen de la enseñanza con alumnos en dificultad ?
- Qué otros intereses además del aprendizaje de la tabla, ven en este juego?
- Han definido los objetivos previos ? Cuáles ?
- Porqué han ubicado tal herramienta (documento) en tal lugar ?
- Cuáles son los obstáculos potenciales que pueden detener a los alumnos, y en este caso qué apoyos sugieren ?

Observaciones para el formador :

- Observación 1 : El documento 4 podría permitir la elaboración de sesiones en que los niños re-descubran la tabla de Pitágoras y algunas propiedades :
  1. Intercambios líneas/columnas
  2. Diagonal eje de simetría (conmutativa) : 8 x 5 = 5 x 8
  3. Frecuencia de repetición de los números
  4. Observación de la líneas : diferencia entre dos naturales consecutivos
  5. Particularidades de la línea de los 9
     - Las unidades disminuyen regularmente de 1 en 1, y las decenas aumentan regularmente de 1 en 1.
     - La suma de las cifras vale siempre 9.
     - Esta observación desembocará quizás en el criterio de divisibilidad por 9 : solo los números cuya suma de las cifras vale 9 son divisibles por 9 (apertura posible hacia la prueba del 9 que no es más enseñada en la escuelas, pero que puede constituír un objeto de reflexión en formación inicial).
     - Mostrar una ayuda mnemotécnica para los niños : tabla de los 9 con los dedos de las dos manos



Ejemplo 9 X 5 : se baja el quinto dedo y se lee 45

- Observación 2 : El documento 5 puede permitir dos tipos de puesta en marcha :
  - problema : búsqueda de las relaciones que vinculan los números de una cruz, luego juego de descubrimiento de dos números desconocidos de una cruz, por ejemplo :

	9	
16		
	27	

Se trata de hacer descubrir (por los profesores en formación o por los alumnos), la siguiente relación :

En una “cruz mágica” se tiene :
$a + b = d + e = 2 \times c$

	a	
d	**c**	**e**
	b	

- Encontrar soluciones a la siguiente cruz. Es una solución que se encuentra en la tabla de Pitágoras ?

	49	
	56	

- Observación 3 : El documento 6 permite a los niños una primera aproximación al juego. Es inútil el análisis de varias partes para mostrar que A o B pueden ganar (de lo que los niños dudan en un primer abordaje : ellos piensan frecuentemente que el que comienza es el vencedor). Ayuda a poner en evidencia las primeras estrategias del juego. Debería preceder al documento 2.

- Observación 4 : El documento[1] 7 y el documento[2] 8 pueden servir para sesiones de apoyo o de evaluación.

- Observación 5 : En respuesta a la pregunta planteada en la segunda etapa : « Hay que conocer la tabla de multiplicación para jugar o jugar bien para aprender la tabla ? », pienso que las idas y vueltas tabla / juego se realizan espontáneamente. La tabla de Pitágoras (documento 4) puede ser una ayuda, un sostén para que los niños puedan jugar al juego de Pitágoras. Pero rápidamente ellos perciben que pierden tiempo en buscar los productos y que es mejor conocerlos de memoria. Entonces puede observarse el siguiente fenómeno : espontáneamente sin que el maestro lo imponga, los alumnos aprenden en su casa la tabla « para jugar mejor e ir rápido ». El juego sirve de motivación mientras que el hecho de calcular operaciones no ha finalizado en absoluto para el alumno. Entonces, memorizan para jugar sin darse cuenta que finalmente juegan para memorizar las tablas.

<u>CUARTA ETAPA</u> : COMPLEMENTOS

Algunos participantes querrán jugar nuevamente el juego de Pitágoras, otros podrán utilizar los documentos 9 y/o 10.

- Documento[3] 9 : puzzle para recortar y reconstituír.

Comprometemos al lector a plantearse la siguiente pregunta : qué nuevas dificultades surgen?

- Documento 10 : batalla naval en la tabla de Pitágoras[4] .

Este juego tiene por objetivo re-utilizar las tablas de multiplicación a fin que no aparezca el fenómeno de cansancio.
Los niños pueden encontrar dificultades de identificación de un casillero. En efecto, el casillero 4 X 3 no el mismo que el casillero 3 X 4. La expresión oral deberá ser entonces : "12 columna del 3 o 12 línea del 4".

---

1 In « Jeux de calcul » du CP au CM2 de F. Boule, éditeur A. Colin

2 Según una idea de F. Boule

3 Según una idea de F. Boule

4 Juego inventado por N.Bonnet al finalizar el taller

COMENTARIOS LUEGO DE LA EXPERIMENTACION

Una experimentación de esta herramienta de formación a podido ser llevada a cabo en formación contínua con docentes. Pero las etapas 3 y 4 no han tenido lugar por falta de tiempo.

Balance de la etapa 1

Desde la distribución del material (para dos profesores : un juego de Pitágoras en hoja A4 en cartón, y un sobre que contiene 100 cartones numerados), se manifiesta un gran interés que persiste a lo largo de toda la actividad.

Es la siguiente pregunta : « Se puede mirar el juego del otro ? » lo que conduce a la idea de estrategias posibles. Luego los profesores han trabajado sobre estas estrategias. He aquí algunas « a granel ». Se trata sea de tácticas, sea de conocimientos necesarios para jugar bien.

- Una apertura del juego, que permite mas posibilidades, es colocar los cartones de manera dispersa, una vez que son tirados.
- Conocer todas las descomposiciones de los números de sus cartones (conocimiento).
- Determinar la frecuencia de un cartón en la tabla (conocimiento).
- Mirar si hay cartones en la diagonal (de su juego o el de su adversario) y guardarlos el mayor tiempo posible si el otro no los ha pasado (estrategia incompleta porque los números de la diagonal no tienen la misma frecuencia de aparición).
- Entre sus cartones, intentar organizar una línea o una columna para encadenar sus ubicaciones. Por ejemplo, si se tiene 12, 14, 16, ubicar mas bien 12 en 2 x 6 que en 3 x 4 (estrategia).
- Intentar poner mas rápido los cartones que tienen varios lugares (ver S2 del recuadro).
- Ubicar desde que sea posible los cartones en los rincones (para bloquear a su adversario?).
- Eliminar los números repetidos (S2).
- Evitar ubicarse en un casillero adyacente al casillero rayado (?).
- Buscar los casilleros rayados (S3).

Estas estrategias locales están implícitas para sus autores y se discuten en grupo. El tiempo previsto es fácilmente superado, porque cada grupo de dos personas quiere testear las estrategias que les parecen prometedoras.

Balance de la etapa 2

La consigna de esta etapa debe ser clarificada resituando la naturaleza del documento 3 : " En esta clase, el ejercicio B no fue logrado. Quieren remediarlo? Entonces reúnan los documentos de 1 a 8. En qué orden los introducen? "

Cuatro grupos de cuatro profesores han dado el siguiente orden de presentación :

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
1 ; 4	8	8	1 (tabla 5X5)
8	3	3A	6
3	4	$3B_1$	4
6	1	4	8
2	2	1	1
5	6 ; 7	6 ; 2	2
7	5	7	3A
9		$3B_2$	7 ; 3B
		5	5

3B1 es la parte A del documento 3
3B2 es la parte B del documento 3

Se nota con frecuencia que el juego (doc 1) no se pone al final. Y ningún docente piensa que hay que conocer la tabla para jugar bien, los maestros consideran servirse del juego para dar sentido al aprendizaje.

Proposición de puesta en marcha en una clase de 4to y 5to año

Pre-test et post-test (documento 3)

Sesión 1 : Descubrimiento : La Tabla de Pitágoras y algunas propiedades.
Los niños son invitados a completar una tabla de Pitágoras, luego a poner en evidencia propiedades características de ésta. Ellos se interesan igualmente (por necesidades posteriores) en la frecuencia de aparcición de ciertos números. (Documento 4)

Sesión 2 : Descubrimiento : Qué números para qué productos ?
Los niños van a descubrir reglas sobre los productos de dos enteros pares, el producto de dos enteros impares, el producto de un entero par y un entero impar. (Documento 4)

Sesión 3 : « Una cruz mágica ».
Los niños van a descubrir relaciones entre dos números situados en una misma « cruz », se les propondrá posteriormente descubrir 1 luego2 números escondidos

en una misma cruz. Es una actividad rica en cálculo mental, que hace funcionar la reversibilidad de las operaciones y que es motivante por su aspecto lúdico. (Documento 5)

Sesión 4 : presentación del juego.
Una fase colectiva de presentación del juego. Los niños son repartidos en dos equipos de 12. Se enfrentan alternativamente y se apropian poco a poco de las reglas del juego.(Documento 1)

Sesión 5 : Descubrimiento de las estrategias del juego .
Para ayudar a lo niños a descubrir las estrategias, les proponemos partes de tablas donde solo aparecen números cuyos productos son conocidos. (Documento 6, Documento 2)

Sesión 6 : juego de a dos.
Los niños se enfrentan de a 2. Ellos re-utilizan en el juego completo, todos los descubrimientos matemáticos o estratégicos precedentes. Se trata de juegos fabricados en formato 40 cm x 40 cm.

Sesión 7 : Tablas incompletas.
Proponemos a los niños (en evaluación formativa) el juego de la tabla incompleta : se trata de tablas de multiplicación en las que se ha borrado el contenido de ciertos casilleros. Las cabezas de líneas y de columnas no están ordenadas en orden creciente. (Documento 7)

Sesión 8 : Las tablas-puzzles.
Los niños tienen para construír dos tipos de puzzles : (Documento 8 ; Documento 9)
Personalmente no utilicé el Documento 10, que he fabricado por sugerencia de algunas personas del taller, lo ubicaré en la sesión 8.

DOCUMENTO 1
EL JUEGO DE PITAGORAS

Objetivo : mejora del conocimiento de la tabla de multiplicación.
Duración : 20 a 30 minutos
Material para dos jugadores :

- Una tabla de Pitágoras de la multiplicación para los números naturales de 1 a 10 (placa de cartón duro o de madera). Los casilleros de la diagonal principal están rayados.
- 100 pequeños cartones destinados a ser ubicados en los casilleros y sobre los que están escritos los productos que deben figurar en la tabla.
  Se tendrá de esta manera, 4 cartones con el número 12 (para 4x3 ; 3x4 ; 2x6 ; 6x2), 3 cartones con el número 16 (4x4 ; 2x8 ; 8x2), 1 cartón con el número 81 (9x9).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Finalidad del juego : deshacerser lo mas rapido posible de los cartones.

Reglas :

- Los cartones se mezclan.
- Los jugadores tiran por turno 2 cartones y los ubican en los casilleros convenientes de la tabla de Pitágoras (de esta manera han puesto 4 cartones en la tabla).
- Cada uno toma al azar 20 cartones. El resto de los cartones constituye el mazo.
- Se juega por turnos.
- Un cartón solo puede ser puesto en un casillero adyacente (1) a un cartón ya colocado.
- El que ubicca un cartón sobre un casillero rayado puede poner en el mazo un cartón de su elección entre los que le quedan.
- El que no puede jugar tira un cartón en el mazo y pasa su turno.
- El vencedor es el que primero logra deshacerse de todos los cartones.

(1) un casillero es adyacente a otro si tienen un lado en común.

Documento 2

El Juego de la tabla de Pitágoras

Regla simplificada : no hay mazo.Si no puede jugar pasa el turno.

	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A	1											B
12	2			6		10	12					9
12	3				12	15	18					14
14	4						24					16
16	5						30					20
32	6											24
36	7											28
36	8											36
40	9											72
	10											

	1er turno	2° turno	3er turno	4o turno	5o turno	6o turno	7o turno	8o turno	9o turno	10° turno	11° turno	eliminado
A												
B												

Encierra el ganador.

Documento 3 : tests

A Completa las siguientes tablas

a	2	7	5	3	4	6	10	1	9	8
a X 5										

b	4	6	9	1	10	2	7	5	3	3
b X 3										

c	5	7	9	3	1	8	2	4	6	10
c X 3										

d	7	3	6	10	9	4	2	5	1	8
d X 9										

e	8	9	1	6	4	10	3	7	2	5
e X 7										

B Completa las siguientes tablas.

X	4		9	8
7		42		
			45	
			72	
	24			

X				
	27			
		35	49	
	15			
		40		16

DOCUMENTO 4
LA TABLA DE PITAGORAS

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

DOCUMENTO 5
LA "CRUZ MAGICA"

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Observarán que :
8 + 16 = 9 + 15 = 12 x 2 y que 42 + 54 = 40 + 56 = 48 x 2

DOCUMENTO 6
EL JUEGO DE LA TABLA DE PITAGORAS

Juego simplificado : no hay mazo. Si no puede jugar pasa el turno

X	1	2	3	4	5
1					
2					
3		6			
4	4				
5					

A	B
4	2
8	4
9	6
25	12

	1er turno	2e turno	3e turno	4e turno	eliminado
A					

Encierra el ganador

DOCUMENTO 7
Tablas incompletas

	3		2	
		18		
			10	
	12			16
		54		36

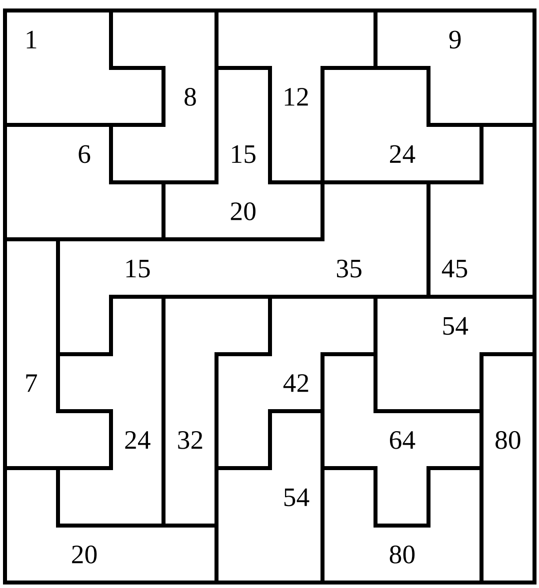
		6		4
	6		33	12
				4
7			77	
	12			

Se trata de tablas de multiplicaciones a las que les ha borrado el contenido en algunos casilleros. Pero atención : las cabezas de líneas y de columnas no están ordenadas en orden creciente.

DOCUMENTO 8
Tabla- puzzle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

DOCUMENTO 9
tabla-puzzle



Documento 10
LA BATALLA NAVAL DE PITAGORAS

El jugador A ubica en la grilla :

- 1 porta aviones de 5 casilleros
- 1 acorazado de 8 casilleros
- 1 crucero de 2 casilleros
- 2 sub-marino de 2 casilleros
- 2 canoas de 1 casillero

El jugador B dice : " 12 columna del 4 (o 12 línea del 3)
El jugador A responde : "tocado"
El jugador B dice : "15 columna del 5"
El jugador A responde: "tocado"
El jugador B dice : "9"
El jugador A responde : "hundido"
El jugador B dice : "1"
El jugador A responde : "tocado"

El jugador B adopta tres tipos de anotaciones en la grilla memoria según sea "tocado" ; "hundido" ; o "lanzado al agua".

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Jugador A

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X									
2								0		
3			X	X	X					
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Jugador B

La división en formación inicial

Hervé Péault - Denis Butlen (1995)

Se trata de un plan de curso principalmente sobre la división euclidiana en N, destinado a los estudiantes de primer año en formación profesional para la enseñanza de las matemáticas para alumnos de 8 a 11 años.
Siempre es de actualidad.

Este curso intenta tratar este tema desde la perspectiva de la preparación a los concursos de ingreso de los profesores de escuela. Pero numerosas actividades pueden adaptarse a otros contextos tanto en formación inicial como en formación contínua.

Proponemos una serie de actividades que forman un todo pero es raro que la duración de la formación impartida permita tratar todo integralmente. Por lo tanto será necesario efectuar adaptaciones.

Algunas actividades, particularmente las dos primeras, pueden ser también propuestas en otros contextos que el del estudio de la división.

Objetivos generales

- Repaso de ciertos conceptos matemáticos en torno a la división, euclidiana o no,

- Análisis de los problemas de división y de los procedimientos de resolución,

- Estudio de nociones elementales de didáctica,

- Aporte de elementos de información que permitan la construcción y el análisis de secuencias en la escuela elemental.

Primera situación
"Concertum"

Objetivos

- Hacer aparecer la utilización de la división como procedimiento experto para la resolución de un problema.

- Dar sentido, a partir del análisis de una actividad, a nociones de didáctica tales como *dialécticas de la acción**, de la *formulatión**, de la *validación**, de la *institucionalización**.

Observación
Esta situación también puede ser utilizada fácilmente fuera del estudio de la división. El interés que generalmente suscita, el compromiso de los participantes, el trabajo en equipo que necesita, los debates que provoca, las *retroacciones* que provoca, ... en el fondo una situación rica e interesante como punto de partida para una reflexión mas general sobre los problemas de aprendizaje.

Material
Para cada uno de los participantes : 10 cartones numerados de 0 a 9 (y más, si se desean utilizar para prolongaciones), del tamaño de cartas de juego. Cada uno tendrá en la mano los cartones como si fuera un juego de cartas.

Durante el juego, cada jugador deberá elegir un número de 0 a 9 y manifestará su elección seleccionando y luego mostrando la carta. También se puede adoptar otro dispositivo sin este material : cuando un jugador elige un número, lo escribe sobre una hoja de papel que luego mostrará.

Organización
Los estudiantes están agrupados en equipos de 3. Si el número de participantes no es múltiplo de 3, se puede efectuar el juego entre dos personas. También puede resultar interesante otorgar a una o dos personas el rol de observador de las estrategias de los diferentes equipos.

La elección previa de equipos de 3 nos ha parecido la mas interesante por la diversidad de estrategias, pero también se podría comenzar con equipos de 4, incluso más.

Presentación del juego
Cuando cada jugador tiene sus cartas en la mano, el profesor da la consigna siguiente (si es posible acompañar con mímica para facilitar la expresión).

> *Les voy a proponer un número entero, que llamaré "número-referencia". Cada uno elegirá un cartón y solo uno, y el objetivo de cada equipo será que los tres cartones elegidos por los diferentes miembros del equipo tengan por suma el número-referencia.*

> *Hagamos un primer intento. En algunos instantes voy a indicar un número. Están preparados ?*

Esta última pregunta puede llevar a pensar que hay que estar preparados inmediatamente. Se la puede reemplazar por*"indíquenme cuando estén listos"* que da a entender que hay "algo para preparar".

Lo que está en juego aquí es comprender que será necesario, en cada equipo, ponerse de acuerdo previamente al juego porque sino se transformará en un juego de azar que deja de ser interesante. En este sentido, la manera de plantear la pregunta, el tono, la actitud del profesor... van a determinar fuertemente el comportamiento de los estudiantes.

Sucede que, a pesar de un cierto escepticismo, los jugadores se declaran preparados inmediatamente. Luego de uno, incluso varios intentos, evidentemente infructuosos terminan por pedir autorización para ponerse de acuerdo previamente.

Con frecuencia, los participantes plantean dos preguntas inmediatas : "nos podemos poner de acuerdo*?"*, a lo que se responde afirmativamente y *"el número-referencia puede ser cualquier número ?"*, pregunta a la cual no es necesario responder ya que se puede retornar. Un corto debate entre los participantes convence bastante rápido que los números- referencia solo pueden ser elegidos entre los naturales de 0 a 27.

Fase 1
El profesor propone algunos intentos (diversificar la elección de los números referencia entre grandes y pequeños, múltiplos y no múltiplos de 3). Cuando cada equipo muestra sus cartones, hace verificar por los otros los resultados obtenidos.

Surgen errores, sea porque la estrategia del equipo es incorrecta, sea que uno de los jugadores a comprendido mal. Ocurre con frecuencia que algunos equipos utilizan una estrategia válida para todos los números salvo el 26 (ver el análisis de los procedimientos). Entonces se aconseja proponer 26 como número-referencia solo luego de varios intentos.

En caso de dificultad, el profesor informa que cada equipo puede solicitar un tiempo muerto para una nueva concertación.

Esta fase se detiene cuando todos los equipos comienzan a dar elecciones correctas.

Fase 2
El profesor da la siguiente consigna :

> *En cada equipo, deben tomar el tiempo de reflexión para redactar un mensaje escrito explicando la estrategia elegida, de la manera la mas*

clara posible, a fin que otros sean capaces de utilizarla. Los mensajes redactados serán intercambiados entre los equipos, y jugaremos nuevamente, cada equipo deberá utilizar obligatoriamente la estrategia que ha recibido.

En vuestros mensajes, no es necesario escribir la regla del juego, todo el mundo ya la conoce. Deben sin embargo indicar claramente cuál es el rol de cada miembro del equipo. Atención : No se trata de poner a los otros en dificultad. Al contrario, los mensajes deben simplificar al máximo la tarea de los receptores.

Cuando todos los equipos han finalizado su redacción, cada uno pasa su mensaje a otro equipo. Cada equipo entonces es invitado a ponerse de acuerdo de manera de poder jugar utilizando la estrategia descrita en el mensaje recibido. Si ciertos mensajes son incomprensibles, se puede demandar su aclaración a los redactores pero solamente por escrito.

Cuando todo el mundo está preparado, se juega nuevamente, debiendo cada equipo obligatoriamente utilizar la estrategia descrita en el mensaje. Cuando los cartones son levantados, cada equipo verifica que los utilizadores de su estrategia lo han realizado correctamente. Las eventuales discusiones dan inicio a la fase siguiente.

Fase 3
Cada equipo debe intentar adivinar y formular la estrategia utilizada por los otros. Para ello, ya no es el profesor quien propone los números -referencia, sino los estudiantes.

Cada estrategia es objeto de debate donde son examinadas su pertinencia, su comodidad de utilización, así como la claridad de los mensajes asociados.

Como inicio a las fase siguientes, el profesor propone debatir sobre las siguientes preguntas

- *Hay una estrategia mejor que las otras ?*
- *Cuáles son la cualidades de una buena estrategia ?*

Fase 4
Esta fase, como la siguiente, tiene por objetivo hacer evolucionar las estrategias haciendo asociar la noción de estrategia « apropiada » a la de estrategia "generalizable". Esta asociación es a veces formulada por los estudiantes, pero también puede ser necesario que el profesor la provoque.

El mismo juego es retomado, pero esta vez con dos equipos de 4 (o de 5, o de 6, o de 7, ... según el número de personas en el grupo), el intervalo de los números-referencia varía en consecuencia.

Fase 5
Esta fase se desarrolla siempre con el mismo juego y los mismos grupos, pero esta vez solo se utilizan los cartones de 0 a 7 (también se pueden utilizar los cartones de 0 a p con p > 9).

Al final, es todo el grupo de estudiantes que forma un solo equipo y debe ponerse de acuerdo para jugar, una primera vez con los cartones de 0 a 9, una segunda vez con los cartones de 0 a 7.

En esta etapa, es habitualmente el procedimiento descrito en n° 1 a continuación que es seleccionado. La última fase tendrá por objetivo hacer formular este procedimiento en el caso mas general.

Fase 6
El profesor da para explorar el siguiente problema :

> *Se dispone de cartones de 0 a p ; los jugadores están organizados por equipos de jugadores ; el número elegido es n ; expliciten en este caso la estrategia que han seleccionado en la fase precedente.*

Este trabajo se torna a veces difícil y puede se diferido a una próxima sesión para dejar el tiempo para una exploración individual. Se terminará con una escritura precisa en el plano matemático.

Prolongación
Análisis de la actividad

Invitados a opinar sobre esta actividad, los estudiantes a veces plantean la pregunta : " *Podemos hacerla en clase con los alumnos y en qué nivel ?".*

Por otra parte, cuando esta actividad es propuesta en formación contínua, con frecuencia conduce a los maestros de clases de 4to/ 5to año (alumnos de 12 y 13 años) o los profesores de colegio a querer intentar con su clase.

Esta cuestion de *transposición** no forma parte de los objetivos que hemos seleccionado, pero demuestra un interés sobre el cual es posible apoyarse para efectuar el análisis de la actividad:

> *Qué les parece interesante en esta actividad ? Del punto de vista del funcionamiento intelectual, cómo caracterizarían las diferentes etapas ? si se retoma desde el principio teniendo por objetivo el conocimiento y la comprensión de la fórmula elaborada al final, qué otros escenarios de enseñanza se podrían imaginar ?*

Este cuestionamiento (u otro...) puede ser un punto de partida para permitir al profesor señalar un cierto número de nociones didácticas, de manera mas o menos desarrollada según el público.

1) Se encuentran en esta actividad **diferentes tipos de situaciones**, particularmente :

- **Situaciones de *acción**** : en particular es el caso en la primera parte donde se trata de crear un modelo que permita resolver el problema planteado. Este modelo puede ser puesto en duda en función de las retroacciones provocadas por los resultados obtenidos aplicando la estrategia seleccionada.

- **Situaciones de *formulación**** : al inicio donde cada miembro del equipo debe hacer comprender su idea a los otros miembros (con frecuencia se mezclan formulaciones escritas y orales, las formulaciones orales dominan en la mayor parte) luego en la segunda fase donde la pertinencia de la formulación es el objetivo explícito.

- **Situaciones de *validación** y de búsqueda de prueba** : desde el inicio, está la necesidad de un debate en equipo para que el buen fundamento de la estrategia elegida sea admitida, luego en las fases siguientes cuando se tratará de argumentar sobre la pertinencia de las estrategias propuestas, de probar su validez y su performance.

- **Situaciones de *institucionalización** :** por una parte cuando se produce una selección de una estrategia mejor que las otras, destreza reconocida y re-utilizable (con esta reserva, aquí, que hay pocas chances de ser re-utilizada directamente, fuera del juego), por otra parte cuando el modelo de la división es identificado y reconocido para construír un procedimiento experto; esto supone una nueva reorganización de los conocimientos, enriquecida por el nuevo sentido dado a la división. Aquí la división puede ser re-situada en el cuadro de una *dialéctica herramienta-objeto** : habiendo sido estudiada anteriormente como « objeto » de saber, es aquí "herramienta" para resolver un problema, lo que le permite adquirir un nuevo sentido y ser confortada como "objeto" de saber.

2) Una reflexión sobre las ***variables didácticas**** resulta interesante. Estas *variables** aquí son esencialmente los números en juego : qué elecciones se han hecho ? Podemos imaginar que los procedimientos serían diferentes con otra elección ? El brusco cambio de variables (por ejemplo cuando se solicita jugar con todo el grupo de estudiantes) conduce a abandonar las estrategias menos performantes (***salto informacional****)*

3) Se pueden también analizar fenómenos de ***contrato didáctico*.*** Al inicio, si el profesor no da a entender que hay que ponerse de acuerdo, los estudiantes pueden pensar que ellos deben poder responder directamente luego pensar que esto no es posible o que es el efecto del azar. Les es necesario romper este contrato implícito y comprender que son ellos quienes deben encontrar la clave que les

permitirá resolver el problema. De esta manera se produce la ***devolución*:*** los estudiantes ya no se sienten en la situación de adivinar lo que espera el profesor y de intentar responder a sus expectativas, sino que quieren encontrar por ellos mismos una solución. Esto se vé bien en las escrituras entregadas : los estudiantes no se sienten obligados a dar escrituras matemáticas, estandarizadas, reconocidas... solamente buscar darse a entender y recurren en general a la economía de escritura, inclusive los mas fuertes en matemáticas (se trata de un punto que puede sensibilizar muy fuertemente al problema del estatus del escrito matemático en la clase). La búsqueda de la estrategia y la búsqueda de la escritura son ***situaciones a-didácticas*,*** es decir que el estudiante se aferra al problema sin intentar comprender las intenciones didácticas de quien lo ha planteado.

En las situaciones de enseñanza, la *devolución** de una *situación a-didáctica** puede no producirse, comprometiendo de esta manera el aprendizaje sea que los alumnos solo buscan identificar los indicios que le permitan adivinar la respuesta correcta que el maestro espera, sea que buscan poner en funcionamiento estrategias de rodeo para asegurarse la respuesta “justa”. Un maestro nos ha proporcionado un ejemplo : él había propuesto el juego del *Concertum* a sus alumnos. La primera fase parecía funcionar bien y los logros eran frecuentes. Toma concocimiento de los mensajes, y la sorpresa fue al ver que en una amplia mayoría, las redacciones eran similares a : " *uno efectúa el cálculo y luego le hace señas a los otros para que elijan sus números"* o, mas laconicamente : "se *trampea sin dejarse descubrir..."* Incluso la ausencia de incomodidad de parte de los alumnos que pasaban estos mensjes, muestra hasta qué punto se percibe que lo que estaba en juego para ellos era dar una respuesta « justa ».

Inventario de algunos procedimientos

Llamemos n al número-referencia. Algunos procedimientos vuelven con frecuencia durante la primera fase del juego (nos situamos en el caso de equipos de 3 jugadores con cartones de 0 a 9). Necesitan la identificación de sus jugadores y su rol. Las designaciones elegidas con mayor frecuencia son A, B, C,... El interés de una numeración con enteros, del tipo A1, A2, A3,... no aparece en los equipos de 3 o aparece de manera débil. Esta numeración se vuelve casi indispensable en todos los grupos.

1) Utilización de la división por 9

Es el procedimiento que será con mayor frecuencia seleccionado al final como el mas performante. Este consiste en dividir n por 9. Se obtiene $n = 9q + r$. Los q primeros jugadores juegan 9, les siguen r, los otros posibles juegan 0.

Raramente se expresa de esta manera, sobre todo al inicio. Se encuentran más formulaciones del siguiente tipo (con discuciones en relación a la elección de los límites).

- *entre 0 y 9, el jugador A indica n, los jugadores B y C indican 0.*

- *entre 9 y 18, el jugador A juega 9, el jugador B juega n - 9 y C juega 0 .*

- *entre 18 y 27, A y B juegan 9 y C juega n-18.*

Como lo hemos señalado, es el procedimiento que, en la mayoría de los casos, será reconocido como el mas facilmente generalizable. Con k jugadores y cartones de 0 a p, es suficiente hacer la división euclidiana de n por p, lo que da n = pq + r. Los q primeros jugadores juegan p, el jugador de rango q + 1 juega r et los otros juegan 0. El número k no interviene en los cálculos, sino solamente para la determinación del intervalo de los números-referencia posibles.

La principal dificultad de esta generalización proviene aquí de la necesidad de enumerar los jugadores y situar su número en relación a q para cada uno de ellos.

Al final de la fase 5, sucede que esta generalización sea retenida sin referencia a la división, por recorte de intervalos : al jugador A se le atribuye el intervalo de 0 a 9, al jugador B de 10 a 18, al jugador C de 19 a 27, etc. El rol de cada uno es entonces definido según que el número-referencia esté antes, durante, o después del intervalo.

En este caso para hacer explicitar el proceso de división, el profesor puede abordar la fase 6 con un ejemplo numérico sobre los números grandes y proponiendo la numeración de los jugadores. Por ejemplo, se supondrá que hay 127 jugadores numerados de 1 a 127 con 845 como número-referencia. La pregunta es : *cada jugador conoce su número, qué cálculo debe hacer para elegir su cartón ?*

2) Utilización de la división por 3
Se divide n por 3, lo que da n = 3q + r.

Si r = 0, cada jugador juega q ; si r = 1, dos jugadores juegan q y otro q + 1 ; si r = 2, un jugador juega q y los dos otros q + 1.

Sucede con frecuencia, cuando este procedimiento es seleccionado, que un solo jugador tenga a cargo los "correctivos" y deba entonces jugar q + 1 si r = 1, sino q + 2 si r = 2, mientras todos los otros juegan dos q. Para el profesor es de utilidad identificar esta forma porque siempre funciona salvo para n = 26.

Este procedimiento también es generalizable. Con k jugadores y cartones de 0 a p, se hace la división euclidiana de n por k, lo que da n = kq + r. Los r primeros jugadores juegan q + 1 y los otros q. El número p no interviene en los cálculos, sino solamente para la determinación del intervalo de los números posibles.

La gran dificultad en utilizar este procedimiento generalizado proviene de la necesidad de numerar a los jugadores.

3) Otros procedimientos
Pueden aparecer otros procedimientos más o menos difíciles a generalizar. Por ejemplo :

a) Utilización de la paridad

- si $n \leq 18$
  si n es par, A y B juegan n/2, C juega 0.
  si n es impar, A y B juegan (n - 1)/2, C juega 1.
- si $n > 18$
  A y B juegan 9 y C completa.

b) Delimitación de partes autónomas
El procedimiento anterior puede ser considerado como una clase particular de esta categoría. Consiste en dividir el intervalo [0 ; 27] en sub-intervalos y definir una regla para cada uno de estos intervalos, pudiendo estas reglas no guardar relación entre ellas.

Con frecuencia los intervalos elegidos están vinculados a la numeración y se encuentra una regla para los números inferiores a 10, otra para los números de 10 a 20 y una tercera para más de 20.

c) Constitución de una tabla
Es un caso particular del caso precedente. No solamente se buscan intervalos, sino todos los números posibles y se define el rol de cada jugador para cada uno de ellos. Se podrían imaginar reparticiones totalmente arbitrarias para cada número. En realidad las tablas elegidas son frecuentemente constituídas entera o parcialmente a partir de uno de los dos procedimientos anteriormente descritos. Pero éstos permanecen al principio implícitos, pudiéndose hacer la explicitación de manera progresiva.

Observación

Es interesante poner en relación, por una parte los dos primeros procedimientos descritos, división por 9 (p en el caso general) y división por 3 (k en el caso general), y por otra parte el análisis de las situaciones de división propuestas anteriormente. El ejemplo podría ser tomado durante este estudio.

Entonces se puede decir que

- el procedimiento de división por 9 corresponde a una representación en términos de **división-cociente** : cada jugador elige 9 (o p) y el problema es saber para un número-referencia n dado, cuántos jugadores deberán intervenir :

$$\begin{array}{c|c} 1 & 9 \\ ? & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 1 & p \\ ? & n \end{array}$$

- el procedimiento de división por 3 corresponde a una representación en términos de **división-partición** : 3 (o k) jugadores buscan obtener n para partes iguales y se trata de saber cuánto debe jugar cada jugador :

$$\begin{array}{c|c} 1 & ? \\ 3 & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 1 & ? \\ k & n \end{array}$$

En los dos casos la dificultad proviene del hecho que no se utilizan reales ni decimales, sino enteros : hay que situarse en el cuadro de la división euclidiana e interpretar el « resto » posible en término de juegos "desfasados" para uno de los jugadores.

Segunda situación
"La carrera de los 20"

Esta actividad ha sido estudiada y descrita en detalle por Guy Brousseau. Inicialmente pretendía introducir con los alumnos el algoritmo de la división : «*La carrera para n y las lecciones que le siguen tienden a reemplazar las que se dicen explicaciones y justificaciones, que recargan, sin volver mas eficaz, el aprendizaje de la división»*[1]

Pero el interés de ésta actividad es el de ser una situación rica que se desea analizar en el cuadro de *la teoría de situaciones*.[2]

Nos parece interesante utilizarla en formación. Además de sus vínculos con la división brinda la ocasión de revenir sobre diversos conceptos de didáctica.

Objetivos

- Hacer aparecer la utilización de la división como procedimiento experto para definir una estrategia éxitosa de un juego.

- Dar sentido, a partir del análisis de la actividad, a nociones de dialéctica en particular dialécticas de *acción**, de *formulación**, de *validación** de *institucionalización*, nociones de *situaciones didácticas** y *a-didácticas**.

[1] Guy Brousseau, "Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen" dans "*La mathématique à l'école élémentaire*" (APMEP- 1972)

[2] G.Brousseau, « *Théorie des situations Didactiques* », 1970-1990 p 25- 44, La Pensée Sauvage, 1998 (traduit en anglais et espagnol).

El juego
Están presentes dos adversarios Al y A2. A1 comienza y dice 1 o dice 2 ; A2 dice el número obtenido agregando sea 1 sea 2 al número dicho por A1 ; A1 a su turno dice el número obtenido agregando sea 1 sea 2 al número dicho por A2 ; y así continúan. El primero que dice 20 ha ganado.

Ejemplo de partida
(gana el jugador A2) :

2-**3**-5-**6**-7-**9**- 10-**1l** - 13-**15**- 16-**17-**18-**20**

También este juego puede llamarse *"carrera de los 20 de pasos 3*" como caso particular del caso general de la *"carrera de los n de pasos p" :*

> Sean n y p dos naturales (n < p). Se enfrentan dos adversarios A1 y A2. A1 dice un número natural estrictamente inferior a p; A2 dice el número obtenido agregando un número estrictamente inferior a p al número dicho por Al; A1 a su turno dice el número obtenido agregando un número estructamente inferior a p al número dicho por A2; y así continúa. El primero que dice n ha ganado.

Este último juego puede ser considerado como un caso particular del caso precedente:

> Sean a_1, a_2 ... a_k, k enteros distintos y n un natural. Se enfrentan dos adversarios. Al dice uno de los a_i ; A2 agrega uno de los a_i al número dicho por A1 ; A1 agrega a su turno uno de los a_i al número dicho por A2 ; y así continúa. El primero que pasa n ha perdido (es decir que el que dice n ha ganado, pero n puede no ser alcanzado).

Todos estos juegos forman parte de la categoría de NIM. Se caracterizan por el hecho que toda posición posible del juego es sea ganadora sea perdedora con el siguiente sentido :

- una **posición es ganadora** si toda posición siguiente es una posición perdedora,
- una posición es **perdedora** si existe al menos una posición ganadora entre las posiciones siguientes.

A partir de la posición ganadora definida por la finalidad del juego, un **análisis regresivo** permite determinar progresivamente las posiciones ganadoras y las perdedoras.

Ejemplo, del caso de juego más general y los siguientes valores :

n = **30** y k = 3 con a_l = **2**, a_2 = **3**, a_3 = **6**

- 30 es ganador como 29 (estas posiciones obligan a ambos adversarios a pasar 30)
- 28 es perdedor porque la posición ganadora es 30 puede ser alcanzado (+2)
- 27 es perdedor porque una posición ganadora puede ser alcanzada (+2 o +3)
- 26 es perdedor (acceso a una posición ganadora por +3)
- 25 es ganador +2, +3 o +6 conducen a una posición perdedora
- 24 es perdedor (+6)
- 23 es perdedor (+2 ou + 6)
- 22 es perdedor (+3)
- 21 es ganador porque +2, +3 o +6 conducen a una posición perdedora
- 20 es ganador por la misma razón
- 19 es perdedor como 18, 17
- 16 es ganador
- 15 es perdedor como 14, 13,
- 12 es ganador como 11
- 10 es perdedor como 9, 8
- 7 es ganador
- 6 es perdedor como 5, 4
- 3 es ganador como 2.

Finalmente las posiciones ganadoras son :
2, 3, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25, 29, 30.

La estrategia ganadora es entonces jugar primero y comenzar sea por 2 sea por 3, lo que permitirá conservar siempre una posición ganadora.

Si ahora tomamos n = 32, las posiciones ganadoras se trasladan y se transforman en :
4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 31, 32.

La estrategia ganadora consiste entonces en dejar jugar primero al adversario, lo que permitirá con seguridad obtener una posición ganadora.

Cuando n es grande, este análisis regresivo es largo, de donde surge el interés de buscar una regla que permita establecer en función de n y de los a_i la lista de las posiciones ganadoras.

Según nuestro conocimiento, una regla tal jamás ha sido fomulada en el caso del juego mas general. Sin embargo, y es lo que da el interés por este juego, aquí es posible formular una regla en el caso de *"la carrera para n de pasos p"*.

Esta regla es la siguiente :

sea r el resto de la división euclidiana de n por p + 1, las posiciones ganadoras son de la forme r + k(p + 1).

En formación, se puede por ejemplo :

- sea estudiar el comienzo del problema en el caso mas general con un ejemplo numérico del tipo mencionado mas arriba, de manera de hacer descubrir a los estudiantes el principio del análisis regresivo luego estudiar la carrera par n y establecer una regla vinculada a la división;

- sea estudiar la carrera directamente para 20 antes de generalizar la carrera para n. Describiremos este elección posteriormente.

Fase 1

Descubrimiento del análisis retrógrado
Los estudiantes son repatidos en grupos de 2 y son invitados a jugar hasta el descubrimiento de una estrategia ganadora presentada como hipotética. Cuando encuentra esta estrategia, el profesor propone volver a jugar con cambio del casillero de llegada luego del paso, a fin que ellos generalicen su estrategia. Para los grupos más avanzados, un cambio de las variables numéricas (n y p mas grandes) podrá conducir a formularla en términos de división.

Comentarios
Luego de algunas partidas en las que los estudiantes juegan al azar, el teorema "17 *es una posición ganadora"* aparace en general bastante rápido, en principio implícitamente luego explícitamente. Cuando se les solicita, no tienen demasiadas dificultades en argumentar esta posición. El pasaje al análisis regresivo es mucho mas delicado. A veces es necesario invitar a los estudiantes a hacer una partida jugando la carrera de los 17 luego hacerlos jugar nuevamente a la carrera de los 20; se puede recomenzar haciéndolos jugar a la carrera de los 14... Algunos tienen muchas dificultades para "remontar" enteramente la serie de los números hasta la posición ganadora inicial: Una puesta a punto colectiva sobre lo que son posiciones « ganadoras » y posiciones “perdedoras” es en general necesaria.

Fase 2

Vínculo con la división
Esta fase puede desarrollarse colectivamente en forma de intercambio sobre las estrategias descubiertas por los grupos. Se tratará en un primer momento de institucionalizar el principio de determinación de las posiciones ganadoras y de las posiciones perdedoras. La consigna será luego de encontrar lo mas rápido posible la posición ganadora inicial. El aumento de los valores de n y p (por ejemplo carrera de 227 con un paso de 23) obliga a optimizar los cálculos de las

posiciones ganadoras, lo que permitirá institucionalizar la regla de ganador vinculada a la división.

Comentarios
La ventaja de este juego es que no evoca inmediatamente la división. El primer procedimieno eficaz que aparece es el de las sustracciones sucesivas n - p - p - p... A veces es necesario un tiempo para que los estudiantes vean el vínculo con la división. Es entonces un medio interesante para la reflexión sobre el sentido *"sustracciones sucesivas"* de la división.

Fase 3

Institucionalización didáctica
Una reflexión sobre las variables didácticas y aún sobre los diferentes tipos de situación podrá ser conducida por el profesor.

Se puede discutir la opción de introducir la división en la escuela a partir de la carrera de 20. La actividad es en sí una situación-problema interesante para proponer a los alumnos.

La división
Aspectos matemáticos

I - La división y otras operaciones

Objetivo
Conducir a los estudiantes a comprender las particularides de la división en relación a las otras operaciones.

Fase 1
El profesor distribuye los siguientes ejercicios :

- *a) sumar 4 y 7*
- *b) sumar 47,5 y 6,003*
- *c) restar 7 de 46*
- *d) restar 28,45 de 102,068*
- *e) multiplicar 3 por 17*
- *f) multiplicar 5 por 0,56*
- *g) multiplicar 0 por 3,1*
- *h) multiplicar 3,1 por 0*
- *i) dividir 65 por 5*
- *j) dividir35 por 16*
- *k) dividir 42 por 0*
- *l) dividir 370 por 28*
- *m) dividir 650 por 101*

n) *dividir 426,23 por 1,12*
o) *dividir 4, 7 por 6*
p) *dividir 65 por 1,01*
q) *dividir 1 por 7*
r) *dividir 0 por 0.*

Solicita a cada uno escribir la respuesta sobre papel.

Fase 2
Puesta en común y confrontación de las respuestas dadas. Puesta en evidencia rápida del carácter no ambigüo de las respuestas sobre adición, sustracción y multiplicación. Por el contrario, sobre la dividión en numerosos casos, hay varias respuestas diferentes. Se trata entonces de determinar las que son matemáticamente justas. Ademas, las anotaciones utilizadas por los estudiantes son variadas ; se da por lo tanto una explicación de cada una de ellas.

Fase 3
El profesor concluye provisoriamente esta actividad recordando o precisando brevemente ciertas definiciones, ciertos términos vinculados a la división euclidiana en **N** y a la división en **R**.

II – Profundización matemática

Se trata ahora de volver a diversos contenidos matemáticos vinculados a la división euclidiana a partir de la resolución de ejercicios.

Son tratados al menos cinco tipos de ejercicios :

1. dos ejercicios que necesitan movilizar la definición de la división euclidiana y en particular reflexionar sobre la doble desigualdad verificada por el resto, por ejemplo:

- *En una división, el divisor es 83, el cociente es 403. Expresar las divisiones posibles y los restos asociados.*

- *El dividendo es 8592, el cociente es 38. Encontrar un divisor y un resto asociado. Hay varias soluciones ? Si sí, expresar todas las soluciones, si no justificar la respuesta.*

- *Sean a, b, c tres naturales que verifican $a > b$ y $c \neq 0$. El cociente de a por c es a' y el cociente de b por c es b'. Se puede prever cuales serán los cocientes por c de $a + b$, $a - b$ y $a.b$?*

2. ejercicos que plantean preguntas relativas a técnicas operatorias, por ejemplo :

- *Sea el número 12345678910111213 a dividir por 117. Indicar un método que permita encontrar el número de cifras del cociente sin efectuar la división.*

- *El dividendo es 5468902. En el caso particular en que el divisor es 125, dar un método rápido de cálculo que permita obtener el resultado sin efectuar la división.*

3. ejercicios con nociones de múltiplos y divisores y con criterios de divisibilidad, por ejemplo :

- *Por qué cifra hay que reemplazar x e y para que el número (escrito en base diez) 632xy sea divisible a la vez por 2, por 5 y por 9 ?*

- *Verificar que el número 5757 es divisible por 101. Mostrar que el número (escrito en base diez) xyxy es divisible por 101.*

- *A, B, C D, E, F son números enteros naturales escritos debajo en base diez (a designa una cifra) :*

A = 10a4	*B = 34a*	*C = a4324*
D = a18	*E = 314aa*	*F = a353a*

  Para cada uno de los números A, B, C D, E et F, reemplazar la cifra a por diferentes valores, si esto es posible, de manera que el número correspondiente sea un múltiplo de 4. Justificar las respuestas.

- *Enunciar una condición para que el número que se escribe "mcdu"sea múltiplo de 4 (m, c, d, u designan cifras). Demostrar el resultado enunciado.*

4. diversos ejercicios pretextos para la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones, por ejemplo :

- *El cociente de dos naturales es 6 y el resto 47. La suma de los dos naturales y del resto es 591. Cuáles son esos dos naturales ?*

5. problemas mas abiertos que pueden recurrir a la división :

- *Sabiendo que el 7 /12/ 92 el lunes, por qué día de la semana ha comenzado el año 1992 ? qué día el pueblo francés a tomado la Bastilla?*

Este trabajo se termina con una exposición del profesor sobre división euclidiana en **N** y **D** y sobre la división en **R** y **Q** (con en casi todos los casos necesidad de volver antes a los diferentes conjuntos de números y la noción de valor aproximado de un real por un decimal en un orden dado)

Esta exposición contiene particularmente la explicitación de diversos temas : dividendo, divisor, cociente, resto, división euclidiana en **N**, división exacta, múltiplos y divisores...

Procedimientos de cálculo de divisiones

Objetivo
Análisis detallado de los procedimientos de cálculo en la resolución de problemas de divisiones. Nos situamos aquí en el cuadro de los naturales y de la división euclidiana.
"Pulgarcito"

> *Pulgarcito con sus botas de siete leguas realiza saltos de 28 km. Debe recorrer 1155 km. Cuántos pasos debe hacer ?*

Primera simulación
Los estudiantes son invitados a resolver este problema el que posee esta condición : *no se debe utilizar la división.*

Segunda simulación
El mismo problema es propuesto cambiando los datos numéricos y el problema posee la siguiente condición: *no se debe utilizar ni división ni multiplicación*.

Puesta en común
Consiste en inventariar y discutir los procedimientos utilizados.

Análisis de trabajo de los alumnos

Analisis de protocolos
El profesor distribuye a los estudiantes los protocolos presentados en Anexo 1. Estudio de este documento con una puesta en común y discusión sobre los procedimientos utilizados.

Análisis de procedimientos
Se encontrará en Anexo 2 un montaje, precedido de la lista de problemas de referencia, que es propuesto a los estudiantes con la consigna de clasificar los diferentes tipos de pocedimientos identificables.

El profesor retoma entonces en forma de exposición, el artículo de Robert Neyret, y sintetiza una tipología de los diferentes procedimientos susceptibles de ser movilizados por los alumnos.

Trabajos para efectuar entre dos cursos

Los estudiantes son invitados a :

- Leer documentos que conciernen la división, a partir la bibliografía que cada profesor podrá constituír.
- Comenzar a consultar manuales e intentar analizar la manera en que es abordada la división.

Situaciones y problemas de división

1. Contexto de las situaciones de división

El profesor distribuye a los estudiantes los siguientes problemas :

1. Se dispone de 47 azulejos para cubrir una parte de un muro. Se colocan 6 azulejos por hilera. Cuántas hileras se completarán ?

2. Se cuenta de 6 en 6 retrocediendo a partir de 47. Cuál será el último número anunciado ?

3. Se dispone de casilleros que pueden contener 6 cassettes. Cuántos casilleros se necesitarán como mínimo para guardar 47 cassettes ?

4. Con una vara de madera de 47 cm de largo, cuántos trozos de 6 cm se pueden cortar ?

5. Con una vara de madera de 47 cm de largo, se desean obtener 6 trozos de igual largo y tener el mínimo posible de pérdida. Cuál debe ser el largo de cada trozo ?

6. Se da un sachet de 47 bombones a un grupo de 6 niños. Cuántos bombones tendrá cada uno ?

7. Se reparte lo mas equitablemente posible 47 canicas entre 6 niños. Cuántas canicas tendrá cada uno ?

8. Se reparte equitablemente 47 canicas entre 6 niños dándoles el máximo posible. Cuántas canicas no serán distribuídas?

9. Se comparte equitablemente 47 francos entre 6 personas. Cuánto se le da a cada uno ?

10. 47 granos de trigo son lanzados a 6 gallinas. Cuántos granos come cada una ?

11. Un empledo cobra una prima de 47 francos por día de trabajo. Trabaja 6 horas por día. En cuánto aumenta su salario horario con esta prima ?

12. Se debe repartir 47 litros de vino en bidones de 6 litros. Cuántos bidones serán necesarios ?

13. 6 personas heredan juntas un terreno de 47 hectáreas que deciden dividir en 6 lotes de igual área. Cuál será el área de cada lote ?

14. Se multiplica un número por 6 ; se obtiene 47. Cuál es ese número ?

15. En calculadora que aficha 8 cifras, se marca sucesivamente :

4 7 ÷ 6 =

qué aficha la calculadora ?

Preguntas :

Cuáles son los enunciados que ponen en relevancia la división de 47 por 6 ?
Cuál es la respuesta en cada caso ?
El « sentido » de la división es el mismo cada vez ?

Búsqueda luego puesta en común para hacer aparecer dificultades específicas a los problemas de división que necesitan mas que para las otras operaciones, una interpretación de los resultados.

2. División y proporcionalidad simple

Objetivos
- Resituar los problemas de división al interior de las estructuras multiplicativas.
- Percibir la diferencia entre división-cociente y división-partición y su incidencia en los procedimientos empleados.

Desarrollo
Se propone a los estudiantes los siguientes problemas

1. Celine tiene 240 estampillas que completan un álbum de 16 páginas. Todas las páginas tienen el mismo número de estampillas. Cuántas estampillas hay en cada página ?

2. Un nadador recorre 2400 m en una piscina. El largo de la pileta es de 50 m. Cuántos largos de pileta va a recorrer el nadador ?

3. Durante un viaje un vehículo a recorrido una distancia de 1540 km a una velocidad media de 80 km/h. Cuál es el tiempo que ha durado el viaje ?

4. Un satélite efectúa 75 veces la vuelta a la tierra en 5475 minutos. En cuánto tiempo realizará la vuelta a la tierra ?

5. Un tubo de goma de pegar cuesta 11 F. Un maestro compra con 495 F. Cuántos tubos de goma de pegar ha comprado?

6. La cosecha de patatas en un campo es de 145,5 toneladas. Ha producido un promedio de 20 toneladas por hectárea. Cuál es el área de este campo ?

7. Una escuela pide libros de matemáticas. Hay que pagar, en total 2703 F para los 53 libros solicitados. Cuál es el precio de un libro de matemáticas ?

8. M. Dupont compra tela a 55 F el metro. Paga 192,50 F. Qué largo de tela ha comprado?

9. En Francia, se consume cada año 9 222 000 000 kg de papel. Este país tiene 58 000 000 habitantes. Cuál es la consumación media de papel por habitante ?

10. Un grifo en 350 segundos deja salir 3010 ml de agua. Cuántos ml de agua se pierde en un segundo ?

11. Julie tiene una caja de 520 perlas. Ella construye collares de 20 perlas. Cuántos collares puede hacer ?

12. El mercado de frutas ha comprado 75 cajas de manzanas con un peso total de 937,5 kg. Cuál es el peso de una caja ?

13. Un diamante de 15 centímetros cúbicos tiene una masa de 52,5 g. Cuál es la masa de un centímetro cúbico del diamante ?

14. En el pricipado de Mónaco, hay 18500 habitantes por km2. La población de Mónaco es de 27 750 habitantes. Cuál es la superficie del principado ?

La consigna es la siguiente :

> *Aquí están los 14 problemas de división. Independientemente del contexto de las magnitudes, de los números o de la sintaxis, clasificar estos problemas en función del "sentido" de la división a la que hacen referencia.*

Si los estudiantes tienen dificultad para efectuar esta clasificación, se podrá precisar la consigna de esta manera :

> *Pueden en particular intentar buscar una representación esquemática o simbólica para cada problema e identificar las que pongan en relevancia el mismo tipo de representación.*

La puesta en común tendrá por objetivo hacer aparecer los dos sentidos de la división para los que retomamos aquí las representaciones simbólicas propuestas por Gérard VERGNAUD[1]:

- **División-partición** *(o "búsqueda del valor de una parte")*

1	**?**
b	**c**

- **División-cociente** (o *"búsqueda del número de partes")*

1	**a**
?	**c**

Esta representación debe permitir resituar la división en el conjunto de las estructuras multiplicativas (para las que un estudio mas general es susceptible de haber precedido esta secuencia).

Recordemos que G. Vergnaud distingue, en las estructuras multiplicativas :

- La proporcionalidad simple
- El producto de medidas y la proporcionalidad doble.

La proporcionalidad simple pone en relacion dos magnitudes y los problemas que de allí surgen son problemas de 4 términos, igualmente si uno de ellos (la unidad) es frecuentemente presentado pero solo aparece a través de la designación general de una de las variables o por términos tales como *"cada", "cada uno", « uno »...*

Según la presencia o no de la unidad y según la ubicación del término buscado, estamos en presencia de 4 grandes categorías de problemas. Además de las dos divisiones evocadas mas arriba, estos problemas pueden concernir :

- ***la multiplicación***

1	**a**
b	**?**

- ***la búsqueda del 4to proporcional***

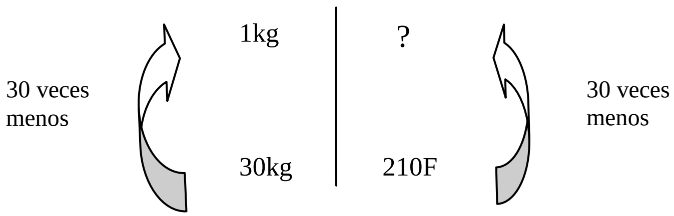
[1] « Le moniteur de Mathématiques - Résolution de problèmes », sous la direction de G .Vergnaud, Fichier pédagogique, cycle 3, 1997.

a	**b**
c	**?**

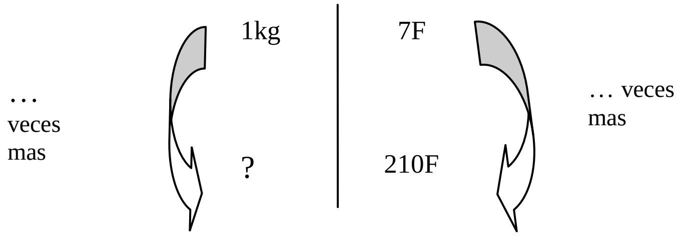
Como ha mostrado G. Vergnaud, estas diferentes categorías, y en particular las dos divisiones, que aquí nos interesa, no requieren siempre el mismo tipo de tratamiento.

- la división-partición reposa esencialmente en el reconocimiento de una relación escalar.

Si 30 kg de patatas cuestan 210 F, el precio de un kilo se obtiene aplicando la relación escalar « 30 *veces menos* ».



- la división-cociente puede reposar :
  *en el reconocimiento de una relación escalar que no está directamente determinada y que hay que calcular



si 1 kg cuesta 7 F, cuántos kg se pueden adquirir con 210 F ? se resuelve buscando *"cuántas veces más"* representa 210 F en relación a 7 F

*en la búsqueda del coeficiente de proporcionlidad

> si 1 kg cuesta 7 F, se pasa de la masa al precio multiplicando por 7 y del precio a la masa dividiendo por 7. La diferencia, aquí, es que este 7 no es más un escalar, un número sin dimensión como lo era precedentemente, es una nueva magnitud y una magnitud compleja porque se trata de una magnitud-cociente (7 F/kg). Tal representación del problema no es simple para los alumnos y sistematizar el recurso al coeficiente de proporcionalidad no cae por su propio peso.

Las consideraciones precedentes pueden ayudar a comprender las razones de la utilización de uno u otro procedimiento en los problemas de división.

Es de esta manera (y se podrá verificar con los procedimientos descritos en anexo 2) que los problemas de división- cociente abren naturalmente la vía a las sustracciones (o adiciones) sucesivas : si 1 kg cuesta 7 F, se puede obtener también kg que corresponden a 210 F sustrayendo las veces que sea necesario 7 F. Se sustraen francos a francos y esto toma fácilmente sentido.

Los problemas de división-partición, no pueden resolverse con la ayuda de sustracciones (o adiciones) sucesivas. Si 30 kg cuestan 210 F, no se puede obtener el precio de l kg sustrayendo 30 de 210 las veces que sea necesario. Esto permitiría obtener la respuesta correcta pero al precio de una pérdida de significación (sustraer 30 kg de 210 F !)... Sin embargo, los intentos de multiplicación toma aquí sentido : en 30 kg hay 30 veces más que en un kilo, entonces 210 F es igual a 30 veces el precio buscado, lo que conduce a emitir hipótesis sobre este precio.

La división en las clases

Se trata de una encuesta realizada en 3ro y 4to año.
Cada estudiante observa un grupo de dos niños según las modalidades que describimos mas adelante, y que son trabajadas previamente durante una sesión de preparación.

Los problemas

- *Con sus botas de siete leguas, Pulgarcito se desplaza entre dos ciudades. Efectúa pasos de 28 kilómetros.*
  Parte de Angers para ir a Limoges. La distancia entre estas dos ciudades es de 252 kilómetros. Cuántos pasos hará ?

- *Otro día él va a Quimper. La distancia es de 319 kilómetros. Cuántos pasos hará ?*

- *Tenemos un paquete de 89 cerillas.*

Cómo hacer para repartirlas entre 7 de manera que cada una tenga igual cantidad?

Pueden utilizar las cerillas para responder pero no es imperativo.

Condiciones de observación

1. Los niños están organizados en grupos de 2 ; cada observador se ocupa de un grupo.

2. Las intervenciones eventuales del observador deben limitarse a los siguientes casos
    • solicitar re-contar un cálculo erróneo
    • volver a leer el enunciado en caso de bloqueo
    • cuando el niño a encontrado una solución, pedirle la explicación de lo realizado y si está seguro del resultado obtenido.

3. Trabajo de observación a realizar :
    - Redactar una crónica de la secuencia
    - Para cada uno de los dos niños observados, redactar una nota de síntesis poniendo en evidencia :
        - Procedimientos utilizados
        - Los errores vinculados a los procedimientos elegidos
        - La interpretación dada al resto
        - La manera en que es presentado el resultado
        - El rol del trabajo de a dos

      Y para el segundo problema :
        - La estabilidad eventual de los procedimientos
        - El rol del material y la gestión del resto.

    - Puesta en común sobre la manera en que los niños han trabajado y los procedimientos que ellos han utilizado.

Trabajo para hacer entre dos cursos

Redacción de las crónicas de observación. Estas pueden ser sintetizadas y devueltas a los maestros de las clases concernidas.

Análisis de los manuales

Lectura y comentario de programas.

Trabajos en grupos para construír una progresión sobre la división en 4to año con la ayuda de manuales a disposición. La consigna es identificar los diferentes puentos de vista de los manueles sobre :

- ⇨ La organización de la progresión
- ⇨ La elección de las situaciones de referencia
- ⇨ El grado de libertad dejado a los alumnos en la elección de procedimientos de resolución
- ⇨ La diferenciación división-partición y división-cociente

⇨ Las técnicas de cálculo propuestas
⇨ …….

Puesta en común

Complementos de las técnicas de cálculo

Los algoritmos de los cálculos de divisiones

Se trata aquí de presentar las diferentes técnicas de cálculo en uso en las clases. Esta presentación podrá ser completada por diversas técnicas untilizadas históricamente.

Análisis de los errores de los alumnos

Este trabajo de análisis de errores es particularmente interesante.

Encontramos aquí un trabajo sobre errores que sobrevienen en los cálculos de divisiones (ver anexo 3).

Los estudiantes deben analizar estos errores, hacer hipótesis sobre sus causa eventuales, explicitar los medios de control que podrían haber sido puestos en marcha por los alumnos.

El profesor concluye intentando presentar una tipología de los errores de división, apoyándose en una lista organizada de las causas eventuales :

- existencia de un cero al cociente (en posición final o intermedia),
- evaluación equivocada de número de cifras al cociente,
- existencia de un resto (parcial o final) superior al divisor,
- evaluación equivocada del orden del cociente o del cociente parcial,
- percepción errónea debido a una mala disposición de los cálculos o de una mala lectura de las cifras del cociente,
- sobre carga de trabajo o sobre carga de memoria,
- mal dominio de las tablas de multiplicación,
- mal dominio de la regla de ceros,
- retenido en una sustracción o en una multiplicación,
- …

Bibliografía

- *Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école* -IREM de Paris 7 -COPIRELEM – 1992 à 2002.
- cours de G. BROUSSEAU - Actes de la première université d'été des professeurs d'École Normale - Olivet – 1988 (épuisé)
- D. BUTLEN , M. PEZARD - *Une formation en didactique des mathématiques pour les instituteurs -maîtres-formateurs* - Document n° 4 pour la formation - IREM de Paris VII -Université de Paris VII

- *La division à l'école élémentaire* - "Elem Math III" - COPIRELEM-APMEP – 1983
- R. NEYRET. - Procédures *utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division, repérage de quelques difficultés* in *"Comment font-ils"* - Rencontres pédagogiques n° 4'- INRP –1984
- H. PÉAULT *La division en formation initiale -Actes* du colloque COPIRELEM de Rouen – 1988 (épuisé)
- *Situations problèmes de division et procédures* in *"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)"* -première partie - publication de l'IFM. de Grenoble - n° 19 - avril 1987(épuisé)

Anexo l

Este extracto es sacado de un anexo del capítulo *"Situaciones problemas de división y procedimientos"*. Presenta protocolos de pasación del problema de « Pulgarcito *(Pulgarcito realiza saltos de 28 km con sus botas de siete leguas. Cuántos pasos deberá hacer para ir de una ciudad a otra ?),* 12 de octubre de 1982.

Situación
Elegir dos ciudades. Pulgarcito se desplaza entre estas dos ciudades con su bota de siete leguas. Encontrar el número de pasos que hará para ir de una ciudad a la otra.

Jérôme - Jean-François

Ciudades elegidas
Rennes - Paris; 351 km

Desarrollo
Jean-François escribe

28 x 2 = 56
56 x 2 = 112
112 x 2 = 224
224 + 112 = 336
336 + 28 = 364
luego 351 - 336 = 15

Se equivoca en el conteo de los pasos, obtiene 23, calcula 28 x 23 = 644 y concluye :

23 veces 28, tiene 15 km.

Jérôme suma 28 :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 364
364 - 28 = 336
336 + 28 = 364
364 - 28 = 336
351 - 336 = 15
Calcula 12 x 28 = 336 luego concluye :

Tiene que hacer 15 km.

Sylvie - Victor

Ciudades elegidas
Lille - Grenoble; 769 km.

Desarrollo

Victor coloca la división

769	28

Evalúa la magnitud del cociente $10 < q < 100$ luego efectúa

28 x 9= 252
28 x 15 = 420
28 x 20 = 560
28 x 30 = 840
28 x 28 = 784
28 x 27 = 756
28 x 29 = 812

Luego concluye :

769	28
- 756	27
013	

<u>Marie-Pierre et Marie-Françoise</u>

Ciudades elegidas
Grenoble - Marseille; 277 km

Desarrollo
Marie-Pierre dice que hay que hacer una división y coloca

277	28

Ella escribe :

28 x 8 = 224
224 + 28 = 252
252 + 28 = 280

Luego

227	28
- 252	9
025	

Marie-Françoise dice de no saber hacer las divisiones y busca otra cosa. Ella escribe

277
-56
221
-56

$$
\begin{array}{r}
265 \\
\underline{-56} \\
219 \\
\underline{-56} \\
163 \\
\underline{-84} \\
179 \\
\underline{-84} \\
95 \\
\underline{-84} \\
11
\end{array}
$$

Compara con el resultado de Marie-Pierre y constata un error :

$$
\begin{array}{r}
163 \\
\underline{-84} \\
79
\end{array}
$$

Ella re-escribe

$$
\begin{array}{r}
277 \\
\underline{-84} \\
193 \\
\underline{-84} \\
109 \\
\underline{-84} \\
25
\end{array}
$$

Marie-Françoise concluye :
Ha hecho 0 pasos y le quedan 25 km.

Sébastien - Lucile

Ciudades elegidas
Grenoble - Lyon; 105 km

Desarrollo
Lucile coloca

$$
\begin{array}{r|l}
105 & 28 \\ \cline{2-2}
 &
\end{array}
$$

Luego hace los cálculos siguientes

105 + 28 = 133
105 x 28 = 2940

A continuación escribe

28	28	28
x 5	x 3	x 4
140	84	102

Lo que le permite escribir

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

Luego escribe

28 x 2 = 56

28 x 6 = 168

Sébastien durante este tiempo, luego de haber hecho el cálculo 105 x 28 = 2940, escribe :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 196

que Lucile verifica haciendo 28 x 7 = 196

Lucile realiza el cálculo 105 x 7 = 735 Sébastien comienza una sustracción

105 – 28 = 77

luego escribe

28 + 28 + 28 + 28 + 28

Lucile le dice *"solo tienes que hacer 28 x 5"* que Sébastien calcula : 28 x 5 = 140

Sébastien escribe 140 - 28 = 112

luego 112 - 28 = 184 (error de cálculo)

luego

28 x 4 = 112

28 x 7 =   nuevamente 28 x 4 = 112

28 x 6 = 168

168 – 28 = 140

140 - 28 = 118 (error de cálculo)

118 – 28 = 90

Discusión sobre el número de pasos . Sébastien y Lucile recuperan un cálculo hecho anteriormente: *28 x 3 = 84*

Sébastien calcula

112 x 3= 336

136 - 28 = 108

28 x 3 = 84

Lucile, luego de haber vuelto a colocar

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline 3 & 21 \end{array}$$

Efectúa los cálculos

112 – 84 = 28
112 + 84 = 196

mientras que Sébastien calcula

84 x 28 = 1272 (error de cálculo)
Pérdida de significación del problema tanto para uno como para el otro.

Anexo 2

Extracto de *Procedimientos utilizados por niños de 4to y 5to año en ciertos problemas de división. Identificación de algunas dificultades* (Robert NEYRET) in Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

Nos hemos propuesto estudiar la manera que los niños elaboran procedimientos de resolución de problemas de tipo escolar, particularmente la división.

Los problemas planteados han sido los siguientes :

Problema 1 a
Con sus botas de siete leguas, Pulgarcito se desplaza entre dos ciudades. Hace pasos de 28 km. Parte de Grenoble para ir a Nice; Grenoble-Nice : 224 km. Cuántos pasos va a hacer ?

Problema 1 b
Luego parte de Grenoble para ir a Marseille (u otras variantes en clase de 5to año) Grenoble - Marseille: 277 km.

Problema 2
Se distribuye a los niños una bolsa que contiene cerillas entre 200 y 300 (este número está escrito en papel en el interior de la bolsa). Se pide a los niños de repartir estas cerillas entre 7 personas de manera que cada una de ellas tenga la misma cantidad.

Problema 3
Se colocan 273 huevos en cajas de 12. Cuántas cajas se pueden completar ?

Problema 4
Se reparten equitablemente 273 canicas entre 14 niños. Cuántas canicas se dará a cada niño ?

Problema 5
Se compran 13 álbums de Lucky Luke. Se paga 273 F. Cuánto cuesta un álbum ?

Estos problemas se plantean a alumnos de 4to y 5to año a principios del año escolar antes de todo trabajo específico sobre la división.

Para los dos primeros problemas, los niños trabajan de a dos y pueden trabajar juntos. Un observador anota todo lo que pasa y se dice a nivel de los niños. Las únicas intervenciones « autorizadas » del observador son las siguientes :

- en caso de error de cálculo: « Mira: *aquí has cometido un error de cálculo* ».
- en caso de bloqueo de mas de 3 o 4 minutos : « *Vuelvan a leer el enunciado* » .

Se encontrarán seguidamente trabajos de alumnos extraídos del documento.

①

273 huevos/cajas de 12
el niño hace las tentativas

$12 \times 100 = 1200$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 20 = 240$
$12 \times 15 = 180$
$12 \times 18 = 216$
$12 \times 25 = 300$
$12 \times 22 = 264$
$12 \times 23 = 276$

concluye: “habrán 23 cajas y quedarán 3 huevos”

②

Pulgarcito/distancia 105 :

$$105 \,|\underline{\,28\,}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 5 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 102 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

Pulgarcito hará 4 pasos

③

Pulgarcito/distancia 665 :

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 280 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 665 \\ -\ 280 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 84 & 3 \\ \cline{1-1} 21 & \end{array}$$

Pulgarcito hará 23 pasos y le quedan 21 Km

④

Pulgarcito/distancia 224 :
Intentos de:

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times\ 28 \\ \hline 1048 \\ 263 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 28 \\ \hline 248 \\ 62\ \\ \hline 868 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 28 \\ \hline 64 \\ 16\ \\ \hline 164 \end{array}$$

Luego adiciona

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ \hline 248 \end{array}$$

Al final calcula

$$\begin{array}{r} 248 \\ -\ 28 \\ \hline 220 \end{array}$$

Interpretado por 10 pasos.El observador hace rectificar el error de calculo
$8 \times 28 = 224.$
Pulgarcito hará 8 pasos

⑤

$$\begin{array}{r|l} 670 & 28 \\ \cline{2-2} 110 & 23 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 \times 2 = 56 \\ 28 \times 3 = 84 \\ 28 \times 4 = 112 \\ 28 \times 5 = 140 \\ 28 \times 6 = \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1255 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 112 & \\ \cline{1-1} 135 & \\ -\ 112 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ -\ 80 & \\ \cline{1-1} 34 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ 6 & \end{array}$$

⑥

273 canicas/14 niños
Los intentos son los siguientes

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 30 \\ \hline 420 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 25 \\ \hline 350 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 18 \\ \hline 252 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 19 \\ \hline 266 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array}$$

Tendran 19 canicas y algunos tendrán una mas.

⑦

273 huevos/cajas de 12

$$\begin{array}{rrl} & 12 & 1 \\ + & 12 & 2 \\ + & 12 & 3 \\ + & 12 & 4 \\ + & 12 & 5 \\ + & 12 & 6 \\ + & 12 & 7 \\ + & 12 & 8 \\ + & 12 & 9 \\ + & 12 & 10 \\ + & 12 & 11 \\ + & 12 & 12 \\ + & 12 & 13 \\ + & 12 & 14 \\ + & 12 & 15 \\ + & 12 & 16 \\ + & 12 & 17 \\ + & 12 & 18 \\ \hline & 216 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & 216 & \\ + & 12 & 19 \\ + & 12 & 20 \\ \hline & 240 & \\ + & 12 & 21 \\ \hline & 252 & \\ + & 12 & 22 \\ \hline & 264 & \\ + & 12 & 23 \\ \hline & 276 & \end{array}$$

Se pueden completar 23 cajas

Pulgarcito/distancia 224 ⑧

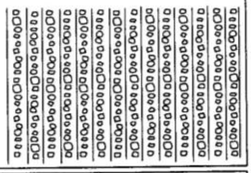
El niño escribe

$$\begin{array}{r} 28 \\ +28 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ +84 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 168 \\ +168 \\ \hline 336 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ - ... \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ -112 \\ \hline 224 \end{array}$$

Pulgarcito deberá hacer 11 pasos

⑨

Canicas entre 14 niños :
El niño cuenta de 1 en 1 hasta 273



Lucky Luke: 273 F/13 albumes ①⓪

El niño escribe

$13 \times 1 = 13$
$13 \times 2 = 26$
$13 \times 3 = 39$
$13 \times 4 = 52$
$13 \times 5 = 65$
$13 \times 6 = 78$

Corta los cálculos precedentes y escribe

$13 \times 10 = 130$
$13 \times 11 = 143$
$13 \times 12 = 156$
$13 \times 13 = 169$
$13 \times 14 = 182$
$13 \times 15 = 195$
$13 \times 16 = 208$
$13 \times 17 = 221$
$13 \times 18 = 234$
$13 \times 19 = 247$
$13 \times 20 = 260$
$13 \times 21 = 273$

El album cuesta 21 F

Pulgarcito/distancia 351 ①①

El niño calcula escibiendo a lado el número de pasos.

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 2 \\ \hline 56 \end{array}\ \text{2 pasos} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times\ 2 \\ \hline 112 \end{array}\ \text{4 pasos} \quad \begin{array}{r} 112 \\ \times\ 2 \\ \hline 224 \end{array}\ \text{8 pasos}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times\ 2 \\ \hline \cancel{464} \end{array}\ \text{puis} \quad \begin{array}{r} 56 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 224 \\ +112 \\ \hline 336 \end{array}$$

Hace 2x2x2=8pasos
Hace 2x2=4pasos
Hace 12 pasos
351-336=15Km queda recorrer le

Petit Poucet / distance 340 : ①②

El niño escribe e $340 \,|\, 28$

$28 \times 7 = 196$
$28 \times 10 = 280$

Se aproxima por adiciones de 28
$280 + 28 = 308$ $308 + 28 = 336$
$336 + 28 = 364$, qui est barré ; et conclut : « il
Hará 12 pasos y le quedarán 4 km

273 huevos/cajas de 12 ①③

12	60	108	156	204	252
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
24	72	120	168	216	264
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
36	84	132	180	228	276
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
48	96	144	192	240	
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
60	108	156	204	252	

23 boîtes

Pulgarcito/distancia 351 : ①④

28	1
+ 28	2
+ 28	3
+ 28	4
+ 28	5
+ 28	6
+ 28	7
+ 28	8
+ 28	9
+ 28	10
+ 28	11
+ 28	12
+ 28	13
364	

$$\begin{array}{r} 364 \\ -351 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364 \\ -28 \\ \hline 336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 351 \\ -336 \\ \hline 15 \end{array}$$

Hace 12 pasos y le quedan 15 Km

Pulgarcito/distancia 559: ①⑤
El niño efectúa 28x10=280
Luego280x9=560
Luego intenta $: 28 \times 9 = 252$

Calcula $\begin{array}{r} 280 \\ +252 \\ \hline 532 \end{array}$ puis $\begin{array}{r} 559 \\ -532 \\ \hline 027 \end{array}$

Concluye:pulgarcito hará 19 pasos y 27 kM a pié

①⑥

273 huevos/cajas de 12

El niño cuenta hasta 273 completando las cajas

Proporcionalidad

Hervé Péault (1992)

El artículo detalla seis actividades que buscan reorganizar conocimientos personales de los profesores de escuela, en formación, sobre la proporcionalidad, en vista de la enseñanza de esta noción a alumnos de 10 a 12 años.

He consagrado para este tema 3 sesiones en primer año de formación de los profesores de escuela (PE1). El objetivo de este trabajo era muy general : permitir a cada uno mejorar su dominio de la noción de proporcionalidad y de poder prever secuencias sobre este tema en la escuela elemental.

Con el punto de partida (actividad 1) he intentado conducirlos a reflexionar sobre los procedimientos que ellos utilizan espontáneamente para resolver un problema de proporcionalidad, luego a que efectúen la comparación con los que ponen en ejecución alumnos de la escuela elemental.

Las siguiente actividades apuntan a precisar las caracterizaciones matemáticas de la proporcionalidad, a resituarlas en diferentes cuadros y a esbozar una reflexión didáctica a partir de manuales o de proyectos de secuencias.

Luego entregué 3 documentos a los estudiantes (no son presentados aquí) : una serie de ejercicios de proporcionalidad, fichas de trabajo que permiten retomar individualmente el trabajo sobre aspecto matemáticos de la proporcionalida y un documento de síntesis sobre la proporcionalidad en la escuela primaria.

ACTIVIDAD 1

Objetivo
Primer análisis de los procedimientos utilizados en situación de proporcionalidad.

Problema
El problema elegido es el siguiente (anexo 1) : extracto de un documento de la APMEP[1] para la evaluación de los alumnos al inicio de 6to año (alumnos de 11-12 años)

"Hay tres bandejas de frutas en la vitrina de una frutería. La etiqueta de la primer bandeja indica que se pueden adquirir 8 naranjas por 4 francos, la etiqueta de la segunda bandeja indica 2 francos para los 3 limones y la de la tercera bandeja indica 4 francos para las 7 peras.
Cuál es el fruto más caro ? Cuál es el fruto menos caro ?"

1) Resolución por los estudiantes

Luego de un primer tiempo de exploración individual, se enumeran o se clasifican los procedimientos utilizados. Intentamos analizar todos los procedimientos considerados. Los que apuntan a reunir los elementos de comparación comunes para cada tipo de fruto y pueden resumirse en 4 categorías :

- búsqueda del precio unitario;
- búsqueda de la cantidad de frutos para 1 franco;
- búsqueda de la cantidad de frutos para un mismo precio (2 Francos y 4 Francos son los mas utilizados);
- búsqueda del precio para una misma cantidad de frutos (utilizando el mínimo común múltiplo, aquí 168).

Precio (en francos)	1		a	
Cantidad		1		b

Los dos primeros conducen a un cálculo de división, los otros dos a la utilización de la linearidad.

2) Estudio de los procedimientos de los alumnos

En principio se invita a los estudiantes a intentar prever las reacciones de los alumnos de 6to frente a este problema y las dificultades que pueden encontrar.

Posteriormente les entrego el documento del Anexo 1 que detalla los procedimientos de los alumnos de 6to tal como ellos los han explicado. Ellos deben comparar estos procedimientos a la clasificación ya hecha y analizar los errores.

[1] Association française des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

Procedimientos de interpretación directa de datos (*Chrystèle*) o de cálculos sin relación con la situación (*Tony, Sébastien*), se encuentran procedimientos ya evocados mas arriba con una dificultad mayor en la búsqueda del precio unitario: resistentes a dividir por un número mas grande, algunos alumnos invierten los términos.

3) Modificaciones del enunciado

El problema planteado es el siguiente *: qué elementos se pueden cambiar en el problema susceptibles de modificar los procedimientos utilizados (variables didácticas*) ?*
Se invita a los estudiantes a imaginar enunciados que cambien eventualmente de contexto y jueguen sobre sus variaciones.
Tres variables parecen importantes : el valor de cada relación precio/cantidad (entero o no, mas grande o mas pequeño que 1), las relaciones entre los precios, las relaciones entre las cantidades.

ACTIVIDAD 2

Objetivo
Permitir llegar a una caracterización matemática de la proporcionalidad.

1) Lectura de gráficos
Se proponen las 6 situaciones siguientes :

S1 : Encontrar en función de su número el precio de los cuadernillos, valiendo cada uno 25 Francos, con 10 Francos de envío postal.

S2 : Encontrar en función de su número, el precio de los billetes de cine, valiendo cada uno 39 Francos.

S3 : Encontrar en un cuadrado, cuadriculado regularmente, el número de casilleros interiores en función del número de casilleros en cada línea.

S4 : Encontrar en función del precio inicial, el precio real a pagar luego de una reducción de 25 %.

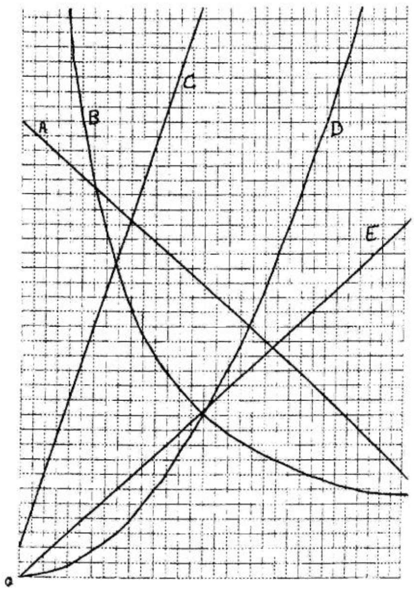
S5 : Encontrar en función del precio, un monto a pagar considerando que los gastos fijos son de 6,5 Francos.

S6 : Encontrar en función de su largo, el ancho de un rectángulo de 840 cm^2.

Los gráficos que siguen son proyectados con la ayuda de un proyector.

Consigna
Para cada uno de los gráficos y sin hacer cálculos escritos, decir si les parece posible establecer una graduación sobre los ejes tales que el gráfico corresponda a una de las situaciones. .

Exploración
La exploración se efectúa en pequeños grupos antes de la puesta en común (a los grupos que recurren a la formalización funcional de cada situación se los hace expresar al final).



Cada uno recibe luego un ejemplar que se puede utilizar para el trabajo que sigue.

2) Caracterización de la proporcionalidad
Se propone la siguiente tabla

3	5	7	8	15

Consigna
« Para cada sitación intenten encontrar el máximo de procedimientos posibles para completar la tabla ».
La puesta en común permite poner en evidencia los procedimientos vinculados :

- a la utilización de una *fórmula* (cálculo de un producto en el caso de la funciones lineales),
-a la utilización de *propiedades* independientes de esta fórmula (linearidad, conservación de las distancias, consideraciones sobre las separaciones y la linearidad para la funciones afines...),
- a la utilización de *gráficos.*

Síntesis
Definición de la proporcionalidad, caracterización por una función multiplicativa, la linearidad, la representación gráfica. Demostración de la equivalencia función multiplicativa/función lineal.

Definición de la proporcionalidad inversa y presentación sintética de otros tipos de funciones (función afín, función potencia, función exponencial).

3) « La regla de tres »
Cada estudiante debe resolver uno de los siguientes problemas (cada problemas es dado a la tercera parte de los presentes) :

Pb1 : " *Un automóvil que se desplaza a una velocidad constante recorre 25 m en 6 minutos. Qué distancia recorrerá en 15 minutos ?"*

Pb2 *: "6 cm^3 de un mineral tiene una masa de 25 g. Cuál es la masa de 15 cm^3 de ese mismo mineral ?"*

Pb3 : " 6 *objetos idénticos son vendidos a 25 Francos. Para aplicar una tarifa idéntica, a qué precio se deben vender15 de esos objetos ?"*

La puesta en común se efectúa sobre los procedimientos utilizados y sobre su comparación. Es solo en esta ocasión que he visto aparecer un procedimiento utilizando el “producto en cruz”. Esta ha sido la ocasión para demostrar la equivalencia entre esta propiedad y las otras propiedades vinculadas a la proporcionalidad.

En esta ocación presento la evolución de los programas que conciernen la proporcionalidad, los términos « regla de tres » y « búsqueda de un cuarto proporcional »

4) Proporcionalidad y crecimiento

Objetivo
Apropiarse de una nueva situación utlizando nociones aprendidas

Primera parte
Se le da a cada uno la ficha de abajo :

Cuáles son las situaciones para las que hay proporcionalidad entre las variables indicadas ?

1) encomiendas postales : *masa/tarifa*
2) círculo *: diámetro/perímetro*
3) cilindro de base dada : *largo/volúmen*
4) individuo *: talla / peso*
5) resorte con pie suspendido : *peso/estiramiento*
6) placa de metal homogénea : *peso/área*
7) un entero cualquiera : *número/suma de cifras*
8) cuadrado *: lado/perímetro*
9) cuadrado : *lado/área*
10) rectángulos de largo constante : *ancho/área*
11) rectángulos de perímetro constante: *largo/ancho*
12) rectángulos de área constante : *largo/ancho*
13) gas de la ciudad *: consumación/tarifa*
14) declaración de recursos económicos : *recursos/importe del impuesto*
15) ofertas con porcentaje fijo : *precio inicial/precio a pagar*
16) círculo *: área/cuadrado del diámetro*
17) esfera *: volúmen/cuadrado del radio*
18) recorrido(distancia fija) : *velocidad media/duración*
19) recorrido (velocidad dada) : *distancia/duración*
20) recorrido (duración dada) : *velocidad media/distancia*

Puesta en común

Estudio de las divergencias. Es la ocación de poner mejor en evidencia la no equivalencia entre crecimiento y proporcionalidad.

Segunda parte

Se dan diversos gráficos (cf. document 1988 cité de l'IREM de Rouen). Hay que asociarlos a una de las situaciones expuestas mas arriba, cuando sea posible.

ACTIVIDAD 3

Objetivo

Reflexión sobre los aspectos didácticos de la enseñanza de la proporcionalidad.

1) Exposición

En un primer tiempo doy algunas indicaciones sobre el enfoque o el abordaje de la funciones numéricas y de la proporcionalidad en la escuela elemental (indicaciones que serán desarrolladas en las fichas complementarias) y sobre el comportamiento de los alumnos.

2) Comparación de secuencias extraídas de los manuales

Trabajo en grupos luego la puesta en común. He elegido dos extractos que proponen cada uno una situación de partida de comparación de precios en las tiendas.

La consigna es analizar la tarea del alumno en cada uno de los extractos propuestos luego de proponer una nueva situación sobre el mismo tema vinculándose bien para definir la tarea de los alumnos.

ACTIVIDAD 4

Objetivo
Re aplicar a una nueva situación, en el cuadro geométrico, las propiedades vinculadas a la proporcionalidad.

1) Primera parte

Los estudiantes reciben una serie de cartas por grupos (en papel fino, suficientemente transparente) de igual formato. En cada una de ellas se encuentra uno de los 12 rectángulos de la página siguiente (posicionadas diferentemente sobre las diferentes cartas). Las diagonales son trazadas sobre algunos rectángulos.

La relación largo/ancho es 1,27 para 4 rectángulos tipo (A), 1,63 paras otros 4 tipo (B), 1,41 para los 4 últimos tipo (C).

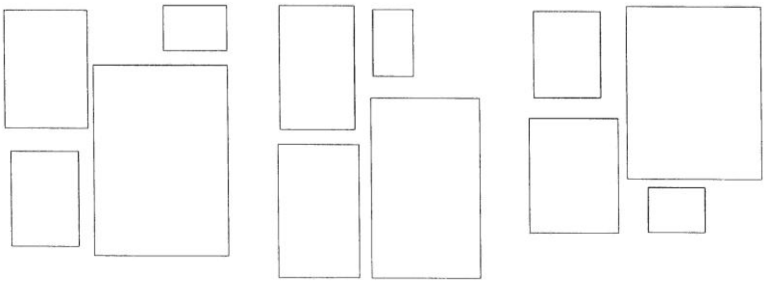
Los rectángulos están dentro de las siguientes relaciones (las dimensiones están en cm) :

- rectángulos de tipo A : 1 - 1,5 - 2 - 3

  Son los rectángulos 16 x 12,6 ; 24 x 18,9 ; 32 x 25,2 ; 48 x 37,8
- rectángulos de tipo B : 1 - 1,85 - 2 - 2,7

  Son los rectángulos 18 x 11,04 ; 33,3 x 20,42 ; 36 x 22,08 ; 48,6 x 29,81
- rectángulos de tipo C : 1 - 1,5 - 1,85 - 3

  Son los rectángulos 18 x 12,76 ; 27 x 19,14 ; 33,3 x 25,6 ; 54 x 38,28



Consigna
Cuáles son los rectángulos que pueden ser considerados como ampliaciones o reducciones los unos de los otros ? Clasifiquen según este criterio. Pueden medir pero no están obligados.

Puesta en común
Apunta a poner en evidencia y validar los procedimientos utilizados. Que han sido los siguientes:

- procedimientos geométricos que apuntan a superponer rectángulos, sea por una esquina sea por sus centros.
- procedimientos numéricos luego de medir lados, incluso diagonales :
  * cálculo de la relación largo/ancho.
  * búsqueda de linearidad en los valores enteros (los rectángulos de dimensiones dobles o triples son identificados pero no los otros).
  * cálculo del perímetro y búsqueda de relación entera entre los perímetros.
  * cálculo del área y búsqueda de relación entera entre las áreas.

Estos dos últimos procedimientos conducen por supuesto a conclusiones erróneas.

La puesta en común es la ocasión, para validar los procedimientos geométricos, de una referencia a la propiedad de Tales.

2) Segunda parte

Se elige un rectángulo de tipo B.

Consigna
Construyan un nuevo rectángulo en el interior de tal manera que el largo de este rectángulo sea el ancho del rectángulo mayor y que los dos rectángulos puedan ser considerados como idénticos con no mucha ampliación.
Busquen procedimientos que utilicen cálculos sobre las dimensiones y procedimientos que no hagan intervenir ningún cálculo.

Nueva consigna
Construyan un rectángulo luego efectúen el mismo trabajo que precedentemente. El segundo rectángulo debe dividir al primero en dos partes exactamente de igual área.

Puesta en común

Apunta a hacer aparecer que la relación debe ser igual a $\sqrt{2}$ y se prolonga por el estudio de los formatos comerciales de papel. El formato A0 convencionalmente establecido en 1 m^2, se muestra que las dimensiones del formato A4 son 21 x 29,7.

ACTIVIDAD 5

Objetivo
Estudio de la proporcionalidad múltiple

Problema
En una empresa máquinas trabajan a ritmo regular para producir una cierta substancia. 8 máquinas producen 6 kg de esta substancia en 5 días. Cómo prever la cantidad producida por un número determinado de máquinas en un número determinado de días?

Exploración y estudio de los procedimientos. Síntesis con ayuda de una tabla.

Presentación de la noción de bilinearidad y de funciones de tipo $(x, y) \rightarrow axy$.

ACTIVIDAD 6

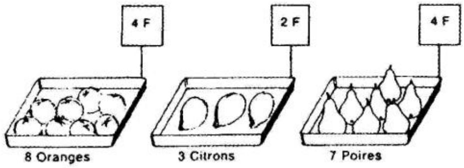
Análisis didáctico sobre el tema "Ampliación y proporcionalidad en la escuela".
El documento en anexo 2 se entrega a los estudiantes y luego es objeto de intercambios a partir de preguntas planteadas.
Se presenta como un sujeto posible para exámen y el « corregido » adjunto se entrega a los estudiantes luego de la discusión. (anexo 3).

ANEXO 1

Este problema es extraído de un documento de l'A.P.M.E.P[1] (cuestionario de profundización para la evaluación al inicio de 6to año).

He aquí tres bandejas de frutas en las vitrinas de una frutería La etiqueta de la primer bandeja indica que se pueden adquirir 8 naranjas por 4 F, la etiqueta de la segunda bandeja indica 2 F para los 3 limones y la de la tercera bandeja indica 4 F para las 7 peras. Cuál es el fruto más caro ? Cuál es el fruto menos caro ?

[1] Association française des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. (Asociación francesa de profesores de matemáticas de la enseñanza pública)



Algunas respuestas de los alumnos de la clase de 6to (a quienes se les había solicitado de explicar la solución) :

Fabien. El mas caro de los frutos es la naranja. Porque si se divide 4 por 8, 2 par 3 y 4 por 7, eso nos da 2, 1 y 1. Por lo tanto el limón y la pera son los menos caros.

Tony. Yo he hecho 4 x 8 = 32 luego 2 x 3 = 6 luego 4 x 7 = 28 y constato que los frutos mas caros son las naranjas y los menos caros son los limones.

Cindy. Si se divide las 8 naranjas por su precio, se obtiene el valor total de las 8 naranjas (8 naranjas a 4 F hace 2 F para una naranja).
Si se divide los 3 limones por su precio, se obtiene el valor total de los 3 limones (3 limones a 2 F, hace 1,50 F para un limón).
Si se divide las 7 peras por su precio, se obtiene el valor total de las 7 peras (7 peras a 4 F hace 1,75 F para una pera).
Entonces los frutos mas caros son las naranjas, los menos caros los limones.

Mathieu. Le fruto mas caro es el limón porque si se multiplica 3 por 2, hace 6: será tan caro como las naranjas y las peras, pero habrá un fruto menos.
El fruto menos caro es la naranja, porque 6 limones hacen 4 F y 7 peras hace 4 F y 8 naranjas hace 4 F : es el mismo precio, pero hay una naranja mas que los otros frutos.

Chrystèle. el fruto mas caro es la naranja y la pera porque vale 4 F ; el fruto menos caro es el limón porque vale 2 F.

Ludovic. 8 : 4 = 2 F para una naranja ; 3 : 2 = 1,50 F para un limón ;
7 : 4 = 1,75 F para una pera. El mas caro es la naranja. El menos caro es el limón.

Alexandre. Dividiendo el precio por el número de frutos, Encontramos el precio de un fruto. Naranja : 0,50 F ; limón : 0,66 F ; pera : 0,57 F. Entonces los limones son los mas caros y las naranjas los menos caros.

Jérémie. Busqué para el mismo número de naranjas y de limones, hace 24. 24 naranjas cuestan 12 F y 24 limones cuestan 16 F. Entonces los limones son los mas caros y las peras solo hay 7 para 4 F entonces las naranjas son las menos caras.

Alice. Se calcula haciendo una división. 4 : 8 = 0,50 ; 2 : 3 = 0,66 ;
4 : 7 = 0,57. El fruto mas caro es el limón que hace 0,66 F y el menos caro es la naranja a 0,50 F.

Karine. Si se dividen las naranjas por 2, hace 4 naranjas, entonces el precio sería a 2 F. 4 naranjas a 2 F et 3 limones a 2 F hay una naranja de mas entonces las naranjas son las menos caras y los limones los mas caros.

Sébastien. Para las naranjas, encontré 12. Para los limones, encontré 6. Para las peras encontré 11. Las mas caras son la naranja y la pera. Los menos caros son los limones.

Élodie. Para 4 F se peden tener 8 naranjas, 6 limones y 7 peras. Entonces son las naranjas las mas caras y los limones los menos caros.

Cécile. La naranja cuesta 50 centavos porque 8 x 50 c = 400 c et 400 c es 4 F...

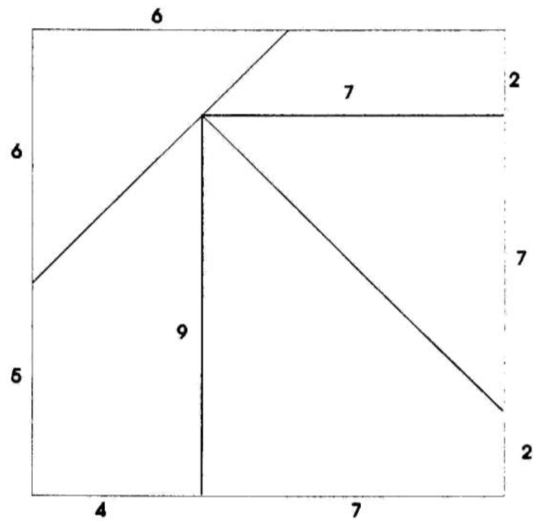
Cyrille. Con 1 F se tienen 2 naranjas pero menos de 2 con los limones y las peras . Por lo tanto las naranjas son las menos caras.

Peggy. Las 8 naranjas cuestan 4 F y las 7 peras también. Entonces las mas convenientes son las 8 naranjas 4 F porque hay mas y las mas caras son las peras pero los limones aún mas porque para 4 F solo se tienen 6.

Julien. La naranja cuesta 2 F, el limón 1,50 F y la pera 1,50 F. Entonces lo mas caro es la naranja, y el limón y la pera se parecen.

ANEXO 2
El PUZZLE

Esta es una situación para una clase de 5to año (alumnos de 12 años)
Los niños son agrupados por equipos de 4 o 5. Cada equipo recibe este puzzle.



La consigna dada es la siguiente :

« Cada equipo ha recibido un puzzle y debe reconstruír otro pero mas grande ! Para ello habrá que respetar la siguiente regla : "un segmento que mide 4 cm en el puzzle que les he dado deberá medir 6 cm en el puzzle que ustedes construirán. "
Además cada alumno del equipo deberá fabricar una sola pieza.
Cuando cada alumno del equipo hay terminado, ensamblarán las piezas. .
Deberán entonces obtener un puzzle idéntico al dado pero mas grande»

Luego de la exploración por equipos, las diferentes soluciones on comunicadas durante una puesta en común..

1) Cuáles son los conocimientos matemáticos concernientes en este trabajo ?
2) Cuál es el interés de organizar un trabajo en grupo en el que cada alumno tiene una sola pieza a contruir?
3) He aquí algunos procedimientos corrientemente uilizados para los alumnos en esta situación :
   - « Cada vez se agrega 2, porque 4 debe hacer 6 »
   - « hay que agregar la mitad del largo del comienzo »

-« Hay que multiplicar cada largo por 1,5 »
- « Porque 4 da 6, 2 da 3, 6 da 9… »

Comparen estos diferentes procedimientos y las representaciones de la situación a la que corresponden.

4) Qué puede esperar el docente de la puesta en común ?
5) Dos modificaciones de la consigna :
   - *"lo que mide4 cm deberá medir 8 cm..."*
   - *"lo que mide 4 cm deberá medir 7 cm..."*

Estos cambios de consigna qué modificaciones son susceptibles de introducir en los procedimientos de los alumnos ?

ANEXO 3
Elementos de respuesta

1) Este problema de la reproducción de un puzzle permite abordar el tema de la proporcionalidad en un cuadro geométrico.
Se trata aquí de reconocer una situación de proporcionalidad y de tratarla convenientemente :

- puesta en duda del modelo *"para agrandar hay que agregar"*,
- uso de las funciones numéricas adaptadas y de las propiedades de linealidad.

Esto se acompaña con una trabajo sobre los números (decimales, eventualmente fracciones) y sobre las figuras geométricas (reproducción de figuras simples).

2) La organización del trabajo retenido aquí tiene en principio la ventaja de la implicación directa del niño.
Por otro lado, es importante que el trabajo sea organizado por equipos y que cada miembro del equipo tenga una pieza para realizar, de manera de provocar los intercambios, la concertación y el debate sobre la elección de un procedimiento.

Pero sobre todo, es la reconstitución del puzzle por ensamble de piezas contruídas que permitirá **validar** la estrategia utilizada por el grupo. Se trata de una *validación** interna a la situación. Los niños pueden determinar solos si han tenido éxito o no, sin recurrir a una autoridad externa.

Si un niño o un equipo tenía la carga global del puzzle, un procedimiento parecido consistiría en trazar primero un gran cuadrado agrandado sobre el que se efectuarían trazos antes de cortarlo. La justeza de la construcción de cada pieza no podría mas ser validada directamente, porque el puzzle sería de todas maneras reconstituíble.

3) Solo los tres últimos procedimientos permiten reconstituír el puzzle.

- El primer procedimiento recubre un error frecuente sobre la concepción de la ampliación. Para muchos alumnos « ***agrandar, es agregar »***. Es para remarcar que las tentativas infructuosas para reconstituír el puzzle en este caso, en general no son suficientes para poner en duda en los alumnos el modelo aditivo utilizado (se reprochan por ejemplo de malos dibujos o de malos recortes.). Entonces es importante que el puzzle elegido sea tal que la reconstitución con ayuda de la regla "agregar 2" conduzca a piezas claramente incorrectas.

- El segundo procedimiento traduce la persistencia del modelo aditivo, pero esta vez la **cantidad a agregar depende de la cantidad inicial**. Es la traducción de una función numérica del tipo $x \rightarrow x + x/2$ facilmente identificable teniendo en cuenta los datos numéricos elegidos. Responde a una representación correcta de la ampliación, pero que corre el riesgo de ser frágil para una eventual re-aplicación.

- El tercer procedimiento se apoya en una representación justa de la ampliación « ***agrandar, es multiplicar*** ». Es el reconocimiento de una función multiplicativa y del coeficiente de proporcionalidad.

- El cuarto procedimiento se apoya también en una representación justa de la ampliación, vinculada esta vez ya no a un coeficiente de proporcionalidad sino a la **linealidad**. Este procedimiento permite encontrar un resultado de diferentes maneras, particularmente si ella está organizada alrededor de la de la constitución de una tabla de valores.

4) La puesta en común permite volver a la *validación**. La validación en los grupos ha permitido responder a la pregunta *" esto funciona ?"*. La puesta en común es la ocasión de intentar considerar la pregunta « *porqué funciona ?* »

Por otro lado permite **la confrontación de los diferentes procedimientos**. Es una etapa importante porque permite a algunos de apropiarse de la solución que no han elaborado.
Permite igualmente **aproximar procedimientos diferentes** (por ejemplo los que han sido llevado a buscar la imagen de 1 utilizando propiedades de linearidad han finalmente puesto en evidencia el coeficiente de proporcionalidad).

Es enfin la ocasión de confrontar los alumnos con los diferentes aspectos de la proporcionalidad que la encontraremos en otras situaciones.

5) El raport de **La proporcionalidad es es una variable didáctica* esencial** de la situación y un *análisis a priori** es necesario de parte del docente antes de efectuar la elección sobre esta *variable**.

La consigna "*4 cm se transforma en 8 cm"* tiene todas las chances de conducir directamente a los alumnos a doblar todas las medidas y otros procedimientos tiene poca chance de aparecer. "La evidencia" de este procedimiento corre el riesgo de hacer perder el trabajo sobre la proporcionalidad y sus vínculos con la ampliación.

La consigna *"4 cm se transforma en 7 cm"* conducirá a volver mas delicado el recurso al segundo o al tercer procedimiento. En efecto el coeficiente de ampliación que no es tan simple, su utilización se vuelve mas delicada para niños de 5to año: por otra parte el equivalene del segundo procedimiento consistiría en *"agregar la mitad del largo inicial y aún la mitad de esta mitad"* lo que vuelve débil su posibilidad de aparición.

Esta nueva consigna conduce entonces a marcar mas claramente la oposición entre el modelo aditivo*("agregar 3")* y el que utiliza la linealidad. Se ha podido constatar que algnos niños que no tuvieron éxito con la consigna "*4 cm se transforma en 6 cm"* regresan con esta nueva consigna, regresando por algún tiempo al modelo aditivo antes de poder nuevamente rechazarlo.

Bibliographie

- COPIRELEM*, "Agrandissement de puzzle"* in "Aides pédagogiques pour le CM", publication APMEP n°64 , p. 80, Situations problèmes 1987.

- R. Charnay*, "Des problèmes pour apprendre en CM2 et 6ème*", IREM Lyon,. p. 26, 1987.

Estudio del formato A4

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier (1992)

Este artículo presenta una situación de homología para los profesores en primer año de formación (PE1) que se preparan para el profesorado de escuela, fundado en las relaciones que vinculan los diferentes formatos de papel y que permiten ilustrar aspectos de la proporcionalidad en los cuadros numérico, gráfico, y en particular de poner en red coeficiente de proporcionalidad, pendiente de la recta (representación gráfica) y teorema de Tales.

OBJETIVOS

Objetivos matemáticos

- Encontrar la proporcionalidad en diversos *cuadros**.
- Aproximar $\sqrt{2}$ por las áreas.
- Ver dos ejemplos de figuras parecidas (noción de coeficiente de forma de un rectángulo).
- Eventualmente sensibilizar a la noción de serie geométrica y de límite de la serie.

Objetivos didácticos

- Noción de *cuadro** y de *cambio de cuadros**.
- Noción de prueba.
- Diferentes fases de una situación de aprendizaje.

ACTIVIDAD

Material

Por persona : tres hojas de formato A4 , calculadora, regla, compás.

Organización

Trabajo en grupos de cuatro.

Consigna 1

"Disponen de una hoja rectangular que se llamará e rectángulo F0. Se trata de obtener otros rectángulos por plegado y recorte. La consigna ***C*** *de recorte es la*

siguiente : plegar el rectángulo, en su mayor dimensión, en dos partes que se puedan superponer de manera exacta, recortar y guardar. De esta manera a partir de F0 obtendrán F1.
*Por un procedimiento recursivo, a partir de F1 con la consigna **C**, obtienen F2, puis de proche en proche F3, F4, F5.*
*Obtienen entonces una familia de rectángulos **F** : F0, F1, F2, F3, F4, F5. "*

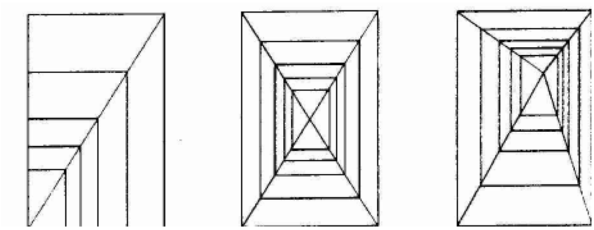
Consigna 2
"Encuentren un apilado regular, un apilado que pueden describir de estos seis rectángulos. "

Síntesis
- Descripción de los apilados.

La reflexión se apoya sobre los apilados « regulares » que mantienen paralelos los lados de los diferentes rectángulos.

- Constatación de alineación de los vértices homólogos en una recta : estas rectas pasan por el centro del rectángulo o por un punto particular interior de cada rectángulo.

Si la primera pila tiene éxito, es igual para las otros.



La existencia de disposiciones particulares para una familia de rectángulos será anotada con el nombre propiedad **P**.

Consigna 3
"Dejen esta familia F de lado y tomen una nueva hoja. Construyan un rectángulo R0 de dimensiones (y_0, x_0)*, que no forme parte de la familia **F** y tal que:*

$$y_0 > x_0 > y_0/2.$$

*Construyan la familia (**R, C**) obtenida a partir de R0 y de la consigna **C.***

Pregunta : *"Se pueden apilar los rectángulos **R** para obtener la propiedad **P ?**"*

Síntesis
Para una familia (**R, C)** construír a partir de R0 cualquiera, dos sub-familias tienen la propiedad **P** :
- (R0, R2, R4,...) tiene la propiedad P,

- (R1, R3, R5....) tiene la propiedad P.

En general, la familia **R** entera no tiene la propiedad **P**.

Consigna 4

"Busquen cuál es la condición en el rectángulo de partida para que en la familia construída a partir de ese rectángulo y de la consigna ***C*** *se verifique la propiedad* ***P*** *»*

Síntesis

Hacemos juntos las primeras verificaciones para la familia **F**.

- Existe una cierta disposición para la cual las cuatro cúspides son alineadas sobre rectas que pasan por el centro de los rectángulos y sus cúspides.

- **Las diagonales de cada rectángulo forman un ángulo constante** con los lados homólogos del rectángulo.

- **La relación largo sobre ancho es la misma** para todos los rectángulos.

- Las relaciones x_i/x_j et y_i/y_j son iguales para todos i y j.

- Si se representa el rectángulo Fi por el punto Fi de coordenadas (x_i, y_i) en una referencia ortonormal, los puntos F0, Fl,..., F6,... , son **alineados sobre una recta que pasa por el origen.**

- Todas estas propiedades son verdaderas para las familias (R0, R2, R4…) y (R1, R3, R5…), pero estas dos familias no respetan la condición P.

Esta es la tabla de las coodenadas aproximadas a los puntos Fi y la relación de las dimensiones (en cm) de los rectángulos R(2i) :

F0	21	29,7
F1	14,85	21
F2	10,5	14,85
F3	7,42	10,5
F4	5,25	7,42
F5	3,71	5,25
F6	2,62	3,71

R0	x_0	y_0
R2	$x_0/2$	$y_0/2$
R4	$x_0/4$	$y_0/4$
R6	$x_0/8$	$y_0/8$

Institucionalización*

Para una familia de rectángulos que verifica la propiedad **P**, se dice que :

- La tabla de las dimensiones exactas :

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3.
x_4	y_4
x_5	y_5
x_6	y_6

es una **tabla de proporcionalidad** de coeficiente **k** : $y_i = \mathbf{k} \times x_i$ para todo i.

- La serie de los largos es **proporcional a** la serie de los anchos.

- Los rectángulos todos tienen **el mismo coeficiente de forma** (relación largo por ancho)

- Los rectángulos son **homotéticos** los unos con los otros y la relación de homotesis es siempre la misma.

Para buscar el coeficiente de proporcionalidad k de la familia F, varios métodos son posibles :

- **En el cuadro numérico**

  - Cálculo de las relaciones x/y en las tablas de los números.
  - Utilización de la áreas : área de F0 = 2 áreas de F1 etc.

- **En el cuadro gráfico**

  Los puntos de coordenadas (x_i, y_i) siendo sensiblemente alineadas, determinación gráfica sobre papel milimetrado de la pendiente de la recta.

- **En el cuadro geométrico**

  Utilización del teorema de Tales (en razón de la presencia de triángulos homotéticos) que permiten hacer el puente entre en cuadro gráfico y el cuadro numérico.

Conclusión

Una condición necesaria para que **(R, C)** verifique la propiedad **P** es que **R** sea una familia de rectángulos que tengan todos el mismo coeficiente de forma y que este coeficiente sea $\sqrt{2}$.

Esta condición es también suficiente luego de la verificación.

ANALISIS DE ESTA ACTIVIDAD

Análisis matemático

Esta situación permite en un primer tiempo estudiar de manera detallada particularmente las propiedades numéricas, gráficas y geométricas vinculadas a las funciones lineales. Por lo tanto es posible hacer una síntesis sobre las nociones de **listas de números proporcionales, de función lineal, de homotésis, de figuras similares** y de vincular el **theorema de Tales** con **listas de números proporcionales**.
Permite igualmente introducir la noción de **coeficiente de forma de los rectángulos** y trabajar sobre la transformación del coeficiente de ampliación de las medidas cuando se pase de los largos a las áreas.
Permite acercar, en sus prolongaciones, la noción de **límite de una serie geométrica**.

Análisis didáctico

- La situación necesita analizar los apilados geométricos, hacer hipótesis sobre las relaciones numéricas vinculando las dimensiones teóricas de los rectángulos y verificar estas hipótesis sobre los recortes : incita por lo tanto al razonamiento apoyándose en objetos sensibles.

- Permite discutir sobre el **concepto de prueba** : pruebas pragmáticas por observación de los rectángulos recortados y medición de sus dimensiones (con una estimación de errores en el trazado y en la medición), pruebas teóricas por estudio de las relaciones entre los largos y las áreas de los rectángulos.

De esta manera la **pluralidad de las pruebas** permite a cada uno acceder a una cierta convicción y se constata que las pruebas las mas rigurosas no son necesariamente **las mas convincentes**. Pero son éstas las que ocupan el lugar en las matemáticas actuales.

- La situación permite definir la **noción de cuadro*** y la de **cambio de cuadros***. En efecto el problema es planteado en un cuadro geométrico, *construír rectángulos y observar las propiedades de alineación*. La disposición de los rectángulos con un vértice común y lados alineados conduce a utilizar una representación gráfica (pasaje al *cuadro gráfico*), que puede inducir un estudio numérico de las listas de dimensiones (pasaje al *cuadro numérico*).

Este tema de trabajo, además de sus objetivos matemáticos y didácticos, permite enriquecer la cultura matemática del estudiante y recorrer otros dominios (tecnología, artes plásticas, artes gráficas), particularmente por sus prolongaciones.

PROLONGACIONES

Es útil considerar con los estudiantes un **punto cultural** sobre la familia de rectángulos similares y mostrar la utilidad de las nociones matemáticas para organizaciones técnicas, particularmente la cuestión de las ampliaciones.

- los **formatos A3 y A4** : la hoja de partida, A0, tiene un área de 1 m^2 : los formatos siguientes son obtenidos según la división C ; se encuentra que el coeficiente de forma es $\sqrt{2}$ (para facilitar el corte en dos y las reducciones en fotocopias). Entonces se pueden calcular las dimensiones de las hojas AO a A7.

- los **formatos papel B0 a B6**, también de coeficiente de forma $\sqrt{2}$: se trata igualmente de rectángulos similares para su mitad, con B0 de área 1,5 m^2.

- los **formatos fotos**, rectángulos de coeficiente de forma 1,5 , similares entre elllos, pero no similares en su mitad :
  13 x 19,5 18 x 27 24 x 36 30 x 45 50 x 75

- los **rectángulos de oro**, históricamente célebres en la historia de la arquitectura, de coeficiente de forma ($\sqrt{5}$ +1) / 2 (el número de oro), similares entre ellos, pero no similares en su mitad.

Esta actividad puede dar lugar a **otras prolongaciones matemáticas** :

1 – Trazar una **representación gráfica** sobre papel milimetrado de los puntos F0, F1 hasta Fn con regla y compás.

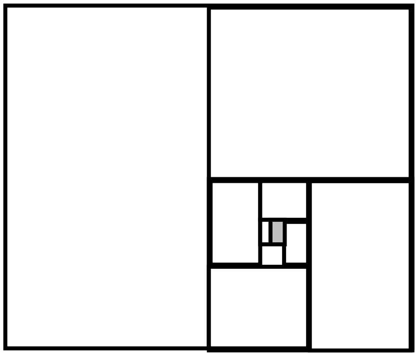
2 – Construír con regla y compás, una familia de rectángulos tipo **R homotéticos y cuyo coeficiente de forma** es determinado.

3 – comprender la noción de límite de la **serie geométrica** (Sn) de razón 1/2 considerando Sn como el área del rectángulo de dimesiones Xn y Yn con :
- (Xn) serie geométrica de razón 1/ $\sqrt{2}$;
- (Yn) serie geométrica de razón 1/ $\sqrt{2}$.

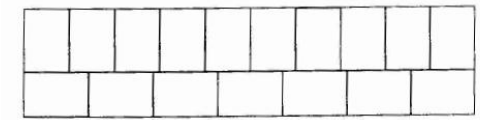
Lo que corresponde a los rectángulos Fn obtenidos precedentemente.

En efecto se puede acercar la noción de **límite de la serie geométrica** (Sn) yuxtaponiendo hábilmente los diferentes rectángulos y estudiando el área del conjunto.

El área del gran cuadro rectángulo es 2 y la diferencia 2 - (1 + 1/2 + ...+$1/2^n$) vale $1/2^n$ que tiende a 0 cuando n tiende al infinito, como lo muestra la división progresiva del área del rectángulo sombreado Fn cuando n se vuelve grande.



4- A**proximar** $\sqrt{2}$ **por fracciones** por el método del punto de encuentro : si **L** y **l** son respectivamente el largo y el ancho de un rectángulo de coeficiente de forma **k** se busca con la ayuda de una disposición particular de rectángulos de dimensiones **L** et **1** (como el de abajo), dos enteros **p** y **q** tales que **qL** = **pl.**
Se obtienen así aproximaciones racionales de **k** (por ejemplo aquí, 10/7 para $\sqrt{2}$).
Por supuesto este método no puede probar que k es eventualmente irracional, pero permite hablar con los estudiantes sobre las nociones de conmensurabilidad.



Capitulo 2

Herramientas generales para la formación de maestros

Enseñanza didáctica y pedagógica

Las estrategias utilizadas para formar a los maestros de primer grado en matemáticas.

Alain Kuzniak (1994)

Este artículo presenta una clasificación de las estrategias de formación utilizadas por los formadores de profesores. Luego de definir el sistema estudiado, tres estrategias son presentadas: las estrategias de presentación, de homología y de transposición.
En conclusión, el autor propone criterios de elecciones estratégicas y una articulación posible entre estas estrategias diversas.

Introducción

El objeto de esta contribución es el estudio, en una perspectiva didáctica, de la formación en matemáticas recibida por los maestros del primer grado en centros de formación.
La reflexión sobre la formación de los maestros debe tomar en consideración dos niveles de saberes y de competencias. El primero concierne al saber matemático de los alumnos de la escuela primaria que es un objeto clásico de estudio en didáctica de las matemáticas. El segundo nivel concierne a los maestros que deben a la vez dominar el saber matemático propio de sus alumnos y otro saber que concierne a la transmisión de los conocimientos a sus alumnos. La didáctica de las matemáticas generalmente no toma en consideración la adquisición de los conocimientos de los maestros y por esto ignora una parte de la génesis del proceso de *transposición** operado por estos últimos en su enseñanza.
Por otra parte, la formación de maestros tiene un carácter específico. En los centros de formación, los aprendices no corresponden a ninguno de los públicos usuales de la didáctica. Se trata en efecto de adultos que han terminado sus estudios universitarios (dos o tres años después de la obtención del bachillerato). ¿Cómo enseñarle las matemáticas a adultos que, aunque sufran de carencias en matemáticas, poseen un nivel de razonamiento superior al de los niños? La respuesta a esta pregunta está estrechamente vinculada al hecho de que estos mismos estudiantes van a enseñar las matemáticas a sus alumnos. Es por esto que el futuro profesor debe conocer aquello que aprende un niño y cómo lo aprende, y debe también saber cómo hacer al niño aprender. El formador de profesores tiene a cargo la tarea de aportarles estos conocimientos a estos

estudiantes. ¿Cómo procede y qué estrategia aplica para administrar la transmisión de estos diferentes saberes?

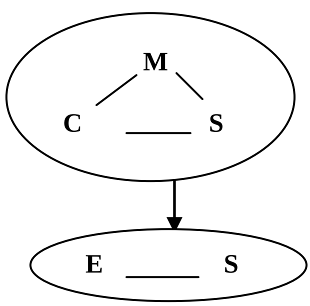
Estas preguntas complejas pueden ser contempladas desde diferentes puntos de vista. En este artículo presentaremos una perspectiva que busca clasificar las estrategias de los formadores con el fin de llegar a describir y a comprender las diferentes formas de enseñanza efectivamente utilizadas en los centros de formación. Este artículo no pretende definir, *a priori**, las modalidades de una formación "ideal" o "deseable", sino de constatar y analizar lo existente.
Esta aproximación nos permitió poner de manifiesto los diferentes saberes realmente escolarizados en el seno de la institución de formación. A través de nuestra tipología hemos podido también observar el papel desempeñado por las matemáticas, la didáctica o la pedagogía en las diferentes estrategias. Esto nos permite abordar el problema de la *transposición** de la didáctica en una perspectiva que no reduce la formación de los maestros a este fenómeno.

I. El sistema observado y los saberes puestos en juego.

1. Naturaleza del sistema observado.

La búsqueda de estrategias y su descripción implican un conocimiento preciso del sistema en el cual las formaciones se inscriben. Sin embargo, el sistema de formación de maestros es particularmente complejo y fluctuante. Primero, está sometido al sistema educativo general, cuya sensibilidad al medio ambiente social y político es bien conocida, y que se manifiesta con los cambios de ministros y con las frecuentes reformas de los programas que influyen directamente en el contenido de la formación de los profesores. Luego, la institución de formación ha evolucionado considerablemente en poco tiempo. He tomado como punto de partida de mi estudio la reforma de 1979 que institucionalizaba una formación de tres años para la enseñanza en primaria. Pero hay que señalar la reforma de 1985, y para terminar la de 1991, que sustituye las Escuelas Normales por los I.U.F.M. (Instituto Universitario para la Formación de Maestros). Estas transformaciones afectan a la vez la duración de los estudios, el nivel de reclutamiento y el estatuto de los formadores, cuyas tareas modifican. Es así como la reflexión sobre la formación se inscribe en un medio inestable que complica claramente el trabajo del observador.
Consideramos el sistema de formación como un sistema didáctico. De manera clásica, retenemos tres elementos de base en este tipo de sistema: (M-C-S); constituido por el profesor (M), la clase (C) y un saber puesto en juego (S). Este conjunto de tres elementos se encuentra sumergido en un medio que le impone numerosas presiones. La finalidad que asignamos al sistema de formación, su "producción", será la comunicación de un saber a los estudiantes que se traduce por el aumento de sus conocimientos individuales. Esta concepción puede representarse así:

E): alumno

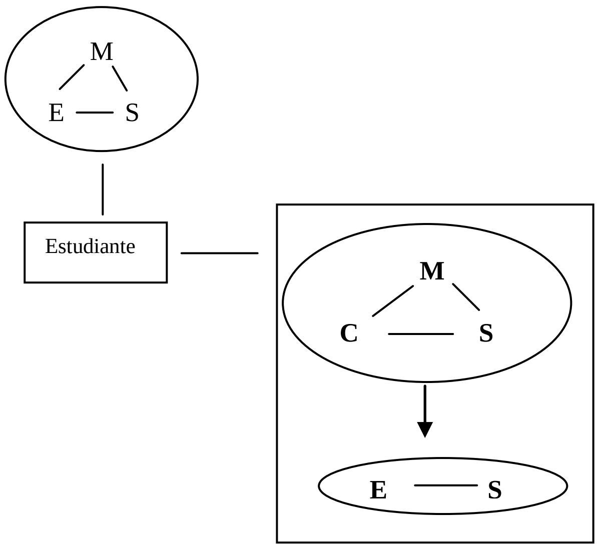


Producto

En nuestro estudio, el proceso parece dividirse en dos, pues la función del I.U.F.M. como sistema de formación es darles a entender a los estudiantes otro sistema de formación, el de la enseñanza elemental.
Aparecen así dos sistemas ensamblados (A), el centro de formación, y (B), la escuela elemental, cuya organización es homóloga. Esto no conduce a una identidad puesto que los componentes del sistema y el medio en el cual actúan son muy diferentes.
Podemos entonces esquematizar esta articulación con esta figura, más compleja:

A) IUFM

B) ESCUELA



2. Naturaleza de los saberes puestos en juego.

Los conocimientos que deben adquirir los estudiantes que desean convertirse en profesores incluyen competencias que apuntan a diferentes saberes. Algunos, como el saber matemático y didáctico, son saberes teóricos, otros están más marcados por las destrezas y el sentido común. A esto se añade un conjunto de conocimientos que sólo la experiencia parece susceptible de dar.
En nuestro estudio, hemos conservado esencialmente tres formas de saber: el saber matemático, el saber didáctico y el saber pedagógico. Los dos primeros son generalmente reconocidos institucionalmente aunque su definición a veces fluctúa. De esta manera, el saber matemático, que es el mejor definido culturalmente, no es perfectamente delimitado en el marco de la formación de los profesores. ¿Cuáles son entonces los límites de este saber para un futuro profesor? ¿La epistemología y la historia de las matemáticas no son acaso componentes esenciales del saber matemático? ¿Así mismo, la reflexión

heurística e *in fine* la didáctica de las nociones a transmitirles a los alumnos no pueden ser consideradas como parte del saber matemático de base? Actualmente, no parece ser el caso. De esta manera, he distinguido el saber didáctico caracterizado por el esfuerzo de teorización científica sobre los fenómenos de transmisión de conocimientos a los alumnos. Dicho esfuerzo de teorización constituye su marca distintiva respecto al saber pedagógico que será precisado a continuación.

Para definir el saber pedagógico, me pareció interesante utilizar diferentes trabajos realizados sobre la transmisión de las destrezas técnicas en el marco de los oficios manuales[1]. Sencillamente, y esto marcará los límites de la analogía, el oficio de profesor parece necesitar un aprendizaje mucho más complejo que los oficios manuales.

Para intentar precisar lo que recubre el saber pedagógico y consolidar su autonomía, me referiré a la obra *La transmission des savoirs* de Delbos y Jorion[2]. Los autores de este libro se interesan por las actividades de salicultura, de pesca y de conchicultura. El tema es definitivamente muy particular, sin embargo es tratado en una óptica de transmisión de los saberes utilizando una oposición entre conocimientos espontáneos y un saber transmitido en las escuelas profesionales que fueron creadas en los años 70.

Delbos y Jorion distinguen entonces:

> *A) Un saber procedural, abstraído de la observación de la práctica y puesto por escrito en manuales, trabajos que no son teorizaciones y que son presentadas como a-teóricas por los autores.*
>
> *B) Un saber proposicional, presentado como el saber que se ofrece en la escuela, que no es teórico sino que está constituído por proposiciones conectadas no lógicamente y que se contenta con enunciar contenidos.*

Lo que denominaré saber pedagógico será la reunión compleja y a veces contradictoria de estas dos formas de saber. Este saber se caracteriza por su oscilación entre dos polos, uno teórico pero a veces muy alejado de la práctica futura de las personas formadas, otro cercano al sentido común y a la práctica de la clase pero privado de la adaptabilidad de un modelo más teórico. El corpus de referencia está constituido por un conjunto de saberes situados entre práctica y teoría que reúne saberes procedurales y proposicionales. En este marco, estos últimos son ejemplos de actividades de clase, es decir de ingenierías preparadas para ser efectuadas; los saberes procedurales, por otro lado, buscan volver a las personas formadas más conscientes, gracias a una reflexión más metodológica.

La naturaleza exacta y los contenidos de este saber pedagógico se clarifican con el estudio de las estrategias puestas en ejecución en la formación de los maestros. De hecho, de un cierto modo, el objeto principal de los centros de formación es la transmisión a los estudiantes de un saber-pragmático "útil". Este saber puede ser concebido parcialmente como una recomposición de elementos de los saberes

---

[1] CHEVALLIER D, 1991, *Savoir-faire et pouvoir transmettre*, Editions de la Maison des sciences de l'homme, Paris.

[2] DELBOS G y JORION P, 1984, *La transmission des savoirs*, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

didáctico y matemático. Esta recomposición tiene como finalidad volver los saberes de referencias operacionales, con el fin de dar a los estudiantes competencias profesionales.

II. Dos particularidades de la formación de los maestros de primer grado

1. Las condiciones institucionales

Es importante aclarar el contexto institucional en el cual opera la formación de maestros para comprender las diferentes estrategias de formación. La formación en matemáticas se define por un conjunto de circulares ministeriales que limitan singularmente la libertad de los formadores.

Desde el año 1979 al 1991, el sistema de formación sufrió tres transformaciones importantes definidas por textos legales.

En 1979, la formación se dirige a estudiantes que han obtenido el bachillerato y dura tres años. La formación está fundada en una visión de las matemáticas construidas por el niño. En esta perspectiva, el profesor debe evocar voluntariamente su propio aprendizaje de las matemáticas y reflexionar de manera critica sobre ello. Debe reflexionar sobre *su manera de aprehender las nociones anteriormente encontradas, sobre sus modos de adquisición*. La formación también debe desarrollar el conocimiento del desarrollo lógico del niño. Los trabajos de Piaget son explícitamente citados como referencia.

La circular luego insiste en los saberes pedagógicos del maestro. *Él (quien se forma) deberá ser capaz de organizar su enseñanza de tal modo que las nociones matemáticas no sean expuestas por el maestro, sino progresivamente construídas por los alumnos*. Para esto, el profesor deberá aprovechar situaciones-problemas con el fin que los niños descubran o re-utilicen nociones. *Deberá además ser capaz de organizar encadenamientos de secuencias que conduzcan al niño a la elaboración de su saber.*

Luego, la circular define contenidos matemáticos similares a los de la escuela elemental y propone a los formadores poner en ejecución un tipo de actividades paralelas (los autores utilizan el término <u>isomorfo</u>) al proyecto pedagógico precisado para los niños: *investigar a partir de situaciones-problemas efectivamente encontradas, alcanzar resultados que serán puestos a prueba en la práctica escolar*. La formación debe además proveer a los alumnos-maestros de escuela herramientas que les permitan asegurar sus clases, y *estas herramientas no deberán ser suministradas a priori por los formadores, sino elaboradas, con la ayuda de estos últimos, por los alumnos-maestros*. Esta concepción es la base de las estrategias basadas en la homología que presentaré más tarde.

A partir de 1986, los estudiantes deben poseer el DEUG[1] siguen una formación que dura dos años. La circular ministerial es más breve que las anteriores y se opone a estas últimas. La reflexión filosófica sobre la educación se convierte en el fundamento de la formación presentada como *profesional de nivel superior*. El discurso sobre las formaciones disciplinarias toma una tono más técnico. Los

---

[1] *Diplôme d'Études Universitaire Générales* : Diploma Universitario de Estudios Generales: durante dos años, después del bachillerato.

medios *“audio-visuales, informáticos y tecnológicos”* se promueven con fuerza. Buena parte de la formación debe consagrarse a su integración en el dominio pedagógico. La circular manifiesta una clara reserva sobre la pedagogía general y sobre el grado de aplicación de sus principios. Se refiere explícitamente a la didáctica de cada disciplina. Pero dicha alusión es apenas vaga y parece deberse más a la voluntad de oponerse directamente a las pedagogías denonominadas de estimulación que a una definición efectiva del dominio didáctico.

Esta circular de 1986 se opone a las anteriores en la medida en que rechaza la pedagogía oficial anterior basada en la estimulación y la construcción del saber por parte del niño. Parece abrir paso a dos tipos de formaciones de profesores, ambas enfocadas hacia la tecnología. El primero será edificado sobre las nuevas tecnologías (sobre todo la informática, que reemplaza al audio-visual) y el segundo sobre una idea de la didáctica concebida como una tecnología de la enseñanza (con la idea de una ingeniería). Por último, la circular no excluye una formación basada en la práctica de las matemáticas.

En 1991, las Escuelas Normales desaparecen en provecho de una estructura universitaria, los I.U.F.M. Aún es prematuro evaluar una estructura en plena instalación. Sin embargo, podemos remarcar que la ruptura más notable de esta nueva formación respecto a las anteriores reside ciertamente en la instauración de un concurso al cabo del primer año. Esta modificación transforma radicalmente las condiciones y las reglas de juego en vigor en la formación: una gran parte de los estudiantes no entrará al segundo año e inversamente, otra parte no habrá cursado el primer año en el I.U.F.M.

Pasar el primer año es el resultado del éxito en el concurso. Éste comprende una prueba escrita de matemáticas que contiene dos aspectos:

- Un componente disciplinario que debe permitir juzgar las competencias de los estudiantes en matemáticas, pero cuyas exigencias deben tener en cuenta la polivalencia disciplinaria que se les exije a los estudiantes.
- Un componente pedagógico que tiene “*como objeto el análisis “de puntos de vista didácticos y gestiones pedagógicas correspondientes””*. En esta prueba el candidato “*debe actuar según los documentos que se le presentan*”.

Este último aspecto conduce a privilegiar durante el primer año una formación orientada a lo escrito y sobre la transmisión de un saber de referencia teórico. El segundo año está orientado más hacia la práctica efectiva del oficio con la exploración de las clases.

2. La gestión de la pluridisciplinalidad.

Integrar un número importante de disciplinas es una particularidad esencial de la formación de los maestros del primer grado; siendo las matemáticas sólo una entre otras.

La extensión de los conocimientos idealmente exigidos a los estudiantes confrontados con la realidad hace a los formadores oscilar entre dos polos:

A) Transmitir a los formados una gestión pedagógica transversal ignorando las particularidades de cada asignatura.

B) Acentuar un punto de vista disciplinario dejando que el estudiante, eventualmente ayudado por la filosofía o la psicopedagogía, haga una sabia síntesis de todos los elementos que le habrán sido enseñados.

Forzando un poco el trazo, podemos decir que la circular de 1979 opta por el primer punto de vista, y la de 1986 por el segundo.

Para caracterizar a groso modo ambos tipos de formaciones contempladas, se trata en el primer caso de una pedagogía basada en las actividades, y en el segundo, de una pedagogía donde la institucionalización de los conocimientos es lo esencial. De un lado, tenemos una visión de la formación muy ligada a la gestión del aprendizaje centrada en el niño. Por el contrario, la segunda tiene una concepción muy técnica de los problemas de enseñanza.

III. Las diversas estrategias de formación.

Presentación general.

Distinguimos dos grandes tipos de estrategias de formación. Están aquellas que conciben a la formación de los estudiantes como una preparación profesional para el oficio de profesor de escuela (o de maestro de escuela) en el seno de la estructura existente. Luego todas aquellas que no parecen tener esta preocupación como una prioridad. Entre estas últimas, hemos podido identificar:

<u>Las estrategias culturales</u>.

He nombrado así las estrategias que privilegian el crecimiento de los conocimientos en el dominio matemático sin prejuzgar la puesta en ejecución operada en las clases por los estudiantes. Estas estrategias podrán por supuesto estar revestidas de formas muy diferentes según las concepciones pedagógicas de los formadores.

De un cierto modo, no respetan el contrato fundamental de los institutos de formación de maestros, que supone una especificidad del saber vinculado a la enseñanza. Como tales, aparecen como lo negativo y también como un punto de oposición ante las estrategias que toman en consideración la profesionalización.

Antes que nada, estas estrategias integran el saber que es objeto de todos los esfuerzos de los formadores de matemáticas. Las estrategias culturales reducen este objeto a su núcleo central que es el *saber sabio** de referencia, independiente de toda reflexión sobre sus condiciones de producción, de asimilación, de difusión o de evolución. Presentan sin embargo una alternativa a todos los demás tipos de estrategias, alternativa que estará siempre presente, o al menos mientras exista una enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

<u>Las estrategias de investigación aplicada.</u>

Denominé de esta manera las estrategias muy ambiciosas que pretenden formar a los estudiantes por la investigación. Esta vía proviene más de las intenciones sobre las formas deseables que podría tener una formación que de la realidad institucional que crea grupos de formación de aproximadamente treinta personas. Además, supone un dominio de los contenidos matemáticos que van a ser objeto de la enseñanza. Esta estrategia escapa en gran parte del marco de la formación normal y no está limitada por sus condiciones. Sin embargo, parece particularmente adaptada a la formación de formadores.

Las estrategias basadas en la autonomía.

En este caso, se les concede a los estudiantes una autonomía muy amplia: deben hacer exposiciones, abordar temas del programa partiendo únicamente de algunas pistas bibliogáficas, y estas exposiciones funcionan como pruebas de evaluación (se evalúan, paradojicamente, competencias que no se han enseñado en el marco de la formación). A veces empleada de manera sistemática por ciertos formadores, la autonomía es empleada por otros de modo marginal para abordar ciertas nociones, como el cálculo mental.

Esta forma de formación nos deja perplejos. En efecto, si bien hay que reconocer de alguna manera que así ciertos estudiantes trabajan a veces de modo tan intensivo que pueden en ciertos casos mostrar sus habilidades específicas, este tipo de formación niega, por el contrario, la necesidad de los formadores y concibe los centros de formación como centros de recursos.

Las estrategias orientadas sobre la profesionalización se asignan todas el mismo objetivo: volver a los estudiantes capaces de enseñar utilizando actividades específicas de formación. Son también una funcion de los medios materiales que ofrece la formación de los maestros. En este marco, definimos tres grandes estrategias:

Las estrategias basadas en la presentación de un modelo.

Estas estrategias privilegian la transmisión de un modelo por medio de la observación de su ejecución en las clases elementales. Se trata de transmitir una práctica mostrándosela a los estudiantes y haciéndoles imitarla. Es el modo más natural y más antiguo (“lección modelo”) de iniciación a las prácticas profesionales.

Las estrategias basadas en la homología.

Es también un modelo fundado en la imitación, pero una imitación compleja y transpuesta por el formado. Este último debe organizar un modelo de formación inspirado del que pudo vivir como estudiante del centro de formación. Los formadores enseñan conforme a su concepción de lo que debe ser la enseñanza en la escuela elemental.

Las estrategias basadas en la transposición.

Se oponen a las anteriores por la insistencia que se le da al distanciamiento teórico. Se proponen transmitir saberes de referencia, pero acerca de la práctica de la clase, lo que las distingue de las estrategias culturales. Para estudiar estas estrategias, será importante precisar el saber retenido y los modos de transposición que se han perfeccionado.

1. Las estrategias basadas en la presentación de un modelo.

Se trata del modo más natural de formación cuando se considera la enseñanza como el dominio de un conjunto de destrezas (savoir-faire). Un experto se encarga de mostrar estas últimas a los principiantes. En la forma más simple de imitación, se integra a los estudiantes en una clase donde pueden observar a un maestro mientras enseña una noción a alumnos de la escuela elemental. Así se sumerge a los estudiantes en el sistema en el cual deberán más tarde ejercer su trabajo. Ellos mismos descubren poco a poco la función que será la suya. El proceso de formación se apoya entonces en la absorción de lo que se supone un modelo, por imitación.

La característica de estas formaciones reside en la escasa importancia que se le deja a la transmisión explícita. Los estudiantes viven una situación que únicamente reproducirán luego por imitación sin una reflexión explícita sobre lo vivido. En oposición a esta forma de transmisión imitativa, siempre en el marco de la presentación de un modelo, existen todas las aproximaciones que se refieren a la adquisición de destrezas a partir de una observación de la clase, conciente y activa por parte del estudiante. Estos enfoques suponen que el estudiante debe adquirir un saber-ver y un saber-observar, y estos conocimientos deberán ser objeto de un aprendizaje específico. Sin embargo, corremos el riesgo de caer en la "ilusión turística" que consiste en creer que se conoce lo que simplemente se visitó.

El dispositivo de observación que se organiza conduce a distinguir un modelo "artesanal" de formación de un modelo más "industrial".

En el primer caso, se enfatiza la presentación efectiva de una sesión que la mayoría de las veces es conducida por un consejero pedagógico. Éste, eventualmente acompañado por el profesor, desempeña el papel de "experto". El dispositivo de observación, generalmente de poco peso, está en segundo lugar respecto a las interacciones entre los diferentes participantes de la sesión (estudiante, consejero pedagógico o profesor). Se trata de un estado de la formación que califico de artesanal, orientado sobre la presentación-acción.

Este modo de formación se transforma con el aporte de un vídeo, cuando la sesión es grabada y seguida de un análisis *a posteriori*, como en el caso de la microenseñanza. Podemos entonces hablar de una aproximación tecnológica que coloca la formación por oposición al modo artesanal, en un modo de razonamiento "industrial" que le da prioridad a los aspectos técnicos.

Estas dos aproximaciones apuntan a una transformación de las prácticas del estudiante a través de la apropiación de modelos. En el marco artesanal, este modelo es transmitido de modo empírico por la presentación. En el modelo industrial, es adquirido por una sucesión de microacciones sobre temas muy específicos. En su forma más elaborada, este modelo escapa a las estrategias de presentación y se integra de hecho a las estrategias basadas en la transposición, la observación termina siendo sólo un medio para transmitir un saber técnico muy preciso.

Es complejo administrar las estrategias de presentación de un modelo a causa de la diversidad de los puntos de vista y de la gran heterogeneidad de los observadores, lo que dificulta para el formador la evaluación del impacto real que tiene su formación. Esta complejidad puede también conllevar ciertas ilusiones:

> *En el marco artesanal, puede aplicarse la idea que basta con "hacer" sin reflexión. El formador puede también creer, por falta de grillas con puntos precisos de observación, que todo el mundo ve y retiene lo mismo de la presentación.*

> *En el marco tecnológico, se tiene la ilusión que se trata de fenómenos bien definidos y perfectamente parametrizados con la idea de la reproductibilidad de las situaciones.*

Esta estrategia de formación tiene mucha fuerza puesto que está anclada a la realidad de las clases. Pero esta inserción de la clase en la formación dificulta una reflexión descontextualizada.

La difícil gestión de las estrategias de presentación y la opacidad de los objetivos que realmente se persiguen y se alcanzan con este modo de formación, no deben hacernos olvidar algunas de sus ventajas:

- *La transmisión rápida de informaciones en el contexto en el cual tiene lugar una acción de formación.*
- *La estrecha relación con el medio profesional, que le concede una cierta legitimidad a la formación y contribuye, a la manera de las prácticas profesionales, a un tipo de entronización de los estudiantes en su futuro oficio.*
- *La prueba por imitación de la posibilidad de poner en ejecución el tipo de enseñanza que los formadores defienden.*

2. Las estrategias basadas en la homología.

Las estrategias basadas en la homología tuvieron un gran desarrollo en el seno de las Escuelas Normales y ciertamente constituyeron un modelo estable y dominante, particularmente adaptado a estas instituciones.

A partir de la representación simplificada del sistema de formación de maestros que ya hemos presentado, precisamos, en primer lugar, el sentido que hay que dar al término de homología.

Hemos visto que las teorías del aprendizaje privilegian ciertas articulaciones del conjunto didáctico de tres elementos (M-C-S). Sin duda, el formador de profesores puede mantener una posición neutral ante las diferentes formas de transmisión, pero de hecho él también opta por uno de los modelos. En este caso puede decidir transmitir su forma preferida de enseñanza poniéndola en práctica en la enseñanza que imparte a sus estudiantes. Introdujimos el término homología para designar las estrategias en las que el profesor utiliza (o intenta utilizar) un modo de transmisión idéntico al que desea ver aplicado por sus estudiantes cuando éstos enseñen en clases elementales.

En el marco de la formación de los maestros en matemáticas, el único modelo que retuvimos (y encontramos) es el modelo constructivista, que privilegia las articulaciones (C-S) en el sistema de formación y en el marco de las escuelas elementales.

Los formadores tienen entonces la convicción que el saber se alcanza a partir de una construcción y que su transmisión pasa por la confrontación del aprendiz a situaciones denominadas de “descubrimiento”. El agudo problema que aparece es el reto de lograr transimitirles esta concepción de la enseñanza a estudiantes habituados, la mayoría de las veces, a otras prácticas.

En las publicaciones nacidas en los Coloquios de formadores encontramos una formulación vigorosa de la necesidad de una especie de estrategia de combate. Es así como en 1978 podemos leer a propósito de la relación del estudiante con la enseñanza de las matemáticas *"es ahí donde el mayor trabajo de abandono progresivo de los hábitos debe realizarse. Lograr que el estudiante llegue a enseñar las matemáticas de manera diferente a la que él mismo experimentó no es nada fácil. El formador debe pues comenzar por dar ejemplo; es decir poner en práctica su propia concepción de la formación inicial, el modelo que le gustaría ver que el estudiante adopte*".

En los actos del coloquio del COPIRELEM en 1979, la definición de la estrategia a utilizar se hace más precisa y podemos leer en relación a la enseñanza de la geometría

Podremos simular un aprendizaje con los estudiantes y retomarlo con los alumnos de la escuela primaria. Es importante que la situación se transfiera fácilmente.

De esta manera, las estrategias de homología se encuentran bien definidas por dos tipos de semejanza:

- *La semejanza de los pasos pedagógicos que debe permitir asegurar la coherencia entre el discurso y los actos del formador.*
- *La semejanza de las situaciones propuestas a los niños y a los estudiantes.*

Para la elección de las situaciones que hay que presentar, aparecen varias posibilidades.

a) La situación de partida es la misma para los niños y los futuros profesores.

b) La situación presentada a los adultos es ligeramente más compleja pero fácilmente transferible.

c) La situación presentada a los estudiantes no es susceptible de una transferencia simple en la escuela primaria.

De hecho, la elección de estas situaciones dependerá de la apreciación que tenga el formador de las dificultades vinculadas a la noción abordada. Podemos formular aquí dos hipótesis que he estudiado en mi tesis[1]

H1: una situación simple permite una toma de consciencia nítida del camino pedagógico seguido, pero en cambio corre peligro de infantilizar al estudiante y/o de provocar su rechazo.

H2: una situación más compleja transmite un saber matemático que no es evidente para los estudiantes, además la novedad de este saber puede ocultar el procedimiento que se siguió.

Las estrategias basadas en la homología suponen implícitamente que la transferencia operada por el estudiante no es problemática.

Como regla general, podemos decir que la reflexión sobre el fenómeno de la transposición del saber que se debe producir luego por parte de los estudiantes está ausente. El hecho que el formador presente las cosas explícitamente es sólo para darse a entender mejor. Esta ausencia de atención en la transposición realizada por los estudiantes le esconde a los formadores lo que he denominado la "desnaturalización simplificadora".

[1] KUZNIAK A, 1994, "Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré". Thèse de doctorat. Université Paris VII

En efecto, pudimos observar un fenómeno de simplificación y a veces de desnaturalización.

Los estudiantes realizan una simplificación que les permite preparar sesiones que podrán dominar con su saber matemático.

Podemos hablar de desnaturalización a partir del momento en que la simplificación transforma la naturaleza del saber puesto en juego o modifica radicalmente los procedimientos pedagógicos iniciales.

Las estrategias de homología también se apoyan en el hecho de que la media del nivel matemático de los futuros profesores de primaria es baja. Contrariamente a las estrategias culturales e incluso a las estrategias basadas en la transposición, las estrategias de homología no pretenden luchar contra este fenómeno sino más bien adaptarse a él. Intentan mostrar que cada estudiante puede con medios limitados llevar a cabo una actividad matemática, privilegiando el punto de vista pedagógico.

Una de sus grandes ventajas es confrontar al estudiante con las dificultades que encuentra todo estudiante. Así, el alumno-maestro puede captar mejor los fenómenos de aprendizaje y comenzar a apreciar la complejidad. Comprueba también que las nociones que va a poner en ejecución, si bien son calificadas de elementales, no son simples.

También va a sentir él mismo la necesidad (para quien investiga) de prever las expectativas de aquel que le hace investigar. Esto puede suscitar una reflexión sobre la naturaleza de las instrucciones, la importancia del *contrato didáctico**.

Podemos comprobar la riqueza potencial de estas estrategias si sobrepasamos la simple homología para alcanzar un distanciamiento teórico.

Fundamentalmente, las estrategias basadas en la homología parecen ser las primeras en haber integrado la importancia de las representaciones en la práctica de los profesores. Intentan actuar sobre estas últimas pero de manera empírica.

Las estrategias de homología parecen haber conocido su apogeo y luego haberse vuelto menos predominantes. Esto puede ser a causa de varios factores. En primer lugar, ya no son recomendadas por los textos oficiales como en 1979. Además, son sensibles a toda reducción de la duración de la formación ya que poner a los estudiantes en acción supone un tiempo de formación no despreciable. Y finalmente, el desarrollo de la investigación pedagógica y didáctica abastece el marco teórico necesario para otras concepciones de la formación de los profesores, más orientadas sobre la transposición.

3. Las estrategias basadas en la transposición.

Las estrategias basadas en la transposición se diferencian radicalmente de las anteriores por la insistencia que conceden a la transmisión de un saber de referencia. Se acercan así a las estrategias culturales pero toman en consideración la profesionalización de los estudiantes, a diferencia de estas últimas que se fijan únicamente en los conocimientos matemáticos.

Hay de hecho dos niveles de transposición.

El primero tiene que ver con el pasaje del *saber sabio** de referencia al saber enseñado por los formadores. Se trata aquí del proceso estándar de *transposición didáctica**.

El segundo nivel tiene que ver con el pasaje de este saber enseñado al saber aplicado por los estudiantes. Toma en consideración el fenómeno de transferencia y de adaptación realizado por los estudiantes.

Las estrategias más complejas contemplan ambos niveles de transposición.

La naturaleza del corpus sabio elegido contribuye a la definición de la estrategia. Encontramos aquí dos corpus de saber, diferentes y que no son específicamente matemáticos: un corpus "pedagógico" y un corpus "didáctico". Estos grupos representan dos enfoques de la teorización de los hechos de enseñanza en matemáticas en la Escuela Elemental.

El primer enfoque es de tipo pedagógico y se estructura alrededor de producciones del I.N.R.P[1] La obra de referencia es aquí el ERMEL[2] que constituye el único ejemplo de ingeniería global para todo un ciclo de formación. En este caso el saber puesto en ejecución está estrechamente relacionado con la Escuela Elemental y no está descontextualizado.

El corpus didáctico teoriza más los fenómenos de enseñanza y no tiene como primera preocupación una aplicación en las clases. Es pues más importante el esfuerzo de transposición efectuado por los formadores.

La primera transposición operada por el formador es problemática en el enfoque didáctico, sobre todo cuando éste desea conservar como objetivo la profesionalización de los estudiantes. Esto resulta por diferentes causas:

1) La didáctica de las matemáticas es un campo de investigación cuya primera vocación no es abastecer un saber técnico que se pueda utilizar directamente en las clases.

2) La transposición de este saber en formación pasa por la *institucionalización** de ciertas nociones cuya definición aún fluctúa.

3) Estas nociones se extraen del marco teórico que las originó para ser transformadas en instrumentos autónomos. ¿En qué se convierte, por ejemplo, la noción de *juego de cuadros**, separada de la *teoría de la dialéctica herramienta-objeto**? ¿Qué sentido se debe conceder a las *variables didácticas** cuando se utilizan fuera del contexto didáctico? Estas preguntas no parecen haber recibido respuestas totalmente satisfactorias.

La teorización didáctica sigue siendo difícil para un público no especialista de las matemáticas y supone un esfuerzo de transposición y de adaptación por parte de los formadores. Esta reflexión debe permitir revelar cuáles son los objetos didácticos útiles para los futuros profesores de las escuelas, y debe también crear situaciones de formación que se adapten a la transmisión de estos objetos.

Para guiar la segunda transposición realizada por los estudiantes en su práctica de clase, los formadores construyeron actividades bastante elaboradas. Esencialmente éstas se apoyan en el análisis del procedimiento y el análisis didáctico de las sesiones, el estudio y la exploración de los errores de los niños.

---

[1] INRP : Institut National de Recherches Pédagogiques : Instituto Nacional de Investigaciones Pedagógicas.

[2] Obra pedagógica destinada a los maestros de la escuela primaria, elaborada por equipos de investigadores y profesores, apoyándose en la didáctica de las matemáticas.

Hemos constatado, en esta ocasión, que el modelo transposicional de formación se presenta a menudo como un modelo crítico, pero ¿es lo suficientemente constructivo? En efecto, ciertos análisis desmontan con éxito sesiones de clase y destacan bien sus límites. Pero este efecto crítico puede parecer mal compensado por las herramientas de construcción de sesión propuestos por los formadores.

Contrariamente al enfoque crítico que generalmente requiere poco tiempo y da cuenta además de una buena adaptación a las nuevas condiciones, un poco formales, de la formación orientada sobre la preparación de una prueba escrita, la aproximación constructiva supone un mayor tiempo de formación. En efecto, los *análisis a priori** examinando las diferentes variables didácticas deben, para ser eficaces, completarse con un *análisis a posteriori** que suponen un trabajo en clases de primaria.

Estas formas de trabajo requieren, por parte del estudiante, una cierta cantidad de conocimientos previos. El estudiante debe tener una idea precisa del funcionamiento de las clases de primaria y una representación adecuada de la enseñanza de las matemáticas. Además, los conocimientos matemáticos son a veces demasiado importantes para un público que no es especialmente científico y que tiene que enseñar diferentes asignaturas. Es por eso que el enfoque transposicional no se construye sobre un vacío pedagógico y matemático. Al contrario de las estrategias de homología, las estrategias transposicionales son como un arte de mucha riqueza que supone y reclama muchas condiciones para su buena realización. Eso explica que los ejemplos de las actividades más complejas que encontramos a menudo conciernen a la formación continua del personal ya formados.

Conclusión

1. Criterios de elecciones estratégicas *a priori*.

Para finalizar esta presentación, vamos a comparar las diferentes estrategias sobre algunos parámetros que pondrán de manifiesto sus diferencias. Esto ayudará a comprender las razones que mobilizan a los formadores a escoger una u otra estrategia de formación.

a) Lugar del formador en matemáticas.

En las estrategias de presentación de un modelo, el profesor de matemáticas, sobre todo en el funcionamiento artesanal, no es el único que decide el modo de formación. La importancia del medio constituído por la clase y los consejeros pedagógicos coloca incluso al profesor en el segundo plano de un proceso que finalmente domina muy poco y del que sólo forma parte como acompañante. Esta desaparición relativa del profesor contrasta con la implicación importante del estudiante en esta formación, ya que este último debe realizar una sesión en una clase y en presencia de observadores críticos.

En el modelo tecnológico, la importancia del profesor aumenta pero el saber desarrollado proviene más de la pedagogía general que de la pedagogía de las matemáticas, lo que justifica a menudo bastante mal su especificidad disciplinaria. Ésta reaparece cuando lo que se muestra para ser imitado (estrategia 1) es reducido y mejor enfocado a momentos precisos cuando lo que se transmite es realmente un saber matemático.

En las estrategias de homología, esta vez el profesor desempeña el papel de un modelo indirecto. En efecto, estas estrategias están basadas en un proceso de imitación diferida y transferida. El estudiante observa a un profesor que enseña a adultos siguiendo el modelo constructivista, éste debe luego adoptar esta manera a su forma de enseñar a niños. El formador se compromete asumiendo en su práctica de profesor sus elecciones pedagógicas. Podemos también notar que es ciertamente en estas estrategias que el profesor tiene un papel que se acerca más al de los maestros de escuela pero del “maestro de escuela para adultos”. Este último punto en consecuencia puede provocar entre los estudiantes un sentimiento de infantilización o de aburrimiento.

En las estrategias de transposición, el formador encuentra una mayor libertad pedagógica ya que el punto clave esencial de dichas estrategias es la transmisión de un saber profesional de referencia. En el marco del enfoque pedagógico donde interviene una gran parte de ideología debida a la fuerte impresión producida por el modelo constructivista, nos pareció que el formador debía tener una experiencia profesional de la formación de los maestros que le daba el saber empírico necesario para moderar las situaciones de discusión, frecuentes en este modelo, con los estudiantes. La aproximación didáctica, si bien puede eventualmente dispensar el formador de este saber empírico, requiere en cambio de su parte una inversión como investigador en el dominio de la didáctica de las matemáticas. La dificultad consiste entonces para el formador en no confundir el objeto de sus investigaciones con el objeto de su enseñanza.

b) Soportes utilizados por el formador para su acción.

Las diferentes estrategias no se apoyan en los mismos puntos para fundar su acción.

Las estrategias de presentación de un modelo privilegian la relación con el contexto y con el futuro medio profesional. Utilizan este último para perfeccionar algunos ajustes pedagógicos. También actúan sobre los comportamientos y las tomas de decisiones perceptibles por la observación. En este sentido, privilegian las apariencias externas, a veces en contra de la coherencia interna.

Las estrategias de homología parecen privilegiar la acción sobre las representaciones que se suponen siempre como contrarias al modelo deseado por el formador. Actúan pues de manera interna en los estudiantes, intentando en primer lugar desestabilizarlos. Abastecen luego un modelo de la enseñanza constructivista en acto.

Las estrategias de transposición se diferencian de las anteriores por su voluntad reflexiva y el esfuerzo de distanciamiento a partir de los *análisis a priori** y a partir de la crítica de los modelos. Defienden la idea que un verdadero saber sobre el acto de enseñar las matemáticas existe y que este acto es demasiado complejo para ser reducido a un aprendizaje de tipo técnico.

c) El saber de base.

Las estrategias de presentación de un modelo privilegian saberes que permiten tomar a cargo y administrar una clase. Dan prioridad al “hacer” para poder adquirir destrezas. Los formadores deben actuar sobre los saberes pedagógicos generales. Cuando estos saberes están vinculados con las matemáticas, dependen más de la organización, del desarrollo de la sesión y tratan la disposición formal de la ingeniería de manera a menudo independiente del contenido abordado. Hay también una necesidad de apoyarse en el saber cómo observar lo cual produce frecuentemente el uso excesivo de fichas o formularios de observación. Otra especificidad de los saberes en cuestión es que se refieren a la pluridisciplina y a la articulación de las matemáticas con otras disciplinas.

He mostrado que las estrategias de homología funcionan principalmente sobre una concepción minimalista de los diferentes saberes que tienen los actores del sistema. No suponen, por parte de los estudiantes, un gran saber matemático, y no hacen referencia a un saber muy desarrollado sobre el acto de enseñar. Hay que mencionar que estas estrategias han sido a menudo perfeccionadas en una época en la cual este saber de referencia era prácticamente inexistente. En este sentido, pueden ser calificadas de "arte pobre" porque tratan de sacar el máximo de una situación que es juzgada como pobre.

Por el contrario, las estrategias de transposición requieren varias condiciones para funcionar correctamente. El estudiante debe poseer una cierta cantidad de conocimientos sobre el funcionamiento práctico de una clase de primaria. También debe tener un dominio suficiente de los contenidos matemáticos para tomar la distancia de reflexión necesaria. En cuanto al profesor, éste debe haberse apropiado de un saber que no forma parte de los estudios típicos de un profesor de matemáticas.

2. Articulación de las estrategias diversas.

Todas las estrategias que pudimos poner en evidencia presentan ciertos límites pero, y es sin duda una de las razones de su existencia, presentan también ventajas específicas, vinculadas a los puntos de apoyo que privilegian.

Son también estrategias contingentes que se integran en el marco en el cual operan. Cada una resuelve un tipo particular de dificultad como el nivel a menudo mediocre de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, o la elaboración inconclusa de un saber teórico de referencia para los formadores.

Estas estrategias ofrecen respuestas parciales, y no necesariamente contradictorias entre ellas, a los problemas que resultan de la formación. Una vez que hemos constatado esto, parece natural investigar una estrategia de conjunto. Dado el tiempo suficiente, ésta podría conectar en red las diferentes palancas de conocimientos que se remiten a la formación de los maestros y que pudimos encontrar.

El conocimiento del contexto y del medio en los cuales va a operar el estudiante. Este conocimiento le permite comprender mejor las referencias a la práctica dadas en el marco de la formación.

La acción sobre las representaciones de los profesores es indispensable para conseguir una mayor apertura pedagógica.

Las referencias a un marco teórico de tipo didáctico.

Esta síntesis no es utópica y ya hemos señalado ciertas transiciones entre las estrategias. Es así como ciertos formadores organizan estrategias de transposición a partir de un modo de funcionamiento muy impregnado de las estrategias de homología. Intentan así conciliar la evolución del saber didáctico con su concepción constructivista de la enseñanza. Igualmente encontramos ejemplos de presentación puestos al servicio de la transposición.

La caja del pastelero

Marie-Lise Peltier- Catherine Houdement- Denis Butlen (1993)

Este artículo presenta sesiones de formación inicial o contínua.
A partir de una actividad de fabricación de plegado de una caja paralepípeda, es posible señalar conceptos didácticos de situación, de dialéctica herramienta -objeto, de variable didáctica.

Objetivos

Objetivos didácticos
1 – Poner en evidencia algunos conceptos de didáctica (*situación didáctica**, *dialéctica herramienta-objeto**, *variable didáctica**, *devolución**...)
2 – Analizar procesos de exploración, mostrar la importancia :
- del camino personal;
- de la confrontación:
- de la validación interna como motor de la exploración (el hecho de poder evaluar por sí mismo su trabajo permite continuar si es necesario la búsqueda sin una nueva intervención del maestro).

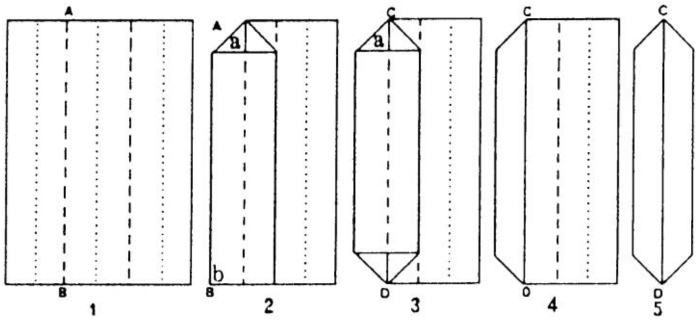
Objetivos matemáticos
1 – Volver sobre el vocabulario geométrico y sobre el estudio de objetos geométricos del plano y del espacio.
2 – Modelizar una situación.

ACTIVIDAD

Los estudiantes resuelven el problema matemático, luego miran un documento en video que relata la resolución en una clase de 4to/5to año(alumnos de 9-10 años).

Se lleva a cabo la secuencia con objetivos matemáticos para que los estudiantes vivan la situación del lado del alumno y comparen sus reacciones y sus procedimientos de resolución a los de los alumnos de 4to y 5to año.

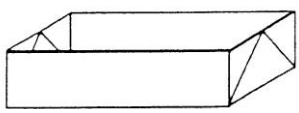
Fase 0
Aprendizaje del modo de construcción de la caja



Consigna
"Construyan una caja con una hoja rectangular de formato A4 según las siguientes instrucciones de plegado(P) :

1) hacer aparecer los cinco pliegues (equidistantes) indicados ;
2) plegar siguiendo AB y realizar los pliegues del vértice (a);
3) realizar en el vértice (b) los mismos pliegues que en (a);
4) plegar según el pliegue en cruz CD;
5) efectuar las mismas acciones en la parte derecha de la hoja : se obtendrá la figura 5 ;
6) abrir la caja y marcar los pliegues de las aristas

Observación
Se obtienen dos cajas de formas diferentes según se la pliegue sobre el largo o sobre el ancho de la hoja A4.



Fase 1
Las cajas con fondo cuadrado.

Organización
Los estudiantes se reagrupan en 3 o 4 luego de una indispensable búsqueda individual de 5 minutos.

Consigna 1
Construyan siguiendo las instrucciones (P) una caja con fondo cuadrado, luego redacten un afiche relatando la exploración, el método utilizado, las conclusio-

nes precisando las dimensiones de la hoja que les sirve para el plegado. Es importante que anoten todos los intentos, aunque no los hayan conducido al final de la tarea.

Procedimientos observados en los estudiantes
Hacer el plegado utilizando una hoja cuadrada;

Tomar las dimensiones de la caja casi cuadrada obtenida en fase 0 observar la diferencia sobre el largo, luego sobre el ancho.

Desplegar la caja construida en la fase 0 y estudiar los pliegues.

Construír un cuadrado al centro de una hoja y completarla con bandas por plegado.

Dibujar un cuadrado en el fondo de la caja construída, desplegar la caja y construír por traslación las bandas necesarias para la construcción.

Observaciones
Los procedimientos son análogos a los observados en los niños de 5to año confrontados a la misma consigna.

Una consigna suplementaria ("construyan la caja con fondo cuadrado lo mas grande posible utilizando una hoja A4") puede ser propuesta a los grupos que hayan terminado antes la primera tarea (**gestión del tiempo).**

Puesta en común
Los afiches son expuestos delante la clase entera y son comentados por sus autores. El profesor deja exponer a los grupos, sin tomar posición ; por lo tanto no hay necesariamente una conclusión general de tipo: “para obtener una caja con fondo cuadrado de lado x, habrá que utilizar una hoja de dimensiones $2x$, $3x$."

Consigna 2
"Construyan una caja cuyo fondo es un cuadrado de 6 cm de lado, den las dimensiones de la hoja que sirve para el plegado. Propongan una generalización: cuáles son las dimensiones de la hoja que permite construír una caja cuyo fondo es un cuadrado de lado x ? "

Observación
Una consigna suplementaria para **la gestión del tiempo** puede ser : "construyan cajas nido con fondo cuadrado "

Síntesis
Esta síntesis permite generalizar los procedimientos permitiendo una buena construcción e *institucionalizar** para construir una caja con fondo cuadrado de lado

x, se puede partir de una hoja rectangular de dimensiones $2x$ et $3x$ y plegar según el largo.

Fase 2

Condiciones de existencia de las cajas.

Se trata aquí de relanzar la exploración sobre las relaciones entre las dimensiones de la hoja de partida y las de la caja obtenida.

Consigna 1
"De qué hoja se puede partir para construír una caja de fondo 6 cm por13 cm ?"

Consigna 2
"Cuáles son las dimensiones de la caja obtenida plegando una hoja 15x32 según el ancho ?"

Consigna 3
"Elaboren una tabla de valores numéricos que correspondan a las diferentes cajas construídas durante la exploración de la fase 1. Señalen la dimensión según la cual realizan los pliegues."

Rectángulo de partida	Dimensiones del fondo de la caja	

Consigna 4
"Construyan una caja de 8 cm por 14 cm de fondo y 5 cm de altura."

Síntesis
La tabla de abajo incluye una nueva columna, la altura de la caja.

Se formula una condición en relación a la altura para que se pueda construír una caja de dimensiones x e y de fondo y h de altura : "la altura de la caja es siempre la mitad de una de las dimensiones del fondo".

Fase 3

Extensión del campo numérico hacia una modelización algebraica.

Consigna 1
(Trabajo en grupo)
"Propongan una estrategia para poder responder rapidamente a los dos tipos de cuestiones siguientes:

(1) a partir del dato de las dimensiones de una hoja rectangular y de la dimensión según la cual se efectúa el pliegue, decir si se puede construír una caja y dar las dimensiones de la caja obtenida,
(2) a partir de las dimensiones de una caja realizada, dar las dimensiones de la hoja rectangular utilizada y la dimensión según la cual se efectúa el pliegue.
Redacten un mensaje explicando (o presentando)su método."

Proponemos el siguiente desarollo :

• Dar una primeria serie de preguntas, por ejemplo :
(1) "Disponiendo de una hoja de dimensiones 12 y 17 cm, se efectúan pliegues según el ancho, se obtiene una caja ? Si la respuesta es afirmativa, cuáles son sus dimensiones ? Si se efectúan pliegues según el largo se obtiene una caja? Si es si, cuáles son sus dimensiones ?
(2) Encuentren dimensiones de la hoja que permita construír una caja de dimensiones 12x15 y 6 cm de altura."

• Hacer intercambiar los mensajes entre grupos.

• Dar una nueva serie de preguntas de los tipos (1) y (2). Terminar por una cuestión de tipo: *"a partir de una hoja f, se obtiene una caja b, se toma una hoja F que se obtiene duplicando una de las dimensiones de f, se construye una caja B; den las dimensiones posibles de la caja B en función de las de la caja b".*

• Dejar discutir a los grupos de dos en dos para preparar su mensaje.

Síntesis

• Exhibir los diferentes mensajes y las respuestas a las preguntas planteadas.
• Comparar los procedimientos desde el punto de vista de su pertinencia, de su eficacia, de su lisibilidad, del cuadro en el cual son redactados (tablas de números, escrituras literales, escrituras funcionales, textos en francés...)
• Concluir

1 - Si se conocen las dimensiones de la caja (fondo x e y, altura x/2), se obtienen las dimensiones de la hoja por la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (3x, x+y)$$

2 - Si se conocen las dimensiones de la hoja x e y efectuando el pliegue según x :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \to \left(\frac{x}{3}, y - \frac{x}{3}, \frac{x}{6}\right)$$

Esta fase puede eventualmente prolongarse para la búsqueda siguiente.

Consigna 2

"Exploren las condiciones sobre las dimensiones x e y de la hoja para que pueda obtenerse una caja plegándola según x. "

Síntesis

- Si $x < y$, el plegado es siempre posible.
- Si $x > y$, solo es posible si $x < 3y$ (vínculo con el conjunto de definición de la función g).

<u>Fase 4</u>

(Facultativo) : relance hacia consignas con condiciones relacionadas a volumen.

Ejemplos de consignas

Qué hojas elegir para construir

• una caja con fondo cuadrado conteniendo exactamente 1/2 litro ?
• una caja cúbica conteniendo exactamente 1 litre ?
• una caja que tiene un volúmen de 160 cm^3 ?"

ANALISIS DE LA ACTIVIDAD

Análisis de la actividad

Esta situación permite :

- recordar la geometría, particularmente el vocabulario;
- elaborar un código funcional, útil como herramienta de previsión : las funciones f y g permiten la generalización.
- trabajar sobre el razonamiento : los estudiantes y los alumnos de 4to y 5to emiten hipótesis, validan o invalidan sus hipótesis, ponen en evidencia errores de razonamiento de tipo : *"si parto de un rectángulo, obtengo una caja con fondo rectangular, por lo tanto si parto de un cuadrado obtengo una caja con fondo cuadrado."*

Análisis didáctico

1 – Descripción de la situación

Es posible describir los diferentes momentos importantes de la situación :

- la fase de *devolución**,
- el tipo de consignas : cortas, pero un pretexto para las exploraciones lanzadas,
- la tarea del alumno : producción de un objeto sumiso a condiciones, posibilidades de *validación** interna,
- el rol del error : aparece aquí muy positivo porque permite avanzar sea eliminando las hipótesis no válidas, sea modificándolas para convertirlas en válidas,
- la *institucionalizacion** posible en numerosos momentos :
  - Sobre puntos metodológicos,
  - Sobre el razonamiento,

- Sobre las nociones matemáticas.

2 – Algunos conceptos de didáctica

Condiciones para que un problema pueda ser fuente de aprendizaje (prioridades en esta situación) :

• el enunciado tiene sentido para los alumnos ;
• el problema es consistente (la respuesta no es evidente) ;
• el alumno comprende lo que es una respuesta al problema ;
• puede comprometerse en los procedimientos de resolución desde el final de la consigna ;
• Puede controlar por él mismo los efectos.

Fases de una situación didáctica*

Es posible señalar en esta situación las fases :
• *de acción**
• *de validación*,*
• *de formulación y de comunicación*,*
• *de institucionalización*,*
• de re-aplicación a una situación nueva.

Devolución*

La fase 0 permite al alumno aprender el procedimiento de construcción de las cajas y por lo tanto ser liberado de ahora en adelante de las dificultades materiales .
En la fase 1, realizar efectivamente el objeto y verificar si cumple la condición, motivan su exploración.

Dialéctica herramienta-objeto*

Esta funciona aquí sobre el saber sabio "función de $R^n \rightarrow R^p$ ".
En efecto, estas funciones intervienen como *herramientas** implícitas en las fases 1 y 2. La fase 3 permite explicitar esta herramienta, utilizarla para prever otras construcciones, para anticipar la acción. Una fase suplementaria permitiría estudiar las funciones de R^n en R^p como *objetos**, pero esto está fuera de los objetivos de la formación matemática de los docentes.

El funcionamiento *herramienta-objeto** de la noción de función en esta situación permite ilustrar el espíritu de las matemáticas:

- En principio una **resolución local**, suficiente en un primer momento,
- Luego la necesidad de **generalización**, como herramienta de previsión,
- Finalmente el poder de la **modelización** para anticipar, para resolver en una sola vez una familia de problemas isomorfos.

Los cambios de cuadro*: hemos constatado que algunos estudiantes jamás movilizan herramientas algebraicas, ellos podían permanecer en los *cuadros numérico o geométrico*. La situación no impone forzosamente estos cambios de cuadro, estos deben ser explicitados por el profesor.

Les cambios de cuadros (pasaje de un cuadro geométrico a un cuadro algebraico) pueden estar a cargo del profesor, pueden ser provocados por las siguientes consignas : fase 1 consigna 2 (generalización), fase 3 consigna 1 (necesidad de rapidez y de comunicación).

Variables didácticas*

El profesor explicita las variables que ha utilizado y sus elecciones.

El hecho de dar o no la altura de la caja a construir (fase 2, consignas 1 y 2) influye en la manera que los estudiantes consideran los resultados anteriores.

El hecho de pedir una caja constructible y no en una hoja A4 (fase 3, consigna 1) no es neutro. En efecto si la caja solicitada no puede ser construída, los procedimientos de comprobación y de tanteo se encuentran bloqueados y los estudiantes pasan a procedimientos de previsión por lo tanto buscan modelizar la situación.

También hubiera sido posible no dar el número de líneas de pliegues en el modo de fabricación de la caja (por ejemplo plegar en 10 en lugar de plegar en 6) ; este número es entonces una *variable didáctica**, no tomada en cuenta en esta secuencia, porque puede inducir una búsqueda de tipo de plegado a realizar, en lugar del estudio de las dimensiones de la hoja a plegar.

Contrato*

Es posible hacer tomar conciencia a los estudiantes que han hecho funcionar las reglas de un contrato implícito, por ejemplo :

- Un problema planteado en la escuela siempre tiene una solución (cf. fase 2, consigna 2),
- Solamente se redacta la « solución correcta » (cf. Fase 1, consigna1).

De donde surge la necesidad :

- de estar atento y vigilante a los *efectos del contrato*,
- de explicitar el *contrato** lo mas frecuentemente posible, particularmente por la elección de consignas apropiadas

La vaca y el campesino

Hervé Péault (1991)

Este artículo presenta una sesión de formación inicial o contínua.
A partir de la solución de un problema, se invita a los participantes a convencerse mutuamente de la veracidad de sus soluciones. La actividad y el debate que sigue permiten abordar los siguentes temas: la resolución de problemas, la demostración, el análisis de errores, y eventualmente las situaciones aditivas.

Contexto

He realizado esta actividad 5 o 6 veces, tanto en formación inicial como contínua, en sesiones de 2 o 3 horas de duración.
Me parece que es una interesante actividad de introducción en el cuadro de formación. Permite explorar diversos aspectos de didáctica, en particular los problemas de *formulación** de una argumentación, de *validación** por demostración, de análisis y de comprensión de los errores... También puede ser un soporte interesante para el estudio de una tipología de las *situaciones aditivas*.*

Particularidad

La particularidad del problema inicial es que parece muy sencillo, sin embargo, es frecuente que la gente encuentre soluciones erróneas sin que esto signifique que sea fácil demostrar su falsedad.

El problema

" Un campesino va al mercado. Compra una vaca de 5000 francos. La revende a 6000 francos. Satisfecho de si mismo la compra nuevamente a 7000 francos. Y la vuelve a vender por 8000 francos.
¿ Ganó dinero, y en ese caso, cuánto? ¿ Perdió dinero, y en ese caso, cuánto? ¿ O no ganó ni perdió nada? "

Desarrollo

Se presentan las siguientes líneas generales del desarrollo de la actividad antes de enunciar el problema.

1) Cada uno trabaja induvidualmente entre 5 y 10 minutos.

2) Cada uno, por turnos, presenta su conclusión. Las diferentes soluciones se apuntan en la pizarra, sin comentario alguno, con el número de personas que las han elegido.

3) Para cada una de las soluciones, un representante expone su argumentación (o varios, si otros estiman haber procedido de otro modo) apuntándola en la pizarra, preferiblemente. Los demás pueden hacer preguntas, pero únicamente buscando comprender la argumentación, y evitando presentar objeciones.

4) Encuesta: para cada una de las soluciones, se pregunta cuántos están convencidos que se trata de la respuesta correcta.

5) Para cada una de las soluciones que han sido propuestas, el turno para hablar pertenece a los que quieren argumentar en su contra.

6) Se realiza una segunda encuesta sobre las convicciones en cuanto a las soluciones propuestas.

7) La discusión continúa, hasta que todos se consideren convencidos de la veracidad de una de las soluciones pero también de la falsedad de todas las demás (o hasta un límite de tiempo determinado, sin no se cumple la anterior condición)

8) Debate didáctico sobre la actividad.

Observaciones

a) Anuncio desde el principio que no intervendré en ningún momento sobre la validez de las argumentaciones, siendo que no es a mí sino a los otros a quien hay que convencer, y que me limitaré a moderar el debate para permitir que cada uno pueda expresarse.

El entusiasmo de los participantes es en general bastante fuerte y algunas veces es difícil canalizar el flujo de las argumentaciones presentadas y las argumentaciones que se oponen.

b) La actividad pierde su interés si todo el mundo encuentra inmediatamente la solución correcta. Esto jamás me ha ocurrido (yo mismo había previsto, si dicha eventualidad se presentaba, de inspirar la duda presentando una solución errónea), pero no se debe excluir como posibilidad.

(Para un grupo de n participantes, el número de soluciones correctas encontradas en el primer intento varió entre *n/4 y n-1*; en este último caso, la persona aislada se defendió encarnizadamente)

Ejemplo de proposiciones

La siguiente tabla muestra, a modo de ejemplo, la evolución de las convicciones (el abanico más amplio que obtuve) de un grupo de 17 profesores, particularmente animados.

Columna A: propuestas tras la reflexión individual.
Columna B: convicciones después de exposición de las primeras argumentaciones.
Columna C: convicciones después de exposición de las primeras argumentaciones en contra.

	A	B	C
No hay ni ganancia ni pérdida	5	3	1
Ganancia de 1000 francos	6	1	1
Ganancia de 2000 francos	5	5	11
Ganancia de 3000 francos	1	0	0
No sabe	0	8	4

En otro grupo se presentó al principio la afirmación "*depende de la cantidad inicial de dinero en su bolsillo*". De hecho, esta afirmación se presento a menudo en los otros grupos, en el curso de las argumentaciones.

Ejemplos de argumentacion

He aquí un resumen simplificado de las argumentaciones que aparecieron con mayor frecuencia:

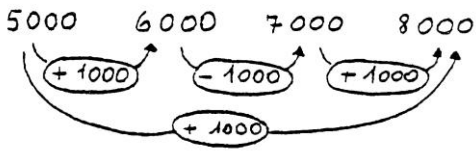
" No hay ganancia ni pérdida "

- " Ganancia de 1000 francos entre la primera compra y la primera venta, ganancia de 1000 francos entre la segunda compra y la segunda venta; pérdida de 2000 francos entre la primera y la segunda compra, es decir que el saldo es cero. Ambas ganancias de 1000 francos se anulan con el aumento de 2000 francos de una compra a otra. "

- " 8000 francos - 6000 francos = 7000 francos - 5000 F. La misma diferencia entre los precios de compra y de venta y por lo tanto no hay ganancia ni pérdida. "

" Ganancia de 1000 francos "

- " Entre la primera compra y la primera venta, la ganancia es de 1000 francos; entre la primera venta y segunda compra, la pérdida es de 1000 francos; entre la segunda compra y la segunda venta, la ganancia es de 1000 francos; balance: ganancia de 1000 francos ".
- El mismo razonamiento, apoyándose en un esquema como:



"Ganancia de 3000 francos "

- Hay un estado inicial y un estado final que se pueden comparar (llega sin vaca, se va de nuevo sin vaca). Poco importan entonces las etapas intermedias. Al principio compra 5000 francos y vende por 8000 francos al final. De donde resulta una ganancia de 8000 francos - 5000 francos = 3000 francos.

" Pérdida de 3000 francos "

- " Suma invertida: 5000 francos. Primera transacción: ganancia de 1000 francos. Segunda transacción: ganancia de 1000 francos. Saldo: 1000 + 1000 - 5000 =-3000 "

" Ganancia de 2000 francos "

- Ganancia de 1000 francos en la primera venta, ganancia de 1000 francos en la segunda venta, la ganancia total es entonces de 2000 francos
- Gastó 5000 francos + 7000 francos = 12000 francos; cobró 6000 francos + 8000F = 14000 francos; ganancia de 2000 francos
- Supongamos que tuviera 7000 francos en el bolsillo. Compra por 5000 francos, le quedan 2000 francos; vende por 6000 francos, le quedan 8000 francos; etc..
- Como la precedente bajo la forma de un cuaderno de contabilidad con las siguientes secciones: "saldo de caja", "ingresos", "egresos", "caja".

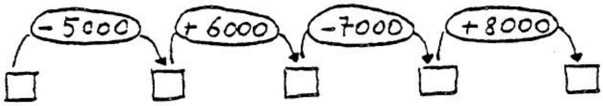
Observaciones sobre las argumentaciones

Las suposiciones sobre el dinero inicial en bolsillo llevaron a una discusión sobre la legitimidad de tal suposición. Es durante esta parte del debate que los participantes proponen a menudo simular la situación (siempre hay alguien que se ofrece como voluntario para desempeñar el papel de la vaca) con dinero de papel o también con una chequera, para mostrar la independencia respecto a la cantidad inicial. Hasta que alguien propone llamar *"x"* dicha cantidad y efectúa un cálculo literal.

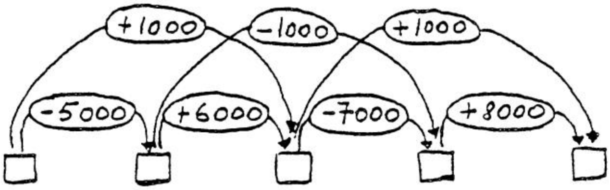
La mayoría de las veces, los participantes son persuadidos rápidamente que la solución "ganancia de 2000" francos es la indicada, pero reconocen que no ven lo que falla en la exposición de la solución "ganancia de 1000 francos"; y la etapa esencial del debate de argumentación consiste en mostrar que las argumentaciones que quieren probar una ganancia de 1000 francos son falsas. Los que piensan haberlo comprendido tratan de convencer a los otros, pero la mayoría de las veces terminan retomando otra argumentación que muestra que la solución " ganancia de 2000 francos " es la correcta y la pregunta se repite sin cesar: " *eso ya lo entendimos, pero seguimos sin entender que es lo que no funciona en la argumentación para la ganancia de 1000 francos ".*

Una argumentación opuesta tuvo un efecto sobre una parte del público, pero sin convencer a todo el mundo*: " basta considerar que la primera vez compró una primera vaca, y que la segunda vez es otra vaca; esto no cambia nada en el problema, sino esto muestra que no es legítimo tomar en consideración una pérdida de 1000 francos entre la primera venta y la segunda compra ".*

Las dificultades para rechazar la solución " ganancia de 1000 francos " proviene esencialmente de una confusión entre "estados" y "transformaciones". Una sola vez alguien consiguió convencer a todos los demás proponiendo un esquema como el siguiente:



E interpretando la solución " ganancia de 1000 francos " como una composición equivocada de transformaciones:



Prolongación didáctica

1- Cuando se decide terminar la actividad para no sobrepasar la hora fijada (preveo en general 1 hora, con la posibilidad de seguir durante media hora más, " hasta la pausa ", para las sesiones de 3 horas y cuando los participantes siguen sin estar seguros), siempre me piden que tome una posición. Escogí en ese caso presentar la clasificación de las *situaciones aditivas** de G. VERGNAUD[1], luego depende de ellos, si lo consideran útil, retomar el problema situándolo en dicha tipología.
Me parece que este problema podría ser un buen soporte para un estudio más detallado de las situaciones aditivas.

Trato de moderar el debate a partir de las siguientes preguntas:
" ¿ Qué piensa de esta actividad? "
" ¿ Cómo analiza la evolución de sus convicciones? "
" ¿ Era necesario que yo no tomara posición? "
" ¿ En términos más generales, cómo concibe la actividad de resolución de problemas en la clase? "

... Y de las que hacen los participantes, como la que siempre aparece:
" ¿ Cuál es el registro escrito que debe quedar a los niños? "...

Es la ocasión de expresar, e incluso de desarrollar ideas como:
- Hacer matemáticas es primero resolver problemas
- El rol del conflicto socio-cognitivo
- El aprendizaje no lineal y la existencia de fases de regresión
- La demostración es esencial en la actividad matemática
- Decirle a alguien que se equivoca y mostrarle la respuesta correcta es inoperante si no se le ayuda a darse cuenta de sus errores.

Este último punto, con los profesores en formación contínua, hace en general surgir ejemplos y preguntas: " *tengo tal alumno, por mas que le explico, no entiende tal cosa y siempre comete los mismos errores* ". En general, no ofrecemos respuestas simples a estas preguntas, pero el vínculo con la experiencia del problema anterior ayuda a justificar la idea que los errores no son necesariamente resultado de la pereza o falta de inteligencia y que su tratamiento debe pasar por su análisis y su comprensión.

[1] Vergnaud et al. *Le moniteur de mathématiques – Résolution de problèmes* Livre du maître, Nathan, 1997.

Los gestos profesionales de profesores principiantes y su adquisición en formación inicial

Denis Butlen (1997)

Este artículo presenta un análisis de los gestos profesionales de los profesores principiantes, se establece una tipología de ciertas regularidades observadas siguiendo seis criterios. A modo de conclusión, se presentan algunas reflexiones sobre los modos de construcción y de adquisición de estos gestos profesionales.

1. INTRODUCCIÓN

1-1. Nuestra problemática

Este es un análisis de las prácticas de profesores principiantes (en particular las prácticas de profesores de escuela que se encuentran cursando el segundo año de su formación inicial) observadas durante la etapa de acompañamiento o prácticas con responsabilidad sobre todo el grupo.

El origen de estos trabajos es una serie de preguntas que se plantean los formadores.

Un trabajo de racionalización de las prácticas de formador se realizó antes de esta investigación. Se trataba, tanto para mí como para muchos colegas, de pensar en dispositivos que pudieran mejorar la formación inicial de los futuros profesores de escuela.
Los trabajos de A. Kuzniak, C. Houdement, así como los de M.L. Peltier, analizan los contenidos de la formación como estrategias de los formadores. Nos pareció indispensable sobrepasar esta etapa e interesarnos en las verdaderas prácticas de los profesores en formación para captar ciertas características y en lo posible para comprender mejor cómo se constituyen y cómo evolucionan a lo largo de la formación.
Partimos de una primera hipótesis, nacida de nuestra experiencia profesional como formadores: para analizar las prácticas de los profesores de matemática no podemos adoptar el mismo punto de vista, el mismo enfoque, que al momento de analizar las prácticas de los alumnos que están aprendiendo matemáticas. El enfoque utilizado para comprender cómo los estudiantes en formación realizan tareas matemáticas (en su condición de alumnos) y modifican en esta ocasión sus concepciones sobre las matemáticas, no puede ser reproducido sin modificación

para estudiar la manera en la que hacen que sus alumnos realizan tareas matemáticas.
Esto nos lleva a pensar que no se forma al oficio de profesor de matemáticas como formamos a los alumnos al aprendizaje de las matemáticas.
Intentamos pues enriquecer nuestro análisis, para diagnosticar y luego concebir situaciones de formación mejor adaptadas.

Nuestro objetivo es entonces:

1- Extraer, especificar, jerarquizar y dividir durante la clase acciones (lo que puede ser visto, escuchado en una observación) precisas que se pueden aislar, compartidas por varios individuos (regularidad en las prácticas) y que caracterizan particularmente a los principiantes.
2- Estudiar cómo es posible acelerar este aprendizaje, partiendo de la hipótesis que estas prácticas pueden adquirirse durante la formación o por lo menos, si ya existían, pueden debilitarse o incluso modificarse.

La idea general en la cual se basa este estudio es entonces la siguiente: los profesores principiantes (siempre refiriéndonos al profesor de escuela elemental) realizan generalmente durante la clase acciones no siempre apropiadas, las que fragilizan su enseñanza, los cansan y los vuelven menos eficaces.

De ahí la importancia de tratar de identificar dichas acciones con precisión, con el fin de tratar de acelerar su transformación en acciones “confirmadas”.
Hemos tenido que sobrepasar esta problemática de formación e inscribirnos en una problemática de investigación.

Estos trabajos están en proceso de realización cuyo objetivo es :

1- Contribuir a una modelización de las prácticas de profesores de escuela, en formación, sobre todo en lo concerniente a las modalidades de realización de sus proyectos de enseñanza.
Al igual que Aline Robert[1], distinguimos varios componentes en las prácticas: un componente “por encima de la clase” (que corresponde, dicho sólo de paso, al proyecto global o limitado del profesor), y un componente en términos de “puesta en acción”, que corresponde a los actos elementales (escritura en la pizarra, tono de la voz, los materiales utilizados, etc.) o puestas en acción más globales.
Utilizamos el término “gestos profesionales” para describir las modalidades según las cuales un profesor singulariza y efectivamente conduce, en tiempo real, su proyecto; interactúa con sus “verdaderos” alumnos, adapta más o menos conscientemente sus preparaciones en función de la coyuntura; toma decisiones instantáneas... De los componentes descritos anteriormente, estos gestos corresponden al segundo.

[1] A. Robert 1996, Cahier DIDIREM n°26

2- Captar ciertas regularidades en las prácticas y en la puesta en acción de las mismas.
3- Analizar de manera precisa las situaciones de formación que directamente contribuyen a la constitución, al mejoramiento de las prácticas de los futuros profesores.
4- Precisar de forma amplia, las condiciones en las cuales se transmiten, se adquieren, se construyen las prácticas y los gestos.
5- Apoyarse en estos resultados y en el marco teórico de la didáctica de las matemáticas (en particular *la teoría de situaciones** y *la dialéctica herramienta-objeto**) para optimizar el aprendizaje profesional.
Antes de describir el dispositivo utilizado para observar estas prácticas, consideramos necesario precisar qué entendemos por "gestos profesionales".

1-2. Gestos profesionales vinculados a la enseñanza de las matemáticas

¿ Acaso existen gestos profesionales del profesor de escuela que sean específicos a la enseñanza de las matemáticas, o todos los gestos son transdisciplinarios?

Podemos determinar por lo menos dos tipos de gestos profesionales: gestos transdisciplinarios y gestos específicamente vinculados a la enseñanza de las matemáticas.
Para comenzar a definir estos gestos, podemos apoyarnos en algunas concepciones "ingenuas", provenientes de la experiencia de los formadores.

Se trata de aspectos más bien técnicos de las prácticas profesionales
- a menudo implícitos, incluso automatizados
- raramente descritos o por lo menos, lo son sin referencia a un contenido de enseñanza
- que se dominan con la experiencia profesional,
- que al no dominarse correctamente, peligran de generar dificultades en la administración de la clase o de aumentar el cansancio (debido a una mayor dedicación personal durante la clase).

Teniendo en cuenta el carácter polivalente del oficio de profesor de escuela y la naturaleza pluridisciplinaria de ciertos aprendizajes efectuados en la escuela elemental, podemos pensar que una parte importante de la función de profesor de escuela escapa a (o sobrepasa) una definición que tome directamente en consideración los contenidos a enseñar. Podemos entonces pensar que existen gestos transdisciplinarios.
Estos gestos profesionales no disciplinarios o transdisciplinarios deberían considerar:

- la gestión global del tiempo: organización del día, de la semana, repartición efectiva de tiempos de trabajo, escucha, inacción, descanso; repartición de las diferentes disciplinas...
- la gestión de las intervenciones metacognitivas del profesor que no están relacionadas con un contenido, y que pueden incluso estimular eventuales transferencias o generalizaciones (en particular la administración de la coherencia de esas intervenciones),
- la gestión de los momentos de transición entre las enseñanzas de diferentes disciplinarias,
- la comunicación en la clase (reglas generales de trabajo, aprendizaje del trabajo en grupo...).

No es en estos gestos en los que pretendemos interesarnos directamente. En efecto, parece interesante percibir otros gestos vinculados a la enseñanza de las matemáticas, incluso a la enseñanza de un contenido matemático, y analizar de qué manera los primeros se manifiestan y eventualmente se precisan a través de una enseñanza de contenidos.
Hacemos la hipótesis que existen gestos que guardan las marcas de una enseñanza disciplinaria. Para esto nos apoyamos en observaciones que pudimos hacer respecto a la práctica de los maestros “confirmados” (con experiencia), y también en los “errores” de gestión que pudimos constatar en la práctica de muchos profesores principiantes.

2. DESCRIPCIÓN DE NUESTRO DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Concebimos varios dispositivos con el fin de analizar las prácticas del PE (profesor estudiante).
Trataremos de percibir los gestos profesionales de los practicantes a través de tres tipos de análisis.

1- La observación y el análisis de secuencias llevadas a cabo por profesores principiantes en diversas condiciones de prácticas.

2- El análisis del discurso de diferentes categorías de **formadores durante las visitas a las prácticas.**
Analizamos en particular las entrevistas, que se llevan a cabo luego de una visita, entre el formador de matemáticas y el practicante.

Nuestro objetivo aquí es múltiple:
- con el fin de confirmar nuestros resultados, identificar en el discurso del formador, que se basa en un análisis inmediato de la prestación observada, las regularidades eventualmente detectadas con el primer tipo de análisis.
- analizar este tipo de situaciones de formación, su lugar, su función y su impacto sobre la formación inicial de los PE. Para ello hemos precisado, utilizando

particularmente los trabajos sobre la estructuración del *medio** de G. Brousseau[1] C. Margonilas[2] , las posiciones ocupadas por los diferentes actores de la situación: formador, profesor practicante, alumnos...

- precisar ciertas normas que rigen no sólo las acciones de los formadores sino también las de los profesores practicantes. La información que podemos deducir de estos análisis depende no sólo de puntos de vista epistemológicos, didácticos y éticos de los formadores observados sino también de nuestras propias concepciones sobre estas cuestiones. Con el fin de tomar, como investigador, el máximo de precauciones, nos parece indispensable establecer las eventuales normas que subyacen a las posturas y los juicios que pueden expresarse.

Un segundo tipo de dispositivo (inspirado en la etnometodología) nos permite completar estas eventuales normas: el análisis se efectúa tan pronto como la clase termina, a partir de un video, con diferentes formadores (4 o 5 formadores, separados o reunidos).

3- La construcción de situaciones en vista a mejorar una formación profesional, centradas en la observación y el análisis de las prácticas de los profesores principiantes pero que se apoyan por un lado, y se justifican así mismo, en una formación que integra una enseñanza de elementos de didáctica de las matemáticas (con el sentido que le damos a este término en la comunidad organizada alrededor de la Asociación por la Investigación en Didáctica de las Matemáticas).

Detallaremos aquí sólo los resultados del primer dispositivo, confirmados, en gran parte, por nuestro análisis de los discursos de los formadores.

3. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE LAS PRÁCTICAS DE LOS PROFESORES DE ESCUELA

Para captar los gestos profesionales de los principiantes distinguimos seis ejes de singularización que Aline Robert[3] denomina “líneas de acción”, que son el primer componente de las prácticas profesionales, lo que hemos designado en este documento como el proyecto del profesor:

- los modos de gestión o de empleo de los materiales o soportes pedagógicos
- los modos de gestión simultánea de varias *variables didácticas**
- la *devolución** del problema
- la toma de información de los alumnos
- la gestión de las fases de síntesis, de balance, de corrección y en general las fases de *institucionalización**
- la gestión de ciertos equilibrios.

---

[1] G.Brousseau (1989), « *Le contrat didactique, le milieu* », RDM 9.3, La Pensée sauvage, Grenoble.

[2] C. Margolinas (1995), « *La structuration du milieu* », Les débats de didactique des mathématiques, Annales 93.94.

[3] A.Robert (1996), « Une approche de la formation professionnelle initiale d’enseignants de mathématiques », Cahier DIDIREM n°26.

3-1. Los modos de gestión o empleo de los materiales o soportes pedagógicos

De esta categoría parece depender todo lo que concierne a la gestión:
- del material relativamente específico para la enseñanza de un contenido dado (objetos "pedagógicos" que se deben manipular, soportes diversos),
- del espacio en la clase en función de la situación y del tiempo,
- de la pizarra y de los diferentes soportes pedagógicos (ordenadores, proyectores, manuales, etc.).

Aquí consideramos los aspectos más técnicos del oficio de profesor. Este eje no está al mismo nivel de los otros cinco. Aún así lo designamos bajo el mismo término ya que nos parece muy difícil separar los aspectos técnicos y las puestas en acción más globales.

Esta primera categoría de gestos profesionales técnicos, se encuentra a menudo ausente en la formación profesional "teórica" de los profesores de escuela. Su descripción se deja a menudo a cargo de los consejeros pedagógicos, quienes utilizan un discurso muy técnico a este respecto. El aprendizaje parece hacerse por observación, imitación y reproducción mas o menos personalizada.

El estudio de estos gestos profesionales técnicos adquiere una apariencia relevante sólo en dos ocasiones:
- durante el estudio de la noción de *variable didáctica** (en el que los soportes anteriormente citados se presentan como un medio eficaz de actuar a priori sobre los aprendizajes),
- durante los ensayos de formación como la "microenseñanza" donde se desarrolla a menudo un análisis muy detallado de los efectos de ciertas gestiones.

Aunque los "formadores profesionales" consideren este aspecto de la enseñanza importante, no parece integrarse en su enseñanza, posiblemente porque no saben cómo considerarlo.

3-2. Los modos de gestión simultánea de varias variables didácticas

La preparación de una secuencia de matemáticas requiere que un cierto número de variables de diferentes tipos hayan sido establecidas a priori.

Pareciera que existen modos de gestión, implícitos, de estas variables.
En particular, los profesores parecen fijarlas por adelantado pero son también capaces de administrar (y adaptar) automáticamente sus valores, al momento del desarrollo de la secuencia. Para esto toman en cuenta, obviamente, los documentos diversos o los soportes pedagógicos disponibles (manuales) y se apoyan en su experiencia profesional. Esta tarea permanece casi siempre implícita, en muy raras ocasiones es presentada por el maestro tutor del practicante. El caso se presenta claramente cuando se trata de establecer, si los

números a utilizar serán pequeños o grandes y el tiempo que se les deja a los alumnos para realizar un cálculo.
El dominio de este gesto tiende a aparecer particularmente en las adaptaciones que se improvisan al momento del desarrollo de la secuencia.
Para ilustrar el procedimiento no siempre acertado de muchos profesores practicantes en este campo, vamos a evocar el análisis que hicimos de una actividad de cálculo de productos con una clase de 5to año (alumnos de 12 años). Se trata de la gestión simultánea e implícita, que hace un profesor practicante, de varias *variables**: datos numéricos, forma de trabajo y el tiempo dado a los alumnos para la resolución (ritmo de trabajo).
Se trata de un profesor de escuela (practicante) en segundo año de formación, dirigiendo una secuencia de matemáticas en presencia de su profesor de matemáticas del IUFM que efectúa una visita durante una práctica.
La practicante preparó la secuencia con el docente titular de la clase, que fue quien le indicó el tema de la lección y le dio ciertas indicaciones sin precisar los "detalles". Es justamente este contexto que nos permitió poner en evidencia un fenómeno identificado con frecuencia en las prácticas de los profesores principiantes.
La practicante propone primero ejercicios de cálculo mental de dos tipos; he aquí un ejemplo para cada uno:
- "*7 es un divisor de 42, el otro es…*"
- "*¿Cuáles son los dos múltiplos de 9 que más se acercan a 78?*"
El dominio numérico que se explora aquí no sobrepasa las tablas de multiplicar tradicionales. El tiempo dedicado a estos ejercicios es razonable para una actividad de cálculo mental.

En una segunda fase, la practicante plantea un problema para resolver por escrito, con el siguiente enunciado:
"*¿Con 50 francos, cuántos bolígrafos de 9 francos puedes comprar?*"
Los procedimientos previstos de resolución hacen intervenir sea descomposiciones multiplicativas y aditivas a partir del tratamiento de multiplicaciones con un factor desconocido, o bien una búsqueda sistemática a través de la exploración de una lista de múltiplos y en la producción de textos como el anterior.
Podemos ver entonces que los datos numéricos no son muy diferentes a los de los ejercicios anteriores; pero a diferencia de éstos la resolución se escribe y el tiempo que se le otorga a los alumnos es claramente superior (23 minutos, en vez de los 2 a 4 minutos otorgados para los anteriores).
Esta duración excesiva y el haber recurrido a la forma escrita hace que los alumnos pongan en funcionamiento procedimientos poco económicos. Esta resolución laboriosa conduce finalmente a una inmovilización colectiva de los alumnos. Algunos de ellos cometen errores que no se relacionan con la habilidad de cálculo que se había manifestado anteriormente. La duración que se le otorga a este trabajo va a contribuír al agravamiento de la inmovilización y a la heterogeneidad de performance de los alumnos: algunos deberán hacer un segundo ejercicio, mientras los otros terminan el primero, un ejercicio que va a

ser corregido en grupo aún cuando una parte de los alumnos ni siquiera conoce el enunciado.
La profesora practicante parece percibir el malestar durante el desarrollo de la sesión, pero se muestra incapaz de remediar la situación por dos razones sin duda indisociables: no identifica las causas y se aferra a lo que había preparado.
Un profesor con experiencia, como lo prueba el testimonio del maestro formador, habría modificado los valores de las variables.
La reacción de la practicante es más bien del orden del "encarnizamiento pedagógico", multiplicando las explicaciones, las preguntas sin respuestas, creando malentendidos. Y esto resulta de una falta de conocimiento de las performances de los alumnos, de una falta de referencias pasadas, de la timidez ante cualquier cambio respecto a lo que había sido preparado.
La practicante no se permite reducir el tiempo (temporalmente afectado a los alumnos que tienen mayores dificultades para resolver el problema), o cambiar la forma de la actividad (cálculo rápido en vez de la resolución por escrito).

3-3. La devolución del problema

De manera bastante unánime, los formadores de profesores de escuela subrayan las dificultades de gestión que tienen los practicantes durante las fases de presentación de la consigna. Ellos remarcan la falta de habilidad de éstos durante esta etapa.
Evidentemente, la *devolución** no se limita a la presentación de la consigna, pero esta última revela frecuentemente las dificultades percibidas.
Nuevamente, el aprendizaje parece hacerse por demostración, reproducción acompañada de ensayos y errores de manera reiterada.
No obstante, cabe notar que los formadores tratan de hacerse cargo del tratamiento de este problema cuando estudian videos (en tiempo real o editados), cuando estudian protocolos (con menor frecuencia) y sobre todo al momento de evocar sesiones (episodios contados)...

Nos interesamos en particular a dos elementos: los diferentes tipos de transmisión o de presentación de la consigna y su negociación, en particular la negociación de las dificultades de resolución con las que se ha previsto acompañarla. Naturalmente, esto requiere observar más detalladamente estas fases, y analizar las distorsiones registradas entre la previsto y la realidad.
El análisis de las prácticas de los principiantes permite deducir tres tipos de dificultades frecuentes:
- negociación individual y simplificación del enunciado (sobre todo cuando se trata de alumnos con dificultades)
- utilización inadecuada de los soportes pedagógicos clásicos (fotocopias, libros) que a menudo se caracteriza por largas paráfrasis de las preguntas que aparecen en el libro
- pérdida de tiempo ocasionada por la voluntad de intentar hacer que los alumnos inventen los enunciados.

Estos procedimientos resultan frecuentemente de la voluntad de tomar en cuenta "la ideología dominante" del IUFM (esta última a menudo reducida a eslóganes como "todo debe venir del niño", "hay que individualizar los aprendizajes") y la imposibilidad de realizar realmente una *devolución** de la tarea.
A esto se añade el tomar en cuenta la presión de los mismos alumnos, los problemas de legitimidad y la inexperiencia técnica...
Para ilustrar los tres últimos ejes, haremos referencia, brevemente, a la conducta de otro profesor practicante en las fases de corrección de ejercicios de cálculo mental. Por comodidad de la exposición, primero resumiremos los resultados de nuestras diferentes observaciones.

3-4. La toma de información de los alumnos

Resulta trivial afirmar que el profesor no puede preverlo todo, que debe tomar decisiones *in situ* ante un imprevisto, que tiene que tomar decisiones importantes en ciertos momentos. Formulamos la hipótesis que los profesores con experiencia no toman dichas decisiones de manera aleatoria, y que éstas se efectúan gracias a la consideración, a menudo implícita y automatizada, de diversos elementos.
Los maestros con experiencia que fueron interrogados al respecto dicen que estas elecciones no son siempre conscientes y que toman sus decisiones apoyándose en su experiencia profesional, en particular refiriéndose a:

- una tipología más o menos general de procedimientos o errores o performances ya observadas;
- previsiones que pueden hacer sobre el nivel de las performances de sus alumnos. Aún pareciera que toman como referencia categorías de alumnos que se representan como prototipos; comparan algunos alumnos de su clase a alumnos prototípicos. Retomamos aquí la idea desarrollada por Tochon[1]: El profesor no ve sus "verdaderos" alumnos sino prototipos de alumnos;
- diferentes desarrollos observados anteriormente;
- solicitud de ciertos alumnos que toman fácilmente la palabra.

De hecho, los profesores experimentados no toman mucha información de las producciones o las realizaciones de sus alumnos, sencillamente confirman sus previsiones observando algunos alumnos.

El profesor principiante no cuenta con esta experiencia. Nos interesaremos entonces en la manera que éste administra estos imprevistos y en particular a cómo trata de colmar su falta de experiencia intentando tomar información de la clase.
De hecho, nuestro análisis muestra que frecuentemente se encuentra "acorralado" por las peticiones individuales de los alumnos. Durante las fases de búsqueda de

[1] Tochon (1993), « L'enseignant expert », Nathan, Paris

la solución se deja acaparar por los alumnos con dificultad o por la corrección individual de cada alumno. El profesor principiante no piensa en remarcar lo que ve o lo percibe sólo superficialmente.
No logra tomar la distancia que se requiere para realizar una auto observación ni siquiera parcial. Este defecto se explica por el hecho de que al actuar no tiene la disponibilidad para observar, y también por la voluntad de hacer las cosas bien, de ayudar a los alumnos, de prevenir las dificultades.

3-5. La gestión de las fases de síntesis, de balance, de corrección, en general de institucionalización

Esta gestión depende de la información de la cual el maestro dispone y de su proyecto. Nuevamente observamos la frecuencia de los testimonios de los formadores sobre la dificultad de gestión de estos momentos.
Podemos hacer hipótesis semejantes a las que mencionamos anteriormente sobre los modos de gestión de los profesores con experiencia.

Los modos de gestión de los profesores principiantes toman en consideración, en cambio, otros factores:
- el desarrollo previsto
- la presión ejercida por los alumnos (pidiendo por ejemplo pasar a la pizarra)
- los objetivos de aprendizaje de la secuencia.

Tratamos de percibir diferentes tipos de funcionamiento de los profesores practicantes, describiremos algunos aspectos al terminar esta presentación, pero para completar nuestro análisis debemos antes aclarar nuestro sexto eje de análisis.

3-6. La gestión de ciertos equilibrios

Tratamos de analizar la manera en la que los profesores principiantes administran ciertos equilibrios.
Nos interesamos por la gestión de ciertos equilibrios: entre certeza e incertidumbre, entre placer y coacción, entre búsqueda y seguridad, entre fidelidad a una preparación e improvisación controlada, entre individual y colectivo.
Nos detenemos aquí en el funcionamiento del maestro en diversos momentos de la clase. Esto concierne al mismo tiempo las previsiones efectuadas (preparación), la toma de información, el tiempo que se concede la palabra a los alumnos durante diferentes fases, las iniciativas concedidas y las previstas, y en general el nivel y la naturaleza de la participación de los alumnos a las *formulaciones**, *validaciones** e *institucionalizaciones** de las nociones enseñadas.

Para ilustrar el cuarto, quinto y sexto elemento, presentamos la manera en la que un profesor practicante conduce las fases de corrección de ejercicios de cálculo mental.
Para analizar las intervenciones del profesor y de los alumnos, hemos desglosado su discurso (para hacer referencia a él) en unidades significativas de sentido, constituídas por un conjunto de palabras o de frases que no se pueden dividir y que expresan una sola idea.

El maestro se propone corregir dos cálculos efectuados mentalmente: (3 x 8 y 3 x 7). Parece ir tras tres objetivos: probar la memorización de “la tabla del 3”, poner en evidencia medios mnemotécnicos para memorizarla y, por último, mostrarle a los alumnos que es más fácil retener el resultado del producto que de encontrarlo con la ayuda de una adición.
En ambos casos, comprobamos que la manera en la que el maestro administra el diálogo con el alumno conduce a un malentendido.

En la corrección del primer cálculo podemos notar una gestión del diálogo que los organiza en una serie de preguntas y respuestas. El alumno no puede realmente ejercer su derecho a la palabra, a lo sumo puede integrarse al interrogatorio del profesor; no tiene la iniciativa y sus intervenciones son muy cortas. Todas las intervenciones de los alumnos son respuestas a las preguntas que hace el profesor.
El profesor interrumpe frecuentemente al alumno interrogado para confirmar o validar sus declaraciones, o bien para guiar e inducir sus intervenciones.
Dos alumnos se equivocaron, sin embargo sus errores no fueron retomados y posteriormente no se les volvió a interrogar.
En el segundo cálculo, el maestro interrumpe inmediatamente un principio de debate entre algunos alumnos, debate que el mismo profesor había solicitado pero que tiene miedo de no poder dominar, corriendo el riesgo de no dar las explicaciones necesarias al único alumno que parecía necesitarlas.
Para precisar respectivamente las partes tomadas por los alumnos y por el maestro en el diálogo, basta medir la duración y la naturaleza de las intervenciones de cada cual.
Durante las correcciones de cada ejercicio, contamos 33 intervenciones del profesor y 28 intervenciones de alumnos, pero la duración de las intervenciones es muy diferente: sólo dos de las 28 intervenciones de alumnos tienen más de seis palabras.
Podemos pensar que las frecuentes interrupciones (validaciones parciales, preguntas cerradas, instrucciones de continuar, simples apuntes) pretenden reducir la incertidumbre que el maestro presiente en las respuestas de los alumnos. Podemos también pensar que buscan acelerar el ritmo del diálogo, y reducir el tiempo consagrado a los resultados.
Todo tiene lugar como si el hecho de plantearle preguntas a los alumnos correspondiera a un ritual vacío de sentido. Para este maestro, el profesor es el único que verdaderamente puede dar la respuesta correcta. Es sin duda una composición entre las representaciones de este profesor, las dificultades en la

conducción de la clase, su status de sustituto, su falta de experiencia en la conducción de los resultados y la representación oficial de la enseñanza del IUFM (participación del niño en la construcción del saber).
Esto lleva al profesor practicante a dirigir una especie de caricatura de la participación de los alumnos en las fases de evaluación.
Es aún más asombroso si consideramos que esta angustia debería disminuirse por el hecho que el ejercicio es correctamente resuelto y que los alumnos interrogados, que en varios casos se ofrecen voluntariamente para responder, son alumnos que han logrado realizar el cálculo o que han memorizado los productos.
Todo pasa como si el maestro hubiera olvidado este dato.
Esto produce malentendidos. El alumno cuando es interrumpido, trata de adivinar lo que quiere el maestro, reconstruye e improvisa una solución posible, lo cual puede conducirlo a producir un error.
Queriendo reducir el tiempo y la incertidumbre, el profesor a menudo obtiene el resultado inverso: aparición de errores y de incomprensión. Es lo que pasa en la corrección del segundo cálculo cuando un alumno interrogado inventa otro método para tratar de responder al deseo del maestro y retrocede a un cálculo aditivo aún cuando describe un hecho numérico.
Podemos también explicar esta distorciones en los procederes del practicante por el hecho que no tiene el hábito de dirigir un debate o un simple interrogatorio.

Si bien descubrimos aquí acciones llevadas a cabo de manera inadecuada por parte de los principiantes, podemos preguntarnos si este interrogatorio formal a los alumnos durante las fases de balance no es una práctica corriente de los profesores de escuela. No obstante, por lo menos éstos evitan los malentendidos, reduciendo el tiempo del interrogatorio.
Comprobamos que hace falta tomar información, por lo menos conscientemente, de los estudiantes observados con la intención de preparar las fases de balance o de síntesis. La *institucionalización**, cuando ocurre, no parece apoyarse en las acciones y las producciones de los alumnos, aunque se haya considerado en la organización.
Vimos que el practicante se deja guiar por las manifestaciones de los alumnos para decidir quién pasa a la pizarra, a quién interrogar. Parece sufrir la presión de los alumnos en vez de actuar de manera conciente y organizada.
Esto, lo conduce a tratar de canalizar las declaraciones de los alumnos, en vez de otorgarles la palabra.
Esta toma de información no es fácil, requiere tomar distancia respecto a la clase, debe ser más o menos pensada de antemano, debe apoyarse en un cierto conocimiento de los alumnos y sobre todo, para ser lo suficientemente completa, requiere momentos de trabajo autónomo de los alumnos.

Constatamos una práctica corriente: el practicante se dirige a un solo alumno, casi olvidando al resto de la clase. Ciertamente, este también es un defecto de los maestros con experiencia, pero éstos logran instaurar con mayor facilidad reglas de vida en la clase, exigiendo al menos un ambiente relativamente tranquilo aunque no exija la atención de todos los alumnos. Esto está muy lejos de ser el caso para ciertos practicantes.

El análisis de tres entrevistas conducidas por un mismo formador con tres practicantes diferentes confirma la pertinencia de estos ejes, en particular en lo que respecta a la gestión de las *variables didácticas**, la gestión de las fases de *formulación** y de *institucionalización**, la toma de información y la gestión de ciertos equilibrios.

4. OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES SOBRE LAS CONDICIONES DE APROPIACIÓN DE ESTOS GESTOS PROFESIONALES

Cerraré esta exposición con algunas observaciones sobre los modos de apropiación de los gestos profesionales hasta aquí descritos.

El profesor practicante comete otros errores en la segunda parte de la secuencia, luego de una entrevista con el formador durante el recreo.

Podemos remarcar del análisis de esta entrevista y de otra, muy corta, realizada justo después de la segunda parte de la secuencia, durante la cual el practicante quizo aplicar inmediatamente lo que se le había señalado (darle la palabra a los alumnos con el fin de hacer aclarar los procedimientos puestos en ejecución, de tratar los eventuales errores), que el elemento esencial que el practicante retiene se refiere al tiempo que le concede a los alumnos para hablar.

Según el practicante, es su voluntad de corregir este problema que lo conduce al que se le presenta más tarde. La parte esencial de su argumento es: “dejé hablar a los alumnos, como usted me lo dijo. ¡Por eso fue que tomó tanto tiempo!”.

Asistimos aquí a la tentativa de tomar en cuenta observaciones realizadas dentro de un contexto (el comentario acerca de los procedimientos había sido señalado a propósito de actividades de cálculo mental) estableciendo un acuerdo peligroso entre la necesidad institucional de dejar hablar a los alumnos y la voluntad de reducir la incertidumbre que esto genera. Este compromiso termina por constituír un aumento del malentendido entre los alumnos y el profesor. Cabe apuntar que este malentendido peligra, a largo plazo, de hacer que el maestro opte definitivamente por un modo cerrado de gestión porque es más fácil. Es además lo que parece salir a la superficie del diálogo que siguió esta segunda prestación.

Esta interpretación mecánica de los consejos, a menudo comprobada durante las entrevistas, muestra claramente el defecto de una formación demasiado rápida, basada esencialmente en observaciones *in situ* y parciales. La imposibilidad material de describir, de modo suficiente, las prácticas observadas, hace sin duda que el formador caricaturice sus observaciones y no separe los diferentes niveles de su exposición de tal forma que quien sigue la formación retiene sólo los aspectos superficiales del discurso del primero.

Aquí, dejar que los alumnos hablen es hacerles explicar la multiplicación de 18 x 1 para determinar el precio de un objeto que cuesta 18 francos. Los alumnos no pueden hacerlo, de ahí resulta el “encarnizamiento pedagógico” del maestro, las grandes divergencias y, a corto plazo, el riesgo de una negativa a tomar en cuenta los argumentos que se presentan.

Una vez mas vemos que para que este tipo de acción de formación sea pertinente debe poder al menos apoyarse en un haz coherente de observaciones, en un nivel mínimo de conocimientos “teóricos” sobre los procedimientos de los alumnos y sobre las frecuentes idas y vueltas de los diferentes aspectos de la formación.

Estas observaciones nos condujeron en otros trabajos, a tratar por una parte a modelizar ciertas situaciones de formación (particularmente las visitas de los formadores), por otra a poner a prueba un dispositivo de formación que pretendía optimizar un aprendizaje de prácticas que en gran parte se llevaba a cabo entre colegas (observación, imitación, reproducción a groso modo y apropiación de gestos profesionales) que se apoyaba en una enseñanza de elementos de didáctica de las matemáticas y en una observación y un análisis de las prácticas efectivas de los principiantes.

Textos metodológicos

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier (1997)

Este artículo propone tres textos « metodológicos » relacionados a la preparación, al análisis del desarrollo y al balance de una sesión de matemáticas para la formación de profesores de escuela. Se dan argumentos de la construcción y la utilización de estos textos.

Texto 1 : Elementos para construir una sesión de matemáticas y redactar la ficha de preparación (escuela elemental)

Observaciones previas

- *Esta ficha intenta ser una guía para el maestro, para pensar en las diferentes facetas de la preparación de una sesión(o una secuencia : varias sesiones sobre un mismo tema) . No pretende más que eso.*
- *Se presenta bajo forma de ítems (elementos que se deben considerar de manera precisa o preguntas a plantearse).*
  No todos los ítems son necesariamente pertinentes para todas las sesiones. Los estudiamos aquí para las ***situaciones llamadas de búsqueda*** *(para el aprendizaje o la re-utilización de conocimientos aprendidos). Por supuesto, un gran número de sesiones deben también consagrarse a una familiarización sistemática con las nociones abordadas y a un entrenamiento de las técnicas vistas durante las sesiones de búsqueda. Otros, deben permitir evaluar a los alumnos sobre conocimientos (saberes o destrezas) ya construídos.*
- *Para la gestión de la clase de primer año en particular, estos elementos se deben cruzar con los que se presentan en la ficha específica de maternal (la que sigue).*
- *La ficha de preparación,* ***cuya redacción elige cada uno****, explicita las respuestas a algunos de estos ítems. Debe dar el cuadro de referencia de la sesión y brindar una ayuda para la conducción de la clase.*

PRESENTACION DE LA ACTIVIDAD

Objetivos

- Noción matemática o método cuyo aprendizage se prevee lograr a largo plazo.
- Elementos específicos de esta noción o de este método a lograr en la sesión (eventualmente bajo forma de competencias).

- Lugar en la progresión (en relación a los programas y/o en relación a las competencias que los alumnos de la clase han adquirido).

Tipo de sesión
1 - Aprendizaje de una noción (nueva o no)[1], de una técnica (nueva o no), de un lenguaje, de una competencia metodológica,...
2 - O re-utilización de una noción, de una técnica,de un método,...
3 - O familiarización, entrenamiento.
4 - O evaluación.

El estudio que sigue es, particularmente en relación a las sesiones de tipo 1 y 2.

LAS SESIONES DE APRENDIZAJE Y DE RE UTILIZACION DE UN CONOCIMIENTO

Breve descripción de la situación
- Enunciado del problema, juego, estudio de documentos, descripción de un fenómeno,...
- Referencias bibliográficas.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SITUACION

Interés para el alumno (puede ser independiente del aprendizaje)
Porqué él va a comprometerse en la tarea propuesta ?
Placer, desafío personal, deseo de compararse con los otros, curiosidad intelectual, responsabilidad en el compromiso colectivo,...

Análisis para prever las etapas del desarrallo
- *Variables didácticas**. Cuáles son las *variables didácticas** de la situación ? Cómo elegirlas para provocar el aprendizaje que se prevé lograr ? Eventualmente, para gestionar la heterogeneidad ? Para permitir una cierta diferenciación de las tareas, y una síntesis común ?
- Análisis de la tarea del alumno. Cual es la tarea real de los alumnos? Qué procedimientos pueden utilizar (en función de la *variables didácticas**)? Qué modos de *validación** tiene a su disposición (verificación interna de la situación-autovalidación – o validación externa : por el maestro, por la calculadora para controlar los cálculos, por un calcado para verificar un dibujo, etc...) ?
- Elementos de ayuda para diferenciar la tarea en función de las competencias individuales (documentos escritos, material, consejos medodológicos, ...)
- Elementos previsibles de síntesis a los que se orientará la *institucionalización*[2] .
- Posibilidades de extensiones de la actividad (para los más rápidos)[3].

[1] Las sesiones de aprendizaje no se limitan a la primer sesión sobre la noción.
[2] Lo que es importante extraer de la actividad, para el aprendizaje.
[3] Estas extensiones deben permitir profundizar la noción en curso o una re-utilización de nociones ya vistas. En ningún caso se trata de empobrecer la siguiente sesión.

PRÉVISION DU DÉROULEMENT

1 – Organización material de la clase (detallar para cada fase del desarrollo)

Elección del lugar : dentro o fuera de la clase, mesas dispuestas como de costumbre o desplazadas,....

Elección de modos de trabajo : trabajo individual (en cuaderno borrador, ficha, hoja, pizarra,..) ; trabajo en parejas, en grupo (indicar el material de trabajo), colectivo ; justificación de las elecciones.
Si el trabajo es en grupo,
- constitución de los grupos (por afinidad, carácter o proximidad, homogéneos o heterogéneos) preparado por escrito ; *prestar atención de no hacer trabajar juntos, dos alumnos de "caracteres incompatibles"* ;
- repartición de las tareas en el grupo, sea ésta hecha por el maestro o dejada libre ;
- portavoz designado al principio o elegido al momento de la síntesis (por el maestro, por el grupo, al azar)....

Material
- Para el maestro : rol y preparación de la pizarra, otros materiales que son necesarios preparar (sólidos geométricos, documentos ampliados, material de ayuda en caso de bloqueo,...)
- Para los alumnos : qué material a disposición (una ficha o un manual por alumno, para dos, lápiz, material de geometría, un juego de mesa,...) ? Cuándo distribuírlo y/o por quién hacerlo distribuír ? Dónde ubicarlo, eventualmente ocultarlo (para permitir que sea solicitado) ? Cuántos ejemplares prever por mesa ?...
Limitar los riesgos de distracción haciendo ordenar el material que no se utiliza (sacapuntas,..) en los casilleros. Prever el espacio suficiente en las mesas para la utilización efectiva del material.
Prever la utilización de un trozo de paño o una pista para los juegos de dados.Etc....

Estimación del tiempo
- Para la comprensión de la consigna : dicha en calma, dicha nuevamente con otras palabras, reformulada por un alumno, eventualmente simulada,...
- Para los posibles cambios de lugar, desplazamientos del mobiliario, distribuciones de material, recortado o actividades previas, coloreado, encolados,...
- Para las diferentes fases (búsqueda, puesta en común, síntesis),
- Para los eventuales textos escritos (sobre que soporte ?),
- Para ordenar el material,...
Darse a priori, límites superiores de tiempo para las actividades- alumnos...

2 - Plan de la sesión (prever las grandes fases del desarrollo y sus articulaciones)

Lanzamiento de la actividad
Cómo hacer que los alumnos se interesen por ellos mismos en el problema propuesto por el maestro ?
Puesta en escena, simular un juego con algunos alumnos, cuento,....

Consignas
Las consignas pueden ser dadas en forma oral, escritas en la pizarra, escritas en una hoja, esquematizadas,...
Si son orales,
- cortas y precisas (si es eso posible),
- el maestro las debe examinar con atención, formularlas de diversas maneras,
- escribirlas en la ficha de preparación, verbalizarlas para practicar oralmente .

Prever de hacerlas reformular por al menos dos alumnos.

Fase de búsqueda
- Dejar a los alumnos el tiempo para que comiencen y durante este momento no circular por la clase.
- Prever, en caso que sea una actividad en grupo, un tiempo corto de búsqueda individual.
- Prever observar a los alumnos (si es necesario, disponer de una grilla para registrar los procedimientos por alumno o grupo de alumnos)
    - para brindar ayuda en el momento oportuno a los que la necesitan,
    - para elegir los alumnos cuyas proposiciones serán objeto de la puesta en común.
- Prever las intervenciones posibles durante esta fase de búsqueda (relanzamiento de la actividad, precisiones sobre la consigna), ***pero, cuidarse de inducir las respuestas a las preguntas planteadas !***
- Prever de dar, a los que terminen antes, las prolongaciones previstas en el análisis previo, permitiendo así a los otros continuar sin perturbaciones.

Puesta en común de los procedimientos y/o de los resultados : *escucha colectiva, la palabra es de los alumnos.*
- Con la ayuda del análisis previo y de la observación de los alumnos, elegir los procedimientos exactos o equivocados[1] que serán el objeto de la puesta en común.
- Decidir el orden de presentación mas adaptado al objetivo que se pretende alcanzar[2]
- Estimular un intercambio, incluso un debate colectivo, sobre la validez, la economía,... de las diferentes producciones.

---

[1] En el momento de la fase de búsqueda, el maestro no juzga la validez de las proposiciones de los alumnos. Sino, es imposible solicitar a un alumno, que presente delante toda la clase una solución errónea.

[2] La escritura de las producciones de grupo en un afiche (transparente si es posible) o la restitución simultánea a la pizarra de los grupos (por varios portavoces), facilita la gestión de la puesta en común y minimiza la duración de est fase.

Desconfiar de las prolongadas correcciones colectivas que solo son en beneficio de los alumnos que ya saben.

Síntesis : *escucha colectiva*.
El maestro identifica, con los alumnos, los elementos importantes encontrados a la ocación de la actividad : por ejemplo procedimientos eficaces, una escritura matemática que fuera utilizada por todos, una construcción geométrica recordada,...
Considerar el eventual trazo escrito indivivual, como posible relato de la situación, (por ejemplo, en el cuaderno, cada alumno anota el texto del problema y el procedimiento que mas le agrada).

Institucionalización* (posible)
El maestro extrae lo importante para el "aprendizaje del día", comenzando así una descontextualización.
Si la actividad lo permite, redactar el resúmen que los niños tendrán que copiar y retener (estando siempre preparado para aceptar otras formulaciones- correctas- de los alumnos).

Observaciones
- Prever algunos ejercicios de aplicación.
- Dividir la sesión en varias fases para gestionar mejor el tiempo y en particular poder detener la sesión antes del final (particularmente si el tiempo fué mal evaluado).

Una evaluación individual "apenas finaliza la sesión" no aporta mucha información : es preferible diferirla.

BREVE BALANCE DE LA SESION

De parte de los alumnos
- Participación : los alumnos estuvieron, interesados, aburridos, exaltados ? Porqué ?
- Trabajo matemático : qué hicieron concretamente los alumnos durante la sesión ? Tuvieron la ocasión de pensar, formular hipótesis, validar sus razonamientos? Aprendieron cosas ? Se ejercitaron en un dominio ? *No confundir una agradable participación con aprendizaje real.*
- Errores de los alumnos : qué errores han cometido los alumnos ? Puede explicar estos errores, determinar hipotéticamente las causas ?
    - Son errores (numerosos) de conocimientos considerados como adquiridos ? Será necesario prever un trabajo específico con toda la clase.
    - Están ligados al aprendizaje en curso ? No hay que preocuparse porque forman parte del aprendizaje normal.
    - Están localizados ? Entonces ver a los niños implicados.
    - Son pocos significativos ? Aguardar un nuevo trabajo para confirmar.

De parte del maestro
- Su objetivo le parece posible de lograr ? Porqué ? Cómo va a verificarlo ? Es demasiado temprano para decirlo ?
- Analiza las posible modificaciones "sobre la marcha", sus cambios imprevistos y las causas de lo mismos.
- Usted cometió errores ? De qué tipo (contenido, método, gestión del tiempo, reacciones de los alumnos,...) ?
- Rever lo que puede modificar para lograr mayor eficacia : las consignas, el orden de las diferentes fases, las elecciones en relación a las *variables didácticas**, la organización material, la gestión de la puesta en común,...
- Cómo toma en consideración ésta sesión en relación a la previsión de la siguiente : continuación de la preparación prevista, modificaciones (en qué sentido?), determinación de lo que se debe retomar, lo que sea para completar, los elementos para desarrollar.

OBSERVACIONES GENERALES

Toda sesión de matemáticas (o casi todas) debe contener "cálculo mental ", llamado sobre todo cálculo razonado. Este cálculo permite una actividad cotidiana, generalmente bastante breve (salvo si forma parte de la situación prevista), cuyo objetivo es permitir a los alumnos, por una parte familiarizarse con los números y sus propiedades, memorizar resultados y por otra, construirse métodos de cálculo y/o de razonamiento, particularmente por confrontación –moderada por el maestro- con los de sus camaradas.

Introducir **material** en una sesión de matemáticas puede tener dos finalidades :

1 – conducir a los alumnos a efectuar previsiones, a anticipar el resultado de sus acciones[1]

2 – permitir a los alumnos, validar sus resultados mostrando el objeto (por ejemplo en geometría) o efectuando la manipulación.

No se trata de solicitar a los alumnos de que efectúen simples constataciones.

Si la sesión se apoya en un documento pedagógico o un libro del maestro que presenta los objetivos y el desarrollo previsto, el trabajo de preparación consiste en justificar las elecciones, en adaptar la situación a la clase (integración para el avance, consideración de las competencias de los alumnos, del medio escolar,...)

---

[1] Por ejemplo, durante el juego de la oca, un niño en la casilla 13 lanza el dado y obtiene 5 : antes que mueva el peón el maestro le pide que diga a qué casilla piensa llegar, espera la respuesta 18, o 13+5...

EJEMPLO DE GRILLA

Recordemos que para preparar una puesta en común eficaz durante una situación de búsqueda, es necesario
- haber realizado un análisis a priori de esta situación intentando prever los procedimientos que los alumnos son susceptibles de poner en ejecución e identificando claramente los saberes en juego que se desean remarcar al momento de la síntesis,
- llevar a cabo una observación bastante fina de los alumnos en el curso de la sesión.

Para esto, el maestro puede recurrir al uso de una grilla que le permita tomar el máximo de informaciones de manera organizada, a fin de poder explotarlas y lo mas rápido posible.

Esta grilla, puede presentarse en forma de una tabla de doble entrada : los nombres de los alumnos o de los grupos de alumnos figuran en las diferentes líneas. El maestro prevé una columna para los procedimientos previstos y algunas columnas para los procedimientos que él no habría pensado, él prevé igualmente una columna para los errores que identificará, como también una columna para señalar los alumnos que nombrará al momento de la puesta en común.

Durante la fase de búsqueda el maestro circula entre los niños y señala con una cruz el o los procedimientos del alumno (o el grupo de alumnos), sea que estos procedimientos lleguen al final o no ; el maestro agrega un signo particular cuando el procedimiento utilizado permite lograr un resultado . Realiza un relevamiento de los errores mas salientes.

- Las observaciones que se llevan a cabo y que se anotan permiten al maestro llamar para la puesta en común, a los alumnos que han utilizado variados y diferentes procedimientos (que hayan logrado un resultado o no) y a los alumnos que han cometido errores típicos (siempre que el maestro no haya remarcado el error en su procedimiento). Para la puesta en común, los alumnos pueden sea exhibir sus trabajos si han utilizado hojas grandes, sea escribirlos nuevamente en la pizarra, sea exponerlos en forma oral.

- Esta presentación permite también al maestro, diferenciar si es necesario, los ejercicios de entrenamiento en función de las dificultades encontradas por cada uno.

- Estas fichas de observación reagrupadas brindan al maestro una « imágen de movimiento » de su clase : son un medio de apreciar el nivel de apropiación de los diferentes saberes y destrezas, de identificar las evoluciones, los progresos, las dificultades persistentes de los diferentes alumnos.

Ejemplo de grilla de observación para el problema dado a los alumnos de 2do año. Una sala de espectáculos posee 12 filas de 8 asientos, de cuántos lugares dispone la sala ?

Procedimientos previstos (análisis a priori) :
- P1 : dibujo de la sala y numerar uno a uno los asientos
- P2 : dibujo de la sala y numerar por filas
- P3 : adición reiterada por filas
- P4 : adición reiterada por columnas
- P5 : designación de los lugares en la forma 12×28 y utilización de la calculadora

.	P1	P2	P3	P4	….		Errores	Puesta en común
María								
Kévin								

Para los otros tipos de sesiones

● LAS SESIONES DE ENTRENAMIENTO

Las sesiones de entrenamiento son numerosas y necesarias para que los alumnos instalen y refuercen las adquisiciones anteriores. Sin embargo no pueden reemplazar las sesiones en que las situaciones propuestas permiten a los niños **construir** concretamente conocimientos o **reorganizar** conocimientos ya construídos.
Los puntos importantes de la preparación de las sesiones de entrenamiento son la elección de los ejercicios que se van a proponer y los modos de corrección que se deben prever.

La elección de los ejercicios

- Los ejercicios propuestos implican nociones o técnicas ya trabajadas en las sesiones de tipo **1** y **2**, para reforzar competencias individuales de las cuales el maestro ya ha podido controlar de manera formativa la adquisición parcial.
- Se organizan en función de competencias necesarias para lograr la tarea solicitada : los ejercicios de "aplicación simple" son siempre los primeros.
- Están mezclados con algunos ejercicios que no dependen de la « lección del día » , para mantener en alerta las aptitudes de análisis de los alumnos.
- Una diferenciación de los enunciados en función de las competencias de los alumnos puede ser prevista en beneficio, por ejemplo bajo las siguientes formas :
    - enunciados iguales, pero con valores numéricos diferentes (para reducir las dificultades de cálculo), material de soporte diferentes (papel liso o cuadriculado), elementos de ayuda diferentes (por ejemplo la utilización de una calculadora)...

- énunciados diferentes, dibujos diferentes para reproducir, adaptados al nivel de cada uno, para trabajar competencias diferentes...

La elección de los modos de corrección

Se recomienda evitar las correcciones colectivas, porque generalmente no mobilizan la atención de los alumnos a los que están destinadas y frecuentemente no aportan elementos nuevos a los que han obtenido logros en la actividad. Entonces, es preferible prever otros medios de corrección.

- Puestas en común por pequeños grupos, con una regulación interna del grupo y un llamado al maestro en caso de desacuerdo, pueden resultar eficaces.
- « Autocorrecciones » con una ficha correctiva, un calcado,…que permiten a los alumnos constatar el error, eventualmente encontrarlo, benefician particularmente a los alumnos mas rápidos.
- Correcciones individuales (o en pequeños grupos), con el maestro, son necesarias para los alumnos que tienen mas dificultades.

● LAS SESIONES DE EVALUACION

En todos los casos, es necesario controlar bien las competencias que se evalúan a priori para aclarar los elementos pertinentes de un éxito o de un fracaso en esta evaluación.

- Si se trata de una evaluación **de inicios** del curso, permite al maestro tomar indicios de los conocimientos anteriores de los alumnos, conocimientos sobre los que puede apoyarse para lanzar su progresión. Notemos que tal evaluación puede realizarse como una sesión de aprendizaje, para fijar la progresión de las competencias reales de los alumnos. Entonces, la evaluación juega el rol de punto cero en la noción o la técnica prevista.

- Si se trata de una evaluación **de fin** del curso de aprendizaje, debe implicar competencias que han sido realmente trabajadas en los alumnos.

Las sesiones de evaluación **de fin** de aprendizaje se deben prever de manera diferida en relación al tiempo de aprendizaje, para evaluar adquisiciones concretas y reales y no conocimientos memorizados a corto plazo. La preparación de estas sesiones es próxima a las de entrenamiento, siendo lo importante aquí la elección de los ejercicios, respetando los siguientes puntos :

- los enunciados de estos ejercicios no son ambigüos ; la noción que debe evaluar la maestra está realmente en juego en la resolución ;
- los ejercicios implican nociones trabajadas en el momentos de las sesiones de tipo 1 y 2 et sobre las que los niños se han entrenado durante las sesiones de tipo 3 ;

- en los ejercicios, las dificultades están graduadas, para permitir localizar la dificultad en caso de fracaso[1];
- para evitar el efecto de comunicación entre los alumnos demasiado próximos, es posible alternar los ejercicios (por ejemplo cambiando los valores numéricos) entre dos vecinos vigilando de dar ejercicios con dificultades similares.

[1] Es posible prever un modo de evaluación diferenciada por la elección de ejercicios diferentes para los alumnos que han realmente progresado pero que no están en el mismo nivel de comprensión.

Texto 2 : Elementos para construir una secuencia de sesiones en la dominante matemática y redactar la ficha de preparación (escuela maternal)

Observación previa

- *Concebida con el mismo espíritu que la precedente, esta ficha intenta remarcar especificidades de las actividades en la dominante matemática del 1er ciclo (alumnos de 6 y 7 años).*
- *Para la clase de la gran sección de maternal(alumnos de 5 años) en particular, estos elementos se deben cruzar con los presentados en la ficha específica de 2do y 3er ciclos(alumnos de 8 a 12 años).*
- *Como la precedente, esta ficha intenta ser una guía para el maestro, para pensar en las diferentes facetas de la preparación de una sesión (o de una secuencia de sesiones sobre un mismo tema) sin otra pretención.*

OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA ORGANIZACION DE LA CLASE

♦ **Modos de organización**

El maestro dispone a priori de varios modos de organizar el grupo-clase.

- Modo colectivo :

Los niños se sientan en el rincón reagrupamiento, instalados alrededor del maestro, en sillas o bancos a fin de evitar gesticulaciones sobre el tapis. Ningún niño debe estar sentado sobre las rodillas del maestro. El maestro puede ver a todos a la vez. El niño que perturba la clase puede ser momentáneamente excluído del grupo (no de la clase!) : en este caso, acuerda con el maestro que podrá regresar al grupo cuando se haya calmado. El maestro teatraliza lo máximo posible para mantener la atención, solicita la participación de los alumnos, retoma, eventualmente reforma, las proposiciones de los alumnos.

- Modo taller

Los niños se reparten en grupos por mesas, por talleres. El maestro se ocupa particularmente de un taller (incluso de dos), los otros talleres son autónomos, funcionan con tareas mas habituales, mas conocidas por los niños. El maestro puede, entonces, observar específicamente a los niños del taller seleccionado.

Los talleres pueden presentar dominantes disciplinarias[1]. Un cambio en la semana o mas, permite que todos los niños frecuenten todos los talleres.

En el taller, la tarea de los alumnos puede ser **individual** (están reagrupados, pero deben organizarse para la utilización del material), o una tarea **de grupo**, que los motive a observarse, hablar, escucharse, controlarse los unos a los otros.

El maestro puede entonces :

- sea dirigirse a un niño en particular : lo incita a formular lo que ha hecho o , claramente para los mas pequeños, les ofrece una verbalización "en espejo", que corresponde a una "puesta en palabras" de la acción del alumno que no puede

[1] Sin embargo esta repartición puede variar durante el ciclo. Para los niños de 5 a 6 años particularmente, todos los talleres de la sesión pueden ser de dominante matemática.

aún expresar por sí mismo. Estimula a los mas grandes a enriquecer sus procedimientos con preguntas apropiadas o dificultades evolutivas ;
- sea dirigirse al grupo del taller incitando a los niños a entrenarse los unos a los otros : por ejemplo, el maestro remarca el procedimiento de uno, lo hace explicar por éste para intentar comunicárselo a los otros.

Los rincones organizados en la clase (rincón cocina, rincón muñeca, rincón libros, rincón lego, rincón arena,...) ofrecen también talleres posibles, siendo mas utilizados por los mas pequeños. Los accesos a estos rincones, sin embargo deben estar regidos por reglas : en el rincón de cocina no mas niños que delantales disponibles, ídem para los otros, dejar nuevamente en su lugar los objetos utilizados,... Estas reglas pueden ser recordadas regularmente durante un momento colectivo, sobre todo si son mas aplicadas. Ellas están siempre justificadas delante de los alumnos.

- **Los diferentes espacios**

El maestro dispone de diferentes espacios que llaman la atención de los alumnos de manera diferente.
- El rincón reagrupamiento siempre llama la atención ; los momentos de reagrupamiento corresponden a tiempos de escucha y de comunicación, sobre todo del maestro hacia los alumnos.
- Los diversos rincones que se instituyen en la clase representan sobre todo rincones de libertad, donde el niño, sea solo, sea con otros, juega su propia historia.
- Los talleres demandan una cierta concentración, pero al ritmo del alumno.
- Los espacios fuera de clase (sala de juego, patio, pasillo, sala de recepción,...) ofrecen un lugar para actividades colectivas o actividades en taller. La “salida” de la clase necesita una cierta organización : cuando el reagrupamiento precede la « salida », el maestro indica las reglas de desplazamiento (desplazarse de a dos, dándose la mano, el dedo sobre los labios, o cantando en voz baja o contando en voz baja...), las tareas previstas, así como la disposición del grupo-clase que se debe adoptar en el otro lugar.

- **Los cambios de « ritmo »**

Es tarea del maestro, alternar atención colectiva, atención individual, tranquilidad, hacer mover a los alumnos proponiendo cambios de rincones, eventualmente, cambios de lugar. Pensar en estas alternancias forma parte de la preparación de la jornada.
Los cambios de actividad, que de manera frecuente se marcan para ordenar las cosas, retornar a un mayor silencio, pueden hacerse con modulaciones de la voz del maestro : por ejemplo
- con una voz cantada: "hay que ordenar todo", para significar el fin de la fase de recepción del inicio de la mañana,
- para calmar a la clase, siempre con voz cantada : "hoy hay demasiado ruido en la clase ",
- para traer nuevamente la atención, cantar o recitar juntos una canción conocida, si es posible mimada...

LAS ACTIVIDADES DE DOMINANTE MATEMATICA

> "*En la medida que toda secuencia pedagógica quede, desde el punto de vista del niño, como una situación rica con múltiples posibilidades de interpretación y de acción, pone siempre en relieve varios dominios de actividades sino todos. Para el docente, estos diversos dominios se aclaran por sus conocimientos disciplinares. Organizando las actividades, definirá los dominios en función del objetivo fijado* ."

Extraído de La Escuela Maternal, *Programas de la escuela primaria*, Direction des Ecoles, 1995

Las actividades de dominante matemática se inscriben en esta problemática. Los campos matemáticos de la escuela maternal se comparten entre las actividades lógicas (clasificaciones, seriaciones,…), la aproximación al número, la ubicación en el espacio, la ubicación en el tiempo, la aproximación de las dimenciones y de las medidas, el reconocimiento de las formas.

- **Los momentos de las matemáticas**

A priori existen, en la vida de la clase, tres ocaciones de hacer hacer matemáticas a los alumnos :

- durante las actividades rituales (frecuentemente luego de la recepción de la mañana, por ejemplo el tomar lista, la fecha en el calendario, etc.)
- durante las actividades funcionales (por ejemplo para determinar grupos mas o menos equitables de niños para los talleres de EPS, para preparar un vaso de leche por niño en la mesa de sus camaradas, para distribuír las bufandas de los equipos, etc.)
- durante las actividades construídas específicamente por el maestro con intenciones pedagógicas bien precisas, por lo tanto, a priori mas artificiales en la historia de la clase : por ejemplo un nuevo juego,... En este caso el maestro elige una introducción destinada a obtener la adhesión de los alumnos a la tarea (por ejemplo un cuento mimado, para hacer como el héroe de una historia, etc). Pero estas actividades construídas pueden consistir también en una explotación detallada de actividades funcionales o rituales (por ejemplo a partir de la toma de lista de la mañana[1]).

[1] Houdement C. ; Peltier M.L., *Du rite de l'appel...à des activités mathématiques en grande section* en Grand N°51, pp. 13 à 23, 1992-93

♦ **Matemáticas y juegos**
Es interesante no dejar que los alumnos utilicen solos un juego nuevo que el maestro piensa explotar para el aprendizaje. Este juego queda oculto hasta el momento que el maestro decide presentarlo, definir las reglas y hacer jugar bajo su control, por series de talleres sucesivos a los alumnos de la clase. Cuando el juego se ha explotado lo suficiente como juego de aprendizaje dirigido, se transforma en juego libre, a disposición de los alumnos.
Se recomienda hacer evolucionar durante el año el conjunto de juegos a disposición de los alumnos : algunos juegos desaparecen y otros aparecen, desarrollan otras competencias.

PREPARACION DE LAS SESIONES CONSTRUIDAS

La preparación concierne (de manera frecuente), simultáneamente varias sesiones, en la medida que la actividad, para implicar a todos los alumnos de la clase, deberá circular varios días. La actividad « faro » y los diversos talleres pueden ser los mismos durante varias sesiones.

Puesta en escena de la reflexión
- Delimitar en un campo matemático (aproximación del número, actividades lógicas, ubicación en el espacio o en el tiempo,…) ponerlo en relación (o no) con actividades rituales o funcionales, o el proyecto de clase o de la escuela,...
- Prever las diferentes facetas de este tema, las competencias a construír sobre este tema, teniendo en cuenta las ya adquiridas por los alumnos.
- Identificar con precisión las competencias a construír . Elegir una (o varias) actividad(es), situación(es) « faro », que permitirá(n) desarrollar las competencias previstas :
    - juego colectivo,
    - actividad colectiva alrededor de una situación problema,
    - juego de n niños,
    - actividad de grupo alrededor de una situación problema.
- Prever las actividades de entrenamiento sobre el mismo tema, poniendo en juego una o varias competencias trabajadas previamente.

Descripción resumida
- Finalidad del juego, de la situación, para el alumno...
- Referencias bibliográficas y adaptación al projecto pedagógico y cognitivo de la clase.

Material
- Para el momento colectivo :
    - preparar el material para la presentación colectiva de la actividad « faro », verificarlo, clasificarlos para dejar solamente elementos que permitan entrar mas rápido en el sujeto ;

- elegir la introducción colectiva de la actividad (un cuento, un recitado, un juego, la actividad eventualmente simulada con algunos niños delante de todos) ;
- elegir la disposición de los alumnos para la escucha colectiva, elegir eventualmente los alumnos para la simulación de la actividad delante de todos, etc.) ;
- preparar las listas de repartición de los niños por taller (puede haber diversas formas para estas listas).

- Para el trabajo de taller
    - Elegir una repartición espacial de los talleres para poder ver la clase quedándose en un taller , para permanecer lo mas cerca posible de los alumnos mas revoltosos...
    - Prever el material a disposición (un ejemplar para tantos niños, un número suficiente, pero no demasiado grande, de peones, de cartas,…para el grupo), Ya dispuestos en las mesas o a distribuír por quién y cuándo?
    - Prever el reconocimiento de los eventuales trabajos (nombre-fecha) y su ubicación (fichas, carpetas o casilleros individuales).
    - Preparar una ficha con el nombre de los niños para anotar las observaciones durante la sesión.

Breve análisis previo

- Qué es lo que está en juego para el alumno ?Cómo hacer para que entre en la tarea, para interesarlo ?
- Análisis de la tarea del punto de vista del alumno.
- *Variables didácticas** previsibles.
- Comportamientos y/o estrategias previsibles, infuenciadas por supuesto por el conocimiento que se tiene del alumno (este análisis permite preparar una ficha de observación de los alumnos).
- Elementos de ayuda posibles.

-Cómo se termina la actividad ? Quién dice “ los logros” ?
- Fases y tiempo de la actividad.
- Posibilidad de prolongar la actividad.

UN EJEMPLO DE PREPARACION DE VARIAS SESIONES (Y VARIOS DIAS)

Sesión 1 : *lanzamiento de la actividad « faro » (fase colectiva)*

<table>
<tr><td>Para una actividad colectiva o un juego colectivo.</td><td>Para una actividad de grupo en relación a un problema.</td><td>Para un juego de n niños</td></tr>
<tr><td>Presentar la actividad colectiva, la consigna bien chequeada, reformulada, las reglas, la finalidad. Presentar el material posible, hacerlo observar, describir. Simular eventualmente el inicio con algunos niños.</td><td>Presentar el problema, el material, la consigna durante el reagrupamiento.</td><td>Presentarlo colectivamente durante el reagrupamiento : hacerlo observar, describir, presentar las reglas, precisar la finalidad de lo que está en juego.
Simular el inicio de una parte con algunos niños.</td></tr>
<tr><td colspan="3">En cada caso, prever las consignas (anotarlas, decirlas en forma oral, variar el vocabulario). Hacerlas reformular por los alumnos.</td></tr>
<tr><td>El maestro está presente con todo el grupo.</td><td colspan="2">Indicar que sólo un grupo de niños realizará ahora esta actividad, pero que todos pasarán en curso de la semana por este taller.
Presentar rápidamente los otros talleres ya conocidos, y que los niños deberán recorrer de forma autónoma.
Lanzar la repartición de los niños por taller : en PS(pequeña sección: niños de 3 años), el maestro puede nombrar a los alumnos. En GS (gran sección : alumnos de 5 años), puede preparar listas escritas o grupos de etiquetas y, sea encargar a los alumnos de leerlas, sea dejar a los alumnos repartirse según estas listas en los diversos talleres.</td></tr>
</table>

La repartición de los niños por talleres deber estar prevista, anotada en el conjunto de las sesiones, de manera de hacerlos rotar. Algunos alumnos pueden pasar varias veces por el mismo taller, sea para retomar una tarea no terminada, o mal comprendida, sea para jugar el rol de conductor del juego en un grupo de niños mas tímidos

Continuación (fase colectiva o en taller)

Trabajo colectivo	Trabajo en talleres
Relanzar la actividad, aportar complementos de información si es necesario , realizar puestas a punto. Solicitar la máxima cantidad de niños. Anotar en una ficha preparada con anticipación las observaciones : estrategias utilizadas, competencias puestas en ejecución, dificultades encontradas... Hacer evocar al final de la sesión lo que se ha hecho. Hacer ordenar el material por los niños (salvo el material pesado)	Estar disponible para un taller (al máximo dos). Los otros talleres ya conocidos, o mas libre, circulan de manera autónoma. Pasar de tiempo en tiempo para verificar. Para el taller nuevo : hacer formular las consignas, controlar el respeto de las reglas, hacer verbalizar las acciones o las desiciones (o aportar una verbalización « espejo » del maestro o de otro niño), relanzar la actividad si es necesario,... Anotar en una ficha preparada con anticipación las observaciones : estrategias utilizadas, competencias puestas en ejecución, dificultades encontradas,... Prever prolongaciones o juegos libres para los que han terminado. Hacer ordenar el material utilizado.

Prever un balance

- Formular hipótesis sobre los orígenes de las dificultades encontradas (la ficha de observación es una potente herramienta de análisis) :
    - por los niños, para entrar en la tarea (interesarse, comprender la consigna), para resolver el problema propuesto,...
    - por el maestro, para conducir el grupo, para recuperar la escucha colectiva...
- Intentar remarcar las decisiones tomadas en el curso de la sesión y analizarlas :
    - decisiones de tipo colectivo (los cambios en relación a la preparación),
    - decisiones de tipo individual (los llamados al orden, las ayudas y la contención,...)
- Hacer proposiciones de modificación.

Texto 3 : Realizar el balance de su sesión

Al finalizar una sesión que el maestro ha llevado a cabo concretamente, realiza un rápido balance de su trabajo y el de sus alumnos. Deseamos exponer aquí una lista de ítems para un balance detallado. Este conjunto de tablas pretende ser una ayuda para establecer el balance de una sesión de matemáticas en la escuela elemental. Se podrán tomar algunos elementos para una sesión de escuela maternal, pero de la manera en que se exponen, estas tablas están mas adaptadas a la escuela elemental.
Cual es objetivo de este *análisis a posteriori** ?
- por una parte, *a corto plazo*, permite tomar indicadores en el desarrollo de la sesión para hacer un balance y ajustar la preparación de la sesión siguiente;
- por otra parte, *a largo plazo*, identificar los elementos que pueden comprometer una sesión y poder modificarlas a priori para una sesión del mismo tipo apoyándose en soportes didácticos.
De alguna manera, esta grilla intenta remarcar los indicadores de « buen desarrollo de la sesión » tanto para la gestión del grupo-clase como para el aprendisaje previsto.

Modo de empleo de las tablas
La sesión es dividida en cinco fases, clásicas de la división a priori de sesión :
- lanzamiento de la actividad
- desarrollo de la actividad
- conclusión de la actividad
- síntesis de la sesión
- *institutionalización** posible de la sesión.

Para cada fase, una tabla de cuatro columnas reagrupa los indicadores de observación y de análisis. Las dos primeras están basadas en la observación[1] de los alumnos por el maestro durante la sesión concreta y en lo que resume sus propias reacciones e impulsos sobre el desarrollo. Las dos últimas corresponden a dos etapas de análisis :
- la primera corresponde a un análisis inmediato, luego de la sesión, de las posibles modificaciones en relación al proyecto inicial ;
- la segunda intenta establecer una relación de estas modificaciones con cuestiones didácticas esenciales.

[1] Se trata de una observación en partes y no contínua, como la que podría ser practicada por una persona exterior al sistema constituído por el profesor y el grupo-clase. Resultará, entonces sensible a los picos de observación, a los indicadores los « mas llamativos".

Lanzamiento de la actividad			
Indicadores de observación		**Elementos del análisis posterior (volver a la preparación)**	
Indicadores tomados de los alumnos	Reacción del maestro en la clase	Análisis superficial	Detallado
Verifiqué la comprensión de la consigna ? Cómo : - haciéndola reformular por los alumnos, - constatando que los alumnos entran directamente en la tarea ?... La consigna es - comprendida directamente, - objeto de discusión, - objeto de negociación ?	Si la consigna se comprendió mal : - intenté diversas reformulaciones, -dí ejemplos en forma oral, escritos en la pizarra, cuáles ? - puse en funcionamiento un método, en forma oral, descripto en la pizarra, cuál ? - vinculé la actividad a la lección precedente (« recuerden, es como la última vez »), - cambié el modo de trabajo (de a dos en lugar de trabajo individual…) - etc.	La consigna era : - satisfactoria, - demasiado extensa, - mal formulada... ? El cambio sobre la marcha a : - desnaturalizado la tarea, - provocado una negociación hacia la simplificación (facilitó o indujo la respuesta), - hizo comenzar como se buscaba-... ?	El alumno es responsable de su proyecto o solo ejecuta ? La tarea tiene sentido ? El alumno puede tener una idea de la tarea terminada ?

<table>
<tr><td>Qué proporción de los alumnos se puso realmente a trabajar ?
Luego de cuánto tiempo ?</td><td>Intervine al inicio
- indicando nuevamente la consigna,
- dando un indicio de solución, de método,
- haciendo mostrar (al inicio) a un alumno, la solución en la pizarra,
- etc.</td><td>Qué tiempo otorgué a los alumnos sin intervenir ?
-Un tiempo suficiente, demasiado corto ?
Tuve la angustia del silencio?
Los alumnos realizaron la búsqueda durante bastante tiempo ?</td><td>Existe realmente un problema para el alumno ?
Tienen los alumnos, el tiempo para entrar en el problema ?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Desarrollo de la actividad</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementos de observación</td><td colspan="2">Elementos del análisis posterior (volver a la preparación)</td></tr>
<tr><td>Indicios tomados de los alumnos</td><td>Reacción del maestro en la clase</td><td>Análisis superficial</td><td>Detallado</td></tr>
<tr><td>Los alumnos toman iniciativas, por ejemplo :
- tomar material,
- solicitar material,
- esquematizar el problema,
- armar una tabla,
- etc.</td><td>- anoté las dificultades,
- resumí los procedimientos,
- comprendí todas las proposiciones, los errores,
- observé a todos los alumnos de la misma manera,
- formulé juicios de valor,
- animé a los alumnos,
- detuve a los alumnos,
- interrumpí tentativas…</td><td>Observé de forma negativa, desconfiada a priori a algunos alumnos ?
Tuve preferencias visibles por otros ?
Hay alumnos que no ví, no observé ?</td><td>La tarea se adapta a las competencias
- de los alumnos en general,
- de ciertos alumnos ?
Una diferenciación
- de la tarea a priori,
- de las ayudas, es posible ?
Lo que está en juego para los alumnos, para ciertos alumnos, es real, ausente, mal evaluado ?</td></tr>
</table>

Algunos alumnos quedan bloqueados.	- Les brindé una ayuda individual, oral, escrita ...? - Los puse en relación con los otros mas avanzados ? - Retomé las explicaciones solo para ellos, colectivamente ? - Dí la palabra a otros para que mostraran los avances de sus trabajos ? ...	Porqué había una - dificultad en entrar en el problema (volver a la consigna, la naturaleza de la tarea, la idea de la tarea terminada…) ? - Dificultad en concentrarse ? - mala repartición de los alumnos ?	Qué ayudas se podrían haber previsto a priori ? Esto sería posible, interesante de prever una diferenciación de la tarea apriori ?
Algunos niños están exaltados.	- Los amenacé de sanción ? - Los sancioné ? - Los asocié con los mas tranquilos ? - Les brindé una ayuda individual en forma escrita ? - Los asistí oralmente ?	El momento de clase era propicio para tal trabajo? (regreso de la piscina, un accidente en el patio. ..)	
Algunos niños terminaron antes que los otros. Perturbaron la clase, ayudaron a los mas lentos…? Se ocuparon en otra cosa (lectura, juego,...) ?	Corregí el trabajo de los mas rápidos ? Expresé algo sobre los resultados ? Esto es hábil ? Eficaz para ellos, para la calma de los otros ?	Fueron previstas prolongaciones en la preparación ?	Que medios están disponibles para administrar este tiempo »de mas » para ciertos alumnos ?

Conclusión de la actividad			
Elementos de observación		**Elementos del análisis posterior (volver a la preparación)**	
Indicios tomados de los alumnos	Reacción del maestro en la clase	Análisis superficial	Detallado
Los alumnos estaban preparados para una conclusión ? (medida de interés para la actividad, del grado de cansancio, del grado de logros,....). Cuál fue la calidad de la escucha? (atenta, difícil, nula)	Qué elecciones hice ? - **Propuse una corrección** yo mismo. - Siendo colectiva, escrita, oral ? Presentaba una o varias respuestas ? - Siendo individual #bajo forma de autocorrección para los alumnos (ficha corectiva, calcado,...) #bajo forma de auto corrección cruzada para los alumnos.	La corrección es útil ? Porqué esta desatención ? - Cansancio (inclusive duración de la actividad, momento de la jornada,...), - desinterés luego de la búsqueda, - elementos de protestas ?	
Cuál fue el compromiso de la clase ? - preguntas - solicitud de explicaciones - incomprensiones - discusiones....	- **Propuse una puesta en común** que se apoya en : - la exhibición de los trabajos - una presentación oral, - una presentación escrita en la pizarra, de todos, de algunos (cómo elegí los alumnos que pasan : al azar, según sus procedimientos, los alumnos motores, los que tienen dificultades... ?)	La gestión era adaptada a los alumnos, a la situación, a la hora del día,... la sesión debía dar lugar a una puesta en común o a una corrección (por ejemplo si no hay varios procedimientos, o si solo uno a encontrado la solución, o si solo unos pocos han llegado al final.).	Reflexión sobre la puesta en común : - elección del material de soporte, - elección de los alumnos que intervienen, el número y el orden de las intervenciones (que está en función de las observaciones efectuadas durante el desarrollo), del rol que el maestro otorga a cada uno.

Los errores fueron delimitados por los alumnos ? Los explicaron ? Quién validó (o invalidó) las proposiciones ? Los alumnos tuvieron realmente la palabra ? Los alumnos se vieron implicados en la puesta en común, aunque no habían pasado a la pizarra ?	Durante la puesta en común. - Cuál fue mi posición en la clase (delante, al fondo,...) ? - Cuál fue mi rol ? Fuí tomando posición o solicité al grupo-clase que se expresara ? Me limité a un intercambio dual con el alumno que pasó a la pizarra?...		(mirada protectora, admirativa, escéptica a priori...)....

Síntesis de la actividad			
Elementos de observación		**Elementos del análisis posterior (volver a la preparación)**	
Indicios tomados de los alumnos	Reacción del maestro en la clase	Análisis superficial	Detallado
Los alumnos escuchan, plantean preguntas ? Los alumnos guardan un registro escrito del problema ? Bajo qué forma : - un procedimiento que aportó el maestro, - un procedimiento entre los que propusieron los alumnos, - un procedimiento a elección del alumno (o varios) entre los que se encontraron ?	He -remarcado los procedimientos que convienen, - los errores que hay que evitar, - dí a conocer un o varios procedimientos, los mas eficaces ?	Tuvieron los alumnos la impresión que dí la solución ? Respeté la pluralidad de las respuestas correctas ? Finalmente avanzamos juntos ? O atraje a los alumnos hacia mi conclusión ?	Cómo adaptar una síntesis al trabajo real de los alumnos, luego de la puesta en común ?

Institucionalización			
Elementos de observación		**Elementos del análisis posterior (volver a la preparación)**	
Indicios tomados de los alumnos	Reacción del maestro en la clase	Análisis superficial	Detallado
Los niños han : - leído el ayuda memoria del manual ? - construído un resúmen ? - recibido un documento ? La institucionalización llegó al registro escrito ? En qué material de soporte : - soporte colectivo (afiche, pizarra, cuaderno de memoria de la clase) ? - soporte individual (cuaderno...)?	La institucionalización se efectúa : - conforme a las previsiones o no (porqué ?) - a cargo de los alumnos (eventualmente controlado por el maestro) - enunciada enteramente por el maestro ?	Los alumnos comprendieron adónde conducía la sesión ? La sesión deja impreso su estado de saber? Y si hay que re hacerla...? Cómo incorporarla en la secuencia de mi progresión ?	La situación propuesta ponía los saberes o destrezas realmente en ejecución los que yo había previsto institucionalizar ?

Enseñanza de la dialéctica HERRAMIENTA-OBJETO y de los JUEGOS DE CUADROS en formación matemática de profesores de escuela

Régine DOUADY

Extraído de Documentos para la formación de profesores de escuela en didáctica de las matemáticas – Colmar 1993.

La autora define e ilustra las nociones de Dialéctica herramienta- objeto *y* Juegos de Cuadros *que ha incorporado en la didáctica de las matemáticas, apoyándose en la enseñanza de las matemáticas en el primer grado y en la formación de los docentes.*

1. Introducción

No realizaré una descripción de la *Dialéctica herramienta-objeto** ni de los *Juegos de Cuadros**. Al respecto, dirigirse a (Douady R.1984, 1987, 1991). Me sitúo en el contexto de la formación de los docentes, sean estos profesores de escuela o profesores de matemáticas. No obstante esto, tomaré como ilustración dos ejemplos extraídos de la escuela primaria.

Las cuestiones que me interesan son las siguientes :

- Cuáles son los roles que pueden desempeñar la Dialéctica herramienta-objeto y los Juegos de Cuadros en el aprendizaje de las matemáticas y como contra partida, en la formación de un docente a cargo de esta disciplina ?
- Si se los toma como contenidos de formación, cuáles son los problemas de enseñanza que poseen ?
- Se pueden considerar estrategias de formación que favorezcan la disponibilidad operacional de estos conocimientos ?
- Cuáles son las dificultades de puesta en ejecución de las estrategias elegidas ?

La respuesta a cada pregunta anterior, depende de los conceptos, de los niveles escolares ?

Por supuesto que no se trata de responder a todos estos interrogantes, sino solamente de situar la Dialéctica herramienta-objeto en relación a ellos.

2. Explicación del vocabulario

La expresión ***dialéctique herramienta-objeto**** contiene tres palabras.

- La palabra **objeto** hace referencia al saber instituído, en un determinado momento, a su representación formal, al aspecto cultural y todo esto desde diferentes puntos de vista . A nivel del conjunto de los objetos, existe una idea de coherencia, de organización global del saber.

*Como **objeto**, un concepto es definido sin referencia a un contexto particular, sin referencia a un investigador particular, en conformidad a las reglas de juego permitidas en matemáticas y que tienen un carácter a-temporal.*

- La palabra **herramienta** hace referencia implícita o explícitamente al funcionamiento de las nociones matemáticas, nociones constituídas en objetos o solamente en vía de serlo. Estas nociones, qué permiten hacer a un investigador o a un equipo, en la *dinámica matemática ?* Entiendo por esto, la consideración de un conjunto de cuestiones, de problemas, de búsqueda de estrategias de resolución, de estrategias en sí mismas, de identificación de los objetos implicados en el trabajo de resolución, de formulación en registros o en cuadros diferentes, de búsqueda de vínculos entre cuestiones aparentemente lejanas...

*Como **herramienta,** un concepto es implicado en un contexto problemático por alguien (individuo o grupo) en un momento dado.*
Esto no impide que una misma herramienta sea adaptada a contextos diferentes, bajo la acción de investigadores diferentes, en momentos diferentes.
De esta manera las palabras herramienta y objeto re-envían a dos significados de las nociones matemáticas y que es importante distinguir desde varios puntos de vista :

- *científico,* cuando se trata de describir o de organizar una exposición oral o escrita de matemática. Se trata de exponer definiciones, teoremas con o sin demostraciones? Se trata de estudiar una cuestión matemática ? Se trata de modelizar una cuestión que pertenece a otro campo ? …

- *epistemológico,* cuando se trata de describir la evolución

  - a escala histórica : que es lo que provocó su nacimiento y su desarrollo, en qué o cuáles problemáticas y con qué estatus ?
  - a escala de la psicogénesis.

- *didáctico,* cuando se trata de describir y de explicar las razones de las elecciones del docente. Seguidamente de estas elecciones el docente toma decisiones y coloca a los alumnos en situación. Se trata entonces de describir esta situación, de determinar lo que espera el docente, los medios de acción y los medios de control que están a disposición de los alumnos para responder a la demanda. Se trata también de describir la evolución de las decisiones del docente en relación a la interpretación que efectúan los alumnos y al efecto que estas interpretaciones producen para ellos, en términos tanto de conocimientos como de sentido de estos conocimientos.

- *Formación profesional,* cuando se trata de observar la realidad, tal cual se presenta o bajo la forma de realidad deseable.

- La palabra **dialéctica** hace referencia a los cambios de estatus de los conocimientos, a la manera en que estos cambios intervienen en la organización del saber culturalmente reconocido y a la manera que este saber juega en el progreso científico.

Se sabe sin embargo que estos cambios difieren según los conceptos, y que la evolución histórica puede ser diferente de los que se puede observar u organizar en un contexto escolar.

Si nos interesamos en la historia de las matemáticas, nos daremos cuenta que los acontecimientos se desarrollan de manera ambigüa y mas compleja de lo que parece, que coexisten varios sentidos para las matemáticas contemporáneas, incluso en un mismo matemático según el medio de las cuestiones que trata. En la enseñanza, se puede focalizar su atención en el aspecto funcional, en el aspecto descriptivo, en el aspecto explicativo, hacer interactuar estas diferentes preocupaciones. Admito que *todo objeto instituído es una herramienta potencial.* De esta manera, puede instalarse, de manera general pero no exclusiva una *dialéctica* entre los estatuts herramienta y objeto de un concepto.

Señalemos un problema de enseñanza : quién se encarga de las transformaciones de estatus y cómo ? Quién es el que controla ? Los *cambios de cuadros** (por iniciativa del actor de la situación y bajo su control: alumno, grupo de alumnos o docente) y *juegos de cuadros** (cambios organizados por el docente) intervienen de manera esencial en estas transformaciones.

3. Sentido y capitalización del saber

Dos factores contribuyen al sentido de un concepto :

- el conjunto de cuestiones en las que el concepto es introducido,
- el conjunto de las relaciones con los otros conceptos comprometidos en estas mismas cuestiones.

Dicho de otra manera , el *sentido* tiene que ver mas con el *estatus herramienta,* la *capitalización del saber,* con el *estatus objeto.* Sin embargo, las relaciones entre conceptos están en el centro de la estructuración del saber y por este hecho, el *sentido tiene que ver también* con el estatus *objeto.* Además tiene que ver *con las transformaciones de estatus.*

Por otra parte, sucede también que en curso de su escolaridad, un alumno tenga para *capitalizar métodos o prácticas que son herramientas y aún no son objetos*. Es el caso de las representaciones gráficas de ciertas funciones que quedan adheridas a contextos que les dan una cierta significación, igualmente si por otra parte, ellas están despersonalizadas.

Cómo se construye el sentido de los conocimientos matemáticos en la relación didáctica ? Cómo se capitaliza el saber? Cómo se articula la construcción del sentido y la capitalización del saber ? Cómo se organiza la coherencia o la compatibilidad entre diferentes puntos de vista sobre un mismo objeto matemático ?

Así presentado, este interrogante es muy amplio. Para poder abordarlo, necesitamos los caracteres de la relación didáctica y los contenidos matemáticos en juego. *La dialéctica herramienta –objeto** ofrece elementos de respuesta.

*La Dialéctica herramienta –objeto** tiene una doble significación epistemológica y didáctica.

- En su significación **epistemológica ;** constituye *un modelo* (solo parcialmente certero) *descriptivo y explicativo* de la relación enseñanza/aprendizaje de una cierta noción o de una red de nociones. Consiste en describir y explicar la producción y la evolución de ciertos conocimientos en términos de relaciones entre las preguntas planteadas y el saber existente en un momento dado, en términos de cambios de estatus de las nociones en juego. Los cambios de estatus resultan del estudio de una filiación de problemas, de la organización de las cuestiones en cuadros diferentes.

La *Dialéctica herramienta-objeto** permite, en ciertos casos, cuestionar los contenidos y modalidades de la enseñanza que existe y ponerla en relación con sus efectos del lado de los alumnos. Permite testear la extensión y los límites de la difusión de los conocimientos producidos por unos y las características de su recuperación por otros. Remarquemos que los impases en los que unos se encuentran confundidos son referencias para los otros que continúan trabajando.
Los *cambios de cuadro** constituyen un elemento descriptivo del modelo, su existencia o su ausencia en la realización analizada tiene una dimensión explicativa.

- En su significación **didáctica**, la *Dialéctica herramienta-objeto** se apoya en dos puntos : su significación epistemológica y la hipótesis siguiente:

Para los alumnos en situación escolar, toma de sentido y capitalización del saber se desarrollan en dialéctica.

De esta manera para *algunos* conceptos o métodos son objetos de enseñanza, pero *no para todos*. La Dialéctica herramienta-objeto esquematiza una organización posible de la relación enseñanza-aprendizaje centrada en la búsqueda de un problema que responde a determinadas condiciones.

Se trata para el docente :

* de construír un escenario y una puesta en escena de lo que quiere enseñar incluyendo una *situación a-didáctica** en el sentido de G Brousseau,

* de administrar la relación de lo que él propone y lo que hacen los alumnos, de estudiar las iniciativas que estos toman, los controles que ejercen, las justificaciones que dan,

* de organizar la difusión de resultados aún contextualizados y de ayudar a su despersonalización,

* de ayudar, llegado el caso, a una cierta descontextualización,

* de evaluar los conocimientos de los alumnos,

(esta evaluación puede tomar formas muy diferentes según si las nociones en juego son consideradas como herramientas o como objetos; en particular, el estudio de un problema eslabón de un nuevo proceso que implica como herramienta adaptada lo que fue objeto de un ciclo de la *Dialéctica herramienta-objeto** puede ser una forma de evaluación de los conocimientos en su estatus de herramienta : en efecto, es una ocasión para el docente de tomar información sobre la *disponibilidad en tal alumno* de tal o tal conocimiento-en situación, por su iniciativa y bajo su control),

* de conservar la disponibilidad de los conocimientos.

Se trata para cada alumno :

* de entrar en la *situación a-didáctica** : explorar el problema propuesto,

* de integrar su propio trabajo en la expresión del trabajo del conjunto de la clase y de situarlo en relación al trabajo de los otros alumnos, en relación a las iniciativas posteriores del maestro sobre el sujeto, en suma, de adoptar una doble actitud : trabajar y reflexionar sobre su trabajo.

El juego *de tiro al blanco* (R. Douady 1984) es un ejemplo de ingeniería en el que lo que está en juego es la extensión del campo numérico en CP (alumnos de 6 años) para números que tienen desde la decena a la centena. El proceso que se apoya sobre esta ingeniería requiere algunas semanas.
Otro ejemplo de ingeniería es el que pone en juego el *pasaje de los números enteros a los decimales* pasando por ciertas fracciones, ingeniería que pone en ejecución varios problemas implicando varios cuadros y cuya duración del desarrollo se cuenta mas bien en años. (R. Douady et M.J. Perrin 1986).

Los *Juegos de Cuadro son herramientas para poner en ejecución la *Dialéctica herramienta-objeto** en su fase a-didáctica :** especialmente para sugerir conjeturas o cuestiones que marcan referencias, pasos intermedios en la exploración de un problema, y de esta forma permitir crear *lo nuevo a* partir *de lo viejo*.
El interés y la fuerza de los *Juegos de Cuadro** residen en la posibilidad, para el maestro de poner a disposición de los alumnos como mínimo un cuadro en el que aquello que buscan cobra forma, cargada de sentido. El interés de los Juegos de Cuadro es también de lado de los alumnos, de volver pertinentes y disponibles herramientas, métodos, técnicas...que no han sido previstas en un primer acerca-

miento al problema que deben resolver. Particularmente es el caso del cuadro algebraico que sirve para modelizar numerosos problemas externos a las matemáticas o internos, pero que ponen en relieve otra rama.

También es posible y fructífero poner en ejecución **Juegos de Cuadro fuera de la Dialéctica herramienta-objeto.** Esto significa que para hacer funcionar juegos de cuadros, no es necesario tener un problema para explorar, cuya herramienta adaptada para resolverlo es justamente lo que está en juego en la enseñanza. Es lo que sucede en ciertos momentos de la ingeniería sobre áreas de superficies planas (R. Douady et M.J. Perrin 1984).

El maestro, ejerciendo presión para que los alumnos cambien de contexto, cambien de registro, modifiquen la red de los conceptos y de las escrituras simbólicas en relación pertinente para las cuestiones estudiadas, crea una situación favorable para la evolución de sus concepciones y para la elaboración de nuevos conocimientos disponibles bajo su control.

4. La Dialéctica herramienta-objeto : un contenido de formación

La Dialéctica herramienta objeto juega varios roles.

1) Herramienta para el formador

Puede ser un instrumento didáctico a disposición del formador para organizar su enseñanza de las matemáticas.
En particular, ofrece la posibilidad sea de aprender de los sujetos nuevos, sea de volver a los antigûos, sin cansancio. Incluso con un cierto suspenso sobre cuestiones matemáticas ya tratadas. Esto es interesante para los futuros profesores de escuela, en general molestos con las matemáticas, para crear una cierta curiosidad e incitarlos a hacer el ensamble con los conocimientos que se suponen disponibles, pero de hecho no disponibles y sin embargo necesarios para el ejercicio de su futura profesión. Resumiendo, para crear en ellos una relación convivial con las matemáticas y no mas conflictiva, aunque exija esfuerzo, rigor y vigilancia.
La Dialéctica herramienta-objeto es entonces *una herramienta para el formador*. Ella queda implícita para los futuros docentes. Sucede lo mismo con el cambio de cuadros.

2) Herramienta para el futuro docente

Puede ser un instrumento didáctico a disposición del formador para confrontar a los futuros docentes con conceptos de didáctica *en su funcionamiento.* Puede producirse :

- si los alumnos-docentes deben elaborar escenarios para enseñar una determinada noción o para coordinar nociones que ya han sido presentadas independientemente las unas de las otras;

- si ellos tienen para analizar procesos de enseñanza descriptos por su crónica. Esta puede ser dada por el formador en forma de texto o de video cassette. Puede ser el resultado de una vivencia personal del alumno-docente en una de las siguientes posiciones: estudiante haciendo matemáticas bajo la conducción de un formador, observador directo de una clase durante una lección (o una serie de lecciones) garantizada por cualquier otro docente actor en un escenario de una o varias lecciones.

La Dialéctica herramienta-objeto es entonces una *herramienta para el futuro docente.* Ella da lugar, en el pimer caso a una institucionalización de las matemáticas en juego, y en todos los casos a una explicitación, no necesariamente descontextualizada, de las herramientas didácticas que movilizan el formador o los profesores en formación.

3) Objeto movilizable por el futuro docente

Puede ser un objeto de enseñanza descontextualizado y despersonalizado tanto como sea posible, *un objeto movilizable por el futuro docente.*

Estos diferentes roles que ponen en juego, a la vez las prácticas y las representaciones metacognitivas de los docentes, pondrán en juego estrategias diferentes de enseñanza las que se espera se fecunden mutuamente.

Los juegos de cuadros, en el seno de un proceso de tipo Dialéctica herramienta-objeto o independientemente de tal proceso, constituyen también herramientas a disposición del futuro docente. Se les puede presentar, sea de manera implícita para resolver una cuestión didáctica, sea explícitamente describiendo en qué consisten, dando ejemplos, explicando cómo el docente comprende el hecho de provocarlos en los alumnos y explotar sus efectos.

5. Estabilidad o deslizamientos en una ingeniería

Para completar su función, los docentes necesitan disponer de ingenierías que les permitan prever sin demasiado riesgo lo que puede pasar en la clase. Si estas están ausentes, los docentes deben poder disponer de referencias y de medios de análisis que les permita tomar decisiones rápidas en la acción.

Entiendo por ingeniería un conjunto de lecciones organizadas para realizar un projecto de enseñanza y obtener de los alumnos un cierto aprendizaje.

Esto conduce a distinguir las ingenierías según que ellas sean construídas con fines de investigación o con fines de enseñanza. Las primeras tienen por objetivo responder a interrogantes que el investigador se plantea. Pueden ser muy difíciles a conducir, demandar una gran experiencia profesional del docente para no alejarse de las condiciones impuestas a la situación. Esto no es un inconveniente. Si tal es el caso, la clase podrá ser la de un docente con experiencia. Es el caso, por ejemplo para ciertas lecciones de la ingeniería sobre los números decimales llevadas a cabo por G. et N. Brousseau, que esta y tantos otros colegas experimentados han conducido en su clase: algunos problemas responden bien a las condiciones de la Dialéctica herramienta-objeto y necesitan de los juegos de cuadros

para ser tratados. Por el contrario, la reproductibilidad por docentes no experimentados puede traer problemas. Otras ingenierías, son en cambio muy estables. Esto significa que la puesta en escena a partir de documentos escritos da lugar a una buena regularidad en las realizaciones. El análisis didáctico propuesto ofrece la posibilidad de efectuar otras elecciones para las variables de situación y obtener realizaciones coherentes con las previsiones. Es el caso de la situación propuesta por G. Brousseau et bien conocida actualmente "la ampliación de un puzzle".
En los riesgos de deslizamientos, un elemento que interviene de manera esencial es la *referencia a la experiencia material o física.*
Vamos a tomar en cuenta, en el estudio propuesto a los alumnos, los errores experimentales y el dominio de validez del modelo que buscamos construír ?
Si el error de medida debido a la manipulación o debido a los límites del instrumento es del mismo orden que el objeto a estudiar, si el dominio de validez es mas pequeño que el campo de experiencias realizable, da lugar a pensar que el docente trabajará en el modelo mientras que los alumnos trabajarán en la realización (al menos que por efecto del contrato, los alumnos trabajen también sobre el modelo). Docente y alumnos todos tienen las mismas chances de situarse en cuadros diferentes a pesar del lenguaje común. Podemos entonces prever un desfasaje creciente entre las expectativas de alumnos y docentes y lo que sucede realmente. Podemos prever una adaptación del docente en forma de mayéutica, *efecto Jourdain***, incluso *Topaze** para evitar un bloqueo de la relación didáctica: se trata entonces de salvar la reproducción externa en ausencia del sentido didáctico de la situación.

Este puede ser el caso de la representación de las fracciones como espesor de una hoja de papel : si una pila de *n hojas* mide 3 cm, *p pilas* de *n hojas* superpuestas no miden forsozamente 3 *p* cm pero sin duda menos según el valor de *p*. Igualmente si se representa la adición de dos fracciones como el espesor de una hoja obtenido reuniendo dos hojas distintas, habrá que preocuparse por la manera en que es realizada esta reunión: si se trata de cola, el espesor de la cola puede ser mayor que el espesor de cada hoja. Sin embargo en la ampliación del puzzle, los errores de modelo pueden ser muy distintos de los errores de manipulación. Esto depende de la forma de las piezas y de su combinatoria.

El análisis en término de *cuadros y cambio de cuadros** puede ser muy útil para delimitar las dificultades y explicarlas al menos parcialmente.

6. Dificultades de realización de la *Dialéctica herramienta-objeto**

El proceso se apoya en los datos de un problema que pone en juego de manera esencial lo que el docente desea que los alumnos aprendan.

1) Sobre la clase

- Adaptar enunciados existentes a una situación particular,

- Encontrar problèmes adecuados.

Esto requiere que el docente posea referencias para saber si puede trabajar por Dialéctica herramienta-objeto o no. Por ejemplo, los conceptos generalizadores, unificadores no se prestan para un trabajo por Dialéctica herramienta-objeto, como lo muestran A. Robert et J. Robinet.

2) Para poner en funcionamiento la Dialéctica herramienta- objeto en clase

Las matemáticas, ponen algo en juego para los alumnos ?
Si la respuesta es si, cómo asegurar la *devolución** del problema a los alumnos ?
Si no, cómo desplazar lo que está en juego hacia el problema ? (cf. l'exemple du calcul mental, cahier DIDIREM 19.1 ou Repères-IREM n° 15).

3) Para avanzar en clase

Qué puede hacer el docente si un alumno se bloquea y no sabe explorar ni explotar los *cambios de cuadros** previstos para avanzar ?

4) Para elegir lo que es para institucionalizar e**n clase** y el momento para hacerlo, mas allá de la diversidades cognitivas y las diferencias de familiaridad de los alumnos.

Estas dificultades provocan problemas a la enseñanza de la *Dialéctica herramienta-objeto** y de los *Juegos de Cuadro** en la medida que en principio no existen respuestas generales sino respuestas adaptadas a los diferentes alumnos y también a los contenidos matemáticos.

7. Proposiciones de enseñanza de estrategias

El formador necesita tomar en consideración la realidad del docente, tal cual es, y tal como éste desea que sea. Necesita apoyarse sobre las prácticas vividas y sobre las representaciones metacognitivas de los estudiantes y de su medio. Las estrategias de formación deben permitir integrar prácticas diferentes en el hábitus (P. Perrenoud 1994).
La situación de formación hace intervenir las matemáticas desde varios puntos de vista:

- *Como campo cientifico a conocer mejor.*

Esto conduce a hacer matemáticas como un estudiante puede hacerlo : resolver problemas, verificar las hipótesis de validez de un teorema, encontrar la demostración , buscar contra ejemplos de un enunciado...

- *Como dominio a enseñar y en particular a poner en escena.*

Esto requiere un trabajo de recorte del corpus a enseñar respetando un número de exigencias : coherencia matemática compatible con un recorte en el tiempo, con una cierta receptibilidad de parte de los alumnos, una posibilidad de evaluación...

Esto requiere operar en relación a los objetivos matemáticos a los que el estudiante estaba habituado.
No es mas él quien está en el centro de la escena sino los alumnos, no es mas su logro que sirve para la evaluación de lo que él ha hecho, sino el de los alumnos (A. Robert, 1994 journée de formation).
Esto conduce a la propuesta de combinar varias estrategias de formación. Citemos a título de ejemplo las que A. Kuzniak a mostrado en su tesis (1994) : "monstration, homologie, transposition" (presentación, homología, transposición).

1) Homología en posición de estudiante

El formador intenta hacer vivir a los estudiantes el tipo de situación que querría que el futuro docente plantee en su clase.
Por ejemplo, el formador propone a los estudiantes un problema de matemática. Ha elegido y organizado el enunciado en función de criterios didácticos. Ha previsto lo que querría institucionalizar y lo que querría ver re-utilizado por los estudiantes.

Se plantea inmediatamente el interrogante de la elección del contenido matemático : en relación directa con los programas a enseñar o bien poniendo en juego nociones nuevas, pero susceptibles de ser abordadas a partir de sus conocimientos, en un tiempo compatible con el tiempo destinado a la formación.

Citemos un tema de cada categoría

- *Recortar en hoja de papel un disco y un rectángulo de manera de fabricar un cilindro, cerrado en un extremo, de volumen máximo.*
- *Cómo dar cuenta de la irregularidad de una costa muy recortada?*

Las nociones de variable didáctica, de salto informacional, de herramienta y de objeto, de registro (sistema smiótico de representación)de cuadros, son referencias esenciales para la puesta en forma de los enunciados a proponer y la gestión de la situación en su dinámica.

Después, realiza una *doble institucionalización* matemática y didáctica. Dicho de otra manera, un ciclo *Dialéctica herramienta-objeto** desde el punto de vista matemático, luego una explicación de las razones que condujeron a la elección de un enunciado en particular, y también en la medida de lo posible de las decisones tomadas en curso de su trabajo.

2) Presentación

Observación en clase de una realización satisfactoria para las hipótesis de la *Dialéctica herramienta-objeto** y de una clase poniendo en ejecución hipótesis diferentes.
Toma de notas y análisis con el formador a partir de las notas tomadas. Llegado el caso, confrontación de los puntos de vista de diferentes observadores de una misma lección. Explicitación eventual de las nociones didácticas que han servido para el análisis.

3) Homología en posición de docente

Cómo enseñar tal noción matemática en tal nivel ?
Se trata de construír escenarios y prever la puesta en escena, de adaptar ingenierías existentes para satisfacer ciertas dificultades.
El formador nuevamente debe elegir un contenido que se preste a una ingeniería de tipo Dialéctica herramienta-objeto y un contenido que no se preste.

4) Transposición

Se trata de ayudar al docente a adoptar una actitud reflexiva en relación a su propia práctica.
Teniendo en cuenta una realización específica, las elecciones didácticas eran compatibles con las intenciones ? La situación, ha evolucionado como se esperaba ? Si no, qué ha provocado sus distorciones ? Qué decisiones se tomaron en la acción ? Qué ponen en relieve (representaciones metacognitivas, contrato, saber…) ? El análisis efectuado cuestiona las previsiones para la continuación? Si sí, sobre qué realizar los cambios?

Combinando estrategias diferentes, se piensa actuar sobre los conocimientos matemáticos, sobre el sentido de esos conocimientos, para el futuro docente, sobre sus representaciones del saber, sobre la manera de aprender en relación con el público de alumnos que se les ha confiado.
La *Dialéctica herramienta-objeto** y los *juegos de cuadros** son elementos que contribuyen a este programa de formación.

Bibliografía

ARTIGUE M. (1989) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 9.3. 281-308. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*. N° 84. 13-19. INRP, Paris.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 7.2. 33- 15. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des mathématiques*, n° 9.3. 309-336. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHARLOT B. et BAUTIER E.(1993) *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques.* Repères IREM n°10. Topiques Editions, Pont à Mousson.

COPIRELEM (1991) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 1. Actes du stage national de Cahors, mars 1991. IREM de Paris 7, Université Denis Diderot.

COPIRELEM (1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques,* Tome 2. Actes du stage national de Pau, mars 1992. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I.

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Cahier de Didactique n°3. IREM PARIS 7

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 7.2. 5-32. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM,* n°6. Topiques Editions, Pont à Mousson.

DOUADY R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM* n°15. Topiques Editions, Pont à Mousson.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J (1989)
Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* n°20. 387-424

KUZNIAK A. (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* Thèse de doctorat, Université Paris 7

PERRENOUD P. (1994) *La formation des enseignants entre théorie et pratique.* L'Harmattan.

PERRIN-GLORIAN M.J.(1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en Didactique des mathématiques,*, n°13.1. La Pensée Sauvage, Grenoble

ROBERT A. et ROBINET J. (1989), Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM, n°* 1, IREM, PARIS 7.

Enseñanza para la escuela maternal

¿ Qué actividades de carácter matemático en la escuela maternal?

Yves Girmens - Françoise André (2000)

Este artículo presenta una reflexión profunda sobre actividades, en el dominio logico-espacial, concebidas con objetivos de aprendizaje sobre los conceptos de colección, de enumeración y de orden.

RESUMEN DEL TALLER:

Investigaciones recientes acerca de trabajos de carácter matemático en la escuela maternal permitieron identificar saberes, poniendo en evidencia la necesidad de proponer a los niños de este nivel, situaciones de aprendizaje en torno a estos saberes, junto con actividades rituales o funcionales.

El taller permitió percibir mejor estas hipótesis y delimitar las condiciones para una transposición de estas investigaciones a la práctica de los profesores.
Una investigación-acción ha sido llevada a cabo, durante dos años, por personas que enseñan en la escuela maternal y formadores del IUFM (Instituto Universitario para la Formación de Maestros), con la intención de favorecer esta transposición.
Ejemplos de trabajos que resultaron de esta investigación han sido presentados y debatidos.

¿Por qué este taller?

Para hacer compartir un experimento de investigacón de "didáctica aplicada" en la escuela maternal, llevada a cabo conjuntamente por maestros y formadores.
Para someter a juicio los trabajos nacidos de esta experiencia y recoger eventuales críticas y sugerencias.

PLAN DEL TALLER

Presentación del contexto de la acción
Definición del marco teórico
Elección y realización
Presentación de algunos trabajos
Elementos de conclusión y perspectivas

I. Presentación del contexto de la acción

Origen de la reflexión: un interrogante sobre las actividades de carácter matemático en la escuela maternal

La reflexión ha comenzado a partir de necesidades o preguntas formuladas por profesores de la escuela maternal, en encuentros organizados en el marco del AGIEM (Asociación General de Maestros de Escuela y de Maternal) en los cuales aceptaron participar algunos formadores del IUFM:

- La necesidad de reflexionar sobre las actividades de carácter matemático en la escuela maternal junto a la necesidad de identificar lo que está en juego en el aprendizaje de los números.
- La impresión de no proponer suficientes actividades prenuméricas en la escuela maternal y al mismo tiempo, una inmobilización de ideas para renovar las actividades de carácter matemático.
- El sentimiento que en paralelo a las actividades rituales y funcionales, y actividades dirigidas que se les proponen a los niños, hay seguramente otras formas de trabajo no percibidas y que podrían favorecer ampliamente la iniciativa y la reflexión de los niños.
- El hecho de haber constatado dificultades y errores en el aprendizaje de los números, cuyo orígen no logran percibir correctamente.
- La necesidad de tomar en consideración las diferencias de aptitudes y de desarrollo de los niños, de una mejor manera.
- La necesidad de identificar con mayor precisión los saberes que están en juego en el aprendizaje del número para ayudar mejor a los niños.

Objetivos del proyecto de acción

Los formadores, respondiendo a esta demanda, propusieron constituir un grupo de investigación-acción con los siguientes objetivos:

- Dar a conocer ciertos saberes lógicos que forman parte del aprendizaje del número, que, de no ser objeto de enseñanza, pueden provocar faltas en los conocimientos de los niños.
- Favorecer la renovación de las prácticas de enseñanza: hacer descubrir que además de las actividades rituales y funcionales, de las actividades guiadas (donde el niño aprende por facilitación), es posible proponer actividades problemáticas a los niños pequeños, en las que éstos pueden mostrar iniciativa, mobilizar conocimientos por necesidad e imaginar soluciones.
- Provocar una reflexión sobre el rol del maestro en los aprendizajes.
- Ayudar a los profesores a afinar las nociones de tarea (acerca de un saber en juego), de objetivos a alcanzar (criterio de éxito), de *devolución** de la situación

al niño, en particular con una reflexión alrededor de la consigna dada por el maestro, que debe permitirle al niño asumir el problema y motivarlo a actuar.
- Estudiar con los profesores de terreno cómo y en qué condiciones se pueden llevar a la enseñanza los trabajos que resultan de una investigación.

El procedimiento elegido

Tras los aportes teóricos necesarios y la identificación de un saber, los formadores del IUFM convinieron con los profesores que ellos mismos inventaran una situación en vista al aprendizaje de dicho saber, que la experimentaran en su clase y que hicieran luego un informe al grupo de investigación.
En un segundo momento, a partir de una discusión colectiva sobre las situaciones presentadas, se propuso el estudio de una situación-testigo, con la ayuda de un documento en video. Esto permite poner en evidencia el modelo (la *situación genérica*) y las *variables didácticas** con las cuales se puede jugar.
En un tercer momento,los otros profesores pueden optar por experimentar la situación presentada o fabricar una siguiendo el mismo modelo.

Esta elección se basa en la hipótesis, formulada por los formadores, que construyendo ellos mismos las situaciones, los profesores podrán: identificar mejor lo que está en juego (los saberes a los que se apunta), mobilizar su capacidad de invención (muy presente en los maestros de la escuela maternal), probar su creatividad, sacar mejor provecho del material del que disponen y dominar las modalidades de realización.

Esta hipótesis ha sido confirmada por la riqueza y la variedad de las situaciones imaginadas por los profesores.

II. Definición del marco teórico

Identificación de saberes

El hecho de haber tomado en consideración los trabajos llevados a cabo por un grupo de investigación de Bordeaux, permitió identificar los saberes prenuméricos y lógicos que forman parte del aprendizaje del número, que no son objeto de una enseñanza específica[1]

El concepto de número (en su aspecto cardinal) se apoya en **el concepto de colección** (número: recuerdo de una cantidad de objetos de una colección) y en **el concepto de designación** de una cantidad.

[1] Cf. el artículo de J. Briand, "*Enseigner l'énumération en moyenne section de maternelle*", presentado en esta obra

Por otro lado, la *enumeración** de una colección hace intervenir el conteo de los objetos de la colección, lo cual hace uso de un conocimiento específico: **la enumeración.**
Finalmente, estos conocimientos hacen intervenir diferentes maneras la noción de **orden**: en una colección, el orden no interviene; en cambio la *enumeración** resulta en un orden.

Fue necesario definir estos saberes para escogerlos como objetos de trabajo.

La colección
Una colección es una agrupación de objetos realizada según un criterio de carácter funcional, un criterio definido por un carácter común, un criterio generado por una circunstancia.
Concebir una colección, es aceptar ver un conjunto de objetos como un todo (un solo objeto).
Una colección es invariable, sea cual sea el orden (la posición) de los objetos (no tenemos en cuenta el orden).
El concepto de colección es un concepto previo (constitutivo) del concepto de número como memoria de una cantidad. La colección no es algo dado o innato, es algo que se construye.

- **La *enumeración****

El conteo (que entra en la enumeración), exige la exploración exhaustiva de una colección analizando todos los objetos de la colección y cada uno de ellos una sola vez.
Este conocimiento relativo a la colección se denomina: la enumeración (definida y estudiada por Joël Briand en su tesis).

- **La designación**

La designación es un conocimiento que se pone en ejecución cuando queremos reemplazar un objeto o una colección de objetos por un símbolo, para conservar la memoria de ese objeto: la designación debe permitir conservar un conocimiento del objeto.

Ejemplo: El dibujo de un objeto es una designación del mismo.
Un representante de una clase de objetos es una designación de esta clase.
Una lista formada de símbolos que representan objetos es el modo más simple de designar una colección de objetos.

- **El orden**

El orden interviene cuando se dan informaciones que permiten identificar la posición de los objetos de una colección organizada según una dirección dada y para la que ha sido definido un sentido.
Para una dirección dada, el sentido, puede ser definido por:

Un aspecto físico: movimiento real o virtual, el tiempo (la cronología).
Un aspecto arbitrario: decidimos un principio y un fin.

La situación por adaptación

El modelo de situación de aprendizaje escogido es la *situación por adaptación** (en referencia a la *teoría de situaciones** de Guy Brousseau), donde el niño confrontado a un *medio** constituido por el profesor, que le plantea un problema, debe reaccionar a dicho medio a partir de lo que sabe hacer y sintiendo la necesidad de un nuevo saber, como medio para resolver el problema.

Cada situación, alrededor de un saber determinado, será elaborada siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Identificar un obstáculo
Un nuevo saber
Una concepción (conocimiento incorrecto o incompleto) que se desea poner en duda.

2. Constituir un medio
*Medio material** (materiales, soportes de trabajo, instrumentos útiles)
Tarea que confronta a un problema (consigna)
Este medio debe poner al niño en acción (utilización de sus conocimientos) y debe permitirle una validación* de sus elecciones y de sus decisiones (retroacciones).*
El medio es totalmente organizado por el profesor para que el niño encuentre allí el saber pretendido como respuesta a un problema.

3. Asegurar la devolución del problema*
El niño es quien toma a cargo la situación.

4. Armar un escenario
Fase de entrada al problema: el niño debe lograr realizar la tarea con los conocimientos que posee.

Fase de investigación (acción): se coloca el niño frente a la misma tarea que ahora, a traves del juego de variables, se plantea un problema (obstáculo).

Deben fijarse: las modalidades – la duración – las ayudas que se requieran.

Fase de discusión: examen de las producciones – validación – formulación de las estrategias utilizadas – localización y formulación de las razones para la ausencia de éxito.

Nueva fase de acción: se toman en consideración los elementos que la experiencia deja y se realiza una nueva tentativa.

Fase de institucionalización: se pone en evidencia el nuevo saber (formulación).

III. Las elecciones

Los saberes tomados como objetivo de trabajo son la colección, la enumeración (medios de control de una colección), la designación (de un objeto, de una colección), y el orden.
Las situaciones son edificadas alrededor de un punto particular que corresponde a uno de los saberes, haciendo que los otros saberes intervengan, pero sin que su intervención tome el carácter de un problema.
Organizar situaciones de aprendizaje por adaptación donde el niño, confrontado a un medio constituido por el profesor, que le plantea un problema, debe reaccionar a este medio con sus conocimientos y encontrarse frente a la necesidad de un nuevo saber (de una herramienta) (teoría de las situaciones).

Para uno de los saberes identificados (la colección, la enumeración, la designación, el orden), se debe fabricar un modelo de situación, para la cual el saber es la herramienta de resolución que se adapta mejor.

Por ejemplo, se propone una situación en la cual será necesario concebir y fabricar una colección para resolver un problema propuesto (la fabricación de una colección será la solución del problema).
Ejemplos dados: la clasificación de semillas (propuesto por el equipo de investigación de Bordeaux); juego de cartas.

Adaptar esta situación, decorarla para hacerla atractiva, respecto a la edad y los conocimientos de los niños: así cada situación se presenta en forma de un juego donde hay que ganar, y donde ganar depende de la puesta en ejecución del saber aludido.
Las situaciones propuestas no excluyen el recurso al número, pero por lo menos en las primeras etapas no lo requieren, porque el problema puede resolverse con procedimientos no numéricos, mobilizando uno de los saberes identificados.

Siendo que los saberes identificados están altamente relacionados entre sí, no es necesario procurar aislar uno de ellos, lo importante es que para cada situación uno de los saberes sea escogido como punto particular, como lo que está en juego (y los otros pueden intervenir de una manera no problemática).

IV. Presentación de algunos trabajos

1-Sobre la colección: maso de cartas

Nivel en cuestión: sección media (niños de 4 años)

Previo a la situación
- Manipular cartas (maso de cartas sin los números escritos en las esquinas)
- Nombrarlas
- Hacer clasificaciones diversas. Obtenemos de manera general las 4 familias (diamantes, piques...), los 1 con los 1, los personajes y las otras, los rojos con los rojos y los negros juntos...

Después de todas estas manipulaciones, conservar uno de los criterios, el de las 4 familias (corazones con corazones).

Nota: cuidado con los ases, que resultan problemáticos porque los niños pueden no asociarlos a la familia que les corresponden (se puede decidir, según el contexto, no incluírlos).

Objetivo: a partir de un juego de cartas heterogéneas, reunir las colecciones de cartas de la misma familia.

Finalidad de la actividad: el niño debe colocar las cartas en cajas. Habrá tenido éxito si, en la caja, hay sólo cartas que pertenecen a la misma familia (por ejemplo: los corazones con los corazones).

Material para grupos de dos niños: cajas idénticas vacías donde una ranura permite meter una carta (4 cajas); un paquete de 28 cartas (los ases, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Dispositivo: 4 grupos de 2 niños trabajan al mismo tiempo; en cada grupo, un niño actúa, otro observa; el profesor, después de cada partida, hace que el observador realice la *validación** y le pide a los niños que formulen sus estrategias.

Definición de la tarea: el niño debe encontrar una estrategia para constituír en cada caja la colección de cartas que pertenece a la misma familia.

Desarrollo

- *Fase 1*: apropiación de la tarea, descripción del material.
  Las cartas están disponibles y las 4 cajas están abiertas.
  La consigna es: "*pon las cartas de la misma familia en la caja*".

- *Fase 2*: cada pareja dispone ahora de 4 cajas cerradas.

La consigna es: “*pon las cartas en las cajas. En cada caja, debe de haber sólo cartas de la misma familia*”.

Cuando la actividad termina, el niño presenta oralmente las estrategias utilizadas. El observador dice si piensa que el niño tuvo éxito o no.

Validación: abrimos las cajas y verificamos si los grupos de cartas están bien organizados.

- *Fase 3*: inversión de los roles (de cada pareja).

Estrategias esperadas
- El niño constituye la colección delante de cada caja antes de poner todo dentro.
- El niño deja un representante de cada colección delante de cada caja: dicha carta constituye una designación de la colección.
- El niño desplaza primero todas las cartas que corresponden a una familia, luego pasa a la segunda.

Estrategias observadas

- El niño inserta carta por carta tratando de acordarse del lugar de la caja y de la familia de cartas que está en el interior: algunos niños de sección media lo logran con esta estrategia. Por otra parte, la falta de éxito de esta estrategia permite a los niños ir más lejos.
- El niño comienza a hacer una colección en una caja, luego cambia de estrategia y finalmente mezcla las colecciones.
- El niño arma las colecciones unas tras otras reuniendo las cartas sobre la mesa o en sus manos.

Variables de la situación
- El número de cartas dadas.
- El número de familias.

Observaciones: efectivamente, la solución al problema es la constitución de una colección en cada caja. Para lograrlo, el niño debe concebir la colección anticipándola, para luego encontrar una manera de obtenerla mientras controla su realización.

2) Sobre la enumeración: los sólidos

Nivel en cuestión: la gran sección (niños de 5 años)

Objetivo: poner en ejecución una estrategia de enumeración de una colección dada con la intención de constituir una colección idéntica.

Finalidad de la actividad: el niño tiene éxito si constituye una colección formada de caras idénticas a todas las de un sólido dado.

Material
- Polígonos encajables que permitan fabricar sólidos
- Barquillas para reunir las caras escogidas.
- Sólidos construídos con las piezas anteriores (sólidos complejos, cuyo número de piezas sea difícil de contar)

Por ejemlo: sólidos formados con piezas del mismo color.
Sólidos constituídos con piezas de una sola forma.

Dispositivo: medio grupo, trabajo en parejas o individual.

La tarea: reunir piezas que permitan fabricar un objeto idéntico al que es dado.

Desarrollo

Fase 1: Presentación y descripción del material

Fase 2: Acción
Consigna: *"tienes que preparar en la barquilla las piezas que van a permitirle al otro grupo fabricar un objeto igual a éste"*.
Los niños no tienen derecho a desarmar el sólido.
Cada alumno o cada pareja determina y constituye la colección.

Fase 3: formulación – Presentación oral de los procedimientos utilizados
"*¿Cómo estás seguro que tienes todas las piezas? No puedes re- construirlo"* .
Presentación oral: - Estrategias.
- Obstáculos encontrados.
- Ideas de nuevas estrategias.

Fase 4: validación del fin que hay que alcanzar
El sólido en cuestión y la barquilla que contiene las piezas preparadas para construír uno similar se le entregan a otros alumnos para que construyan el sólido.

Estrategias esperadas
Conteo del número de piezas (polígonos) de cada tipo basándose en:
- Marcado de cada pieza indicando que ha sido contada.
- Marcado, con la ayuda de adhesivos, de las piezas que han sido contadas.

Estrategias observadas
- Conteo de las diferentes piezas, con un orden definido pero olvidando el punto de partida (sin usar ninguna forma de marcado de las piezas).
- Conteo de las piezas con los dedos sirviendo de marcadores: dificultades vinculadas al número dedos y a la manipulación de las piezas.
- Marcado de cada pieza con un signo pero sin llevar la cuenta.
- Numeración de cada pieza.
- Localización de cada pieza con un adhesivo, éstos eran pegados a medida que se recitaba el conteo.
- Localización de cada pieza con un adhesivo y numeración de cada una de las piezas.

***Observación**: la situación tiene como punto principal la exploración exhaustiva de una colección de objetos (las caras del sólido), a través de la puesta en ejecución de estrategias de enumeración.*

3) *Sobre el orden*: *los apilamientos*

Nivel en cuestión: la gran sección.

Taller propuesto a la entrada
Apropiación del material, manipulación libre.
Montaje a partir de la consigna: *"con cuatro, cinco, seis o siete piezas, haz una construcción. Las piezas deben quedar una sobre otra. Ninguna puede quedar totalmente escondida".*
(Ver anexos 1, 2 y 3)

Prolongación
Fotocopia de los montajes realizados. Coloreo de las piezas sobre la fotocopia a partir del modelo (el montaje).
Oralmente: forma - color – tamaño. Vocabulario acerca del orden: **sobre – bajo - entre**.

PRIMERA SITUACIÓN

Objetivo: el concepto de colección.

Dispositivo: media clase.

Material: piezas geométricas de formas, tamaños y colores diferentes.

Desarrollo
Fase 1: Deben realizarse algunos montajes (apilamientos). Se reitera la consigna: 5, 6, 7 elementos. Presentación oral, problemas encontrados. Fotocopia (ver Anexo 1).

Fase 2: presentación de los montajes dibujados.
Consigna: *“prepara las piezas que van a permitirle al otro grupo realizar los montajes”*.

Según los montajes que hayan sido producidos en los talleres, se proponen montajes más o menos complejos (5, 6, o 7 piezas).

*Fase 3***:** validación de las respuestas, intercambio de material. Montaje según el dibujo y la colección.

En algunos montajes, ciertas formas son difíciles de reconocer.
El dibujo ha sido ampliado para una mejor legibilidad: a ciertos niños les molestó este cambio de escala (las pequeñas piezas ampliadas tienen casi el mismo tamaño que las verdaderas piezas que utilizan).

En cuanto toda la clase ha realizado la actividad, el material constituido por las piezas y el montaje dibujado, se propone en otro taller.
El mismo trabajo sobre nuevos montajes, entrenamiento.

SEGUNDA SITUACIÓN

Objetivo: el concepto de orden.

Dispositivo: media clase.

Material: montajes dibujados, colección de las piezas preparadas para cada montaje (en una barquilla).
Hoja de papel, lápiz, lápices de colores, caja de piezas.

Desarrollo
*Fase 1***:** cada alumno dispone de un montaje dibujado y de una barquilla que contiene la colección correspondiente de piezas (ver anexo 2 que presenta dibujos de montajes).
Comprobación con el enunciado: “*¿Podemos realizar el montaje con la colección que hay en la caja?”.*

Fase 2: el enunciado es “*ciertos niños, a pesar del dibujo del montaje y la colección de las piezas, no saben reconstruir el montaje. Hay que explicar cómo hacerlo”.*

Las estrategias observadas

- Las piezas sirven de modelos.
Aparecen coloreadas y numeradas, esparcidas en la hoja.
Las piezas aparecen alineadas en el orden del montaje; al borde de la hoja, la curva se señala con flechas.

- Los niños dibujan las piezas a mano y las colorean (problemas con forma y sobre todo con tamaño)
Las piezas son numeradas.
Son dibujadas en orden (sentido de la lectura: izquierda - derecha).

Fase 3: validación de los mensajes explicativos, construir el montaje a partir de la hoja de instrucciones y verificar con el modelo dibujado. Ciertas fichas presentan problemas. Análisis colectivo.

Observaciones: en esta situación, la solución al problema consiste claramente en considerar el orden en el apilamiento de las piezas. Para tener éxito, el niño tiene que encontrar una manera de indicar el orden de apilamiento.
Se ha notado que la situación necesita un medio de designación de las diferentes piezas que hay que amontonar y hace que, incidentalmente, intervengan conocimientos vinculados al espacio (los niños deben en efecto interpretar una imagen plana vista por encima del apilamiento para concebir el apilamiento de las piezas).

Actividad del taller: tras la presentación de estos trabajos, los animadores suscitan un debate sobre las elecciones y la adecuación entre dichas elecciones y la situación, sobre la realidad de los saberes construídos, sobre la articulación entre los conocimientos referidos y las habilidades numéricas.

Conclusiones y perspectivas

El procedimiento llevado a cabo

El proceso utilizado para organizar y dirigir las experimentaciones se llevó a cabo en varias etapas: comienzo colectivo, elaboración y ejecución individual, informes delante del grupo, la regulación por el grupo.
Este proceso fue productivo, porque permitió, conjuntamente, una acción de formación y una incidencia sobre las prácticas.

La acción llevada a cabo provocó implicación, creatividad y apropiación de nuevas prácticas entre los profesores que se comprometieron con el proceso.

El objetivo de poner en pie situaciones realmente utilizables en clase permitió salir de las condiciones ideales utilizadas en las investigaciones teóricas.
En ocasiones se tuvieron que negociar algunos puntos, tomando en consideración las contingencias de la enseñanza en clase: gestión del tiempo, el número de participantes, la programación de los trabajos.
Por ejemplo, en ciertas situaciones, para hacer frente a las dificultades de los asistentes, ciertos alumnos fueron colocados en el papel de observadores, aún cuando *la presencia de observadores no se imponía siempre en la lógica de la situación.*

Las dificultades encontradas

Los profesores con experiencia tienen una práctica automática. Les es difícil "pensar" la situación, anticipando la formulación de la consigna precisa, la gestión que consideran, sus palabras y sus acciones en los diferentes momentos de la situación.
En particular, la búsqueda de una consigna precisa que motivará a los niños a actuar, es decir que definirá claramente el objetivo esperado sin inducir estrategia, no es natural para estos profesores.
Los profesores tienen dificultades en soportar que los niños no tengan éxito de inmediato y que vacilen. Son tentados a ayudarlos directamente. Así mismo, cuando los niños son invitados a validar sus producciones, son propensos a formular en lugar de los niños, razones por la que no se ha logrado tener éxito (imagen negativa del saber aludido).
No aceptan con facilidad guardar distancia y dejar a los niños administrar solos la situación.
Algunos tuvieron dificultades para distinguir el fin esperado, que define la "tarea", en referencia a un saber identificado, de la acción concreta que será decidida y llevada a cabo por el niño para lograr este fin.
Los profesores tuvieron problemas para hablar de su acción en el momento de la ejecución de una situación.
Tienen tendencia a ver, en las palabras de los niños, sólo "lenguaje", lo cual no les permite identificar la emergencia de un saber.

El impacto que se espera en las prácticas

Este trabajo de investigación-acción permitió a muchos profesores, experimentar nuevas formas de trabajo (situación por adaptación) y delimitar los saberes en juego en el aprendizaje del número.
Parece que se ha logrado que varios de ellos, tras el enriquecimiento de la reflexión en grupos, integraron en su práctica estos trabajos de manera duradera.
Sin embargo, la reticencia de varios profesores para trabajar a largo plazo, haciendo vivir la misma situación en varias etapas por un juego sobre las variables didácticas, atenúa un poco la esperanza de repercusiones en la práctica.
Consideran que conservar la misma situación en clase, haciendo jugar las variables, corre el peligro de provocar el cansancio de los niños (¿o probablemente de ellos mismos?)
Para favorecer la integración de estos trabajos, sería necesario ayudar a los profesores a construír una programación de situaciones que se pueden proponer en los diferentes niveles de la escuela maternal.

La cuestión de la transferencia a la formación inicial

¿Es oportuno abordar los contenidos descritos más arriba, en formación inicial de los Profesores de las Escuelas en su segundo año de formación?

¿Si pensamos que sí, cual es el lugar que hay que dar a estos contenidos en relación a las prioridades de formación sobre la enseñanza en la escuela maternal?

Estas preguntas son actualmente objeto de una reflexión de los formadores que participaron en este trabajo. Si bien no pueden por el momento dar su punto de vista definitivo, están en condición de lanzar algunas ideas a favor de la introducción de estos contenidos en formación inicial:

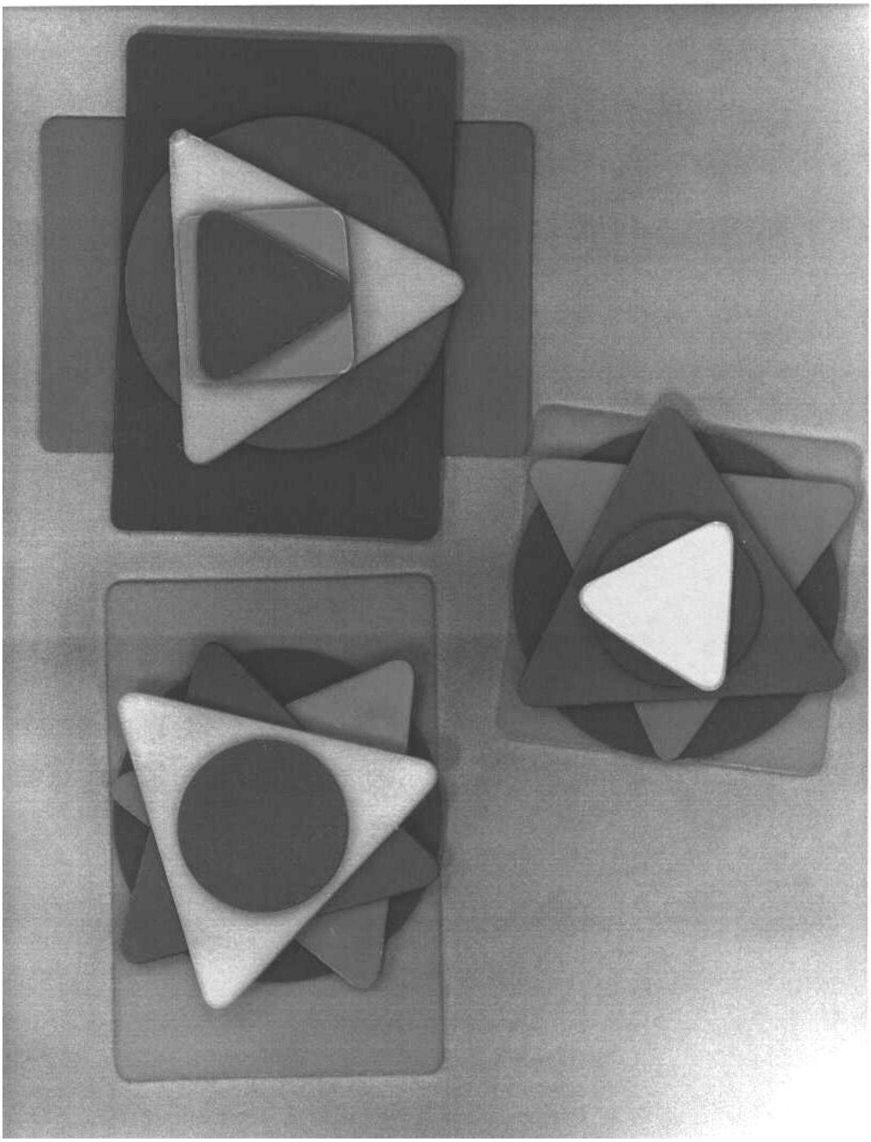
- Es necesario que los profesores de las escuelas conozcan los saberes constitutivos del número descritos más arriba.
- Es indispensable que descubran que es posible presentarles a los niños desde muy temprano, trabajos (sobre la colección, la cantidad,...) que mobilizan conocimientos prenuméricos y que participan, en el plano conceptual, en el aprendizaje del número.

- Es importante para ellos aprender que la articulación entre conocimientos rituales en relación al número y los conocimientos conceptuales se logra gracias a situaciones en las que el niño, enfrentado a un problema, va a intentar resolverlo mobilizando los conocimientos que encuentra en otros momentos y luegares.

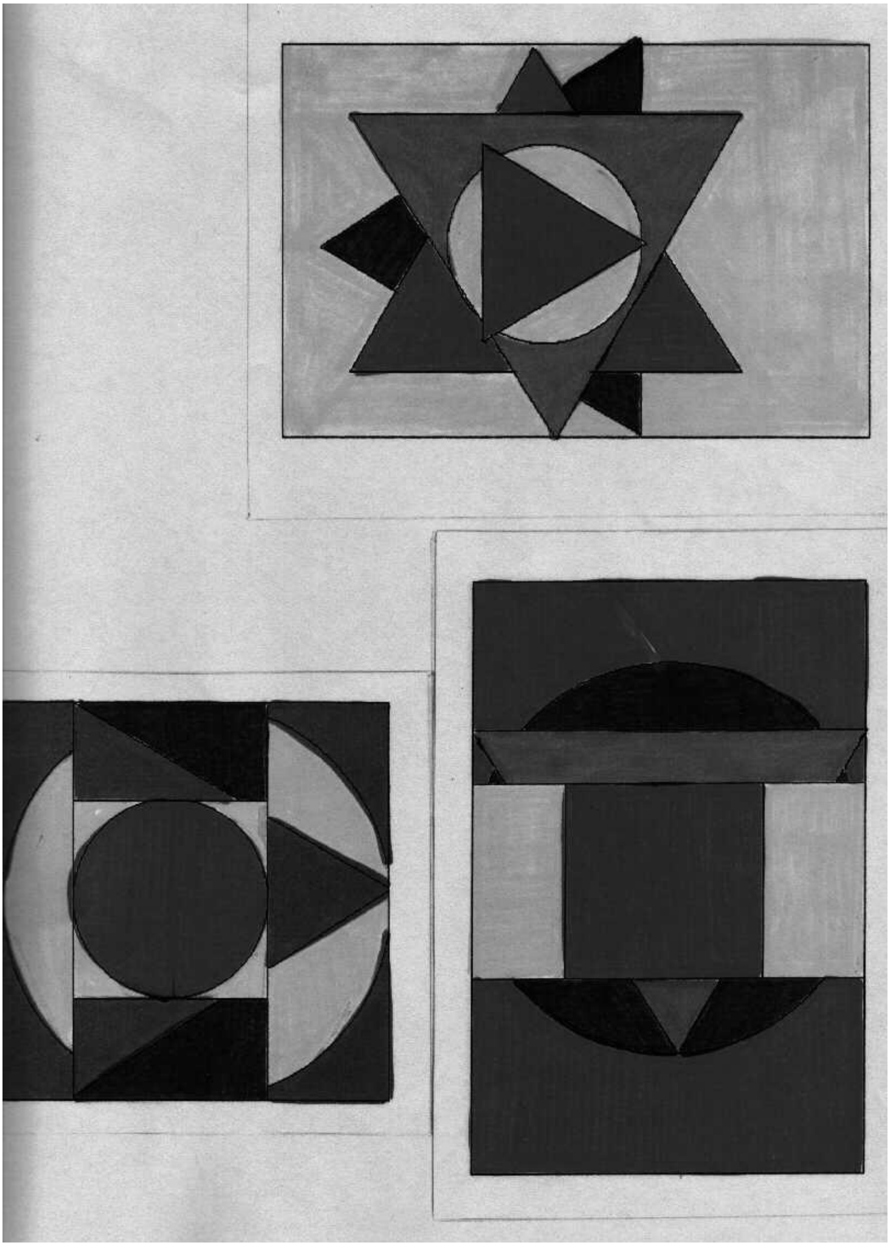
- Es esencial que reflexionen acerca de los contenidos de la escuela maternal y particularmente que comprendan el interés de proponer verdaderas situaciones de carácter matemático y lógico en los diferentes niveles de la escuela maternal.

Finalmente, el hecho de considerar y de experimentar *situaciones por adaptación** con niños pequeños, que todavía no disponen de conocimientos etiquetados y formales, permite a los profesores en formación comprender mejor el funcionamiento del proceso *por adaptación a un medio** (ver teoría de situaciones de Guy Brousseau).

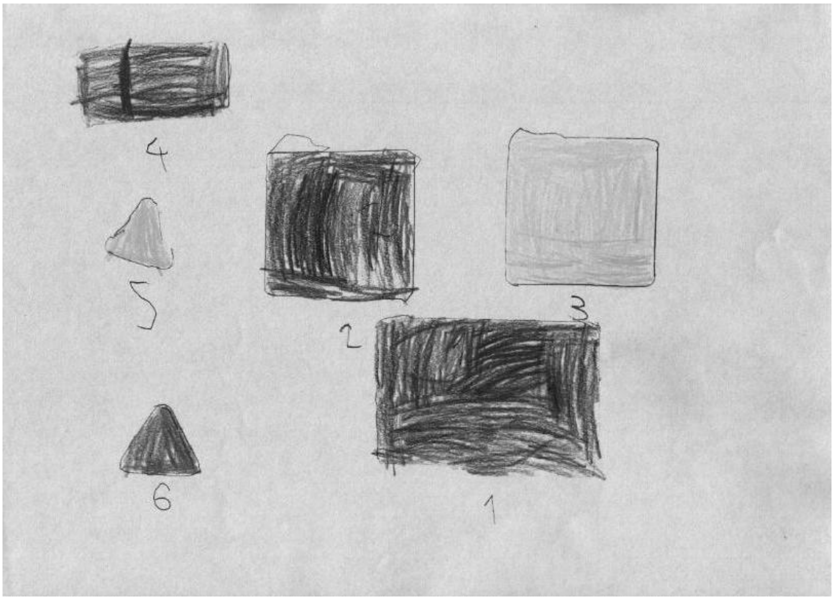
ANEXO 1

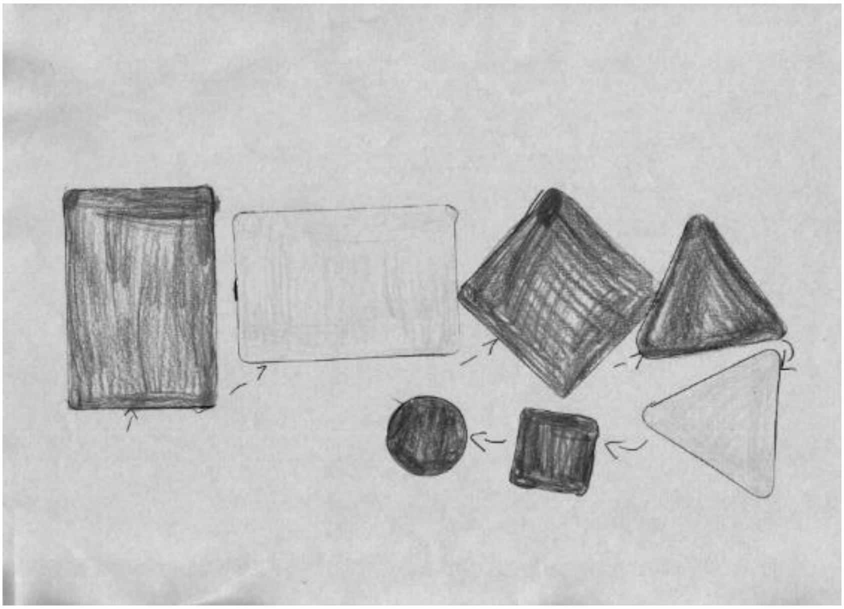


ANEXO 2



ANEXO 3: ejemplos de trabajos de niños





Enseñar la enumeración en sección media de maternal[1]

Joël Briand (2003)

Este artículo presenta un estudio detallado del concepto de enumeración de una colección de objetos.

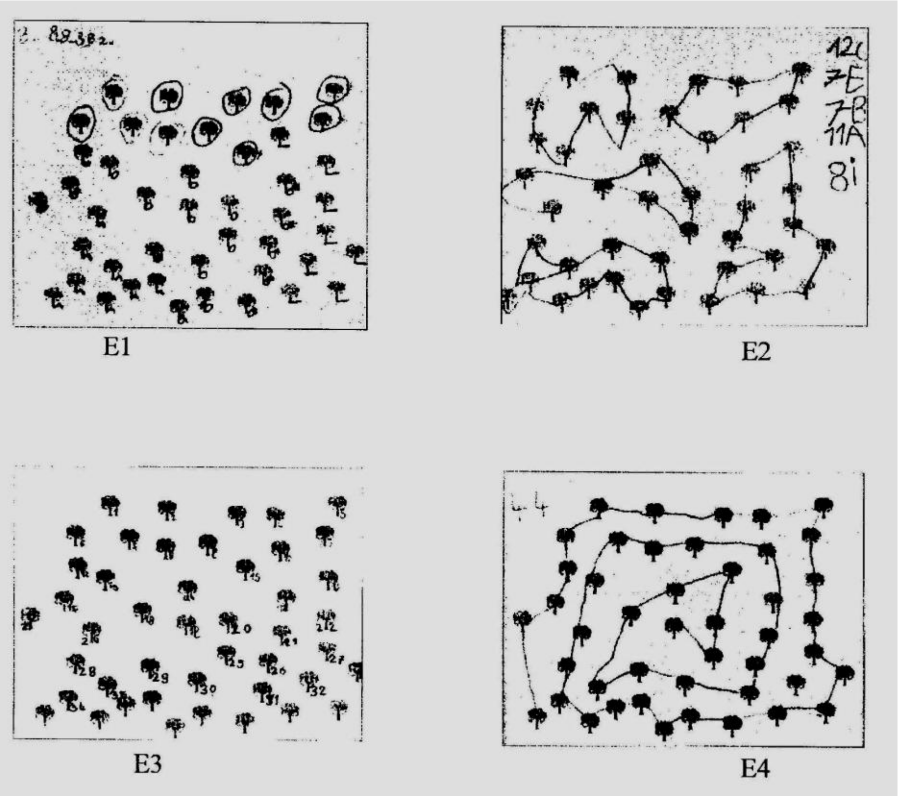
Introducción : existencia de un conocimiento que es necesario para el conteo

Antes de describir una serie de sesiones realizadas en la escuela maternal, vamos a estudiar el trabajo de alumnos de 2do año(niños de 5 años) cuando ellos deben contar el número de elementos de una colección. El análisis que sigue nos permitirá ubicar en perspectiva las sesiones de maternal que proponemos, con estas actividades numéricas en la clase de 1er año.

Los cuatro trabajos que estudiamos aquí forman parte de un estudio mas amplio realizado con 50 alumnos de dos clases de 1er año (niños de 4 años) [Briand 1993]. Presentamos aquí los trabajos de estos alumnos, llevados a cabo en el mes de marzo. Ellos disponen de una hoja de papel en la cual se han representado los árboles. El profesor solicita encontrar cuántos árboles hay. Para responder a esta pregunta, el alumno puede dibujar libremente sobre la hoja que se le ha dado.

Para llegar al resultado los alumnos desarrollan estrategias variadas :

[1] Para niños de 4 a 5 años.



E1 : construye sub-conjuntos de árboles, solamente contando (sin escribir) y efectuando una marca diferente a cada árbol para indicar el sub-conjunto. Efectúa una partición del conjunto de los árboles. Luego construye la escritura 8 8 8 8 8 2. El error proviene sin duda, de no tomar en cuenta el sub-conjunto designado por un círculo marcado por una cruz.

E2 : une algunos árboles para constituír un sub-conjunto y efectúa una partición del conjunto de los árboles. Designa al mismo tiempo cada sub-conjunto por una letra. Luego arma la pareja : número, letra que designa el sub-conjunto.

E3 : explora la colección en línea. El alumno escribe los números pero se detiene en el elemento N° 36 porque le es díficil controlar la estructura en línea. (en la observación estábamos seguros que el alumno sabía enunciar la secuencia de números mayores a 35).

E4 : organiza un camino "en caracol" que facilitará el conteo. El alumno encuentra 44 porque ha contado el número de saltos y no el número de árboles.

Constatamos que los alumnos desarrollan diferentes estrategias [Briand, 1993]. Por ejemplo, en los cuatro trabajos precedentes hemos constatado que E1 y E2 estructuran la colección en sub-colecciones, a través de procedimientos diferentes, y que E3 y E4 estructuran la colección estableciendo un orden, también con procedimientos diferentes.

Conclusión : cuando el profesor solicita una acción de conteo, el alumno debe accionar conocimientos (de naturaleza espacial) que le permiten explorar la colección que debe enumerar a fin de no olvidar ningún elemento y de no pasar dos veces sobre el mismo. Habitualmente estos conocimientos no son objeto de enseñanza. Sin embargo su disfuncionamiento ocasiona fracasos en el conteo.

Estos conocimientos son movilizados en la vida corriente ?
Tomemos un ejemplo conocido: ir a comprar al supermercado con la ayuda de una lista previamente preparada. La tarea será simple si la lista preparada se corresponde perfectamente con la organización de las góndolas del supermercado y con los hábitos del cliente. La lista en sí misma constituye un medio de control de las compras ya efectuadas y las que restan. Pero si la lista no ha sido concebida en función de la organización de las góndolas del supermercado, nuestro consumidor deberá efectuar un control, mas difícil, pasando revista de los elementos de su lista. Si dispone de un bolígrafo, podrá ayudarse efectuando una marca, podrá construír sub-listas por familias de productos, etc.

Estos conocimientos son movilizados en otros momentos de la escolaridad ?
Cualquiera sea el dominio de la construcción de las operaciones aritméticas, y mas tarde en el del análisis combinatorio, siempre se plantea el interrogante sobre el control de las colecciones de objetos que hay que enumerar, pero no podemos desarrollar este aspecto en el cuadro de este artículo.
Regresemos entonces a la actividad de conteo.
Para contar el número de elementos de una colección finita y que el alumno ve, él debe necesariamente:
1- Ser capaz de distinguir dos elementos diferentes de un conjunto dado.
2- Escoger un elemento de una colección.
3- Énunciar un número por una palabra (« uno » o el sucesor del precedente en una secuencia de palabra-número).
4- Conservar la memoria de la colección de los elementos ya elegidos.
5- Concebir la colección de los objetos aún no escogidos.
6- Recomenzar (por la colección de los objetos aún no escogidos) 2-3-4-5 mientras que la colección de los objetos a elegir no esté vacía.
7- Saber que se ha escogido el último elemento.
8- Enunciar el último número (designación oral).

Las etapas descritas en letra itálica (1,2,4,5,6,7) constituyen una tarea específica que llamamos *inventario*, en la cual se trata de pasar revista de todos los elementos de una colección finita una vez y solo una. Esta tarea caracteriza un conocimiento no enseñado que llamamos *enumeración,* por falta de otro nombre[1]

Tomando como referencia la *teoría de situaciones**, la cuestión es entonces, desarrollar una *situación fundamental** de la enumeración, es decir una situación en la que la enumeración de una colección de objetos presentes sea (independientemente de la actividad numérica) la solución al problema planteado.

En investigaciones anteriores, varios dispositivos de puesta en ejecución de la *situación fundamental** de la enumeración (en el cuadro de las colecciones finitas de objetos visibles) han sido elaborados. En particular fué realizada una modelización con la ayuda de herramientas informáticas [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1985 puis 1995]. Las experimentaciones fueron ya redactadas [Briand J. 1985].

Proponemos aquí:
- un ejemplo de organización de una situación de aprendizaje de la *enumeración* en el cuadro de la clase de sección media de la escuela maternal,
- el estudio de efectos producidos por leves modificaciones del dispositivo, frecuentemente sin que los docentes lo sepan.
-los cuestionamientos que han quedado en suspenso, en particular en los dominios conexos de saberes como la argumentación.

La situación fundamental de la enumeración y su análisis

Presentación del dispositivo y análisis a priori :

El dispositivo se orienta entonces a alumnos de 4-5 años.
Un alumno tiene en frente (sobre una mesa) varias cajas idénticas de cerillas las que tienen una pequeña abertura que permite el paso de una cerilla. Los palillos son las cerillas a las que se les ha quitado el fósforo. Estos palillos, en gran cantidad, se encuentran en una caja plástica. Se trata de colocar una cerilla y solo una en cada caja sin abrirla y saber cuándo se ha finalizado. Cuando el alumno estima que ha terminado, verifica o hace verificar por otro alumno (en principio puede ser por el docente). Para efectuar esta verificación, los alumnos asisten a la apertura de las cajas. Si hay solo una cerilla en cada caja y si ninguna caja está vacía, entonces el alumno ha tenido éxito.
Hemos preferido integrar este dispositivo en una práctica de clase habitual: la maestra presenta la actividad a todo el grupo, llamándola « juego de las cajas de cerillas ». Ella no hace trabajar a los alumnos. Luego de haber lanzado otros talleres autónomos, la maestra llama a tres niños: uno va a jugar y los otros dos

---
[1] En los diccionarios encontramos:
Enumerar : Enunciar sucesivamente las partes de un todo, pasar revista.
Del latín *enumeratio*, acción de contar completamente. En la etimología misma del nombre, el conteo parece necesario.

observan. Ellos jugarán después. Veremos mas tarde, en el contexto, cómo este dispositivo puede ser modificado.
El ritmo de trabajo elegido es hacer pasar alrededor de seis alumnos por sesión, lo que demanda entre cuatro y cinco sesiones para que los alumnos efectúen el mismo tipo de trabajo. Esta experiencia se desarrolla desde principios de noviembre del año 96 hasta mediados de febrero del año 97.

Características de esta situación *a-didáctica**
Analizamos qué puede estar en juego en esta situación para el alumno, particularmente en función de las posibilidades de acción, de elección, de decisión, de control y de *validación**, que él dispone. Prevemos los posibles campos de comportamientos.

Variables que hemos identificado:

V1- El tipo de espacio en el que alumno va a trabajar. Aquí, hemos dejado fija esta *variable*. Se trata del micro-espacio del plano de trabajo de la mesa. Cada niño trabaja sobre una mesa de 120x80.
V2- El número de cajas.
V3- El hecho que los objetos (cajas de cerillas) se puedan desplazar o no.
V4- La posibilidad de desplazar las cajas en un espacio restringido o mas amplio. (Vinculado a V1 et V3)
Observación: el marcado de las cajas no se sugiere ni se instituye.

Análisis de la tarea, familias de estrategias esperadas:
El alumno tiene cajas en frente de él. Su tarea consiste en formar una colección nueva de elementos « caja-cerilla » diferenciando permanentemente esta nueva colección de la colección cajas “aún” vacías.
Las estrategias posibles (eficaces o no) pueden ser las siguientes:

- el alumno toma una caja, una cerilla, introduce la cerilla en la caja, deposita la caja « a distancia » de las cajas que aún están sin llenar.
- el alumno toma una caja, una cerilla, la introduce en la caja, deja la caja entre las otras aún sin llenar.
- el alumno asocia una cerilla a cada caja, luego introduce las cerillas en cada caja. (Existen pocas chances que esta estrategia aparezca.)

VARIANTES PREVISTAS DE LA SITUACION

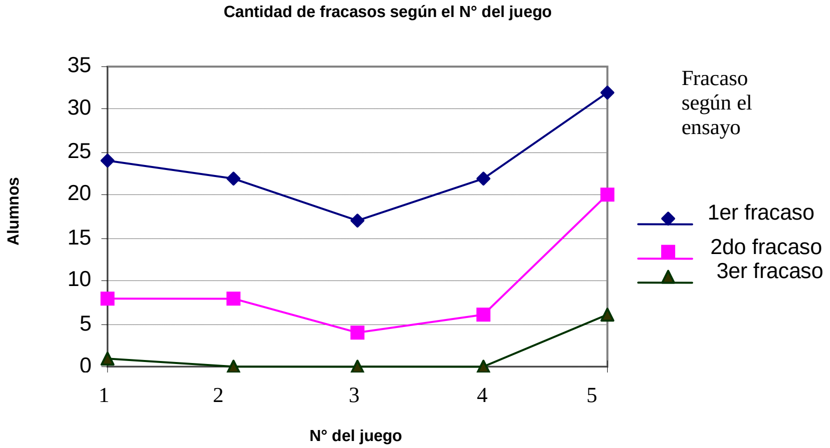
Primera variante : 8 cajas desplazables sobre una mesa de 120x80.
Segunda variante : 20 cajas desplazables sobre una mesa de 120x80.
Tercera variante : 20 cajas fijadas a un soporte (vinílico blanco). Un marcador puesto a disposición.

A las que hemos agregado dos variantes:
- Durante el segundo juego, constatamos que los alumnos agitaban las cajas para controlar la presencia o la ausencia de cerillas. Entonces decidimos colocar una

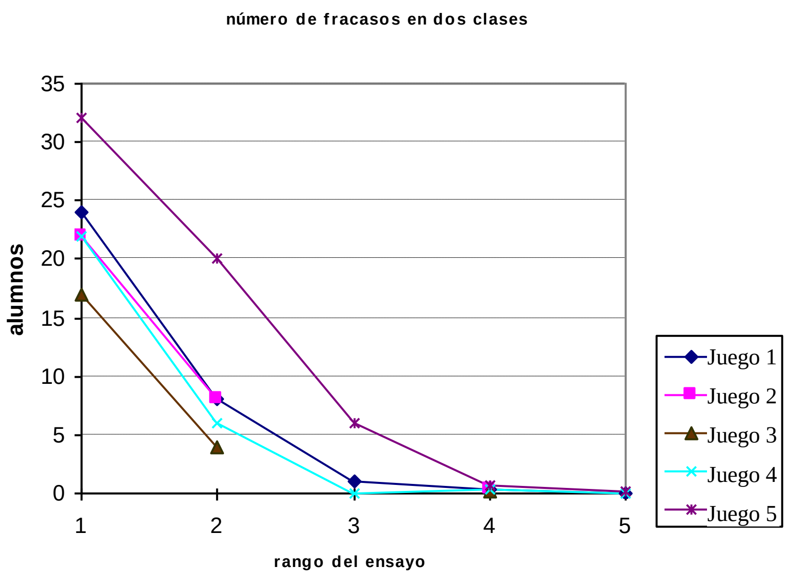
cerilla en las cajas, y la consigna fué: “tienen que haber dos cerillas en cada caja”. Luego de este artículo, estudiaremos en qué esta decisión ha sido inútil.
- Una colección de 20 cajas vuelve inútilmente compleja la situación. Lo hemos observado desde los primeros alumnos. Por lo tanto, reducimos inmediatamente a 15 el número de cajas.

	Configuración material	**Motivo de la elección**	**Análisis efectuados luego de la experimentación**
JUEGO 1	8 cajas desplazables		- Estrategias para completar las cajas, elaborar una colección. - Estudio de enumeraciones inducidas involuntariamente.
JUEGO 2	20 cajas desplazables	Cambio significativo del número de cajas.	-Influencia del pasaje de 8 a 20 sobre los resultados y sobre las estrategias utilizadas.
Primera fase colectiva		Hacer formular las estrategias. Hacer anticipar un resultado.	- Pasaje de las proposiciones a los predicados y luego a los cálculos sobre predicados. - Tratamiento de los errores por el docente.
JUEGO 3 (2)	20 cajas desplazables		
JUEGO 4	15 cajas desplazables. Una cerilla presente en la caja.	El sacudimiento (dos cerillas) 15 porque 20 vuelve demasiado extensa la validación	Estudio detallado del « sacudimiento».
Segunda etapa colectiva	15 cajas desplazables. Una cerilla ya presente en la caja.	Hacer formular las estrategias Hacer anticipar un resultado	- Un saber y su enseñanza posible o imposible. - Límites de este tipo de sesiones. - Ausencia de una situación a-didáctica de formulación
JUEGO 5	15 cajas no desplazables. Nuevamente una sola cerilla.	Enumerar una colección de objetos no desplazables. Hacer marcas.	Análisis de la complejidad de la tarea.

LOS RESULTADOS observados



Este esquema muestra que para cada situación, los progresos son evidentes. El encadenamiento de los juegos 1, 2 y 3 muestra que en cada juego, el número de fracasos en el primer intento se vuelve mas importante que el número de fracasos en el último intento del juego precedente, pero al mismo tiempo, el progreso realizado en tres ensayos por juego es significativo. El pasaje a dos cerillas y sobre todo el bloqueo de las cajas de cerillas (juego 5) aumentarán el número de fracasos dentro del mismo nivel de ensayo.



Este segundo esquema muestra que siempre hay progreso, sea cual sea el juego. El progreso no se mide entonces únicamente de una sesión a la otra, de un juego al otro, lo que sería negar el aporte de las modificaciones de variables significativas en el interior de una misma configuración de juego.

Observación : Pocos alumnos fracasan luego de tres tentativas. Para estos, tomamos el compromiso de no confrontarlos al fracaso reiterado. Proponemos que ellos soliciten volver a jugar cuando lo desean. Es una relación relajada con la situación que debe ser mantenida para que el alumno desee lograr el éxito en la actividad, ver que lo que está en juego le concierne.

Análisis detallado del juego 1 : puesta en evidencia de los efectos didácticos.

Las estrategias reiteradas :

Los alumnos logran tener éxito en el juego 1 (24 fracasos en la primer tentativa, 7 en la segunda (de lo cual 24-7 éxitos) y 1 en la última tentativa (de lo cual 7-1 éxitos))[1].

Las estrategias puestas en ejecución para tener éxito son :
1- Alejar las cajas llenas
- sobre la mesa
- sobre la mesa y alineadas, o al borde de la mesa.
- sobre la mesa y alineadas y apiladas.

2- Identificación visual de un camino posible, a priori, que permite una exploración exhaustiva de la primera colección.
- el alumno ubica nuevamente la caja llena en su lugar inicial.
- o bien el alumno no se preocupa de la ubicación de la caja llena.

3- Organización previa de la colección de las cajas vacías.

Observaciones :
- Colocamos el « sacudimiento » aparte porque se incorpora en las estrategias reiteradas.
- El ordenamiento previo de las cajas vacías (en línea) para controlar mejor la exploración futura, no apareció jamás.
- La consigna impide la realización de la estrategia que consistiría en ubicar las cerillas sobre las cajas (una sobre cada caja) o en introducirlas hasta la mitad.

Aparecen por consecuencia dos efectos de la ergonomía :una colección no construida y una enumeración inducida.

Primer efecto :
Los descritos son los resultados de dos clases que llamamos GM1 y GM2. Los resultados obtenidos en GM1 y GM2 en la primer tentativa son :

[1] Los alumnos que tuvieron éxitos no vuelven a jugar.

F fracasos

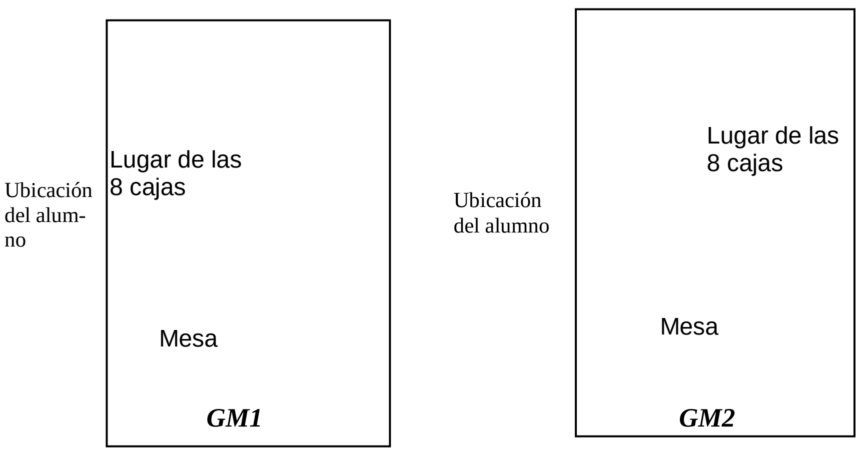
E éxitos

	F	E
GM1	13	11
GM2	11	16

Los resultados aparentan ser parecidos. Sin embargo notamos al inicio de la observación (primeros grupos de 6 alumnos) en GM1 luego en GM2, una sensible diferencia de resultados: 5 fracasos sobre 6 en GM2, 6 éxitos sobre 6 en GM1.

Percibimos que la situación no era presentada de la misma forma a las dos clases, que cada maestra había trabajado la sesión a su manera y que se habían hecho dos interpretaciones de la sesión :

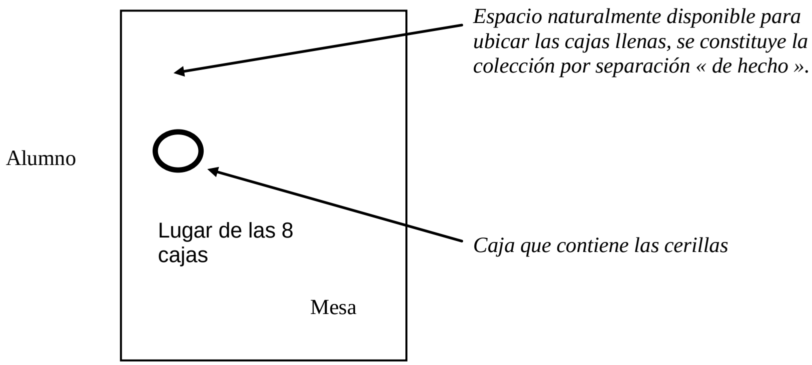
- En la clase GM2, la maestra ubica las cajas de cerillas lejos del alumno y desordenadas. Ella puso las cajas en una caja mas grande (de zapatos) que vuelca sobre la mesa. En GM1, las cajas son ubicadas bastante cerca del alumno.



Para colocar una cerilla en cada caja, el alumno debe :
1- tomar una caja,
2- tomar una cerilla *(estas dos acciones pueden permutarse*),
3- colocar la cerilla en la caja,
4- apoyar la caja llena separándola de las que aún no lo están,
5- recomenzar esta secuencia.

A partir de la segunda caja, para tener éxito es necesaria la constitución de la colección de las cajas llenas.
En el segundo caso de GM2, la acción 1 obliga la extensión de la mano, levantarse un poco de su silla. La acción 4 se realizará con menos costo, apoyando la caja delante de sí. No existe ninguna razón para que el alumno apoye la caja entre las que aún no están llenas. El éxito de la actividad, puede entonces constatarse aunque el alumno no haya decidido aún separar las dos colecciones. En el caso de GM1, la acción 1 no implica ningún desplazamiento, la acción 4 debe sin embargo acompañarse de un gesto voluntario (costoso) de separación para constituír las dos colecciones.
En el primer caso, por razones ergonómicas elementales, el alumno no tiene (o tiene apenas) a cargo la enumeración. La segunda colección (cajas-cerillas) puede construirse totalmente sin su conocimiento.
Podemos entonces, formular la hipótesis que la diferencia de resultados puede explicarse ampliamente por esta diferencia de organización.

Segundo efecto :
Otra dificultad ergonómica jugó como una *variable de la situación** : el lugar de la caja que contiene las cerillas. Según el lugar que ocupaba sobre la mesa, la caja constituía o no, un medio (involuntario) puesto a disposición de los alumnos para que ellos no confundan las cajas llenas de las cajas a llenar, jugando el rol de separador natural:



Observación : recién hemos tomado consciencia de estos fenómenos luego de la primera observación de seis alumnos en una y otra clase . Luego, los dispositivos fueron idénticos : cajas ubicadas delante del alumno, caja que contiene cerillas en el borde de la mesa.

Estudio detallado del efecto del sacudimiento
En uno u otro momento, los niños sacuden para saber si hay una cerilla en la caja. Ejemplo 1 : Román ubica las cajas llenas con la vacías. Pierde. En el segundo intento, escucha el ruido, sacudiéndolas. Vuelve a tomar toda la colección y clasifica las vacías y las llenas.

Ejemplo 2 : Damien en GM1 toma una caja, ya llena. Descubre el ruido de la cerilla en la caja. Sacude otra caja y recomienza. Clasifica basándose en el ruido, sacude pero no realiza una organización espacial (no concibe) de la colección de cajas llenas. Entonces, coloca dos cerillas en una caja.
Constataciones :

- El ruido es un acontecimiento (que puede tener un carácter lúdico evidente).
- Puede convertirse en una propiedad que caracteriza un nuevo objeto : caja con cerilla.
- Puede ser un motor de clasificación de estos objetos a fin de constituír una nueva colección.
- Puede, en interacción con una organización espacial, ser una ayuda para el control de la *enumeración*.

El alumno que se basa solamente en el ruido para clasificar, sin separar las cajas llenas (por lo tanto, sin controlar la nueva colección de cajas llenas), se encuentra frente a una tarea muy costosa y de poco fiar. Por ejemplo, hemos constatado que muchos alumnos utilizan la técnica del sacudido, pero no de manera sistemática. Por lo tanto, colocan dos (o mas) cerillas en una caja. En fin, para decidir que la tarea ha finalizado, hay que estar seguro que todas las cajas contienen una cerilla, entonces hay que sacudirlas a todas, pero la cuestión es nuevamente explorar la colección de manera exhaustiva !

En conclusión, contrariamente a un primer análisis que podría ser hecho, el « sacudimiento » de una caja no es suficiente para lograr el éxito. No constituye una estrategia que permite evitar la adquisición del saber a alcanzar (constitución de una colección por práctica enumerativa). Sin embargo, incluso por el control incompleto que permite, aumenta la probabilidad de lograr el éxito sin tener bien logrado el procedimiento enumerativo .
Análisis del pasaje del juego 1 al juego 2 (pasaje de 8 a 20 cajas) :
Formulamos la hipótesis que el pasaje de 8 a 20 cajas permitirá explicitar mejor las estrategias de control y de constitución de la colección de las cajas llenas.[1] Los resultados examinados mas arriba han mostrado que no existían diferencias significativas sobre los resultados si se tomaba en cuenta el trabajo sobre las dos tentativas.

Los resultados en GM2 de los tres intentos del primer juego y los dos del segundo son los siguientes:

[1] Pero, no preparamos a los alumnos para este projecto : las preguntas « Sabrás hacer con mas cajas ? », igual que « quién piensa que puede ganar ?», no fueron propuestas a los alumnos.

ESTRATEGIA	PRECISIONES	Juego 1	Juego 2
- No hay estrategia observada		2	2
- Separación de las cajas llenas.			
	- Sobre la mesa	10	8
	- Sobre la mesa y alineadas o en el borde de la mesa.	0	1
	- Sobre la mesa y alineadas y/o apiladas	8	11
- Identificar un camino, a priori, que permite una exploración exhaustiva de la primera colección.		2	
	- El alumno re-ubica la caja llena en su lugar inicial.		
	- El alumno no se preocupa del lugar de la caja llena.	5	5
- Organización previa de la colección de las cajas vacías.			1

6 alumnos sacuden las cajas en el Juego 1. 12 alumnos sacuden las cajas en el Juego 2 (en diferentes momentos de la actividad).

Una causa de error identificada es una ruptura en la secuencia : (B : caja ; A : cerilla)
B- A, B-A, B-A, B- A …

O la secuencia:
A-B, A-B, A-B, A-B, …

Por ejemplo, la secuencia :
B- A, B-A, A-B-A, B-A.

Conduce a colocar dos cerillas en una caja u olvidar una cerilla, según el momento en que se produce la ruptura.
Ejemplo : Tristan organiza la segunda colección en grupos ordenados de 4. Construye una pila sobre una plancha de 4x2 que delimita el espacio de la segunda colección. Pero, él observa lo que la maestra hace y para la tercer caja, coloca una cerilla, luego otra.
Es la pareja (cerilla, caja) que se rompió, la pareja (caja, cerilla) se incorpora, de lo que se desprende, dos cerillas en una caja.

Observamos que la etapa de *validación** es un momento en el que los alumnos :
- piensan que es necesario abrir las cajas que faltan, igualmente luego de haber abierto una caja que no contenía cerillas o que contenía mas de una ;

- pueden dar significado a las condiciones de éxito o de fracaso.

Conclusiones :

- el pasaje de 8 a 20 cajas no modifica significativamente los resultados de los alumnos, en términos de éxito-fracaso;
- las nuevas dificultades permitieron la emergencia de estrategias mas marcadas de organización (apilados, puestas en línea, borde de la mesa) ;
- la etapa de *validación** est muy fastidiosa.

Análisis de las etapas colectivas

Cuestiones de lógica

La primera etapa colectiva (seguidamente del Juego 1) permitió :

- formular una estrategia (« hay que dejar al costado »). Esta estrategia se formuló ocho veces durante la entrevista.
- tomar conciencia de la lógica en acto que se desarrolla detrás esta experiencia y que no fue tomada en cuenta al principio o que fue sub-estimada. « Perdí», «perdí un poco mas », « gané », « gané para esta caja ». Los alumnos pasan de la enunciación del valor de verdad de una proposición ("hay una cerilla en esta caja") a la elaboración conjunta de predicados : « si existe una caja sin cerilla... » « hay una cerilla en esta caja... », así que de un cálculo de éstos : « entonces, perdió », « por el momento es justo ».

Existe aquí un trabajo a seguir. Pensamos que esta construcción se hace dialécticamente con la construcción del concepto de colección. Siendo la hipótesis que la formulación de tales predicados y los cálculos sobre los predicados participan en la constitución de la colección, que esto, **« cimienta » los objetos para formar una colección**.

En los momentos colectivos, constatamos que los términos empleados no tenían un status muy claro. Por ejemplo, los términos « verificar », « tener éxito », « fracasar », califican tanto un éxito local (una cerilla en ésta caja) como el éxito o el fracaso en la actividad (« tu has fracasado »). El docente debe entonces improvisar un discurso en torno a los predicados sin que se haya negociado un contrato preciso sobre las exigencias.

La tabla siguiente muestra los comportamientos esperados, los saberes a alcanzar desde el punto de vista del trabajo sobre las proposiciones y los predicados, y del punto de vista de las intervenciones del profesor.

Momento estudiado	Análisis lógico	Análisis de los comporta-mientos	Saber que se pretende al-canzar	Intervención posible
Sacudir las cajas (antes y des-pués de la acción)	La información dada por el ruido permite saber si hay una (o varias) ceri-llas en la caja.	Permite asegu-rar la presencia de una cerilla.	Sacudir antes permite contro-lar si hay ceri-lla. Sacudir después no permite controlar si la caja estaba vacía.	
Descubrir una caja vacía.	Significa el fracaso del juego.	Puede significar fracaso para ésta caja. (pro-posición) Puede significar fracaso en el juego (predica-do)	Es suficiente que una caja no contenga ceri-llas. No es necesario verificar en las que faltan.	« Es suficien-te » puede ser identificado en la acción (se interrumpe al momento de la validación en caso que una caja aparezca vacía ?). Puede ser iden-tificado en el lenguaje.

Cuestiones de *contrato didáctico**

Durante las observaciones, constatamos dificultades persistentes para los docentes. Describiremos esas dificultades, sin efectuar un estudio detallado :

- En principio, el desarrollo de estas sesiones plantea la cuestión de lo que está en juego. Cuál es la situación en juego que es necesario mantener para que los alumnos tomen este problema por su cuenta ? La situación permite al niño si ha fracasado o a tenido éxito. Luego de la apertura de una caja, cuál es la actitud que el maestro debe tener? Es menester que éste muestre que tener éxito y fracasar no son dos salidas a las que convenga atribuírles el mismo valor. Sin embargo los docentes en maternal, aceptan a regañadientes sostener este contrato, porque piensan que de esa manera desalientan a los alumnos.
- Para conducir esta etapa, hemos constatado que el alumno toma poco a poco el projecto por su cuenta, si se le interroga sobre lo que él va a hacer la próxima vez y no sobre lo que ya hizo. Esto supone para el docente que el aprendizaje que pretende sea alcanzado lo visualice no solamente en las sesiones en sí mismas, sino también de una sesión a otra, comprendiendo ésto a los niños pequeños. La anticipación de una sesión a otra nos parece un elemento del *contrato didáctico**.
- La negociación del contrato no es simple : el docente se siente molesto cuando se trata de interrumpir en ciertas circunstancias. Por ejemplo : el docente no se

atreve a decir a T. que ha utilizado el buen método pero que se equivocó porque estuvo distraído en tal momento.
- El docente se siente frecuentemente molesto cuando se da una respuesta correcta: el silencio se interpreta como el anuncio de un error.
- El tratamiento de los errores en la relación didáctica es también un punto delicado; algunos errores que cometen los alumnos, pueden ser tratados en clase, otros no. Tal error de un alumno puede ser difícil a tratar en público. Los niveles de explicación no son los mismos para niveles de saber diferentes. Una explicación fácil a dar a un alumno puede volverse incomprensible para otro alumno. El riesgo para el docente, es conformarse con una interpretación escolar, de regresar al projecto escolar, mientras que muy frecuentemente se trata de concepciones mas finas que están en juego. Existen, entonces, errores que es interesante corregir en público, otros que se arreglan con un solo alumno y otros que ni siquieran pueden ser debatidos (saberes ausentes).

Análisis del juego 4 : hacia una situación a-didáctica de *formulación**

Por razones ya evocadas, llevamos el número de cajas a 15. Los resultados no son significativamente diferentes de las sesiones precedentes. El sacudimiento se convirtió en un ritual, algunos alumnos ríen , otros intentan reconocer el ruido de dos cerillas en relación al de una cerilla.

La etapa de debate no provoca *formulación** en el interior de la situación : en nuestro dispositivo, un niño observaba a otro efectuar el trabajo. Esto era útil ? Nos parece que se construyen muchas ilusiones en relación a este sujeto. Muchos roles son posibles para el alumno observador. Tomemos dos posibles roles, habituales: un alumno observa trabajar, en vista de hacer la misma tarea, o bien en vista de prever si ése, a quien observa tuvo éxito o no. En el primer caso, ciertos niños toman este lugar como un lugar en una fila de espera. Estos niños no tienen el compromiso, ni la responsabilidad en la acción o en la formulación. En el segundo caso, muy frecuentemente el alumno observador no puede explicar las razones de un eventual fracaso. El repite una frase hecha : « él ha olvidado una caja » y da entonces un (su) método para « tener éxito ». Es raro que un alumno pueda analizar lo que ha fracasado en el método del otro.

Otro tipo de rol, por una organización del trabajo de a dos, permitiría encontrar un nuevo problema en el que el conocimiento intervendría obligatoriamente bajo la forma de lenguaje. Sería necesario para ello, que el equipo sea formado para resolver una tarea común. Demos un ejemplo de funcionamiento posible. Consigna *« Van a trabajar de a dos. En un momento dado solicitaré al que haya comenzado, de dejar el lugar al otro para que termine la tarea. Podrán hablarse. Quién piensa poder lograrlo ? »*.En una perspectiva de trabajo de marcado (juego 5 : ver mas adelante), la interrupción del juego podría hacer intervenir el marcado (un tipo de marcado, una identificación). Para ésto, será suficiente precisar en la consigna si las consignas de pasaje de relevo pueden efectuarse por escrito u oralmente.

Análisis del juego 5 (cajas bloqueadas sobre una bandeja)
La construcción del dispositivo necesita que se tomen en cuenta varios problemas:
- las cajas adheridas a una pizarra blanca ;
- se pueden abrir las cajas sin ser molestado (en vista de la *validación**) ;
- La disposición de la colección se elige sin estructura espacial evidente.

Hemos elegido cuatro estrategias que, a su manera, contribuyen a poner en evidencia la complejidad de una *enumeración*. Definimos como ruptura el momento de la actividad del alumno en que debe quitar la mirada de la colección. Para lograr el *inventario** de la colección, el alumno debe entonces memorizar la colección constituída (cajas - cerillas).

Alumno	acción circular	rupturas visuales	memoria	control
S.	Ai : (ruptura), tomar una cerilla, elegir una caja no encerrada, colocar una cerilla, (ruptura) tomar el bolígrafo, encerrar, (ruptura) apoyar el bolígrafo, Ai+1 : tomar una cerilla, etc.	3 rupturas por círculo, tantos círculos de acción como elementos N de la colección.	A partir de A2, el alumno debe memorizar la última caja encerrada aún sin llenar.	Control por una memorización espacial. N controles a efectuar.
M.	Ai : encierra n cajas (no apoya el bolígrafo) , (ruptura) toma n cerillas y coloca n cerillas. Ai+1 : encierra n cajas, coloca n cerillas.	(n=2) 2 ruptures por círculo. N/2 círculos.	A partir de A2, el alumno debe memorizar las n (n=2) últimas cajas encerradas aún sin llenar.	Control por una memorización espacial. N/2 controles a afectuar.
E.	A1 : Coloca una marca al pie de cada caja. Ai : coloca una cerilla, borra la marca correspondiente. (ruptura) Ai+1 : coloca una cerilla, borra la marca correspondiente.	Una ruptura por círculo	No hay nada a memorizar.	Ningún control a efectuar.
C.	Ai : (ruptura), tomar una cerilla, elegir	3 rupturas por círculo. Tantos	A partir de A2, el alumno debe	Clément deja la mano sobre la

	una caja no encerrada, colocar una cerilla, (ruptura) tomar el bolígrafo, encerrar, (ruptura) apoyar el bolígrafo, Ai+1 : tomar una cerilla, etc.	círculos como elementos N de la colección.	memorizar (espacialmente) la última caja encerrada aún no llena.	caja. O bien no quita sus ojos de la misma.

Según los procedimientos adoptados, el número de rupturas (que contribuye a definir la complejidad de la tarea) varía de uno a tres por círculo de acción.

Consecuencias de la complejidad, interés para el conteo. Retomemos la *situación fundamental** de la *enumeración*, esta vez bajo la forma que propone un programa informático [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L., 1995]. El logiciel propone al alumno, recorrer visualmente una colección de objetos. El recuento (mémorizado por la máquina) de cada uno de los objetos una vez y solo una es la solución del problema propuesto. No es necesario efectuar otra acción más que el solo pasaje de un objeto al otro. A diferencia del programa informático, la situación de las cajas de cerillas necesita que el niño tome las cerillas, cada vez en un lugar preciso. Pero las cajas son desplazables. Los alumnos aprovechan esto para sobrepasar la dificultad de tomar las cerillas. Solamente no se deben cometer errores en la secuencia cerilla-caja-cerilla-caja, etc. Por el contrario, la situación de las cajas fijas va a crear las rupturas estudiadas precedentemente. El marcado adiciona, provisoriamente, una dificultad. En el caso de las cajas desplazables, el control se ejerce por la fuerza de las cosas ya que la caja aludida se la tiene frecuentemente en la mano.
Podríamos interrogarnos entonces acerca del interés de volver tan difícil la situación, porque el fin es construír situaciones de *enumeración* que favorezcan ulteriormente el conteo de pequeñas colecciones. En efecto, esta situación pone en ejecución procedimientos de *inventario* mas complejos que los que serán necesarios para el conteo. El recorrido exhaustivo de una colección mostrada no exige que se quiten los ojos de la colección, pasando de uno a otro de sus elementos. En el trabajo que hemos estudiado, solo la estrategia de C permite, por un marcado « de lo previo », disminuír la complejidad y convertirla igual a la que se encuentra al momento de la actividad de conteo. Sin embargo, pensamos que este trabajo de organización de la tarea constituye en sí una actividad cognitiva interesante.

Conclusión

Nuestra preocupación era hacer funcionar *situaciones a-didácticas** adaptadas a la enseñanza de la *enumeración* colecciones visibles en el contexto de la adquisición de los primeros números, a fin de transformar la *enumeración* en objeto de saber. Es por ello que organizamos la ingeniería que hemos descripto. Pensamos haberlo logrado en el dominio de lo pre-numérico y haber contribuído a identifi-

car los saberes que la escuela maternal puede tomar a su cargo, sin por esto « hacer un primer grado anticipado ».
Las observaciones llevadas a cabo mostraron un campo de investigación que puede efectuarse al nivel de la escuela maternal. Esto concierne la organización de situaciones de *formulación** que provoquen actividades espontáneas de lógica. Hay aquí (al menos) dos aspectos : la situación en sí misma y las modalidades de verificación del resultado que se acompañan de un discurso, difícil de llevar a cabo porque trae consigo cuestiones de lógica en acto. En este caso, identificamos tres niveles de discurso[1] : el de la acción (informe técnico), el del vocabulario de acción para hablar de la acción (informe tecnológico), el de la enunciación de reglas de generalidades, declaraciones (informe teórico). Sin embargo, en ciertas etapas, el docente debe actuar en estos registros diferentes, de manera empírica. Estamos persuadidos que un trabajo en este dominio podría contribuír a hacer progresar a los alumnos en el aprendizaje de la argumentación fundada en situaciones que ellos dominan.

[1] Nos referimos a la organización praxeológica que describe Chevallard Y.[Chevallard Y.,1997]

Apéndice

Seguidamente al estudio, descripto más arriba, habíamos decidido organizar el trabajo con niños de 4 a 5 años y los de 5 a 6 años según un nuevo plan que tiene en cuenta los resultados. Presentamos aquí el nuevo plan de trabajo actual :

	Configuración	**Razón de la elección**
JUEGO 1	8 cajas desplazables	
JUEGO 2	8 cajas desplazables. 2 alumnos. Uno que observa. Tarea interrumpida.	Modificar el rol del observador.
Primera etapa colectiva	Simular etapas de validación con el fin de hacer formular de manera mas precisa.	Hacer formular las estrategias, Hacer anticipar un resultado
JUEGO 3	15 cajas desplazables. 2 alumnos. El segundo no observa. Consigna oral del primero al segundo al momento de cambio de rol.	Hacer formular sobre la enumeración y la constitución de colecciones.
JUEGO 4	15 cajas desplazables constituídas por cajas de formas y colores diferentes.	Hacer trabajar sobre las clasificaciones cruzadas.
JUEGO 5	15 cajas no desplazables. El segundo no observa. Trazos escritos en el pizarrón para el receptor en el momento del cambio de rol.	Hacer formular, constituír resultados de la enumeración y los procedimientos de marcado.

Bibliografía

BRIAND J. (1985) *« Logiciels d'enseignement et situations didactiques »*. Mémoire de DEA Bordeaux I.
BRIAND J. (1993) *"L'énumération dans le mesurage des collections* ». Thèse Bordeaux I
BRIAND J., BROUSSEAU G., OYALLON J.L. (1995) : logiciel *« A nous les nombres* » Profil ed. PARIS.
BRIAND J. (1999) "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques" *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 19-1. la pensée sauvage Grenoble.
BRISSIAUD R. (1989) *"Comment les enfants apprennent à calculer ?*" RETZ, Paris.
BROUSSEAU G. (1984) "*L'enseignement de l'énumération*" Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde.
BROUSSEAU G. (1986) "*Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*". Thèse d'état Bordeaux I.
BRUN J. (1994) « Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques ».in *"Vingt ans de didactique des mathématiques en France*" (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot). La pensée sauvage, Grenoble.
CHEVALLARD Y. (1997) "Familière et problématique la figure du professeur". *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 17- 3. La pensée sauvage Grenoble.
CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" *Recherches en Didactique des Mathématiques* : RDM vol 12/2.3 la pensée sauvage Grenoble.
DIGNEAU J.M. (1985) "*Le saut informationnel*". Mémoire de DEA Université Bordeaux I.
PIAGET J. (1955) "*De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*" Paris.

Enseñanza para los alumnos en dificultades

Dos ejemplos de situaciones de enseñanza de matemáticas para alumnos con dificultades

COPIRELEM, bajo un proyecto de Denis Butlen
(1996)

Este texto fue editado en un folleto en septiembre de 1996 y difundido por la Dirección de las Escuelas del Ministerio de Educación Nacional en todas las Inspecciones Académicas, con el mismo título y en la sección de Acompañamiento de los Programas de Matemáticas.
Se trata de caracterizar a los alumnos con dificultades en la escuela primaria y de analizar algunas respuestas comunes de profesores de las escuelas en relación a estas dificultades. Se proponen dos ejemplos de situaciones para el aprendizaje matemático en estos alumnos.

A. INTRODUCCIÓN

Esta contribución se apoya en los resultados de investigaciones acerca de la enseñanza de las matemáticas a alumnos con dificultades en la escuela primaria realizadas por D. Butlen y M. Pezard [5], y por M.J. Perrin-Glorian [14, 15, 16].

Toda enseñanza que propone luchar contra el fracaso escolar debe proponer a los alumnos situaciones de aprendizaje que tomen en consideración las características específicas para un público con dificultades.

En primer lugar, trataremos de describir algunos rasgos característicos de los alumnos con dificultades, y mostraremos ciertas prácticas profesionales de profesores que se dirigen a una clase con numerosos alumnos con tendencia al fracaso escolar.

Nos apoyamos en este análisis para describir, en segundo lugar, un dispositivo de *nueva mediación*. Proponemos luego elementos de respuesta a las siguientes preguntas:

1. A partir de la producción regular de escritos colectivos que resumen lo que se ha aprendido durante un período dado, ¿cómo ayudar a los alumnos a formular, a descontextualizar y, de manera más general, a retener las nociones que se estudian frecuentemente en clase? ¿Cómo pueden contribuir a ésto las situaciones de *repaso*?

¿Cómo utilizar estas fases de repaso para ir más allá de la simple descripción y la etapa de la acción para enseñar a los alumnos a realizar anticipaciones de los aprendizajes escolares?

2. ¿Cómo ayudar a los alumnos a resolver un problema complejo, ofreciéndoles ayudas limitadas, sin reducir la tarea a una simple ejecución de reglas y sin limitar el sentido matemático de la situación?

B. NIÑOS CON DIFICULTADES. PRIMER ANÁLISIS

1. ¿Cómo se manifiestan las dificultades de los alumnos de la escuela elemental?

Nos basamos en dos artículos: "Reflexiones sobre el rol del maestro en las situaciones didácticas a partir del caso de la enseñanza a alumnos con dificultades" ("*Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté*", *PME 1992*, M.J Perrin) y "Una experiencia de enseñanza de las matemáticas para alumnos con dificultades, cursando 6to año (alumnos de 11 años)" ("*Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté*", *Repères-IREM* n°3, Topiques-Editions (1991), M.J. Perrin-Glorian et D. Butlen).

Presentamos aquí varias características de un alumno con dificultades en matemáticas. Cabe precisar que éstas no se encuentran necesariamente en su totalidad en el mismo alumno; sin embargo, a menudo comprobamos un efecto de acumulación a largo plazo.

Dificultad para capitalizar el saber

Los alumnos con dificultades tienen problemas para recordar lo visto en el curso, para memorizar vocabulario y propiedades. El aprendizaje de memoria no aporta una solución; en clases de 6º año por ejemplo, pudimos constatar que hay alumnos que conocen perfectamente dos definiciones de la mediatriz de un segmento pero que no saben utilizar ninguna de ellas para resolver un ejercicio.

Falta de confianza en los conocimientos previos

La ausencia de conocimientos anteriores sólidos a los cuales referirse impide que estos alumnos organicen e integren el nuevo saber : para ciertos niños, nada es seguro, todo puede ponerse en duda, ya que habitualmente se equivocan.

Carencia en las representaciones mentales y ausencia de un proyecto implícito de re-utilización de un conocimiento.

Pareciera que para los alumnos con dificultades hay a menudo una separación entre las *situaciones de acción**, que debían servir para darle un sentido a las nociones enseñadas, y la *institucionalización*[1]* que luego realiza el maestro.
Por ejemplo, para introducir la noción de fracción, es usual hacer que los alumnos fraccionen segmentos en partes iguales, dobládolos o transportándolos; los alumnos con dificultades sólo retienen de una sesión de este tipo, la actividad manual de manipulación, mientras que otros ven allí la ilustración de una definición de la fracción. Para estos últimos, la noción de fracción toma un sentido.

Durante la acción, en las primeras situaciones que permiten abordar una noción nueva, no vemos muchas diferencias entre los alumnos “comunes” y los que tienen dificultades. En cambio, la diferencia entre estos dos tipos de alumnos se acentúa bastante rápido tan pronto como tienen que volver a utilizar los conocimientos nuevos en otras situaciones. El saber institucionalizado por el maestro, inclusive cuando es memorizado, parece desconectado de las situaciones de acción que le dieron origen y no puede ser utilizado para resolver problemas nuevos.

Los alumnos que no encuentran este tipo de dificultad son conscientes que, desde el inicio de la actividad, lo que hagan podrá ser utilizado en otras situaciones, es decir, en otro contexto. Crean representaciones mentales no sólo para resolver el problema propuesto sino además para recordarlo y re-utilizar elementos cuando otros problemas se presenten. Esto les permite volver a emplear parcialmente un conocimiento, aunque éste no haya sido aún identificado totalmente.

Para otros niños, esta “transferencia” no ocurre ante otros problemas; no puede hacerse porque resuelven el problema sólo en los términos en los que les fue presentado, sin generar la idea de una generalización. Esto impide la capitalización y la memorización de los conocimientos. Es por esto que para ellos cada experiencia es nueva, o más exactamente, sólo reconocen el contexto: “doblamos tiras de papel, recortamos rectángulos...”

Ausencia de identificación de lo que está en jeugo en las situaciones de enseñanza

El alumno con dificultades tiene problemas para identificar lo puesto en juego en situaciones de aprendizaje; no siempre resuelve el mismo problema que sus

[1] Fase de la sesión en la que el maestro extrae, subraya, resalta aquello que es matemática o metodológicamente importante

compañeros, ni el problema que el maestro piensa haber propuesto. El alumno a menudo permanece al nivel de la acción y no puede establecer los vínculos con otras experiencias y otros aprendizajes.

Cansancio y falta de dedicación

Esta falta de dedicación se puede notar particularmente en los controles escritos y en el trabajo en la casa, en los que algunos alumnos no abordan una parte de las preguntas. Esto debe sin duda relacionarse con una cierta falta de métodos y una falta de confianza en el éxito.

En clase, ciertos alumnos pueden cansarse muy rápidamente de una situación. Por esto es muy difícil llevar a término su exploración y sacar los beneficios de la búsqueda que se ha comenzado.
Ciertas situaciones, que son percibidas por los alumnos como nuevas, los atraen particularmente. Por esto estas situaciones permanecen con mayor facilidad en la memoria de los alumnos y pueden desempeñar el papel de situaciones de referencia.

Falta de métodos

Los alumnos no saben cómo abordar un problema. La mayoría de las veces, tratan de recordar lo visto en clase aunque no saben cómo utilizarlo. Pareciera que les faltan situaciones complejas de referencia, lo que los lleva a precipitarse en la búsqueda de una operación a efectuar o de una regla que hay que aplicar. Además, a menudo toman en consideración sólo una parte de la información y tienen dificultades para organizarla y hacerse una representación del problema.
La falta de métodos y de dedicación hace más difícil el trabajo en casa (por ejemplo en el momento del aprendizaje de las tablas de multiplicar).

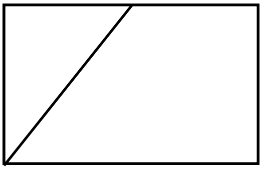
Dificultad para la socialización y búsqueda de una relación privilegiada con el adulto

El trabajo en grupo y las fases colectivas son muy difíciles de organizar porque los alumnos, como ellos mismos lo reconocen durante entrevistas individuales, tienen dificultades para comunicarse: no se expresan fácilmente, y no siempre tienen ganas de hacerlo, no son capaces de escuchar a sus compañeros y de respetar las reglas elementales para tomar la palabra. Buscan mas bien una relación privilegiada con el adulto.
No obstante, ciertas actividades permiten favorecer el trabajo en grupo. Por ejemplo, las que utilizan la informática hacen que la colaboración entre alumnos sea neceseria: siendo que las condiciones materiales son particulares el profesor deja de ser el interlocutor privilegiado. En cambio, el trabajo en computadora

hace casi imposible la realización de fases colectivas, porque los alumnos no aceptan fácilmente interrumpir el trabajo en grupo: la máquina desempeña un papel de "atracción" y todos trabajan a ritmos diferentes. La puesta en común debe pues hacerse en una sesión posterior.

Búsqueda de algoritmos

Los alumnos procuran utilizar lo máximo posible algoritmos que constituyen economías de pensamiento. Desde el principio del aprendizaje de una noción, construyen reglas de funcionamiento que, a menudo, consideran sólo una parte de la información y tienen dominios de validez muy limitados, e incluso nulos. Cuando se aprenden las fracciones, por ejemplo, la escritura fraccionaria se vincula, desde la primera sesión, a una acción de disminución de longitud: 1/3 es la medida de longitud que se traslada 3 veces en una unidad. Los alumnos retienen la disminución, pero no el rol de la unidad.
De esta manera, mientras se trataba de estimar porciones de hoja de papel respecto a la hoja entera, tres grupos de alumnos que habían estimado 2 piezas que formaban media hoja (ver la figura), estimaron bien el triángulo diciendo que se trasladaba 4 veces a la media hoja, pero consideraron equivocadamente que el trapecio era 1/3 porque el triángulo se trasladaba 3 veces en el trapecio.



Esto plantea el problema del equilibrio que hay que adoptar al momento de las puestas en común, del balance. Si la *institucionalización** no tiene lugar al final de una fase de búsqueda, los alumnos retienen sólo el contexto y una parte de la acción, sin reflexión alguna sobre esta última. Pero, tan pronto como hay una *institucionalización**, una regla, eventualmente errónea, se instala; esta regla es a menudo utilizada luego sin referencia al sentido. El maestro se encuentra entonces en la obligación de desestabilizar estas reglas tan pronto como se instalan, lo que debilita más los aprendizajes.

Dificultades para cambiar el punto de vista

Una noción abordada en un contexto es difícil de volver a utilizar en otro contexto. Por ejemplo, alumnos que son capaces de resolver problemas de proporcionalidad en un marco numérico pueden encontrarse perdidos frente a un problema de ampliación de figuras. A menudo no son capaces de percibir el carácter común de estos dos problemas.

Problema de expresión y de lectura

Tanto oralmente como por escrito, los alumnos con dificultades no logran construír frases simples con sentido, ni logran utilizar correctamente el vocabulario. Su expresión es casi siempre parcial e imprecisa: “la mediatriz, es la perpendicular”; para construír la mediatriz de un segmento, “ponemos el compás en el medio ”. No se liberan de sus acciones.
Además, la inmensa mayoría encuentran grandes dificultades para decodificar, por sí mismos, el texto de un problema y tomar en consideración la totalidad de la información.

Los problemas de lenguaje, de expresión y de lectura, son el origen de dificultades matemáticas, que son por lo menos de tres órdenes diferentes: la toma de información, la conceptualización, la producción.

Las situaciones cotidianas, a veces consideradas como más "motivantes"

Estas situaciones, con las cuales los alumnos tienen una cierta familiaridad, acuden a menudo a modos de razonamiento que entran en conflicto con aquellos que se esperan en una clase de matemáticas. De esta forma, puede instalarse una verdadera confusión y una comunicación absurda entre el profesor y ciertos alumnos. Por otro lado, ciertos alumnos rechazan la intrusión de la vida corriente en el marco escolar porque les recuerda demasiado su vida diaria. La experiencia de los alumnos en la vida diaria puede ser utilizada mientras sea útil para presentarles verdaderos problemas a los niños.

Representación que el alumno tiene de sí mismo

Su situación de fracaso en la escuela contribuye a darles a los alumnos con dificultades una imagen desvalorizada de ellos mismos. Esta imagen y la representación que se hacen de su lugar respecto a los otros alumnos de la clase tienen repercusiones sobre toda su vida escolar, incluso la dificultad para aceptar ciertas formas de trabajo (en grupo, particularmente).

2. ¿Cómo responde el profesor a las condiciones relacionadas con una clase en la que hay varios alumnos con dificultades?

El profesor termina frecuentemente implicado en un círculo vicioso: el de la simplificación de las situaciones y de la *negociación hacia la simplificación* de consignas (ver [14]).

Frente a un alumno que:

- No proyecta en términos de aprendizaje la actividad propuesta.

- No logra considerar todos los marcos que intervienen en una situación.
- No se compromete en una situación en la que se conjugan saber viejo y nuevo (la situación se gasta demasiado rápido).
- No percibe el problema globalmente.
- No tiene un método para asumir solo, la resolución global del problema.
- Busca reglas simples que le permitan dar una respuesta cualquiera.

El profesor termina:

- Simplificando el problema propuesto, a menudo por petición del alumno o bien porque teme el fracaso del alumno en la resolución del problema, (y lo abandone).
- Planteando preguntas intermedias que no requieren controlar todo el problema para ser respondidas.
- Proponiendo algoritmos simples de resolución, reglas u operaciones,
- Concentrando su discurso en el aprendizaje de los resultados del curso o de las destrezas algorítmicas,
- Reduciendo las situaciones a la repetición de otras situaciones que nunca se acabaron, o a actividades algorítmicas.

El profesor entra entonces en un círculo vicioso que conlleva un empobrecimiento de los aprendizajes y un fortalecimiento de las dificultades: el alumno tiene mayores dificultades para representarse el problema, no asume la responsabilidad de la búsqueda, reduce su rol al de quien ejecuta....
El profesor tiene además la tendencia a limitarse a un dominio, casi siempre numérico, para no aumentar las dificultades, pero de esta manera hace que todo cambio de punto de vista sea incluso más difícil.

3. Las ideas retenidas para una nueva mediación

Una *nueva mediación* (en el sentido de nueva mediación del saber) debe apoyarse en modos diversos de intervención y no limitarse al nivel individual. Debe integrarse al aprendizaje en curso; entre los aprendizajes colectivos y la "recuperación" individual o en pequeños grupos debe instaurarse una dialéctica de la re-utilización de conocimientos anteriores.
Debe construírse alrededor de situaciones lo suficientemente complejas (para darles sentido a las nociones), pero no demasiado difíciles, para no inmovilizar a los alumnos.
También es necesario apoyarse en los conocimientos que los alumnos han adquirido y valorarlos.
La nueva mediación debe comenzar lo suficientemente temprano en el año porque requiere organizar métodos diferentes de trabajo.
No se limita exclusivamente a los aprendizajes matemáticos sino que debe apuntar a la reducción de las dificultades expuestas en la primer parte.
A continuación presentaremos el desarrollo de dos ejemplos de situaciones que se inscriben en un proceso más completo de la *nueva mediación*: se inscriben en un dispositivo diversificado tanto a nivel de los contenidos (matemáticos, méta-

matemáticos, méta-cognitivos) como a nivel de los modos de su administración (ayuda individual, trabajo en pequeños grupos heterogéneos, trabajo con toda la clase…)

C. PRIMERA SITUACIÓN

Construcción de la memoria colectiva y escrita

1. Presentación de la actividad

Describimos aquí un proceso realizado de marzo a junio de 1991, en una clase de 3er año (alumnos de 14 años) de de un barrio desfavorecido en la región parisina. ([5]).

Cada semana, dos alumnos se encargan de redactar y de escribir sobre el cuaderno "memoria de la clase", un resumen de cinco a diez líneas sobre lo que han aprendido en matemáticas durante la semana. Este texto se somete a la crítica de la clase que puede enmendarlo y precisarlo. La nueva versión, redactada colectivamente, se adopta y se convierte en el texto de la clase.

En el debate colectivo, se le otorga la palabra esencialmente a los alumnos que tienen a su cargo la redacción. El maestro se compromete a valorar su producción, pero también a pedir la opinión del resto de la clase con el fin de enriquecerla.

La moderación del debate debe ser flexible. El maestro pide la colaboración de los alumnos pero son ellos, colectivamente, quienes definen las nociones que hay que retener y las correcciones que hay que efectuar. El texto final es de los alumnos, no es la síntesis del profesor. Por supuesto, el maestro dirige la atención de los alumnos hacia los eventuales errores matemáticos y les da los medios para corregirlos colectivamente.
La moderación del debate debe tener en cuenta la personalidad propia de cada alumno. Dejando de lado los casos de "bloqueo", el maestro no debe concederle la palabra sistemáticamente a los "buenos" alumnos. Puede apoyarse, para alimentar el debate, en alumnos de nivel medio o inferior, susceptibles de tomar fácilmente la palabra y de hacer proposiciones constructivas, e incluso contradictorias. Debe, simultáneamente, pedir la opinión de los alumnos de nivel inferior.
En caso de necesidad se hace cargo puntualmente del perfeccionamiento de ciertas formulaciones pero no se permite intervenir en lo que se refiere al sentido, el contenido, la naturaleza de las proposiciones. Anima el debate pero no toma posición.

2. Objetivos de la situación

Siendo que la situación tiene por objeto construír una memoria colectiva y escrita del trabajo de la clase, se trata de una situación de “revisión”. Tiene un fin triple: diagnóstico, aprendizaje y regulación.

Diagnóstico: el maestro puede conocer de esta manera lo que los alumnos retienen de las actividades de matemáticas realizadas en clase, lo que es importante para ellos, y el estado de sus concepciones. La regularidad de estas sesiones permite reconstruir la historia de la apropiación de las nociones enseñadas: así es posible recoger indicios sobre el nivel de disponibilidad de estos conocimientos entre los alumnos.

*Aprendizaje, institucionalización**: las sesiones de memoria colectiva donde los alumnos deben producir un escrito colectivo ayudan:
- A la despersonalización del saber, suscitando una redacción colectiva (no es sólo el maestro quien posee el saber).
- A la descontextualización del saber, suscitando una formulación que tiende a excluír todo ejemplo particular que no tenga un carácter genérico
- A la construcción y a la apropiación de las nociones y los métodos estudiados
- A la utilización posterior de estas nuevas nociones, que se han descontextualizado.

Regulación: el maestro puede utilizar esta memoria colectiva escrita para orientar su trabajo, retomar ciertas nociones, ciertos episodios y así enriquecer su enseñanza.

Gracias a la retroalimentación (feedback) sobre las situaciones de aprendizaje, sus condiciones, sus coacciones y sus objetivos, se lleva a los alumnos a una mejor comprensión de las palabras del profesor durante las fases de puesta en común, y se pueden medir, a posteriori, toda la puesta en juego en la situación (la importancia de lo que se ha aprendido, su posible aplicación a otros problemas, en otros dominios). Tomando conciencia de esto, los alumnos se vuelven progresivamente capaces de anticipar los aprendizajes a los que apuntan las situaciones nuevas.

3. Algunos elementos cronológicos sobre estas sesiones de revisión

<u>Sesiones 1 y 2</u>**:** revisón oral de lo que se ha hecho desde principio de año:
Los alumnos citan esencialmente temas numéricos y, en geometría, las representaciones figurativas o convencionales. No hablan en términos de aprendizaje (“*aprendí... tal noción”*) ni, obviamente, en términos de conceptos. Describen las sesiones anteriores en términos de acción, por ejemplo: para pesar

un objeto (el aprendizaje de ese momento): "*ponemos sobre la balanza…, está equilibrada cuando la flecha está al medio...*"

La siguiente sesión es del mismo tipo.

Sesiones 3 y 4:
El texto inicial escrito por los dos alumnos responsables es el siguiente:
"*Trabajamos en las balanzas. Puede haber masas de 1kg, 500g, 200g, 100g, 50g, 20g, 10g, 5g, 2g y 1g. La liebre pesa 1kg 500, pongo una pesa de 1kg y otra de 500g. "*
El maestro pregunta: "*¿ hiceron algo más?*"
Los alumnos intentan evocar un trabajo sobre los operadores multiplicativos.
Comprobamos, al principio, una incapacidad para formular lo que se ha hecho: "*hicimos una tabla...*"
A la pregunta del maestro: "*¿Y eso para qué sirve?*", responden "*sirve para encontrar múltiplos*". Los alumnos describen los conocimientos que realmente funcionaron en la actividad. Una reflexión colectiva más profunda sobre la noción de múltiplo, logra que ciertos alumnos sobrepasen la etapa del ejemplo para arriesgarse a presentar una definición del múltiplo de un número: "*un múltiplo es el total de tres por otro número*".

En la sesión siguiente, cuando el maestro pregunta: "*¿cómo se reconoce un múltiplo de siete?*", los alumnos responden:
- "*Está en la tabla del siete.*"
- "*Multiplicamos un número por siete*"

He aquí un ejemplo de la conciencia de los alumnos, *a posteriori*, del saber que realmente está en juego. Algunos alumnos pueden entonces institucionalizar este saber.
Esta sesión constituye para nosotros el inicio de un proyecto educativo: se trata de enseñarle al alumno a pensar "*¿qué aprendí?*" en vez de *"¿qué hice?"*.

En esta etapa, son los mejores alumnos quienes progresan, pero podemos hacer la hipótesis que esto es favorable para los otros alumnos y que conlleva una dinámica en la clase.

Sesiones 5 y 6: los alumnos recuerdan haber estudiado los cuadriláteros y dan espontáneamente una "definición". Al principio, en cambio, describen el trabajo sobre los ángulos rectos en términos de acción ("*puse la escuadra")*. Tras una petición insistente del maestro de dar otra definición, una discusión colectiva entre alumnos los hace pasar de la frase "*miramos con una escuadra si había ángulos rectos*" a la frase "*aprendimos a reconocer los ángulos rectos con la escuadra y a trazar un ángulo recto con la regla y con la escuadra*".
Así mismo, a la sesión siguiente, los alumnos recuerdan "*haber medido a lo largo y a lo ancho*" ¡pero han olvidado completamente el para qué!

Hizo falta una nueva intervención del maestro precisando la finalidad de la actividad para que el texto adoptado por toda la clase sea: "*en un rectángulo, hay cuatro ángulos rectos, medimos los largos y los anchos; observamos que los lados opuestos del rectángulo tenían la misma longitud"*.
Estas sesiones permiten a la clase construír la memoria colectiva de las actividades efectuadas en términos de aprendizaje. Nos damos cuenta que el contrato se transforma poco a poco, pero que a veces es necesario que el maestro precise las finalidades de las actividades en términos de aprendizaje.

Las siguientes sesiones hacen referencia a un trabajo sobre la división.

Notamos los primeros efectos de este nuevo contrato. Los alumnos, luego de una revisión, después de una sesión de resolución de un problema de división, se refieren a una tabla que permite encontrar el cociente buscando en las columnas y fijándose en la diferencia respecto al borde. Esto es un ejemplo de mezcla de proyecto de aprendizaje y de descripción de la resolución de un problema utilizando un algoritmo formal. Después, en una segunda revisión, los alumnos describen la actividad realizada en clase en términos de aprendizaje: *"hemos trabajado sobre la división",* mientras que la actividad consistía sencillamente en la utilización de un material de diferentes bases que permitía simular una repartición por centenas, decenas y unidades y que el maestro no había mencionado la palabra "división". Los dos alumnos encargados de la redacción inicial consultaron su manual en la página del ejercicio y retuvieron el título de la secuencia para describir la actividad.

4. Conclusión

Analicemos los efectos de esta actividad.

- De parte del alumno

> - Esta retroalimentación periódica, que se presenta como tal, permite a la clase, colectivamente, describir las actividades efectuadas en términos de aprendizaje.
> - Permite a ciertos alumnos sobrepasar la etapa de la descripción de la acción para comprender, **más tarde**, la finalidad de la actividad. Podemos entonces esperar que al momento de esta nueva *institucionalización**, el saber en juego no estará tan separado de la acción como antes. Esto puede dar inicio a la actitud que consiste, para el alumno, **en anticipar desde la presentación de una actividad la institucionalización que vendrá después**. Es por esto que consideramos que se trata de una acción sobre el proyecto de aprendizaje del alumno y sobre el *contrato didáctico** vigente en la clase.

- Ya hemos señalado las dificultades de socialización de los alumnos, sobretodo sus retiscencias a la hora de trabajar en grupo. Este tipo de actividad parece tener incidencia sobre estos comportamientos, de hecho:
    - Los dos alumnos encargados de redactar el texto son responsables delante de la clase.
    - Al momento de las discusiones, la clase entera, y particularmente los alumnos con dificultades, pueden aprovechar el aporte de los alumnos buenos que intervienen, sobre todo cuando se trata de hacer progresar la *formulación**.

- De parte del maestro

    - Esto le permite jerarquizar las institucionalizaciones: las formulaciones se descontextualizan cada vez más.
    - Por petición de los alumnos, el maestro es llevado a clarificar sus objetivos y hacerlos explícitos. El contrato también es así más explícito.
    - Es una herramienta de diagnóstico que contribuye a una mejor regulación de la clase.

D. SEGUNDA SITUACIÓN

¿ Cómo ayudar a los alumnos con dificultades al momento de la resolución de un problema sin reducir la construcción del sentido de las nociones matemáticas?

Con dos ejemplos, vamos a mostrar cómo el maestro puede ayudar a los alumnos durante la resolución de problemas numéricos sin simplificar el problema.

1 El juego del autobús en una clase de 3er año (edad de los alumnos: 14 años aproximadamente)

El problema es el siguiente: *"en un autobús, hay* ***n*** *pasajeros. En una parada, "sube"* ***a*** *y "baja"* ***b****. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús cuando éste parte nuevamente?"*

El maestro fija los valores de **n**, **a** y **b**. Puede invertir los términos subir y bajar y escoger **b** superior a **a**.

Existen dos tipos de procedimientos para resolver un problema de este tipo:
- Un procedimiento E basado en los estados: este procedimiento considera un estado inicial **E1** (**n** personas), le aplica una transformación **T1** (añadir **a**), de lo que se deduce un estado intermedio **E2** (**n** + **a** = n' pasajeros), al que se aplica la transformación **T2** (suprimir **b**) para deducir un estado final **E3**:

n " = (**n** + **a) - b** = n ' - **b**

- Un procedimiento T basado en las transformaciones: considera nuevamente un estado inicial **E1** (**n** pasajeros), calcula una transformación **T3** que se obtiene con la composición de las transformaciones **T1** y **T2** (**a** - **b**), aplicar esta transformación **T3** sobre **E1** con el fin de deducir de eso el estado final **E2:** n " = **n** + (**a** - **b)**.

Los trabajos de G. Vergnaud [18] muestran que estos procedimientos corresponden a etapas cognitivas diferentes de los alumnos. Poder poner en ejecución estos dos tipos de procedimientos es la prueba de un cierto dominio de las estructuras aditivas. Ciertos alumnos del 3er ciclo (alumnos de 11-12 años) que presentan dificultades, no logran poner en ejecución el procedimiento de composición de transformaciones (el procedimiento T). Esto los conduce al fracaso cuando las operaciones contienen números "grandes" o cuando hay un resto.

Para lograr que los alumnos adquieran duraderamente este tipo de procedimiento, podemos pensar en incorporar modificaciones en las variables numéricas que intervienen en el enunciado y en la forma de trabajo.

> El maestro propone primero resolver este problema mentalmente. Hace variar **n** entre 20 y 40 y **a** y **b** entre 2 y 10.
> Propone varios ejercicios de este tipo durante varios días seguidos. Y cada vez les pide a los alumnos aclarar sus procedimientos de resolución.
> Cuando las operaciones que hay que efectuar mentalmente contienen "pasajes a la decena" como, por ejemplo, para 25 + 8 - 4, ciertos alumnos componen las transformaciones en juego. Aunque este procedimiento se haga explícito, los otros alumnos no la vuelven a utilizar en los cálculos ulteriores.
>
> Después de haberse asegurado que los alumnos se han familiarizado con el problema y que logran resolverlo frecuentemente en el dominio numérico que se les ha presentado, el maestro propone el mismo ejercicio, para resolver mentalmente, pero con otros valores numéricos. Escoge siempre **n** entre 20 y 50 pero haciendo variar **a** y **b** entre 10 y 20 con | **a** - **b** | < 10 (por ejemplo 25 + 19 - 16 se calcula con mayor "economía" al hacer 25 + 3, que haciendo 44 - 16).
> La dificultad para efectuar mentalmente un cálculo de este tipo va a conducir a los alumnos (eventualmente teniendo como base un primer fracaso) a darse cuenta de la economía realizada cuando componen las transformaciones. Esta toma de conciencia es duradera. En general, los alumnos escogerán más tarde, en función de los datos numéricos, el procedimiento más económico.

Numerosos experimentos han mostrado que la simple exposición del segundo procedimiento, incluso cuando el maestro lo explica prolongada y detalladamente, no es suficiente para que los alumnos con dificultades se apropien de él. **Es indispensable probarles a estos alumnos que el esfuerzo efectuado en el caso de la puesta en ejecución del segundo procedimiento es rentable porque eventualmente puede evitar cálculos difíciles**.

Por eso, **es indispensable realizar un salto cualitativo sobre los valores numéricos que intervienen en el problema**. Igualmente, una resolución mental es necesaria, puesto que por escrito los alumnos pueden ser conducidos al algoritmo estándar de la adición y no encontrar dificultad dejándose llevar por el enunciado.

2 ¿Cómo ayudar a los alumnos de CM2 (alumnos de 10 años) a resolver un problema de enumeración compleja?

Los alumnos de clase de 5º y 6º año (alumnos de 10 -11 años) tienen grandes dificultades para lograr resolver el siguiente problema.

MENÚ

1 entrada a elección

- Zanahoria a la naranja
- Sardina
- Pizza
- Pomelo
- Empanada de queso
- Sopa
- Apio picado y sazonado
- Ensalada compuesta
- Huevos duros, mayonesa
- Remolachas y maíz
- Endibias y ensalada
- Quiche

1 plato a elección

- Ravioles gratinados
- Pollo asado,fríjoles en manteca
- Bistec picado, conchitas
-Carne de cerdo a la parrilla con fríjoles bretones
- Picadillo de carne parmentier
- Guiso de ternera con salsa de nata y arroz blanco

1 postre a elección

- Mousse de chocolate
- Manzanas horneadas
- Compota
- Leche gelificada
- Melocotones en jarabe
- Flan
- Piña

¿Cuántos menús diferentes pueden componerse, cada uno con una entrada, un plato y un postre?

En general los alumnos resuelven este problema buscando de manera exhaustiva las diferentes soluciones. Este método los conduce en general al fracaso porque la cantidad de menús (12 x 6 x 7 = 504) no lo permite.
A causa de la imposibilidad de hacer la lista exhaustiva de las soluciones, pocos alumnos perciben la estructura multiplicativa del problema.

¿Cómo hacer que los alumnos sepan resolver este tipo de problema de enumeración?

Varios escenarios son posibles (ver [9]). Expondremos a continuación uno que parece haber probado sus resultados. Éste se opone al esquema de progresión generalmente puesto en ejecución en la escuela elemental, que consiste primero en presentar el mismo ejercicio, pero para dos tipos de platos solamente y con 3 - 5 opciones posibles para cada plato.

Los alumnos de 5º año (alumnos de 12 años) ya han visto muchas veces versiones simplificadas de este ejercicio durante su tiempo en la escuela. Un análisis de los manuales de la escuela elemental muestra que este problema de enumeración se les presenta casi siempre a los alumnos como el caso de dos conjuntos con un pequeño número de elementos. Los alumnos pueden entonces resolverlo **buscando todas las soluciones**, y representarlo, a menudo con la ayuda del maestro, con un árbol o una tabla cartesiana. Aunque el maestro puede apoyarse en estas representaciones para mostrar que el resultado puede calcularse con la ayuda de una multiplicación, esta técnica no se impone porque los alumnos han resuelto de otro modo este problema la mayoría de las veces.

Este tipo de presentación no permite una apropiación real de la estructura multiplicativa de la que se trata. En el caso más complejo que nos interesa, los alumnos no mobilizan sus conocimientos sobre la multiplicación y tratan, en vano, de resolver el problema con la enumeración de todas las soluciones. El alto nivel de fracaso encontrado muestra que **el esquema aparentemente seductor que va de lo "simple" a lo "complejo" no permite superar las dificultades.**

Proponemos pues **otro dispositivo** basado en el esquema "complejo – simple – complejo".

Primera etapa:
El maestro propone a los alumnos resolver el problema en el caso complejo expuesto más arriba: tres conjuntos cuyo número de elementos está comprendido entre 6 y 12, por ejemplo.
Al principio los alumnos fracasan porque los procedimientos puestos en ejecución no permiten una enumeración fácil. Ante este fracaso y después de hacer explícitas las dificultades encontradas, el maestro puede proponerles a los alumnos representar el problema con la ayuda de un esquema. En general, esta propuesta no basta para poner de manifiesto la estructura multiplicativa del problema, inclusive cuando los alumnos están familiarizados con las representaciones en árbol.

La segunda etapa
El maestro puede entonces proponer dos tipos de simplificaciones:

- Reducir el número de conjuntos proponiendo por ejemplo calcular primero el número de menús diferentes que se pueden hacer teniendo todos "zanahorias picadas" como entrada, y luego deducir de esto el número total de menús,
- Reducir el número de opciones para cada plato, pero conservando tres tipos de platos.

La tercera etapa
El maestro propone luego resolver el caso complejo del problema utilizando los resultados o los pasos de la segunda etapa.

Es a menudo necesario:
- Hacer explícitos varios ciclos del tipo "complejo – simple – complejo" con el fin de permitir a los alumnos que tengan dificultades, dominar uno de estos caminos;
- Tratar varios problemas de este tipo con presentaciones diferentes.

En todos los casos, dominar los diferentes modos de tratamiento de los problemas de enumeración de este tipo requiere un largo tiempo de aprendizaje y la organización de diversos esquemas de progresión que se apoyen en una dialéctica entre lo simple y lo complejo. Pero parece indispensable **comenzar la reflexión desde la perspectiva del caso complejo** para así hacer fracasar los procedimientos primitivos de búsqueda que ocultan la estructura multiplicativa del problema.

Este ejemplo, como el anterior, parece dar cuenta de la necesidad de poner en ejecución **escenarios originales** de sesiones de resolución de problemas. También muestra que es posible construir **situaciones lo suficientemente complejas** para que los alumnos puedan adquirir los conceptos en juego **sin una gran pérdida del sentido**, pero **con ayudas** que les permitan superar sus dificultades abandonando algunos de sus procedimientos "primitivos" inadaptados al problema, en provecho de procedimientos económicos pero más difíciles e incluso imposibles, de elaborar en casos demasiado sencillos.

E. CONCLUSIÓN

En la segunda y tercera parte de este texto hemos detallado dos ejemplos de situaciones que podrían ser organizadas por maestros de la escuela elemental.
La primera es una situación en la frontera entre las matemáticas y la expresión escrita en general, entre las matemáticas y el discurso acerca de las matemáticas.
Es la ocasión de efectuar revisiones que son indispensables para los alumnos con dificultades en matemáticas. La baja capacidad de anticipación de los aprendizajes en estos alumnos; su dificultad para superar la etapa de la acción, para medir la importancia de ciertas acciones, para extraer de su contexto los aprendizajes del momento, para generalizar las experiencias vividas, hacen

necesarias el desvío por una fase de formulación colectiva y concisa de las nociones estudiadas.
Los alumnos podrán así pasar de la descripción de "lo que hice" a la descripción de "lo que aprendí".

Los ejemplos de escenarios de sesiones de resolución de problemas tienen por objeto ilustrar de qué manera el profesor puede **romper el círculo vicioso de no aprendizaje,** descrito en la primera parte del texto.

Se trata, en todos los casos, de ejemplos de *nuevas mediaciones* para el saber, de caminos hacia el conocimiento adaptados a las dificultades de los alumnos, pero que guardan como objetivo la superación de estas dificultades.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris

[2] BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°11-2.

[3] BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

[4] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherche en Didactique des mathématiques* N°12.2.3

[5] BUTLEN D. PEZARD M. Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée, *Grand N* n° 50 p29-58, IREM de Grenoble.

[6] CHARLOT B. ; BAUTIER E ; ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs.* A. Colin.

[7] CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire* N°39 p21-39.

[8] CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille n°13.

[9] COPIRELEM Actes du stage national d'Angers organisé par la COPIRELEM - mars 1996 - *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques* - tome 5 - IREM de Paris VII

[10] HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p5-12 INRP Paris.

[11] INRP (1986) *En mathématiques peut mieux faire*, Rencontres pédagogiques n°12, INRP Paris...

[12] LAUTREY J. (1980) *Classes sociales, milieu familial, intelligence.* Paris, PUF.

[13] PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'échec scolaire* Librairie Droz Genève

[14] PERRIN-GLORIAN M.J (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM et 6ème.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, février 1992

[15] PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir d'un enseignement des mathématiques dans les classes faibles. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol. 13 n°1/2. Ed. La Pensée Sauvage Grenoble.

[16] PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Élèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères*-IREM n°3 p97-139. Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.

[17] ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier DIDIREM* N°3 et 4, IREM de Paris VII.

[18] VERGNAUD (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne.

Elementos sobre la noción de problema para profesores practicantes A.I.S[1]. Opciones E y F

Catherine Houdement (1997)

Este artículo destinado a los formadores de la enseñanza especializada (AIS) restituye el lugar de la resolución de problemas en los aprendizajes y aborda la construcción de situaciones destinadas a los alumnos que requieren de la enseñanza especializada a partir de la distinción entre problemática matemática y problemática de la realidad.
Tomando en consideración las especificidades de la enseñanza especializada, la autora da pistas de reflexión para las ayudas especializadas.
Se indica la bibliografía en cada párrafo.

Los practicantes A.I.S. en formación, cuando su formación no ha sido renovada recientemente, necesitan de manera frecuente "desempolvar" su visión de las matemáticas, a fortiori problemas de matemáticas. Sus referencias de los manuales escolares están a veces un poco desfasadas para las concepciones subyacentes.

Este curso intenta hacer algunas remarcas que se revelaron necesarias durante diversas sesiones de formación. No se pretende tratar el tema "problema matemático" en su integridad, solo da algunas ideas o reflexiones afinadas durante la formación y evocadas con los colegas formadores.

I. Problemas de matemáticas y manuales actuales

a. Los problemas planteados por los manuales

Se llamará problema, en un primer momento, todo soporte que contenga información relacionada a una pregunta (o varias preguntas).

Los problemas planteados en los manuales tienen diferentes finalidades :

- con unos se busca reforzar, consolidar saberes y destrezas que ya existen en el alumno;

- con otros se trata de identificar, sobre un tema preciso, las competencias efectivas de los alumnos, sus dificultades específicas (a título de diagnóstico o a título sumativo) ;

- otros ofrecen *a priori* una resistencia para los alumnos : en general los alumnos aún no tienen el saber o la destreza que permiten responder a la preguntas; si el cuestionario está bien construído ellos van a desarrollar ciertas

[1] A.I.S. significa Ayuda e integración escolar (Aide et intégration scolaire).

actitudes, poner en juego ciertos procedimientos que van a contribuír a construír esta noción experta.
Estos enunciados son los mas próximos de los problemas que encuentra el matemático, entonces son ellos que dan sentido a las matemáticas. Deben tener un tratamiento particular en la escuela. Es para estos problemas que en un tiempo de la reforma se ha inventado la expresión *situaciones –problemas*[1]*
Lamentablemente se encuentran muy pocos problemas de este tipo en los manuales.

b. La vestimenta, el contexto de un problema

En los manuales, encontramos con frecuencia dos extensiones para un texto asociado a una pregunta, ejercicios y problemas. El uso corriente llamaría ejercicio a una seguidilla de consignas descontextualizadas (o ubicadas en un contexto exclusivamente matemático), como por ejemplo

(1) *Haz la división entera de 235 por 12*
(2) *Calcula 125 + 47 + 6*

y problema a una secuencia de consignas ubicadas en un contexto dicho "de la realidad" como por ejemplo,

(3) *Cuántas cajas de 12 se pueden llenar con 235 huevos ?.*
(4) *En la librería, Pedro compra un libro a 125 F, una historieta a 47 F y un periódico a 6 F. Cuánto gasta ?*

Esta distinción no tendría consecuencias si no estuviera seguida de una jerarquización implícita: un ejercicio sobre una noción podría resolverse por el alumno antes que un problema comparable sobre la misma noción; dicho de otra manera, un ejercico sería mas simple que un problema, por lo tanto aparece antes en los manuales. Examinemos lo que se da en llamar jerarquía.

***** El problema de los huevos (3) puede ser resuelto por un individuo que no conoce la división : puede dibujar la situación y resolverla de cualquier forma (dibujo por paquetes, enfoque aditivo y multiplicativo). En cambio el enunciado (1) solo es comprensible por quien conoce la palabra división y sobre todo por quien sabe que esta operación está vinculada a una repartición equitable con resto mínimo. El enunciado contextualizado de los huevos necesita por lo tanto menos conocimientos previos que el otro enunciado (1), por lo tanto puede ser resuelto antes. Un "buen contexto" también puede aportar sentido a una noción.

***** Para un alumno que conoce la adición, los enunciados (2) y (4) son matemáticamente equivalentes; el enunciado (4) no ofrece mas dificultades matemáticas que el enunciado (2).

[1] cf. R. DOUADY (1984) *Cahier DIDIREM* n°3, IREM de Paris 7 et *Instructions officielles de 1980* donde el primer sentido estaba en parte perdido. Nos limitaremos a la palabra *problema*

La sola apariencia de un enunciado, el hecho que haga referencia a una situación del lado de la realidad o del lado de las matemáticas no es una distinción pertinente en una problemática matemática. Nosotros no retendremos la distinción ejercicio-problema bajo esta forma.

II. Qué es un problema matemático ?

A. La distinción problemas y ejercicios. Noción de intención

En la vida corriente un problema es algo que resiste, que crea un obstáculo para un tratamiento inmediato. Un *probleme matemático* posee este carácter, debe ofrecer una resistencia a quien aprende. Esta resitencia puede ser vencida utilizando una o varias herramienta matemáticas[1]. Si el enunciado ya no ofrece esta resistencia se convierte en un *ejercicio*, una situación para *ejercer* una o varias herramientas matemáticas conocidas.

Se puede entonces hablar de problemas, tanto en todo inicio de aprendizaje de una noción porque el alumno no posee aún la herramienta experta que le permitiría resolver rápidamente este problema, como al final del aprendizaje, cuando el alumno debe combinar varias herramientas matemáticas conocidas para responder a las preguntas. En todos los otros casos, cuando el alumno solo tiene que aplicar una herramienta (o varias) que ha ya adquirido, se hablará de *ejercicio*. Demos dos ejemplos.

- El texto « *repartir equitablemente 138 bombones entre 15 niños* » es en general un problema (en un contexto vinculado a lo real) para un alumno de 3er año (alumno de 8 años), pero se transforma en un ejercicio para un alumno de 5to (alumnos de 10 años). Es un problema de división, comunmente llamado problema multiplicativo.
- En 1er ciclo (alumnos de 6-7 años), la siguiente situación, « *colocar frente al alumno, uno al lado del otro 5 piedras y 3 piedras y preguntar el número de piedras* », no es un problema aditivo sino un ejercicio de enumeración. Sin embargo, « *tomar una caja vacía, y colocar en presencia del alumno 5 piedras y después 3 mas, cerrar la caja y solicitar de encontrar en número de piedras que hay dentro de la caja* » es un problema (o un ejercicio) aditivo (bajo la condición que solo se pueda abrir la caja para controlar la solución propuesta). En efecto el alumno debe imaginar, pensar el contenido de la caja, puede materializarlo (con sus dedos, fichas), dibujarlo, puede contar 6, 7, 8, puede también decir 8 porque 5+3=8, etc. La búsqueda del modo de tratamiento del problema está a su cargo.

Remarquemos que, si el niño abre la caja para buscar la respuesta, se sitúa en una problemática de lo real (invierte la intención matemática del problema

[1] Qué es una herramienta matemática ? Nos contentaremos en dar un respuesta naif a esta pregunta : el número es una herramienta a mismo título que las operaciones (y sus algoritmos), la proporcionalidad (y sus modos de resolución) ...

inclinado hacia la adición, lo retorna a la enumeración), pero no en una problemática matemática. De esta manera todo problema matemático en la enseñanza se da con una intención[1] la de activar ciertas nociones o de preparar la construcción de nuevas nociones. Se dice también que el problema (o el ejercicio) pone en relieve herramientas matemáticas que permiten resolverlo. El problema está bien construído cuando contiene las condiciones que exigen permanecer en la intención deseada (en el ejemplo anterior, la condición es no abrir la caja para anticipar sin limitarse a una verificación). Una de las tareas del profesor (y no menor) es procurar que las condiciones sean lo menos artificiales posibles, que sean naturalmente adheridas a la situación, de manera que el alumno las integre plenamente en su búsqueda.

B. Situación real, situación evocada y matematización

Un problema enunciado por escrito, cualquiera sea, igualmente si se refiere a lo real, no constituye una situación real, solo evoca (en el mejor de los casos) lo real que da el cuadro de la situación. La resolución de un problema o de un ejercicio matemático no se efectúa en la realidad, debe ser pensada. Un problema se resuelve en una problemática matemática, el acceso a lo real (cuando la situación lo permite) procura un control de los resultados y una *validación**. Pero el acceso a lo real no es total. Examinemos esto en un ejemplo.

1. La situación real

Comprar una vara de madera para enmarcar un cuadro de vidrio de forma rectangular.

La resolución se hace entonces dentro de una problemática de la realidad.

Se puede prever de comprar un poco mas en caso de error. Se debe pensar en tallar oblícuamente los cuatro vértices del rectángulo o en algún otro tipo de agregado ?

Muchos procedimientos son posibles para medir : Se puede utilizar un metro, por ejemplo (o una cuerda transportada a un metro rígido, o...) para simultáneamente medir y adicionar las medidas de largo, pero también se puede medir largo y ancho, luego adicionarlos dos veces; esto supone un conocimiento al menos implícito de la noción de perímetro de rectángulo.

2. Una situación evocada sobre el mismo tema

[1] Es una de las diferencias con el problema del matemático cuya sola intención es que sea correctamente resuelto.

En principio remarquemos que puede haber diversas evocaciones posibles de la situación real precedente con el dibujo a escala del cuadro, con un esquema sobre el cual se transportan las medidas, etc.). Detengámonos en el siguiente enunciado :

Pablo posee un cuadro de vidrio de forma rectangular, cuyas dimensiones son 42 cm por 35 cm. El quiere construír un marco. Cuál es el largo mínimo de la vara que debe comprar ?

La resolución se efectúa en una problemática matemática.
Ahí el resultado esperado es la exacta medida del perímetro (154 cm). La palabra « mínimo » intenta evacuar las referencias a lo real que sería un tallado oblícuo en las cuatro esquinas, u otro estilo de corte.

Un procedimiento posible consiste en buscar un esquema : se trata se dibujar el rectángulo, pero no se puede sobre una hoja, se puede entonces dibujar un rectángulo cualquiera y buscar ver cómo obtener su perímetro, para luego adicionar los largos dos veces.

3. Algunas observaciones

- En problemas o ejercicios matemáticos, algunas palabras funcionan como control de la evocación (aquí mínimo) ; ellas no son siempre percibidas como tales; es un fenómeno de contrato.
- Esta dialéctica entre problemática de la realidad y problemática matemática es particuarmente sensible para los alumnos que necesitan de la enseñanza especializada. En efecto los problemas sobre los cuales ellos reaccionan mas son para los que la realidad contradice los resultados[1]. Aceptan entonces poner en duda ellos mismos sus procedimientos.

Es necesario hacer tomar conciencia a los estudiantes de las dos problemáticas en juego, la problemática de la realidad y la problemática matemática, la que forma parte del contrato en la escuelas. Una de las dificultades de la enseñanza especializada será por otro lado de relacionar problemática de lo real, problemática matemática y problemática profesional del taller, ahí donde los objetos de estudio son mas reales, pero sumisos a condiciones vinculadas a los instrumentos disponibles.

[1] Es por ello que las actividades geométricas son particularmente pertinentes para los F. En efecto para ciertas actividades geométricas tales como la resproducción de figuras planas o de sólidos, la distancia entre problemática de la realidad (dibujos o sólidos) y problemática matemática puede ser reducida.

C. Qué es hacer matemáticas en la escuela ?

Hacer matemáticas en la escuela es entonces :

- resolver problemas, es decir anticipar el resultado de una acción sea real, sea evocada o aún simbólica,

- sin conducir efectivamente esta acción (si es real o evocada), pero representándola por esquemas, por escrituras simbólicas, utilizando herramientas matemáticas,
- sea directamente (evocando un proceso eficiente conocido o una herramienta particularmente eficaz), sea luego de haber construído una estrategia,
- teniendo medios de control de la estrategia y de *validación** de los resultados producidos ;

- pero también es entrenarse en el manejo de herramientas eficaces, introducidas a la ocasión de resolución de problemas precedentes.

Hacer matemáticas en la escuela, es entonces resolver problemas en una problemática matemática.

III Ejemplos de problemas a contruír por el profesor

El maestro construye situaciones que dan la ocasión a los alumnos de hacer matemáticas. Estas situaciones son problemas y ejercicios. Por lo tanto numerosas tareas (no solamente matemáticas) están a cargo del alumno: la lectura del texto, de la pregunta, la comprensión, la representación, el tratamiento (la construcción de un proceso de resolución), la explicitación de la resolución. El profesor puede modular sus exigencias en relación a estas diferentes fases, por ejemplo puede elegir lanzar oralmente el problema (para evitar lectura de texto con imagen), puede materializar el problema de manera de facilitar la representación (atención al rol del material), puede dejar al alumno plantear un problema al profesor (para cambiar la relación del alumno a la pregunta), etc.

Los problemas elegidos para aprender deben permitir una entrada rápida en el problema por parte del alumno, un interés de parte de éste por la pregunta planteada, la construcción posible de procedimientos de resolución por el alumno que va en la dirección buscada para el aprendizaje, si es posible un control sobre los procedimientos ...

Es entonces interesante prever una gestión del grupo o de la clase, en varias fases :

- un tiempo de búsqueda individual, con la ayuda eventual del profesor para lanzar la búsqueda, sin inducir la solución,
- un tiempo de confrontación de los procedimientos : entonces los alumnos constatan con ayuda del profesor, que ciertos procedimientos conducen a un

resultado, pero que son diferentes los unos de los otros, que otros han fracasado, pero que habrían podido continuar...
Se constata que los alumnos A.I.S., frente a estos últimos problemas, emplean procedimientos particularmente "dispersos", mucho mas que en una clase "ordinaria". Algunas razones pueden ser señaladas a priori : la variedad de recorridos de los alumnos reagrupados en la A.I.S., los efectos de los desperdicios sucesivos, el hábito que tienen de ejercer poco control sobre sus producciones.

La fase de síntesis efectuada por el profesor es la ocasión para el alumno de observar lo que le ha permitido obtener logros o lo que le ha hecho “perder”.

Es la repetición de actividades de este mismo tipo que permitirá al individuo de forjarse una idea de "resolver un problema de matemática" y de adquirir una "cierta autonomía".

Un entrenamiento (serie de ejercicios) con actividades del mismo tipo es indispensable para fijar los conocimientos y proporcionar al individuo el placer de los logros repetidos.

Los problemas clásicos que se pueden encontrar en los manuales practicamente no ofrecen tal característica (aunque se encuentren bajo la expresión *actividad de exploración, actividad preparatoria*, *búsqueda*, etc.). Para crear el sentido y aprender a razonar permitiendo un auto control de la situación, para distinguir la problemática de lo real de la problemática matemática, es necesario vivir problemas reales (contextualizados) pero que relevan una problemática, y esto es antes de pasar a las situaciones solamente evocadas.

En esta primera parte del curso, se trata de encontrar, construir tales problemas con los estudiantes y de darles referencias bibliográficas que deberían permitirles encontrar el tema (esencialmente número y numeración para los E, mas diversificado para los F).

IV. Resolución de problemas por el alumno

Se trata de re-enviar al estudiante a lecturas que le permitirán afinar la visión de la tarea del alumno que resuelve un problema.

Una lista de las diferentes tareas :
- la lectura del enunciado, de la imagen, de las preguntas : particularmente dificultades vinculadas a la semántica, a la sintaxis,
- la toma de información necesaria para el tratamiento, por lo tanto un pasaje obligado por la representación del problema,
- el tratamiento del problema, y las dificultades vinculadas particularmente al desfasaje entre la estructura semántica y la estructura matemática de un enunciado,
- la formulación de la respuesta, la comunicación a un tercero.

Sobre que puntos podemos avanzar con los estudiantes (practicantes en formación) AIS ?

a. La especificidad de la lectura de un problema

Se trata de efectuar una lectura directa de la información o, la apropiación de las informaciones necesita un trabajo de reformulación (lectura de una tabla, de un dibujo, ...) ? Una vez la pregunta leída, con frecuencia es necesario leer el enunciado para sacar información necesaria al tratamiento : FAYOL [1]señala que la ubicación de la pregunta en el encabezado lleva a un mejoramiento sistemático de los logros en problemas aditivos para todo tipo de problemas y para toda edad. Qué progresión adaptar al finalizar el curso para mejorar la autonomía del sujeto sobre la lectura del problema ?

Referencias

- en la revista *Grand N*, I.R.E.M. de Grenoble :

- n°42 F. BOULE, C. WASSERER (1988) "Lecture des énoncés mathématiques"
- n°50 R. NEYRET (1992) "Lecture d'énoncés et progression thématique"
  D. BUTLEN (1992) "Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée"
- n°51 J. BOLON (1993) "Regards insolites sur quelques manuels"

- en los *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume 4, IREM de Strasbourg :

R. DUVAL (1991) "Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes".

b. La noción de estructura : un ejemplo, los problemas aditivos

En este párrafo se puede tratar :
- la noción de campo de problema, en relación con los campos conceptuales de G. VERGNAUD, haciendo trabajar las estrategias sobre los problemas aditivos;
- el impacto de las presentaciones y modos de formulación de los enunciados, particularmente nociones de estructura semántica y estructura matemática del enunciado.

Referencias

- EHRLICH S. (1990) *Sémantique et mathématiques. Apprendre / enseigner l'arithmétique simple*, éditions Nathan.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*, éditions Delachaux et Niestlé.
- VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, éditions Peter Lang.

---

[1] L'enfant et le nombre, 1990, page 174, éditions Delachaux et Niestlé, Neuchatel

Gracias a estos elementos de información, se insistirá en particular sobre los siguientes puntos con los profesores en formación :

- cubrir el campo de las estructuras aditivas, no limitarse a un solo tipo de problemas ;
- dar sentido a la sustracción eligiendo problemas apropiados.
- evaluar con problemas del mismo tipo a los que se trabajó previamente con los alumnos;
- no agregar dificultades semánticas a los problemas de evaluación;

c. La noción de representación de un problema

Se encontrarán referencias de algunas obras recientes sobre la noción de "caja negra" en la psicología cognitiva, aplicada a las matemáticas. Se citará brevemente :

- la representación de un problema por el dibujo, por la mímica ...
- las representaciones mas elaboradas : esquema ...
- las ayudas posibles para la representación ...

Références

- DESCAVES A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes* Éditions Hachette.

Un début confus, plus intéressant après la page 18.

- JULO J. (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, éditions Presses Universitaires de Rennes.
- JULO J. (1996) Une séquence d'apprentissage autour du problème de la proportionnalité, pages 110-115, in *Documents pour la Formation des Professeurs d'École en Didactique des Mathématiques*, tome V, IREM de Paris 7.
- SARRAZY B. (1996) *Résolution de problèmes et représentation*. Thèse de 3ème cycle. Université de Bordeaux II.

d. La transferencia o la educabilidad cognitiva

Qué hay de la existencia de una capacidad general para resolver problemas ? Se puede evocar en esta ocasión las proposiciones institucionales de mediación cognitiva (Taller de razonamiento lógico, Programa de enriquecimiento instrumental Feuerstein, etc.) a los que serán confrontados los practicantes A.I.S, y darles nuevamente un justo lugar.

Referencia

COULET J-C. (1996) Les méthodes d'éducation cognitive, p. 145-168 in *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (1997)* tome V, IREM de Paris 7.

La Re-educación matemática a través de un estudio de caso

Christiane Pezé (1996)

En el cuadro de la Red de Ayudas Especializadas a Alumnos con Dificultades (RASED), la autora se interroga si la actividad matemática puede ser utilizada como « mediador » de la re-educación.
Luego de indicar lo que entiende por re-educación matemática, la autora da un ejemplo en forma de crónica de la ayuda especializada a un niño de 2do año que se recupera en una RASED.

La confrontación a los *alumnos con dificultades* nos pone de manifiesto frecuentemente que el origen y la naturaleza de su problemática escolar es global, que los aspectos cognitivos y afectivos están enlazados de tal manera que no se puede determinar una preponderancia etiológica de manera manifiesta.
De esta manera estos niños necesitan ser ayudados considerando de forma asociada las dimensiones afectiva y cognitiva de sus dificultades.
La re-educación individual sería la indicación de ayuda mas apropiada porque solo la relación dual permite asegurar el *sostén* afectivo y cognitivo mas próximo a las necesidades del niño.

Esto me parece con mayor razón verdadero en el dominio de las dificultades en matemáticas. La naturaleza misma de este conocimiento y del aprendizaje que a ello conduce, es decir construir conceptos resolviendo problemas, pone en duda la imagen de sí con mayor fuerza que los otros aprendizajes porque la realidad del éxito o del fracaso aparece mas claramente. De esta manera el éxito refuerza positivamente su propia imagen mientras que el fracaso puede ponerla en duda, sobre todo interviene en detalle sobre la auto estima.
Sin embargo para ciertos niños, los factores afectivos y cognitivos de sus dificultades en matemáticas son interdependientes.

Me parece que el modelo de re-educación habitual : restaurar una relación activa con el saber con un trabajo de elaboración psíquica independiente de la actividad matemática, es suficiente para la resolución completa de las dificultades.
También planteo como hipótesis :

- que es pertinente utilizar la actividad matemática como mediador de la re-educación sin desnaturalizar la especificidad de esta última.
- que la utilización de este mediador cognitivo (bajo ciertas condiciones) no arrastra automáticamente la evacuación de la dimensión afectiva del sujeto.

- que esta aproximación re-educativa puede tener un efecto de restauración narcisista gracias a la dialéctica que se instaura entre una confrontación cada vez mas positiva con el saber matemático y el sentimiento de superación de sí, que de allí resulta.

Dispositivo

Todas las sesiones de observación y de re-educación que conduzco, son registradas en video lo que permite recoger un importante corpus para el análisis.

Re-educación matemática : elementos de definición

Objetivos

<u>Objetivo general</u>

- Restaurar una relación positiva con el saber matemático
- Permitir la construcción o la reconstrucción de los conceptos matemáticos creando un contexto didáctico y un sostén relacional apropiados.

<u>Objetivos subyacentes</u>

1- Permitir al niño modificar su concepción del saber matemático y del aprendizaje que a ello conduce:

- transformar en deseable este objeto
- hacer descubrir el placer del funcionamiento intelectual
- hacer experimentar al niño que este saber se construye

2- Ayudar al niño a adquirir las actitudes necesarias para la construcción del saber matemático:

- comprometerse activamente en un proceso de exploración
- establecer una relación objetiva y distanciada con este saber

3- Ayudar al niño a asumir los avatares del proceso de construcción

- desestabilidad de las certezas
- pérdida de « poder » frente a los errores y los fracasos.

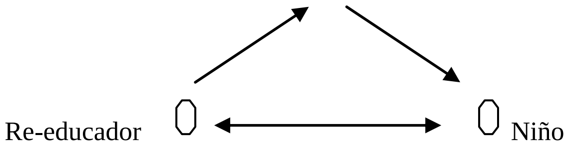
Cuadro

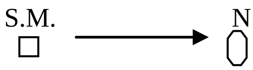
Para alcanzar estos objetivos el re-educador deberá crear un espacio transicional en el que un encuentro positivo con el saber matemático podrá realizarse progresivamente.

El siguiente esquema permite representar el cuadro de este trabajo educativo :

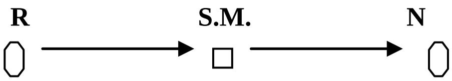
Saber matemático

□

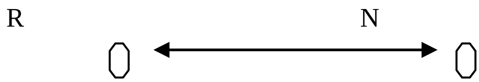




Esta parte del esquema simboliza la relación entre el saber matemático y el niño y representa el objetivo final de la re-educación matemática. Esta relación deberá tejerse progresivamente en curso de la re-educación para convertirse finalmente en positiva y autónoma.



Esta parte del esquema simboliza el trabajo que el re-educador deberá realizar para permitir al niño modificar su representación del saber matemático y del aprendizaje que a ello conduce y de adquirir las actitudes necesarias para esta construcción (cf. objetivos subyacentes 1- y 2).



Esta parte del esquema simboliza la relación intersubjetiva entre el adulto y el niño sobre la que se apoyará el proceso re-educativo. Este sostén relacional permitirá particularmente al niño asumir los avatares del proceso de reconstrucción (cf. objetivos subyacentes (1)).

Cada una de estas relaciones está en relación evidente con las otras. Su separación esquemática tiene como única finalidad aclarar la explicación.
Este espacio transicional de la re-educación que intento crear está inpirado en varias referencias :

- la teoría psicoanalítica para analizar los componentes de la relación intersubjetiva y sus efectos en el proceso re-educativo.
- las teorías cognitivas del desarrollo de Piaget y Vygotsky.

Aunque Piaget y Vygotsky tengan conceptos divergentes del desarrollo y del aprendizaje, ciertos aspectos me parecen que pueden complementarse para la re-educación matemática.

El rol del educador es doble**:**

- debe construír situaciones favorables para la emergencia de los conflictos cognitivos, apoyándose en la *teoría de situaciones didácticas** para que el niño construya los conceptos matemáticos;
- debe a su vez aportar el *sostén* necesario al niño, ayudarlo a logra el éxito en la tarea y acompañarlo en sus tentativas de resolución, para que el niño pueda tener luego una relación autónoma con el saber.

De esta manera, el diálogo con las situaciones y la interacción con el adulto revestirían la misma importancia para permitirle al niño superar sus dificultades.
Todo el problema consiste en poder equilibrar y ajustar estos dos aspectos es decir : permitir que el conflicto cognitivo sea suficiente para que el niño reorganice sus conocimientos a partir de su experiencia, y también aportar la interacción de tutela cada vez que sea necesario.

Pudimos observar durante el trabajo con la niña Magali los efectos positivos o negativos de este ajuste mas o menos logrado.
Estas situaciones propuestas, si bien se inspiran en la *teoría de las situaciones didácticas** no son situaciones de aprendizajes tal cual se puedan presentar en clase.
En principio porque los acompañantes son diferentes y porque uno no puede apoyarse en el conflicto socio-cognitivo. Luego porque la situación está centrada más en la puesta en ejecución de una relación eficiente con el saber que en la reconstrucción de un concepto.

De esta manera no hay progresión pre-establecida sino un re-ajuste constante del contenido de las situaciones en función de las reacciones del niño, se prevee permitir al niño reorganizar sus conocimientos anteriores a la luz de sus nuevos descubrimientos.

El *sostén* del adulto no es solo del orden cognitivo, es un sostén relacional que se dirige al sujeto en su globalidad.
Es gracias a la relación intersubjetiva entre el adulto y el niño que el proceso re-educativo podrá desarrollarse.

Para ello el re-educador debe tener una actitud de aceptación positiva del niño y de sus dificultades, confiando en sus posibilidades de superarlas.
“ Aceptar al niño tal cual es y hacerle descubrir que puede ser otro sin abandonerse a sí mismo ” (R. Diakine).

El re-educador debe establecer un espacio de seguridad para que el niño pueda comprometerse con confianza en el camino difícil de acceso al saber : *“aquí puede ensayar, tantear, arriesgarse, equivocarse, fracasar sin peligro ”.*
Para ello, él debe ser un referente estable y fiable tanto en el plano cognitivo como en el afectivo. Debe vigilar y guardar una implicación distanciada, es decir prestar atención a no sentirse afectado personalmente por los fracasos o

las reacciones emocionales del niño. Debe igualmente respetar el ritmo de evolución del niño y no tener demasiado viva la voluntad de cambio.
El re-educador debe también saber ausentarse y favorecer la autonomía cuando el niño puede asumir solo las situaciones.
Esto es válido para toda cuestión re-educativa.

En relación a la re-educación matemática hay otro aspecto muy importante.
Para convertir en deseable el saber matemático para el niño el re-educador debe sentir lo mismo, es decir que él haya clarificado, si es necesario su propia relación con las matemáticas.
Con su actitud debe mostrar que se puede sentir placer e interés por esta actividad intelectual, proponer de alguna manera un soporte de identificación para el niño.

Igualmente convertir en posible y valorizar estos momentos claves en los que el niño descubre que puede conquistar este saber y pasar de un estado de sumisión a un estado de poder. Entonces hay que sentir este júbilo junto al niño cuando accede a este descubrimiento.

2. Estudio de caso

Presentación general de la problemática de la niña

Magali es una niña de 2do año que tiene 7 años y medio cuando comenzamos a trabajar con ella en enero de 1994.
El abordaje de las dificultades de Magali fue efectuado a partir de las observaciones de los maestros de la clase, del balance psicológico y del balance lógico-matemático. Este último fue desarrollado en cuatro sesiones que fueron registradas y de los que analizamos dos secuencias.
El aspecto dominante de la problemática de Magali consiste en un contraste importante entre potencialidades intelectuales que se actualizan de manera remarcable y performances medias e incluso insuficientes particularmente en la construcción de la numeración y de la resolución de los problemas, mientras que la pedagogía que se practica en la escuela es favorable a la construcción del saber matemático.

Sus problemas a nivel matemático no parecen vinculados al deseo de aprender, de re-utilización de los aprendizajes escolares a nuevas situaciones.
En efecto aunque es tímida, emotiva y reservada en el plano verbal, va a la escuela con placer, está bien integrada en el grupo clase y se interesa por las actividades escolares para en las que ella se muestra atenta y concentrada.

Las dificultades estarían relacionadas a una baja auto estima vinculada a una relación precoz no satisfactoria, que no solo inhibe la acción y la palabra sino que impide a la niña establecer una relación distanciada y objetiva con las situaciones de apropiación en el dominio matemático.

Esto se revela a lo largo de toda la observación y en el balance psicológico donde la implicación de lo real es a veces defensivo con un recurso imaginario.
De esta manera Magali ha construído saberes heterogéneos en los que rituales que no tienen sentido co-habitan con adquisiciones frecuentemente frágiles.

Nuestra intención era observar los procedimientos de resolución puestos en ejecución en vista de analizar mejor sus dificultades para construír la numeración.

Análisis de las dificultades en la construcción de la numeración

Presentación de la ficha *(ver anexo 1)*
Se trata de un ejercicio similar al que se efectuó durante la evaluación colectiva en clase y en la que Magali fracasó.

Análisis de la sesión

- **Enumeración de la colección 113**

La organización de la colección en paquetes de diez que permite e induce el conteo rápido de diez en diez no se utiliza de manera operatoria.
Ella encierra con un círculo ritualmente cada paquete de diez y cuenta los círculos uno por uno lo que causa el error : *114 en lugar de 113.* Encierra igualmente las tres unidades. De esta manera los paquetes de diez se convierte en un ritual sin sentido.

- **Dibujo de las colecciones 102 y 78**

Ella es capaz de leer la simbolización de la escritura usual : “ *102 : 10 paquetes de 10 y 2* ”, y de efectuar el dibujo de las colecciones utilizando este modelo. Sin embargo el caracter formal de este procedimiento está enraízado en detrimento del sentido que recubre y esto se revela durante la fase de análisis del error y de la escritura aditiva de los números.

- **Intento de análisis del error :114** en lugar de **113**

- Ella no puede identificar el error : no establece ningún vínculo entre el dibujo de las tres unidades y la escritura usual.
- No puede aplicar espontáneamente el conteo de diez en diez, de lo que también sabe contar de manera formal hasta cien: tiene conocimientos sobre los números pero no puede utilizarlos como herramientas de resolución, y dos veces ella contará las unidades como un paquete de diez.
- Su dificultad para aprehender el número de decenas en la colección lleva a una imposibilidad de borrar el vínculo con la escritura usual y ella no es mas capaz de decir cuántos paquetes de 10 hay en 103.

Se revela también un desconocimiento de los números mas allá de cien :

- en el conteo de diez en diez ella dice « 200 » en lugar de « 110 »,
- para escribir el resultado de " 110 + 3 " ella escribe " 103 "

- **Escritura aditiva de los números:**

113 : "11 + 3 = "
102 : "10 + 2= "

Uso ritual de los símbolos: ella agrega " = " también para " 70 + 20 + 8 "
Esto revela y confirma que el sentido de la enumeración y de su simbolización por la escritura usual no es construida y que los enunciados tales como " *102 es 10 paquetes de 10 y 2* " son solo formales.
De esta manera uno de los objetivos de la re-educación será favorecer la reconstrucción de la numeración.

- Igualmente es necesario considerar su actitud frente a las dificultades que encuentra en la fase de intento de análisis del error.
- Su dificultad de dar sentido al problema propuesto significa una pérdida de autonomía y una incapacidad para examinar la situación.
- Su mirada se fija al rostro del adulto en vez de mirar la ficha como si intentara sea encontrar lo que éste espera sea encontrar la solución.

Análisis de la relación con el saber a partir de una situación problema

Presentación de la situación

Se trata de una situación destinada a identificar y analizar los procedimientos de resolución de un problema en la que los aspectos numéricos, situación aditiva con números pequeños, no constituyen un obstáculo. Comprende tres fases :

1ra Fase. Clasificación de bloques lógicos
Esta es una fase previa a la *situación-problema** propiamente dicha destinada a familiarizar el niño con el material lógico utilizado a continuación.
Bloques para clasificar (3 criterios) :
Forma : *Redondo, triángulo, cuadrado*
Color : *Azul, rojo, amarillo*
Tamaño : *Grande, pequeño*

2da Fase. Constitución de una colección de bloques lógicos a partir de la lectura de la tabla.
Se trata de colocar en una caja los bloques lógicos en función de los datos de la tabla.
Tres objetivos :

- Constituír la colección de referencia que permitirá asegurar el feed back de la situación para la fase 3.
- Observar las capacidades de lectura de una representación simbólica.
- Favorecer el acceso a la fase 3 por las relaciones establecidas entre la representación simbólica y el material concreto.

3era Fase : Cálculo del número de bloques lógicos utilizando la tabla en función de un criterio dado.
La verificación del resultado del cálculo se efectúa con el material dentro de la caja.

Análisis de las dos primeras fases

Durante la fase 1, la realización de las clasificaciones a sido laboriosa. Magali tuvo dificultades para apropiarse de la consigna “ *Pone juntos los que van juntos ”* porque ella ha asimilado esta operación de clasificación a la que había realizado durante otra prueba. Esta transferencia es comprensible y aún positiva ; el problema es la gran dificultad de descentración que manifiesta en relación a esta asimilación y que le impide ver la situación desde otro ángulo. Esto hace que ella solo podrá realizar las clasificaciones en función de los diferentes criterios en forma de esbozo.

La débil performance para esta prueba no corresponde a dificultades lógicas. Es el resultado de la desestabilización provocada por la necesidad de aprehender la situación no en función de sus expectativas y de su deseo sino en función de una realidad exterior. Como si la desestabilización, la frustración que ella siente por no poder utilizar su modelo trabara toda gestión cognitiva.

Durante la fase 2 ella tiene dificultades, al pricipio, para interpretar la simbolización de los bloques lógicos.

Introduce otro criterio de tamaño : los medianos, sin embargo ausentes en las clasificaciones que acaba de realizar e intenta hacer corresponder el material concreto con la simbolización apoyando un redondo sobre su símbolo : ella tiene dificultades para prever la simbolización del objeto independientemente de su exacta representación.

Llega sin embargo al final de la actividad con perseverancia a pesar el esfuerzo de concentración que parece demandarle.

Análisis de la tercera fase

- **Transformación de la consigna debido a la dificultad para establecer una relación distanciada y objetiva con la realidad.**

Magali cuenta los cuadrados azules en lugar de contar los cuadrados y luego escribe « azul » en su hoja. Luego de haber contado los rojos ella espera contar los azules, es decir para utilizar el mismo criterio. Intenta sin embargo integrar la consigna “ cuenta los cuadrados ” diciendo para si misma “ cuadrados ”. El conflicto entre lo que espera y la realidad la conduce a elaborar una consigna intermedia “contar los cuadrados azules”. Lo que ella hace es efectivamente (2+1=3). Sin embargo cuando ella escribe « azul » en la hoja en lugar de « cuadrado » o « cuadrado azul », revela a qué punto le es difícil descentrarse de su deseo inicial de contar los azules.

La carga cognitiva y afectiva que lleva esta situación es tal que ella no está disponible para percibir todo el sentido de mi discurso cuando intento restablecer la consigna ; de esta manera ella persiste en su proyecto escribiendo « 3 » al lado de « azul ». Sin embargo se desestabiliza por mi intervención y percibe que hay un problema ; ante su imposibilidad para resolverlo regresa al sentido de la simbolización de la tabla (escrita en la pizarra) contando ya no los números sino los símbolos.

En ese momento, también a mí me desestabiliza esta confusión a la que contribuyo diciendo : *“ Entonces tu dices que hay 3 cuadrados... ”*
Esta dificultad de descentración en relación a sus proyectos es tal que al momento de la verificación ella no puede siquiera ver la realidad concreta : solo « vé » 2 cuadrados (azules). Me parece importante señalar aquí una doble necesidad para ayudar a Magali a superar sus dificultades:

- el feed-back de la situación
- el acompañamiento individual

El solo feed-back de la situación, o el solo *sostén* del adulto no pueden permitir resolver el conflicto. Es la conjunción de ambos que favorecerá la emergencia progresiva del sentido.

Al momento de la corrección sobre la hoja vemos aún impregnada la asociación que ella ha efectuado entre las 2 consignas. Ella parece hacer el siguiente razonamiento : *“ porque contar los azules ” estaba equivocado es entonces que “contar los rojos” estaba equivocado también.* Esto confirma las hipótesis interpretativas de su comportamiento durante esta actividad. Magali no puede integrar la información que recibe porque no corresponde a sus expectativas, a sus deseos, a su propia representación de la situación.

No es un problema de comprensión en el sentido común del término. Se trata de una dificultad de descentración en relación a sus proyecciones que le impide establecer una relación distanciada y objetiva con la situación matemática.

Esta actitud es quizás para relacionar con los mecanismos de defensa que ella pone en ejecución a fin de proteger una imagen desvalorizada de sí : es decir transformar la realidad fuente de decepción proyectando en ésta sus propios deseos y pensamientos.

- **Durante la 3er secuencia « contar los azules » asistimos a la emergencia de la distanciación.**

Ella comienza primero a efectuar el cálculo luego demanda la confirmación de la consigna: *Cuántos azules hay ?*
Esto testimonia el hecho que ella a percibido que su interpretación podía estar en desnivel con la realidad de la consigna y que es necesario que haya adecuación entre ambas.

- ***Su comportamiento durante la 4ta sesión : " contar los redondos",*** consigna que se da a sí misma, revela la hipersensibilidad al mínimo obstáculo.

Ella comienza por contar los 2 grandes redondos azules pero el « 0 » (cero) la perturba de los grandes redondos rojos. Frente a este obstáculo combinado para sus dificultades de cálculo abandona la acción de conteo y regresa a la enumeración de los símbolos.
Durante la verificación tiene aún dificultades para aprehender la realidad concreta enumerando 5 redondos en lugar de 7.
El feed-back de la situación y la reflexión que suscita le permite tomar consciencia del error y de explicitarlo.
Se logra la última secuencia sin problemas.
A pesar de las dificultades que Magali a encontrado en el curso de esta actividad y el malestar que le han podido provocar, hay que remarcar el compromiso, la perseverancia y la concentración que pone a prueba hasta el final.

En conclusión, durante esta actividad vemos de manera manifiesta la problemática dominante de Magali que consiste en una dificultad de descentración en relación a sus proyecciones subjetivas que le impide establecer una relación distanciada y objetiva con las *situaciones problemas** y por lo tanto resolverlas. Este comportamiento se observará en varias oportunidades en el curso de otras secuencias de observación. Constataremos igualmente dificultades de organización de las acciones que ella no puede planificar y una hipersensibilidad a las perturbaciones o a los obstáculos.

3. Diferentes fases de ayuda

Proyecto y cuadro re-educativo

Apoyándose en su deseo de superar sus dificultades y su compromiso en la relación dual, se tratará de ayudar a Magali a aprehender la realidad del saber matemático haciéndole experimentar progresivamete que la conquista de ese saber puede ser fuente de satisfacción.

Entre los objetivos de la re-educación enunciados los que parecen los mas importantes a alcanzar por Magalí son los siguientes :

- establecer una relación objetiva y distanciada con el saber matemático.
- hacer descubrir el placer del funcionamiento intelectual.

En relación a los conceptos matemáticos se tratará de ayudar a reconstruír la numeración.
Cada sesión de re-educación tiene lugar una vez por semana y se desarrolla en tres tiempos :

1) Una sesión-juego en la que el adulto y el niño tienen un rol equivalente. Se trata de un juego de cartas que hace intervenir el azar y la estrategia. La parte puede ser ganada tanto por el niño como por adulto.

2) La actividad matemática a partir de una situación propuesta por el adulto.

3) Un dibujo de dos. Esta última sesión permite instaurar un espacio de encuentro, de intercambios entre el adulto y el niño, diferentes a las matemáticas. Favorece la instalación de la relación inter subjetiva y permite al niño expresar su imaginario y calmar las tensiones eventuales.

Tanto esta sesión como el juego inicial han sido frecuentemente indicadores significativos de la evolución del niño.
A medida que se produce la evolución Magali manifestará cada vez mas inicitiva y creatividad, sobre todo en el dibujo y aportará comentarios verbales que estaban completamente ausentes al principio.

Presentaré el análisis de cuatro sesiones de re-educación consecutivas, situadas al inicio que aparecen como las mas significativas del proceso de cambio de Magali tanto en su relación al saber como en la construcción de la numeración.
Hemos trabajado durante estas sesiones a partir de una situación sobre la numeración y he aquí la presentación.

Presentación de la numeración

Objetivos

- Reconstruír la numeración decimal
- Dar sentido a la simbolización de la numeración, es decir la escritura usual.

Concepción de la situación

- Material
  - 5 cajas
  - En cada caja un cierto número de sobres (de 7 a 15)
  - En cada sobre un cierto número de monedas
  - Para una misma caja el número de monedas de cada sobre es idéntico
  - No hay nada escrito ni sobre las cajas ni en los sobres

<u>Ejemplo:</u>

Número de sobres en las cajas

9 sobres de 1 moneda	12 sobres de 3 monedas	11 sobres de 5 monedas
7 sobres de 8 monedas	15 sobres de10 monedas	

▪ La niña debe constituír una colección de monedas cuyo número es dado (designación escrita y oral) tomando los sobres necesarios.
La verificación se realiza por la enumeración de la colección constituída.

▪ Las cajas simbolizan el número que preside al reagrupamiento.
Por otra parte, para las decenas y las unidades pusimos otras bases de reagrupamiento a fin que el niño re-descubra progresivamente la especificidad de la numeración decimal.
El objetivo final de la situación siendo que el niño suprime las otras cajas: la solución óptima para tener éxito, cualquiera sea el número solicitado, es servirse de las decenas y de las unidades.

▪ Los sobres simbolizan el reagrupamiento.
Igualmente hemos puesto las unidades en un sobre para simbolizar la clase de las unidades de la misma forma que la clase de las decenas y posteriormente la de las centenas. El conjunto del dispositivo tiene como objetivo favorecer las relaciones de equivalencia entre los diferentes niveles de la numeración.

▪ Variables didácticas*
Haremos variar, en la progresión de la situación :
- los números que presiden al reagrupamiento para cada caja
- el número de sobres en cada caja
- el número de monedas que se piden

Esto en función de los obstáculos que se juzgarán útiles de crear para favorecer la construcción de la numeración por el niño.

Análisis de las sesiones

Análisis de la sesión 2

Descripción de la situación

Número de sobres en las cajas

15 sobre de 10 monedas	7 sobres de 8 monedas	11 sobres de 5 monedas
12 sobres de 3 monedas	9 sobres de 1 moneda	

Números demandados : 74, 91, 103, 82

La observación del contenido de las cajas y su orden son efectuados con comododad y rapidamente.

Apropiación de la situación : Traer 74 monedas

- **Modelo implícito de la resolución 7 + 4**

Magali no puede ni actuar ni pedir ayuda verbalmente. Su sonrisa incómoda, sus llamados con la mirada lo testimonia. La dificultad la conduce a una inhibición general.
Debo hacerme cargo de la situación de comunicación lo que permite a Magali decir porqué ella no puede reaccionar « *no hay ni 4 ni 7* » y de calmar la tensión.
Pero esto no le permite desbloquear la acción a pesar de incentivarla : ella no puede ver otro modelo de resolución.

- **Sostén :**

Ayudo a Magali a escribir 74 en forma aditiva: 10 + 10 + 4
Esto le permite ir hacia el modelo de resolución.

Croquis del modelo de resolución para las decenas bloqueo para las unidades.

Vuelve a sonreír y reserva 7 sobres de 10 pero queda perpeja porque no puede resolver el problema de las unidades.
Adopta la misma actitud que antes, llamados con la mirada pero ahora con menos tensión.
Mis intervenciones la ayudan a formular la razón de su bloqueo « *no hay de 4* » y a proponer una solución « *se pueden sacar los sobres ?* »

El intercambio que sigue y la ayuda que le aporto le permiten resolver el problema. Durante esta fase Magali comienza a afrontar la dificultad con mayor dinamismo.

- **Verificación**

Ella se hace cargo de la verificación de manera autónoma. La estrategia es eficaz, la voz y los gestos son mas seguros. Ella vuelve al conteo de 10 en 10 con comodidad y se muestra capaz de relacionar las escrituras usuales y aditivas de 74 a los sobres que ha traído. Aparece claramente el placer por el éxito.

Puesta en ejecución del modelo implícito de resolución

- **Traer 91 monedas**

Luego de algunos tanteos alrededor de las cajas 8 y 1 Magali re-aplica el modelo de resolución de manera autónoma.
Toma a cargo la verificación, método y aplicación con seguridad.
Toda su actitud muestra la satisfacción de haber tenido éxito.

- **Traer 103 monedas**

Se compromete en la acción con entusiasmo.
La experiencia del éxito y el sentimiento de dominar la buena estrategia refuerzan su posición.
Aquí se ve sorprendida, pero no desestabilizada cuando constata que falta un sobre de 10 en razón de un error de manipulación.

Explicitación parcial del modelo de resolución

- **Traer 82 monedas**

El vínculo entre las 8 decenas de 82 y la presencia de la caja 8 lleva una regresión al modelo 8 + 2 lo que muestra que el modelo de resolución es aún empírico y vinculado a las circunstancias.
Al final de esta fase aparece por primera vez de manera manifiesta la distanciación frente a la acción y la capacidad de analizar y de explicitar sus gestiones.
Su primera formulación contiene mucho de implícito : « *Porque yo había contado 8 ; eso hacía 8 y 2 .... y después tomé 10* »
Pero aunque yo no pregunte mas ella retoma y completa dando la prueba : *«Porque si yo había tomado 8 y 2 eso habría hecho 10 »*
Este momento es muy importante : a través de este acto de palabra Magali revela y se revela a ella misma :
- por una parte la capacidad de razonar explícitamente sobre sus gestiones, es decir de utilizar la función argumentativa del lenguaje, ella que es tan económica con sus palabras.

- por otra parte su capacidad a dar sentido a la numeración contestando sus representaciones erróneas.

De esta manera durante esta sesión Magali comienza un cambio significativo en su relación al saber y en la construcción de la numeración cuya solidez habíamos sobre estimado preparando la sesión siguiente.

Análisis de la sesión 3

Descripción de la situación

12 sobres de 15 cuadrados	10 sobres de 10 cuadrados	9 sobres de 9 cuadrados
2 sobres de 2 cuadrados	1 sobre de 1 cuadrado	

Números demandados : 83 - 129

Durante esta sesión hemos combinado varios obstáculos para los que Magali no estaba praparda para superar.

Hemos agregado otro soporte material : cuadrados en papel, para impedir que la construcción de la numeración sea dependiente de un solo material concreto y en vista de la introducción de las centenas.

Hemos introducido el número 129. Hasta el momento Magali ha trabajado sea con números de 2 cifras, sea con un número de 3 cifras no excediendo 10 decenas. En el curso de la evaluación habíamos observado que ella podía decir « *102 es 10 paquetes de 10 y 2* » (modelo que había aplicado en la sesión precedente), pero que sin embargo, no podía indicar el número de decenas para 113.
Además constituímos las cajas con números tramposos en referencia a 129 : 12, 9, 2.
Dí una consigna demasiado compleja que fue causa de malentendidos.
A ésto se agregó mi propia dificultad a administrar la situación para aportar el *sostén* cognitivo apropiado. A la confusión que todo esto conduzco no pude identificar en el terreno las diferentes estrategias de Magali para aportarle la interacción adaptada. Se puede decir que no hubieron desestabilizaciones contagiosas.

Sin embargo esta sesión no ha resultado negativa. Si, ha confirmado las dificultades ya constatadas en Magali, ella ha revelado al mismo tiempo su capacidad a superarlas y a continuar el cambio comenzado en la sesión precedente. Esta sesión confirma también a qué punto la concepción de la situación y de sus *variables didácticas** y la actitud del adulto son determinantes del fracaso o del éxito del niño.

Desarrollo y análisis de la sesión

- **Ordenamiento de las cajas de monedas – Traer 83 monedas.**

Ambas actividades se efectúan con facilidad. .

- **Introducción de las cajas de cuadrados – Ordenamiento de las cajas.**

La introducción de este nuevo material no causa problema a Magali. La perturbación surge cuando ella debe efectuar el ordenamiento de las cajas paralelamente a las cajas de monedas. Ella espera que los números de las cajas de cuadrados sean idénticos a los de las cajas de monedas, lo que es el caso para las tres cajas (1, 9, 10). Intenta hacer corresponder las cajas, para lo que por supuesto fracasa . A pesar de mis precisiones ella queda desestabilizada por el hecho que la situación no corresponde a lo que esperaba.

La perturbación que esto provoca vuelve difícil el ordenamiento de las cajas que en otro contexto era performante.
Encontramos aquí su problemática de descentración que habíamos ya observado.

- **Traer 83 cuadrados**

La estrategia de resolución es correcta pero hay un error de manipulación (9 sobres de 10 en lugar de 8) no clarificada. Esto provoca un malestar en Magali y constituye una segunda perturbación.

- **Consigna compleja – Número complejo : 129**

La consigna dada es la siguiente: *« este es el número de monedas y luego de cuadrados que querría me traigas (129). Entonces, tu comienzas por el que tu quieras: sea los cuadrados, sea las monedas. »*

- <u>1era tentativa</u>

En un primer momento Magali cree que debe traer el número con monedas y cuadrados mezclados. Esta interpretación errónea se debe a la vez a la consigna poco clara y a la atracción del número 2 en la caja de cuadrados, esto en razón del modelo de resolución subyacente que es el siguiente:

- 1 sobre de 10 monedas para el « 1 » de 129
- 1 sobre de 2 cuadrados para el « 2 » de 129
- 1 sobre de 9 cuadrados para el « 9 » de 129

Intervengo para que ella traiga un solo material pero no le ayudo realmente a salir de la confusión en la que se encuentra. Devuelve los sobres de cuadrados, reemplaza el de dos cuadrados por dos sobres de 1 moneda y trae entonces 12 monedas.

- <u>2da tentativa</u>

Ella trae :

- 10 sobres de 10 monedas
- 1 sobre de 9 monedas
- un número tomado al azar (5) de sobres de 1 moneda

Ella comienza entonces a elaborar un modelo de resolución adaptado porque la centena y las unidades son realizadas en referencia quizás a la designación oral y al modelo ya construído para 103. El que hace obstáculo es el número 2 del que no puede identificar la simbolización.

La desestabilización inherente a los episodios precedentes combinados para este obstáculo imposible a pasar, conduce a este comportamiento aberrante de tomar sobres al azar.

Durante la verificación reservará 2 sobres entre los 5 sobres de 1 moneda en referencia sin duda al « 2 » de 129.
Al inicio de la 3era tentativa, la confusión en la que se encuentra es tal que re comienza por querer tomar cuadrados en lugar de monedas atraída por la caja 2.
En respuesta a mis demandas, elle se lanza hacia la estrategia de tomar 10 sobres de 10 monedas para la centena que comienza a ejecutar pero la proximidad de la caja 12 (al lado de la caja 10) tiene el efecto de un desencadenante y abandona la caja 10 para tomar un sobre de 12 monedas. Sin duda ha pensado que tenía la solución a su problema. Mi intervención inapropiada y la anticipación del carácter erróneo de su estrategia, que debe realizar en ese momento, tienen un efecto de bloqueo.

El diálogo que sigue permite explicar la razón de su bloqueo e intentar otra solución :
CP – Cuál es el problema ?Qué sobre has tomado ?
M – Hay 12.
CP – Hay 12. Y que te falta ahora ?
M - *9.*
CP - *9*
Magali continúa bloqueada
CP – Entonces, cuál es el problema Magali ?
Elle sonríe, incómoda pero no responde.
CP – Cuál es el problema ?

M - ...
CP -. Tu no puedes tomar 9 monedas ?
M - Si
CP - Si. Y entonces qué es lo que causa problema ?
M - El 12 y el 9.
CP – El 12 y el 9 !
M – Porque hace 21.
CP – Si, hace 21. Entonces esto no va a funcionar si tu me traes esto. Entonces hay que encontrar otra solución para que esto funcione.

Aunque está convencida que su modelo de resolución es erróneo no puede abandonar completamente su estrategia. De esta manera ella guarda el sobre de 12 pero reemplaza las 9 unidades por 9 decenas y trae :

- 1 sobre de 12 monedas
- 9 sobres de 10 monedas

Parece que ella piensa al momento de la verificación del sobre de las 12 monedas que eso no funcionará pero no puede decirlo y mi actitude demasiado rígida no le permite hacerlo.

Luego intento ayudarla a encontrar la solución para la 4ta tentativa, contando con ella de 10 en 10 a partir de 90 hasta 129.
Dice sonriente: *« Tengo ganas de traer 20»* no responde directamente a mi pregunta que era *« que le falta a 90 para que haya 129 ?* » pero responde a la pregunta fundamental que ella se plantea mas o menos conscientemente desde el inicio : «*A qué corresponde el 2 de 129 ?* »

Pareciera haber resuelto el problemas analizando la parte « 29 » del número tomando sin duda apoyo sobre la designación oral, porque ella decide traer “20 y 9” . La centración sobre esta parte del número que le ha ayudado a encontrar la solución le impide momentáneamente tomar en cuenta simultáneamente todos los parámetros del número: ella olvida la centena.

Durante la verificación final, cuando agrega la centena, su modelo de resolución es : 100 + 20 + 9. Aquí, mi intervención es aún inapropiada, imponiéndole mi modelo (120+9) sin aceptar el suyo en razón de mi preocupación de conducirla a aprehender las 12 decenas de 129. Esta preocupación era legítima pero prematura debido al contexto pesado de la sesión. Esto muestra hasta qué punto puede ser difícil a veces estar a la escucha del niño, es decir de poder diferer, dejar de lado su propio proyecto para dar lugar al del niño cunado esto es necesario.
Si ella retoma el modelo que induje para los 129 cuadrados que trae sin problemas, en la sesión siguiente volverá a su propio modelo.

Durante esta sesión la actitud de Magali revela su malestar frente a todas las dificultades que encuentra. Ella se muestra insegura al hablar. Espera mi parecer y eso se ve expresado en su mirada y su postura. Ella también está atenta a mis reacciones : intenta identificar a través de mis reacciones si ha obtenido logros o si ha fracasado y cómo voy a tomar su fracaso.
No puede demandar ayuda verbalmente y siempre debo hacerme cargo de la situación de comunicación para llevarla a expresar lo que le causa problema. Su tensión disminuye cada vez que intervengo, ella sonríe tranquila sin duda por no estar sola frente a su problema.

En varias oportunidades no brindé el *sostén* cognitivo apropiado, sin embargo creo haber asumido con serenidad las dificultades de Magali teniendo confianza en sus posibilidades de superación posterior.

Análisis de la sesión 4

Descripción de la situación

Monedas 15 10 9 41
Cuadrados 15 10 9 2 1

Números demandados: 75 137 127 145 109
Número propuesto por el niño : 159

En razón de vacaciones escolares y de días feriados, esta sesión se desarrolló un mes después de la precedente.
Teniendo en cuenta las dificultades de la sesión tres, habíamos decidido minimizar los obstáculos en la elección de los números.
Durante esta sesión observamos tres fases significativas :
- La primera es de puesta en ejecución y perfeccionamiento del modelo de resolución y de la experiencia progresiva de la maestra.
- La segunda fase es de *institucionalización** del conocimiento sobre la numeración.
- La tercera es de puesta en ejecución (con domino) del saber sobre la numeración durante la cual Magali comienza a manifestar placer del funcionamiento intelectual.

Puesta en ejecución del modelo de resolución

- **Traer 75 monedas** - cuadrados.

Comenzamos con un número fácil «75 » para permitirle se apropie de la situación. Magali tiene éxito fácilmente con los dos materiales sucesivamente. Constatamos un ritual que se detendrá luego del 5to número (127 monedas):

ella verifica el contenido de los sobres para las unidades pero no para las decenas.

- **Traer 137 monedas,**

Magali reflexiona bastante detrás de las cajas. Esta espera es diferente de las ya observadas : no percibo su llamado. Reserva las unidades, reflexiona aún un poco mas mirando la escritura del número y toma 13 sobres de 10.
Durante la verificación ella separa los 13 sobres de 10 : cuenta hasta 100, coloca un montón al costado, luego cuenta los otros « *10, 20, 30* ».
Utiliza, entonces el modelo de resolución –fundado sin duda en la designación oral- que había elaborado para « 129 » en la sesión precedente y no el que yo había inducido y que ella había tomado al instante.
Su actitud es reservada, autónoma en la acción, pero aún no muy segura y permanece dependiente de mi aprobación.

- **Traer 137 cuadrados - 127** monedas**.**

Lo logra con facilidad y utilizando el mismo modelo de resolución.
100 + 30 + 7.
Durante las verificaciones le pido establecer las equivalencias : 130 cuadrados / 13 sobres, 120 monedas / 12 sobres que logra progresivamente dominar.
Su actitud es cada vez mas dinámica, segura. Ella se muestra sonriente y menos dependiente de mi aprobación.

- **127 cuadrados.**

Ella cesa el ritual de verificación de las unidades y utiliza espontáneamente el modelo 120 + 7.

Institutionalización* del conocimiento

En respuesta a mi pregunta *« Necesitas todas las cajas para traer los Números que te he pedido ?* », ella separa las cajas inútiles para las monedas y los cuadrados.
De esta manera se logra el objetivo de volver a dar su estatus a la numeración decimal. Sin embargo el vínculo entre las cajas y su designación oficial, aunque se haya establecido empíricamente, debe ser explicitado. Es el objeto del diálogo que sigue :
CP – Qué has guardado Magali ?
M- Los « 1 *» y los «* 10 ».
CP – Sabes cómo se les llama a los 1 ?
M - No.
CP – Cómo los llaman en clase ?

M - Las unidades.
CP- Y a los « 10 *» cómo los llaman ?*
M- Las decenas.

En relación a esta fase importante quisiera hacer dos remarcas:

a) Era importante que el vínculo entre los conocimientos de la clase y la reconstrucción de la numeración en re-educación pudiera establecerse « oficialmente » para evitar una separación posible entre las matemáticas en clase y las matemáticas en educación.
Por otra parte, el lugar oficial de los aprendizajes es la clase. El espacio re-educativo permite la puesta en marcha de una relación eficiente con el saber y una reorganización de los conocimientos para que el niño pueda sacar beneficio de los aprendizajes en la clase.
Extraemos de este hecho que la *institucionalización** de los conocimientos debe realizarse en referencia a la clase.

b) Una segunda remarca concierne la utilización del lenguaje codificado, aquí : decenas y unidades. Magali conocía estos términos pero los ha utilizado en raras oportunidades en re-educación. Solo a partir que ella ha reconstruído la numeración es que este lenguaje codificado puede ser propuesto para que sea envestido con todo el sentido que recubre.

Dominio de la puesta en ejecución del saber

- **145 monedas - 109 cuadrados.**

Durante esta fase, el cambio de actitud de Magali se percibe claramente. Ella se compromete con mayor dinamismo y logra rapidamente la resolución para los dos números. Toma distancia de su acción cuyo resultado puede anticipar con seguridad antes de proceder a la verificación.
El placer de hacer funcionar su dominio del modelo de resolución se manifiesta particularmente en la puntuaciones verbales, hasta el momento muy raras :*«Bueno ! – Entonces !   Ya está !* ».

Tomar a cargo la situación. Elección de continuar. Elección del número 159.

Con esta última secuencia de números, es Magali quien administra la situación. Decide continuar la actividad y elige el número mas grande de la sesión: 159. El hecho de haberle propuesto detenerse o continuar, como de elegir el número a sido importante, no por la construcción de la numeración ya que el objetivo había sido logrado, sino para reforzar la actitud frente al adulto.
El vínculo entre el saber matemático y el niño comienza a existir de manera mas autónoma : su actitud revela una toma de distancia en relación al adulto :

sus miradas y su atención están mas centradas en la acción realizada que en las reacciones del adulto.
Eligiendo continuar con otro número ella hacer durar el placer del éxito, del dominio y por los beneficios narcisistas que saca, refuerza su autoestima.

Análisis de la secuencia 5

Durante esta sesión hemos modificado la situación de partida en la repartición de los roles entre el adulto y el niño. No es Magali quien debe buscar los sobres; a partir del número dado ella debe decirme cuáles son los sobres que debo traer.
Hemos introducido esta modificación por dos razones :

- para conducirla a enunciar el número de decenas.
- para permitirle tomar a cargo la situación teniendo el rol de « supervisor » del adulto, a quien ella le indica una acción y luego la controla.

También hemos propuesto números que puedan constituír obstáculos : 120, 172, 315, 273.

Evolución de la construcción de la numeración

- cuando ella da las consignas al adulto enuncia las unidades. Las decenas aparecen mas progresivamente,

  - 156 : *« 5 unidades y 15 sobres* »
  - 120 : « *l2 sobres !* » … *« decenas»*
  - 172 *: «Entonces, para las unidades hacen falta 2 y 17 sobres para las decenas* ».

- La introducción de las centenas es envestida con seguridad, la presencia de las otras cajas (20, 50, 70) aparece superflua.

Constatamos huellas de la dificultad para construír el estatus de las decenas que no son explicitadas desde el principio y siempre tomadas y verificadas al final para 124-315-472.
Por ejemplo para 124 ella muestra las cajas correspondientes diciendo : *« las unides, las centenas y eso »*

- Para « 549 » en la consignas para el adulto utiliza el orden de lectura del número pero se apoya aún en las decenas : « *4 decenas … 40 decenas … no 4*».

Su rectificación ha sido sin duda inducida por mi sorpresa.
Ella es capaz de efectuar equivalencias entre los diferentes niveles de numeración con mayor facilidad.

- Los números « difíciles » no le causan ningún problema.

Evolución de la relación con el saber

El dinamismo, la seguridad, incluso la desenvoltura que ella demuestra testimonian de su placer por dominar las estrategias de resolución. El tono de su voz es seguro, su actitud corporal, sus acompañamientos verbales y gestuales expresan su júbilo : su sonrisa se expande, la mirada brillante, su actitud enérgica y erguida. Ella ya no se siente desestabilizada frente a los obstáculos o frente a situaciones nuevas :

- El error de unides para 156 ; los números difíciles: 120 con « 0 » unidades, 172, 315 ; la introducción de las centenas y otros agrupamientos. Ella va mas lejos en la toma de riesgos, dándose desafíos para superar.
- Busca espontáneamente reconstituír el número 273 para la verificación.
- Para la verificación de las unidades de « 129 » cuenta de 2 en 2.
- Elige el número « 129 » para el ejercico más difícil ya que no hay mas soporte escrito. Este número es el que había constituído un obstáculo difícil en la sesión 3.

Esta elección consciente o preconsciente es significativa, sin duda ella ha querido probar y probarse que había superado sus dificultades en relación a la numeración.

Evolución de la relación con el adulto

Su relación con el adulto comienza a cambiar. La situación de supervisión le permite experimentar el otro rol, otra posición frente al adulto, que ella enviste con eficacia y placer.

Ella me pilotea, controla mi acción, evalúa el resultado con seguridad y un cierto júbilo.

Esto, le permite también envestir la palabras de manera diferente y co-administar la comunicación verbal, mientras que hasta ese momento ella se expresaba sobre todo en respuesta a mis solicitudes.

Esta toma de distancia y de autonomía frente al saber, frente al adulto se manifiesta igualmente frente al disposistivo de observación, ella no mira prácticamente la cámara. Esto es signo de re-afirmación de su narcisismo que ya no está mas vinculado a la aprobación y al parecer del adulto, sino que las raíces están en la toma de consciencia de sus nuevas posibilidades, de su poder personal frente a las matemáticas.

En esto Magali progresa hacia una relación cada vez mas autónoma con el saber matemático.

Conclusión

El trabajo re-educativo con esta niña continúa hasta Noviembre de 1994 para finalizar el objetivo de la re-educación.
La evaluación final de la re-educación hace aparecer que :

- Se reconstruye el sentido de la numeracíon y de la simbolización por la escritura usual. Este conocimiento está unido a los saberes anteriores y a los de la clase.

- La relación con el saber matemático es claramente positivo :

La apropiación de las *situaciones problemas** se efectúa con compromiso, dinamismo, reflexión, autonomía, seguridad y responsabilidad.

- La capacidad de anticipación y el distanciamiento que ella necesita se pone en ejecución de manera eficaz.

- El placer del funcionamiento intelectual se manifiesta plenamente : el deseo y el placer de hacer matemáticas es claramente expresado : *«me encanta la escuela, me encanta hacer matemáticas »*. Magali buscar superar sus límites, no se siente desestabilizada por los obstáculos potenciales e incluso busca la dificultad.

- La relación con el adulto se vuelve cada vez mas distanciada y autónoma. Magali es capaz de co-administrar la comunicación con el adulto y de implicarse enteramente, tanto en la comunicación como en la gestión de las diferentes actividades de la sesión.

En conclusión, la diferencia de comportamiento y de actitud que se revela para la observación comparando las primeras y las últimas sesiones nos lleva a pensar que este trabajo permitió a Magali no solamente reconstruír conocimientos matemáticos sino además restaurar su autoestima.

Balance de los docentes de la clase

Los resultados de las evaluaciones hacen aparecer progresos en todos los dominios.
La distancia entre la media de la niña y la de la clase (permaneciendo ésta estable durante tres trimestres) es de :

- 5,30 en el primer trimestre
+ 0,75 en el segundo trimestre
- 1,50 en el tercer trimestre.

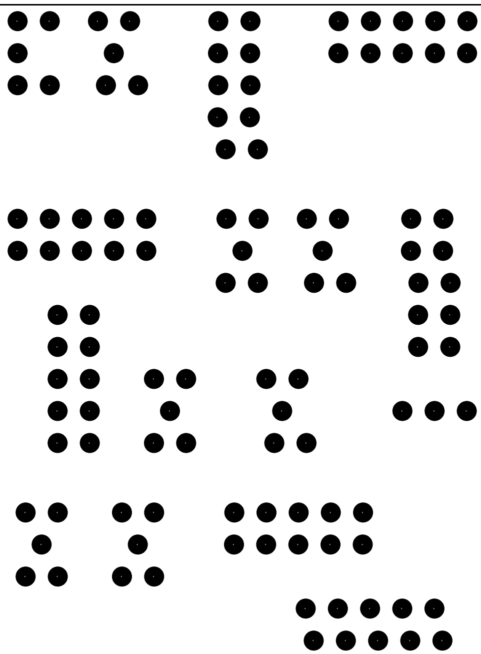
La actitud frente a las situaciones de exploración mejoró en ciertos puntos : ella se compromete más y demuestra reflexión. Los mayores beneficios de la re-educación aparecen en el plano psicológico : se manifiesta la apertura y la adquisición de mayor seguridad. El hecho de asistir a las sesioens de re-educación es vivido por ella y por los otros niños como un privilegio lo que le da un valor suplementario.

Esta evaluación será confirmada por sus padres que testimonian su satisfacción a la psicóloga.

Si el trabajo realizado con Magali permite concluír positivamente sobre la pertinencia de este dispositivo re-educativo para esta niña, resta experimentarlo con otros niños para ponerlo a prueba y profundizar sobre los diferentes componentes.

Anexo 1

Ficha numeración

Escritura usual	Dibujo de las monedas	Escritura aditiva
102		
		
		50+20+8

Dispositivos especializados en las estructuras ordinarias de la escuela y del colegio

Juegos matemáticos y niños con dificultades

François Boule (1997)

En un primer momento se trata de determinar de manera precisa en cuántas direcciones se pueden explotar ciertos juegos matemáticos en la escuela, luego de detallar las adaptaciones posibles. Para ello el autor se apoya en numerosos ejemplos.

La intervención posible de los juegos en matemáticas a sido frecuentemente nombrada desde hace algunas decenas de años. Esta parece una manera atractiva de dar, o de devolver el gusto por las matemáticas, y que puede igualmente dar un cierto placer a los adultos. Los ejemplos son abundantes (ver bibliografía). Numerosos profesores de matemáticas, en particular aquellos que están en formación se inclinan por esta modalidad y frecuentemente para la satisfacción de todos. Sin embargo debemos señalar dos limitaciones :

• **La primera** es: que una *etiqueta* no es suficiente para dar el estatus de juego. No es juego lo que es aceptado como tal por los niños y no decretado por los adultos. El juego contiene su propia motivación y su propio objetivo que es el de ganar, contra un adversario o contra sí mismo. Mientras que una actividad de consolidación tiene una motivación y un objetivo externo *explícito* que es de entrenar una competencia o de desarrollar una destreza. Ambos no son incompatibles: puede ocurrir que una actividad que es percibida como un juego por un niño sea en realidad promovida por el docente para ejercer una competencia. Pero en este caso, el objetivo debe estar en claro y ser explícito para el docente.

• **La segunda limitación** es: la fragmentación. Hemos encontrado una gran cantidad de juegos estimulantes, astutos, con éxito garantizado. Estos juegos dan una seguridad en formación contínua, incluso a veces se hace de ellos una carrera didáctica, pero no son más que un manto de Arlequín. Falta cohesión al conjunto y para cada uno una modulación *de indicación* y *de empleo.*

El objetivo de este taller podría ser restringir el catálogo de ejemplos pero precisar su uso.

Para qué pueden servir los juegos matemáticos ?

Excluímos por el momento los juegos *de ocupación* es decir aquellos que pueden resultar de interés pero sin un objetivo educativo claro. El interés por estos juegos se sitúa en el patio de recreación o fuera de la escuela.

Proponemos tres direcciones de explotación de los juegos matemáticos en la escuela :

- **Juegos "para ver" o "para hablar"**

Es en particular el caso de una primera fase de re-educación : se trata de dar un soporte para entrar en contacto con el niño, permitirle una acción, favorecer un intercambio, encontrar un punto de apoyo.

También puede ubicarse en este campo la función social del juego : es observar una regla (sin hacer trampas), considerar los derechos del adversario, integrar y si es posible anticipar sus ataques.

Ejemplo **:** Fué propuesto un juego de memoria, por talleres en una clase de niños de 4 a 5 años. Dos niños juegan, pero cada uno para sí, dando vueltas las cartas al azar sin tener en cuenta los tiros precedentes, sin mostrar las cartas al adversario. Otros dos niños de la clase, mas pequeños juegan *realmente* integrando a medida las informaciones. La práctica del juego instruye a nivel de la interacción social, la integración de la información, la planificación.

- **Un segundo campo de aplicación es el diagnóstico.**

Se trata precisamente de identificar competencias o dificultades, eventualmente de confirmar una indicación dada. En este caso, es necesario tener una idea precisa de lo que está en juego en la actividad propuesta, igualmente si es posible, representarse lo que hace el niño en su lucha con el juego : qué conocimientos, qué representaciones moviliza? Se puede distinguir la parte del afecto, del retroceso, del desafío, etc. ?

Es por esto que cada *soporte de juego* debe permitir una graduación de usos, una progresión.

Ejemplo : las "cajas pequeñas". Se trata de un puzzle en 3 dimensiones : formar un paralepípedo con algunas piezas de madera como éstas :

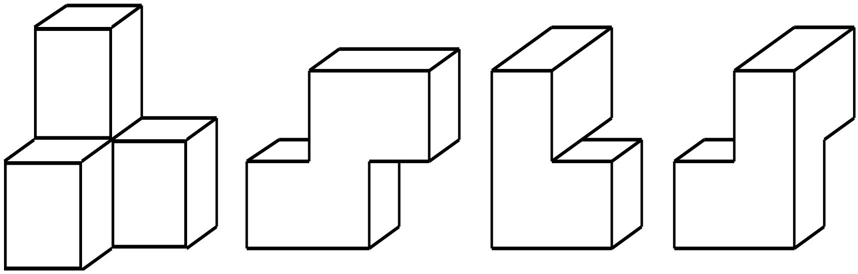


fig. 1 : piezas constitutivas de las"cajas pequeñas" (puzzles 3Dimensiones)

Esta manipulación, por ejemplo, para niños de 5 a 6 años, hace aparecer la dificultad (que no se encuentra habitualmente en los puzzles planos) de dar vuelta una pieza (particularmente la segunda); esta dificultad es una etapa característica en la disposición del "grupo de los desplazamientos" en el espacio (como decía Piaget).

- **Soporte de re-educación.**

Se trata de construír representaciones y procedimientos, a través de medios *diferentes* de los que hasta aquí llevaron al niño al fracaso, o bien de *adaptar* una situación en función de parámetros específicos.

Ejemplo : Los laberintos que son habitualmente utilizados tienen dos defectos. Por una parte « se usan » rápido es decir que en pocos ensayos son memorizados ; se desvía la actividad de representación y de exploración.
Por otra parte se trata de una actividad « papel-crayon » que agrega a la actividad mental representativa una dificultad gráfica (motriz). Es particularmente evidente por ejemplo para niños trisómicos, que tienen grandes dificultades para no *atravesar* los muros con el crayon. En estos casos podemos imaginar, con la ayuda de una plancha con ranuras y tiras de cartón, construír un laberinto con muros, en el que se indica el desplazamiento marcándolo con el dedo.

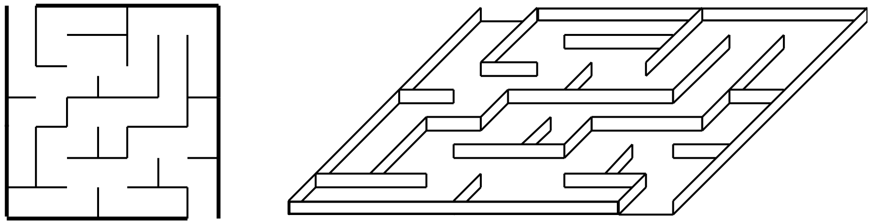


fig. 2.a y 2.b : Laberinto plano y realización con volúmen

Además las tiras de cartón son móviles : una actividad ciertamente mas rica que resolver un laberinto, consiste en **construír uno** en el que existe una solución y *solo una;* los otros caminos son pistas falsas, si es posible no demasiado evidentes. Un niño lo construye y es destinado a otro para que lo resuelva.

Este último ejemplo hace emerger dos nociones que parecen didácticamente interesantes :

Juego débil – juego fuerte

Hablamos de *juego débil* en el caso que los jugadores tienen pocas iniciativas, sea porque el juego posee una estructura profunda que escapa a los jugadores (es el caso del dominó para los más pequeños), sea porque el azar interviene de manera dominante. En oposición hablaremos de *juego fuerte* cuando el jugador puede dominar el juego. Es el caso de los juegos de estrategias al menos en un cierto nivel .

Variabilidad

Algunos juegos son susceptibles de adaptación. Se podría hablar de « variable lúdica » a la manera de *variable didáctica** . He aquí un ejemplo:

Todos conocen las « cascadas » particularmente gracias a una antigüa publicación de Philippe Clarou en el IREM de Grenoble :

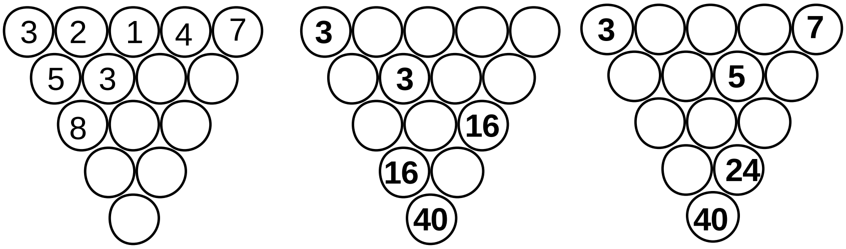


fig. 3.a **fig. 3.b** **fig. 3.c**

El número situado en un casillero es la suma de los dos números vecinos situados sobre él. Cuando se da la primera línea (fig. 3.a), el problema es fácil, solamente es una variable lúdica de las “tablas” de adición. El juego es más estimulante cuando los cinco datos necesarios son dispuestos de otra manera (fig. 3.b). El juego se convierte en “juego fuerte” cuando se trata de crear una grilla: se pueden elegir números arbitrariamente? La posición de estos números es libre (fig. 3.c) ? Hacemos aparecer de esta manera un verdadero *dominio* de la situación.

El « juego sobre el juego » es probablemente una metáfora de las matemáticas. Analizar la construcción de un juego, jugar con reglas, *construír* un juego o una variante, es tomar posesión y hacer jugar su estructura.

Adaptación de un juego y carta de utilización.

Ejemplo : este es un primer juego propuesto a niños de 4 a 5 años (fig.4.a). Se trata de “dominós 2-Dimensiones” ; la regla (topológica) consiste en ensamblar hexágonos de manera que los vértices en contacto tengan el mismo color. Se observó que esta regla era mas fácil a utilizar en la disposición de la fig. 4.b (discos para completar). Se puede prolongar esta actividad con niños de 1er año (alumnos de 6 años) con una regla numérica: los discos para completar deben ser veinte en total. (fig. 4.c) :

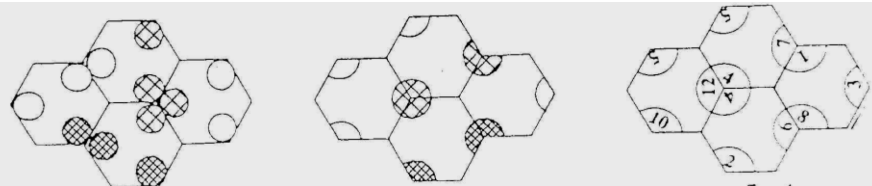


fig. 4.a fig. 4.b fig. 4.c

Además, este soporte puede dar lugar a problemas :

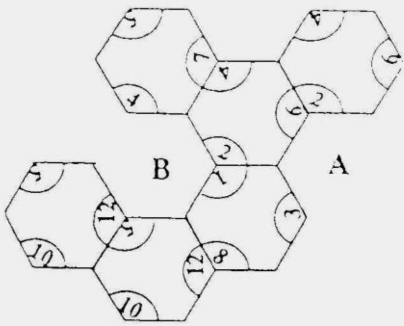
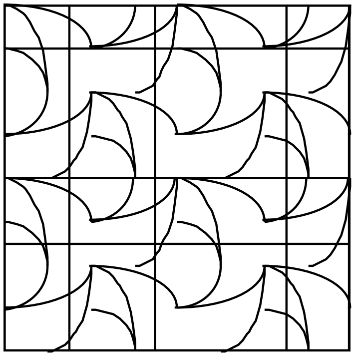


fig. 5

La ocupación de la posición A está sumisa a *una* condición (hacer 20). Pero la ocupación de la posición B está sumisa a *dos* condiciones.
De esta manera es posible partir de un juego « débil » en el que la regla es muy simple, incluso implícita, y graduar el uso en función del sujeto y de su experiencia, proponiéndole desafios progresivos.

Un juego **se usa,** es decir que la exploración inicial es rapidamente reemplazada por una recuperación por la memoria de los resultados anteriormente encontrados. Esto ocurre verdaderamente con los niños mas pequeños, por ejemplo para los encastres o los puzzles. Lo importante entonces es *renovar* el interés a través de variantes, es decir alterar las eventuales recuperaciones.

Ejemplo : Es fácil fabricar un puzzle con un papel de regalo en el que el dibujo es lo suficientemente neutro (no hay un conjunto de figuras) ; recortamos un rectángulo con rangos y líneas cuyos largos son diferentes (fig. 6.a). Cuando este puzzle se vuelve familiar, lo modificamos con un nuevo corte de igual superficie ; la dificultad depende evidentemente del número de piezas (fig.6.b).



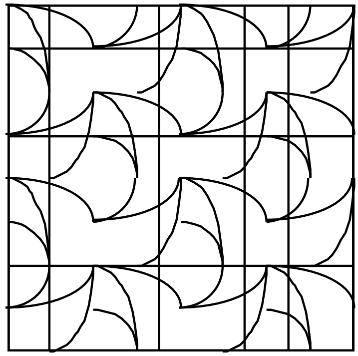


fig. 6.a **fig. 6.b**

Refuerzo de una representación

Algunos juegos tienen como objetivo explícito reforzar un tipo particular de representación.

Ejemplo 1 : es numérico. Existen una gran cantidad de juegos que preveen reforzar el aspecto « repertorio » (memorización de las tablas). Por el contrario ciertas actividades favorecen el aspecto “graduación” (recta numérica).

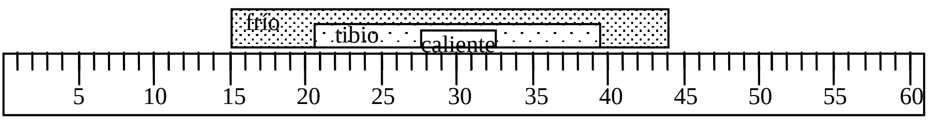
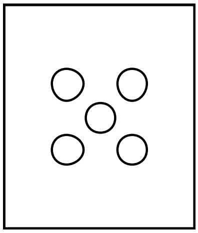
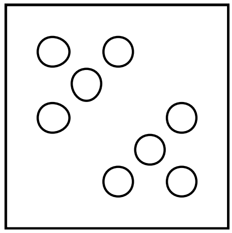


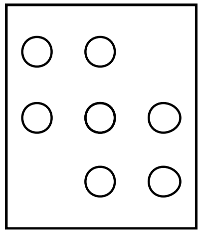
fig. 7. : Caliente / frío

Hay un número para descubrir, entre 1 y 99. Los jugadores proponen un número, cada uno a su turno, al que se responde « frío » si la distancia al número en cuestión es igual o superior a 10, « tibio » si la distancia se encuentra entre 3 y 10, “caliente” si la distancia es inferior a 3. Se puede ayudar con el uso de una graduación y de un cursor, como el que figura arriba.

Ejemplo 2 : también es numérico
(pero, es un juego ? o cómo hacer un juego ?)







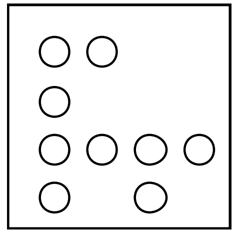


fig. 8.a **fig. 8.b** **fig. 8.c** **fig. 8.d**

Estas tarjetas se presentan una a una, rapidamente (1 o 2 segundos).

Cuántos puntos ?

La primera (a) es una constelación clásica. Se puede leer en la segunda (b) dos constelaciones “4”, y nombrarla por “4 y 4 = 8”. Para las otras, la referencia es menos fácil, es interesante hacer explicitar las diferentes tentativas. Por ejemplo para (c) : vemos 4 + 4 , o bien 2 + 3 + 2 ? etc. Para (d), se pueden ver tres constelaciones idénticas de 3, y concluir 3 × 3 = 9, o también… Es la *pluralidad de las referencias, la automatización de las constelaciones, la rapidez de los nombramientos declarativos*, que aquí son objetos de entrenamiento.

Juegos estratégicos

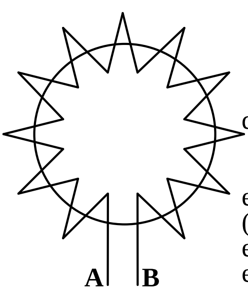
Un juego estratégico agrega dos componentes a un soporte dado (por ejemplo un valor numérico) : uno tiene carácter social (respeto de las reglas del juego, y la alternancia de las jugadas), el otro revela la **planificación** de las acciones (imaginar las jugadas posibles, y las respuestas del adversario).Estos componentes pueden ser tomados como objetivos del juego, o bien pueden permitir “renovar” el interés de un juego en el que el soporte es conocido.

Dos posiciones parecen defendibles :

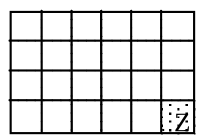
• Por una parte, promover juegos con reglas simples, en los que el respeto de la regla no constituya una sobrecarga excesiva a expensas de la capacidad de anticipación,

• Por otra parte, admitir juegos complejos (como el juego de ajedrez) ponen en ejecución habilidades sintéticas, no reductibles a modelos simples. Cambios de situación (cada medio tiempo cambiar de campo) permiten reequilibrar las relaciones expertos/debutantes.

He aquí dos ejemplos de juegos « simples » en los que la regla es rapidamente integrada, lo que permite prever un análisis completo :



Los dos jugadores parten, uno de A, el otro de B. Avanzan sobre la línea quebrada, como deseen de 1, 2 o 3 segmentos. Cuando se encuentran enfrentados (bloqueo), el ganador es el que está en posición exterior.



Esta es una barra de chocolate. Cada jugador a su turno quiebra una tableta (de un borde o del otro) y la guarda
Pierde quien debe tomar el cuadrado marcado por Z.

fig. 9.a : juego de la estrella

fig. 9.b : la barra de chocolate

Nuevos juegos

Existen otros juegos que parecen aportar componentes originales, o que han sido experimentados de manera metódica en las escuelas. Es el caso de Abalone (cf. F. HUGUET[1]), o bien de Quarto (cf. Grand N, n°58) en los que la originalidad está en que un jugador elige la pieza que va a a ser jugada por su adversario.

Ha sido también cuestión de « juegos cooperativos », desarrollados en particular por canadienses. La finalidad del juego no es hacer ganar a un jugador contra el otro, sino de hacerlos cooperar a fin de que ganen juntos.

Ejemplo : en una huerta, hay 4 tomates (rojos), 4 zanahorias (naranjas), 4 arvejas (verdes), 4 maíces (amarillos). Se juega con dos dados: un dado con números y un dado con colores (rojo, naranja, verde, amarillo, blanco, negro) . El objetivo es "cosechar" todas las legumbres antes que llegue el invierno. Si el blanco es « cosechado » , es el invierno quien gana.

[1] Ver bibliografía al final de artículo.

Bibliografía

F. BOULE : Mathématiques et jeux, Cedic, 1976 [*mais seulement le chapitre 2 …*]
B. BETTINELLI : Mathématique et jeux de société, CRDP Besançon, 1976
M. MEIROVITZ, J. TRICOT : Le Mastermind en dix leçons, Hachette, 1979
N. PICARD et al. : Les jeux du Club des Cordelières, IREM Paris VII, 1980
Commission JEM : LUDI-MATH n°1 (1979), n°2 (1979), n°3 (1982), n°4 (1985), APMEP, Régionale de Poitiers
APMEP : Jeux 1, publication APMEP n°44, 1982
F. PINGAUD, J-F. GERME : Cinquante jeux papier/crayon, Ed. du Rocher, 1984
APMEP : Jeux 2, (numériques) publication APMEP n°59, 1985
B. BETTINELLI : Jeux de formes, formes de jeux, IREM Besançon, 1984
D. GRANDPIERRE : Le calcul mental, c’est simple, en s’amusant, Retz, 1985
L. CHAMPDAVOINE : Les mathématiques par les jeux (cycle I), F. Nathan, 1985-86
M. MEIROVITZ, P. JACOBS : La gymnastique de l’esprit, Hatier, 1988
F.BOULE : 1, 2, 3 … Jouez ! MDI [Nathan], 1991 ; jeux en kit
F. BOULE : Faites vos jeux, 1996
F. BOULE : Jeux de calcul, A. Colin, 1994
F. JACQUET : “Quarto”, Revue Grand N, n°58, 1995-96
Revue MATH-ECOLE (Case postale 54; CH 2007 Neuchâtel 7)
D. DJAMENT : Un petit jeu pour le C.E., APMEP n°408, Février mars 1997
F. HUGUET et alii : Jeux de stratégie au Cycle II., IUFM de Bretagne, site de Quimper

Glosario de didáctica

Glosario de didáctica

COPIRELEM a partir de un documento de M.H. Salin et J. Briand

La propuesta de esta artículo es precisar nociones de didáctica de las matemáticas.

Es evidente que una reunión de definiciones no podría sustituír la práctica de la disciplina (en este caso la didáctica de las matemáticas). No se trata de reducir la didáctica a una elaboración detallada a nivel terminológico.

Sin embargo otro fenómeno se produce en los lugares de formación : es el ***de la utilización*** *de palabras de didáctica de las matemáticas* **sin dominio** *de los conceptos a los que esas palabras hecen referencia. Por ejemplo no es raro ver que se utiliza la noción de « contrato dodáctico » para evocar la relación maestro-alumno en el sentido afectivo del término ; inclusive, la "transposición didáctica" sería para algunos la nueva manera de hablar de la preparación de clases.*

El siguiente glosario no es fijo ni determinado. A pesar de sus imperfecciones y lagunas, intenta detenerse en términos utilizados con frecuencia ; sin duda su sentido se afinará a medida que se desarrollen las investigaciones. Esperamos que permitirá a quienes ***trabajan en didáctica de las matemáticas*** *disponer de referencias comunes en relación determinados conceptos.*

Didáctica de las matemáticas

"La didáctica de las matemáticas estudia los procesos de transmisión y adquisición de esta ciencia, particularmente en situación escolar. Propone describir y explicar fenómenos relativos a las relaciones entre su enseñanza y su aprendizaje. Propone mejorar (en el tiempo) métodos y contenidos de la enseñanza, asegurando en el alumno la construcción de un saber vivo (susceptible de evolución) y funcional (que permite resolver problemas y plantearse verdaderos interrogantes)." (Douady *Encyclopedia Universalis* 1984)

Para resumir se puede decir que:

- la didáctica de las matemáticas brinda herramientas profesionales para el docente preservando su libertad pedagógica ;
- permite identificar los hechos, analizar los fenómenos de enseñanza ;
- permite analizar las producciones de los alumnos, interpretar errores ;
- apunta a la construcción de situaciones de aprendizaje y brinda al docente herramientas para realizarlas.

Situación

El término « situación » designa el conjunto de circunstancias en las que el objeto se encuentra (alumno, profesor..), las relaciones que los unen a un medio, el conjunto de datos que caracterizan una acción o una evolución (según Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* Editions La Pensée Sauvage 1999 p 279).

El medio está constituído por los objetos (fisicos, culturales, sociales, humanos) con los que el sujeto interactúa en una situación.

Situación didáctica (relativa a un saber)

“ Una situación didáctica es una situación donde se manifiesta directa o indirectamente la voluntad de enseñar de un docente ” Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* p 281.
Una situación didáctica es el conjunto de relaciones pertinentes (explícitas o implícitas) de un sujeto (o de varios sujetos) que aprende con un sujeto que enseña y con un medio mobilizado por este último para hacer apropiar un saber determinado.

Situación no didáctica (relativa a un saber)

Una **situación no didáctica** (relativa a un saber) es una situación construída de manera que el resultado esperado solo pueda ser obtenido por la puesta en marcha de los conocimientos que se desea lograr, pero en cuyo medio no interviene ningún agente durante el desarrollo para hacer adquirir al sujeto un conocimiento determinado : no hay intención de aprendizaje en la situación.

Situación a-didáctica (relativa a un saber)

Una **situación a-didáctica** es una situación construída de manera que el resultado esperado solo pueda ser obtenido por la puesta en marcha de los conocimientos que se desea lograr pero que el alumno no pueda leer (o haya renunciado a leer), durante un tiempo suficiente las intenciones del profesor concerniendo estos conocimientos, para tomar decisiones.
Las decisiones adecuadas del alumno, las que corresponden al saber asociado, constituyen estrategias racionales de acción sobre un medio, que el profesor no necesita validar, ya que el medio se hace cargo.
Las propiedades didácticas de una situación a-didáctica varían según que :
- se logre la devolución o no,
- los conocimientos que poseen los alumnos son adaptados o no (capacidad a entrever una estrategia de base, capacidad a poner en duda, funcionalidad de conocimientos que permiten validar intelectualmente algunas decisiones, desconocimiento previo de las estrategias ganadoras),
- la situación es una situación de acción, de formulación o de validación.

Situación fundamental (correspondiente a un saber)

Una situación fundamental de un saber que se pretende lograr es una situación con variables didácticas que, por manipulación de estas variables, engendra un conjunto mínimo de situaciones a-didácticas suficientemente extenso para cubrir todas las formas de saber que se busca alcanzar.

Una situación fundamental es una situación de aprendizaje cuando permite la adquicisión de **saberes** o de **conocimientos** nuevos por un sujeto.

Para el estudio, podemos plantearnos las siguientes preguntas :

- Cuál es el o los saberes que se pretende lograr ?
- Hay un problema planteado a los alumnos que no muestra directamente los saberes que hay que movilizar ? *(control de la a-didacticidad).*
- Puede el alumno comprender la consigna y lanzarse hacia una solución sin disponer de este conocimiento enteramente elaborado ? *(se trata aquí de controlar mejor el primer criterio al momento de la consigna).*
- La utilización del conocimiento que se desea lograr es necesario para llegar a la solución del problema planteado a los alumnos ? *(si si, está relacionado a una situación de consolidación, de control (que sería calificado de abierto si el primer criterio es cumplido) y no de aprendizaje por adaptación*).
- Cuáles son los procedimientos posibles par resolver un problema ? *(pueden haber varias estrategias de base que ponen en acción procedimientos variados).*
- Cómo constata el alumno si ha tenido éxito o si ha fracasado ? Es enteramente dependiente del adulto o la situación tiene retroacciones ? *(Criterio que permite asegurar cómo el medio permite al alumno progresar).*
- La verificación del resultado puede dar información sobre la manera de tener éxito ?. *(Criterio que permite la adaptación efectiva).*
- La verificación del resultado se confunde con la actividad ? *(para vincular al primer criterio ; permite particularmente en las situaciones que hacen intervenir un medio material, analizar el rol de ese material : manipulación o medio de verificar una hipótesis planteada).*
- Puede re-comenzar modificando su procedimiento ?

Devolución de una situación :

Cómo hacer para que el problema que ha inventado el docente se transforme en el problema que el alumno buscar resolver?. Para retomar un antigüo término de derecho adaptado a la cuestión de la transmisión de los saberes : cómo efectuar la devolución de una situación a un alumno. (*Devuelto* : término de jurisprudencia. Que es transportado, transferido, a plazo vencido, adquirido por derecho. *Devolución* : Atribución de los bienes a una línea sucesoria que sigue a la extinción o a la renunciación del otro. (LITTRE).)
Se llama devolución de una situación a-didáctica al conjunto de las condiciones que permiten al alumno apropiarse de la situación : lo que está en juego a nivel intelectual y el contexto favorable.
"La devolución consiste, no solamente en presentar al alumno el juego al que el maestro quiere que se dedique, sino también hacer que el alumno se sienta res-

ponsable, (en el sentido del conocimiento y no de la culpabilidad), del resultado que debe buscar." Brousseau, *Actes de l'université d'été* d'Olivet 1988)

Dialéctica de la acción

Consiste en posicionar al alumno frente a un problema que presenta varias características :
- la solución es el conocimiento que se desea lograr ;
- el alumno debe poseer un modelo o varios, más o menos perfeccionados, que le permitan tomar desiciones ;
- la situación debe reenviar al alumno informaciones sobre su acción que le permitan juzgar los resultados, ajustar esta última sin la intervención del maestro.

Dialéctica de la formulación

La validación empírica obtenida durante la dialéctica de la acción es insuficiente para una real actividad matemática. En esta nueva fase, el docente debe construír una situación cuyo objetivo es demostrar porqué el modelo creado es válido o no.

Dialéctica de la validación

Para que el sujeto pueda explicitar él mismo su modelo implícito, y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que encuentre un nuevo problema en el que el conocimiento va obligatoriamente intervenir en forma de lenguaje (escrito u oral).
Es raro que estas tres dialécticas se encuentren durante una misma sesión de clase.

Conocimiento

Llamamos conocimiento implicado en una situación lo que permite a un sujeto que debe, en esta situación, considerar una serie de **elecciones posibles,** tomar una decisión de manera reproductible (i.e. la misma decisión para una situación analizada como del mismo tipo).
Un conocimiento es entonces comprobado por acciones realizadas por el sujeto, acompañadas o no de formulaciones de lenguaje (oral, gráfica o escrita), que explicitan las elecciones consideradas y la decisión (que será) tomada, o de debate sobre el sistema de determinación de las elecciones y la decisión. Decisiones que son el resultado de un conocimiento manifiestan una cierta regularidad.
Ciertas decisiones regulares no corresponden a elecciones, sino a la ausencia de consideración de elección a realizar por parte del sujeto: solo considera una decisión posible.
En los casos interesantes, las decisiones serán el fruto de la toma en consideración de varias posibilidades y de la eliminación de todas, salvo una de ellas.
En los casos de no regularidad, diremos que las decisiones son (aún) el fruto de la oportunidad o del azar.
Algunos conocimientos son saberes o destrezas aplicadas, es decir convertidos en medios de decisión o de acción pero otros son regularidades, esquemas o

modelos que pueden escapar al análisis incluso a la conciencia de quienes los utilizan : entonces no son ni saberes, ni destrezas (algunos los llaman saberes de experiencia).
En ciertas situaciones, el alumno necesita conocimientos que la escuela no enseña pero que sin embargo debe poner en funcionamiento para aprender el saber o para utilizar lo que ha aprendido.

“ Cuando el sujeto reconoce el rol activo de un conocimiento en la situación, para él, el vínculo inductor de la situación sobre este conocimiento se vuelve inversible : lo sabe. Un conocimiento de esta forma identificado es un saber, es un conocimiento útil, utilisable, en el sentido que permite al sujeto actuar sobre la representación”. F.Conne “ Savoir et connaissance ” (*Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 12/3 p 222-267).

Saber

Un saber es un conjunto de conocimientos reconocidos **culturalmente en una institución.** Es el saber que permite la identificación de los conocimientos de sujetos útiles para la vida de la institución. Un saber se formula, en una lengua y en una cultura. Los saberes matemáticos de referencia son los producidos y consignados por los matemáticos en las obras y artículos de matemáticas.

Conocimientos y saberes

El saber no es el conocimiento y el conocimiento no es el saber.
Los conocimientos, instrumentos personalizados de acción sobre el mundo, no son naturalmente transformados en saberes. Un niño que ha logrado algo no reconoce el valor cultural de lo que ha hecho. Los matemáticos no han (o aún para una fecha t) institucionalizado siempre en saberes todos los conocimientos comunes necesarios a su práctica (cf. enumeración, fractales…).
El saber es un objeto cultural ; su creación y la manera de adquirirlo son sociales, en el interior de una institución, utilizando una lengua y una cultura en las que son explicitadas, establecidas, reconocidas.
Los saberes no son naturalmente transformados en conocimientos por un sujeto en una situación. En necesario alguien que sea capaz de establecer una relación del sujeto que conoce a la situación; también es menester que la cultura del saber que el sujeto domina pueda darle herramientas para identificar objetos de la situación como objetos del saber y realizar sobre estos objetos los tratamientos según los algoritmos, enunciados, juzgamientos cuyo dominio del saber él posee.
Para un saber bien identificado en una situación dada corresponde un conjunto de situaciones que son específicas de este saber. Este saber permite reconocer y describir los conocimientos útiles para un sujeto a fin de tomar las decisiones adecuadas en pos de la realización de su proyecto.

Estatus (o funcionamiento) de los conocimientos : herramienta y objeto. Dialéctica herramienta-objeto

Estudio de Douady (*Recherches en Didactique des Mathématiques* 1986 vol 7. p5-31) sobre el funcionamiento de los conocimientos científicos :

- como **herramientas** (implícitas o explícitas), pueden funcionar en los problemas que permiten resolver ;
- son **objetos** como “ objetos culturales que tienen su lugar en el edificio de las matemáticas en un momento dado, socialmente reconocido ”.

En la génesis de las matemáticas, un concepto es con frecuencia herramienta implícita antes de transformarse en objeto del saber constituído, luego herramienta explícita al servico de otros problemas : de donde surge la noción de **dialéctica herramienta-objeto.**

Cuadros, juegos de cuadros, cambios de cuadros

“ Un **cuadro** está constituído por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de sus formulaciones eventualmente diversas y de las imágenes mentales que el sujeto asocia en un momento dado para estos objetos y para sus relaciones ” (Douady, thèse 1984)

Un concepto matemático puede ser mobilizado en varios cuadros (físico, numérico, geométrico, gráfico, informático) entre los cuales se establecen relaciones que contribuyen al conocimiento de este concepto.

“ Un *cambio de cuadros* es una puesta en relación interesada e interesante de dos traducciones de un mismo problema (para resolver) en dos (o mas) dominios de trabajo (*los cuadros*)” (Robert 2001)

Un **juego de cuadros** es la previsión construída por el profesor de la utilización por los alumnos de un cambio de cuadros mientras que solo un cuadro es explícito.

Contrato pedagógico

Las reglas de vida ponen de relieve este tipo de contrato (respeto por los demás, orden del material, repartición de tareas, etc.). también es el caso de la organización del trabajo: (frecuencia de los deberes personales, presentación de los cuadernos, etc.). la naturaleza de este contrato no está vinculado a una disciplina.

Durante la mayor parte del tiempo es concocido y administrado por los docentes, no siempre por los alumnos. Estos deben adaptarse a funcionamientos diferentes de un docente al otro.

Contrato didáctico

Este contrato depende estrechamente de los conocimientos en juego : es el resultado de la negociación de las relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un determinado medio y un sistema educativo, a los fines de hacer apropiar a los alumnos un saber constituído o en vía de constitución.

No solamente parece necesario mantener implícitos ciertos aspectos del contrato, sino también provocar rupturas. En una perspectiva constructivista, el tratamiento de saber en situación de clase, va sobre todo a reposar sobre rupturas previstas del contrato. Estas rupturas aparecen como necesarias para el aprendizaje mientras que en una perspectiva behavorista el principal rol en la gestión de los saberes es siempre desempeñado por el maestro.

(Ver el artículo de Brousseau en la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 9/3 páginas 309-336, 1988)
" el contrato didáctico es con frecuencia un hecho insostenible. Ubica al profesor en una verdadera situación paradoxal : todo lo que hace para hacer producir por los alumnos, los comportamientos que él espera, tiende a privarlos de las condiciones necesarias para la comprensión y para el aprendizaje de la noción buscada : si el maestro dice lo que él quiere, no puede obtenerlo.
Pero el alumno también se encuentra en una situación paradoxal si acepta que según el contrato, el maestro le enseña los resultados, no los establece por él mismo, por lo tanto no aprende matemáticas, no se las apropia. Aprender para él significa rechazar el contrato pero también aceptar el hacerce cargo. Entonces el aprendizaje va a reposar no sobre el buen funcionamiento del contrato sino sobre sus rupturas " Brousseau 1984

Variable cognitiva

Une variable cognitiva de una situación a-didáctica es un parámetro de esta situación que, siguiendo los valores que les son atribuídos, modifica el conocimiento necesario para la resolución.
Ciertos parámetros son variables numéricas, otros son binarios (la condición es realizada o no).

Variables didácticas

Una variable didáctica es una variable cognitiva cuyo valor puede ser determinado a voluntad por el docente. La modificación del valor de estas variables permite engendrar, a partir de una situación,

- sea un campo de problemas que corresponden a un mismo conocimiento ; de esta manera el docente puede proponer al alumno confrontarse varias veces al mismo conocimiento, a través de una situación cuyo medio le es conocido, sin que las respuestas lo sean : es la base de las situaciones de elaboración de nuevos conocimientos ;
- sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes ; de esta manera el docente puede utilizar primero valores que corresponden a conocimientos adquiridos, lo que permite al alumno comprender el problema, luego modificar la variable para hacerle afrontar la construcción de un nuevo conocimiento.

Salto informacional

Se llama salto informacional al cambio de valor de una variable didáctica en el interior de una situación susceptible de provocar un cambio de estrategia.
Con frecuencia, seguido a un cambio de variable didáctica, el alumno prefiere adaptar un procedimiento familiar y anteriormente eficaz antes que uno extenso y poco fiable : encuentra ésto menos penoso, menos costoso que la puesta en duda del procedimiento habitual.
El salto informacional determina a priori la vía de puesta en duda del procedimiento familiar.

Institucionalización

La institucionalización consiste en dar un estatus cultural o social a las producciones de los alumnos : actividades, lenguaje, conocimientos. (Brousseau, *Actes du colloque COPIRELEM* de Angers 1987). La institucionalización se refiere tanto a una situación de acción, como a una situación de formulación o de prueba. Los maestros deben registrar lo que los alumnos han realizado, describir lo que ha sucedido y que tiene relación con el conocimiento que se pretende lograr, dar un estatus a los acontecimientos de la clase como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar estas producciones de los conocimientos a los otros (culturales o del programa), indicar que pueder servir nuevamente. (Brousseau, Angers 87). Cuando un alumno ha resuelto un problema elaborando un nuevo conocimiento, solo será útil si es capaz de recordarlo en otra situación. Para ello es necesario que el docente ayude a los alumnos a identificar el saber en juego, a distinguir entre los resultados para retener y los resultados para olvidar,etc.

En la información tratada, el docente elige y expone, con las convenciones en uso, lo que es nuevo para retener. De esta manera el docente tiene a su cargo dar el estatus a los conceptos que, hasta aquí, habían intervenido como herramientas. Por lo tanto constituye un saber de clase al que cada uno podrá hacer referencia. (R. Douady, M.J. Perrin, *Educational Studies in Mathematics* 20 1989).

Transposición didáctica

La transposición didáctica describe las elecciones, los recortes, las transformaciones de los saberes tomados en un momento determinado como referencia en las diferentes instituciones.

La transposición didáctica se manifiesta en estas etapas : la producción del saber por la comunidad de los matemáticos, las elecciones a efectuar sobre los saberes a enseñar, las elecciones sobre los recortes de estos saberes, las elecciones sobre la recontextualización de estos saberes, los saberes efectivamente enseñados, los saberes efectivamente adquiridos por los alumnos…

Fracaso

El fracaso califica un resultado, el hecho que el resultado esperado no sea el alcanzado, que el estado terminal del juego (fin de la partida) no sea un estado ganador.

Error

El error no califica el resultado, pero sí el proceso de toma de decisión. Una decisión quizas dicha causada por un error cuando quien ha tomado esta decisión puede ponerla en duda, medir las consecuencias que puede asociar. El error califica el conocimiento que permitió la decisión cuando es identificable e identificada.

Para el alumno la interpretación del fracaso en término de errores necesita :

- una prueba del fracaso del resultado,

- la atribución del fracaso a las elecciones efectuadas y de las que puede asumir la responsabilidad (lo que implica el rechazo de causas, como el azar, la fatalidad, el reclazo de la culpa y el denigrarse a sí mismo, etc.),
- la búsqueda de identificación de las relaciones entre elección y resultado,
- un modificación de estas elecciones de manera mas adecuada.

La transformación del fracaso en error es la condición del progreso, de un aprendizaje.

Obstáculo

Un obstáculo no se manifiesta por errores fugaces y erráticos, sino reproductibles y persistentes. Estos errores dan testimonio de un conocimiento (equivocado) que ha tenido éxito en un dominio de acción (pero que fracasa en otros) ; estos errores persisten con frecuencia luego del aprendizaje de un saber correcto ; su origen puede ser ontogénico, didáctico o epistemológico.

Entre los obstáculos que el análisis permite identificar, la investigación distingue :

- **los obstáculos ontogénicos :** son conocimientos « espontáneos » que aparecen « naturalmente » durante el desarrollo ; están relacionados al desarrollo neurológico del sujeto (cf. Piaget y al.).
  Por ejemplo a una determinada edad, un niño no puede admitir que la colección B, cuya apariencia se ha modificado separando un poco las fichas, tiene el mismo número de fichas que la colección A, mientras que lo admitía, cuando las dos colecciones eran presentadas de manera idéntica. Para este error lo espacial prevalece ante lo numérico.

- **los obtáculos epistemológicos :** atestigüan de la génesis histórica de un concepto y son constitutivos del saber actual. « Conocemos contra un conocimiento anterior ». Bachelard habiendo puesto en evidencia este concepto, un cierto número de trabajos que se apoyan en la historia de las ciencias continúan su investigación y la extienden a otras ciencias. Los obstáculos epistemológicos han jugado un rol en el desarrollo histórico de los conocimientos y cuyo rechazo a debido ser integrado explícitamente en el saber transmitido.

- **los obstáculos didácticos :** resultan de una transposición didáctica anterior no susceptible de re-negociación por el maestro en el cuadro restringido de su clase del mes. El traspaso de los obtáculos implica con frecuencia a la vez una restructuración de los modelos de acción, del lenguaje y de lo sistemas de pruebas. El didáctico puede precipitar las rupturas favoreciendo la multiplicación y la alternancia de las dialécticas de los tres tipos.

Procedimiento y estrategia

Según F. Boule (1998) "Performances et démarches de calcul mental au cycle III", (Performances y procesos de cálculo mental en tercer ciclo) Dijon, un procedimiento es un conjunto unívoco y ordenado de acciones en vista de un objetivo determinado. En el tiempo de su desarrollo, el procedimiento deja de lado la significación. Es típicamente el caso de la resolución algebraica de una ecuación de segundo grado por ejemplo ; es también lo que se produce cuando se calcula por escrito : las reglas prescritas no autorizan ninguna elección y conducen a un resultado. Un procedimiento es mecánico.

Un cierto acuerdo parece adquirido a lo que concierne las principales características de la noción de estrategia :
- disponibilidad de un abanico de procedimientos,
- ejercicio de una selección en función de la tarea y del objetivo seguido,
- guía y evaluación del desarrollo.

Una estrategia supone una elección entre varias posibilidades. La existencia de la elección no está siempre asegurada. Si no existe, no se podría hablar de estrategia falta de alternativa. Las razones de esta elección, si existe, pueden ser diversas: dirección mas familiar, evocación mas fácil, prejuzgamiento de comodidad o de rapidez, etc.
Sucede que se designa por « estrategia » el *resultado* de la elección (se trata entonces de un procedimiento efectivo), o bien la *elección*, o aún la *posibilidad* de elección.

Explicación de términos y expresiones

Analisis *a priori* y *a posteriori*

Resúmenes efectuados en didáctica antes y después de la experimentación conteniendo el conjunto de conceptos y tareas a realizar para la resolución de una actividad, un ejercicio o un problema. La comparación de estos dos momentos brinda elementos de análisis tendientes a una mejor comprensión de la organización escolar, las diversas restricciones actuantes, las elecciones efectuadas por el profesor asi como las de los alumnos, etc.

Efecto Jourdan

Llamado de esta manera en referencia a la escena del “Gentilhombre Burgués” en la que el maestro de filosofía revela a Jourdan lo que son la prosa y las vocales. Todo lo cómico de la escena está basado en el ridículo de esta sacralización reiterada de actividades familiares en un discurso sabio. El profesor para evitar el debate de conocimiento con el alumno y eventualmente la constatación del fracaso, admite reconocer el índice de un conocimiento sabio en los comportamientos o en las respuestas del alumno, aunque estén motivadas por causas y significaciones banales. Es una forma de efecto Topazio (G.Brousseau).

Efecto Topazio

La primera escena del célebre “Topazio” de Marcel Pagnol ilustra uno de los procesos fundamentales en el control de la incertidumbre: el maestro efectúa un dictado a un mal alumno; no pudiendo aceptar demasiados errores y demasiados importantes y no puediendo tampoco darle directamente la ortografía demandada, el maestro “sugiere” la respuesta disimulándola con códigos didácticos cada vez mas transparentes. El problema es cambiado completamente, el docente mendiga una marca de adhesión y negocia hacia la disminución las condiciones y el alumno finalmente dará la respuesta esperada, el profesor ha terminado hacerse cargo de lo esencial del trabajo.

La respuesta que debe dar el alumno está determinada por anticipado. El maestro elige las preguntas para las que esa respuesta puede ser dada. Evidentemente los conocimientos necesarios para producir estas respuestas también cambian su significación. Tomando preguntas cada vez más fáciles, intenta conservar la máxima significación para el máximo de alumnos. Si los conocimientos que se pretenden lograr desaparecen completamente, es el “efecto Topazio” (G. Brousseau).

Saber sabio

Conjunto de conocimientos de un determinado campo científico. Estos saberes son reconocidos por la comunidad científica en tanto que objetos de una actividad dada. Ellos son reconocidos y aceptados por la comunidad de referencia que los avala, justifica y valida.

Teorema en acto

Este concepto que se debe a G. Vergnaud, designa las propiedades de las relaciones tomadas y utilizadas sin que el sujeto sea capaz de explicarlas o de justificarlas. Esas propiedades pueden ser verdaderas en un domino de origen y falsan en otros.

El autor designa la expresión teorema en acto por los conocimientos contenidos en los esquemas. Se denomina esquema a la organización invariante de la conducta para una clase de situación dada.

Teoría de situaciones didácticas en matemáticas

“La teoría de situaciones tiene dos objetivos, por una parte el estudio del conocimiento de los objetos y sus propiedades (lógicas, matemáticas, ergonómicas) que son necesarias para la construcción lógica y para la invención de “situaciones”y por otra parte la confrontación científica (empírica o experimental) de la adaptación de estos modelos y de sus características con la contingencia.

Las situaciones hipotéticas consideradas pertenecen a dos categorías: las situaciones didácticas en las que un actuante, por ejemplo un profesor, organiza un dispositivo que manifiesta su intención de modificar o de hacer nacer los conocimientos de otro actuante, por ejemplo un alumno y le permite expresarse en acciones y las situaciones no didácticas en las que la evolución del actuante no está sometida a ninguna intervención didáctica directa. La modelización de la enseñanza efectiva conduce a combinar las dos: algunas situaciones didácticas facilitan el aprendizaje de situaciones parcialmente liberadas de intervenciones directas: las situaciones a-didácticas.

Una situación medeliza lo que está en juego y las posibilidades de decisión de un actuante en un medio determinado. Esta situación es elegida de tal manera que la estrategia de resolución solo pueda ser puesta en ejecución gracias a un cierto conocimiento matemático, siendo altamente improbable la aparición de esta decisión sin el uso del conocimiento buscado por parte del actuante. El método que consiste en definir un objeto matemático por un conjunto de relaciones que es solo para satisfacer es clásico. La sola diferencia aquí es que el conjunto de relaciones es un “juego” en sentido matemático.

La determinación de un conocimiento matemático por un problema en el que este conocimiento es la solución es un procedimiento tan anciano como las matemáticas. La Teoría de las situaciones didácticas es simplemente una teorización de este proceder. Existen numerosas situaciones relativas para un mismo conocimiento. Inclusive numerosos conocimientos pueden intervenir en una decisión única. uno de los objetos de la Teoria de las Situaciones Didácticas en matemáticas es clasificar las situaciones y por consecuencia los conocimientos en función de sus relaciones y posibilidades de aprendizaje y de enseñanza que ofrecen.

En la Teoría de las Situaciones Didácticas es su estructura (acción, formulación, validación, institucionalización, etc) la que determina tipos de conocimientos (modelos implícitos de acción, lenguajes, teoremas...) diferentes. Esta tipología explica y la experiencia muestra que sus modos de aprendizajes son diferentes" (G. Brusseau).

Situacion problema

Una situación problema ppodría ser caracterizada por cinco items:

- Es una situación de aprendizaje.
- Es un medio de aprendizaje y no de resultado.
- Es una estrategia de enseñanza que favorece el compromiso de los alumnos, permite la construcción de los saberes.
- Es una tarea global, compleja y significante :
    - La situación problema es una tarea global: es completa es decir que tiene un contexto (los datos iniciales) y contiene un objetivo; requiere mas de una acción, mas de un procedimiento o mas de una operación a hacer; podría ser descompuesta en numerosas partes o elementos.
    - Es una tarea compleja: requiere numerosos conocimientos y varios tipos de conocimientos (declarativos, de procedimiento y condicionales); conduce a un conflicto cognitivo, la resolución no es evidente; presenta un desafío realista y realizable para el alumno; puede implicar varios objetivos del programa, está entonces estructurada en el plano didáctico ya que ha sido creada en función de un aprenizaje preciso.
    - Es una tarea significante: tiene sentido para el alumno porque recuerda lo que él conoce, está vinculada a su realidad; es concreta porque tiene un objetivo (un producto), que solicita una acción real y que requiere la utilización de conocimientos, técnicas, estrategias o algoritmos.

Siglas utilizadas en los artículos

AGIEM : *Asociación general de maestros de escuela y maternal*

AIS : *Adaptación e integración escolar*

APMEP :*Asociación de profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública*

CE1 : *es el segundo año de 1er ciclo llamado de aprendizajes fundamentales de la escuela elemental*

CM2 : *es el segundo año del 2do ciclo llamado de profundización de los aprendizajes de la escuela elemental*

COPILEREM : *Comisión permanente de los IREM vinculada a la enseñanza elemental*

DIDIREM : *el equipo Didirem es un equipo de investigación en didáctica de las matemáticas adjunto al UFR de matemáticas de la Universidad Paris 7***.**

INRP : *Instituto nacional de investigación pedagógica*

IREM : *Instituto de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas*

IUFM : *Instituto universitario de formación de maestros*

PE1 : *Profesores en primer año de formación*

PE2 : *Profesores en segundo año de formación*

He aquí la lista de los autores con su laboratorio de búsqueda y su lugar de ejercicio en enero de 2003.

AURAND Catherine		IUFM de Versailles *St Germain en Laye*
BOLON Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM de Versailles *Antony*
BONNET Nicole	IREM de Dijon, COPIRELEM	IUFM de Dijon
BOULE François	IREM de Dijon	CNEFEI de Suresnes
BRIAND Joël	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2, COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Bordeaux*
BUTLEN Denis	Équipe DIDIREM, Université Paris 7, IREM paris 7	IUFM de Créteil *Melun*
DESCAVES Alain	IREM de Bordeaux COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Périgueux*
DOUADY Régine	Université Paris 7 Professeur honoraire	
EYSSERIC Pierre	IREM d'Aix –Marseille COPIRELEM	IUFM d'Aix Marseille *Aix*
FREMIN Marianne		IUFM Versailles *Antony*
GIRMENS Yves	IREM de Montpellier COPIRELEM	IUFM de Montpellier Perpignan
HOUDEMENT Catherine	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
KUZNIAK Alain	Équipe DIDIREM, Université Paris7 IREM de Strasbourg	IUFM de Strasbourg *Strasbourg*
LEBERRE Maryvonne	IREM de Lyon	Professeur en collège Charcot à Lyon
PAUVERT Marcelle		IUFM de Créteil Professeur honoraire
PEAULT Hervé	Fallecido de allí n 1997	IUFM des Pays de la Loire
PELTIER Marie Lise	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
PEZE Christiane	Formatrice AIS	IUFM d'Aquitaine
SALIN Marie Hélène	DAEST université V.Segalen, Bordeaux2	IUFM de Bordeaux *Bordeaux*
TAVEAU Catherine	IREM Paris 7, COPIRELEM	IUFM de Créteil *Bonneuil*

La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM pour l'Enseignement Élémentaire a été créée en 1973. Elle regroupe une vingtaine de représentants des différents IREM, enseignants chargés de la formation mathématique des professeurs d'école. Plusieurs sont engagés dans des recherches en didactique des mathématiques dans des échanges internationaux.

La COPIRELEM s'intéresse à la fois aux recherches sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (enfants de 2 à 12 ans) et à la formation des professeurs d'école en mathématiques.

Elle participe à la diffusion des recherches en didactique des mathématiques, en France et à l'étranger, auprès des formateurs de professeurs, notamment lors des colloques annuels qu'elle organise depuis 1975. Chaque colloque regroupe entre 150 et 200 personnes ; les conférences plénières, les exposés des séminaires et les travaux des ateliers sont régulièrement consignés dans les Actes du colloque.
La Commission s'intéresse à l'enseignement des mathématiques en Europe comme en témoigne le thème de son XXXII^{è} colloque, intitulé « *Enseigner les mathématiques en France et ailleurs* » qui s'est déroulé à Strasbourg en 2005 et qui a accueilli des chercheurs en didactique venant de différents pays.

Elle organise, chaque année depuis 1997, un séminaire de formation destiné aux nouveaux formateurs de mathématiques chargés de la formation initiale et continue des professeurs des écoles. Chaque séminaire donne lieu à la publication d'un numéro de la collection « Les Cahiers du Formateur ».

Elle produit des textes d'orientation (sur la demande du Ministère de l'Education Nationale, d'autres commissions IREM, d'IUFM, etc.) sur des sujets en liaison, soit avec des thèmes mathématiques de la scolarité obligatoire (les décimaux, la géométrie de l'école au collège), soit avec l'organisation de la formation des professeurs d'école (concours de recrutement, contenus de formation, etc.).

Presentación sucinta del sistema educativo francés

Escuela maternal
(no obligatorio)
Edad: de 2 años a 6 años

Escuela elemental
(durada 5 años)
de 6 años a 11 años

Ciclo 1 PS – MS - GS
Ciclo 2 GS CP CE2
Cycle 3 CE2 CM1 CM2

PRIMARIA

Collège
(durada 4 años)
de 11 años a 15 años

Liceo
(durada 3 años)
de 15 años a 18ans

Liceo Profesional
(durada 2 años)
- - - - -
(durée
2 ans ou
4 ans)

SECONDARIA

Estudios universitarios para hacerse profesor de las escuelas

Liceo
Bachillerato

Enseñanza superior
(durada 3 años)
Licence (o diploma equivalente)

catedrático de universidad

(durada 2 años)
1r año → concurso
2de año → certificación

IUFM

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Cet ouvrage est extrait de « *CONCERTUM, Carnets de route de la COPIRELEM* » paru en France en 2004. Pour cette nouvelle édition, les articles ont été choisis pour illustrer d'une part l'approche didactique de l'enseignement des mathématiques à l'école en France et, d'autre part, les démarches de formation mises en place pour les professeurs des écoles

« *Les carnets de route de la COPIRELEM* » proposent une sélection d'articles publiés à l'issue de ses colloques et séminaires de formation des dix dernières années, et rend compte, en partie, de l'évolution des questions soulevées par l'enseignement des mathématiques à l'école. Ils témoignent aussi des enjeux de la formation en mathématiques des professeurs des écoles en France.

Une organisation thématique de l'ouvrage permet d'aborder ces questions sous deux aspects.
Le chapitre 1 : ***« Situations de formation pour des savoirs à enseigner »*** s'intéresse principalement aux situations pouvant être proposées aux enseignants dans le cadre de la formation pour aborder certains domaines mathématiques (espace et géométrie, grandeurs et mesures, structures multiplicatives). Ce chapitre traite aussi du rôle fondamental de la résolution de problèmes.

Le chapitre 2 : ***« Outils généraux pour la formation des enseignants »*** présente des situations pour aborder certaines notions didactiques, des analyses de pratique en formation ainsi que des outils méthodologiques.

Cet ouvrage est un aperçu des travaux en didactique de la COPIRELEM, il peut être un outil pour tous les formateurs d'enseignants en mathématiques au niveau international.

Editeur : **ARPEME**
Responsable de publication : Catherine TAVEAU
Dépôt légal : avril 2006 -° ISBN : 2-9515107-7-2
www.arpeme.com