COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Annales 2015

Sujets, corrigés et éléments de formation

+

Exercices complémentaires avec corrigés issus des concours blancs et examens des ESPE

Ces annales ont été rédigées par :

Anne BILGOT (ESPE de l'Académie de Paris)
Christophe BILLY (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Laetitia BUENO-RAVEL (ESPE de Bretagne)
Richard CABASSUT (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
Valentina CELI (ESPE d'Aquitaine)
Pierre DANOS (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Nicolas DE KOCKER (ESPE de Lorraine)
Gwenaëlle GRIETENS (ESPE de l'Académie de Nantes)
Pascal GRISONI (ESPE de Bourgogne)
Laurence MAGENDIE (retraitée de L'ESPE d'Aquitaine)
Christine MANGIANTE (ESPE de l'Académie de Lille)
Pascale MASSELOT (ESPE de l'Académie de Versailles)
Edith PETITFOUR (ESPE de Lorraine)
Arnaud SIMARD (ESPE de Franche-Comté)
Frédérick TEMPIER (ESPE de l'Académie de Poitiers)
Claire WINDER (ESPE de l'Académie de Nice)
Hélène ZUCCHETTA (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)
Laurence MAGENDIE (retraitée de l'ESPE d'Aquitaine)

Coordination de l'ensemble :

Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs ESPE.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
  Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
  - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
  - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
  - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et l'**IREM** (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'Université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

Les sujets et leurs corrigés

EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

L'ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2015

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

1 – DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Référence : Annexes de l'arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

Épreuves d'admissibilité

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

Deuxième épreuve d'admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.

3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

2 – PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Référence : note de présentation des épreuves d'admissibilité des concours de recrutement de professeurs des écoles.
(http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/3/nc_crpe_260593.pdf)

« Le nouveau concours de recrutement des professeurs des écoles répond au besoin de recruter des enseignants polyvalents et aux principes généraux définis pour tous les concours enseignants : un concours qui constitue un jalon déterminant du parcours intégré de formation, et s'inscrit dans le cursus de professionnalisation progressive des candidats ; un concours qui est un acte de recrutement et non de certification universitaire ; un concours, situé en fin de S2 de Master, qui repose sur des épreuves tenant compte d'un parcours progressif de professionnalisation.

Les deux épreuves écrites d'admissibilité permettent de s'assurer de la maîtrise par le candidat d'un corpus de savoir adapté à l'exercice professionnel, de sa capacité à utiliser les modes d'expression écrite propres aux domaines évalués et de présenter une maîtrise avérée de la langue française écrite. Ces écrits portent sur le français et les mathématiques à savoir les deux domaines d'enseignements fondateurs de l'école primaire. L'admissibilité permet ainsi de déterminer un groupe de candidats présentant un niveau de maîtrise suffisant du français et des mathématiques pour exercer le métier de professeur des écoles. »

Présentation de la deuxième épreuve écrite : mathématiques

« Les notions mathématiques abordées à l'école primaire constituent les bases d'un corpus plus large qui sera développé au cours la scolarité obligatoire.
Pour pouvoir les enseigner, le futur professeur des écoles se doit d'en maîtriser les fondements théoriques et de connaître les développements qu'ils permettront dans les années de collège.
Il est donc demandé au candidat au professorat des écoles un niveau de connaissances et de raisonnement correspondant à celui exigé par la maîtriser les programmes de collège.
Exposer ce raisonnement de manière claire et rigoureuse est une des manifestations de cette maîtrise.

L'épreuve comporte trois parties :

1) La première partie consiste en un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.
Ce problème peut, autour d'un thème donné, faire appel à plusieurs registres : numérique, algébrique, géométrique, graphique, etc.
Il permet au candidat de montrer sa capacité à mettre en relation ces différents registres, mais aussi de montrer une représentation correcte des différents statuts mathématiques des énoncés rencontrés : données, hypothèses, propriétés ou théorèmes.
Ce problème peut comporter plusieurs parties; il peut être demandé au candidat de démontrer des propriétés connues, de modéliser une situation en vue de la résolution d'un exercice concret ou de mener un raisonnement à portée plus générale.

2) La deuxième partie est composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
Des exercices de types différents peuvent être proposés dans un même sujet.
Les questions à choix multiples sont accompagnées d'une demande de justification ; elles permettent de mettre en œuvre des types de raisonnement variés et notamment la preuve par présentation d'un contre exemple.
Les questions à réponse construite peuvent dans certains exercices être des questions ouvertes qui demandent pour leur résolution une prise d'initiative.

3) La troisième partie consiste en une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.
Cette partie peut porter sur une notion spécifique de l'un des trois cycles, ou sur une notion abordée de façon progressive au cours de plusieurs cycles.
La maîtrise des notions s'exprime notamment à travers la capacité du candidat à mettre en perspective ces notions et à expliciter les caractéristiques mathématiques des développements ou enrichissements successifs. »

3 – MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

Références : Arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« Lors des épreuves, il est interdit aux candidats :
1° D'introduire dans le lieu des épreuves tout document, note ou matériel non autorisé par le jury du concours ;
2° De communiquer entre eux ou de recevoir des renseignements de l'extérieur ;
3° De sortir de la salle sans autorisation du surveillant responsable et sans être accompagnés par un autre surveillant ;
4° De perturber par leur comportement le bon déroulement des épreuves.
Les candidats doivent se prêter aux surveillances et vérifications nécessaires. »

Aucune autre précision n'est donnée à ce jour dans la page Guide concours – Professeurs des écoles du site ministériel. Il en résulte que, pour l'usage des calculatrices, il convient de se référer la **circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999** (B.O.E.N. n° 42 du 25 novembre 1999) ; celle-ci définit les conditions d'utilisation des calculatrices dans les examens et concours organisés par le ministère de l'éducation nationale et dans les concours de recrutement des personnels enseignants.

« Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. »

« Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.
Les chefs de centre d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés de cette règle qui doit être strictement respectée. »

« Dans le cadre de la réglementation des examens et concours, il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider, pour chacune des épreuves, si l'usage de l'ensemble des instruments de calcul (calculatrices, tables numériques, abaques…) est autorisé ou non. Ce point doit être précisé en tête des sujets. »

Pour l'épreuve de mathématiques, le sujet précisera donc si l'utilisation d'une calculatrice est autorisée ou non.

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Cependant, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

PROBLÈME

	Géométrie plane	Trigonométrie	Géométrie espace	Arithmétique	Numérations Opérations	Équations	Probabilités	Grandeurs Mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages-Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2015	X							X			
Sujet 2 2015			X					X		X	
Sujet 3 2015	X					X		X		X	
Sujet 4 2015								X	X	X	X

EXERCICES

	Géométrie plane	Géométrie espace	Numérations Arithmétique	Nombres	Équations	Probabilité	Statistique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2015	X		X					X		X	
Sujet 2 2015		X	X			X	X	X	X		
Sujet 3 2015				X		X		X	X		
Sujet 4 2015	X			X		X			X		

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

	Proportionnalité	Division	Nombre	Fractions Décimaux	Multiplication	Grandeurs et mesures	Cycle
Sujet 1 2015		**X**		**X**			**3**
Sujet 2 2015				**X**		**X**	**3**
Sujet 3 2015		**X**					**2** **3**
Sujet 4 2015						**X**	**3**

ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

	Proportionnalité	Division	Nombre	Fractions Décimaux	Multiplication	Grandeurs et mesures	Cycle
Sujet 1 2015		**X**		**X**			**3**
Sujet 2 2015	**X**					**X**	**3**
Sujet 3 2015	**X**	**X**					**2** **3**
Sujet 4 2015						**X**	

LES SUJETS

DU

CONCOURS

2015

GROUPEMENT 1 – avril 2015

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans tout le problème on travaille dans un réseau pointé à maille carrée.

On notera une unité de longueur 1 *u.l.* et une unité d'aire 1 *u.a.*.

On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
L'objet de ce problème est le calcul d'aires de polygones de Pick.

PARTIE A : calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Calculer l'aire du polygone ABCDEF (*figure 1*), en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.

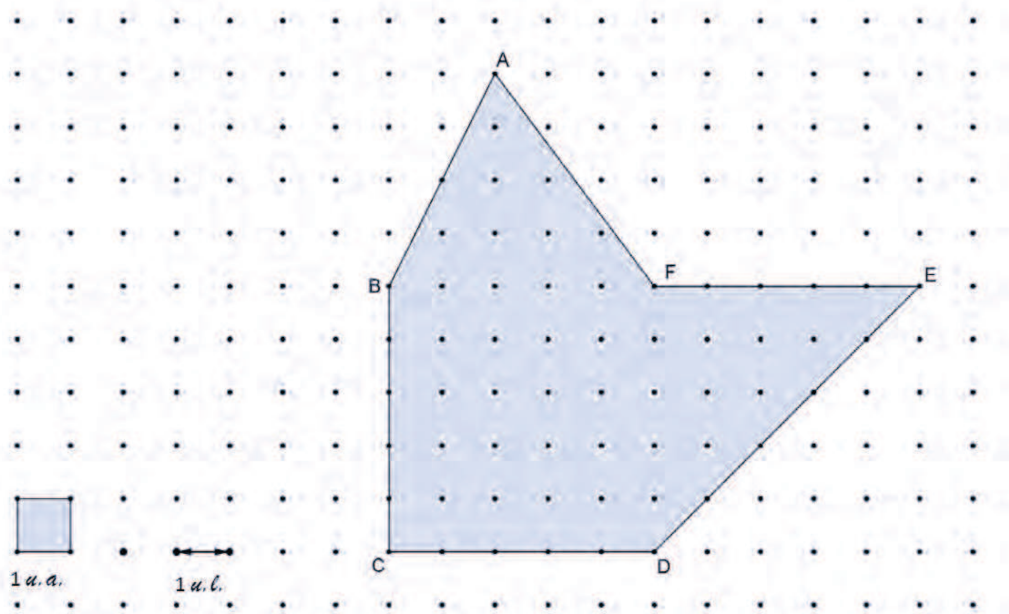


Figure 1

Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire A d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

Le résultat est en unité d'aire avec 1 *u.a.* = aire d'un carré unité.

Par exemple, pour le polygone ci-dessous :

$i = 15$ et $b = 16$, donc, en utilisant la formule, $A = 15 + \frac{16}{2} - 1 = 22$

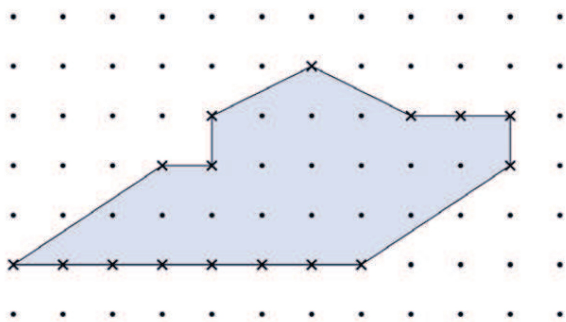


Figure 2

PARTIE B : utilisation de la formule de Pick sur un exemple

1) Appliquer cette formule au polygone ABCDEF de la *figure 1* et vérifier que l'on retrouve bien son aire.

2) Propriété d'additivité des aires :

Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick ABCDF et DEF de la *figure 1*.

Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question B 1.

Les parties C et D sont indépendantes.

PARTIE C : quelques conséquences de la formule de Pick

Dans cette partie du problème, on admet que la formule est vraie dans le cas général.

1) Prouver qu'il ne peut pas y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.

2) On considère un polygone de Pick d'aire 7,5. Démontrer que la valeur maximale que peut prendre b est 17.
   Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick correspondant à cette valeur.

3) On veut tracer un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur.
   Quelle est alors la valeur de b ?
   Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions.

4) Démontrer que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A quelconque est : $2A + 2$.

PARTIE D : démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans l'exemple ci-dessous).

On note : L sa longueur
l sa largeur
i le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle
b le nombre de points sur le bord du rectangle

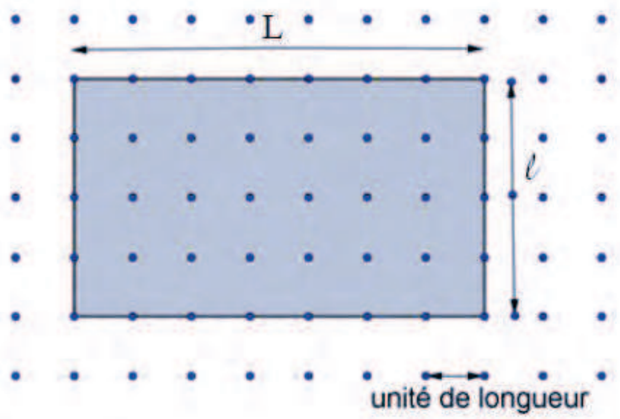


Figure 3

1) Exprimer b et i en fonction de L et l.

2) En déduire que l'aire A du rectangle vérifie $A = i + \frac{b}{2} - 1$

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

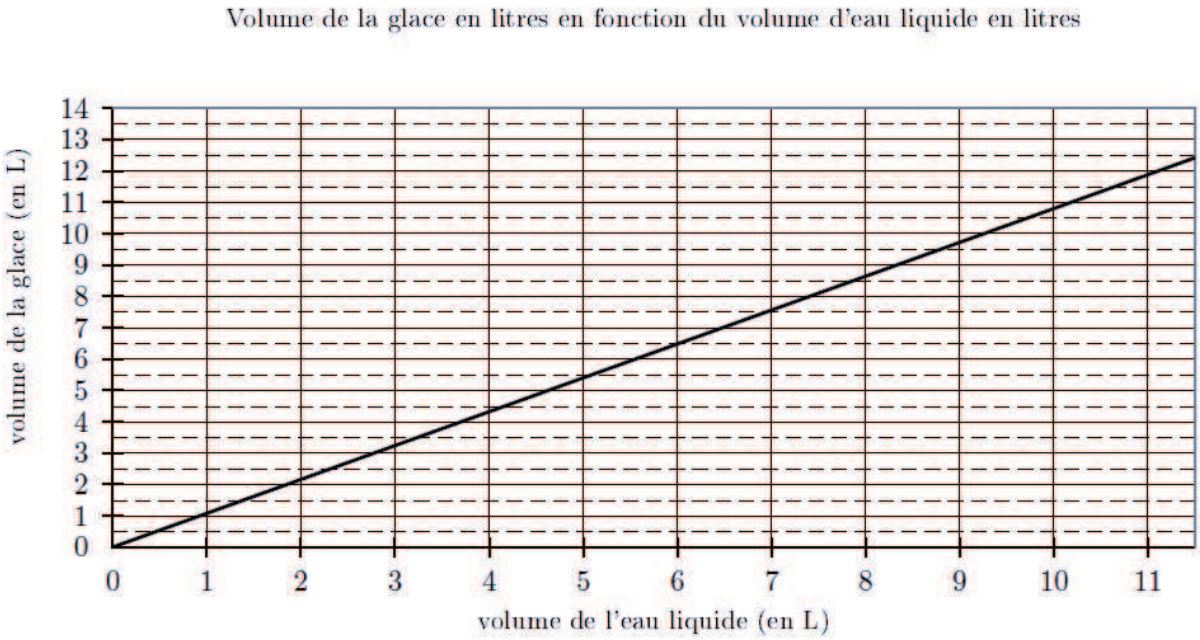
- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- A – B est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B.

Exercice 2

(D'après le sujet du DNB Métropole 2010)

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).



On répondra aux questions 1, 2 et 3 en utilisant le graphique ci-dessus.

1) Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?
2) Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?
3) Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.
4) On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?
5) Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoiement grâce à l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.
   À combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?

   (source : article du 03/12/2013 - http://blogs.grandlyon.com).

Exercice 3

Dans cet exercice, on prendra 1 cm comme unité de longueur.

On considère un trapèze ABFE rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que AB = 14 ; AE = 3 ; BF = 9.
Le point M est un point variable sur le segment [AB]. Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de EM + MF est minimale.

1) Construire le trapèze ABFE et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).

2) On appelle P l'intersection des droites (AB) et (EG).

Montrer que pour tout point M de [AB], on a : EM + MG ≥ EP + PG.

En déduire que la valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.

3) a) Montrer que : $\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}$

b) Calculer AP.

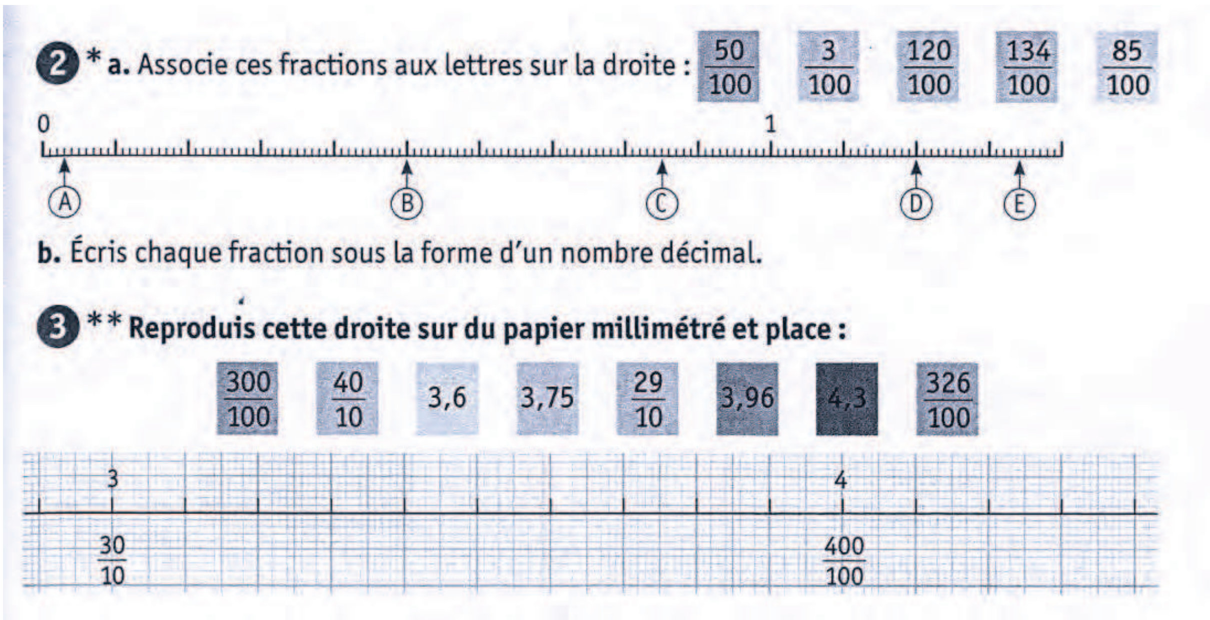
4) Calculer la valeur minimale de EM + MF. En donner la valeur exacte en cm, et la valeur arrondie au dixième.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1

Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)



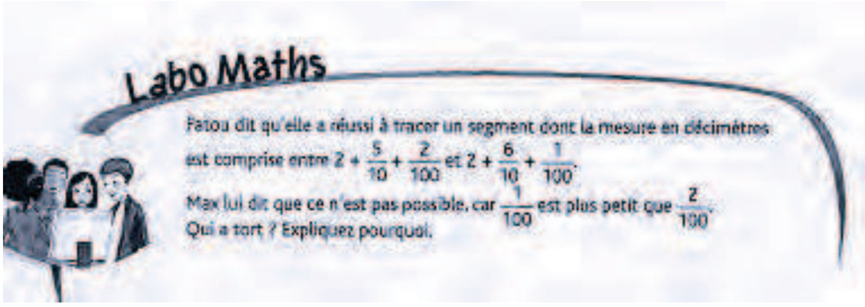
1) Un élève a bien réussi la question ⍰ mais a fait plusieurs erreurs à la question ⍰.

En comparant la présentation et les tâches demandées dans ces deux questions, donner trois raisons pouvant expliquer cette différence de réussite.

2) Quelle définition d'un nombre décimal peut-on proposer à l'école élémentaire ?

SITUATION 2

Extrait du manuel scolaire « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)



Labo Maths

Fatou dit qu'elle a réussi à tracer un segment dont la mesure en décimètres est comprise entre $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$.

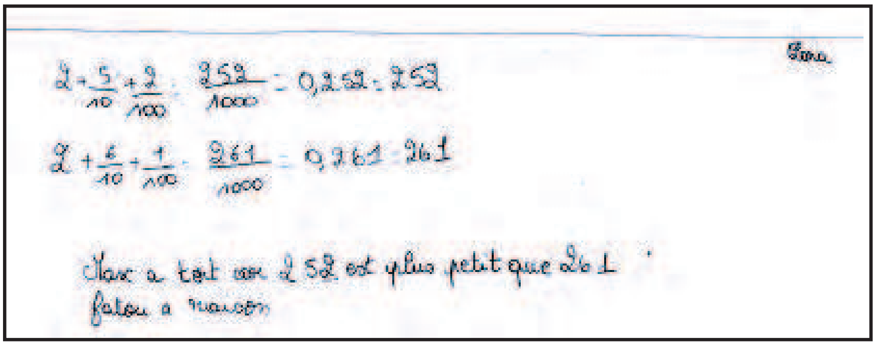
Max lui dit que ce n'est pas possible, car $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{2}{100}$.

Qui a tort ? Expliquez pourquoi.

Trois copies d'élèves sont proposées ci-après (Lara, Clément et Léonie).

1) Quelles sont les erreurs faites par Lara ? Indiquer pour chacune une origine possible.
2) Citer une compétence qui semble acquise dans le domaine de la numération pour Clément.
3) Léonie s'appuie sur les écritures décimales des nombres $2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$ pour comparer ces nombres. Énoncer la règle de comparaison qu'elle utilise implicitement.

Copies d'élèves :



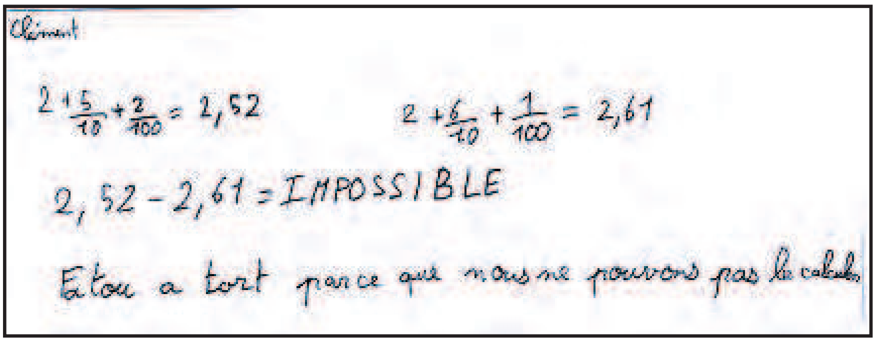
Lara

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = \frac{252}{1000} = 0{,}252 = 252$

$2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = \frac{261}{1000} = 0{,}261 = 261$

Max a tort car 252 est plus petit que 261.
Fatou a raison

Lara



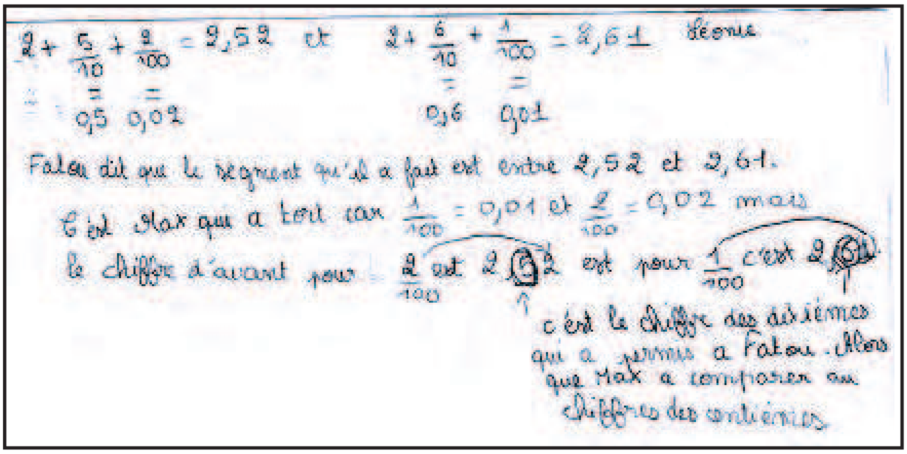
Clément

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2{,}52$ $\qquad$ $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2{,}61$

2,52 – 2,61 = IMPOSSIBLE

Fatou a tort parce que nous ne pouvons pas le calculer

Clément



Léonie

$2 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = 2{,}52$ et $2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} = 2{,}61$

$\frac{5}{10} = 0{,}5$ $\quad$ $\frac{2}{100} = 0{,}02$ $\qquad$ $\frac{6}{10} = 0{,}6$ $\quad$ $\frac{1}{100} = 0{,}01$

Fatou dit que le segment qu'il a fait est entre 2,52 et 2,61.

C'est Max qui a tort car $\frac{1}{100} = 0{,}01$ et $\frac{2}{100} = 0{,}02$ mais le chiffre d'avant pour $\frac{2}{100}$ est 2,52 et pour $\frac{1}{100}$ c'est 2,61

c'est le chiffre des dixièmes qui a permis à Fatou. Alors que Max a comparer au chiffres des centièmes

Léonie

SITUATION 3

La situation suivante composée de trois problèmes a été proposée à des élèves. ***(d'après ERMEL CM2, Hatier)***

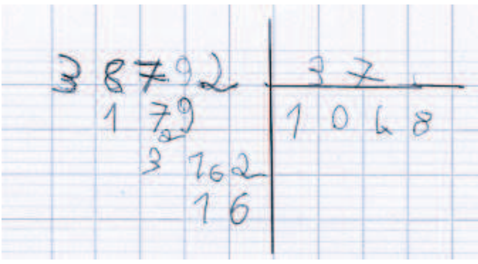
P1 : Avec une bouteille de 150 cL de jus de fruits, combien peut-on remplir de verres de 8 cL ?
P2 : Olivier achète 8 CD de même prix pour 150 €. Quel est le prix d'un CD ?
P3 : À la cantine, les enfants déjeunent par tables de 8. Aujourd'hui 150 enfants déjeunent à la cantine. Combien de tables faut-il préparer ? Restera-t-il des places vides ?

1) Ces trois problèmes relèvent de la division. Indiquer ce qui les différencie.
2) Donner l'ordre dans lequel ces exercices pourraient être proposés aux élèves. Justifier.

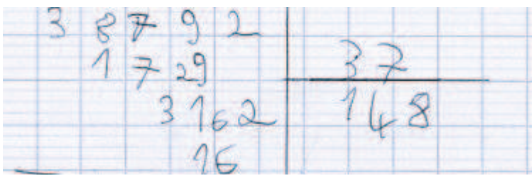
SITUATION 4

Technique opératoire de la division

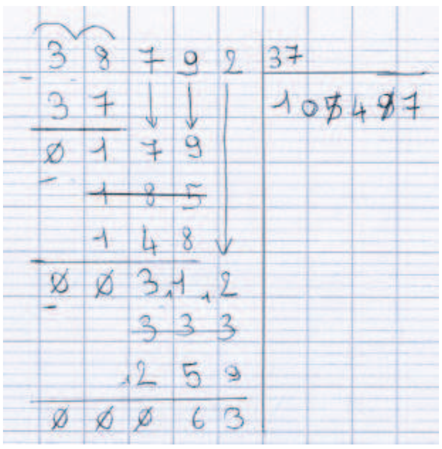
Voici les productions de quatre élèves.



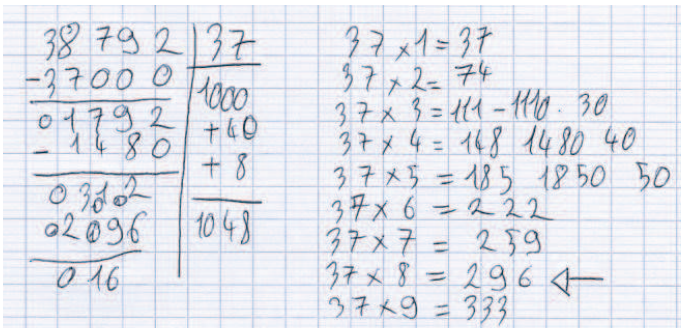
Adama



Marie



Kévin



Anaïs

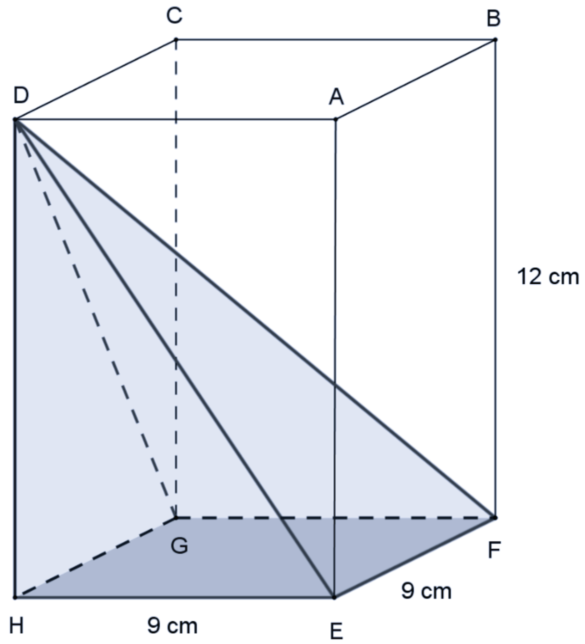
1) Donner un avantage de chacune des techniques opératoires utilisées par Adama et Anaïs.
2) Relever les erreurs faites par Marie et Kévin et, pour chacune, émettre une hypothèse sur son origine.

GROUPEMENT 2 – avril 2015

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

L'objet de ce problème est l'étude d'une pyramide en verre, destinée à être remplie de sable pour constituer un objet de décoration.
Cette pyramide est inscriptible dans un pavé droit, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Le pavé droit a pour dimensions : 9 cm de longueur, 9 cm de largeur et 12 cm de hauteur.



Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

PARTIE A : réalisation d'un patron de la pyramide

1) a) Calculer les longueurs DE et DG.

   b) Quelle est la nature du triangle DGF ? Du triangle DEF ? (On ne demande pas de justification.)

2) Tracer sur la copie (sans justification) un patron de cette pyramide à l'échelle 1/3

La pyramide est remplie avec du sable de deux couleurs différentes : la partie inférieure avec du sable rouge et la partie supérieure avec du sable blanc.

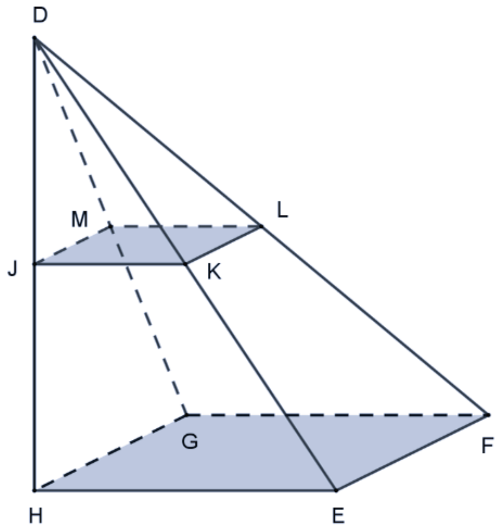
Sur la figure ci-contre, le point J indique la hauteur à laquelle s'arrête le sable rouge ; les deux couleurs de sable sont délimitées par le plan parallèle à la base de la pyramide DEFGH passant par le point J. La section est un quadrilatère JKLM où les points K, L, M appartiennent respectivement aux segments [DE], [DF] et [DG].

La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH.

PARTIE B : étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on donne JH = 2 cm.

1) Quelle est la nature du quadrilatère JKLM ? Justifier.
2) Calculer les longueurs JK et JM en justifiant les calculs.
3) Déterminer le volume B de sable blanc et le volume R de sable rouge contenus dans la pyramide.

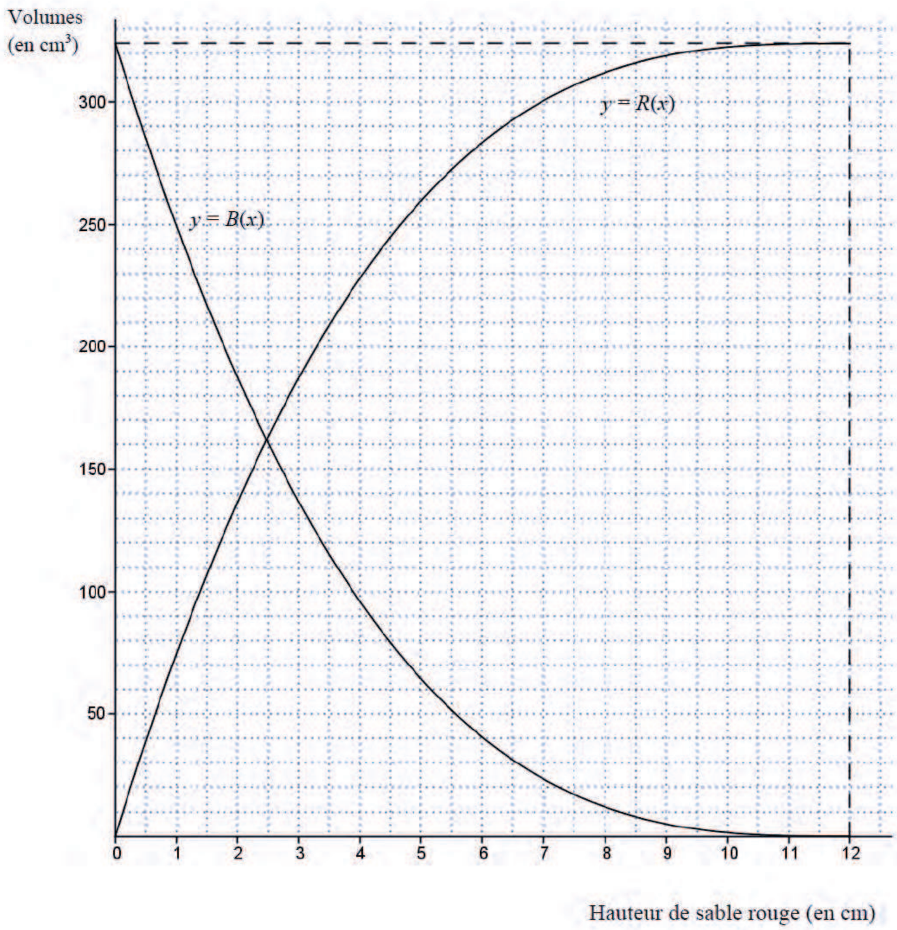


Rappel : volume d'une pyramide = $\frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur

PARTIE C : étude du cas général

Dans cette partie la hauteur JH de sable rouge est variable. On note x cette hauteur, exprimée en centimètre, et respectivement $B(x)$ et $R(x)$ les volumes de sable blanc et de sable rouge contenus dans la pyramide, exprimés en fonction de x et en centimètre cube.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2) On a tracé ci-après les représentations graphiques des fonctions B et R dans un repère du plan :



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Si la hauteur de sable rouge est 5 cm, quels sont les volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?

b) Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, quels sont les volumes de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?

c) Donner un encadrement au centimètre près de la hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux.

3) a) Montrer que $B(x) = 0{,}1875\ (12 - x)^3$.

b) En déduire les valeurs exactes des réponses aux questions C 2) a).

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

D'après le manuel « Triangles 3ème » (éditions Hatier).

Carole, partie en vacances 10 jours, a laissé le robinet du lavabo de la salle de bain entrouvert. Le débit de ce robinet était 3 litres par minute (L/min).
Dans la ville où habite Carole, le prix moyen de l'eau est 3,50 € le m^3.

Calculer les conséquences financières de la négligence de Carole.

Exercice 2

Simon lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis il additionne les deux nombres obtenus. Il prétend qu'il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Est-ce exact ?

Exercice 3

Une petite entreprise emploie 7 personnes, dont 3 femmes.
Voici quelques informations sur le salaire mensuel des personnels :

Salaires des hommes :
1250 € ; 1400 € ; 1600 € ; 3200 €

Salaires des femmes :
salaire médian : 1875 € ; salaire moyen : 1700 € ; étendue des salaires : 1000 €

Le patron de l'entreprise veut embaucher une femme supplémentaire pour respecter la parité.
Calculer le salaire qu'il doit verser à cette nouvelle recrue pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux.

Exercice 4

Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

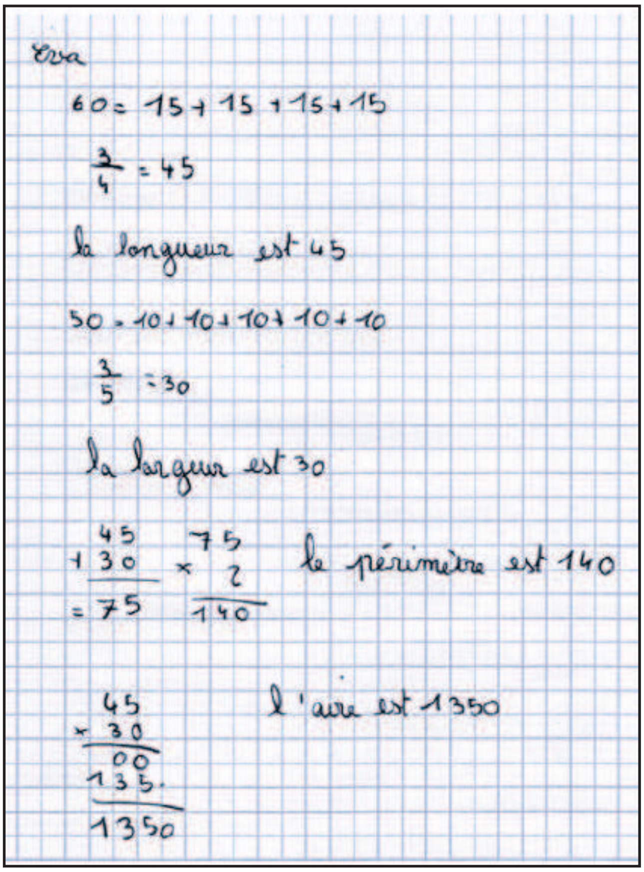
SITUATION 1

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 en activité de recherche.

> Dans une plaque de carton rectangulaire de largeur 50 cm et de longueur 60 cm, on découpe un rectangle dont la largeur est $\frac{3}{5}$ de la largeur de la plaque et la longueur est $\frac{3}{4}$ de la longueur de la plaque.
> Calcule le périmètre et l'aire du rectangle obtenu.

1) Dans cet exercice, les fractions apparaissent-elles comme des nombres ou comme des opérateurs ? justifier.

2) Le problème a été proposé à trois élèves, dont les productions sont données ci-après :


Eva

$60 = 15 + 15 + 15 + 15$

$\frac{3}{4} = 45$

la longueur est 45

$50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$

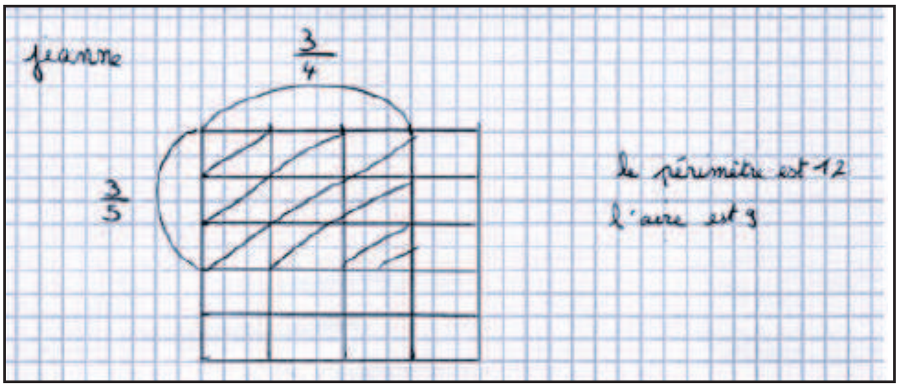
$\frac{3}{5} = 30$

la largeur est 30

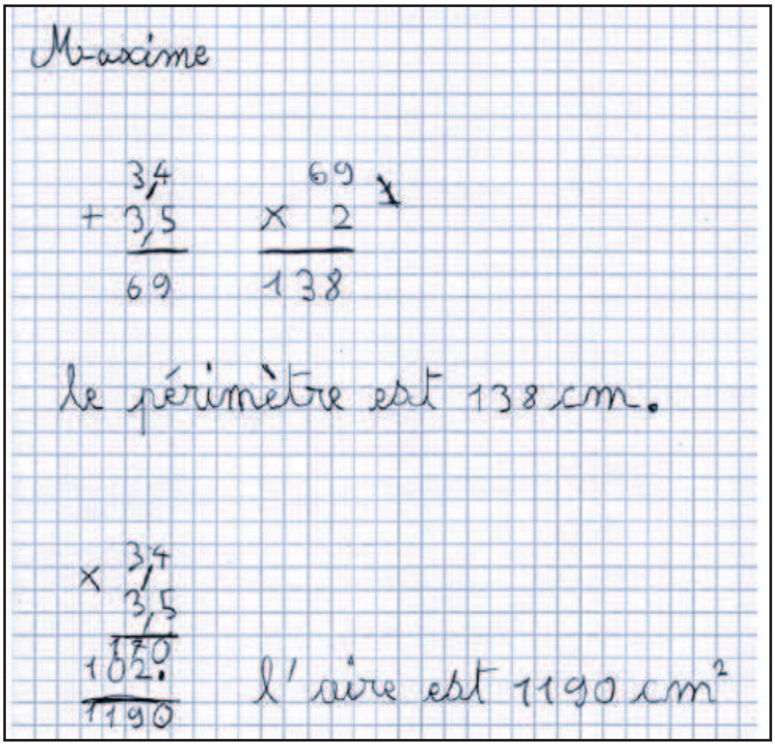
$45 + 30 = 75$; $75 \times 2 = 140$ le périmètre est 140

45×30 : 00 ; 135. ; 1350 l'aire est 1350

Eva



Jeanne



Maxime

a) Pour chacun de ces trois élèves, donner deux compétences qui semblent acquises dans le domaine grandeurs et mesures.

b) Analyse de la production d'Eva : en quoi témoigne-t-elle d'une bonne compréhension de la notion de fraction malgré une erreur d'écriture ?

c) Analyse de la production de Maxime : en quoi son erreur d'écriture est-elle révélatrice d'une mauvaise compréhension de la notion de fraction ?

3) En préparant cette activité, le professeur a hésité entre trois couples de dimensions pour le rectangle de carton :

- 50 cm de largeur et 60 cm de longueur (dimensions finalement retenues) ;
- 10 cm de largeur et 16 cm de longueur ;
- 10 cm de largeur et 14 cm de longueur.

Argumenter l'intérêt et les difficultés éventuelles pour chacune de ces options.

SITUATION 2

L'exercice ci-dessous est proposé à des élèves d'une classe de CM2.

(Extrait de « Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008 »).

1) Citer deux pré-requis dans le domaine de la géométrie nécessaires pour résoudre cet exercice.
2) Un élève propose la solution suivante :

120 – 28 = 92
2 × 18 = 36
2 × 10 = 20
36 + 20 = 56
92 – 56 = 36 ÷ 2 = 18
La hauteur de la boîte est de 18 cm.

   a) Retrouver les différentes étapes de son raisonnement, en analysant ses résultats partiels.
   b) Relever ses éventuelles erreurs ou oublis.

SITUATION 3

Lis le problème.

Emma et Maxime vendent des crêpes pour la kermesse de l'école.
5 crêpes coûtent 7 €.
10 crêpes coûtent donc 14 €.
Combien coûtent 15 crêpes ?

(Extrait de « Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008 »)

1) Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?
2) Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune, expliciter les propriétés relatives à cette notion qui ont été mobilisées.

GROUPEMENT 3 – avril 2015

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci-dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

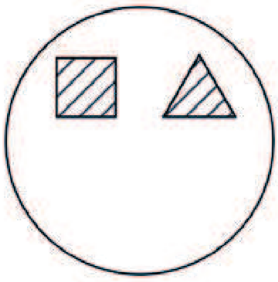


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

PARTIE A : étude de la situation concrète

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

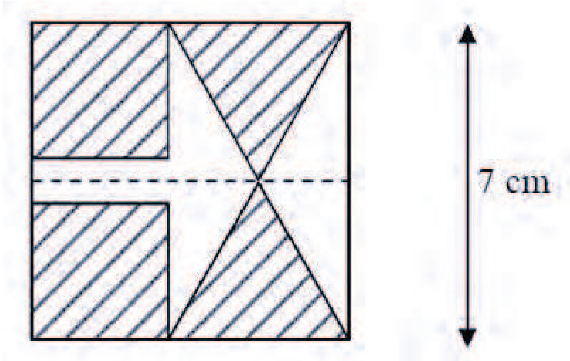


Figure 2

dans lequel les figures hachurées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

1) a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *figure 2*.
Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est : $$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?

2) Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

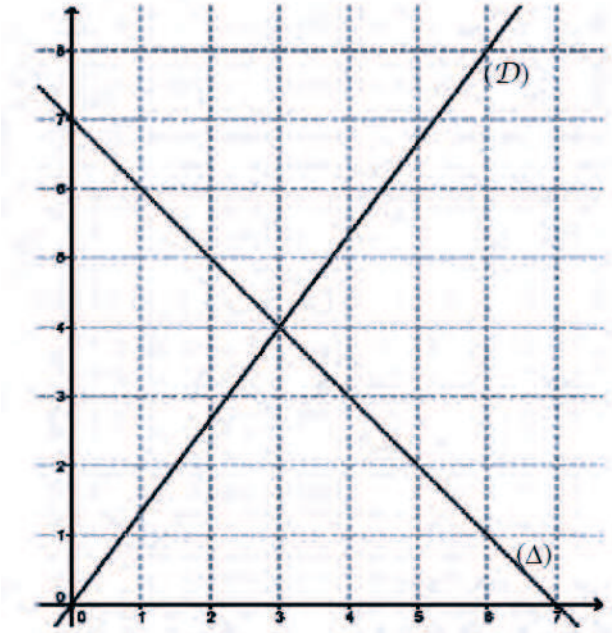
Pour cela, il appelle x le côté du carré hachuré et y celui du triangle équilatéral hachuré.

a) Expliquer pourquoi si x et y sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4\,x - 3\,y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2\,x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

b) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions f et g définies par :

$f\,(x) = \frac{4}{3}$ et $g\,(x) = 7 - x$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

c) Résoudre par le calcul le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ et en déduire la solution au problème.

3) Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.
Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm, 420×197. Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.
Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

PARTIE B : démonstration de résultats mathématiques

1) Démontrer le résultat rappelé à la question **A 1)** a) :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est : $$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) Dans cette question, on considère un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}\,x$.

a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.

b) Exprimer l'aire A_1 du carré et l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x.

En déduire le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A 1) b).

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

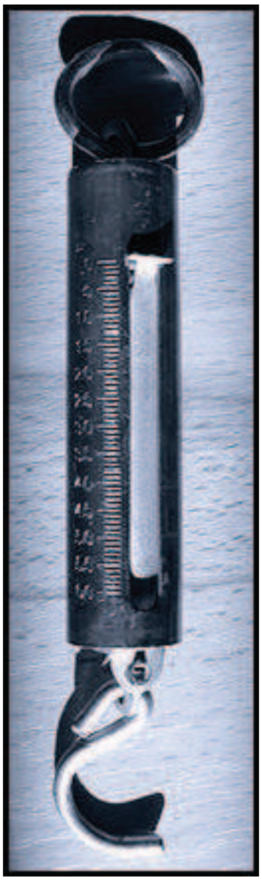
Exercice 1

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

1) La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?
2) Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

Exercice 2

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



Exemple de peson à ressort. Source : Wikipédia

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.
Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.
Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.
Chaque fois que l'on ajoute 10 g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5 cm.

1) Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?
2) L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?
3) La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1) On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.
   Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118.
   On sait de plus que $q = 1789$.

   Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

2) L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

   a) Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Quel résultat général peut-on conjecturer ?

   b) Démontrer ce résultat.

   c) Comparer les nombres $\frac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$ et $\frac{987\,654\,321}{987\,654\,322}$ sans effectuer de calcul.

Exercice 4

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.
Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.
Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On suppose les deux dés bien équilibrés.
On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose.
Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

1) Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

2) Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

> *Une école organise une sortie de fin d'année. Pour se déplacer, le directeur loue des bus qui peuvent accueillir 42 passagers chacun. Il y a 157 élèves dans l'école et 20 adultes les accompagneront. Combien faut-il réserver de bus ?*

1) Quelle opération mathématique est l'enjeu de ce problème ?
2) Dans l'annexe, sont présentées les productions de quatre élèves A, B, C et D. Pour chacune d'elles, expliquer la procédure utilisée.
3) Un autre élève de la classe a effectué la division de 157 par 20. À quelle question ce calcul pourrait-il répondre ?
4) La situation du problème de départ et celle de la question 3 illustrent deux sens différents de la division. Les expliciter.

SITUATION 2

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

> *J'avais 28 litres d'essence. J'ai rempli de façon identique 8 bidons de même contenance en utilisant toute l'essence. Combien ai-je mis de litres dans chaque bidon ?*

1) Quelle opération permet de répondre à cette question ?
2) Dans l'annexe, sont présentées les productions de trois élèves E, F et G. Pour chacune de ces productions, expliquer la procédure utilisée.

SITUATION 3

Voici un autre exercice proposé à des élèves de CM2.

> *Il faut exactement 28 litres d'essence pour remplir complètement 8 bidons de contenance identique. Combien peut-on remplir de bidons avec 7 litres d'essence ?*

1) De quelle(s) notion(s) mathématique(s) relève cet exercice ?
2) Proposer deux résolutions différentes de cet exercice qui peuvent être attendues d'un élève de CM2, en explicitant les raisonnements sous-jacents.

SITUATION 4

L'exercice suivant a été donné à des élèves de l'école primaire :

> *On découpe un ruban mesurant 137,6 cm en 8 morceaux de même longueur. Combien mesure chacun des morceaux ?*

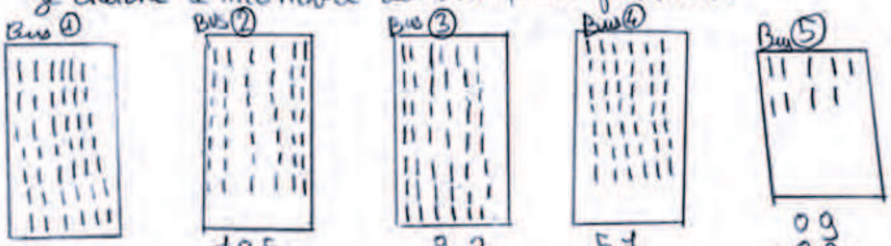
1) Quel sens de la division illustre-t-il ?
2) Proposer une procédure pour résoudre ce problème, permettant de se ramener à une opération sur les nombres entiers.
3) Proposer une procédure de calcul qui peut être attendue d'un élève de CM2 pour effectuer la division 137,6 ÷ 8, sans se ramener à une opération sur les entiers.
4) Le quotient d'un nombre décimal par 8 est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

ANNEXE SITUATION 1

Élève A

Je cherche le nombre de bus qu'il faudrait.

Je cherche le mombre de bus qu'il faudrat.



$177 - 42 = 135$; $135 - 42 = 093$; $93 - 42 = 51$; $51 - 42 = 09$; $09 - 09 = 00$

Il faudrat 5 Bus.

Il faudrait 5 Bus

Élève B

Je cherche combien faut-il de bus

Je cherche combien faut-il de bus

$157 + 20 = 177$; $42 \times 3 = 126$; $42 \times 4 = 168$; $42 \times 5 = 210$

J'ai additioné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

J'ai additioné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

Il faudra réserver 5 bus

Il faudra réserver 5 bus

Élève C

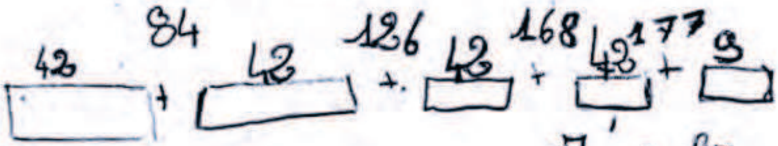
$$\begin{array}{r} 157 \\ +\ 20 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 177 & 42 \\ \cline{2-2} -168 & 4 \\ \cline{1-1} 009 & \end{array}$$

Il faut réserver 5 bus pour tous les élèves et pour tous les adultes.

Il faut réserver 5 bus pour tous les élèves et pour tous les adultes.

Élève D



Il faut réserver 5 bus

Il faut réserver 5 bus

J'ai fait comme ça pour voir combien de bus le directeur doit réserver.

J'ai fait comme ça pour voir combien de bus le directeur doit réserver.

ANNEXE SITUATION 2

Élève E

Je cherche le nombre de litre qu'il y aurait dans chaque bidon

je cherche le nombre de litre qu'il y aurat dans chaque bidon.

1L = 1000ml

1L = 1000 ml

Chaque bidon contiendra 3L et demi

Chaque bidon contiendra 3L et demi

Élève F

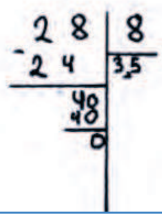
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Tout les bidon son emplis avec 3 demi.

Tout les bidon son emplis avec 3 demi

Élève G

J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.



J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.

CONCOURS EXCEPTIONNEL CRÉTEIL – mai 2015

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

On appelle **format d'un rectangle** le quotient de sa longueur par sa largeur.
Ainsi, par exemple,

- un rectangle de dimensions 4 cm et 6 cm a pour format $\frac{6}{4} = 1,5$;
- une feuille de papier A4 (21 x 29,7) a pour format $\frac{29,7}{21} \approx 1,41$.

Le but de ce problème est d'étudier différents formats de rectangles.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A : étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie, tous les rectangles étudiés ont un côté (longueur ou largeur) mesurant 10 cm.

1) Déterminer le format F d'un tel rectangle lorsque le deuxième côté mesure
a) 2,5 cm; b) 40 cm.

2) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

Mesure (en cm) du deuxième côté	2	4	10	18	32	60
Format du rectangle						

Le format est-il proportionnel à la mesure du deuxième côté ? Justifier la réponse.

3) La courbe ci-après représente le format d'un rectangle dont un des côtés mesure 10 cm en fonction de la mesure du deuxième côté, lorsque celle-ci varie entre 1 cm et 40 cm.

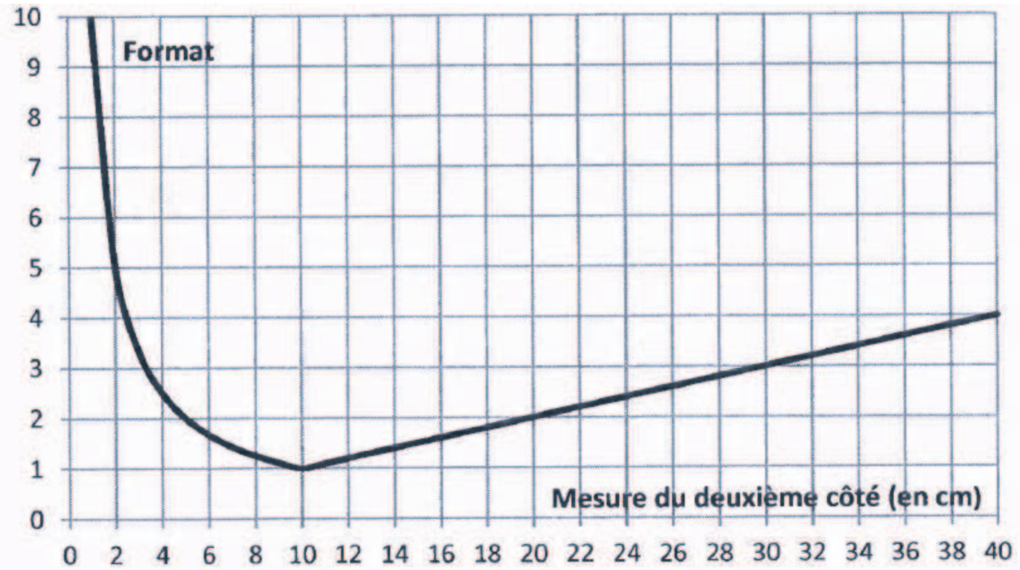


Figure 1

a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la mesure du deuxième côté de tous les rectangles de format égal à 3.

b) Retrouver par le calcul les résultats précédents.

c) Déterminer graphiquement les valeurs possibles pour la mesure du deuxième côté des rectangles dont le format est inférieur ou égal à 2,5.

d) Retrouver par le calcul les résultats précédents.

PARTIE B : format commercial d'un rectangle

1) On considère un rectangle ABCD de longueur AB et de largeur AD. On note L sa longueur, l sa largeur et F son format. On a donc F = $\frac{L}{l}$.
On note I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD].
On découpe le rectangle suivant la droite (IJ).

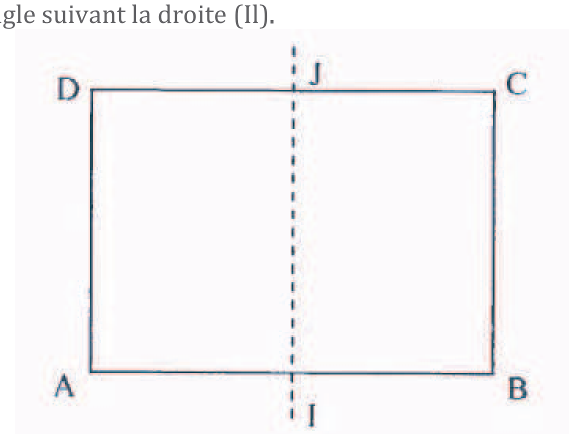


Figure 2

On dit que ABCD a un format commercial si les deux rectangles superposables AIJD et IBCJ obtenus ont aussi pour format F.
Montrer que dans ce cas $L^2 = 2 \times l^2$. En déduire que F = $\sqrt{2}$.

2) On dit qu'un rectangle de papier est de format A_0 si ce rectangle a un format commercial (donc si son format est $\sqrt{2}$ et si son aire est égale à 1m².
On note L_0 et l_0 la longueur et la largeur d'un rectangle de format A_0, exprimées en mètre.
Montrer que $l_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $L_0^2 = \sqrt{2}$.

Dans la suite de cette partie, on admet qu'un rectangle de format A_0 a pour dimensions 0,841 m et 1,189 m.

En utilisant les notations de la *figure* 2, et en supposant que le rectangle ABCD est de format A_0, on appelle A_1 le format du rectangle AIJD.
En réitérant ce procédé de découpage, on obtient successivement des rectangles de formats A_2, A_3, A_4, etc.

3) La feuille de tableur ci-après calcule les dimensions des rectangles de format A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ... (les valeurs sont arrondies au millième).

	A	B	C
1	format	longueur (en mètre)	largeur (en mètre)
2	A0	1,189	0,841
3	A1	0,841	0,594
4	A2	0,594	0,420
5	A3	0,420	0,297
6	A4		
7	A5		

Déterminer les dimensions d'un rectangle de format A_5. Arrondir au millimètre.

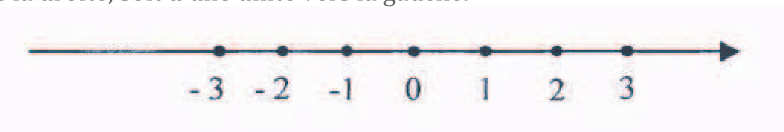
DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) Une puce se déplace sur un axe gradué.
   Elle part du point d'abscisse 0 et, à chaque seconde, saute de façon aléatoire et équiprobable soit d'une unité vers la droite, soit d'une unité vers la gauche.



   Au bout de 3 secondes, quelle est la probabilité que la puce soit :
   a) au point d'abscisse 0 ?
   b) au point d'abscisse 1 ?
   c) au point d'abscisse 2 ?
   d) au point d'abscisse 3 ?

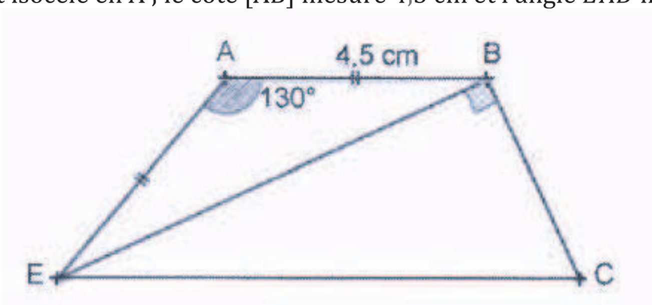
   Justifier les réponses.

2) Durant une semaine, un établissement de restauration rapide offre, pour chaque achat de quatre menus, une carte à gratter. Une carte contient 4 cases dont on a caché les motifs : des étoiles sur deux d'entre elles et des cœurs sur les deux autres.
   La règle du jeu stipule :
   - on gratte exactement deux cases ;
   - si les deux cases grattées présentent les mêmes symboles on gagne une boisson.

   Calculer la probabilité de gagner une boisson avec une carte, en grattant deux cases au hasard.

Exercice 2

On considère le quadrilatère ABCE représenté par la figure ci-dessous.
On sait que :
- les droites (AB) et (CE) sont parallèles ;
- le triangle EBC est rectangle en B ;
- le triangle EAB est isocèle en A ; le côté [AB] mesure 4,5 cm et l'angle $\widehat{EAB}$ mesure 130°.



1) Justifier que la droite (EB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AEC}$.
2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCE}$.
3) Soit K le milieu du segment [EC]. Justifier que le triangle EBK est isocèle en K.
4) Prouver que ABKE est un losange.
5) Quelle est la longueur du segment [EC] ?

Exercice 3

Pour un projet scientifique, une classe de cours moyen décide de construire dans la cour de l'école une maquette du système solaire, en respectant les échelles. On rappelle que le rayon moyen de la Terre est égal à 6400 km et celui du Soleil est égal à 700 000 km.
Dans la maquette, le Soleil sera représenté par une boule de 18 cm de rayon.

1) Dans la maquette, quel sera le diamètre de la Terre, arrondi au millimètre ?
2) Sachant que, dans la maquette, la distance du Soleil à la Terre devrait mesurer 38,47 m, retrouver la distance réelle Terre-Soleil (en kilomètre).

Exercice 4

On considère l'algorithme suivant :

- Étape 1 : choisir un nombre entier naturel N dont le chiffre des unités est 5 ;
- Étape 2 : déterminer d, le nombre des dizaines de N ;
- Étape 3 : effectuer le produit d x (d + 1) ;
- Étape 4 : écrire le nombre entier qui se termine par 25 et dont le nombre des centaines est le produit obtenu à l'étape 3.

1) Appliquer cet algorithme aux trois nombres entiers : 15 ; 5 ; 145.
2) Un élève affirme que cet algorithme permet de calculer le carré d'un nombre entier naturel dont le chiffre des unités est 5. Prouver qu'il a raison (on pourra développer $(10d + 5)^2$)).

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

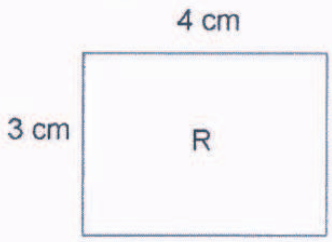
Cette partie étudie différentes situations d'apprentissage autour des notions d'aire et de périmètre.
Un extrait des « Repères pour organiser la progressivité des apprentissages », BOEN Hors Série N°3 du 19 juin 2008 et un extrait des recommandations pour la mise en œuvre des programmes, BOEN N°25 du 19 juin 2014 sont fournis en fin d'énoncé.

SITUATION 1

À l'issue d'une séquence abordant la notion de périmètre dans une classe de CM1, un enseignant prévoit d'utiliser le QCM suivant pour évaluer une partie des acquis de ses élèves.

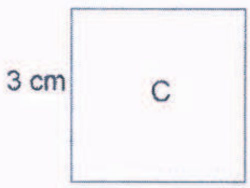
QCM

1. Quel est le périmètre de ce rectangle ?



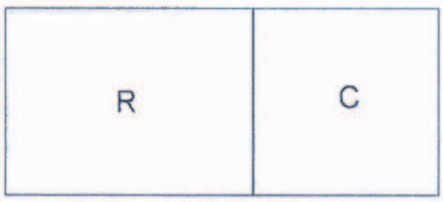
□ 7 cm   □ 12 cm   □ 14 cm   □ 24 cm

2. Quel est le périmètre de ce carré ?



□ 3 cm   □ 6 cm   □ 9 cm   □ 12 cm

3. Quel est le périmètre de la figure obtenue avec le rectangle et le carré ?



□ …   □ ….   □ ….

D'après DEEP, évaluation PACEM-Mathématiques 2011. Cahier de I 'élève, CM1

1) Proposer une explication des choix du concepteur pour les quatre valeurs (7 cm ; 12 cm ; 14 cm ; 24 cm) de la question 1 du QCM.
2) Proposer trois valeurs pour compléter la question 3 du QCM, et argumenter ces choix.

SITUATION 2

Dans une classe de CM2, un enseignant prévoit d'utiliser le problème 1 ci-dessous.

> **Problème 1**
> Construire un rectangle dont l'aire vaut 120 cm^2.

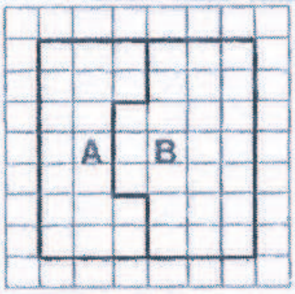
1) Citer deux savoirs relatifs au domaine « grandeurs et mesures» que l'élève devra mobiliser pour résoudre ce problème.
2) Citer deux pré-requis relevant d'autres domaines mathématiques que « grandeurs et mesures » qui seront nécessaires à un élève pour résoudre ce problème.

SITUATION 3

Un professeur propose les problèmes 2 et 3 ci-après à une classe de CM2.
Justifier le choix d'avoir utilisé un quadrillage dans ces deux problèmes.

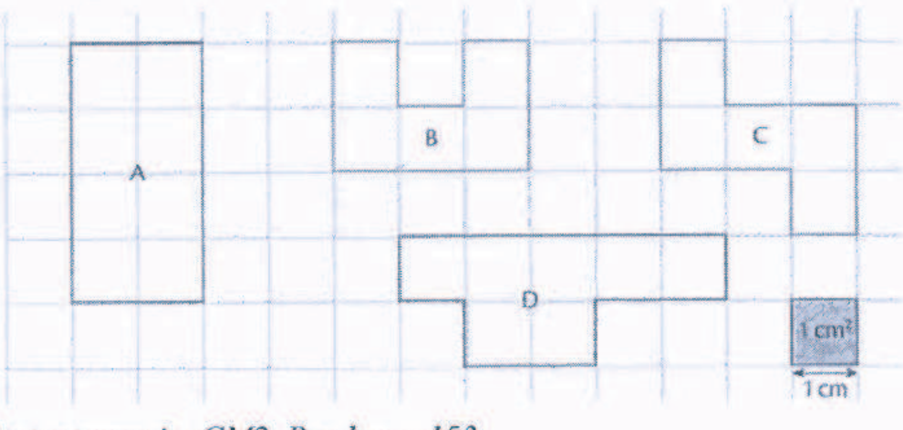
Problème 2

Compare les périmètres de la partie A et de la partie B



Problème 3

2 Trouve toutes les figures qui ont un périmètre de 12 cm.
Puis range-les, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire.



Maths tout terrain, CM2, Bordas, p.153

SITUATION 4

La situation ci-après (organisation de séance et production d'élèves) est inspirée de l'ouvrage « *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* » - ERMEL – CM1, 2009, Hatier.

Organisation de séance

Matériel

Rectangle A (10 cm × 9 cm)	demi-périmètre : 19	aire : 90
Rectangle B (10 cm × 14 cm)	demi-périmètre : 24	aire : 140
Rectangle C (20 cm × 4 cm)	demi-périmètre : 24	aire : 80

Étape 1 : Recherche par groupes de deux

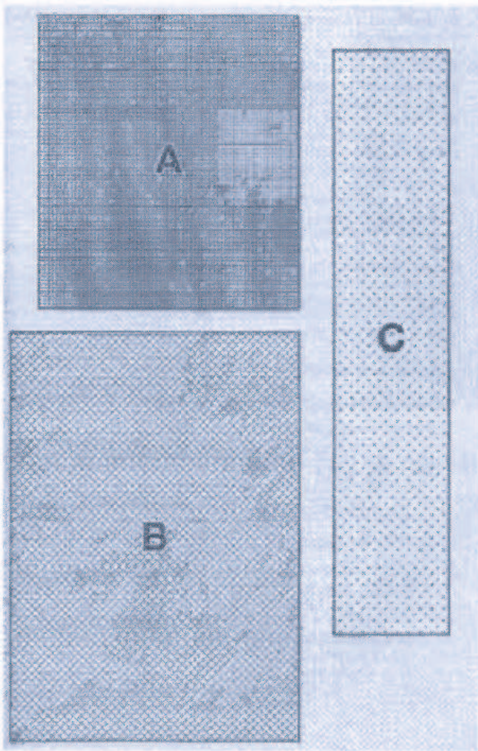
Le maître demande aux élèves de préparer leur matériel usuel de géométrie. Il distribue aussi la feuille contenant les figures et donne la tâche, sans commentaire :

Question : « Quelle est la figure la plus petite ? Quelle est la figure la plus grande ? »

Étape 2 : Recherche par groupes de deux

Le maître fait découper les trois rectangles suivant leur contour, et donne alors une nouvelle tâche.

Question : « Audrey a le rectangle A. Bastien a le rectangle B. Caroline a le rectangle C. Quel enfant a le plus de papier ? Quel enfant a le moins de papier ? »



(Les rectangles ne sont pas représentés en vraie grandeur.)

1) Citer trois critères possibles de classement pour répondre à la question de l'étape 1.
2) On donne ci-après trois productions d'élèves en réponse à l'étape 2. Pour chacune, dire quel sens les élèves semblent avoir donné aux termes « le plus de ... » et « le moins de ... ».

Groupe d'élèves 1

Aurélien

Bastien a plus de papier
dans son carré B
expliquation j'ai mesuré
la largeur du B : 10 CM
A:9
B:10
C:4
est plus grande que les autre

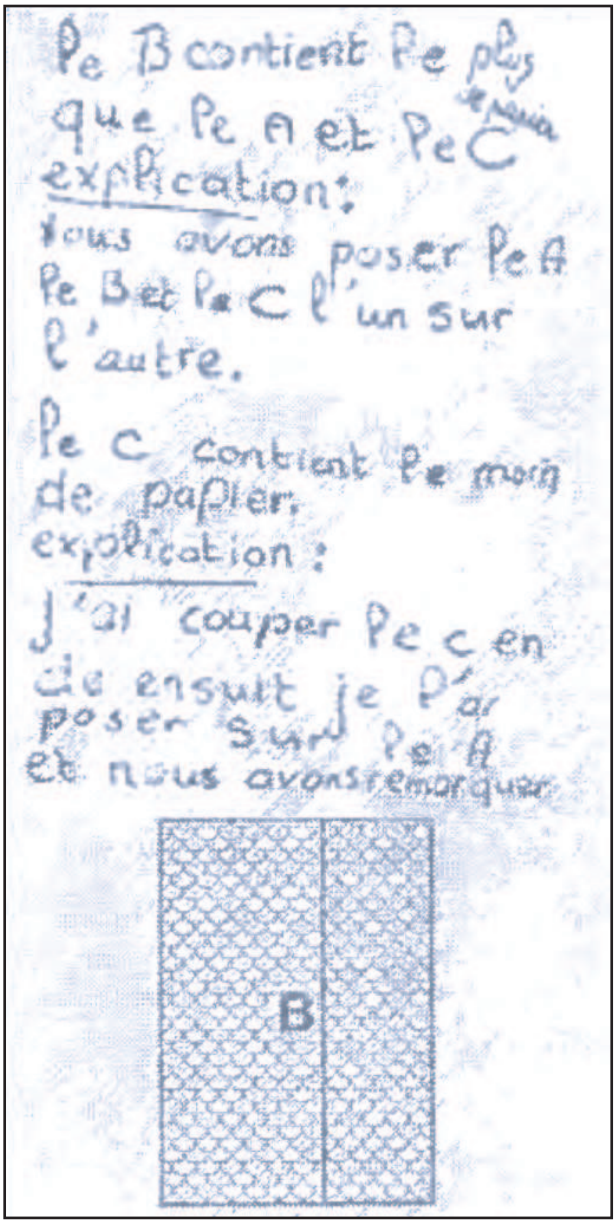
Caroline a le moin de papier
avec son reclange C
ex le rectangle C a moin
de largeur par à por au autre
A:9
B:10
C:4

Groupe d'élèves 2

1) Quel enfant a le plus
de papier ? C'est caroline
et bastien. x
conclusion : ~~par~~ car le
périmètre fait 48 cm.
2) Quel enfant a le
moins de papier ? c'est
audrey.
conclusion : car le périmètre
fait 38 cm.

Pauline SYLVAIN

Groupe d'élèves 3



3) Proposer trois rectangles de périmètres tous différents et d'aires toutes différentes permettant un classement des aires qui soit différent de celui des périmètres.

ANNEXE 1

Extrait des « repères pour organiser la progressivité des apprentissages », BOEN hors série n°3 du 19 juin 2008

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Géométrie	Dans le plan - Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. - Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre. - Construire un cercle avec un compas. - Utiliser en situation le vocabulaire : côté, sommet, angle, milieu. - Reconnaître qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie, par pliage ou à l'aide du papier calque. - Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer : un cube, un pavé droit. - Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet. Problèmes de reproduction, de construction - Reproduire des figures (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un modèle. - Construire un carré ou un rectangle de dimensions données.	Dans le plan - Reconnaître que des droites sont parallèles. - Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre. - Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas. - Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme. - Reconnaître ou compléter un patron de cube ou de pavé. Problèmes de reproduction, de construction - Compléter une figure par symétrie axiale. - Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes.	Dans le plan - Utiliser les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles. - Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments. - Construire une hauteur d'un triangle. - Reproduire un triangle à l'aide d'instruments. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, cylindre, prisme. - Reconnaître ou compléter un patron de solide droit. Problèmes de reproduction, de construction - Tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée (avec des indications relatives aux propriétés et aux dimensions).
Grandeurs et mesure	- Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient : . Longueur : le mètre, le kilomètre, le centimètre, le millimètre ; . Masse : le kilogramme, le gramme ; . Capacité : le litre, le centilitre ; . Monnaie : l'euro et le centime ; . Temps : l'heure, la minute, la seconde, le mois, l'année. - Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs, des masses, des capacités, puis exprimer cette mesure par un nombre entier ou un encadrement par deux nombres entiers. - Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit. - Calculer le périmètre d'un polygone. - Lire l'heure sur une montre à aiguilles ou une horloge. Problèmes - Résoudre des problèmes dont la résolution implique les grandeurs ci-dessus.	- Connaître et utiliser les unités usuelles de mesure des durées, ainsi que les unités du système métrique pour les longueurs, les masses et les contenances, et leurs relations. - Reporter des longueurs à l'aide du compas. - Formules du périmètre du carré et du rectangle. Aires - Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. - Classer et ranger des surfaces selon leur aire. Angles - Comparer les angles d'une figure en utilisant un gabarit. - Estimer et vérifier en utilisant l'équerre, qu'un angle est droit, aigu ou obtus. Problèmes - Résoudre des problèmes dont la résolution implique éventuellement des conversions.	- Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final. - Formule de la longueur d'un cercle. - Formule du volume du pavé droit (initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume). Aires - Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée. - Connaître et utiliser les unités d'aire usuelles (cm^2, m^2 et km^2). Angles - Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit. Problèmes - Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions. - Résoudre des problèmes dont la résolution implique simultanément des unités différentes de mesure.

ANNEXE 2

Extrait des recommandations pour la mise en œuvre des programmes, BOEN N°25 du 19 juin 2014

Grandeurs et mesures

L'ensemble des formules de périmètre, d'aire et de volume est étudié au collège. À l'école élémentaire, il est surtout important :

- de consolider la notion de périmètre des polygones par le calcul pas à pas (en ajoutant au fur et à mesure chacune des longueurs), en faisant pour le carré et le rectangle le lien avec les formules ;
- d'approcher la notion d'aire à partir de manipulations (pavages...) ; les formules d'aire du carré et du rectangle pourront aisément se déduire d'une activité de pavage par des carrés ; le calcul d'une aire se limite au CM2 à celle d'un carré ou d'un rectangle ;
- d'approcher la notion de volume par des manipulations.

La comparaison des angles d'une figure en utilisant un gabarit est amorcée au CM1 et approfondie au CM2.
La reproduction d'un angle donné est faite au collège.

CORRIGÉS DES QUATRE SUJETS 2015

MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ[1]

La notion de « proportionnalité » est très présente dans les sujets du CRPE. Il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire utilisé pour parler des propriétés afférentes.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire qui traduit la relation liant les deux grandeurs en présence. Cette fonction décrit et généralise la situation. De manière générique, on peut noter f cette fonction linéaire. Les deux propriétés principalement citées pour décrire une procédure ou analyser une situation sont les suivantes :

(A) $pour\ tous\ réels\ x\ et\ y\ \ on\ \ a\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
(B) $pour\ tous\ réels\ k\ et\ x\ on\ a\ f(k \times x) = k \times f(x)$

On montre, par exemple dans [simard2012] que les propriétés (A) et (B) sont des propriétés caractéristiques d'une fonction linéaire (sous réserve d'une condition de continuité de la fonction f).

La propriété (A) est communément appelée *propriété additive* ou *propriété linéaire additive.*
La propriété (B) est communément appelée *propriété multiplicative* ou *propriété linéaire multiplicative* ou encore *propriété d'homogénéité*.

La locution « propriété linéaire additive » est redondante, nous préférerons « propriété additive » pour désigner la propriété (A). Nous choisirons, de même, la locution « propriété multiplicative » pour désigner la propriété (B). Le terme mathématique « homogénéité » est moins connu du public auquel s'adresse ce document donc nous ne l'utiliserons pas.

Une situation de proportionnalité met en jeu deux grandeurs liées par un coefficient multiplicateur, on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par un nombre a. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité* de la situation. La fonction linéaire sous-jacente est définie par $f(x) = a \times x$. Ce nombre a a de multiples significations qu'il convient de distinguer :

- a est le *coefficient de proportionnalité* lorsque l'on considère la structure multiplicative de la situation
- a est la *valeur commune des rapports* des deux grandeurs en jeu lorsque l'on considère la situation en terme de *rapports égaux*
- a est le *coefficient* qui définit la *fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on considère la situation d'un point de vue *fonctionnel*
- $a = f(1)$ est la *valeur de l'unité* (ou *valeur pour « un »*) lorsque l'on considère une procédure de *passage à l'unité*
- a est le *coefficient directeur de la droite représentative de la fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on se place dans le cadre graphique. On peut également dire que a est la *pente* ou l'*inclinaison* de la droite représentative de la fonction linéaire associée.

Ces distinctions permettent d'être précis lorsque l'on décrit une procédure. Une procédure de retour à l'unité insiste sur la *valeur pour « un »*, alors qu'une procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre.

Le tableau de proportionnalité est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée à la situation. La construction d'un tel tableau relève d'une compétence d'organisation et de gestion de données. Cette structure s'avère efficace pour clarifier une situation de proportionnalité, en particulier identifier le statut des différentes données, éventuellement mieux « visualiser » des liens entre les nombres présents (correspondant à une même grandeur ou liés par la relation), et pour schématiser la procédure utilisée par l'élève. Les propriétés additive et/ou multiplicative sont généralement représentées par des flèches avec un symbole « $+$ » ou « $\times$ », le coefficient de proportionnalité par une flèche avec « $\times a$ » qui « fait passer » d'une grandeur à l'autre, le passage à l'unité est exprimé en ajoutant, le cas échéant, une ligne ou une colonne avec la valeur pour « un ». Un tableau de proportionnalité ne donne pas la réponse à la

[1] **Référence :**

[simard2012] Simard A., « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », Petit x, n° 89, 2012, 51-63 recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est une schématisation mais pas une technique de résolution.

Remarque :

Lorsque l'élève considère l'utilisation d'un tableau comme une technique de résolution, il peut être amené à conclure que tout tableau à double entrée est un tableau de proportionnalité (ce qui est une erreur fréquente).

Finalement il semble important de faire le point sur trois procédures particulières : « le passage à l'unité », « la règle de trois » et « le produit en croix ». Pour cela on se donne un exemple de situation tiré de la partie 3.C. du sujet du Groupement 2 du CRPE 2014.

Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

La procédure de *passage à l'unité* consiste à chercher le nombre d'œufs pour 1 personne puis à multiplier ce résultat par 20 pour répondre à la question. Dans cet exemple, s'il faut 6 œufs pour 8 personnes, il faut $6 : 8 = 0{,}75$ œuf par personne, et donc $0{,}75 \times 20 = 15$ oeufs pour 20 personnes.

Remarque :

- *Dans cette procédure, le premier calcul est une division, le second est une multiplication. Le résultat de la division peut être entier, décimal ou rationnel non décimal… ce qui représente une difficulté selon le niveau de l'élève,*
- *si le résultat de cette division est non décimal, l'utilisation d'une valeur approchée peut donner un résultat final approximatif et faux (par exemple : pour 3 personnes il faut 2 œufs, donc pour une personne il faut* $2 : 3 \approx 0{,}66$ *œufs donc pour 30 personnes il faut* $0{,}66 \times 30 = 19{,}8$ *œufs… au lieu de 20 œufs),*
- *le résultat de la division peut être difficile à re-contextualiser 0,75 œuf par personne n'a pas beaucoup de sens dans la réalité.*

La procédure de *la règle de trois* consiste à répondre à la question en trois temps sans faire de calculs intermédiaires.

S'il faut 6 œufs pour 8 personnes
alors il faut huit fois moins, donc $\frac{6}{8}$ œufs pour une personne
et il faut vingt fois plus, soit $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ œufs pour 20 personnes.

Remarque sur le calcul du résultat :

- *Dans cette procédure, le premier calcul est une multiplication, le second est une division,*
- *le résultat de la multiplication* 20×6 *n'a aucun sens vis à vis du contexte de l'énoncé,*
- *l'utilisation de l'égalité* $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times 6}{8}$ *fait appel à une propriété du calcul fractionnaire,*
- *le fait de « multiplier puis diviser » peut donner des calculs plus simples que « diviser puis multiplier » (dans l'exemple cité* $\frac{20\times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ *est une suite de calculs dans les entiers, alors que le calcul* $20 \times \frac{6}{8} = 20 \times 0{,}75 = 15$ *nécessite un passage dans les décimaux).*

La procédure du *produit en croix* est vue au collège (programme de la classe de quatrième). Cette procédure consiste à ranger les valeurs en jeu dans un tableau (de proportionnalité) et à faire un calcul (multiplication puis division ou division puis multiplication).

$20 \times 6 : 8 = 15$

8	6
20	?

Remarque :

Il s'agit d'une procédure dé-contextualisée et purement technique qui masque le sens de la notion de proportionnalité. Cette procédure ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire.

GROUPEMENT 1 – avril 2015

PREMIERE PARTIE

Dans ce problème on propose de démontrer une formule peu connue pour calculer les aires des polygones de Pick, c'est-à-dire dont les sommets sont construits sur des réseaux pointés à maille carrée et sont non alignés.

PARTIE A - Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

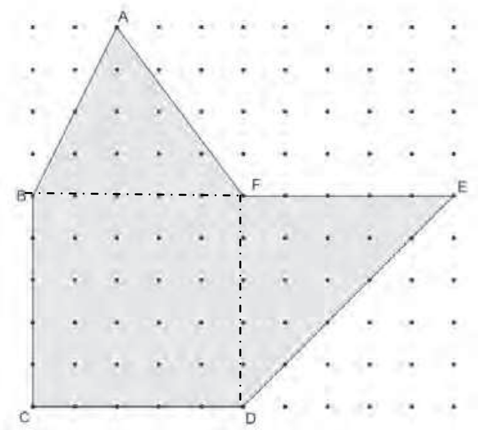
Calcul de l'aire de ABCDEF par des méthodes usuelles

Méthodes 1 : par mise en évidence de surfaces de référence

Différentes méthodes utilisant des surfaces de référence sont envisageables : nous en présentons trois.

Méthode 1.1. : par décomposition du polygone en un carré et deux triangles

En utilisant la propriété d'additivité des aires, l'aire du polygone ABCDEF est la somme de l'aire du carré BFDC et de l'aire des deux triangles DFE et ABF.



L'aire de ces différentes figures composant ABCDEF peut se calculer à l'aide de la formule donnant l'aire d'un carré (carré de la longueur du côté) et celle donnant l'aire d'un triangle (produit de la demi-hauteur par la base) :

- aire (BFDC) = BF^2 ;
- aire (DFE) = $\frac{DF \times FE}{2}$;
- aire (ABF) = $\frac{BF \times AH}{2}$ avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF ;

Ainsi, aire (ABCDEF)= aire(BFDC) + aire(DFE) + aire(ABF) = $(5 \text{ u. l.})^2 + \frac{5 \text{ u.l.} \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2}$

= (25 + 12,5 +10) u.a. = 47,5 u.a.

Méthode 1.2. : décomposition du polygone en un trapèze et un triangle

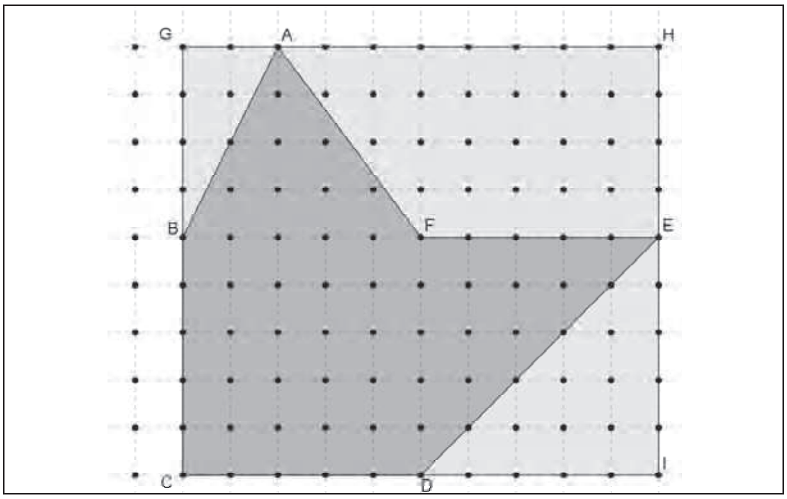
On reprend la méthode précédente : le polygone ABCDED est composé du trapèze BCDE et du triangle ABF (avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF).

aire(ABCDEF) = aire(BCDE)+ aire(ABF) = $\frac{(BE+CD) \times BC}{2} + \frac{BF \times AH}{2} = \frac{(10 \text{ u.l.} + 5 \text{ u.l.}) \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2}$

aire(ABCDEF) = $(37{,}5 + 10) \text{u. a.} = 47{,}5 \text{ u. a.}$

Méthode 1.3. : une méthode par complémentation

En utilisant la propriété d'additivité des aires, avec les notations de la figure ci-après, l'aire du polygone ABCDEF est la différence de l'aire du rectangle CGHI et de la somme des aires des deux triangles BGA et DEI, et du trapèze AHEF.



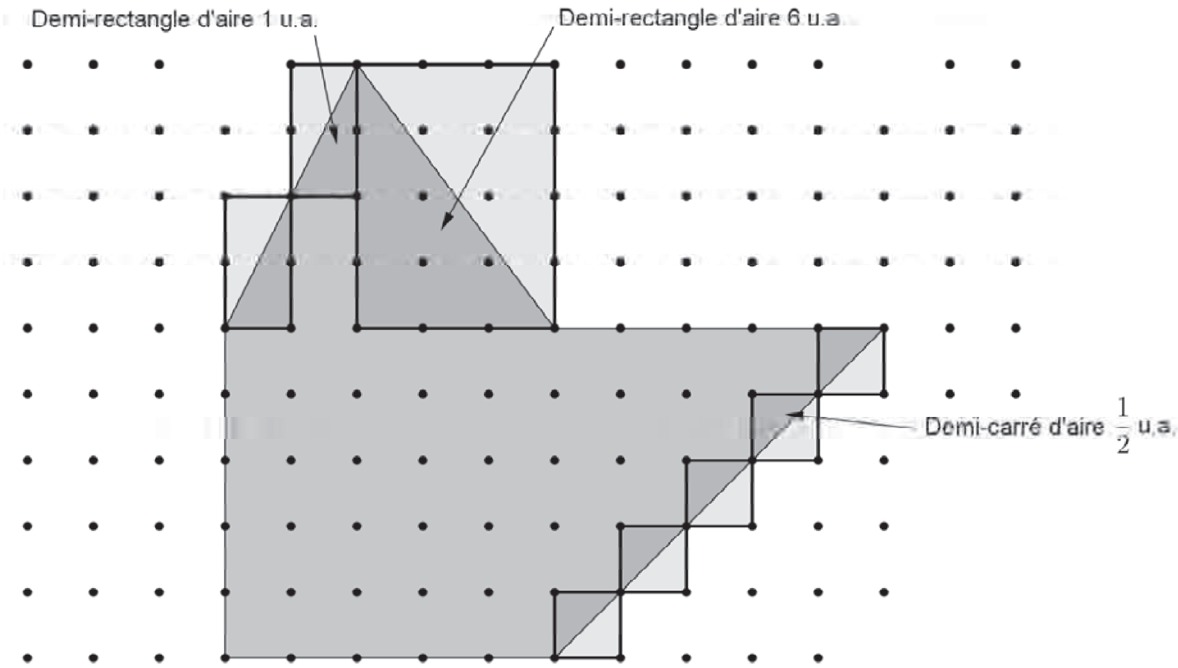
aire (ABCDEF) = aire(CGHI) - aire(BGA) - aire(DEI) - aire(AHEF)

$$= \mathrm{CG} \times \mathrm{GH} - \frac{\mathrm{BG}\times\mathrm{GA}}{2} - \frac{\mathrm{DI}\times\mathrm{IE}}{2} - \frac{(\mathrm{AH}+\mathrm{FE})\times\mathrm{HE}}{2}$$

$$= \left(9 \times 10 - \frac{4\times2}{2} - \frac{5\times5}{2} - \frac{(8+5)\times4}{2}\right) \text{ u.a.} = 47{,}5 \text{ u.a.}$$

Méthode 2 : par pavage par des surfaces unités

On peut paver le polygone avec des carrés de côté 1 u.l. (d'aire 1 u.a), des triangles « demi-carrés » et des triangles « demi-rectangles » comme suggéré par la figure ci-après :



Par pavage, avec les notations de la figure ci-dessus, on obtient :

aire (ABCDEF) = 2×1 u. a. + 6 u. a. +$5 \times 0{,}5$ u. a. +37 u. a = 47,5 u. a.

PARTIE B - Utilisation de la formule de Pick sur des exemples

1) En appliquant la formule de Pick au polygone ABCDEF

On dénombre sur la figure : $i = 37$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDEF) et $b = 23$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick, on obtient :

$$\text{aire(ABCDEF)} = \left(37 + \frac{23}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (37 + 11{,}5 - 1) \text{ u. a.} = 47{,}5 \text{ u. a.}$$

On retrouve la valeur obtenue pour l'aire de ABCDEF dans la question A.

2) En appliquant la formule aux polygones ABCDF et DEF

Pour le pentagone ABCDF, on dénombre sur la figure : $i = 27$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDF) et $b = 18$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone ABCDF).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick , on obtient pour ABCDF :

$$\text{aire(ABCDF)} = \left(27 + \frac{18}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (27 + 9 - 1) \text{ u. a.} = 35 \text{ u. a.}$$

Pour le triangle DEF, on dénombre sur la figure : $i = 6$ et $b = 15$.
En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick donnée, on obtient pour DEF :

$$\text{aire(DEF)} = \left(6 + \frac{15}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (6 + 7{,}5 - 1) \text{ u. a.} = 12{,}5 \text{ u. a.}$$

Ainsi,

- aire (ABCDF) + aire (DEF) = 35 u.a. + 12,5 u.a. = 47,5 u.a. ;
- aire (ABCDEF) = 47,5 u.a. (question B1) ;

La somme des résultats obtenus est bien égale au résultat trouvé à la question B1.

Remarque :
La propriété d'additivité est à considérer avec prudence : en réunissant ces surfaces pour recomposer ABCDEF, les aires sont additionnées mais ce n'est pas le cas pour le nombre de points intérieurs, ni pour le nombre de points sur le bord.

PARTIE C - Quelques conséquences de la formule de Pick

On admet dans cette partie que la formule de Pick est valide et on étudie quelques propriétés des polygones de Pick d'aire donnée.

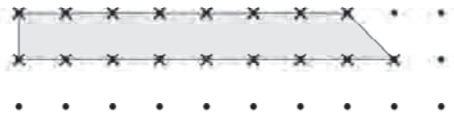
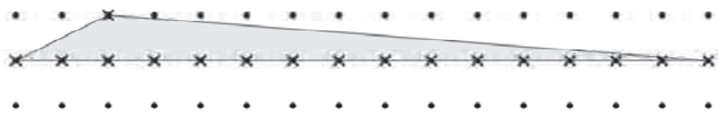
1) Preuve de l'inexistence d'un polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

Si b est pair, $\frac{b}{2}$ est un nombre entier donc $i + \frac{b}{2} - 1$ est une somme de nombres entiers donc est un nombre entier, et ne peut donc pas être égal à 7,5.

Il n'existe donc pas de polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

2) Valeur maximale du nombre *b* pour un polygone de Pick d'aire 7,5 :

Avec les notations précédentes, on a :
$A = i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5$ soit $b = 2\,(7{,}5 + 1 - i) = 17 - 2\,i$.
Comme i est un nombre entier, i est positif ou nul, donc $b = 17 - 2\,i$ est au plus égal à 17 : 17 est donc un majorant de b.
De plus, les surfaces ci-après, d'aire 7,5 u.a., et pour lesquelles $b = 17$, réalisent ce cas : 17 est donc bien la valeur maximale que peut prendre b.

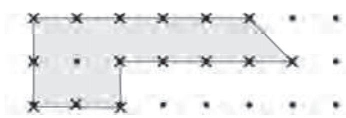



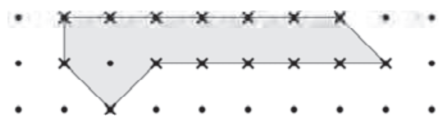
Remarque :
Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

3) Polygones de Pick d'aire 7,5 u.a. contenant un seul point intérieur

Avec les notations précédentes, si A = 7,5 et i = 1, on obtient : b = 2 (7,5 + 1 – i) = 15.

Les figures ci-dessous sont des exemples de polygones de Pick vérifiant ces conditions.





Remarque :
Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

4) Nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick dont l'aire est donnée

Soit un polygone de Pick d'aire A u.a.. La formule de Pick est : $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

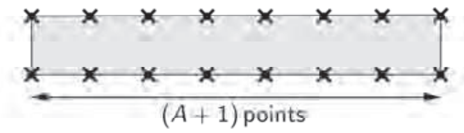
Le nombre de points du réseau sur le bord du polygone est : b = 2 (A + 1 – i) = 2A + 2 – 2i.

Comme i (nombre entier de points intérieurs) est positif ou nul, b est majoré par 2A + 2 : le nombre de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. est donc majoré par 2A + 2.

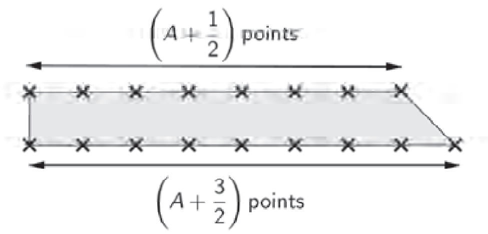
Il reste à justifier qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points sur le bord est 2A + 2 ; pour cela, il suffit de montrer qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points intérieurs est nul (c'est-à-dire pour lequel i = 0).

Le nombre A est *a priori* un nombre positif (pas nécessairement entier). Cependant, la formule de Pick (admise) montre qu'il y a en fait deux cas possibles pour la nature du nombre de A, en fonction de la parité du nombre b (qui lui désigne le nombre de points du bord, et est donc nécessairement un nombre entier) :

- cas où b est pair : A est alors un nombre entier ; le rectangle ci-dessous, de dimensions 1 u.l. et A u.l., convient (la mesure de son aire est A, il n'a aucun point intérieur, et $2(A+1) = 2A+2$ points sur son bord) :



- cas où b est impair : A est alors un nombre de la forme $+ \frac{1}{2}$, où N est un entier, et le trapèze ci-dessous, de dimensions $\left(A - \frac{1}{2}\right)$ u. l. et $\left(A + \frac{1}{2}\right)$ u. l. convient (la mesure de son aire est $A = \left(A - \frac{1}{2}\right) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$, il n'a aucun point intérieur, et $2(A+1) = 2A+2$ points sur son bord) :



Donc il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire donnée sans point intérieur (i = 0). **Le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée est donc bien 2A+2.**

PARTIE D - Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

1) a) Expression de b en fonction de L et l

Le nombre de points du réseau sur chacun des côtés de longueur L du rectangle est $L + 1$ et sur chacun des côtés de largeur l du rectangle est $l + 1$.
Le nombre total de points du réseau sur le bord du rectangle est :
$\boldsymbol{b} = 2(L + 1) + 2(l + 1) - 4 = \boldsymbol{2L + 2l}$.
On a retiré 4 pour ne pas compter deux fois les quatre sommets du rectangle.

Autres méthodes :

* On a $L + 1$ points pour chacun des côtés de longueur L et il reste à ajouter les points « intérieurs » des côtés de largeur l, soit $l - 1$ points car les extrémités ont déjà été comptées, soit :

$$2 \times (L+1) + 2(l-1) = 2L + 2l$$

* On dénombre en parcourant le bord du rectangle, côté par coté : L points pour la première longueur sans compter la deuxième extrémité qu'on va compter en parcourant la première largeur, l points pour la première largeur et etc ; on arrive à : $L + l + L + l = 2(L + l)$

1) b)Expression de i en fonction de L et l :

Le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle peut être calculé de différentes manières :

- en considérant directement le rectangle intérieur :

$$i = (L-1) \times (l-1) = L \times l - L - l + 1$$

- en considérant le grand rectangle et en utilisant l'expression de b :

$$i = (L+1) \times (l+1) - b = L \times l + L + l + 1 - 2L - 2l = L \times l - L - l + 1.$$

2) Preuve de la formule de Pick pour un rectangle de Pick dont les côtés sont parallèles au réseau :

D'après la formule de Pick, en remplaçant i et b par les expressions établies ci-dessus, on obtient :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (L \times l - L - l + 1) + \frac{2L+2l}{2} - 1 = L \times l - L - l + 1 + L + l - 1 = L \times l.$$

Ainsi, la formule de Pick appliquée un rectangle de Pick aux côtés parallèles au réseau, donne bien la formule de l'aire du rectangle.

Remarques complémentaires :
On utilise dans ce problème deux grandes méthodes de calcul d'aire :

- *la méthode sur les décompositions-recompositions d'aires, s'appuyant sur la propriété d'additivité ;*
- *la méthode utilisant les formules de calcul des aires de figures de référence (triangle, parallélogramme, trapèze…).*

On rappelle ici qu'il existe une autre méthode, reposant sur les propriétés des transformations géométriques du plan (conservation des aires pour les isométries, multiplication par le carré du rapport d'agrandissement ou de réduction) .

Par ailleurs, sur les aires, on pourra lire les articles suivants, accessibles sur la toile :

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (1984-1985) *Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie*. Petit x. n° 6 et n° 8. IREM de Grenoble.
PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989-1990) *L'aire et la mesure.* Petit x. n° 24. IREM de Grenoble.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

Remarque préliminaire :
L'énoncé semble considérer que « positif » est à interpréter comme « strictement positif ». C'est une convention peu habituelle, mais nous la respectons pour la cohérence du sujet et du corrigé.

Dans cet exercice, il s'agit de trouver deux nombres entiers positifs A et B satisfaisant trois contraintes :
- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- A – B est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Deux de ces contraintes portent sur un des deux nombres A et B et la troisième sur une relation entre les deux nombres A et B.

La première contrainte porte sur A qui doit être un diviseur de 111.
La décomposition en produit de nombres premiers de 111 est : $111 = 3 \times 37$.
Les diviseurs de 111, donc les valeurs possibles pour A, sont : 1 ; 3 ; 37 ; 111.

La troisième contrainte concerne B. La liste des nombres satisfaisant cette contrainte est :
$1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; etc.

La deuxième contrainte a les conséquences suivantes :
A – B est un nombre positif ou nul, donc A est supérieur ou égal à B.
Comme A est un diviseur de 111, A est inférieur ou égal à 111, donc B est le cube d'un nombre entier, et est inférieur à 111.
Ceci permet de restreindre les valeurs possibles pour B : 1 ; 8 ; 27 ; 64.

A – B est divisible par 10. Donc $A - B = 10 \times k$, où k est un entier positif ou nul.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs possibles de la différence « A – B », correspondant aux valeurs de A données en colonnes et à celles de B données en ligne.

B \ A	**1**	**3**	**37**	**111**
1	**0**	2	36	**110**
8	-	-	29	103
27	-	-	**10**	84
64	-	-	-	47

Il fait apparaître trois nombres multiples de dix : 0, 10 et 110, donc les seules réponses possibles au problème sont : **A = 1 et B = 1 ; A = 37 et B = 27 ; A = 111 et B = 1.**
Le tableau a été construit de manière à satisfaire la contrainte sur A en première ligne, sur B en première colonne et sur A – B en sélectionnant les seules cases multiples de 10. Donc ces trois couples sont bien les seules solutions du problème.

EXERCICE 2

Les informations à utiliser pour répondre aux différentes questions sont données par le graphique présentant un segment de droite qui représente le volume de glace (en litre) en ordonnée, en fonction du volume d'eau liquide (en litre) en abscisse. Dans les deux cas, l'intervalle entre deux graduations entières successives correspond à un litre.

1) Volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide

Une lecture directe permet de déterminer ce nombre qui correspond à l'ordonnée du point du segment d'abscisse 7, c'est-à-dire environ 7,5.
Avec 7 litres d'eau liquide, on obtient environ 7,5 litres de glace.

2) Volume d'eau liquide à mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace

Une lecture directe permet de déterminer ce nombre qui correspond à l'abscisse du point du segment d'ordonnée 9. Cette abscisse est comprise entre 8,1 et 8,5.
Il faut entre 8,1 et 8,5 litres d'eau liquide pour obtenir 9 litres de glace.

3) Caractérisation de la relation entre le volume de glace et le volume d'eau liquide

La représentation graphique de la fonction qui associe le volume de glace au volume d'eau liquide, sur l'intervalle [0 ; 11,5] est un segment porté par une droite qui passe par le point O (0 ; 0). Elle correspond à la représentation graphique d'une fonction linéaire, ce qui caractérise une relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs.
Le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4) Calcul du pourcentage d'augmentation du volume d'eau lorsqu'il gèle

Méthode 1 :

On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace.
Pour 10 litres d'eau liquide, l'augmentation de volume en gelant est : 0,8 litre. L'augmentation de volume est proportionnelle au volume initial donc pour 100 litres d'eau liquide, l'augmentation de volume en gelant sera : 8 litres, soit **8 % d'augmentation** (on a utilisé implicitement ici la propriété suivante : si b est proportionnel à a, alors $b - a$ est proportionnel à a ; b désigne ici le volume de glace, et a le volume d'eau liquide.)

Méthode 2 :

Le pourcentage d'augmentation est $\frac{10{,}8-10}{10} = \frac{0{,}8}{10}$ = **8 %,** ce qui correspond à un coefficient multiplicatif de 1,08.

Méthode 3 :

Le coefficient de proportionnalité entre le volume d'eau liquide et le volume de glace est $\frac{10{,}8}{10}$ = 1,08 = 1 + 0,08, ce qui traduit **une augmentation de 8 % du volume** au cours du changement d'état.

5) Volume de glace correspondant au volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage

Remarque :
On admet que dire que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace permet d'affirmer que 10,8 litres de glace donnent 10 litres d'eau en fondant.

Quantité d'eau liquide, en mètre cube, fournie en 30 jours par la ville de Lyon : 20 m^3 × 30 = 600 m^3.

Quantité d'eau liquide, en litre, fournie en 30 jours par la ville de Lyon : l'utilisation des relations 1 m^3 = 1 000 dm^3 et 1 dm^3 = 1 L permet de déterminer la quantité d'eau, en litre, fournie en 30 jours par la ville de Lyon. En effet, 600 m^3 = 600 000 dm^3 = 600 000 L.

En utilisant le coefficient multiplicatif précédent, cette quantité d'eau liquide correspond à :
600 000 L × 1,08 = **648 000 L de glace**.

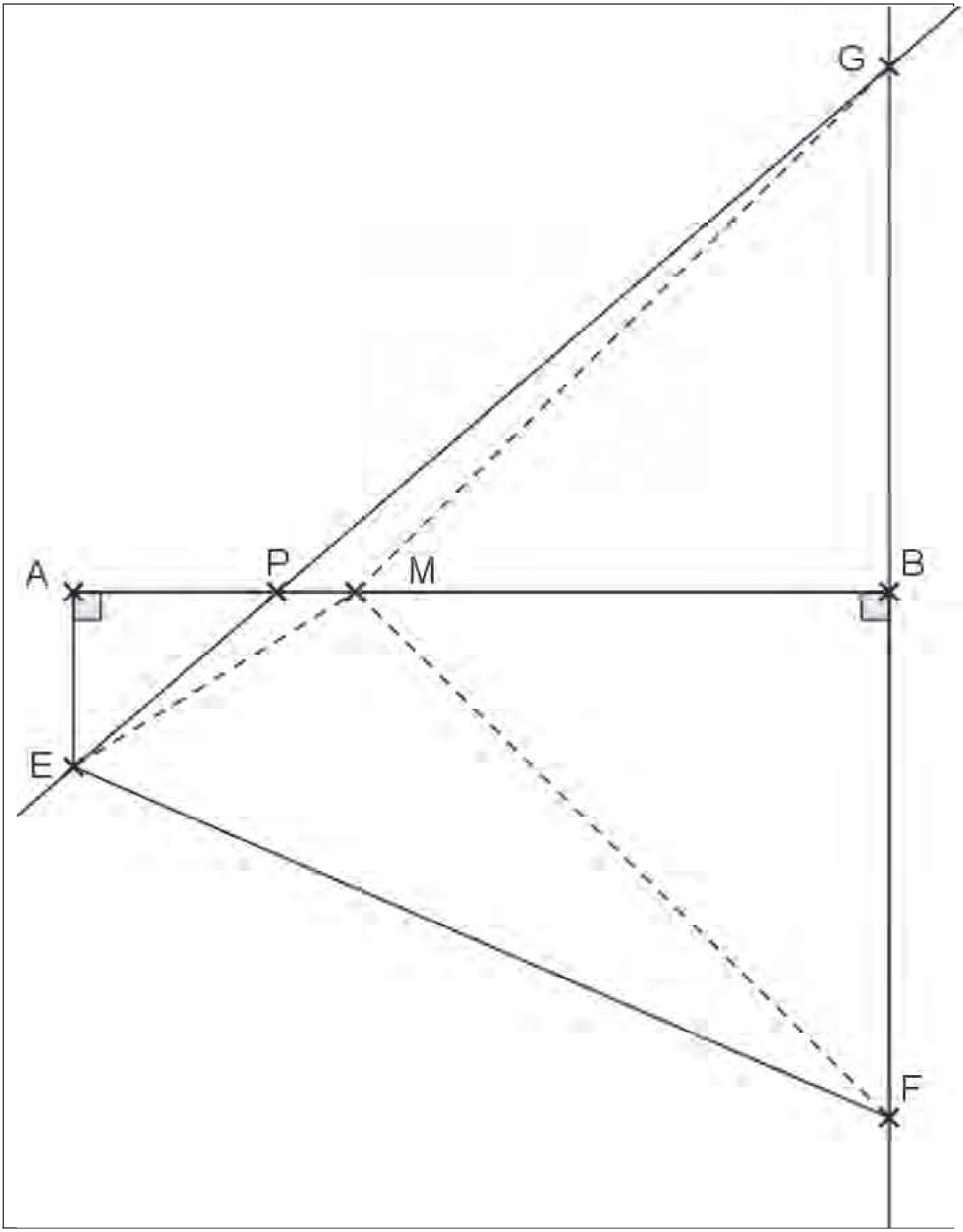
Autre méthode :

600 000 L = 60 000 × 10 L ; or 10 L d'eau liquide donnent 10,8 L de glace, donc 600 000 L donnent 60 000 × 10,8 L de glace soit **648 000 L de glace**.

EXERCICE 3

Remarque préliminaire :
En cohérence avec l'énoncé, la notation AB désigne dans ce corrigé la mesure en cm de la longueur du segment AB.

1) Construction du trapèze rectangle ABFE respectant les contraintes de l'énoncé et du point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).



2) EM + MG ≥ EP + PG

On appelle P le point d'intersection des droites (AB) et (EG).
Pour tout point M, EM + MG ≥ EG (il s'agit de l'inégalité triangulaire) et, en admettant que P est un point du segment [EG], EG = EP + PG.
Donc pour tout point M, **EM + MG ≥ EP + PG**

Valeur minimale de EM + MF

G est le symétrique du point F par rapport à la droite (AB) donc (AB) est la médiatrice du segment [GF].
M, point de [AB], est donc équidistant de G et F : MF = MG.
Donc EM + MF = EM + MG et EM + MG ≥ EP + PG (d'après le résultat précédent), on en déduit : **EM + MF ≥ EP + PG**
Cette inégalité traduit le fait que **la valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P** (point de [AB])**.**

3) a) Preuve de l'égalité $\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{14-AP}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}$

Méthode 1 : en utilisant le théorème de Thalès

Les points A, P et B sont alignés ainsi que les points E, P et G. Les droites (AE) et (BG) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AB)).
D'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\frac{\text{AP}}{\text{BP}} = \frac{\text{AE}}{\text{BG}}$.

- Comme P est un point du segment [AB], BP = BA – AP avec BA = 14 donc BP = 14 – AP .
- AE = 3
- Comme G est le symétrique de F par rapport à (AB) et comme (FB) perpendiculaire à (AB), B est le milieu de [FG] et BG = BF = 9.

On obtient : $\frac{\text{AP}}{14-\text{AP}} = \frac{3}{9}$.

Méthode 2 : en considérant des angles

- Montrons que l'angle $\widehat{\text{BFP}}$ est égal à l'angle $\widehat{\text{BGP}}$.
  P est un point de (AB) et G est le symétrique de F par rapport à (AB).
  Le triangle BPG est donc le symétrique du triangle BPF par rapport à la droite (AB).
  La symétrie axiale conserve les angles donc l'angle $\widehat{\text{BFP}}$ est égal à l'angle $\widehat{\text{BGP}}$.

- Montrons que l'angle $\widehat{\text{BGP}}$ est égal à l'angle $\widehat{\text{AEP}}$:
  (AE) et (GF) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (AB) ; (GE) est sécante à ces deux droites parallèles donc l'angle $\widehat{\text{BGP}}$ est égal à l'angle $\widehat{\text{AEP}}$ (angles alternes-internes).

Ainsi l'angle $\widehat{\text{BFP}}$ est égal à l'angle $\widehat{\text{AEP}}$.
Or, dans le triangle BFP rectangle en B, tan $\widehat{\text{BFP}} = \frac{\text{BP}}{\text{BF}}$,
et dans le triangle AEP rectangle en A, tan $\widehat{\text{AEP}} = \frac{\text{AP}}{\text{AE}}$.

Les angles $\widehat{\text{BFP}}$ et $\widehat{\text{AEP}}$ étant égaux, $\frac{\text{AP}}{\text{AE}} = \frac{\text{BP}}{\text{BF}}$, soit encore $\frac{\text{AP}}{\text{BP}} = \frac{\text{AE}}{\text{BF}}$.

Comme P est un point du segment [AB], BP = BA – AP avec BA = 14 donc BP = 14 – AP .
Ainsi, $\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{14-AP}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}$.

3) b) Calcul de AP

$$\frac{\text{AP}}{14 - \text{AP}} = \frac{3}{9}$$
9 AP = 3 × (14 – AP)
9 AP = 42 – 3 AP
12 AP = 42
AP = $\frac{7}{2}$
AP = 3,5

4) Valeur minimale de EM + MF.

La valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.

Méthode 1 : calcul de EP + PF.

Dans le triangle PAE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$EP^2 = AP^2 + AE^2 = 3{,}5^2 + 3^2 = 12{,}25 + 9 = 21{,}25$

Dans le triangle PBF rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
$PF^2 = BP^2 + BF^2$ avec $BP = AB - AP = 14 - 3{,}5 = 10{,}5$

$PF^2 = (10{,}5)^2 + 9^2 = 110{,}25 + 81 = 191{,}25$

$EP + PF = \sqrt{21{,}25} + \sqrt{191{,}25}$ $(= 0{,}5\sqrt{85} + 1{,}5\sqrt{85} = 2\sqrt{85})$

La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{21{,}25} + \sqrt{191{,}25}$ ou $2\sqrt{85}$ (il n'y a pas nécessité mathématique de simplifier l'écriture : c'est davantage un usage).

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4

Méthode 2 : EP + PF = EG : calcul de EG.

Soit H le point de (GF) tel que EHG soit un triangle rectangle en H (ou H projeté orthogonal de E sur (GF)).
Dans le triangle EHG rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$EG^2 = HE^2 + HG^2$
avec
HE = AB car AEHB est un rectangle (quadrilatère dont trois des angles sont des angles droits)
HG = HB + BG car B est un point de [GH]
et BH = AE car AEHB est un rectangle.
$EG^2 = 14^2 + (3 + 9)^2 = EG^2 = 14^2 + 12^2 = EG^2 = 196 + 144 = EG^2 = 340$
$EG = \sqrt{340}$ $(= 2\sqrt{85})$
La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{340}$ $\left(= 2\sqrt{85}\right)$.

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4.

TROISIEME PARTIE

SITUATION 1

1) Comparaison de la présentation et des tâches demandées dans les deux questions, afin de proposer trois raisons plausibles de la différence de réussite d'une question à l'autre que l'on peut observer chez un élève.

On peut comparer les deux énoncés selon différents critères. Nous nous intéressons d'abord au support, puis aux tâches prescrites.
On peut relever plusieurs différences entre les deux supports, et ces différences ont des impacts sur la réalisation de la tâche demandée.

Comparaison des informations données sur les supports

- Dans l'exercice 2, une demi-droite graduée en dixièmes et centièmes est donnée sur papier blanc. Le nombre 0 est associé à l'origine de la demi-droite, et les nombres 0 et 1 sont les seules abscisses écrites. L'unité est donc clairement visible.
- Dans l'exercice 3, une droite graduée en dixièmes est donnée sur papier millimétré. Le papier millimétré permet de graduer la droite en centièmes, mais les graduations ne sont pas explicitement marquées. De plus, seules les abscisses 3 et 4 sont données sur la droite, et c'est à partir de cette seule donnée qu'il faut inférer l'amplitude des intervalles correspondant respectivement à une unité, un dixième, et un centième (d'autant que 0 et 1 ne peuvent pas être placés sur le support proposé).
- Enfin, pour chacun des entiers 3 et 4, une autre désignation sous forme de fraction décimale est donnée ($\frac{30}{10}$ et $\frac{400}{100}$), ce qui suggère qu'une même graduation peut être codée par différentes désignations.

Comparaison des tâches prescrites aux élèves

Dans l'exercice 2, les élèves doivent associer des écritures fractionnaires à des repères marqués par une lettre, tandis que dans l'exercice 3, les élèves doivent reproduire le support sur papier millimétré (ils peuvent donc ensuite travailler avec un support erroné), puis déterminer l'emplacement de points dont les abscisses sont données par différentes écritures (décrites ci-après).

Comparaison des procédures à mettre en œuvre

- Dans l'exercice 2, cinq nombres écrits en fractions décimales, sont à placer, et il y a exactement cinq repères sur la droite graduée. Les emplacements des nombres sont indiqués par des flèches. La procédure qui consiste à ranger les fractions données par ordre croissant, permet ensuite d'associer cette liste ordonnée aux lettres ordonnées pour répondre correctement à l'exercice. Or comme toutes les écritures fractionnaires ont le même dénominateur 100, il suffit de ranger les numérateurs, donc des nombres entiers, par ordre croissant, pour ranger les fractions et ensuite placer correctement les fractions sur la droite.
  Pour ce même exercice, l'unité est subdivisée en centièmes de manière explicite, alors que toutes les fractions demandées sont exprimées en centièmes, et 0 est placé sur le segment. Une autre procédure est donc possible : à partir du moment où l'on sait ce qu'est le centième d'une unité, il suffit de compter les « petits intervalles » (de 1 en 1 ou de 10 en 10) pour placer correctement les nombres.
- Dans l'exercice 3, en revanche, il faut placer correctement les huit nombres sur la droite, sans indication *a priori* sur leurs emplacements. En particulier, les ranger par ordre croissant ne suffit pas pour résoudre l'exercice. On peut cependant remarquer que pour les deux premiers nombres à placer, les écritures proposées sont d'autres désignations de nombres déjà placés : elles peuvent constituer de nouveaux repères pour placer les six nombres suivants. Par ailleurs, différentes écritures cohabitent : fractions décimales dont les dénominateurs sont 10 ou 100, écritures à virgule. Pour réussir l'exercice, des conversions entre certaines de ces écritures sont nécessaires.

2) Définition d'un nombre décimal que l'on peut donner à l'école primaire

Remarque préliminaire :
Dans la suite, « fraction » est utilisé pour désigner une écriture d'un nombre rationnel ; il arrive aussi que « fraction » fasse référence à un nombre.

A l'école primaire, les nombres décimaux sont introduits après avoir rencontré des cas particuliers de fractions : les fractions décimales. On pourrait donc les définir comme des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale (c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000,…) ou sous la forme d'une somme d'un entier et de fractions décimales.

Néanmoins, on peut penser qu'à l'école, il n'est pas nécessaire de donner une définition formelle d'un nombre décimal, mais que l'on peut se contenter de définitions fonctionnelles, à partir d'exemples génériques.
Par exemple : $\frac{5}{10}$; $\frac{5}{10}+\frac{3}{100}$; $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}=3+\frac{5}{10}$; 4 sont des nombres décimaux.

Remarque :
Pour les nombres décimaux, on introduit à l'école primaire une écriture plus concise que les écritures fractionnaires : l'écriture à virgule (expression utilisée ici comme synonyme d'écriture décimale). Les nombres décimaux, sont, parmi les nombres réels, les nombres qui admettent une écriture à virgule finie. Néanmoins, à l'école, on ne s'interroge pas encore sur le caractère éventuellement infini d'une écriture à virgule. Utiliser ce critère comme définition d'un nombre décimal ne paraît donc pas pertinent à ce stade de l'apprentissage.

SITUATION 2

1) Analyse de la copie de Lara : ses erreurs, avec pour chacune une origine possible

Lara commet deux types d'erreurs.

- Elle se trompe dans la conversion des décompositions additives canoniques en une seule fraction. Elle obtient en effet dans les deux cas une fraction dont le dénominateur est 1000 alors qu'il devrait être égal à 100 :
  $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}=\frac{252}{100}$ et non $\frac{252}{1000}$, et $2+\frac{6}{10}+\frac{1}{100}=\frac{261}{100}$ et non $\frac{261}{1000}$.
  Proposer une origine possible pour cette erreur à partir de cette seule production est compliqué. Cette élève a peut-être juxtaposé les chiffres 2, 5 et 2 pour former le numérateur ; pour le dénominateur, une tentative de réduction au même dénominateur (10 x 100 = 1 000) paraît très peu plausible (ceci relève du collège) ; il est possible que l'élève ait juxtaposé les zéros de 10 et 100 pour former 1 000.
  On peut éventuellement penser également à une conception erronée qui consisterait à n'écrire que des fractions dont le numérateur est plus petit que le dénominateur, ou aux effets d'un hypothétique entraînement récent, réalisé lors d'autres exercices, où il aurait fallu ajouter trois fractions (en dixièmes, centièmes, millièmes) et donner le résultat en millièmes…
- Après avoir converti correctement les fractions décimales $\frac{252}{1000}$ et $\frac{261}{1000}$ en écritures à virgule, elle se trompe quand elle écrit « 0,252 = 252 » et « 0,261 = 261 » ; ici aussi, il est difficile de proposer une origine plausible sans avoir plus d'éléments. Il est possible que cette élève ait utilisé de manière abusive le signe « = » en ayant en tête que dans la suite, c'est seulement le nombre de millièmes qui sera utile pour la comparaison entre les deux nombres.

Remarque :
Nous avons supposé que l'élève a utilisé le signe « = » entre les différentes écritures, même si parfois on peut se demander si ce n'est pas le signe « : » qu'elle utiliserait pour articuler deux expressions.

2) Analyse de la copie de Clément : une compétence dans le domaine de la numération qui semble acquise par cet élève

Clément semble savoir passer de la décomposition additive canonique d'un nombre (en unités, dixièmes, centièmes) à l'écriture à virgule de ce nombre (il le fait en tout cas correctement pour les nombres 2,52 et 2,61 : il associe convenablement chaque fraction décimale de la décomposition au rang du chiffre associé dans l'écriture à virgule).

3) Analyse de la copie de Léonie : une règle qui semble implicitement utilisée par cette élève pour comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule

Léonie éprouve le besoin de convertir les décompositions en écritures fractionnaires en écritures à virgule pour effectuer la comparaison des deux nombres. Elle fonde sa réponse sur la comparaison des chiffres des dixièmes des deux nombres (tout en étant consciente que le chiffre des centièmes de 2,52 est plus grand que celui de 2,61).
On peut penser qu'elle utilise implicitement le procédé suivant : 2,61 et 2,52 ont la même partie entière, donc pour les comparer, on compare leurs parties décimales 0,61 et 0,52. Pour cela, on compare les chiffres des dixièmes : 6 est plus grand que 5, donc 2,61 est plus grand que 2,52. Si les deux nombres proposés avaient eu le même chiffre des dixièmes, Léonie aurait ensuite probablement comparé les chiffres des centièmes, etc., autrement dit en considérant les chiffres des différents rangs de gauche à droite.

SITUATION 3

1) Différences entre ces trois problèmes qui relèvent tous de la division

Dans les problèmes P1 et P3, les données sont des grandeurs de même nature (homogènes) ; ces problèmes sont tous les deux des problèmes de *division-quotition* : une grandeur étant donnée, on veut la partager en parts de valeur connue, et on cherche le nombre (entier) de parts que l'on peut faire au maximum :

- avec 150 cL, combien de verres de 8 cL peut-on remplir ? (P1)
- avec 150 élèves, combien de tables de 8 élèves faut-il préparer ? (P3)

Ces deux problèmes peuvent être résolus en effectuant la division euclidienne de 150 par 8 (à savoir : 150 = 8 x 18 + 6). Ils diffèrent cependant dans l'interprétation du quotient et du reste de cette division :

- 150 cL = 18 × 8 cL + 6 cL, donc on peut remplir 18 verres et il restera 6 cL ;
- 150 élèves permettent de former 18 tables de 8 élèves, et 6 élèves seront assis à une dix-neuvième table, donc il faut préparer 19 tables.

Le problème P2 est quant à lui un problème de *division-partition* : une grandeur est donnée (le prix total des CD), et on veut la partager en un nombre (entier) connu de parts identiques ; on cherche la valeur de chacune des parts (qui est une grandeur de même nature que la grandeur donnée, dont la mesure par rapport à l'unité choisie est un nombre réel, pas nécessairement entier, ni même décimal) : on a ajouté 8 fois le même prix pour obtenir 150 € ; quel est ce prix ?
Ce problème peut être résolu en effectuant la division avec quotient décimal de l'entier 150 par l'entier 8, dont l'interprétation est immédiate : 150 € = 8 ×18,75 €.

Remarques
Pour des élèves qui n'ont pas recours spontanément à la division (par exemple car ils se savent fragiles sur l'exécution de la technique posée), la différence entre problèmes de « division-partition » et problèmes de « division-quotition » peut avoir un impact sur la nature des procédures personnelles qui peuvent être mises en œuvre : les problèmes P1 et P3 se prêtent assez naturellement à une résolution par des additions ou soustractions itérées de 8 élèves ou de 8 cL, alors qu'il est peu naturel de résoudre le problème P2 par de telles stratégies.
Toujours pour des élèves qui n'ont pas recours spontanément à la division, la stratégie par encadrement de 150 entre deux multiples consécutifs de 8 (trouvé par exemple en remarquant que 160 = 20 × 8 et 152 = 19 × 8, et en déduisant que 18 × 8 < 150 < 19 × 8) suffit pour répondre aux problèmes P1 et P3 (avec cependant une différence d'interprétation de cette double inégalité) ; en revanche, pour le problème P2, cet encadrement ne suffit pas : il faut trouver le nombre qui, multiplié par 8, donne 150 ; ce nombre est compris entre 18 et 19, mais il reste 6 € à partager en 8 (ou à trouver une écriture multiplicative de 600 avec le nombre 8)).

2) Un ordre dans lequel ces exercices pourraient être proposés aux élèves.

Définir un ordre entre ces exercices dépend de l'objectif que l'on se fixe :

- si les élèves ont jusqu'alors uniquement travaillé avec des divisions euclidiennes et si l'on veut motiver l'introduction d'une nouvelle opération, alors on peut proposer d'abord les problèmes P1 et P3 (pour lesquels une division euclidienne suffit), puis soumettre aux élèves le problème P2, pour lequel le contexte familier de la monnaie pourrait montrer l'insuffisance de la division avec quotient entier, et inciter les élèves à diviser le reste (même si ce problème peut aussi être résolu par une division euclidienne par 8 des 15 000 centimes d'euro).

- si les élèves ont déjà travaillé avec des divisions euclidiennes et décimales (du point de vue sens et calcul), et si on veut travailler sur le choix à faire, face à une situation de la vie courante, entre un traitement par une division euclidienne et un traitement par une division décimale, et sur l'interprétation des résultats de ces opérations, alors on peut proposer les trois problèmes dans l'ordre suivant : P2 (une division décimale permet d'obtenir la réponse, et l'interprétation du quotient est immédiate) ; P1 (il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à un quotient décimal ; une division euclidienne suffit, et il suffit de prendre en compte le quotient pour répondre) ; P3 (il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à un quotient décimal ; une division euclidienne suffit, mais il faut ajouter un au quotient obtenu pour répondre à la question posée).

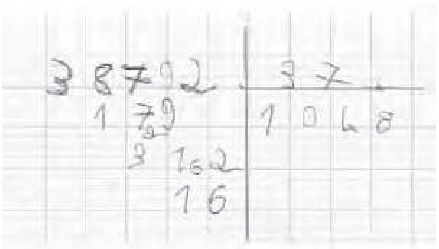
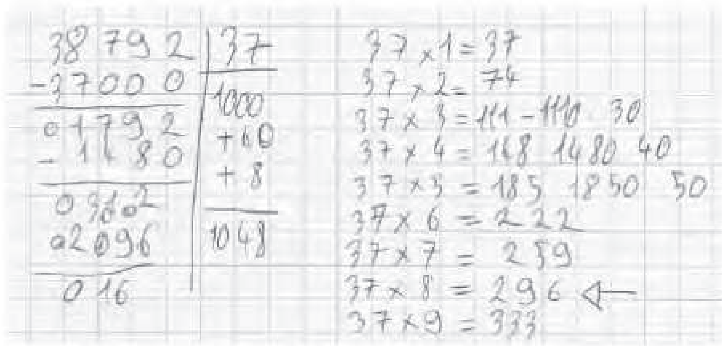
SITUATION 4 : technique opératoire de la division.

Pour faciliter l'analyse des calculs intermédiaires de chacun des élèves, on peut commencer par effectuer la division euclidienne de 38 792 par 37 par une technique posée faisant apparaître les soustractions intermédiaires.

$$
\begin{array}{rccccc|l}
 & 3 & 8 & 7 & 9 & 2 & 37 \\ \cline{7-7}
- & \underline{3} & \underline{7} & & & & 1048 \\
 & & 1 & 7 & 9 & & \\
 & - & \underline{1} & \underline{4} & \underline{8} & & \\
 & & & 3 & {}_{1}1 & {}_{1}2 & \\
 & & - & \underline{2} & \underline{{}_{1}9} & \underline{6} & \\
 & & & & 1 & 6 &
\end{array}
$$

Ainsi, 38 792 = 37 × 1048 + 16

1) Un avantage de chacune des techniques opératoires utilisées respectivement par Adama et Anaïs.

 Adama	 Anaïs

Nous rappelons en introduction un extrait des documents d'accompagnement des programmes de 2002, relatif à la division posée :

« La technique usuelle française, telle qu'elle a été longtemps enseignée, est très dépouillée (pas de soustractions posées) et donc source de nombreuses erreurs. De plus, celles-ci sont difficiles à repérer puisque tous les calculs effectués n'ont pas donné lieu à une trace écrite. Par ailleurs, il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle. Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique… et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul. ».

Technique d'Adama

La technique d'Adama est la technique « dépouillée » évoquée dans l'extrait ci-dessus. Les seules traces dont on dispose ne font pas apparaître de calculs intermédiaires : chacun des chiffres du quotient est déterminé sans calcul écrit (pas de multiplication apparente) ; les soustractions intermédiaires n'apparaissent pas non plus.
S'il fallait trouver un « avantage » à cette technique, on pourrait avancer qu'elle contribue au développement du calcul mental et qu'elle conduit à des traces écrites plus concises.

Technique d'Anaïs

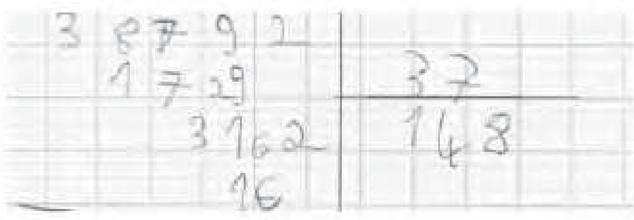
Anaïs laisse des traces de tous ses calculs intermédiaires. Elle commence probablement par construire explicitement le répertoire multiplicatif de 37 entre 37 × 1 et 37 × 9, ce qui lui permet de procéder sans doute ainsi :

- dans 38 000, il y a 37 000, donc 1 000 fois 37 ; elle inscrit 1 000 au quotient et trouve qu'il reste 1 792 (en posant la soustraction 38 792 – 37 000) ;
- ensuite elle situe 1 792 entre 1 480 et 1 850 ; on peut supposer qu'elle a pour cela partiellement complété le répertoire (37 × 30 = 37 × 3 × 10 = 1 110 ; 37 × 40 = 37 × 4 × 10 = 1 480 ; 37 × 50 = 37× 5 × 10 = 1 850) ; elle inscrit 40 au quotient, et trouve qu'il reste 312 (en posant la soustraction 1 792 – 1 480), etc.

Cette technique présente certains avantages :

- une fois le premier répertoire multiplicatif du diviseur construit, il n'y a plus de multiplications à effectuer (hormis des multiplications par 10 ou 100, faciles à exécuter mentalement), ce qui laisse la mémoire disponible pour les autres opérations à effectuer (encadrements, soustractions et addition) ;
- la construction progressive du quotient permet de conserver le sens de la division et de percevoir l'ordre de grandeur atteint à chacune des étapes ; en particulier, avec cette technique, la présence d'un zéro dans l'écriture du quotient n'entraîne pas de difficulté particulière ;
- la présence des traces pour chacune des étapes permet un contrôle plus facile en cas de retour sur la production.

2) Relevé des erreurs faites par Marie et Kévin, avec pour chacune une hypothèse sur son origine.

 Marie	 Kévin

Production de Marie

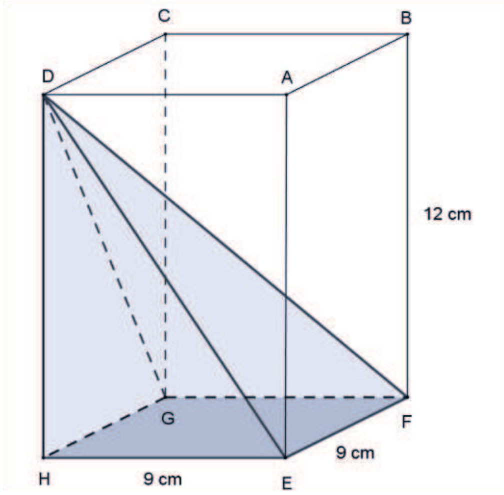
Marie semble avoir voulu utiliser la même technique qu'Adama (les nombres qui apparaissent dans la partie gauche de la potence sont d'ailleurs strictement identiques à ceux qui apparaissent dans la production d'Adama). Son erreur se situe dans l'écriture du quotient, dans laquelle il manque le zéro au rang des centaines : l'ordre de grandeur du quotient obtenu n'est pas correct.
Il est possible qu'elle ait verbalisé sa procédure de la manière suivante, perdant ainsi le sens des différentes étapes du calcul : « dans 38, combien de fois 37 ? Une fois. J'écris 1 au quotient. 37 pour aller à 38 ? 1, que j'écris en dessous du 8. J'abaisse le 7. Dans 17, combien de fois 37 ? Je ne peux pas. J'abaisse le 9. Dans 179, combien de fois 37 ? 4, etc. ». Le « je ne peux pas » ne la conduit pas à placer un zéro dans l'écriture du quotient.

Production de Kévin

Différentes traces de calculs intermédiaires dans la production de Kévin : d'une part les traces des essais et ajustements dans la détermination des chiffres du quotient, avec les résultats des multiplications associées ; d'autre part les soustractions intermédiaires (ainsi que les flèches vers le bas, montrant la succession des étapes dans la prise en compte des chiffres du dividende).
Les trois premiers chiffres du quotient sont corrects (en particulier, les ajustements lors de la détermination du chiffre des dizaines sont pertinents). Il commet une erreur lors de la détermination du chiffre des unités : lors de la division de 312 par 37, il teste 9, obtient 333 qui est supérieur à 312, et en conclut de manière correcte que 9 ne convient pas et est trop grand ; il teste ensuite directement 7, sans essayer 8, et ne remarque pas qu'avec 7, il obtient un reste trop grand ; il ne fait pas de nouvel ajustement.

GROUPEMENT 2 – avril 2015

PREMIERE PARTIE



PARTIE A - Réalisation d'un patron de la pyramide

1) a) Longueurs DE et DG

Toutes les faces du pavé droit sont des rectangles.
[DE] et [DG] sont les diagonales d'un rectangle de 12 cm sur 9 cm. Elles ont la même longueur.
Le triangle DHE est rectangle en H. La longueur DH est 12 cm.
D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle DHE, $DE^2 = HE^2+HD^2 = 9^2+12^2 = 81+144 = 225$ donc DE = 15cm.

On conclut que DE = DG = 15 cm.

1) b) Nature des triangles DGF et DEF

Le triangle DGF est rectangle en G.
Le triangle DEF est rectangle en E.

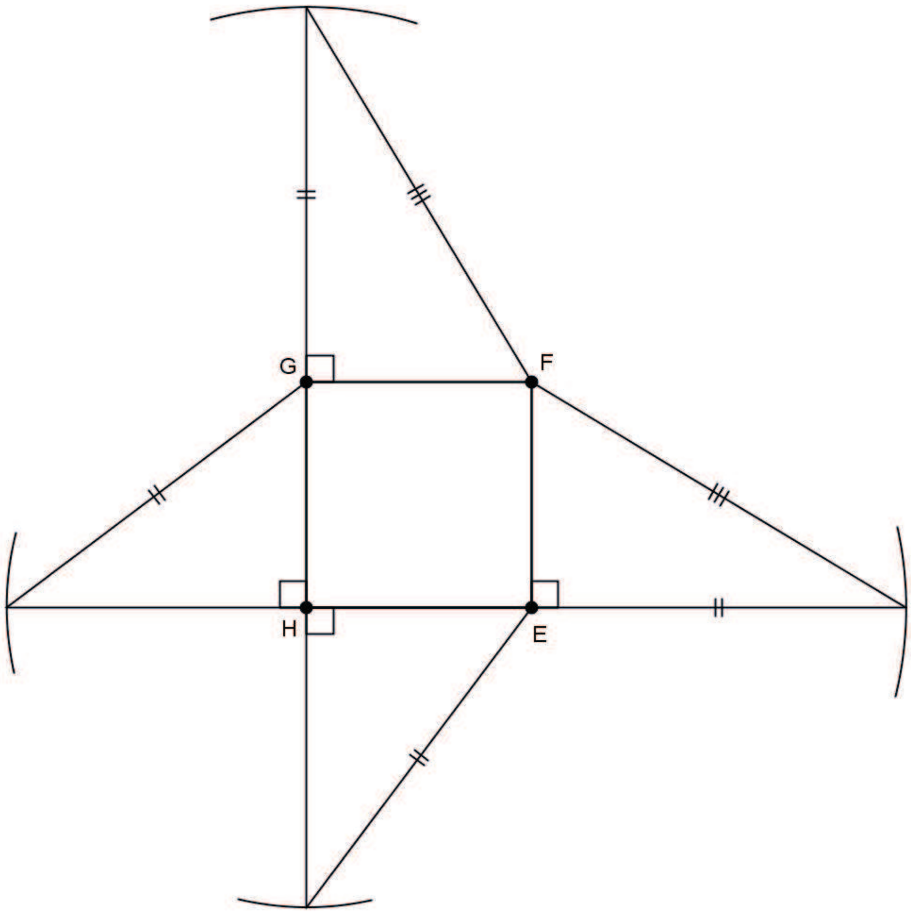
Justification (non demandée) :

Dans le pavé droit, la droite (GF) est orthogonale au plan (DHG) en G, elle est donc perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par G, donc la droite (GF) est perpendiculaire à la droite (DG) : DGF est un triangle rectangle en G. De même, (EF) est orthogonale au plan (DHE) donc la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (DE) et DEF rectangle en E.

2) Tracé du patron à l'échelle 1/3

À l'échelle 1/3, les dimensions du pavé droit sont 3 cm, 3 cm et 4 cm.

Un exemple de patron possible est donné en page suivante.



PARTIE B - Étude d'un cas particulier

JH = 2cm

1) Nature du quadrilatère JKLM

La section est faite parallèlement à la base, donc le quadrilatère JKLM est une réduction du quadrilatère EFGH. Ces deux quadrilatères sont donc de même nature. Comme les faces d'un pavé droit sont des rectangles, EFGH est un rectangle. Comme sa longueur et sa largeur mesurent 9 en cm, c'est un carré.

Autre justification possible :

En considérant que dans l'énoncé, il est précisé que la pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, la justification suivante est acceptée.
La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, les quadrilatères JKLM et EFGH sont de même nature. EFGH est une face du pavé droit, c'est un rectangle. HG = EF = 9 cm, EFGH est donc un carré.

JKLM est un carré.

2) Longueurs JK et JM

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH] , K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{HE}} \quad \text{donc} \quad \frac{10 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{\mathrm{JK}}{9 \text{ cm}} \text{soit JK} = \frac{9 \text{ cm} \times 10}{12} = 7{,}5 \text{ cm}$$

Comme JKLM est un carré, **JK = JM et JK = JM = 7,5 cm**

Autre méthode :

On peut identifier le rapport k de réduction des longueurs entre les deux pyramides :

$$k = \frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \mathrm{DH} - \frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{DH}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Dans cette réduction, toutes les longueurs de DJKLM sont obtenues par multiplication des longueurs correspondantes de DEFGH par $\frac{5}{6}$.

Par conséquent, $\mathbf{JK} = \mathbf{JM} = \frac{5}{6} \times 9 \text{ cm} = \mathbf{7,5\ cm}$

3) Volume B de sable blanc et le volume R de sable rouge contenus dans la pyramide

Le sable blanc est contenu dans la pyramide DJKLM, dont la base est un carré de 7,5 cm de côté et la hauteur est 10 cm.

$B = \frac{1}{3} \times 7{,}5 \text{ cm} \times 7{,}5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 187{,}5 \text{ cm}^3$

Le volume de sable rouge s'obtient en faisant la différence entre le volume de la pyramide DEFGH et le volume de la pyramide DJKLM :

$v(\text{DEFGH}) = \frac{1}{3} \times 9 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 324 \text{ cm}^3$

$R = 324 \text{ cm}^3 - \text{B} = 324 \text{ cm}^3 - 187{,}5 \text{ cm}^3 = 136{,}5 \text{ cm}^3$

Le volume de sable blanc est 187,5 cm^3 et le volume de sable rouge est 136,5 cm^3.

Autre méthode pour calculer B :

On peut calculer le volume de la pyramide DEFGH (324 cm^3, voir ci-dessus) puis en déduire le volume de la pyramide réduite DJKLM en multipliant par k^3.

$B = 324 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 324 \text{ cm}^3 \times \frac{125}{216} = 187{,}5 \text{ cm}^3$

PARTIE C - Étude du cas général

Soit $\text{JH} = x$

1) Valeurs possibles pour *x*

Comme le point J est un point du segment [HD], les valeurs possibles pour x sont les nombres compris entre 0 et 12.

On peut aussi écrire : x appartient à [0;12] (ou]0;12[si on considère qu'on doit avoir du sable de deux couleurs).

Remarque :

Les nombres x considérés sont des réels, toute réponse faisant intervenir des nombres entiers (0, 1, 2…, 12) ou décimaux (de 0,1 à 11,9) n'est pas acceptable. Elle dénote une conception erronée d'une longueur qui est une grandeur continue.

2) a) Volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Le volume de sable blanc pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de B qui a pour abscisse 5. On lit $\boldsymbol{B(5) \approx 65\ \mathrm{cm}^3}$

Le volume de sable rouge pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de R qui a pour abscisse 5. On lit $\boldsymbol{R(5) \approx 260\ \mathrm{cm}^3}$

Remarques :

Dans une lecture graphique, on admet une marge d'erreur (2 cm^3 par exemple) ce qui donnerait pour B(5) toute valeur comprise entre 63 cm^3 et 67 cm^3.

Il est attendu ici deux lectures graphiques et non la lecture d'une valeur et la déduction de l'autre par le calcul (la somme des deux volumes est 324 cm^3).

2) b) Volumes respectifs de sable blanc et de sable blanc dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, la hauteur de sable rouge est $12 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$.

On lit $\boldsymbol{B(7) \approx 23\ \mathrm{cm}^3}$ et $\boldsymbol{R(7) \approx 301\ \mathrm{cm}^3}$

2) c) Hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux

La hauteur de sable rouge pour laquelle les deux volumes de sable sont égaux s'obtient en lisant l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. On lit $x \approx 2{,}4$ cm soit x compris entre 2 cm et 3 cm (ou tout **encadrement d'amplitude** 1 cm contenant 2,4 cm).

3) a) $B(x) = 0{,}1875\ (12 - x)^3$

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH], K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{HE}}$ donc $\frac{12-x}{12} = \frac{\mathrm{JK}}{9}$ c'est-à-dire $\mathrm{JK} = \frac{9\times(12-x)}{12} = 0{,}75(12-x)$

Le volume de sable blanc est le volume de la pyramide DJKLM, de base carrée de côté $0{,}75(12-x)$ et de hauteur $(12-x)$.

$$B(x) = \frac{1}{3} \times 0{,}75(12-x) \times 0{,}75(12-x) \times (12-x) = \frac{1}{3} \times 0{,}75^2 \times (12-x)^3 = 0{,}1875(12-x)^3$$

3) b) Valeurs exactes des réponses aux questions C 2) a)

Les valeurs exactes des réponses aux questions C2a sont $B(5)$ et R(5), l'unité de volume étant le cm^3 :

$B(5) = 0{,}1875(12-5)^3 = 0{,}1875 \times 7^3 = \mathbf{64{,}3125}$
$R(5) = 324 - 64{,}3125 = \mathbf{259{,}6875}$

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

Rappel : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ donc $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

$10 \text{ j} = 10 \times 24 \times 60 \text{ min} = 14400 \text{ min}$

Si on perd 3 L d'eau par minute, en 14400 min, on en perd 14400 fois plus.
Ainsi, la quantité d'eau perdue est : $3 \text{ L} \times 14400 = 43200 \text{ L} = 43{,}2 \text{ m}^3$
Un m^3 d'eau coûte 3,50 € donc 43,2 m^3 coûtent : $43{,}2 \times 3{,}50$ € $= 151{,}20$ €

Les conséquences financières de la négligence de Carole s'élèvent à 151,20 €

Autre présentation en utilisant toutes les unités de grandeurs dans les calculs.
Le volume d'eau perdue est
$10 \text{ j} \times 24 \text{ h/j} \times 60 \text{ min/h} \times 3 \text{ L/min} = 43\,200 \text{ L} = 43\,200 \text{ dm}^3 = 43{,}2 \text{ m}^3$
Le prix de cette quantité d'eau perdue est :
$43{,}2 \text{ m}^3 \times 3{,}5$ €/m^3 $= 151{,}20$ €

EXERCICE 2

On peut réaliser le tableau à double entrée de toutes les sommes possibles avec deux dés à 6 faces. Un arbre convient également.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	**5**	6	**7**
2	3	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	9
4	**5**	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Toutes les 36 issues sont équiprobables.
La probabilité de faire 5 est le quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles soit $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
La probabilité de faire 7 est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{9} < \frac{1}{6}$ donc **l'affirmation qu'il y a autant de chance de faire 5 que de faire 7 n'est pas exacte**.

Remarque :
Sans s'appuyer sur une représentation sous forme d'arbre ou de tableau, le nombre d'issues possibles et les nombres d'issues favorables peuvent se déterminer comme suit.

Les deux dés étant à six faces, on associe chaque face d'un dé aux six faces de l'autre. Le nombre d'issues possibles est $6 \times 6 = 36$.
Il y a 4 issues favorables pour que la somme des nombres obtenus sur les deux dés soit égale à 5 : 1 et 4 ; 2 et 3 ; 3 et 2 ; 4 et 1.
Il y a 6 issues favorables pour que la somme des nombres obtenus sur les deux dés soit égale à 7 : 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4 ; 4 et 3 ; 5 et 2 ; 6 et 1.

Remarque :
Pour ce cas précis, un raisonnement consistant à ne pas différencier les deux dés, c'est à dire qu'il y a plus de « façons » d'obtenir 7 (6+1 ; 5+2 ; 4+3) que d'obtenir 5 (4+1 ; 3+2) suffit à conclure que l'affirmation est inexacte. Cependant, ce raisonnement n'est pas généralisable. Il n'est par exemple plus valable dans le cas des sommes 6 et 7.

EXERCICE 3

La moyenne des salaires se calcule en divisant la somme des salaires cumulés par le nombre de personnes.
Le salaire cumulé des femmes est $3 \times 1700\ € = 5100\ €$
Le salaire cumulé des hommes est $1250\ € + 1400\ € + 1600\ € + 3200\ € = 7450\ €$
Pour que les moyennes soient égales, il faut que les salaires cumulés soient égaux.
Le salaire de la quatrième femme doit être $7450\ € - 5100\ € = 2350\ €$

Autre rédaction :

Après avoir calculé les salaires cumulés des femmes et des hommes, on traduit par une équation l'égalité des salaires moyens.
Soit x le salaire de la quatrième femme qui sera embauchée, on a alors :
$5100 + \frac{x}{4} = \frac{7450}{4}$
On en déduit $x = 2350\ €$.
Pour que le salaire moyen des hommes et des femmes de l'entreprise soit égal, il faut que la quatrième femme reçoive un salaire de 2350 €.

Remarque :
La donnée du salaire médian et de l'étendue des salaires des femmes permet de calculer les salaires des trois employées. Cependant, cela nécessite de calculer le salaire cumulé qui suffit à déterminer ce que l'on cherche. Ce sont donc des données inutiles dans ce problème.

EXERCICE 4

Le fleuriste veut composer des bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs, le nombre de bouquet est un diviseur commun de 12 et 18.

Méthode 1 : utilisant le PGCD

On décompose 12 et 18 en produit de facteurs premiers :

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 6 \times 2$ $\qquad$ $18 = 2 \times 3 \times 3 = 6 \times 3$

Le PGCD de 12 et 18 est 6. On peut faire au maximum 6 bouquets, les nombres de bouquets possibles sont les diviseurs de ce PGCD.
On peut faire :

- 6 bouquets avec 2 tulipes et 3 roses
- 3 bouquets avec 4 tulipes et 6 roses
- 2 bouquets avec 6 tulipes et 9 roses
- 1 bouquet avec 12 tulipes et 18 roses (cette possibilité n'est pas retenue compte tenu que l'énoncé précise que le fleuriste veut constituer plusieurs bouquets).

Note : le PGCD peut également être calculé en utilisant l'algorithme d'Euclide ou l'algorithme des soustractions successives.

Méthode 2 (compte tenu de la taille des nombres en jeu) :

On écrit la liste des diviseurs de 12 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12) et la liste des diviseurs de 18 (1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18). Un nombre de bouquets possibles est un diviseur commun à 12 et 18 : 1 ; 2 ; 3 ; 6. Il reste à trouver la composition des bouquets ainsi formés (voir plus haut).

Méthode 3(compte tenu de la taille des nombres en jeu) :

On peut écrire 12 comme produit de deux nombres entiers naturels de trois manières différentes : $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$.
De même, on peut écrire : $18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$.
On déduit alors les bouquets possibles (voir plus haut).

Méthode 4 :

On peut tester toutes les possibilités de bouquets, de 1 à 12 (car il y a 12 tulipes).
On écarte tous les bouquets pour lesquels il reste des fleurs non utilisées et on retrouve ainsi les trois solutions.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

Remarque préliminaire :
La fraction $\frac{a}{b}$ peut avoir plusieurs significations :

- *Fractionnement de l'unité : a $b^{\text{ième}}$ soit a $\times= \frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ldots\ldots\frac{1}{b}$ (a termes égaux à $\frac{1}{b}$).*
- *Partition de la pluralité : $b^{\text{ième}}$ partie de a (a partagé en b parts).*
- *Opérateur : prendre les a $b^{\text{ième}}$ d'une grandeur ou d'un nombre.*
- *Quotient : le nombre qui, multiplié par b, donne a (scalaire, sans unité)...*

À l'école primaire, seules les deux premières significations sont abordées, les autres relèvent du collège. Ainsi, ce problème ne peut être proposé en cycle 3 que dans une activité de recherche. Ceci explique les difficultés rencontrées par les élèves dans les productions présentées.

1) Fractions : nombres ou opérateurs

Les fractions apparaissent comme des opérateurs car elles opèrent sur des longueurs. Il s'agit de prendre les trois cinquièmes d'une longueur en centimètres et les trois quarts d'une autre.

2) a) Deux compétences qui semblent acquises dans le domaine grandeurs et mesures

Remarque :
Les élèves n'ayant pas accès à la signification de la fraction en tant qu'opérateur, leurs procédures relèvent plutôt du fractionnement de l'unité (« l'unité » étant successivement la longueur 60 cm et la largeur 50 cm).

Eva :
Elle connaît les notions de longueur et de largeur d'un rectangle. Elle connaît et sait utiliser les formules donnant le périmètre et l'aire d'un rectangle.

Jeanne :
Elle sait tracer un rectangle dont elle connaît les dimensions (ici, elle trace le rectangle à l'échelle 1/10). Elle sait que le périmètre est associé à la longueur du contour de la figure et que l'aire est associée à la surface, en comptant le nombre de « cases » ; elle sait utiliser un pavage pour mesurer des aires.

Maxime :
Il connaît les formules de l'aire et du périmètre d'un rectangle. Il connaît l'unité de mesure de longueur (le cm, pour le périmètre) et l'unité de mesure d'aire (le cm^2).

2 b) Analyse de la production d'Eva

Eva écrit une décomposition additive de 60 : 15+15+15+15. Elle partage ainsi 60 en 4 parts égales. Par calcul mental, elle obtient la valeur de 3 parts : 45. Elle procède de la même façon pour 50, qu'elle décompose en une somme de 5 termes : 10+10+10+10+10, puis en prend trois parts.

Malgré son écriture erronée $\frac{3}{4} = 45$ et $\frac{3}{5} = 30$, elle témoigne de la bonne compréhension de la notion de fraction, notamment du rôle du numérateur et du dénominateur.

2 c) Analyse de la production de maxime

Maxime traduit l'écriture $\frac{3}{4}$ par 3,4 et $\frac{3}{5}$ par 3,5. Ceci traduit une mauvaise compréhension de la notion de fraction : la barre est vue comme un « séparateur » de deux entiers. Il en est de même pour la virgule dans un nombre décimal. Maxime voit un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule, tout comme il voit la fraction comme deux entiers séparés par une barre.

3) Intérêt et les difficultés éventuelles pour chacune de ces options

Dans le choix des dimensions du rectangle de carton, deux paramètres entrent en jeu :

- la taille des nombres, qui permet ou non de représenter le rectangle ;
- la relation entre les nombres (qui permet ou non le recours au calcul mental) : la divisibilité des dimensions par 4 pour la longueur et par 5 pour la largeur permet d'obtenir ou non des valeurs entières pour le rectangle découpé.

Le choix des dimensions 60 cm et 50 cm ne permet pas aux élèves de dessiner le rectangle et oblige à calculer (même si l'élève Jeanne a finalement réussi à passer par une procédure de dessin, mais celle-ci ne lui permet pas d'accéder aux dimensions réelles du rectangle découpé). Ce choix d'un multiple de 4 pour la longueur et de 5 pour la largeur rend ces calculs possibles mentalement, et donne des valeurs entières.

Le choix des dimensions 10 cm et 16 cm permet aux élèves de dessiner le rectangle en vraie grandeur, et d'obtenir les dimensions du rectangle découpé sans calcul, uniquement par dessin.
16 et 10 étant respectivement multiples de 4 et de 5 (dans les tables de multiplication de 4 et 5), les dimensions obtenues sont entières et simplifient le calcul du périmètre et de l'aire.

Le choix des dimensions 10 cm et 14 cm permet le dessin du rectangle en vraie grandeur mais le découpage en 4 parts du segment de 14 cm donne une valeur décimale (3,5), qu'il faut ensuite multiplier par 3 pour obtenir la longueur du rectangle découpé. Ceci nécessite d'utiliser le calcul sur les décimaux. Obtenir la valeur de 14 divisé par 4 peut se faire par calcul mental : la moitié de 14 est 7, la moitié de 7 est 3,5.
Une fois obtenues les dimensions du rectangle découpé, pour le calcul du périmètre et de l'aire, les élèves devront maîtriser l'addition et la multiplication d'un nombre décimal par un entier.

SITUATION 2

1) Deux pré-requis nécessaires dans le domaine de la géométrie

Deux pré-requis nécessaires dans le domaine de la géométrie pour résoudre cet exercice (parmi ceux proposés) :

- Lire un dessin en perspective d'un solide (imaginer les faces et sommets cachés...)
- Connaître la nature et le nombre de faces d'un pavé droit.
- Connaître les propriétés du rectangle, notamment savoir que ses médianes sont de même longueur que les côtés correspondants.

Remarque :
Les pré-requis donnés en dehors du domaine de la géométrie (par exemple savoir calculer le volume d'un pavé droit , qui relève du domaine des grandeurs et mesures)) ne sont pas recevables.

2) a) Différentes étapes du raisonnement de l'élève

L'élève procède en enlevant au fur et à mesure les longueurs de ruban connues à la longueur totale de ruban. Il cherche ainsi la dimension manquante du pavé.

1ère phase :
L'élève soustrait 28 à 120, pour tenir compte du ruban nécessaire au nœud. Le calcul est juste.

2ème phase :
L'élève calcule la longueur cumulée du ruban nécessaire pour les faces du dessus et du dessous, puis la soustrait à la valeur obtenue phase 1. Le calcul est juste.
Il lui reste alors 56 cm de ruban pour les faces latérales.

3ème phase :
L'élève ne voit que 2 parties de ruban sur les faces latérales (au lieu de 4). Il divise 56 par 2 et obtient 18. Le calcul est juste.
L'élève produit une phrase réponse cohérente avec son résultat.

2) b) Erreurs éventuelles ou oublis

L'élève a oublié deux parties de rubans sur les faces latérales, probablement celles qui ne se voient pas sur le dessin, ou bien influencé par le fait que, dans les calculs précédents, la longueur et la largeur sont comptées deux fois, d'où sa division par 2 de 56 à la phase 3.
Il aurait dû diviser 56 par 4 pour obtenir la longueur de chaque partie manquante et ainsi obtenir la bonne hauteur de la boite : 9 cm.
Il faut également noter la mauvaise utilisation du symbole « = », 92 – 56 n'est pas « = » à 18 (transitivité de l'égalité non respectée). Par cette écriture, il traduit fidèlement sa démarche (le sens du signe « = » correspond pour lui, comme sur la calculatrice, à « ça donne »).
Enfin, il n'a pas terminé l'exercice, puisqu'il termine par une phrase de conclusion donnant seulement la hauteur de la boite. Il a oublié la question initiale : calculer le volume de la boite.

Les étapes du raisonnement sont nombreuses pour arriver au résultat, cet élève n'a pas répondu à la question posée, certainement en raison d'une surcharge cognitive. Son dernier calcul devait lui permettre de calculer le volume de la boite à partir de ses trois dimensions.

SITUATION 3

1) Principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir

La principale notion sur laquelle cet exercice permet de revenir est la proportionnalité.
Le prix des crêpes est proportionnel à leur nombre. La première affirmation permet de définir la relation, elle serait suffisante si l'on considère le cas de vente à l'unité (pas de lots). La deuxième confirme cette relation et permet d'envisager plusieurs procédures pour le calcul demandé dans la question.

2) Trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3

Nous définissons f, la fonction qui, au nombre x de crêpes achetées, associe le prix payé $f(x)$.

Méthode 1 :

Le prix de 15 crêpes s'obtient en additionnant le prix de 5 crêpes avec le prix de 10 crêpes. Le prix de 15 crêpes est $7\ € + 14\ € = 21\ €$.
Cette méthode s'appuie sur la propriété additive de la linéarité : $f(15) = f(5+10) = f(5) + f(10)$

Méthode 2 :

15 crêpes, c'est trois fois plus que 5 crêpes. Le prix de 15 crêpes est trois fois le prix de 5 crêpes. Le prix de 15 crêpes est $7\ € \times 3 = 21\ €$
Cette méthode s'appuie sur la propriété multiplicative de la linéarité $f(21) = f(3 \times 7) = 3 \times f(7)$

Méthode 3 :

5 crêpes coûtent 7 € donc 1 crêpe coûte 5 fois moins cher, soit 7 € : 5 = 1,40 €
donc 15 crêpes coûtent 15 fois plus cher, soit $15 \times 1{,}40\ € = 21\ €$
Cette méthode s'appuie sur le passage par la valeur d'une unité, ou règle de trois.

Méthode 4 :

Pour passer du nombre de crêpes au prix payé, on multiplie toujours par le même nombre.
Ce nombre est le résultat de 7 divisé par 5, ou 14 divisé par 10, soit 1,4. Le prix de 15 crêpes est alors donné par le produit de 1,4 par 15.
Cette méthode met en jeu la grandeur quotient que l'on mesure en « euro par crêpe » (€/c) (dont l'élève s'affranchit) :
$7\ € \div 5\ c = 14\ € \div 10\ c = 1{,}40\ €/c$.
$15\ c \times 1{,}40\ €/c = 15 \times 1{,}40\ € = 21\ €$
Cette méthode s'appuie sur l'utilisation du coefficient de proportionnalité a de la fonction linéaire : quelle que soit la valeur de x, $f(x) = ax$. Cette méthode insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à une autre, contrairement à la méthode 3 qui insiste sur la valeur de « pour un ».
Il est à noter que ce coefficient étant décimal, il est moins probable qu'un élève de cycle 3 produise ce raisonnement.

Remarques :
Le « produit en croix », qui n'est pas la « règle de 3 », est une procédure qui relève du collège (4e) car elle s'appuie sur des égalités de rapports de grandeurs. Par conséquent, elle n'est pas acceptée comme méthode utilisable par un élève de cycle 3.
Le « tableau de proportionnalité » n'est pas une méthode mais un support de présentation de la situation et de chacune des méthodes décrites plus haut.
Voir le document "Mise au point à propos de la proportionnalité" en pages 47et 48 de ces annales.

GROUPEMENT 3 – avril 2015

PREMIERE PARTIE

PARTIE A - Étude de la situation concrète

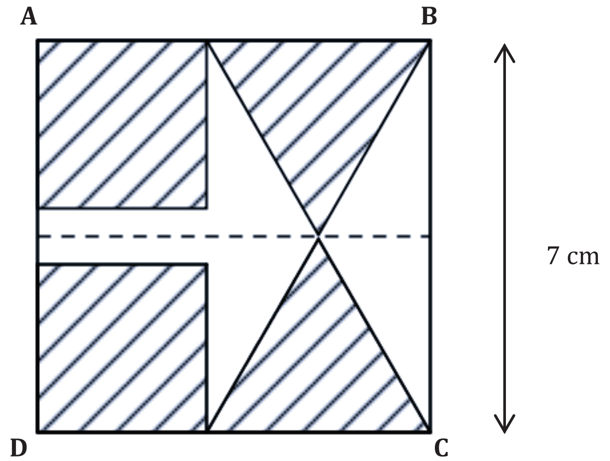


Figure 2

1) a) Vérification des contraintes

Remarque :
L'énoncé recèle une ambiguïté, qu'entend-t-on par « disposition de la figure 2 » ?
On peut considérer que l'on respecterait encore cette disposition en réduisant la taille des yeux ; c'est le choix que nous avons fait à cette question et c'est pourquoi nous considérons qu'il y a trois contraintes à vérifier.
On peut aussi considérer que la « disposition de la figure 2 » intègre dans son principe le fait que le long des côtés [AB] et [DC], les yeux carrés et triangulaires ont chacun un sommet commun avec le carré ABCD et qu'ils se « touchent nécessairement », c'est-à-dire qu'ils ont aussi un sommet commun entre eux. Dans ce cas, la somme des longueurs d'un côté d'un œil carré et d'un côté d'un œil triangulaire doit être exactement égale à 7 cm. C'est le choix qui semble plus loin privilégié par l'énoncé dans la question 2a).

Il y a trois contraintes dont il faut vérifier qu'elles sont satisfaites.

Nous nommons ABCD le carré de 7 cm de côté (Figure 2).
- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.
- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égale à 7 cm.
- Le long du côté [BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.

On vérifie aisément que les deux premières contraintes sont satisfaites :
- La somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire est égale à 4 cm + 3 cm, soit exactement égale à 7 cm. Les deux yeux, le carré et le triangulaire, ont un sommet commun.
- Le double de la longueur du côté d'un œil carré est égal au double de 3 cm, soit 6 cm. Les deux yeux carrés sont donc ici séparés par une bande de largeur 1 cm.

Pour vérifier que la 3$^{\text{ème}}$ contrainte est satisfaite, il faut déterminer la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire de côté 4 cm.

La formule rappelée dans l'énoncé donne $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm dont la valeur approchée par excès au dixième de millimètre près est $h \approx 3{,}47\ cm$.
Le double de h est donc inférieur à 6,94 cm et donc inférieur à 7 cm.
Il est donc possible de placer deux yeux triangulaires le long du bord droit du carré.
Ses deux yeux sont séparés par moins d'un millimètre.

Il est donc possible d'avoir les deux carrés de côté 3 cm et les deux triangles équilatéraux de côté 4 cm dans la disposition de la figure 2.

1) b) Comparaison de l'aire d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm.

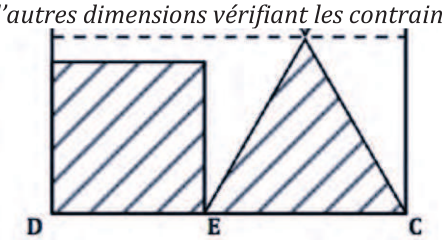
L'aire d'un œil carré est de 9 cm² : $\mathrm{A_c} = (3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$.
L'aire d'un œil triangulaire est inférieure à 6,95 cm² :

$$\mathrm{A_T} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4\ \times 2\sqrt{3}\ c}{2} = 4\sqrt{3}\text{ cm}^2 \approx 6{,}94\text{ cm}^2.$$

L'aire d'un œil carré est ici strictement supérieure à celle d'un œil triangulaire.
Les aires du carré et du triangle ne sont donc pas égales.

2) Choix des dimensions pour les yeux en fonction des contraintes

Remarque 1 :
Il est possible de répondre au problème posé autrement que par une mise en système. Dans la « disposition de la figure 2 » le carré et le triangle équilatéral représentant les yeux ont même périmètre. Soit E le sommet commun au carré et au triangle sur le côté [DC]. Si la longueur DE diminue, la longueur EC augmente et dans ce cas le périmètre du carré (4×DE) diminue tandis que celui du triangle (3×EC) augmente : les périmètres ne sont donc plus égaux. Inversement, si EC diminue, DE augmente et les périmètres ne sont plus égaux. Il n'est donc pas possible de trouver d'autres dimensions vérifiant les contraintes données.



Remarque 2 :
x et y sont des longueurs de côté, leurs mesures en cm sont donc des réels positifs.

2) a) Mise en équation

Si x et y sont solutions du problème, un œil carré de côté x et un œil triangulaire de côté y doivent déjà avoir même périmètre.
Comme leurs périmètres respectifs sont $4x$ (un carré a 4 côtés) et $3y$ (un triangle a 3 côtés), on doit avoir l'égalité $4x = 3y$, qui est équivalente à $4x - 3y = 0$, première égalité du système.
Par ailleurs, pour respecter la disposition de la figure 2 et en reprenant le raisonnement développé au 1)a), x et y doivent respecter les trois contraintes suivantes :

- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être égale à 7 cm pour que les deux yeux se touchent et qu'ils aient chacun un sommet commun avec le carré ABCD.
  D'où $x + y = 7$.
- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égale à 7 cm.
  D'où $2x \leq 7$.
- Le long du côté BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.
  Comme la hauteur d'un œil triangulaire est égale à $h = \frac{y\sqrt{3}}{2}$, on doit avoir $2 \times \frac{y\sqrt{3}}{2} \leq 7$, c'est-à-dire $y\sqrt{3} \leq 7$.

Ainsi, **si x et y sont solutions du problème, ils doivent bien être solution du système :** $\begin{cases} \boldsymbol{4x - 3y = 0} \\ \boldsymbol{x + y = 7} \\ \boldsymbol{2x \leq 7} \\ \boldsymbol{y\sqrt{3} \leq 7} \end{cases}$

2) b) Représentation graphique du problème

Soit (x ; y) un couple de nombres solution du système précédent.
Ce couple doit déjà être solution du système formé par les deux premières équations, c'est-à-dire du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$.

En cherchant dans chacune de ces deux équations à exprimer y en fonction de x, on fait apparaître les fonctions f et g.
En effet, la première équation est équivalente à $3y = 4x$ et donc à $y = \frac{4}{3}x$.
C'est-à-dire à $y = f(x)$.
Ainsi les couples (x ; y) de nombres qui vérifient la première équation sont les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f (courbe qui est une droite puisque f est une fonction linéaire et qui est croissante car son coefficient directeur est positif).
De même, la seconde équation est équivalente à $y = 7 - x$, c'est-à-dire à $y = g(x)$.
Ainsi les couples (x ; y) de nombres qui vérifient la deuxième équation sont les coordonnées des points de la courbe (Δ) représentative de la fonction g (courbe qui est une droite puisque g est une fonction affine et qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif, c'est -1).

Au final, pour être solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$, formé des deux premières équations, le couple (x ; y) doit correspondre aux coordonnées d'un point appartenant à la fois à la droite $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f et à la droite (Δ) représentative de la fonction g.
Or celles-ci n'ont qu'un seul point d'intersection. Et l'on obtient par lecture graphique $x = 3$ et $y = 4$.
Le problème admet donc au plus une solution, mais il reste à vérifier que ces valeurs satisfont aussi les deux dernières inéquations du système :

- quand x vaut 3, l'inéquation $2x \leq 7$ est évidemment vérifiée $(2 \times 3 = 6)$.
- quand y vaut 4, l'inéquation $y\sqrt{3} \leq 7$ est aussi vérifiée car $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

Ainsi, à l'aide de la représentation graphique, on peut affirmer qu'un seul couple de nombres vérifie les deux premières équations du système. Par lecture graphique, on peut supposer que les solutions pour x et y sont respectivement 3 et 4 et que ce sont bien des réponses au problème posé car ces valeurs vérifient aussi les deux dernières inéquations.

Toutefois, il convient d'être prudent car les valeurs 3 et 4 lues graphiquement pourraient n'être que des valeurs approchées des valeurs de x et de y solutions du système formé par les deux seules premières équations.
Dans ce cas, nous n'aurions plus l'assurance que les valeurs exactes de x et de y satisfont aussi les deux dernières inéquations (c'est en particulier vrai pour la toute dernière, la valeur 6,94 étant très proche de 7).

2) c) Résolution par le calcul du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Il s'agit d'un système de deux inconnues à deux équations. On peut le résoudre de plusieurs façons. Parmi les méthodes classiques :

Une méthode par substitution :

Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$

d'où $\begin{cases} 4x - 3(7 - x) = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$

d'où $\begin{cases} 4x - 21 + 3x = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$

d'où $\begin{cases} 7x - 21 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x = 21/7 \\ y = 7 - x \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Une méthode par combinaison linéaire :

Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 3y = 21 \end{cases}$
d'où par addition $7x = 21$ d'où $x = 3$.
En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$.

Une méthode par comparaison :

On peut aussi réutiliser le travail réalisé à la question précédente :

Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = 7 - x \end{cases}$

on a alors l'équation en x : $\frac{4}{3}x = 7 - x$ d'où $4x = 21 - 3x$ d'où $7x = 21$ d'où $x = 3$.

En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$

On obtient finalement $x = 3$ et $y = 4$.

Notons que l'on retrouve les valeurs données au 1)a).

Pour que ce couple soit solution du problème, il reste à vérifier que ces valeurs de x et de y vérifient aussi les deux inéquations du système.

Comme $x = 3$, on a bien $2x \leq 7$.

Comme $y = 4$, on a bien $y\sqrt{3} \leq 7$, car la valeur approchée au centième près de $4\sqrt{3}$ est 6,93.

Ainsi le problème possède une unique solution. Ce sont les valeurs de x et de y rencontrées lors du 1)a).

3) Nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 à prévoir

Commençons par quelques remarques préliminaires :

- La longueur d'une feuille de format A3 est de 42 cm, c'est-à-dire exactement le triple de 14 cm.
- La largeur d'une feuille de format A3 est de 29,7 cm, c'est-à-dire un peu plus du double de 14 cm.

Il donc aisé de fabriquer 6 carrés de 14 cm de côté dans une feuille de format A3, ceci avec peu de chute de carton.

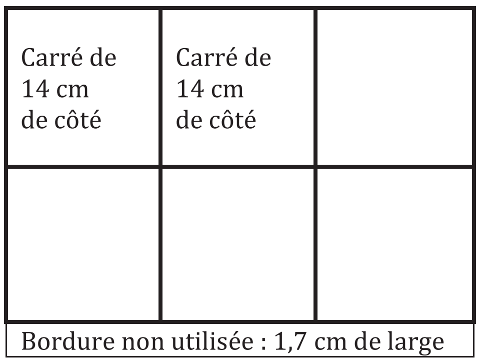
- Par ailleurs, 7 cm représente exactement la moitié de 14 cm et 3,5 cm, qui est la moitié de 7 cm, représente un quart de 14 cm.

Ainsi sur la surface occupée par un carré de 14 cm de côté, on peut à la place choisir de fabriquer 8 rectangles de 7 cm sur 3,5 cm.

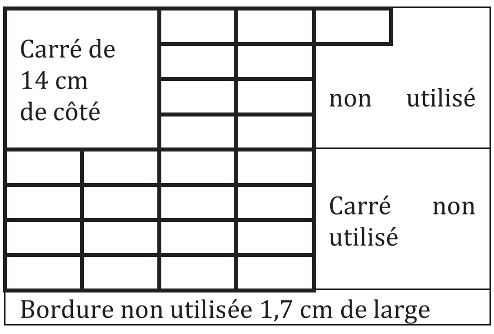
Il n'est alors pas trop difficile de trouver des solutions utilisant 5 feuilles cartonnées.

Par exemple :

- 6 carrés de 14 cm de côté dans les 4 premières feuilles découpées ainsi



- puis dans la 5ème feuille, découpée comme ci-dessous
  - le 25ème carré de 14 cm de côté ;
  - 3 fois 8, soit 24 rectangles de 7cm sur 3,5 cm à la place qu'auraient pu occuper trois autres carrés de 14 cm ;
  - et pour finir le 25ème rectangle.



Pour montrer que 5 feuilles sont nécessaires, montrons que 4 feuilles ne suffiraient pas. Pour cela, raisonnons sur les aires.
Quatre feuilles cartonnées au format A3, 420 mm x 297 mm ont une aire totale, exprimée en cm^2, de : $4 \times 42\text{ cm} \times 29{,}7\text{ cm} = 4989{,}6\text{ cm}^2$.
Par ailleurs, l'aire totale dont a besoin le professeur est la somme de celles de 25 carrés de 14 cm de côté et de 25 rectangles de 7 cm de longueur sur 3,5 cm de largeur.
Il a donc besoin *a minima* d'une aire, exprimée en cm^2, de :

$$25 \times (14\text{ cm})^2 + 25 \times 7\text{ cm} \times 3{,}5\text{ cm} = 4900\text{ cm}^2 + 612{,}5\text{ cm}^2 = 5512{,}5\text{ cm}^2.$$

Ainsi quatre feuilles ne lui suffiront pas et **le nombre minimum de feuilles de format A3 qu'il doit prévoir est cinq.**

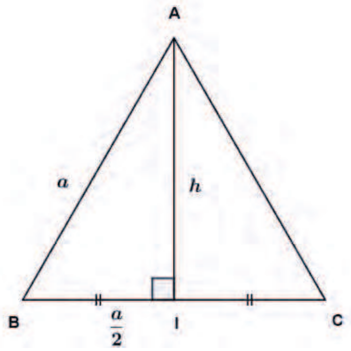
PARTIE B - Démonstration de résultats mathématiques

1) Démonstration du résultat

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$\boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Notons A, B et C les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté a et I le milieu de [BC].
Considérons le triangle ABI.
Ce triangle est rectangle en I car la médiane (AI) est aussi la médiatrice de [BC] et donc la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC. Ce résultat peut se démontrer de la façon suivante :
A est équidistant de B et de C : on a AB = AC car ABC est un triangle équilatéral.
I est équidistant de B et de C, car I est le milieu de [BC].
Donc (AI) est la médiatrice de [BC]. Les droites (AI) et (BC) sont donc perpendiculaires.
En conséquence, I est le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de A.
Donc la médiane [AI] est aussi la hauteur issue de A du triangle ABC.



Nous pouvons alors appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I :
$BI^2 + IA^2 = BA^2$
L'hypoténuse [AB] a pour mesure a, c'est un côté du triangle équilatéral ABC.
Le côté [BI] a pour mesure $\frac{a}{2}$, car I est le milieu de [BC], côté du triangle équilatéral ABC.
Le côté [AI] a pour mesure h, c'est la hauteur du triangle équilatéral ABC.
Ainsi :

$$(\frac{a}{2})^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } \frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

D'où le résultat cherché $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

2) a) Comparaison des périmètres d'un carré de côté x et d'un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

Le carré, qui a quatre côtés égaux, a pour périmètre $P_1 = 4x$.
Le triangle, qui a trois côtés égaux, a pour périmètre $P_2 = 3y = 3 \times \frac{4}{3}x = 4x$.
Le carré et le triangle équilatéral ont bien même périmètre.

2) b) Expression de l'aire A_1 du carré et de l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x, puis du rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

Le carré a pour aire $A_1 = x^2$.
Le triangle équilatéral a pour aire :

$$A_2 = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times y \times \frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{4}{3}x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{9}x^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2$$

Le rapport de ces deux aires est égal à $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{9}x^2}{x^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.
Notons que ce rapport ne dépend pas de *x.*

2) c) Comparaison des aires A_1 et A_2

Dans la question A.1.b), les valeurs numériques de x et de y étaient respectivement de 3 cm et de 4 cm, nombres qui vérifient bien la relation $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi les résultats des questions a) et b) ci-dessus s'appliquent à ces valeurs :

- On retrouve ainsi le fait que les périmètres sont égaux.
- On en déduit aussi que le rapport entre les deux aires, qui ne dépend pas de *x*, vaut $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. Ce rapport, dont une valeur approchée est 0,77, est différent de 1. Donc les deux aires sont différentes. On peut même être plus précis : puisque $\frac{A_2}{A_1} \approx 0{,}77$, l'aire A_2 du triangle équilatéral représente dans ces cas environ 77% de l'aire A_1 du carré.

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

1) Vitesse moyenne du vététiste par la route goudronnée

On utilise ici la relation $vitesse\ moyenne = \frac{Distance\ parcourue}{Temps\ de\ parcours}$ liant la vitesse moyenne à la distance parcourue et au temps de parcours.
L'énoncé n'impose pas d'unité pour la vitesse moyenne, nous choisissons de l'exprimer en km/h.
La distance parcourue est ici $D = 27$ km.
Le temps de parcours est de 1 heure et 30 minutes qu'il nous faut exprimer en heure.

On peut au choix exprimer cette durée :

- en heure décimale, 1 h 30 min $=$ 1,5 h et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul :
$$V = \frac{27\text{ km}}{1{,}5\text{ h}} = \mathbf{18\ km/h}$$
- à l'aide d'une fraction, 1 h 30 min $= 1\text{h} + \frac{1}{2}\text{h} = \frac{3}{2}\text{h}$ et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul $V = \frac{27\text{ km}}{\frac{3}{2}\text{h}} = 27 \times \frac{2}{3}\text{ km/h} = \mathbf{18\ km/h}$

Autre méthode :

Le vététiste parcourt 27 km en 1 h 30, soit en 3 fois une demi-heure.
À vitesse constante, il parcourt donc 9 km en 30 min, soit 18 km en 1 h.
Il a donc roulé à une vitesse moyenne de **18 km/h**.

2) Vitesse moyenne du vététiste par la piste en terre.

Commençons, comme précédemment, par calculer cette nouvelle vitesse moyenne en km/h.
La distance parcourue est ici $D = 28$ km.
Le temps de parcours est de 1 heure et 45 minutes qu'il nous faut exprimer en heure.

On peut encore, au choix, exprimer cette durée :

- en heure décimale, 1 h 45 min $=$ 1,75 h et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul
$$v = \frac{28\text{ km}}{1{,}75\text{ h}} = \mathbf{16\ km/h}$$
- à l'aide d'une fraction, 1 h 45 min $= 1\text{h} + \frac{3}{4}\text{h} = \frac{7}{4}\text{h}$ et la vitesse moyenne s'obtient par le calcul :

$$v = \frac{28\text{ km}}{\frac{7}{4}\text{h}} = 28 \times \frac{4}{7}\text{ km/h} = \mathbf{16\ km/h}$$

Autre méthode :

Le vététiste parcourt 28 km en 1 h 45, soit en 7 fois un quart d'heure.
À vitesse constante, il parcourt donc 4 km en 15 min, soit 16 km en 1 h.
Il a donc roulé à une vitesse moyenne de **16 km/h**.

Pourcentage de diminution de sa vitesse moyenne

Le rapport entre la nouvelle et la précédente vitesse est de $\frac{16\text{ km/h}}{18\text{ km/h}} = 0{,}88\overline{8}\ldots \approx 0{,}89$.
Ce rapport traduit une **baisse d'environ 11% de la vitesse moyenne entre la première et la seconde semaine** $(0{,}89 = 1 - 0{,}11)$.

Remarque :
Dans cet énoncé les données relatives aux altitudes de départ et du col ne sont d'aucune utilité.

EXERCICE 2

1) Longueur mesurée par le ressort si on suspend une masse de 70 g

Si on suspend une masse de 70 g, on aura ajouté 7 fois 10 g. Le ressort s'allongera de 7 fois 0,5 cm, c'est-à-dire de 3,5 cm et il aura alors pour longueur 14 cm + 3,5 cm = 17,5 cm.

2) Masse suspendue au ressort s'il mesure 28 cm

Si le ressort mesure 28 cm, c'est qu'il s'est allongé de 14 cm en plus des 14 cm de sa longueur au repos. Ces 14 cm supplémentaires correspondent à 28 fois 0,5 cm. **La masse suspendue au ressort est donc de** 28 fois 10 g, c'est-à-dire **280 g.**

3) La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ?

La réponse, qui est négative, peut être justifiée par des arguments de différentes natures.

On peut se situer :

Méthode 1 : dans le registre numérique en donnant un contre-exemple issu des résultats obtenus aux questions précédentes

La propriété prioritairement mobilisée ici est celle de linéarité multiplicative.
Par exemple :

- ✓ La longueur du ressort est de 28 cm quand la masse suspendue est de 280 g. S'il y avait proportionnalité, lorsque la longueur du ressort est moitié moins, c'est-à-dire 14 cm, la masse suspendue devrait être moitié de 280 g, c'est-à-dire 140 g. Or 14 cm est la longueur du ressort à vide.
- ✓ Ou encore : 280 g est le quadruple de 70 g. S'il y avait proportionnalité, la longueur du ressort lorsque l'on suspend ces 280 g devrait être le quadruple de sa longueur lorsque l'on suspend 70 g, c'est-à-dire le quadruple de 17,5 cm.
  Cette longueur devrait donc être de $4 \times 17{,}5$ cm = 70 cm, or elle n'est que de 28 cm.
- ✓ Ou encore, sans calcul : si la longueur du ressort était proportionnelle à la masse suspendue, elle serait nulle pour une masse nulle, or 14 cm est la longueur du ressort à vide.

Méthode 2 : dans le registre fonctionnel en explicitant la relation exprimant la longueur l du ressort (exprimée en cm) en fonction de la masse m suspendue (exprimée en g)

Le résultat que l'on va mobiliser ici est le suivant : « lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, la fonction permettant d'exprimer l'une de ces grandeurs en fonction de l'autre est linéaire, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$ ».

La situation décrite par l'énoncé se traduit par la relation $l = 14 + \frac{0{,}5}{10}m$ ou encore par $l = 0{,}05\,m + 14$. La fonction *f* exprimant *l* en fonction de *m* est donc la fonction définie par : $l = f(m) = 0{,}05\,m + 14$.
Cette fonction est affine (elle est de la forme $f(x) = ax + b$) mais elle n'est pas linéaire en raison de la présence de la constante b qui n'est pas nulle ; b vaut ici 14.

Méthode 3 : dans le registre graphique, en représentant dans un repère les points correspondants aux résultats déjà obtenus

Le résultat ici mobilisé est le suivant : « lorsqu'il y a proportionnalité entre deux grandeurs, la courbe représentative de la fonction exprimant l'une en fonction de l'autre est une droite passant par l'origine ».
On peut ici placer les points (70 ; 17,5) et (280 ; 28). On constate que si ces points sont bien alignés (deux points le sont toujours), la droite qui les porte ne passe pas par l'origine.
On pouvait aussi placer en plus le point (0 ; 14) qui se déduit de l'énoncé, et qui rend le constat évident.
Toujours en se référant au registre graphique, on pouvait même se contenter de citer ce seul point (0 ; 14). Et dire que, puisque la courbe représentative ne passe pas par l'origine, il ne peut y avoir situation de proportionnalité.

EXERCICE 3

1) Valeur(s) possible(s) pour p

Un nombre dont la valeur approchée par excès à 10^{-3} près est 1,118 est compris entre 1,117 et 1,118 (précisons qu'il peut être égal à 1,118 mais pas à 1,117).
Ainsi le nombre entier p doit vérifier la double inégalité $1{,}117 < \frac{p}{1789} \leq 1{,}118$.
D'où $1789 \times 1{,}117 < p \leq 1789 \times 1{,}118$; d'où $1998{,}313 < p \leq 2000{,}102$.
Il y a donc deux valeurs possibles pour p : 1999 et 2000.

2) Comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

2) a) Comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Conjecture

Le but de cette question étant d'établir une conjecture, on peut pour y répondre utiliser trois méthodes.

Méthode 1 :

Comparer les fractions après les avoir réduit au même dénominateur. Cette méthode plus calculatoire a l'avantage de se généraliser (cf. question b).

Méthode 2 :

S'appuyant sur les valeurs exactes ou approchées de ces quotients obtenues à la calculatrice, méthode que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser mais qui ne se généralise pas et trouve ces limites lorsque les nombres sont grands et dépassent les capacités des calculatrices, ce qui est le cas pour beaucoup d'entre elles à la question c).

Méthode 3 :

Écrire les fractions sous la forme $1 - \frac{1}{a}$ avec a entier naturel non nul et comparer ces écritures. Cette méthode qui nécessite au préalable une transformation d'écriture a le mérite de fournir une explication simple des résultats obtenus. Et comme comparer $1 - \frac{1}{a}$ et $1 - \frac{1}{b}$ revient à comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, elle permet une démonstration rapide du résultat général (cf. question suivante).

En détail :

Méthode 1 :

- ✓ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Donc $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.
- ✓ $\frac{12}{13} = \frac{12 \times 14}{13 \times 14} = \frac{168}{182}$ et $\frac{13}{14} = \frac{13 \times 13}{13 \times 14} = \frac{169}{182}$. Donc $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.
- ✓ $\frac{176}{177} = \frac{176 \times 178}{177 \times 178} = \frac{31328}{177 \times 178}$ et $\frac{177}{178} = \frac{177 \times 177}{177 \times 178} = \frac{31329}{177 \times 178}$. Donc $\frac{176}{177} < \frac{177}{178}$.

Méthode 2 :

- ✓ $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et $\frac{2}{3} = 0{,}66\overline{6}$ … . Donc $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.
- ✓ $\frac{12}{13} = 0,\overline{923076}$ …. et $\frac{13}{14} = 0{,}9\overline{285714}$ … . Donc $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.
- ✓ $\frac{176}{177} \approx 0{,}99435028$ et $\frac{177}{178} \approx 0{,}99438$. Donc $\frac{176}{177} < \frac{177}{178}$.

Dans les deux premiers cas, il s'agit de valeurs exactes (même si certaines sont illimitées périodiques), dans le dernier cas la comparaison se fait à partir de valeurs approchées.

Méthode 3 :

- ✓ $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$. Or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ d'où $1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.
- ✓ $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13}$ et $\frac{13}{14} = 1 - \frac{1}{14}$. Or $\frac{1}{14} < \frac{1}{13}$, d'où $1 - \frac{1}{14} > 1 - \frac{1}{13}$. Donc $\frac{12}{13} < \frac{13}{14}$.
- ✓ De même, $\frac{176}{177} < \frac{177}{178}$. (*On peut éventuellement détailler les calculs, comme précédemment* $\frac{176}{177} = 1 - \frac{1}{177}$ *et* $\frac{177}{178} = 1 - \frac{1}{178}$. *Or* $\frac{1}{178} < \frac{1}{177}$, *d'où* $1 - \frac{1}{178} > 1 - \frac{1}{177}$. *Donc* $\frac{176}{177} < \frac{177}{178}$.*)*

En se basant sur les trois exemples étudiés, **on peut conjecturer que pour tout entier naturel <u>n</u> non nul, $\boldsymbol{\frac{n-1}{n}}$ est toujours inférieur à $\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$.**

2) b) Démonstration du résultat

Méthode 1 : Écrire les fractions sous la forme de la différence d'un entier et d'une fraction de numérateur 1 (forme $1 - \frac{1}{a}$ vue précédemment).

$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Or n est un entier naturel non nul.

Donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ d'où $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ d'où $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ d'où $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$

Méthode 2 : Mettre sur un même dénominateur les deux nombres.

Ce dénominateur commun est tout simplement le produit des deux dénominateurs.
On a donc :

$$\frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)\times(n+1)}{n\times(n+1)} = \frac{n^2-1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{n\times n}{n\times(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)}$$

Comme $n^2 - 1$ est toujours strictement inférieur à n^2 (et que les dénominateurs sont positifs), on a bien pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

2) c) Comparaison des nombres $\boldsymbol{\frac{987654322}{987654323}}$ et $\boldsymbol{\frac{987654321}{987654322}}$ sans effectuer de calcul

Remarque :
Attention, les deux nombres ne sont pas ici donnés dans le même ordre qu'à la question a).

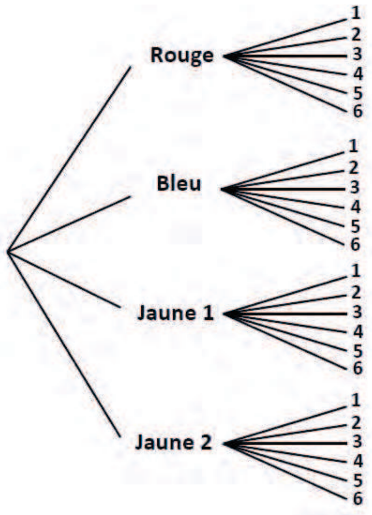
En posant $n = 987654322$, on a $n - 1 = 987654321$ et $n + 1 = 987654323$.

En appliquant le résultat de la question b), on obtient : $\frac{987654321}{987654322} < \frac{987654322}{987654323}$.

EXERCICE 4

Méthode 1 :

On peut utiliser un arbre pour représenter les différentes issues possibles de ces deux évènements successifs (et indépendants).



1) Probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

Les deux dés sont bien équilibrés, nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité.
L'évènement E_1 dont on cherche la probabilité peut se formuler en : « obtenir la face rouge » ET PUIS « obtenir la face 4 ».
Il n'est réalisé sur une seule des 24 branches équiprobables de l'arbre ci-dessus.
La probabilité de E_1 est donc : $p_1 = \frac{1}{24}$.

2) Probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

L'évènement E_2 dont on cherche la probabilité peut se formuler en : « obtenir une face jaune » ET PUIS « obtenir une face impaire ».
Il est réalisé pour 6 des 24 branches équiprobables de l'arbre ci-dessus (Jaune1 puis face 1, 3 ou 5 ; Jaune2 puis face 1, 3 ou 5).
La probabilité de E_2 est donc : $p_2 = \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$.

Remarque :
On pouvait aussi, sans utiliser l'arbre ci-dessus, répondre aux deux questions à l'aide de la formule : P(A et B) = p(A) × p(B) qui permet de calculer la probabilité de la réalisation simultanée de deux évènements indépendants.
Pour E_1 on l'applique avec A : « obtenir la face rouge » et B : « obtenir la face 4 ».
La probabilité de E_1 est donc : $p_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.
Pour E_2 on l'applique avec A : « obtenir une face jaune » et B : « obtenir une face impaire ».
La probabilité de E_2 est donc : $p_1 = \frac{2}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Méthode 2 :

Les deux évènements, résultats des lancers du dé 1 et du dé 2, sont indépendants. On peut aussi représenter la situation à l'aide d'un tableau à double entrée, une ligne pour chaque face du dé 1 (donc 4 lignes) et une colonne pour chaque face du dé 2 (donc 6 colonnes), chaque case correspondant alors à une des 24 issues équiprobables possibles.

Dé 1 Dé 2	1	2	3	4	5	6
R				**Q1**		
B						
J1	**Q2**		**Q2**			**Q2**
J2	**Q2**		**Q2**			**Q2**

1) Probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

Il y a un seul cas favorable (Q1) sur les 24 cas possibles, d'où $p_1 = \frac{1}{24}$.

2) Probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

Il y a 6 cas favorables (Q2) sur les 24 cas possibles, d'où $p_2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

TROISIÈME PARTIE

Remarque préliminaire :
Si les quatre situations proposées dans cette troisième partie sont bien indépendantes, il faut noter qu'elles relèvent toutes à la fois du cycle 3, CM1 ou CM2, et des structures multiplicatives.
Plus précisément :

- *Situation 1 : division euclidienne*
- *Situations 2 à 4 : proportionnalité simple selon la typologie de G. Vergnaud, avec :*
- *Situations 2 et 4 : division décimale (division quotition ou division partition)*
- *Situation 3 : recherche d'une quatrième proportionnelle*

SITUATION n°1

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

Une école organise une sortie de fin d'année. Pour se déplacer, le directeur loue des bus qui peuvent accueillir 42 passagers chacun. Il y a 157 élèves dans l'école et 20 adultes les accompagneront. Combien faut-il réserver de bus ?

1) Opération mathématique, enjeu du problème

L'opération mathématique, enjeu de ce problème, est la division euclidienne. Il s'agit, dans le cas de cet exercice, d'arriver à l'une des deux écritures mathématiques suivante qui la caractérise :

Écriture 1 :

$177 = 42 \times 4 + 9$ et $0 \leq 9 < 42$

Écriture 2 :

$42 \times 4 \leq 177 < 42 \times 5$

Remarque :
Effectuer la division euclidienne de l'entier naturel a par l'entier naturel non nul b permet d'obtenir un couple d'entiers (q,r), quotient et reste de cette division, tel que :

Écriture 1 :

$a = b \times q + r$ *et* $0 \leq r < b$

Écriture 2 :

$b \times q \leq a < b \times (q + 1)$ *avec* $r = a - b \times q$

Dans le problème ci-dessus, on ne s'intéresse qu'au quotient et la solution s'obtient en ajoutant 1 au quotient de la division euclidienne de 177 par 42.

2) Explication des procédures utilisées

Remarque préliminaire :
La consigne « expliquer une procédure utilisée » pourrait être comprise de diverses manières. Dans ce corrigé, nous faisons le choix « d'expliquer » de façon entièrement détaillée :

- *nous commençons par dire si l'élève a réussi à trouver la bonne réponse ou non,*
- *nous donnons le raisonnement sous-jacent à la procédure qu'il utilise,*
- *nous explicitons ensuite toutes les étapes de la procédure de l'élève en nous référant à ce raisonnement.*

Élève A :

L'élève A a trouvé la bonne réponse. Il a fait une représentation schématique de la situation qui est contrôlée par des soustractions successives (soustractions successives de 42 à partir de 177).
Ce nombre de 177 passagers semble avoir été trouvé mentalement (157 + 20).
Il a rempli un premier bus en schématisant les passagers (42 passagers organisés en 7 groupes de 6 passagers). On peut supposer qu'il pose ensuite la soustraction $177 - 42$ pour savoir combien de passagers doivent encore prendre place dans un bus. Il recommence ainsi pour le deuxième, troisième et quatrième bus. Après avoir rempli le quatrième bus, il trouve qu'il lui reste 9 passagers à placer et dessine un cinquième bus ne comportant que 9 passagers.

Remarque :
La procédure de l'élève A permet d'arriver à l'écriture 1 (cf. question 1.)

Élève B :

L'élève B a trouvé la bonne réponse. Il procède à l'encadrement du nombre de passagers (177) par des multiples de 42 (nombre de places dans un bus.)
L'élève B a trouvé le nombre de passagers en posant l'addition 157 + 20 en colonnes. Il a ensuite posé plusieurs multiplications lui permettant de trouver le nombre total de places dans 3, 4 et 5 bus. Les multiplications sont correctes. Il arrive à interpréter ses calculs pour donner la bonne réponse (4 bus ne suffisent pas car seuls 168 passagers peuvent prendre place. 5 bus conviennent car on peut alors transporter 210 passagers).

Remarque :
La procédure de l'élève B permet d'arriver à l'écriture 2 (cf. question 1.)

Élève C :

L'élève C a trouvé la bonne réponse. Il procède en posant la division de 177 par 42.
L'élève C a trouvé le nombre de passagers en posant l'addition157 + 20 en colonnes. Il a ensuite posé la division de 177 par 42. Ses calculs sont corrects. Il arrive à interpréter le résultat obtenu par la division posée pour donner la bonne réponse (le quotient de la division de 177 par 42 est 4 et le reste est 9. 4 bus seront remplis et il reste 9 passagers. Il faut donc 5 bus pour transporter toutes les personnes).

Remarque :
La procédure de l'élève C permet d'arriver à l'écriture 1 (cf. question 1.)

Élève D :

L'élève D a trouvé la bonne réponse. Il a fait une représentation schématique de la situation correspondant à des additions successives de 42 pour se rapprocher de 177.
Le nombre de passagers (177) semble avoir été trouvé mentalement (157 + 20).
Il a rempli un premier bus en schématisant le bus et en indiquant au-dessus le nombre de passagers qu'il transporte. Il dessine ensuite de la même façon un deuxième bus et calcule le nombre de passagers des deux premiers bus (84 passagers). Il recommence ainsi pour le troisième et le quatrième bus. Après avoir rempli le quatrième bus, il trouve que 168 passagers sont transportés. Il dessine un cinquième bus au-dessus duquel il indique 9 et écrit 177 à la suite de 168. Nous n'avons pas d'indication sur la procédure mise en œuvre par cet élève pour trouver le nombre de passagers restant à installer dans le cinquième bus.

Remarque :
La procédure de l'élève D permet d'arriver à l'écriture 1 (cf. question 1.)

3) Division de 157 par 20

Effectuer la division de 157 élèves par 20 adultes revient à trouver le nombre d'élèves encadrés par chaque adulte lors de la sortie ($157 = 20 \times 7 + 17$ et $0 \leq 17 < 20$ ou alors $20 \times 7 \leq 157 < 20 \times 8$. Chaque adulte encadre 7 ou 8 élèves.)
Une question pourrait donc être : **« combien d'élèves chaque adulte encadre-t-il ? ».**

4) Explicitation des sens différents de la division

Dans la situation du problème de départ, il s'agit de trouver le nombre de bus pour transporter 177 personnes. Il s'agit d'un problème de division quotition (recherche du nombre de groupements de 42 dans 177).
Dans la situation de la question 3, il s'agit de trouver le nombre d'élèves encadrés par adulte. Il s'agit d'un problème de division partition (recherche de la valeur du groupement si on partage 157 entre 20).

SITUATION n°2

1) Opération permettant de répondre à la question

L'opération permettant de répondre à la question est la division (division dans l'ensemble des rationnels positifs) : $28 : 8 = 3{,}5$.

Chaque bidon a une contenance de 3,5 litres.
Selon la typologie de Vergnaud, il s'agit d'un problème de proportionnalité simple de type division partition (recherche de la valeur d'une part) que l'on peut schématiser de la façon suivante :

Nombre de bidons	Contenance en litre
1	?
8	28

2) Explication des procédures utilisées

Remarque préliminaire :
La consigne « expliquer une procédure utilisée » pourrait être comprise de diverses manières. Dans ce corrigé, nous faisons le choix « d'expliquer » de façon entièrement détaillée :

- *nous commençons par dire si l'élève a réussi à trouver la bonne réponse ou non,*
- *nous donnons le raisonnement sous-jacent à la procédure qu'il utilise,*
- *nous explicitons ensuite toutes les étapes de la procédure de l'élève en nous référant à ce raisonnement.*

Élève E :

L'élève E a trouvé la bonne réponse. Il a trouvé la contenance d'un bidon par ajustement et additions successives en s'appuyant sur une représentation schématique de la situation (une droite graduée de 0 à 28).
Il commence par remplir chacun des 8 bidons avec trois litres d'essence comme le montre son schéma : 8 groupes de 3 traits sont représentés et sont numérotés de 1 à 8. Il lui reste alors 4 litres d'essence à répartir entre les 8 bidons. Chacun de ces litres est partagé en deux ½ litres (ce qui lui donne un partage équitable du nombre de litres restant entre les 8 bidons) et chaque ½ litre est rajouté à un bidon à l'aide d'une « flèche » : « + ½ » est noté à côté de chacun des numéros des bidons.
Il donne ensuite la bonne réponse, à savoir 3,5 L par bidon.
La relation 1L = 1000 mL qu'il a écrit sur sa feuille ne lui a pas servi.

Élève F :

L'élève F a trouvé la bonne réponse (dans le tableau). Il a trouvé la contenance d'un bidon en « distribuant » de façon organisée (sous forme de tableau) les 28 litres entre chacun des 8 bidons.
Il commence par faire un tableau à 8 colonnes. Il distribue ensuite les 28 litres, 1 à 1, à chacun des 8 bidons. Des traces partiellement effacées à droite du tableau (8 en bout de première ligne, 8 encore en bout de seconde ligne et 16 plus à droite) semblent indiquer que l'élève comptabilise 8 litres à la fin de chaque tournée. Il arrive à faire 3 tours de « distribution » (il a alors « distribué » 24 litres, soit trois fois 1 litre à chacun des 8 bidons). Il continue alors son partage en donnant ½ L par bidon. On ne sait pas s'il a vérifié qu'il arrivait bien à 28 litres à la fin de son partage. La contenance d'un bidon trouvée dans le tableau est correcte (1L + 1L + 1L + ½ L). Cependant, il n'a pas su traduire le résultat sous forme d'un nombre décimal (3,5 qui peut se lire trois ET demi et non pas 3 demi).

Remarque :
Les procédures des élèves E et F sont proches.

Élève G :

L'élève G a trouvé la bonne réponse. Il procède en posant la division de 28 par 8.
L'élève G a poursuivi la division de 28 par 8 jusqu'à trouver un reste nul. Il obtient donc un quotient décimal qu'il sait interpréter.

SITUATION n°3

1) Notion(s) mathématique(s) en jeu

Selon la typologie de Vergnaud, il s'agit d'un problème de proportionnalité simple de type quatrième proportionnelle.

Nombre de bidons	Contenance en litre
8	28
?	7

Par ailleurs, suivant la procédure utilisée pour résoudre ce problème de proportionnalité, d'autres notions mathématiques peuvent intervenir (les propriétés additives et multiplicatives de linéarité, le coefficient de proportionnalité, la multiplication, la division, etc.).

2) Proposition de différentes résolutions

Deux résolutions étaient demandées. Nous en proposons trois de niveau CM2.

<u>Procédure 1 :</u> Appui sur la propriété multiplicative de linéarité

	Nombre de bidons	Contenance en litre	
÷4	8	28	÷4
	?	7	

28 = 7×4.
7 est 4 fois plus petit que 28.
Donc pour 7 litres, on peut remplir 4 fois moins de bidons que pour 28 litres.
On peut dont remplir 2 bidons avec 7 litres d'essence.

<u>Procédure 2 :</u> Passage à l'unité (aussi appelé « règle de trois » dans les programmes de 2008) et utilisation des propriétés multiplicatives de linéarité

	Nombre de bidons	Contenance en litre	
÷8	8	28	÷8
×2	1	3,5	×2
	?	7	

Si 8 bidons contiennent 28 litres d'essence, 1 bidon contient 8 fois moins d'essence soit 28 L : 8 = 3,5 L
7 litres c'est deux fois plus que 3,5 litres. Donc il faut deux fois plus de bidons pour 7 litres d'essence que pour 3,5 litres d'essence. On peut donc remplir 2 bidons avec 7 litres d'essence.

<u>Procédure 3 :</u> utilisation du coefficient de proportionnalité

Nombre de bidons	Contenance en litre
8	28
?	7

Le coefficient de proportionnalité est le quotient des deux grandeurs proportionnelles (on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par ce coefficient) ; on le trouve en posant la division de 28 par 8.
Même si ce coefficient de proportionnalité est décimal, il est possible de l'utiliser dans cette situation car 3,5 est la moitié de 7.

SITUATION n°4

1) Sens de la division

Dans la situation 4, il faut trouver la longueur d'un morceau de ruban connaissant le nombre de morceaux de rubans et la longueur totale de ruban. Il s'agit donc d'un problème de division partition (recherche de la valeur d'une part si on partage 137,6 en 8).

2) Proposition d'une procédure de résolution permettant de se ramener à une opération sur les nombres entiers

Remarque :
Une procédure était demandée. Nous en proposons trois entre lesquelles le candidat peut choisir.

<u>Procédure 1</u> : conversion des cm en mm

1 cm = 10 mm. Donc un ruban a pour longueur 1376 mm. La longueur d'un morceau de ruban est donc de 1376 : 80 = 172 mm. On trouve ensuite la longueur d'un morceau de ruban en cm : 17,2 cm.

<u>Procédure 2 :</u> utilisation de la proportionnalité pour se ramener à la division décimale de 2 entiers, quotient décimal

Si un ruban a pour longueur 137,6 cm, 10 rubans ont pour longueur 1376 cm.
Si un ruban est découpé en 8 morceaux de même longueur, on a 80 morceaux de même longueur pour 10 rubans.
Pour trouver la longueur d'un morceau de ruban, on peut donc poser la division décimale de 1376 par 80, qui est une division sur des nombres entiers. Par contre, le quotient de cette division sera un nombre décimal (1376 : 80 = 17,2)

<u>Procédure 3 :</u> division décimale de 2 entiers, quotient entier puis division par 10.

Pour avoir un quotient entier dans la division posée, on peut procéder de la façon suivante.
Si un ruban a pour longueur 137,6 cm, 10 rubans ont pour longueur 1376 cm.
Si un ruban est découpé en 8 morceaux de même longueur, on a 80 morceaux de même longueur pour 10 rubans. On peut alors chercher la longueur de 10 morceaux de rubans en divisant 1376 par 8. On trouve alors que 10 morceaux de ruban ont une longueur de 172 cm. Un morceau de ruban a donc une longueur 10 fois plus petite, soit 17,2 cm.

3) Proposition d'une procédure de calcul qui peut être attendue d'un élève de CM2 pour effectuer la division 137,6 ÷ 8, sans se ramener à une opération sur les entiers.

<u>Procédure 1 :</u> calcul réfléchi en utilisant des divisions par 2.

Diviser par 8 revient à faire trois divisions successives par 2. La moitié de 137,6 est 68,8 (moitié de 130 plus moitié de 7 plus moitié de 0,6). La moitié de 68,8 est 34,4. La moitié de 34,4 est 17,2 (moitié de 30 plus moitié de 4,4). Ainsi la longueur d'un ruban est de 17,2 cm.

<u>Procédure 2 :</u> encadrement de 137,6 par des multiples de 8 et ajustement.

Si un morceau de ruban a pour longueur 20 cm, le ruban fait 160 cm. C'est trop.
Si un morceau de ruban a pour longueur 15 cm, le ruban fait 90 cm. Ce n'est pas assez.
Si un morceau de ruban a pour longueur 17 cm, le ruban fait 136 cm. Ce n'est pas assez. Il reste 1,6 cm à partager en 8.
Or 1,6 cm = 16 mm. 16 est le double de 8. On peut donc rajouter 2 mm à chaque morceau de ruban.
Un morceau de ruban a donc pour longueur 17 cm et 2 mm soit 17,2 cm.

<u>Procédure 3 :</u> division posée

Dans le programme de 2008, il est précisé, en CM2, que les élèves doivent savoir effectuer la division d'un nombre décimal par un nombre entier. Les recommandations pour la mise en œuvre des programmes parues au B.O. du 19 juin 2014 précisent que « *les divisions décimales proposées aux élèves se limitent à des divisions ayant des résultats exacts. Les cas de quotient non entier sont abordés uniquement dans des situations très simples pour lesquelles le diviseur a un seul chiffre et le quotient exact une seule décimale (11 : 2, et non 11 : 4 ou 72 : 16)* ».
La division posée de 137,6 : 8 n'est donc plus vraiment au programme du CM2. Certes certains élèves peuvent avoir appris à effectuer la division d'un nombre décimal par un nombre entier (voir ci-dessous), mais mieux valait proposer l'une des deux procédures précédentes (à gauche : partage des groupements de numération ; à droite : les meilleurs multiples du diviseur à chaque étape de calcul).

137,6	8
- 8	17,2
57	
- 56	
1,6	
- 1,6	
0	

137,6	8
- 80	17,2
57,6	
- 56	
1,6	
- 1,6	
0	

1	8
2	16
7	56

10	80

4) Quotient d'un nombre décimal par 8

<u>*Méthode 1 :*</u> *en utilisant la caractérisation des nombres décimaux au travers de leur écriture fractionnaire irréductible.*

Soit x un nombre décimal. x peut s'écrire sous de fraction irréductible $\frac{a}{b}$ avec a entier, b entier non nul de la forme $2^p \times 5^q$ avec p et q entiers naturels. On a donc $x = \frac{a}{2^p \times 5^q}$

Alors, $\frac{x}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a}{2^{p+3} \times 5^q}$, avec p + 3 et q entiers naturels : il s'agit bien de l'écriture d'un nombre décimal.
Le quotient d'un nombre décimal par 8 est donc toujours un nombre décimal.

<u>*Méthode 2 :*</u> *En utilisant le fait que les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme de fractions décimales.*

Soit x un nombre décimal. x peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale $\frac{a}{10^n}$ avec a entier et n entier.
Diviser par 8, c'est multiplier par son inverse $\frac{1}{8}$, qui est égal à 0,125 ou encore à $\frac{125}{1000}$.
Ainsi $\frac{x}{8} = \frac{a}{10^n} \times \frac{125}{1000} = \frac{a}{10^n} \times \frac{125}{10^3} = \frac{125a}{10^{n+3}}$ qui est une fraction décimale. Donc $\frac{x}{8}$ est bien un nombre décimal.

Méthode 3 : En utilisant les propriétés des opérations entre nombres décimaux.

Plus précisément, on sait que la somme, la différence et le produit de deux nombres décimaux sont toujours des nombres décimaux.
Par contre, le quotient de deux nombres décimal n'est pas toujours un nombre décimal, ce qui justifie la question posée.
Diviser un nombre par 8, c'est le multiplier par son inverse $\frac{1}{8}$, qui est égal à 0,125 ou encore à $\frac{125}{1000}$ qui est donc décimal.
Le quotient d'un nombre décimal x par 8 est donc égal au produit de x et de $\frac{1}{8}$ qui sont tous les deux décimaux. Leur produit est donc toujours un nombre décimal.

CONCOURS EXCEPTIONNEL CRÉTEIL – mai 2015

PREMIERE PARTIE

PARTIE A – Tous les rectangles étudiés ont un côté de longueur 10 cm

1) a) Format d'un rectangle dont la longueur du deuxième côté est 2,5 cm

Puisque 2,5 cm < 10 cm, la longueur du deuxième côté correspond à la largeur du rectangle.
Le format est alors donné par : F = $\frac{10}{2,5}$.
Soit : F = 4.
Le format du rectangle de dimensions 2,5 cm et 10 cm est 4.

1) b) Format d'un rectangle dont la longueur du deuxième côté est 40 cm

Puisque 40 cm > 10 cm, la longueur du deuxième côté correspond à la longueur du rectangle.
Le format est alors donné par : F = $\frac{40}{10}$.
Soit : F = 4.
Le format du rectangle de dimensions 40 cm et 10 cm est 4.

2) Tableau de valeurs

Lorsque la longueur du deuxième côté est inférieure à 10 cm, il s'agit de la largeur l du rectangle : c'est le cas pour les valeurs 2 et 4 (en cm). Dans ce cas, le format est donné par la formule : F = $\frac{10}{l}$.
Lorsque la longueur du deuxième côté est supérieure à 10 cm, il s'agit de la longueur L du rectangle : c'est le cas pour les valeurs 18 ; 32 et 60 (en cm). Dans ce cas, le format est donné par la formule : F = $\frac{L}{10}$.
Lorsque la longueur du deuxième côté est égale à 10 cm, tous ses côtés ont la même longueur donc ce rectangle est un carré. Dans ce cas, le format est égal à : F = $\frac{10}{10}$ = 1.
Le tableau de valeurs se remplit alors de la manière suivante :

Mesure (en cm) du deuxième côté	2	4	10	18	32	60
Format du rectangle	$F = \frac{10}{2} = 5$	$F = \frac{10}{4} = 2,5$	1	$F = \frac{18}{10} = 1,8$	$F = \frac{32}{10} = 3,2$	$F = \frac{60}{10} = 6$
	$F = \frac{10}{l}$			$F = \frac{L}{10}$		

Proportionnalité éventuelle du format par rapport à la mesure du deuxième côté

<u>Méthode 1 :</u> calcul de différents rapports entre la mesure du deuxième côté et le format

Le calcul du rapport entre la mesure du deuxième côté et le format pour les deux premiers couples donne :
$\frac{5}{2}$ = 2,5 et $\frac{2,5}{4}$ =0,625
Ces rapports ne sont pas égaux. **Donc le format n'est pas proportionnel à la longueur du deuxième côté.**
Remarque :
On aurait pu choisir d'autres couples de valeurs : 2 et 10 ; 2 et 18 ; 2 et 32 ; 2 et 60 ; 4 et 10 ; 4 et 18 ; 4 et 32 ; 4 et 60.

<u>Méthode 2 :</u> utilisation des relations multiplicatives entre grandeurs de même nature

Par exemple entre les deux premiers couples de données : 4 = 2 × 2, mais 2,5 ≠ 2 × 5 !

La linéarité multiplicative ne s'applique donc pas. **Par conséquent, le format n'est pas proportionnel à la longueur du deuxième côté.**

Remarque :
On aurait pu choisir d'autres couples de valeurs : 2 et 10 ; 2 et 18 ; 2 et 32 ; 2 et 60 ; 4 et 10 ; 4 et 18 ; 4 et 32 ; 4 et 60.

Méthode 3 : expression de la fonction

On appelle F la fonction qui à la mesure x du deuxième côté (en cm) associe le format du rectangle. La fonction est alors définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x}, & si\ 0 < x \leq 10 \\ \dfrac{x}{10}, & si\ x \geq 10 \end{cases}$$

L'expression de cette fonction ne correspond pas à celle d'une fonction linéaire. **Par conséquent, il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.**

Remarque :
On peut remarquer que dans le cas où $x \leq 10$, le format est inversement proportionnel à la mesure du côté (exprimée en cm). En revanche, dans le cas où $x \geq 10$, alors le format est bien proportionnel à la mesure du côté car $F(x)=\frac{x}{10}$ est une fonction linéaire (de coefficient directeur $\frac{1}{10}$).

Méthode 4 : utilisation du « produit en croix »

Si le tableau était un tableau de proportionnalité, alors en considérant les deux premières colonnes de valeurs, la recherche de la quatrième proportionnelle comme valeur correspondant à 4 avec la technique du produit en croix donnerait : $\frac{4\times5}{2}$ = 10 (≠ 2,5 !).

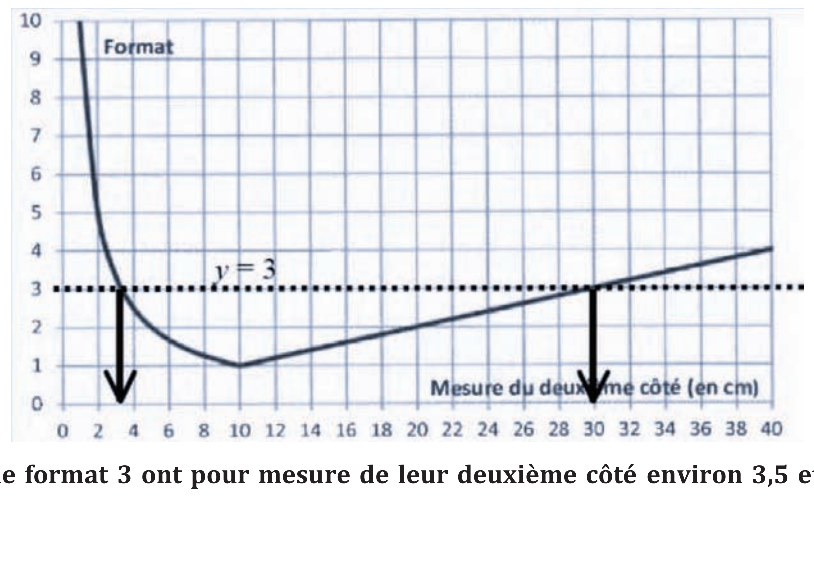
Le format n'est pas proportionnel à la longueur du deuxième côté.

Remarque :
On aurait pu choisir d'autres couples de valeurs : 2 et 10 ; 2 et 18 ; 2 et 32 ; 2 et 60 ; 4 et 10 ; 4 et 18 ; 4 et 32 ; 4 et 60.

3) a) Détermination graphique de la valeur de la mesure du deuxième côté de tous les rectangles de format égal à 3

Les valeurs cherchées sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est 3. On lit deux valeurs : environ 3,5 et environ 30.

Remarque :
Les valeurs cherchées correspondent également aux abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation y = 3 (parallèle à l'axe des abscisses).



Les rectangles de format 3 ont pour mesure de leur deuxième côté environ 3,5 et 30 (exprimées en cm).

3) b) Calcul de la valeur de la mesure du deuxième côté de tous les rectangles de format égal à 3

Selon que la valeur manquante x est la longueur ou la largeur du rectangle, c'est-à-dire selon que $0 < x \leq 10$ ou $x \geq 10$, le calcul de $F(x)$ est du type : $\frac{10}{x}$ ou $\frac{x}{10}$.

Il faut donc envisager chacun de ces deux cas :

- si $0 < x \leq 10$, on cherche la(les) valeur(s) de x pour la(les)quelle(s) : $\frac{10}{x} = 3$.

Cette équation est équivalente à : $10 = 3 \times x$

Soit : $\frac{10}{3} = x$

On trouve : $x \approx$ **3,3 (arrondi à 0,1 près).** On retrouve ici la première valeur lue.

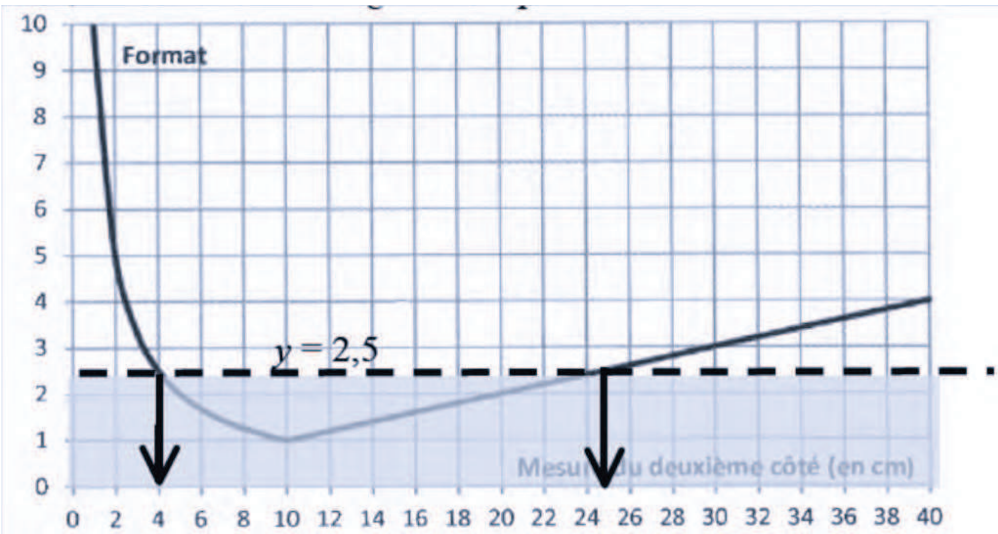
- si $x \geq 10$, on cherche la (les) valeur(s) de x pour la(les)quelle(s) : $\frac{x}{10} = 3$

Cette équation est équivalente à : $x = 3 \times 10$

Soit : $x =$ **30.** On retrouve ici la deuxième valeur lue.

3) c) Détermination graphique de la valeur de la mesure du deuxième côté de tous les rectangles de format inférieur ou égal à 2,5

Les valeurs cherchées sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2,5. Les points concernés se situent sur la courbe ainsi que dans le demi-plan délimité par la droite d'équation y = 2,5 et contenant l'origine du repère.



Les abscisses de ces points sont comprises entre 4 et 25 environ.

Les valeurs possibles pour la mesure du deuxième côté des rectangles dont le format est inférieur ou égal à 2,5 sont comprises entre 4 cm et 25 cm environ.

3) d) Calcul de la valeur de la mesure du deuxième côté de tous les rectangles de format inférieur ou égal à 2,5

De même que pour la question 3) b), on distingue les deux cas : $0 < x \leq 10$ et $x \geq 10$.

- Pour x inférieur ou égal à 10, les valeurs cherchées sont les nombres x vérifiant l'inéquation : $\frac{10}{x} \leq 2,5$

Cette inéquation est équivalente à : $10 \leq 2,5 \times x$ (car $x > 0$).

Soit : $\frac{10}{2,5} \leq x$

Ou : $4 \leq x$

- Pour x supérieur à 10, les valeurs cherchées sont les nombres x vérifiant l'inéquation : $\frac{x}{10} . \leq 2,5$

Cette inéquation est équivalente à : $x \leq 2,5 \times 10$.

Soit : $x \leq 25$.

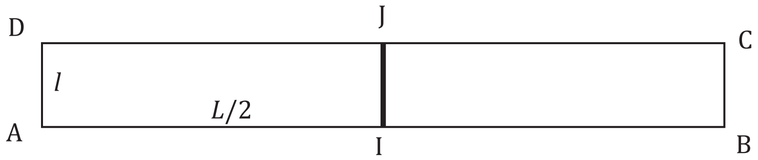
En conclusion, les valeurs de x cherchées sont les suivantes : $4 \leq x \leq 25$. On retrouve bien les valeurs lues dans la question précédente.

PARTIE B – Format commercial d'un rectangle

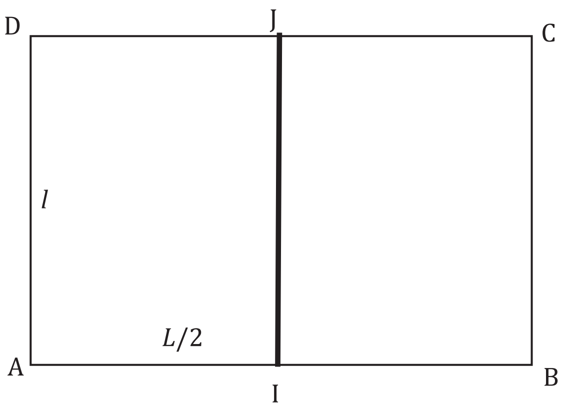
1) Égalité $L^2 = 2 \times l^2$

Dans le rectangle ABCD : L = AB et l = AD.
On note maintenant L' et l' la longueur et la largeur respectives du rectangle AIJD ; on note F' son format : F' = $\frac{L'}{l'}$.
Deux cas de figure sont envisageables :

- soit AI > AD (voir figure ci-dessous), alors : $L' = AI$ et $l' = AD$; on obtient alors : $L' = L/2$ et $l' = l$;
  dans ce cas : F' = $\frac{\frac{L}{2}}{l} = \frac{L}{2l}$.



- soit AI < AD (voir figure ci-dessous), alors : $L' = AD$ et $l' = AI$; on obtient alors : $L' = l$ et $l' = L/2$;
  dans ce cas : F' = $\frac{l}{\frac{L}{2}} = \frac{2l}{L}$.



On a :F = $\frac{AB}{BC} = \frac{L}{l}$
L'égalité F = F' est équivalente :

- soit à : $\frac{L}{l} = \frac{L}{2l}$ ce qui est équivalent à : $L = \frac{L}{2}$; ou encore : $L - \frac{L}{2} = 0$; soit $\frac{L}{2} = 0$; ceci est impossible (car $L \neq 0$) ;
- soit à : $\frac{L}{l} = \frac{2l}{L}$ ce qui est équivalent à : $L \times L = 2l \times l$; soit $L^2 = 2 \times l^2$.

Si le rectangle ABCD a un format commercial, alors : $L^2 = 2 \times l^2$.

Remarque :
En réalité, nous avons démontré l'équivalence suivante : le rectangle ABCD a un format commercial si et seulement si $L^2 = 2 \times l^2$.

Égalité F = $\sqrt{2}$

Si le rectangle ABCD a un format commercial, on déduit de l'égalité précédente : $\sqrt{L^2} = \sqrt{2 \times l^2}$; soit : $L = \sqrt{2} \times l$.

Par suite : F = $\frac{L}{l} = \frac{\sqrt{2} \times l}{l} = \sqrt{2}$.

Le format commercial est égal à $\sqrt{2}$.

2) Égalité $\boldsymbol{l_0}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On considère un rectangle de dimensions L_0 et l_0 et d'aire égale à 1 m^2.
Par conséquent : $L_0 \times l_0 = 1$. (1)
On suppose de plus que ce rectangle a un format commercial. Alors : $\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$ (d'après la question B 1)). On a donc aussi : $L_0 = \sqrt{2} \times l_0$. (2)
En remplaçant dans l'égalité (1) L_0 par sa valeur exprimée en fonction de l_0, on obtient ainsi une nouvelle égalité : $\left(\sqrt{2} \times l_0\right) \times l_0 = 1$
Puis : $\sqrt{2} \times {l_0}^2 = 1$
Ainsi : ${l_0}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On obtient effectivement : $\boldsymbol{l_0}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Égalité $\boldsymbol{L_0}^2 = \sqrt{2}$

<u>Méthode 1 :</u> Utilisation de l'égalité (2)
D'après l'égalité (2) : $L_0 = \sqrt{2} \times l_0$. Donc : ${L_0}^2 = (\sqrt{2} \times l_0)^2$.
Soit : ${L_0}^2 = 2 \times {l_0}^2$.
Or : ${l_0}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On en déduit : ${L_0}^2 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Ainsi : ${L_0}^2 = \sqrt{2}$.

<u>Méthode 2 :</u> Utilisation la valeur de l'aire du rectangle
Comme : $L_0 \times l_0 = 1$, alors : $L_0 = \frac{1}{l_0}$.
Donc : ${L_0}^2 = (\frac{1}{l_0})^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$
En conclusion, $\boldsymbol{L_0}^2 = \sqrt{2}$.

3) Dimension d'un rectangle de format A5

Lorsqu'on passe du rectangle format A_0 au rectangle format A_1, nous avons vu (question B – 1) qu'alors : $L_1 = l_0$ et que $l_1 = L_0/2$. En généralisant ce résultat, d'une étape à la suivante, la longueur devient la largeur précédente, et la largeur devient la moitié de la longueur précédente.
Par conséquent, les dimensions d'une feuille de format A4 sont obtenues à partir des dimensions d'une feuille A3 :
- la longueur est égale à la largeur d'une feuille A3 : $L_4 = l_3$; soit par lecture de la feuille de tableur : L_4 = 0,297 m ;
- et la largeur est égale à la moitié de la longueur d'une feuille A3 : $l_4 = L_3/2$; soit par lecture de la feuille de tableur : l_4 = 0,210 m.

De même, on obtient les dimensions d'un rectangle de format A5 :
- la longueur est égale à la largeur d'une feuille A4 : $L_5 = l_4$; soit L_5 = 0,210 m ;
- et la largeur est égale à la moitié de la longueur d'une feuille A4 : $l_5 = \frac{L_4}{2}$; soit l_5 = 0,1485 m.

En arrondissant au millimètre, les dimensions du rectangle de format A5 sont 0,210 m et 0,149 m, soit 210 mm et 149 mm.

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

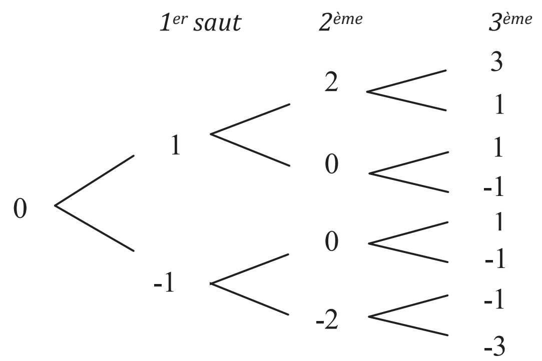
1) Au bout de 3 secondes la puce a effectué 3 sauts. Avant de répondre aux différentes questions, on modélise les parcours envisageables sur 3 sauts.

<u>*Méthode 1 :*</u> *Mise en évidence des différents chemins possibles en 3 sauts*

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$
$0 \rightarrow -1 \rightarrow -2 \rightarrow -3$
$0 \rightarrow -1 \rightarrow -2 \rightarrow -1$
$0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1$
$0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
Il y a huit chemins possibles équiprobables.

<u>*Méthode 2*</u> *: utilisation d'un arbre de probabilité*

Établissons les différents chemins possibles en 3 sauts par un arbre indiquant les possibilités de cases d'arrivée après chaque saut.



Il y a huit chemins possibles équiprobables. Pour le calcul des probabilités de chaque événement (case d'arrivée après le 3ème saut), nous pouvons donc appliquer la formule :

$$(*) \qquad \frac{Nombre\ de\ résultats\ favobales\ à\ la\ réalisation\ de\ l'événement}{Nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

1) a) Probabilité que la puce soit au point d'abscisse 0 au bout de 3 s

Aucun chemin n'arrive sur le point d'abscisse 0 (événement impossible), donc **la probabilité que la puce soit au point d'abscisse zéro au bout de trois secondes est 0.**

1) b) Probabilité que la puce soit au point d'abscisse 1 au bout de 3 s

Trois chemins arrivent sur le point d'abscisse 1, donc **la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 1 au bout de trois secondes est 3/8.**

1) c) Probabilité que la puce soit au point d'abscisse 2 au bout de 3 s

Aucun chemin n'arrive sur le point d'abscisse 2 (événement impossible), donc **la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 2 au bout de trois secondes est 0.**

1) d) Probabilité que la puce soit au point d'abscisse 3 au bout de 3 s

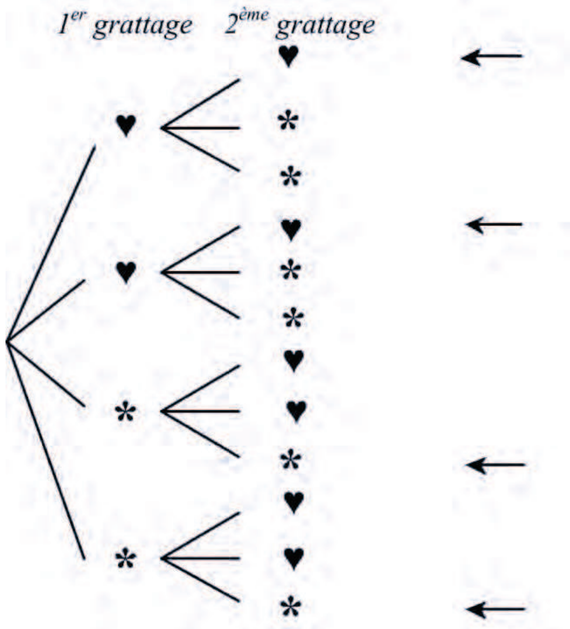
Un seul chemin arrive sur le point d'abscisse 3, donc **la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 3 au bout de trois secondes est 1/8.**

2) Probabilité de gagner une boisson avec une carte en grattant deux cases au hasard

Pour le premier grattage il y a 4 cases possibles. Pour le deuxième grattage, il reste seulement 3 cases possibles puisqu'une case a déjà été grattée.

<u>Méthode 1 :</u> mise en évidence de tous les résultats possibles sous forme de tableau ou d'arbre

Symbole après le premier grattage	Symbole après le deuxième grattage
*	*
	♥
	♥
*	*
	♥
	♥
♥	*
	*
	♥
♥	*

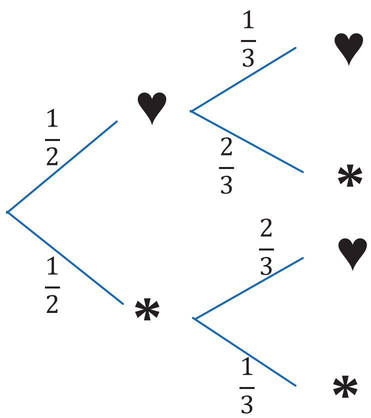


Il y a 12 résultats équiprobables. Pour gagner, il faut obtenir deux symboles identiques. Il y a donc 4 résultats « gagnants » (repérés par les cases grisées dans le tableau ou par les flèches dans l'arbre). En appliquant la formule (*), la probabilité de gagner une boisson est donc de : $\frac{4}{12}$, soit $\frac{1}{3}$.

La probabilité de gagner une boisson avec une carte est $\frac{1}{3}$.

<u>Méthode 2 :</u> réalisation d'un arbre pondéré des probabilités.

La probabilité d'obtenir un cœur au premier grattage est : $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Pour le deuxième grattage, comme il reste trois cases à gratter et un seul cœur, la probabilité de gratter un deuxième cœur est $\frac{1}{3}$. On applique le même raisonnement sur les autres grattages possibles. On obtient alors l'arbre pondéré de probabilité suivant :



La probabilité d'avoir deux cœurs est :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

La probabilité d'avoir deux étoiles est :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

La probabilité de gagner est égale à la somme de la probabilité d'avoir deux cœurs et de la probabilité d'avoir deux étoiles :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

La probabilité de gagner une boisson avec une carte est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2

1) La droite (EB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AEC}$

Le triangle EAB est isocèle, donc ses angles à la base ont la même mesure : $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$.
Comme la somme des angles de ce triangle est 180° et que $\widehat{EAB} = 130°$, on a :
$\widehat{AEB} = \frac{180° - 130°}{2} = 25°$. On a également $\widehat{ABE} = 25°$.
D'autre part, comme les droites (AB) et (EC) sont parallèles, les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{BEC}$ sont alternes-internes. Par conséquent : $\widehat{BEC} = \widehat{ABE} = 25°$.
On en déduit l'égalité des angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BEC}$.
Par conséquent, **la droite (EB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AEC}$**.

2) Calcul de l'angle $\widehat{BCE}$

La somme des angles du triangle BCE est égale à 180°. Or par hypothèse le triangle BCE est rectangle en B, donc : $\widehat{EBC} = 90°$. D'après la question précédente, $\widehat{BEC} = 25°$.
Alors : $\widehat{EBC} + 25° + 90° = 180°$.
Donc : $\widehat{EBC} = 180° - 25° + 90°$.
Soit $\widehat{EBC} = 65°$.
La mesure de l'angle $\widehat{EBC}$ (exprimée en degrés) est 65.

3) Le triangle EBK est isocèle en K

<u>Méthode 1 :</u> Utilisation du cercle circonscrit au triangle BEC

Le triangle EBC est rectangle en B (par hypothèse), donc [EC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EBC. Par conséquent, le milieu K du segment [EC] est le centre de ce cercle.
On en déduit que : KE = KB = KC.
Ainsi le triangle EBK est isocèle en K.

<u>Méthode 2 :</u> Utilisation du théorème de la médiane dans le triangle rectangle BEC

Dans le triangle BEC, la médiane issue de B passe par le milieu K de [EC]. Puisque le triangle est rectangle en B, on a : BK = $\frac{EC}{2}$. Or $\frac{EC}{2}$ = EK. Donc BK = EK.
Le triangle EBK est donc isocèle en K.

4) Nature du quadrilatère ABKE

<u>Méthode 1 :</u> Utilisation du parallélisme (le losange comme parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur)

Nous savons (question précédente) que le triangle EBK est isocèle en K.
Par conséquent : $\widehat{BEK} = \widehat{EBK}$.
Or E, K et C sont alignés et donc : $\widehat{BEK} = \widehat{BEC} = 25°$ (question 1).
On en déduit que : $\widehat{EBK} = 25°$.
De plus, $\widehat{BEA} = 25°$ (voir question 1).
On considère les droites (BK) et (AE) coupées par la sécante (BE). Les angles alternes-internes $\widehat{EBK}$ et $\widehat{BEA}$ sont tous deux égaux à 25°. Alors les droites (BK) et (AE) sont parallèles.
Dans le quadrilatère ABKE :

- nous venons de montrer que les droites (BK) et (AE) sont parallèles ;
- et les droites (AB) et (EK) sont parallèles car (AB) et (EC) sont parallèles (par hypothèse).

Le quadrilatère ABKE est donc un parallélogramme.
En outre, nous savons (hypothèse) que deux côtés consécutifs [AB] et [AE] ont même longueur (égale à 4,5 cm).
Le quadrilatère ABKE est donc un losange.

<u>Méthode 2 :</u> Utilisation des triangles isométriques (le losange comme quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur)

Comme dans la méthode 1, on montre d'abord que : $\widehat{EBK} = \widehat{BEK} = 25°$.
Or le triangle ABE étant isocèle en A on a aussi : $\widehat{BEA} = \widehat{ABE} = 25°$.

Les deux triangles BEK et BEA ont deux angles respectivement égaux (donc leurs troisièmes angles seront aussi respectivement égaux) : ils sont alors semblables (ou homothétiques).
De plus ils ont [EB] comme côté commun (compris entre ces deux angles égaux). On en déduit que les deux triangles BEK et BEA sont isométriques (ou superposables) : ils ont donc leurs trois côtés respectivement de même longueur.
D'où : AB = KE et AE = KB.
Or AB = AE = 4,5 cm.
Donc : AB = KE = AE = KB = 4,5 cm.
Le quadrilatère ABKE a ses quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

5) Longueur de EC

Comme ABKE est un losange (voir question précédente), ses quatre côtés sont de même longueur.
Donc : EK = EA = 4,5 cm.
Comme K est le milieu de [EC] : EC = 2 × EK = 2 × 4,5 cm = 9 cm.
Le segment [EC] mesure 9 cm.

EXERCICE 3

1) Rayon de la terre dans la maquette

<u>Méthode 1</u> : calcul de l'échelle comme coefficient de réduction dans une situation de proportionnalité

La maquette est une réduction de la réalité. Une situation de réduction est une situation de proportionnalité.
Dans la réalité, le rayon du soleil est de 700 000 km, alors que sur la maquette il est de 18 cm.
Pour calculer le coefficient de réduction, les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

Choix 1 : le cm est l'unité de référence

700 000 km = 7×10^5 km = $7 \times 10^5 \times 10^5$ cm = 7×10^{10} cm.
6 400 km = $6{,}4 \times 10^3$ km = $6{,}4 \times 10^3 \times 10^5$ cm = $6{,}4 \times 10^8$ cm.
Le coefficient de réduction est alors : $\frac{18}{7\times 10^{10}} = \frac{18}{7} \times 10^{-10}$.
Le tableau de proportionnalité ci-dessous représente la situation :

Longueurs réelles (en cm)	7×10^{10}	$6{,}4 \times 10^8$
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	?

$\times \frac{18}{7} \times 10^{-10}$

Par conséquent, le rayon de la Terre (en cm) sur la maquette est donné par le calcul suivant :
$\left(\frac{18}{7} \times 10^{-10}\right) \times 6{,}4 \times 10^8 = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{8-10} = \frac{115{,}2}{7} \times 10^{-2} \approx 0{,}16$.
Donc la mesure de son diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-7}$ km = 0,32 cm = 3,2 mm.
Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Choix 2 : le km est l'unité de référence

700 000 km = 7×10^5 km.
6 400 km = $6{,}4 \times 10^3$ km.
18 cm = 0,00018 km = 18×10^{-5} km.
Le coefficient de réduction est alors : $\frac{0{,}00018}{700\ 000} = \frac{18 \times 10^{-5}}{7 \times 10^5} = \frac{18}{7} \times 10^{-5-5} = \frac{18}{7} \times 10^{-10}$.

Le tableau de proportionnalité ci-dessous représente la situation :

Longueurs réelles (en km)	7×10^5	$6{,}4 \times 10^3$
Longueurs sur la maquette (en km)	18×10^{-5}	?

$\times \frac{18}{7} \times 10^{-10}$

Par conséquent, la mesure du rayon de la Terre (exprimée en km) dans la maquette est :

$6{,}4 \times 10^3 \times \frac{18}{7} \times 10^{-10} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{3-10} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-7} \approx 16 \times 10^{-7}$.

Donc la mesure de son diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-7}$ km = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

<u>Méthode 2</u> : calcul de l'échelle avec la formule

L'échelle est donnée par la formule : $\frac{longueur\ sur\ la\ maquette}{longueur\ réelle}$, les longueurs étant données dans les mêmes unités.

Dans la réalité, le rayon du soleil est de 700 000 km, alors que sur la maquette il est de 18 cm.

Choix 1 : le cm est l'unité de référence :

700 000 km = 7×10^5 km = $7 \times 10^5 \times 10^5$ cm = 7×10^{10} cm = 70 000 000 000 cm.

L'échelle est alors : $\frac{18}{7\times 10^{10}}$ ou $\frac{18}{7} \times 10^{-10}$.

Remarque :
Pour toute la suite des calculs, on gardera la valeur exacte de cette échelle.

De plus : 6 400 km = $6{,}4 \times 10^3$ km = $6{,}4 \times 10^3 \times 10^5$ cm = $6{,}4 \times 10^8$ cm = 6 400 000 000 cm.

Par conséquent, le rayon de la Terre (en cm) sur la maquette est donné par le calcul suivant :

$(\frac{18}{7} \times 10^{-10}) \times 6{,}4 \times 10^8 = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{8-10} = \frac{115{,}2}{7} \times 10^{-2} \approx 0{,}16$.

Donc la mesure du diamètre est : $2 \times 0{,}16$ cm = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Choix 2 : le km est l'unité de référence

18 cm = 0,00018 km

L'échelle est alors : $\frac{0{,}00018}{700\ 000} = \frac{18 \times 10^{-5}}{7 \times 10^5} = \frac{18}{7} \times 10^{-5-5} = \frac{18}{7} \times 10^{-10}$.

Remarque :
Pour toute la suite des calculs, on gardera la valeur exacte de cette échelle.

Le rayon de la terre est : 6 400 km = $6{,}4 \times 10^3$ km.

Par conséquent, la mesure du rayon de la Terre (exprimée en km) dans la maquette est :

$6{,}4 \times 10^3 \times \frac{18}{7} \times 10^{-10} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{3-10} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-7} \approx 16 \times 10^{-7}$.

Donc la mesure de son diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-7}$ km = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

<u>Méthode 3 :</u> Recherche d'une quatrième proportionnelle

La maquette est une réduction de la réalité. Une situation de réduction est une situation de proportionnalité qui peut être modélisée par le tableau suivant :

Longueurs réelles (en km)	7×10^5	$6{,}4 \times 10^3$
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	x

Remarque :
Ici, il n'est pas nécessaire d'exprimer les longueurs réelles et sur la maquette dans une même unité. Mais on peut aussi l'envisager : on se ramène alors à l'un des tableaux de la méthode 1.

Variante 1 : Utilisation de l'égalité des rapports

$$\frac{x}{6{,}4 \times 10^3} = \frac{18}{7 \times 10^5}$$

Donc : $x = \frac{18 \times 6{,}4 \times 10^3}{7\times 10^5} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-2} \approx 16 \times 10^{-2}$

Donc la mesure du diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-2}$ cm = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Variante 2 : Utilisation du « produit en croix »

$x = \frac{18 \times 6{,}4 \times 10^3}{7 \times 10^5} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-2} \approx 16 \times 10^{-2}$.

Donc la mesure du diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-2}$ cm = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Variante 3 : Utilisation du coefficient de proportionnalité

Dans cette situation, le coefficient de proportionnalité est : $\frac{18}{7 \times 10^5}$

Longueurs réelles (en km)	7×10^5	$6{,}4 \times 10^3$
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	x

$\times \frac{18}{7 \times 10^5}$

Donc : $x = \frac{18}{7 \times 10^5} \times 6{,}4 \times 10^3 = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-2} \approx 16 \times 10^{-2}$

Donc la mesure du diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-2}$ cm = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Variante 4 : Utilisation de la linéarité multiplicative

Le rapport entre le rayon de la Terre et celui du Soleil est : $\frac{6{,}4 \times 10^3}{7 \times 10^5} = \frac{6{,}4}{7} \times 10^{-2}$.

Longueurs réelles (en km)	7×10^5	$6{,}4 \times 10^3$
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	x

Donc : $x = 18 \times \frac{6{,}4}{7} \times 10^{-2} = \frac{18 \times 6{,}4}{7} \times 10^{-2} \approx 16 \times 10^{-2}$.

Donc la mesure de son diamètre est : $2 \times 16 \times 10^{-2}$ cm = 0,32 cm = 3,2 mm.

Le diamètre de la Terre sur la maquette mesure 0,3 cm ou 3 mm (arrondi au millimètre près).

Remarque :
Dans cette question, le passage à l'unité paraît peu pertinent.

2) Distance réelle Terre- Soleil

Méthode 1 : Utilisation de l'échelle

D'après la question précédente (méthodes 1 et 2), l'échelle de la maquette est : $\frac{18}{7} \times 10^{-10}$.

La distance Terre-Soleil sur la maquette est : 38,47 m.

Cette valeur correspond au produit de la distance réelle par le coefficient de réduction.

Si on note D la mesure de la distance réelle Terre-Soleil (exprimée en m), alors :

$38{,}47 = D \times \frac{18}{7} \times 10^{-10}$.

Soit : $D = 38{,}47 \times \frac{7}{18} \times 10^{10}$.

De plus : $38{,}47 \times \frac{7}{18} \times 10^{10}$ m $= 38{,}47 \times \frac{7}{18} \times 10^{10} \times 10^{-3}$ km $\approx 149605555{,}6$ km

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

Méthode 2 : Recherche d'une quatrième proportionnelle

La distance Terre-Soleil sur la maquette est : 38,47 m = 3 847 cm.

On prolonge le tableau de proportionnalité utilisé dans la question précédente (méthode 3) :

Longueurs réelles (en km)	700 000	D
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	3 847

Variante 1 : Utilisation de l'égalité des rapports

$$\frac{D}{3847} = \frac{700000}{18}$$

Donc : $D = \frac{3847 \times 700000}{18} \approx 149605555{,}6$

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

Variante 2 : Utilisation du « produit en croix »

$D = \frac{700000 \times 3847}{18} \approx 149605555{,}6$.

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

Variante 3 : Utilisation du coefficient de proportionnalité

$\times \frac{700000}{18}$

Longueurs réelles (en km)	700 000	D
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	3 847

$\times \frac{18}{700000}$

$D = \frac{700000}{18} \times 3847 \approx 149605555{,}6$.

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

Variante 4 : Utilisation de la linéarité multiplicative

Le rapport entre le rayon du Soleil et la distance Terre-Soleil sur la maquette est : $\frac{3847}{18}$.

$\times \frac{3847}{18}$

Longueurs réelles (en km)	700 000	D
Longueurs sur la maquette (en cm)	18	3 847

$\times \frac{3847}{18}$

Donc : D = $700000 \times \frac{3847}{18} \approx 149605555{,}6$.

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

Variante 5 : Passage à l'unité

18 cm sur la maquette représentent 700 000 km dans la réalité. Donc 1 cm sur la maquette représente 18 fois moins, soit : $\frac{700000}{18}$ km dans la réalité.

Alors : $D = 3847 \times \frac{700000}{18}$ km $\approx 149605555{,}6$ km.

La distance réelle Terre-Soleil exprimée est d'environ 149 605 556 km (arrondi au km près).

EXERCICE 4

1) Application de l'algorithme pour N = 15

Étape 1 : N = 15
Étape 2 : d = 1
Étape 3 : $d \times (d + 1) = 1 \times 2 = 2$
Étape 4 : $N' = 25 + 2 \times 100 = 225$.
Le nombre obtenu à partir de 15 est 225.

Application de l'algorithme pour N = 5

Étape 1 : N = 5
Étape 2 : d = 0 ;
Étape 3 : $d \times (d + 1) = 0 \times 1 = 0$
Étape 4 : $N' = 25 + 0 \times 100 = 25$
Le nombre obtenu à partir de 5 est 25.

Application de l'algorithme pour N = 145

Étape 1 : N = 145
Étape 2 : d =14
Étape 3 : $d \times (d + 1) = 14 \times 15 = 210$
Étape 4 : $N' = 25 + 210 \times 100 = 21\,025$
Le nombre obtenu à partir de 145 est 21 025.

2) Cet algorithme permet de calculer le carré d'un nombre entier naturel dont le chiffre des unités est 5

Les nombres entiers naturels se terminant par 5 s'écrivent sous la forme suivante : $N = 10d + 5$, où d désigne le nombre de dizaines de ce nombre.
Alors : $N^2 = (10d + 5)^2 = 100d^2 + 2 \times 10d \times 5 + 25 = 100d^2 + 100d + 25$.
Appliquons l'algorithme au nombre N :

Étape 1 : $N = 10d+5$
Étape 2 : d
Étape 3 : $d \times (d + 1) = d^2 + d$
Étape 4 : $N' = 25 + (d^2 + d) \times 100 = 100d^2 + 100d + 25$.

On retrouve alors : $N' = N^2$.
L'élève a raison, on obtient bien le carré de N.

TROISIEME PARTIE

SITUATION 1

1) Explication des choix du concepteur

Le périmètre du rectangle est : (3 cm + 4 cm) × 2 = 14 cm. Le choix de 14 cm correspond donc à la bonne réponse.
Les autres réponses sont révélatrices d'erreurs qui pourraient être faites par les élèves :

- la réponse 7 cm pourrait correspondre à un élève qui oublierait de multiplier par 2 en utilisant la formule du périmètre d'un rectangle : $2 \times (L + l)$; cela pourrait être aussi la réponse d'un élève qui additionnerait les données de l'énoncé pour produire une réponse ;
- la réponse 12 cm pourrait correspondre à un élève qui a utilisé la formule donnant l'aire d'un rectangle : $L \times l$.
- la réponse 24 cm pourrait correspondre à un élève qui aurait mélangé les deux formules et appliquerait : $2 \times (L \times l)$.

2) Trois valeurs pour compléter la question 3

Dans les trois réponses doit figurer la bonne réponse : (3 cm + 4 cm + 3 cm) × 2 = 20 cm.
De plus, il semble judicieux de proposer la réponse erronée 26 cm, qui correspond à la somme des périmètres des deux figures (14 cm + 12 cm) ; cette erreur a pour origine une confusion avec le principe d'additivité valable pour les aires.
Ensuite, on pourrait choisir, comme pour les autres questions, des réponses qui pourraient être obtenues par des raisonnements incorrects. On pourra choisir notamment parmi les propositions suivantes :

- 21 cm : cette réponse pourrait correspondre à la somme des aires des deux figures (12 cm^2 + 9 cm^2) ou bien au calcul de l'aire de la figure en utilisant la formule (3 cm × 7 cm) ;
- 10 cm : cette réponse pourrait correspondre soit au demi-périmètre de la figure (3 cm + 7 cm), soit au résultat de l'addition de toutes les données des deux questions précédentes (3 cm + 4 cm + 3 cm) ;
- 42 cm : cette réponse pourrait correspondre à l'application d'une formule erronée du périmètre (2 × (3 cm × 7 cm) = 2 × 21 cm^2).

SITUATION 2

1) Savoirs relatifs au domaine « grandeurs et mesures »

Remarque 1 :
La question ne précise pas si l'on doit se limiter aux éléments de réponse fournis par les Instructions Officielles figurant en annexe, ni s'il faut se référer uniquement à des savoirs du niveau dans lequel est donné ce problème.

Remarque 2 :
Cette question laisse à supposer qu'une seule procédure pourrait permettre de réussir cet exercice. Or selon la place de l'exercice dans la progression (avant ou après l'apprentissage de la formule de l'aire d'un rectangle), selon les supports utilisés (papier blanc ou quadrillé par exemple), les savoirs et savoir-faire mobilisés pourront être différents.

Remarque 3 :
L'expression « savoirs à mobiliser » ne distingue pas savoirs et savoir-faire. Ceux-ci étant indifférenciés dans les IO, on peut néanmoins penser que les deux sont attendus.

Nonobstant ces remarques préliminaires, on peut supposer que le principal « savoir à mobiliser », attendu du candidat, est la formule de l'aire d'un rectangle (« *Calculer l'aire (…) d'un rectangle en utilisant la formule appropriée* »).
Par ailleurs, le candidat pourra proposer une autre compétence parmi celles proposées ci-dessous :
- « *Connaître et utiliser les unités d'aire usuelles* » (savoir que pour obtenir une aire en cm^2 il faut multiplier des longueurs en cm).
- « *Résoudre des problèmes dont la résolution implique simultanément des unités différentes de mesure* » (le cm et le cm^2).
- « *Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs* » (ici, la règle graduée).

- Savoir tracer un segment de longueur donnée avec la règle graduée.

Remarque :
Un élève qui ne connaitrait pas la formule pourrait résoudre le problème par des essais de construction de rectangles et des dénombrements de carrés de 1 cm de côté. Dans ce cas, la compétence mobilisée serait : « mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. »

2) Pré-requis relevant d'autres domaines que « grandeurs et mesures »

Remarque :
Cette question est aussi ambiguë que la précédente…

Le candidat pourra proposer deux prérequis parmi ceux proposés :

- dans le domaine « nombres et calculs » :
    - Savoir décomposer 120 en produit de 2 facteurs ;
    - Savoir réaliser des calculs additifs ou multiplicatifs ;
- dans le domaine « géométrie » :
    - Savoir tracer un rectangle avec les instruments de géométrie (règle graduée / équerre ou gabarit d'angle droit).

SITUATION 3

Ces deux problèmes permettent de travailler la distinction aire/périmètre.
L'utilisation d'un quadrillage place d'emblée les problèmes proposés dans le cadre de la mesure tout en évitant les difficultés éventuelles de mesure avec la règle graduée. Le quadrillage permet aux élèves de compter les carreaux pour déterminer l'aire et le périmètre des figures. Pour le périmètre, les élèves devront compter le nombre de côtés de petits carreaux sur le contour de la figure (l'unité de longueur est la longueur du côté d'un carreau). Pour l'aire, ils devront compter le nombre de carreaux « à l'intérieur » de la figure (l'unité d'aire est l'aire d'un carreau).

SITUATION 4

1) Critères de classement

Les critères de classement possibles correspondent aux différentes interprétations données aux expressions « la plus petite », « la plus grande », c'est-à-dire au choix de la grandeur considérée. On en proposera trois parmi les suivants :

- si l'on considère un classement selon « la hauteur », c'est-à-dire ici selon les longueurs des côtés « verticaux » des trois rectangles, ou selon « la longueur », c'est-à-dire selon les longueurs des plus grands côtés, alors on obtient : « A plus petit que B, B plus petit que C » ;

- si l'on considère un classement selon « la largeur», c'est-à-dire ici selon les longueurs des côtés « horizontaux» des trois rectangles, ou selon les longueurs des plus petits côtés, alors on obtient : « C plus petit que A, A plus petit que B » ;

- si l'on considère un classement selon la grandeur périmètre, alors on obtient : « A plus petit que B, B aussi grand que C » ;

- si l'on considère un classement selon la grandeur aire, alors on obtient : « C plus petit que A, A plus petit que B ».

2) Sens des termes « le plus de … », « le moins de … »

Pour le groupe d'élèves 1, le classement est fait selon la « largeur » des rectangles (longueur du plus petit côté ou ici du côté « horizontal »), sans tenir compte de la longueur du plus grand côté.
Pour ces élèves, « le plus de papier » signifie « le plus large ».

Pour le groupe d'élèves 2, le classement est fait selon le périmètre des rectangles.
Pour ces élèves, « le plus de papier » signifie « le contour le plus long », autrement dit « le plus grand périmètre ».

Pour le groupe d'élèves 3, le classement est fait selon l'aire des rectangles, par superposition des surfaces (après découpage-recollement pour les figures A et C).
Pour ces élèves, « le plus de papier » signifie « la plus grande aire ».

3) Rectangles d'aires et de périmètres différents conduisant à des classements différents

Plusieurs propositions peuvent être envisagées, reprenant ou non les exemples proposés, par exemple :

Proposition 1 :

- un rectangle A de 9 cm sur 10 cm, de périmètre 38 cm et d'aire 90 cm^2.
- un rectangle B' de 10 cm sur 12 cm, de périmètre 44 cm et d'aire 120 cm^2.
- un rectangle C de 4 cm sur 20 cm, de périmètre 48 cm et d'aire 80 cm^2.

Le classement selon le périmètre serait alors : p(A) < p(B') < p(C).
Le classement selon l'aire serait alors : a(C) < a(A) < a(B').
Ainsi, ces trois rectangles ont bien des périmètres tous différents, des aires toutes différentes, et permettent un classement des aires qui est différent de celui des périmètres.

Proposition 2 :

- un rectangle A de 9 cm sur 10 cm, de périmètre 38 cm et d'aire 90 cm^2.
- un rectangle B de 10 cm sur 14 cm, de périmètre 48 cm et d'aire 140 cm^2.
- un rectangle C' de 4 cm sur 16 cm, de périmètre 40 cm et d'aire 64 cm^2.

Le classement selon le périmètre serait alors : p(A) < p(C') < p(B).
Le classement selon l'aire serait alors : a(C') < a(A) < a(B).
Ainsi, ces trois rectangles ont bien des périmètres tous différents, des aires toutes différentes, et permettent un classement des aires qui est différent de celui des périmètres.

Proposition 3 :

- un rectangle A' de 10 cm sur 10 cm, de périmètre 40 cm et d'aire 100 cm^2.
- un rectangle B' de 10 cm sur 12 cm, de périmètre 44 cm et d'aire 120 cm^2.
- un rectangle C'' de 2 cm sur 22 cm, de périmètre 48 cm et d'aire 44 cm^2.

Le classement selon le périmètre serait alors : p(A') < p(B') < p(C'').
Le classement selon l'aire serait alors : a(C'') < a(A') < a(B').
Ainsi, ces trois rectangles ont bien des périmètres tous différents, des aires toutes différentes, et permettent un classement des aires qui est différent de celui des périmètres.

EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE

SUJETS

VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMEN DES ESPE ET DU BREVET DES COLLÈGES)

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Affirmation 1 :
La somme de deux nombres rationnels non décimaux est un rationnel non décimal.

2. Au sein d'une entreprise, tous les salaires ont été augmentés de 3%.
Affirmation 2 :
L'écart entre le salaire le plus élevé et le salaire le moins élevé dans cette entreprise a aussi augmenté de 3%.

3. Affirmation 3 :
Le nombre 3675 possède exactement 17 diviseurs distincts.

4. Quatre points distincts A, B, C et D sont sur un cercle de centre O.
Affirmation 4 :
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

5. Un satellite fait 95 fois le tour de la Terre en exactement 7 jours.
Affirmation 5 :
La durée d'une rotation du satellite autour de la Terre (arrondie à la seconde) est égale à 1 h 46 min 6 s.

6. Affirmation 6 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.

7. Affirmation 7 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.

8. Le compteur de vitesse d'une voiture exagère de 10 %.

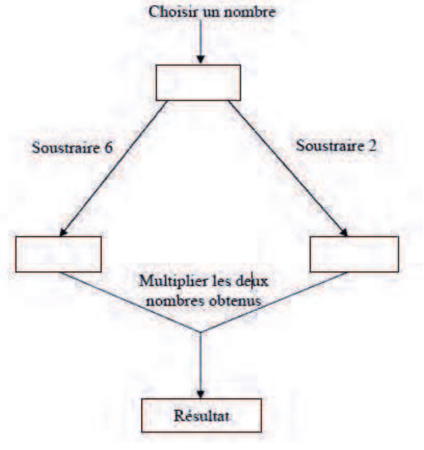
Affirmation 8 : Si le compteur indique 100 km/h, on roule en réalité à 90 km/h.

9. On donne : 1To (téraoctet) = 10^{12} octets et 1 Go (gigaoctet) = 10^9 octets. On partage un disque dur de 1,5 To en dossiers de 60 Go chacun.
Affirmation 9 :
Le nombre de dossiers obtenus est égal à 25.

10. Affirmation 10 :
Pour n'importe quel nombre entier naturel n, $(n+1)^2-(n-1)^2$ est un multiple de 4.

11. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Affirmation 11 :
La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique est de $\frac{20}{32}$.

12. Voici, ci-contre, un programme de calcul.



Affirmation 12a.
Le programme peut donner un résultat négatif.

Affirmation 12b.
Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres.

13. Dans un référendum local, 40% des femmes et 70% des hommes ont répondu « OUI », à la question posée. Sachant que l'électorat contient 65% de femmes et que l'on n'a comptabilisé aucun vote blanc ou nul :

Affirmation 13a :
Les hommes ayant voté « OUI » représentent environ un quart des électeurs.

Affirmation 13b :
La majorité des votants a répondu « NON ».

14. Affirmation 14 :
Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

15. Affirmation 15 :
Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle.

16. ABCD est un quadrilatère convexe tel que : $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = 1$, $\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{3}$ et les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{D}}$ sont droits.

Affirmation 16a :
ABCD est inscriptible dans un cercle de rayon 1.

Affirmation 16b:
L'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ vaut 120°.

17. Les promenades sur la Seine

Selon l'Observatoire du tourisme fluvial en Ile de France, « la croisière-promenade en Ile-de-France a attiré, en 2013, 7,5 millions de passagers, enregistrant une légère baisse en terme de fréquentation de l'ordre de 1,8% par rapport à 2012 ».
Par ailleurs, un document de l'office du tourisme de Paris avance les données suivantes :

Palmarès de la fréquentation mondiale des musées en 2012

	Nombre de visiteurs	Musées	Villes
1	**9 660 609**	**Musée du Louvre**	**Paris**
2	6 115 881	Métropolitain Museum of Art	New-York
3	5 575 946	British Museum	Londres
4	5 304 710	Tate Modern	Londres
5	5 163 902	National Gallery	Londres
6	5 064 546	Vatican Muséums	Vatican
7	4 360 815	National Palace Museum	Taipei
8	4 200 000	National Gallery of Art	Washington DC
9	**3 800 000**	**Centre Pompidou**	**Paris**
10	**3 600 000**	**Musée d'Orsay**	**Paris**

Affirmation 17a :
En 2012, le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été inférieur au nombre d'entrées au Musée du Louvre, mais supérieur au nombre d'entrées au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis.

Une navette de transport sur la Seine indique que ses bateaux se déplacent à allure régulière, à 12 km/h. Elle propose un parcours entre la Tour Eiffel et le Jardin des Plantes dont la durée affichée est 50 minutes, et qui comporte trois escales intermédiaires.
On considère que la distance qui sépare les embarcadères de la Tour Eiffel et du Jardin des Plantes est 6 km.

Affirmation 17b :
Pendant ce trajet, la durée effective de déplacement est inférieure à la durée des escales.

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Arithmétique – Numération – Probabilités – Géométrie

EXERCICE 1 : rendez-vous de comètes (d'après un sujet de Toulouse)

Les comètes de Halley et Olbers sont passées à proximité de la Terre respectivement en 1986 et 1956. L'orbite de la comète de Halley est d'environ 76 ans (son prochain passage aura donc lieu en 2062) et celle de la comète de Olbers est d'environ 70 ans.

1) Parfois les deux comètes passent près de la Terre au cours de la même année…

- **a)** Montrer que les deux comètes sont passées près de la Terre en 1606.
- **b)** À partir de l'année 1606, combien d'années se seront écoulées avant que les deux comètes soient à nouveau proches de la Terre durant la même année ?
- **c)** Combien de passages la Comète de Halley aura-t-elle alors effectués à proximité de la Terre après celui de 1606 ?

2) Vérification à l'aide du tableur

Pour obtenir le résultat des questions b) et c) précédentes, un enseignant utilise le tableur. On a reproduit ci-contre le début de sa feuille de calcul.

	A	B	C	D
1		Halley		Olbers
2	1	76	1,08571429	70
3	2	152	2,17142857	
4	3	228	3,25714286	
5	4	304	4,34285714	
6	5	380	5,42857143	
7	6	456	6,51428571	

- **a)** Que représentent les valeurs de la colonne B de cette feuille de calcul ?
- **b)** Proposer une formule pour la cellule B3 que l'on peut recopier vers le bas pour obtenir les valeurs suivantes de la colonne B.
- **c)** Expliquer pourquoi si on saisissait dans la cellule C2 la formule =B2/D2, on n'obtiendrait pas, par recopie vers le bas, les autres valeurs affichées dans la colonne C sur la copie d'écran ci-dessus. Proposer une formule pour la cellule C2 que l'on peut recopier vers le bas pour obtenir les valeurs suivantes de la colonne C ?
- **d)** Expliquer comment on peut utiliser cette feuille de calcul pour obtenir les résultats des questions 1-b) et 1-c).

EXERCICE 2 : numération (d'après un sujet de Dijon)

1) Donner l'écriture en base sept du nombre qui s'écrit 2491 en base dix.
2) Convertir en base dix le nombre qui s'écrit $\overline{3645}_{sept}$ en base sept.
3) Effectuer, en la posant et sans passer par la base dix, l'opération suivante :

$$\overline{5012}_{sept} - \overline{3534}_{sept}.$$

EXERCICE 3 : probabilités (d'après un sujet de Draguignan)

Dans un sac, on place 100 cartes numérotées de 1 à 100.

1) Quelle est la probabilité de tirer le numéro 49 ?

2) Quelle est la probabilité de tirer un multiple de 15 qui n'est pas un multiple de 3 ?

3) a) Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair ?

   b) On tire une carte dans le sac, on la remet dans le sac, puis on tire une deuxième fois une carte dans le sac et on fait le produit des deux nombres tirés. Quelle est la probabilité d'obtenir un produit impair ?

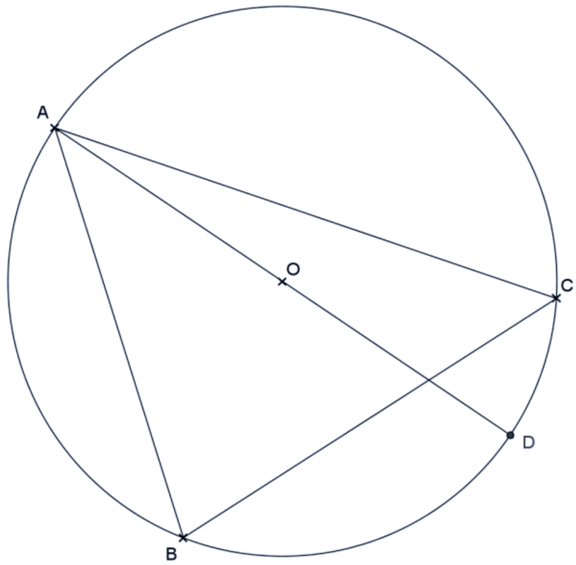
4) Pour un entier naturel n inférieur ou égal à 100, on s'intéresse à l'évènement E_n suivant : « Tirer un multiple de n ».

   a) Quel est l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles la probabilité de l'évènement E_n est la plus petite ?

   b) Quelle(s) est(sont) la(les) valeur(s) de n pour laquelle(lesquelles) la probabilité de l'évènement E_n est la plus grande ?

EXERCICE 4 : géométrie plane (d'après un sujet de Laval)

A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et [AD] un diamètre de ce cercle.
On complètera la figure fournie au fur et à mesure de la résolution du problème.



1) Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?

2) La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.

3) La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en J (distinct de A), la droite (CE) en H et la droite (BC) en I.

   a) Démontrer que (BH) est perpendiculaire à (AC).

   b) Démontrer que BHCD est un parallélogramme.

4) On appelle K le point d'intersection des diagonales de BHCD. Démontrer que K est milieu du segment [HD].

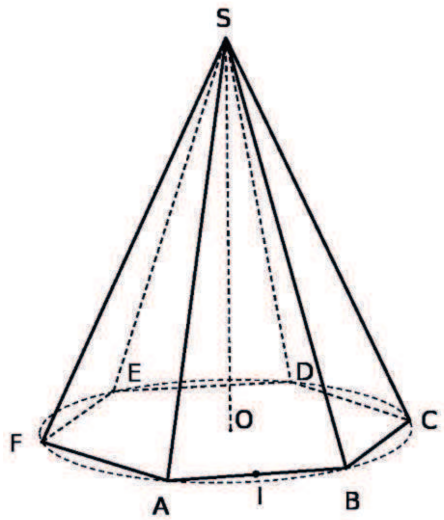
5) a) Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.

   b) Montrer que I est le milieu de [HJ].

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

Tipi à base hexagonale

Des étudiants veulent construire un tipi (une sorte de tente) de forme pyramidale. La base de cette pyramide est un hexagone régulier ABCDEF dont les côtés ont pour longueur 2 mètres. On appelle O le centre du cercle circonscrit à cet hexagone régulier (voir figure). Le sommet S de la pyramide est situé à la verticale de O, à une hauteur de 6 mètres (donc SO = 6 m).



On rappelle la formule donnant le volume V d'une pyramide de base d'aire A et de hauteur h :

$$V = \frac{1}{3}A.h$$

1) Étude du sol du tipi – Plan de l'hexagone

Les étudiants disposent d'un piquet, une ficelle et un décamètre pour tracer le contour du tipi au sol. Ils décident de faire un plan.

a) Montrer que $\widehat{AOB} = 60°$.

b) Justifier que le triangle OAB est équilatéral.

c) Donner un programme de construction, à la règle graduée et au compas, permettant de représenter à l'échelle $\frac{1}{100}$ l'hexagone ABCDEF et son cercle circonscrit.

d) Réaliser cette figure sur la copie en laissant apparents les traits de construction.

2) Estimation du volume du tipi.

Pour évaluer les besoins de chauffage, on veut estimer le volume du tipi.
On appelle I le milieu du segment [AB].

a) Justifier que (OI) est perpendiculaire à (AB).

b) Calculer la longueur OI sur le plan. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0,1 cm près.

c) En déduire l'aire du triangle OAB, puis l'aire H de l'hexagone ABCDEF sur le plan. On donnera les valeurs exactes, ainsi que les valeurs approchées à 0,1 cm^2 près.

d) Quelle est l'aire, arrondie à 0,1 m^2 près, de l'hexagone en vraie grandeur (c'est-à-dire l'aire du sol du tipi) ?

e) En déduire le volume V de la pyramide, arrondi à 0,1 m^3 près.

3) Parois latérales

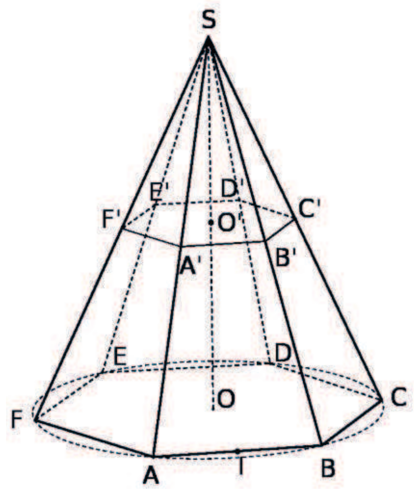
On veut estimer l'aire de toile de tente nécessaire pour fabriquer les faces latérales du tipi.
On admet que la droite (SO) est perpendiculaire au sol.
On donnera les valeurs exactes des longueurs et des aires.

a) Calculer la longueur SI (on pourra s'appuyer sur une figure plane bien choisie).

b) En déduire l'aire du triangle SAB, puis l'aire totale des faces triangulaires du tipi.

4) Création d'un toit à mi-hauteur

Pour économiser le chauffage, une étudiante propose d'isoler le tipi à la moitié de sa hauteur. Il faut pour cela créer un plafond en toile, qui a la forme d'un hexagone régulier A'B'C'D'E'F' avec A', B', C', D', E' et F' respectivement milieu de [SA], [SB], [SC], [SD], [SE] et [SF] (voir figure ci-dessous). On désigne par O' le milieu de [OS] (O' est donc dans le plan de l'hexagone A'B'C'D'E'F').



On donnera les valeurs exactes de chaque longueur, aire ou volume demandés.

a) Calculer la longueur A'B' en justifiant votre démarche.

b) Déterminer l'aire H' de l'hexagone A'B'C'D'E'F' et le volume V' de la petite pyramide SA'B'C'D'E'F'.

5) Fixation de la toile

Pour fixer la toile des côtés du tipi au sol, il faut placer des piquets à intervalle régulier, le long des côtés de l'hexagone. On décide qu'il y aura obligatoirement un piquet à chaque sommet de cet hexagone. Comme le décamètre utilisé par les étudiants est gradué tous les 5 cm, on décide que les piquets seront séparés par une distance L correspondant à un multiple de 5 cm (on rappelle que la longueur d'un côté de l'hexagone ABCDEF est égale à 2 mètres).

a) Donner tous les diviseurs de 200.

b) Combien y a-t-il de valeurs de L possibles ? En donner la liste.

c) Les étudiants décident finalement que L sera égale à 25 cm. Donner le nombre total de piquets utilisés autour de l'hexagone.

PROBLÈME DE RECHERCHE DE MAXIMUM D'UNE FONCTION D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

A - PREMIÈRE PROPRIÉTÉ

On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble de tous les couples de nombres réels positifs a et b vérifiant la propriété (P) : « $a^2 + b^2 = 100$ ».

1) Justifier que si $(a\,;b)$ est un couple de solutions, alors a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 10.

2) Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ vérifiant la propriété (P).

3) Pour quelle valeur de a, a réel positif, le couple $(a\,;a)$ vérifie-t-il la propriété (P) ? On écrira a sous la forme $p\sqrt{q}$ avec p et q entiers naturels, q le plus petit possible.

B - RECHERCHE D'UNE AIRE MAXIMALE

On considère un segment [AC] de longueur 10 cm et on s'intéresse aux rectangles ABCD dont [AC] est une diagonale.

1) Montrer qu'il existe un cercle (C) dont on donnera les caractéristiques, auquel appartiennent tous les points B et D.

2) On considère le projeté orthogonal H de B sur (AC). Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de AC et BH.

3) Où faut-il placer le point B sur (C) pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximale ? Justifier la réponse et préciser dans ce cas la nature du rectangle ABCD.

4) En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer la propriété suivante : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est égale à 100 est maximal lorsque $a = b$ ».

5) Comment doit-on modifier l'énoncé de cette partie pour pouvoir généraliser cette propriété et énoncer : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est fixée est maximal lorsque $a = b$ » ?

C - RECHERCHE D'UN PÉRIMÈTRE MAXIMAL

On considère toujours un segment [AC] de longueur 10 cm et on s'intéresse aux rectangles ABCD dont [AC] est une diagonale.
On note x la mesure de la longueur du segment [AB] en centimètres.

Remarque : le rectangle ABCD peut, dans certains cas particuliers, être aplati. Son aire est alors nulle et son périmètre est égal au double de la longueur du segment obtenu.

1) Montrer que la mesure en cm du périmètre du rectangle ABCD est égale, en fonction de x, à $2 \times \left(x + \sqrt{100 - x^2}\right)$.

On a représenté en annexe, dans un repère orthogonal du plan, les variations respectives du périmètre et de l'aire de ABCD en fonction de x.

2) Laquelle de ces deux courbes (C1) et (C2) représente les variations du périmètre du rectangle ABCD en fonction de x ? Justifier.

3) Déterminer par lecture graphique un encadrement d'amplitude 1 de la valeur de x pour laquelle le périmètre de ABCD soit maximal.

4) On a construit à l'aide d'un tableur le tableau de valeurs suivant :

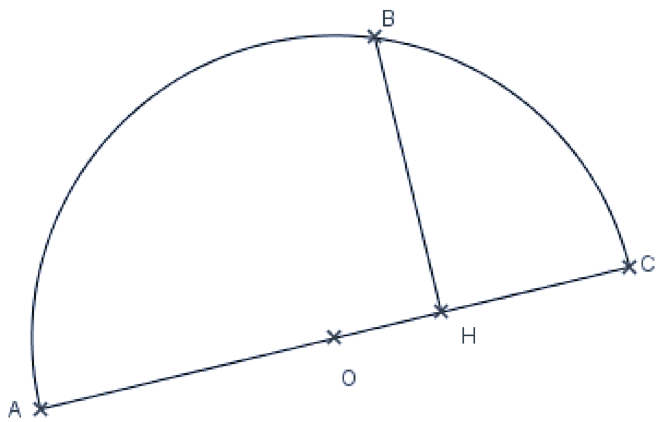
	A	B
1	***x***	***périmètre en fonction de x***
2	6,5	28,19868415
3	6,6	28,22531198
4	6,7	28,24722196
5	6,8	28,26424222
6	6,9	28,27618734
7	7	28,28285686
8	7,1	28,28403351
9	7,2	28,27948126
10	7,3	28,2689429
11	7,4	28,25213738
12	7,5	28,22875656

Dans ce tableur la fonction racine carrée se note RACINE ( ).
Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B.

5) À l'aide du tableau, et connaissant la courbe représentative des variations du périmètre en fonction de x, déterminer une valeur approchée au dixième près de la valeur de x qui semble permettre d'obtenir le périmètre maximal.

D - DERNIER PROBLÈME…

1) Un point H est mobile sur un segment [AC]. On considère le demi-cercle de diamètre [AC] et la perpendiculaire à (AC) passant par H qui coupe ce demi-cercle en B.



a) Montrer que les angles $\widehat{\mathrm{ABH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}}$ sont égaux. En déduire que $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$.

b) En déduire que $\mathrm{BH}^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{CH}$.

c) En déduire que le produit de deux nombres positifs dont la somme est constante est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

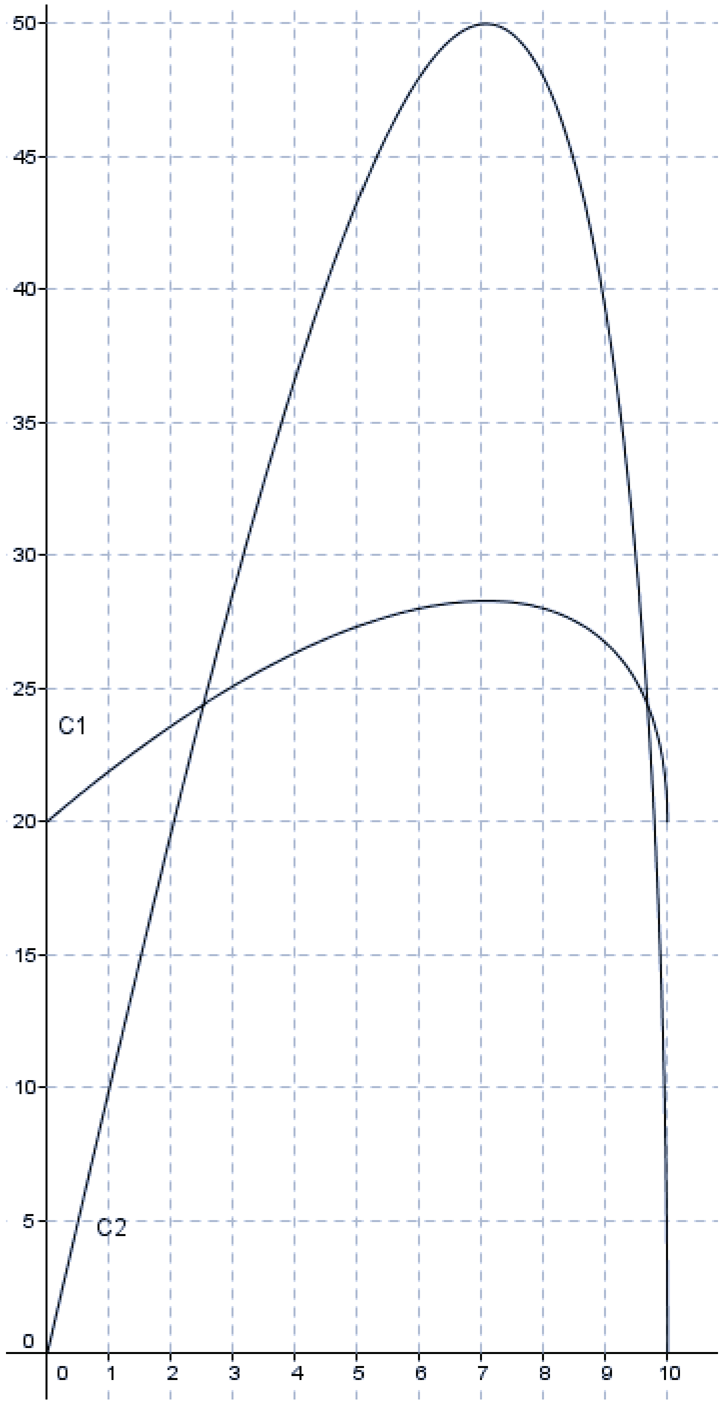
2) Soit deux nombres x et y dont la somme est fixée et égale à 10.

a) Montrer que le produit de ces deux nombres peut s'écrire, en fonction de x : $p(x) = 10x - x^2$.

b) Montrer que $p(x) = -(x-5)^2 + 25$.

c) En déduire que $p(x)$ admet un maximum et préciser en quelle valeur. Quelle propriété retrouve-t-on ?

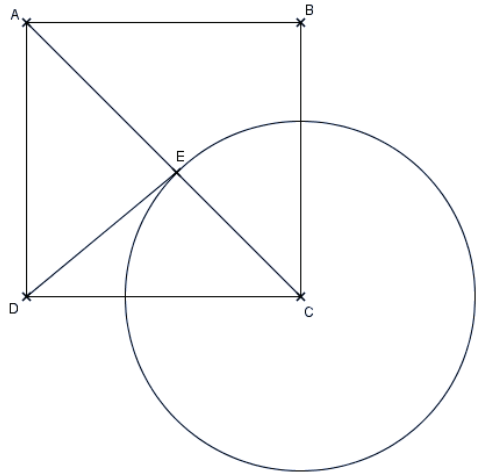
ANNEXE



EXERCICE DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET D'ALSACE

Lors d'une séance de géométrie, un professeur distribue à deux groupes de sa classe une figure géométrique complexe (la figure ci-contre qui n'est pas à l'échelle). La tâche pour chaque groupe consiste à rédiger les différentes étapes sur une fiche de construction qui devront permettre à d'autres groupes de construire la figure.

1) Préciser le niveau de la classe. Justifier.
2) Analyser les productions ci-après, en repérant notamment les erreurs et en formulant des hypothèses sur leurs origines.



Production 1

Trace un cercle de 3 cm
Trace un carré avec un coin dans le cercle
de 4,7cm de longueur et de 4,7cm de largeur
Trace le segment du coin dans le cercle à l'autre coin.
Trace le segment du coin en bas à gauche jusque
là où le cercle passe sur le segment des 2
coins du carré.
Écris A, B, C, D pour les coins du carré.
Écris E pour l'endroit où le cercle
passe dans le carré

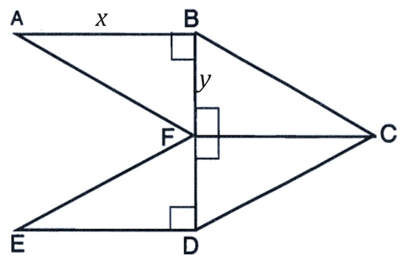
Production 2

Trace un carré ABCD
de 4,8 cm. Trace un trait entre A et C
Trace E qui est à 3 cm de C sur le
trait.
Trace un cercle qui a pour centre C
et qui passe par E.
Trace un trait entre D et E.

EXERCICE SUR LES AIRES
ISSU DE SUJETS PROPOSÉS À DRAGUIGNAN ET À LYON
(D'APRÈS TOULOUSE 99)

On considère la figure ci-contre.
Les quatre triangles ABF, CFB, EDF et CFD sont superposables.
On note AB = x et BF = y.
1) On veut que :
- l'aire de la figure soit 96 cm^2,
- $x > y$,
- x et y soient des entiers.

Donner toutes les valeurs possibles du couple (x ; y).



2) Les conditions précédentes étant vérifiées, montrer qu'il existe un seul couple (x ; y) tel que le périmètre du polygone ABCDEF soit 56 cm.

3) Le document 1[1], en annexe, a été distribué à des élèves, en leur faisant remarquer que la photocopie distribuée ne respectait pas les dimensions réelles *[elles sont en effet de 2,4 cm ; 3,2 cm et 4 cm sur la photocopie distribuée aux élèves]*.

Le document 2, en annexe, présente les réponses de trois élèves.

a) Donner un argument en faveur d'un document ne respectant pas les dimensions indiquées sur les figures.

b) Identifier la règle implicite utilisée par Alexia et discuter de sa non-pertinence.

c) En analysant la production de Bastien, évaluez les connaissances de cet élève sur les notions d'aire et de périmètre.

d) Pour répondre à la question b), plusieurs élèves ont donné la réponse 6 × 4 = 24.
Donnez deux interprétations possibles du calcul 6 × 4 = 24.

e) Interpréter la non-réponse en d) de Cyril.

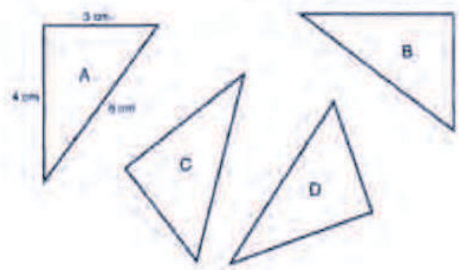
[1] Le document 1 n'est pas à la même échelle que celui distribué aux élèves.

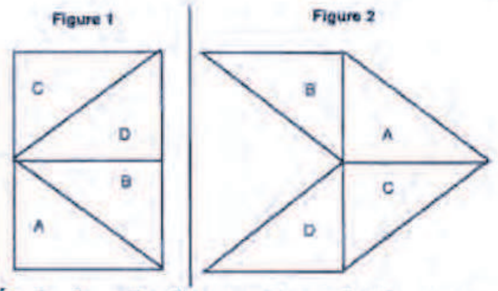
ANNEXE

Le document suivant a été distribué à des élèves de CM2.

Document 1

Les triangles A, B, C et D sont identiques.
L'aire de chacun est de 6 cm^2





Écrire les calculs permettant de trouver :

a) Le périmètre de la figure 1
b) L'aire de la figure 1
c) Le périmètre de la figure 2
d) L'aire de la figure 2.

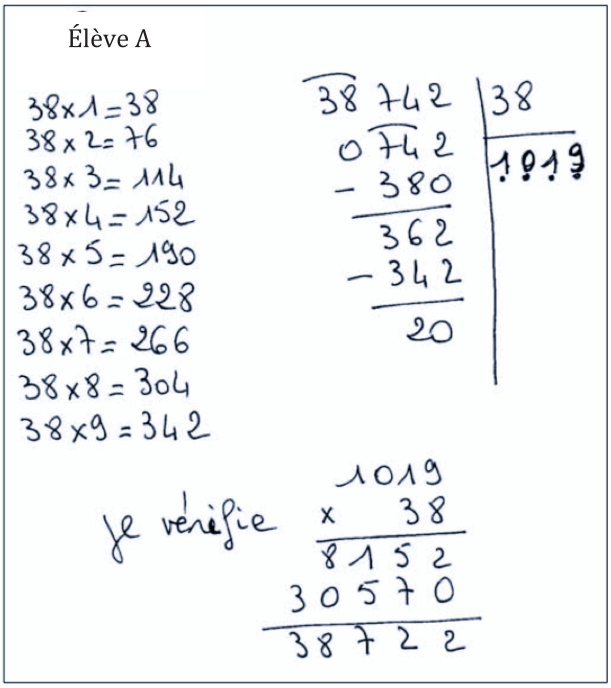
Voici les réponses de trois élèves :

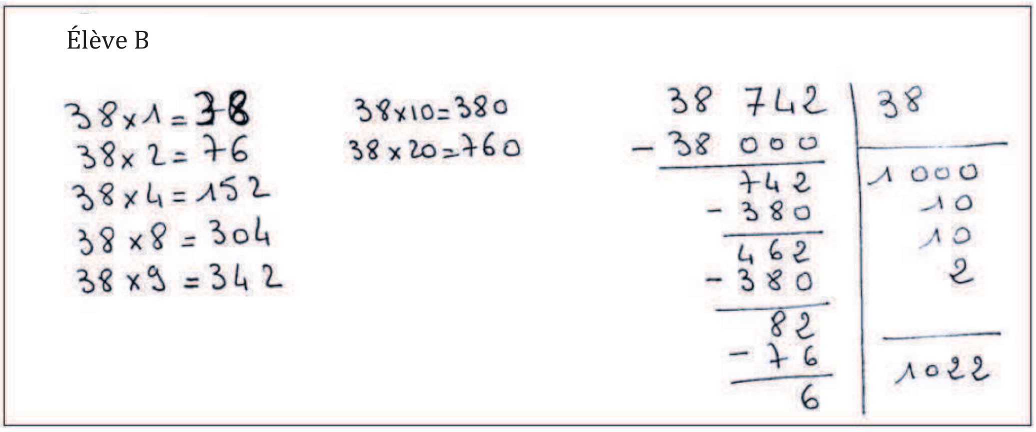
Document 2

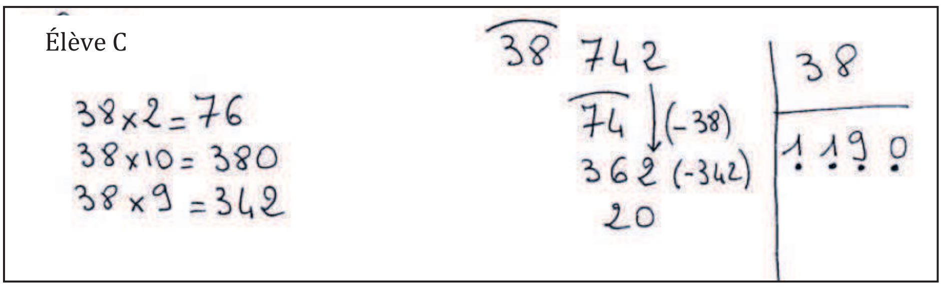
Alexia	a/ $(3+5+4)\times 4 = 42$ cm
Bastien	a) $(2,2 + 3,4) \times 2 = 11,2$ b) $2,2 \times 3,4 = 7,48$ c) $2,2 + 2,7 + 2,7 + 2,2 + 2,7 + 2,7 = 15,2$ d) A et C on le met dans le trou entre B et D on optiendra la même figure que la précédente c'est la même aire : 7,48
Cyril	b) $6 \times 4 = 24$ d) je ne sais pas calculer

EXERCICE SUR LA DIVISION EUCLIDIENNE ISSU D'UN SUJET PROPOSÉ À LA ROCHE SUR YON

Vous trouverez ci-dessous trois productions d'élèves de CM2 qui ont effectué la division euclidienne de 38 742 par 38.







1) Poser et effectuer la division euclidienne de 87 655 par 38 :
   a) A votre manière.
   b) En utilisant la technique de l'élève B.
2) Expliciter deux éléments caractéristiques qui permettent de distinguer ces deux techniques (la vôtre et celle de l'élève B).
3) Relever les erreurs éventuelles dans chacune des trois productions d'élèves et formuler des hypothèses sur leur origine.
4) Les élèves A et C ont écrit quatre points à l'emplacement du quotient.
   a) Expliciter la procédure que ces élèves semblent avoir utilisée pour déterminer le nombre de points. Justifier mathématiquement cette procédure.
   b) Donner un intérêt pédagogique et une limite à l'utilisation de ces points.

EXERCICE SUR LA PROPORTIONNALITÉ D'APRÈS UN SUJET DE DIJON

Analyse de productions d'élèves ayant eu à résoudre un problème relevant de la proportionnalité dans le cadre d'une évaluation nationale

Vous trouverez ci-après trois productions d'élèves d'une même classe de CM2, réalisées lors de l'évaluation nationale CM2 de 2010 (Item 19).

Pour chaque production :

- décrire les procédures utilisées par les trois élèves ;
- préciser les erreurs éventuelles et formuler des hypothèses sur leur origine.

Élève 1

Pour faire une mousse au chocolat, Louis a trouvé une recette qui permet de faire quatre coupes. Il faut :

- 2 œufs
- 100 g de chocolat
- 30 g de sucre

Calcule les quantités de chacun des ingrédients (œufs, chocolat, sucre) pour faire 10 coupes.

Réponse : Les quantités pour 10 coupes sont

- 6 oeufs
- 300 g de ~~sucres~~ chocolats
- 70 g de sucres

Explique ton raisonnement :

J'ai déjà fait pour 5 personnes sa faisait 3 oeufs 150 g 35 g et après j'ai fait le double de 5 et j'ai trouvé que sa faisait : 6 oeufs, 300 g de chocolats, 70 g de sucres.

Fais tes calculs ici.

Pour 8 personnes.
4 oeufs
100 g de chocolat
60 g de sucre.

Pour 5 personnes.
3 oeufs.
150 g chocolats
35 g sucres

Pour 10 personnes :
6 oeufs
300 g de chocolat
70 g de sucres

Item 99			Item 100		
1	9	0	1	9	0

Élève 2

Pour faire une mousse au chocolat, Louis a trouvé une recette qui permet de faire quatre coupes. Il faut :

- 2 œufs
- 100 g de chocolat
- 30 g de sucre

Calcule les quantités de chacun des ingrédients (œufs, chocolat, sucre) pour faire 10 coupes.

Réponse : Les quantités pour 10 coupes sont

- 5 œufs
- 250 g de chocolat
- 75 g de sucre

Explique ton raisonnement :

J'ai tout diviser par 2 j'ai obtenu 1, 50 et 15 et j'ai doublé les nombre de dépar j'ai obtenu 4, 200 / et 60. j'ai aditionné le tout 4+1=5, 200 : 50=250 et 15+60=75 et nous avons la recette "Bonne Appétit"

Fais tes calculs ici.

quantité de coupe	œuf	chocolat (g)	sucre (g)
4	2	100	30
10	5	250	75

Item 99			Item 100		
1	9	0	1	9	0

Élève 3

Pour faire une mousse au chocolat, Louis a trouvé une recette qui permet de faire quatre coupes. Il faut :

- 2 œufs
- 100 g de chocolat
- 30 g de sucre

Calcule les quantités de chacun des ingrédients (œufs, chocolat, sucre) pour faire 10 coupes.

Réponse : Les quantités pour 10 coupes sont

- 5 œuf
- 250 g de chocolat
- 525 g de sucre

Explique ton raisonnement :

J'ai fait 2 personne puis fois 5

Fais tes calculs ici.

2 personne 1 œufs x 5 = 5 œuf

50 g x 5 = 250 g de chocolat

15 g x 5 = 525 g de sucre

Item 99			Item 100		
1	9	0	1	9	0

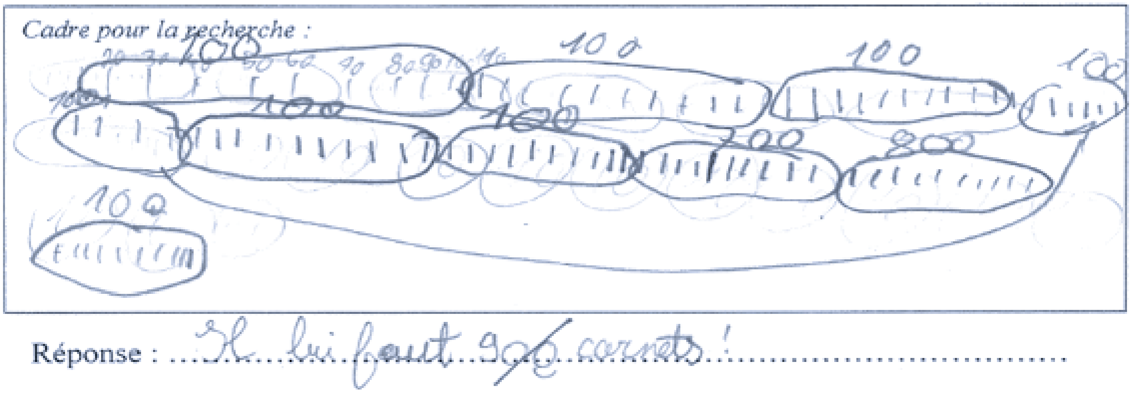
ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Numération au CE2 d'après un sujet de Poitiers

Le problème suivant a été proposé à des élèves de CE2 afin d'évaluer leur connaissance de la signification de l'écriture des nombres :

> Un directeur d'école a besoin de 856 timbres pour envoyer du courrier aux parents d'élèves. Les timbres sont vendus par carnets de 10 timbres. Combien de carnets faut-il commander ?

1) Quelle est la réponse attendue ? Justifier.

Voici la production d'un élève de CE2 :



2) Décrire la procédure utilisée par l'élève en indiquant les connaissances sur lesquelles il s'appuie et en analysant les erreurs commises.
3) Décrire une procédure plus rapide utilisable à ce niveau de la scolarité et ne mettant en jeu que des connaissances liées à la numération (ne faisant pas intervenir le calcul). Sur quelle(s) propriété(s) de notre système de numération écrit cette procédure s'appuie-t-elle ? Justifier.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Introduction de l'aire au CM1 d'après un sujet de Lorraine

On s'intéresse à la situation d'introduction de la notion d'aire dans les deux manuels de CM1 suivants : CapMaths (Hatier, 2010) et La Tribu des Maths (Magnard, 2011).

PARTIE A : analyse à partir d'extraits de Capmaths CM1

Annexe n°1 : Extrait du manuel CapMaths CM1 p.44

Annexe n°2 : Extrait du guide de l'enseignant CapMaths CM1 pp.89 - 90

1) À propos de la question 1 (cf. consigne dans l'extrait du guide de l'enseignant)

a) Quelles sont les surfaces à motif qui permettent de recouvrir la surface A ? *Aucune justification n'est demandée.*

b) Citer les deux procédures attendues des élèves pour identifier ces surfaces.

c) Donner deux causes d'erreurs possibles dans la résolution de la question 1.

2) À propos de la question 2

Citer deux représentations erronées de la notion d'aire qui peuvent conduire un élève à conclure que les surfaces 1 et 5 n'ont pas la même aire.

PARTIE B : analyse à partir d'un extrait de La tribu des Maths CM1

Annexe n°3 : Extrait du manuel La Tribu des Maths CM1 p. 76

À propos de la situation de recherche

1) Déterminer la mesure de l'aire de chacune des cinq figures selon l'unité d'aire choisie par Enzo.
2) En quoi la consigne « Classe les surfaces de la plus petite à la plus grande » est-elle ambiguë ?
3) Quelle est la procédure attendue par les auteurs du manuel pour comparer l'aire des surfaces a et c ?

PARTIE C : comparaison des deux situations

Les extraits de manuels proposés en Annexes 1 et 3 concernent l'introduction de la notion d'aire au CM1.

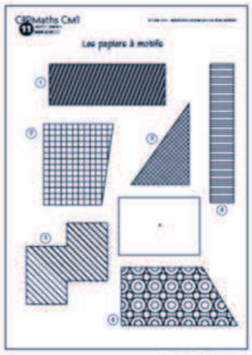
1) Comparer les activités de recherche proposées dans ces deux extraits du point de vue :
   - de la compétence principalement travaillée ;
   - des types de procédures attendues ;
   - des propriétés des aires en jeu.
2) Parmi ces deux entrées, quelle est celle qui vous paraît la plus adaptée pour aborder la notion d'aire au CM1 ? Justifier brièvement.

ANNEXE N°1
Extrait du manuel Capmaths CM1 p. 44 (Hatier, 2010)

UNITÉ 4 Comparaison d'aires

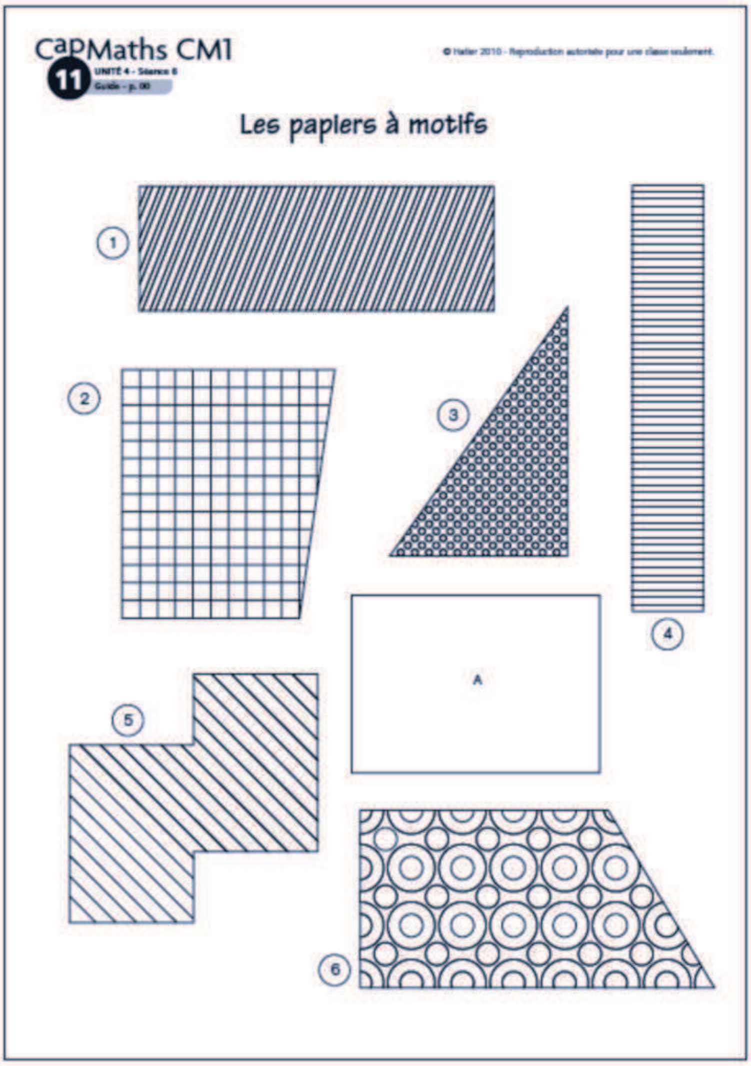
CHERCHER Les papiers à motifs

1. **Avec ton voisin, décore la surface A en la recouvrant avec du papier à motifs.**
   Découpe les surfaces de ta fiche et choisis celles avec lesquelles tu peux recouvrir entièrement la surface A.



▶ Fiche 11

2. **Range** les surfaces de ta fiche, dans l'ordre croissant, de la plus petite aire à la plus grande aire.



ANNEXE N°2
Extrait du guide de l'enseignant Capmaths CM1 pp. 89 - 90 (Hatier, 2010)

APPRENDRE

Comparaison d'aires ▸ Les papiers à motifs

CHERCHER Manuel p. 44 questions 1 et 2

1 Préparation du matériel

• Distribuer à chaque équipe deux exemplaires de la fiche 11 et demander de découper les surfaces des deux fiches.

• Faire mettre de côté un exemplaire des surfaces à motifs (les surfaces sont attachées avec un trombone ou placées dans une enveloppe) qui servira de référence lors de cette première phase de l'activité et de support pour la suite.

• Fixer au tableau, avec la patafix, la surface A et les six surfaces à motifs agrandies découpées à partir de la première fiche 11. Elles serviront de référence pour toute l'activité.

2 Recouvrement de la surface A

Question 1

• Reformuler la consigne sans induire de procédure de résolution :
➡ *La surface A est blanche. Les autres surfaces ont des motifs. Pour décorer la surface A, on utilise le papier d'une surface à motifs. Attention, la surface A doit être entièrement décorée avec un seul motif. Vous devez trouver quelles surfaces à motifs il est possible d'utiliser sachant que ces surfaces peuvent être transformées, c'est-à-dire que vous pouvez les plier, les découper, en déplacer des morceaux. Il y a plusieurs possibilités. Vous noterez les numéros de ces surfaces sur votre feuille.*

[...]

3 Introduction de la notion d'aire

• À l'issue de cette première phase, introduire le mot « aire » en formulant la réponse à la question 1 :

[...]

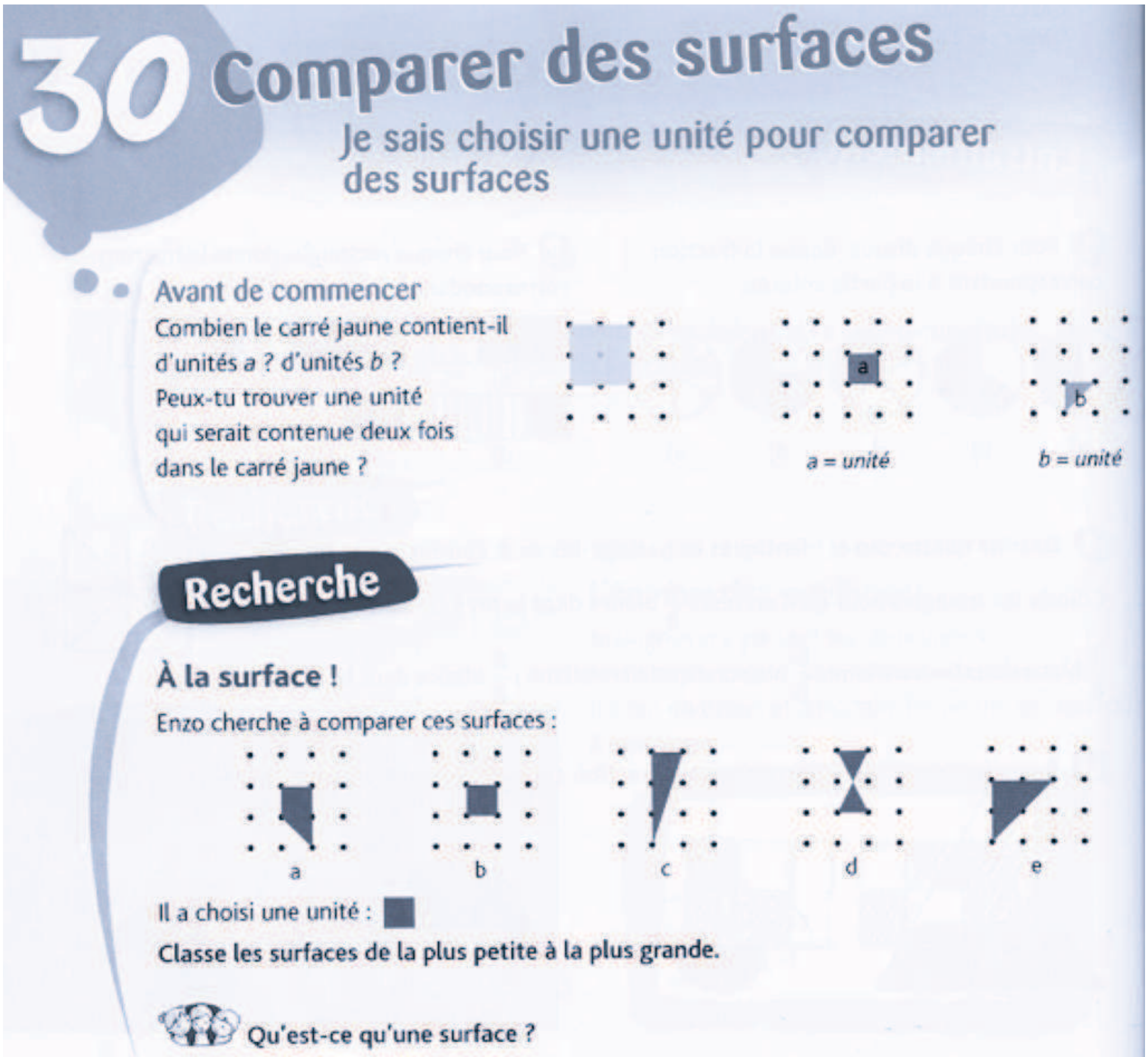
4 Comparaison des surfaces suivant leurs aires

Question 2

• Inviter les équipes à utiliser maintenant le deuxième exemplaire des surfaces à motifs pour répondre à la question 2 :
➡ *Vous allez maintenant ranger les surfaces à motifs, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, de celle qui comporte le moins de papier à celle qui comporte le plus de papier. Vous pouvez faire des découpages. Puis vous noterez le rangement trouvé sur votre feuille.*

ANNEXE N°3

Extrait du manuel La tribu des Maths CM1 p. 76 (Magnard, 2009)



30 Comparer des surfaces

Je sais choisir une unité pour comparer des surfaces

Avant de commencer

Combien le carré jaune contient-il d'unités *a* ? d'unités *b* ?
Peux-tu trouver une unité qui serait contenue deux fois dans le carré jaune ?

a = unité *b = unité*

Recherche

À la surface !

Enzo cherche à comparer ces surfaces :

a b c d e

Il a choisi une unité :

Classe les surfaces de la plus petite à la plus grande.

Qu'est-ce qu'une surface ?

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Solides au cycle 3 d'après un sujet de Paris

LA PYRAMIDE DU LOUVRE

Des extraits de programmes relatifs à la géométrie au cycle 3 sont consultables en annexe 1 (ce sont des repères donnés aux enseignants pour organiser la progressivité des apprentissages).

Un professeur des écoles souhaite faire construire une maquette d'une réduction de la pyramide du Louvre à ses élèves de CE2.

Après avoir projeté une photographie de ce monument, il demande à ses élèves d'identifier le monument présenté ; il annonce ensuite que dans les jours qui suivent, plusieurs activités seront faites, et qu'elles aboutiront à la construction d'une maquette de cette pyramide par chacun des élèves.

1) La première activité prévue par l'enseignant est l'activité 1 donnée en annexe 2. En quoi le problème posé permet-il de développer des compétences attendues dans les programmes de géométrie de cycle 3 ?

2) La deuxième activité prévue par l'enseignant est une adaptation de l'activité 2 de l'annexe 2 (pour qu'elle ne fasse plus intervenir un cube, mais une pyramide à base carrée).

   a) Dessinez à main levée trois patrons différents (corrects) d'une pyramide à base carrée qui pourraient être obtenus dans cette activité.

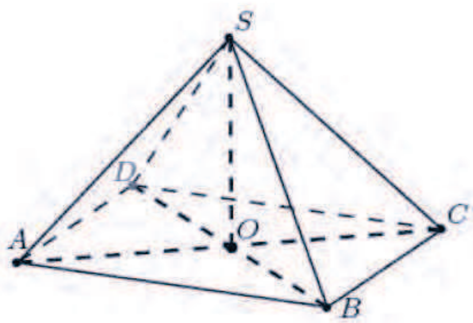
   b) Quel peut être l'objectif visé par le professeur des écoles en proposant cette activité ?

3) La troisième activité prévue par l'enseignant est une adaptation de l'activité 3 de l'annexe 2, pour qu'elle permette aux élèves de disposer d'une réduction de la pyramide du Louvre à l'échelle **1 : 700**.

   Les questions qui suivent ont pour objet de construire le matériel qui sera fourni aux élèves.

   La description dont l'enseignant dispose est la suivante : « la pyramide du Louvre peut être considérée comme une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté ».

   Une représentation en perspective cavalière de la maquette qui va être construite est donnée ci-contre (pyramide régulière SABCD de centre O).



a) Calculez les dimensions de la base et de la hauteur de la maquette. Vous exprimerez les réponses en centimètres.

b) Sans faire de nouveaux calculs, effectuez en vraie grandeur sur une feuille blanche les constructions suivantes (tous les instruments de géométrie sont autorisés ; aucune justification n'est demandée, mais les traits de construction devront rester apparents) :

- construction du carré ABCD ;
- construction du triangle SOA ;
- construction d'un patron de la maquette de la pyramide.

ANNEXE 1

Repères pour organiser la progressivité des apprentissages au cycle 3

	Cours élémentaire deuxième année	**Cours moyen première année**	**Cours moyen deuxième année**
Géométrie	Dans le plan - Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. - Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre. - Construire un cercle avec un compas. - Utiliser en situation le vocabulaire : côté, sommet, angle, milieu. - Reconnaître qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie, par pliage ou à l'aide du papier calque. - Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer : un cube, un pavé droit. - Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet. Problèmes de reproduction, de construction - Reproduire des figures (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un modèle. - Construire un carré ou un rectangle de dimensions données.	Dans le plan - Reconnaître que des droites sont parallèles. - Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre. - Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas. - Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme. - Reconnaître ou compléter un patron de cube ou de pavé. Problèmes de reproduction, de construction - Compléter une figure par symétrie axiale. - Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes.	Dans le plan - Utiliser les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles. - Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments. - Construire une hauteur d'un triangle. - Reproduire un triangle à l'aide d'instruments. Dans l'espace - Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, cylindre, prisme. - Reconnaître ou compléter un patron de solide droit. Problèmes de reproduction, de construction - Tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée (avec des indications relatives aux propriétés et aux dimensions).

ANNEXE 2

Activité 1 (*Cap maths CE2*, Hatier, 2011)

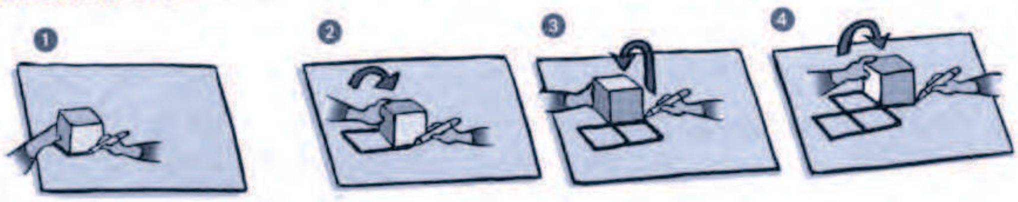
CHERCHER **Reproduire des polyèdres**

1 Par équipe de 2, vous devez reproduire une pyramide.
Vous disposez d'un lot de polygones parmi lesquels se trouvent toutes les faces de la pyramide à reproduire.
La pyramide est placée sur une table où vous pourrez venir l'observer, la manipuler et prendre dessus les informations nécessaires à sa reproduction.

<u>Activité 2</u> (Pour comprendre les mathématiques CE2, Hachette 2004)

e de recherche

Pour obtenir un patron du cube, suis les instructions.



Prends un petit cube (dé, jeu de construction…).

Fais-le tourner sur une feuille, face après face en dessinant chaque fois le contour de la face en contact avec la feuille. Chaque face doit être dessinée une seule fois.

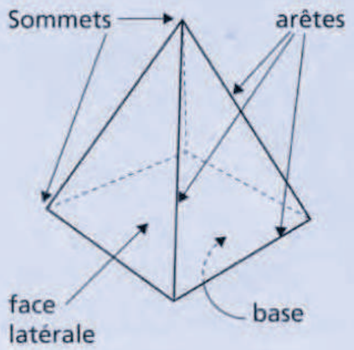
Activité 3 (Pour comprendre les mathématiques CE2, Hachette 2004)

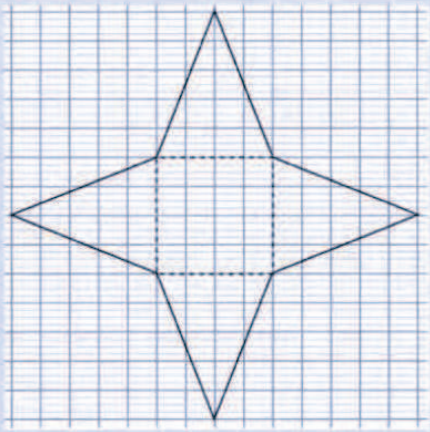
Piste de recherche

Construis une pyramide

Reproduis ce patron sur une feuille quadrillée.
Colle-la sur une feuille cartonnée.
Découpe le patron, plie suivant les lignes pointillées et assemble avec du papier adhésif.

Tu as construit une **pyramide à base carrée**.





Observe la pyramide que tu viens de construire.

a) Combien a-t-elle de sommets ? d'arêtes ? de face latérales ?

b) Quelle est la forme de la base ? Celle des faces latérales ?

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Technique opératoire de la division d'après un sujet de Dijon

Vous trouverez en annexes les documents suivants, relatifs à l'apprentissage de la technique opératoire de la division :

Annexe 1 : extrait du manuel « Euro Maths » (Hatier 2009) CM2 pages 54 et 55

Annexe 2 : extrait du manuel « Maths collection Thévenet » (Bordas 2009) CM2 pages 62 et 63,

Annexe 3 : trois productions d'élèves de CM2.

PARTIE A : comparaison des deux manuels (annexes 1 et 2)

1) Dans les deux manuels (annexes 1 et 2), la première tâche consiste à trouver le nombre de chiffres du quotient.

a) En prenant appui sur un des manuels et sans utiliser la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres du quotient de 123 456 789 par 654 321 en détaillant la méthode.

b) Justifier l'affirmation d'Alice : « *Alors il y aura seulement deux soustractions à effectuer* ! » (Affirmation issue du manuel « Euro Maths », annexe 1)

c) Le nombre de chiffes du quotient semble indiquer à coup sûr le nombre de soustractions qu'il faudra effectuer dans la division posée. Le cas est-il général ? Si non, donner un exemple.

2) Comparaison des parties « découverte » des deux manuels : effectuer la division de 7 874 par 29 selon chacune des deux méthodes, en commentant toutes les étapes.

3) Analyse des difficultés sur deux des exercices proposés :

a) Quelles sont les difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 6 d'« Euro Maths » ? Commenter particulièrement les termes « environ » et « approximativement ».

b) Quelles sont les difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 8 de « Maths collection Thévenet » ?

PARTIE B : « Maths Thévenet », pages 62 et 63 (annexe2)

1) Analyse de l'exercice 3

a) Compléter la première division à trous de l'exercice 3.

b) Pour les élèves, quelles sont les compétences visées en matière de division dans l'exercice 3 ?

2) Analyse de l'exercice 10

a) Résoudre le problème en utilisant une mise en équation.

b) Résoudre correctement le problème comme pourrait le faire un élève de CM2.

c) Pour les élèves, quelles sont les compétences visées en matière de division dans l'exercice 10 ?

3) Un exercice est dit « de division-partition » lorsque l'on connait le nombre de « parts » et que l'on cherche la valeur d'une « part ». Un exercice est dit « de division-quotition » lorsque l'on connaît la valeur d'une « part » et que l'on cherche le nombre de « parts ».
Trouver, parmi les exercices 4 à 7, un exercice qui relève de la division-partition et un exercice qui relève de la division-quotition.

PARTIE C : « Euro maths » CM2, pages 54 et 55 (annexe 1)

Pour aller plus loin que l'exercice 4 d'« Euro Maths », un enseignant de 6$^{\text{ème}}$ propose l'exercice suivant :

Dans chacun des cas suivants du tableau sont données les valeurs de certains éléments d'une division euclidienne. (On entend par éléments : le dividende, le diviseur, le quotient et le reste). Il est demandé :

- *de fournir les valeurs des éléments manquants si c'est possible. En cas d'impossibilité, dire pourquoi. Si par contre il y a plusieurs réponses possibles, on cherchera à les donner toutes ou à en expliciter la forme générale.*
- *d'écrire l'égalité caractéristique de la division euclidienne correspondante (n'en donner qu'une seule s'il y a plusieurs solutions).*

	Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
Cas M	5	8		
Cas A		3	7	
Cas T	49		4	
Cas H		4		4
Cas S	37			2

1) Compléter ce tableau en justifiant chacune des réponses.

2) Quelles sont les différences entre cet exercice et l'exercice 4 du manuel ?

PARTIE D : analyse de travaux d'élèves (annexe 3)

Au mois de décembre, un enseignant de CM2 a donné l'exercice 10 du manuel « Maths collection Thévenet » à ses élèves. En annexe 3, trois productions d'élèves nommés A, B et C sont reproduites.

Décrire la procédure de chaque élève et indiquer les éventuelles erreurs.

ANNEXE 1 : EXTRAIT DU MANUEL « EURO MATHS » CM2

16

CALCUL MENTAL
Jeu de tic tac : jeu du furet des multiples de 3 en remplaçant les multiples de 3 qui sont pairs par « tic », les multiples de 3 qui sont multiples de 5 par « tac ».

Division des nombres entiers : technique (2)

Objectif : confirmer la maîtrise de la technique de la division des nombres entiers.

DÉCOUVERTE

❶ Leïla et Alice ont-elles raison ?

❷ Voici le répertoire multiplicatif de 27. Utilise ce répertoire pour calculer le quotient et le reste de la division de 942 par 27.

27 × 1	27
27 × 2	54
27 × 3	81
27 × 4	108
27 × 5	135
27 × 6	162
27 × 7	189
27 × 8	216
27 × 9	243

```
  9 4 2 | 2 7
        | • •
– 8 1 0 | 3 0
  ......
– ......
  ......
```

Complète : 942 = (27 × ...) + ...

❸ Pour chacune des divisions suivantes, trouve le nombre de chiffres du quotient, puis effectue-les.

```
7 0 0 | 2 7        2 9 1 6 | 2 7        1 9 5 | 2 7
```

EXERCICES

1 Après avoir déterminé le nombre de chiffres du quotient par un encadrement, calcule mentalement le quotient de chaque division, puis vérifie en effectuant les divisions.

a. 25 divisé par 7
b. 126 divisé par 6
c. 740 divisé par 8
d. 275 divisé par 25
e. 1 548 divisé par 50
f. 345 divisé par 30
g. 7 500 divisé par 250
h. 8 600 divisé par 400
i. 520 divisé par 150

54 • cinquante-quatre

2 a. Vérifie que 7 × 100 < 5 984 < 7 × 1 000. Utilise cet encadrement pour prévoir le nombre de chiffres du quotient de la division de 5 984 par 7. Effectue cette division.

b. Vérifie que 25 × 10 < 1 436 < 25 × 100. Utilise cet encadrement pour prévoir le nombre de chiffres du quotient de la division de 1 436 par 25. Effectue cette division.

c. Vérifie que 804 × 10 < 16 384 < 804 × 100. Utilise cet encadrement pour prévoir le nombre de chiffres du quotient de la division de 16 384 par 804. Effectue cette division.

3 Pour chaque division, donne le nombre de chiffres du quotient, effectue les divisions, puis donne l'écriture en ligne.

```
7 3 6 | 4 8        2 8 6 4 | 1 4
```

4 Complète chaque ligne du tableau en utilisant ta calculatrice.
Note les calculs que tu fais.

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
516	19		6
624		13	0
	8	264	5

5 Retrouve les chiffres effacés dans ces divisions posées.

```
  2 •  | 6          5 • 7 | 7           • • 3 2 | 1 5
– 2 4  | •        – 5 6 0 | • 5       – 4 5 0 0 | 3 • •
    3                 3 7                 1 2 • •
                  –   • •               – • • • •
                        2                     • •
                                        –     • •
                                                •
```

6 Quand l'Airbus A380 vole à 900 km/h, il consomme environ 1 800 litres de kérosène toutes les 7 minutes de vol.
Combien de kérosène consomme-t-il approximativement en 1 minute ?


L'Airbus A380

Remue-méninges

a. Effectue la division de 374 par 7.

b. Voici la méthode de la grand-mère d'Alice. Termine son calcul.

c. Effectue maintenant la division de 317 par 8 avec ta méthode puis avec celle de la grand-mère d'Alice.

cinquante-cinq • 55

ANNEXE 2 : EXTRAIT DU MANUEL « MATHS THÉVENET » CM2

26 Diviser des nombres entiers (3)

Je découvre

1 **a)** Je dois diviser 7 874 par 24. Pour aller vite, voici comment je fais.

• $24 \times 100 < 7\,874 < 24 \times 1\,000$, le quotient a donc 3 chiffres.

```
 c d u
 7 8 7 4 | 24
-7 2     | c d u
 ---     | 3 2 8
   6₁7
  -₁4 8
   1 9 4
  -1 9 2
       2
```

• Il faut diviser 78 centaines par 24 :
$78 = (24 \times 3) + 6$.

• Il reste 6 centaines, soit 60 dizaines :
on « abaisse » les 7 dizaines du haut,
on obtient 67 **dizaines** que l'on divise par 24 :
$67 = (24 \times 2) + 19$.

• Il reste 19 dizaines, soit 190 unités :
on « abaisse » les 4 unités du haut,
on obtient 194 **unités** que l'on divise par 24 :
$194 = (24 \times 8) + 2$.

• Je vérifie le résultat : **7 874 = (24 × 328) + 2**.

b) De la même façon, pose et effectue les divisions ci-dessous.
6 128 : 42 3 547 : 38 1 825 : 84

Je m'entraîne

2 Pose et effectue les divisions ci-dessous.

347 : 8	427 : 9	534 : 8
412 : 52	189 : 67	719 : 63
4 838 : 32	7 480 : 63	4 283 : 52

(N'oublie pas de chercher l'ordre de grandeur du quotient et de vérifier le résultat.)

3 Complète les divisions ci-dessous.

```
 . . . . | 5 5          3 7 8 | . .
-2 7 5   | . .         -2 5   | 1 .
   4 7 .                  . . .
  -4 4 0                 -. . .
     3 7                      .
```

4 Combien de disques à 23 € pièce peut-on acheter avec 437 € ?

5 M. et Mme Dupont achètent des meubles qui coûtent 1 975 €. Ils payent un acompte de 325 € et le reste en plusieurs mensualités égales. Ils ont le choix entre 6, 10, 11 et 15 mensualités, sans frais.
• Combien devraient-ils payer par mois dans chaque cas ?

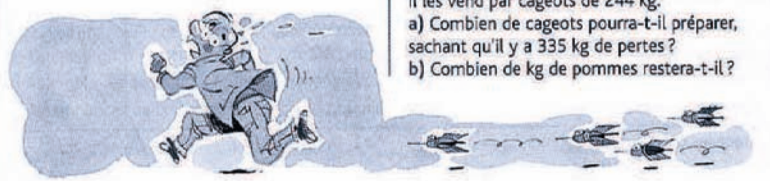
6 Un groupe visite une exposition.
Le responsable du groupe paie l'entrée 456 €.
Les 54 enfants ont payé chacun 6 €.
Les adultes ont payé chacun 12 €.
• Combien de personnes au total y a-t-il dans le groupe ?

7 Un libraire a commandé 84 exemplaires d'un roman.
La facture s'élève à 1 870 €, dont 22 € de frais d'expédition.
• Quel est le prix d'un roman ?

8 **a)** M. Leblanc a acheté une bonbonne de 24 L de vin.
• Combien de bouteilles de 75 cL pourra-t-il remplir ?
b) Il a payé la bonbonne 144 €.
• Quel est le prix d'un litre de vin ?
• Quel est le prix de revient d'une bouteille ?

9 Un représentant de commerce a fait un trajet en 3 étapes : 428 km en 4 h, 138 km en 3 h, 226 km en 2 h.
• Combien de kilomètres en moyenne a-t-il parcourus par heure au cours de chacune de ces étapes ?

10 Pierre a obtenu un total de 187 points aux fléchettes en mettant le même nombre de fléchettes dans le 10, dans le 5 et dans le 2.
• Combien de fléchettes a-t-il lancées ?



Jouer avec les nombres

Calculer mentalement :
15 × 4, 25 × 4, 30 × 4, 35 × 4,
40 × 4, 45 × 4.

11 **a)** On divise un nombre par 13.
Le quotient est égal à 26 et le reste à 8.
• Quel est ce nombre ?
b) Éric a divisé 2 923 par 45. Il a trouvé un reste égal à 63.
• Qu'en penses-tu ?

12 Louis a joué 6 parties au bowling.
Il a obtenu les scores suivants :
97, 128, 115, 133, 101, 98.
a) Combien de points a-t-il marqués au total ?
b) S'il avait marqué le même nombre de points à chaque partie, quel aurait été ce nombre ?
Ce nombre est le score moyen.

13 Un grossiste en fruits a reçu deux livraisons de pommes : l'une de 1 857 kg et l'autre de 3 650 kg.
Il les vend par cageots de 244 kg.
a) Combien de cageots pourra-t-il préparer, sachant qu'il y a 335 kg de pertes ?
b) Combien de kg de pommes restera-t-il ?

JE RETIENS

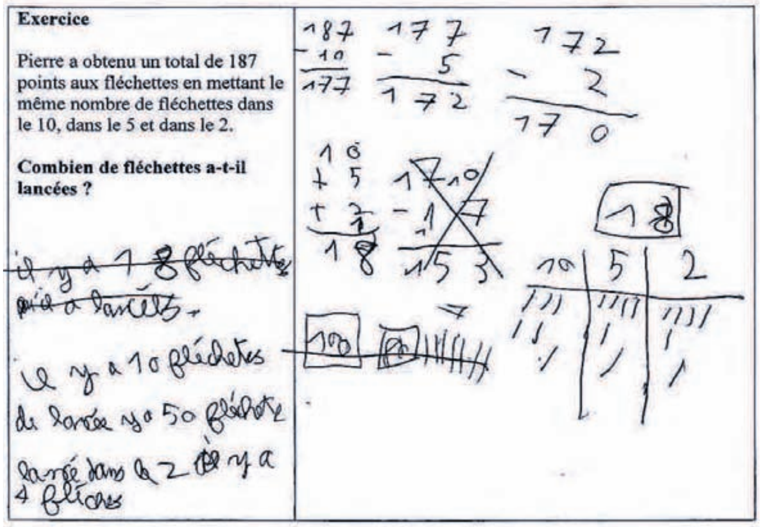
Pour diviser un nombre entier par un autre, par exemple, 7 673 divisé par **64** :
• j'évalue l'ordre de grandeur du quotient :
$64 \times 100 <$ **7 673** $< 64 \times 1\,000$, le quotient est compris entre 100 et 1 000, il a **3** chiffres ;
• je pose la division :

```
        7 6 7 3 | 6 4
       -6 4     | 1 1 9 ← quotient
        1₁2 7
       -1 6 4
          0 6₁3₁3
       -    ₁5₁7 6
reste →     0 5 7
```

le **quotient** est **119**
le reste est 57
57 est plus petit que **64**

• je vérifie le calcul : 7 673 = (**64 × 119**) + 57.

ANNEXE 3 : TROIS PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DE CM2


Exercice

Pierre a obtenu un total de 187 points aux fléchettes en mettant le même nombre de fléchettes dans le 10, dans le 5 et dans le 2.

Combien de fléchettes a-t-il lancées ?

~~il y a 18 fléchettes qu'il a lancées.~~

il y a 10 fléchettes de lancée y a 50 fléchette lancé dans le 2 il y a 4 flèches

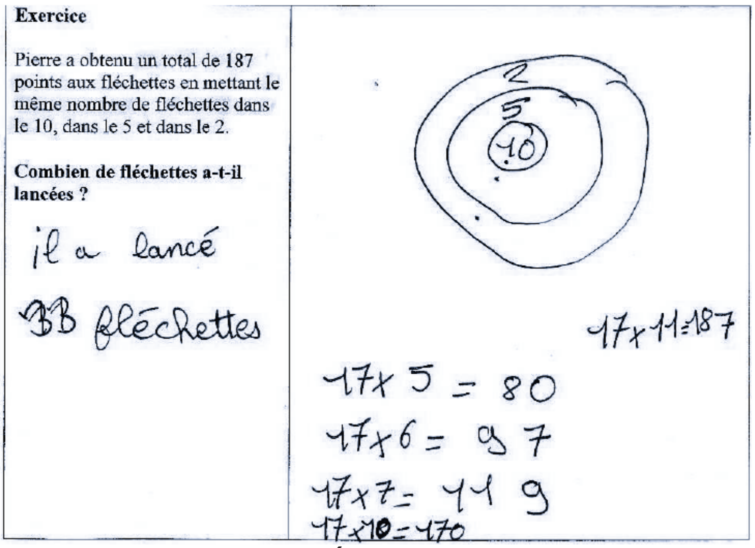
187 − 10 = 177 177 − 5 = 172 172 − 2 = 170

10 + 5 + 2 = 18

$\boxed{18}$

10 | 5 | 2

Élève A


Exercice

Pierre a obtenu un total de 187 points aux fléchettes en mettant le même nombre de fléchettes dans le 10, dans le 5 et dans le 2.

Combien de fléchettes a-t-il lancées ?

il a lancé 33 fléchettes

17x11=187

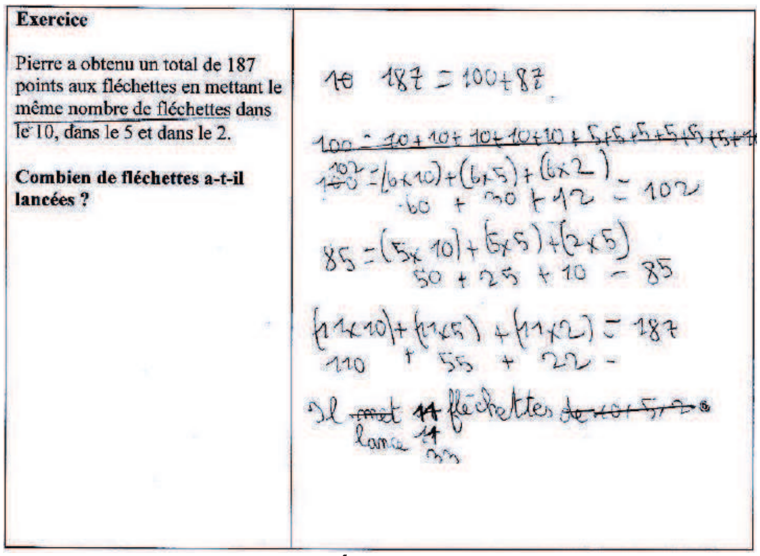
17x5 = 80

17x6 = 97

17x7= 119

17x10=170

Élève B


Exercice

Pierre a obtenu un total de 187 points aux fléchettes en mettant le même nombre de fléchettes dans le 10, dans le 5 et dans le 2.

Combien de fléchettes a-t-il lancées ?

10 187 = 100+87

~~100 = 10+10+10+10+10+5+5+5+5+5+5+…~~

102 = (6x10)+(6x5)+(6x2)
60 + 30 + 12 = 102

85 = (5x10)+(5x5)+(2x5)
50 + 25 + 10 = 85

(11x10)+(11x5)+(11x2) = 187
110 + 55 + 22

Il ~~met~~ lance 11 fléchettes ~~de 10, 5, 2~~
11
33

Élève C

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Construction du nombre d'après un sujet de La Roche sur Yon

Les annexes 2 et 3 sont des extraits de la revue "Grand N", CRDP Grenoble.
Des extraits du BO de 2008 concernant les programmes sont fournis en annexe 1.

1) Quels sont les objectifs généraux des activités proposées dans les annexes 2 et 3 ? À quel niveau de classe s'adressent-elles ? (vous pouvez vous appuyer sur le BO en annexe 1).
2) Citez une compétence mathématique essentielle pour que les élèves puissent s'engager dans l'activité de l'annexe 2.
3) Précisez le rôle du maître pour chacune des étapes de la phase 2 de l'annexe 2.
4) Cette question concerne la phase 3 de l'annexe 2.
   a) Quel nouvel obstacle le maître introduit-il ? Dans quel but ?
   b) Détaillez une procédure que peut utiliser un élève sans avoir recours à un matériel pour accomplir la tâche demandée.
   c) Détaillez deux procédures que peut utiliser un élève en recourant à du matériel disponible dans la classe, pour accomplir la tâche demandée.
5) Pour cette question, le document concerné est l'annexe 3. Citez trois variables didactiques sur lesquelles le maître peut agir. Vous préciserez les effets attendus.
6) Imaginez une autre activité qui pourrait renforcer cet apprentissage.

ANNEXE 1 : extraits du BO n°3 du 19 juin 2008

PROGRAMME DE L'ÉCOLE MATERNELLE
petite section, moyenne section, grande section

DÉCOUVRIR LE MONDE

À l'école maternelle, l'enfant découvre le monde proche ; il apprend à prendre et à utiliser des repères spatiaux et temporels. Il observe, il pose des questions et progresse dans la formulation de ses interrogations vers plus de rationalité. Il apprend à adopter un autre point de vue que le sien propre et sa confrontation avec la pensée logique lui donne le goût du raisonnement. Il devient capable de compter, de classer, d'ordonner et de décrire, grâce au langage et à des formes variées de représentation (dessins, schémas). Il commence à comprendre ce qui distingue le vivant du non-vivant (matière, objets).

Découvrir les objets

Les enfants découvrent les objets techniques usuels (lampe de poche, téléphone, ordinateur...) et comprennent leur usage et leur fonctionnement : à quoi ils servent, comment on les utilise. Ils prennent conscience du caractère dangereux de certains objets.

Ils fabriquent des objets en utilisant des matériaux divers, choisissent des outils et des techniques adaptés au projet (couper, coller, plier, assembler, clouer, monter et démonter ...).

Découvrir la matière

C'est en coupant, en modelant, en assemblant, en agissant sur les matériaux usuels comme le bois, la terre, le papier, le carton, l'eau, etc., que les enfants repèrent leurs caractéristiques simples.

Ils prennent aussi conscience de réalités moins visibles comme l'existence de l'air et commencent à percevoir les changements d'état de l'eau.

Découvrir le vivant

Les enfants observent les différentes manifestations de la vie. Élevages et plantations constituent un moyen privilégié de découvrir le cycle que constituent la naissance, la croissance, la reproduction, le vieillissement, la mort.

Ils découvrent les parties du corps et les cinq sens : leurs caractéristiques et leurs fonctions. Ils sont intéressés à l'hygiène et à la santé, notamment à la nutrition. Ils apprennent les règles élémentaires de l'hygiène du corps.

Ils sont sensibilisés aux problèmes de l'environnement et apprennent à respecter la vie.

Découvrir les formes et les grandeurs

En manipulant des objets variés, les enfants repèrent d'abord des propriétés simples (petit/grand ; lourd/léger). Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance.

Approcher les quantités et les nombres

L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.

Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.

Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun.

À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.

La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres.

CYCLE DES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX
PROGRESSIONS POUR LE COURS PRÉPARATOIRE ET LE COURS ÉLÉMENTAIRE PREMIÈRE ANNÉE

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition"). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération.	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

ANNEXE 2

DIX DANS UN DORTOIR

[…]
Mise en situation initiale : Jeu des bébés à la crèche

1. Description du jeu

Matériel :

Le jeu se compose d'une boîte, carrée de préférence, avec un couvercle et d'un carton fort, un peu plus petit, qu'on pourra ranger à l'intérieur de la boîte.

Dans le fond de la boîte. 10 lits (rectangles de mousse) accueillent 10 bébés (petites poupées en plastique) quand ils dorment ; c'est *« le dortoir ».*

Sur le carton fort, on installe un tapis et quelques jouets ; c'est *« la salle de jeux ».*

But du jeu :

Trouver le nombre de bébés qui se trouvent dans la salle cachée par le couvercle.

Nombre de joueurs :

4 à 6 et un meneur de jeu (qui peut être le maître ou un enfant expert).

2. Mise en œuvre

Phase 1 : Appropriation de la situation

Le maître enlève le couvercle de la boîte, pose la plaque « salle de jeux » à côté de la boîte «dortoir» et présente les deux lieux et leur fonction. Les bébés sont alors placés chacun dans leur lit.

Le matériel étant très fort sur le plan affectif, il faut prévoir un temps de manipulation permettant aux enfants de verbaliser la situation, de toucher ces fameux bébés, de les coucher et de les lever, bref de prendre du plaisir sans chercher à atteindre un but quelconque.

Phase 2 : le dortoir reste visible

Le maître indique clairement que le jeu va constituer à bien repérer où sont les bébés (dans le dortoir ou dans la salle de jeu ?)

« Regardez, 10 bébés dorment dans le dortoir, mais certains vont se réveiller et iront alors dans la salle de jeu. Nous regarderons ceux qui sont encore dans le dortoir et vous chercherez combien sont déjà dans la salle de jeu. Mais attention, vous ne verrez pas la salle de jeu que je vais cacher. »

Alors que les enfants ont été invités à fermer les yeux, le maître enlève des bébés et les pose, dissimulés sous le couvercle, dans la salle de jeux.

« Ouvrez vos yeux et regardez le dortoir. Combien de bébés sont déjà dans la salle de jeu ? »

Le nombre total de bébés et de lits n'a pas été compté jusqu'ici (la première fois où l'on joue) et c'est à ce moment que la question va se poser, les enfants proposant parfois des nombres différents montrant une compréhension encore limitée de la situation : 6, 10 ou 4.

Chaque proposition est discutée et les enfants expliquent comment ils ont trouvé ce nombre puis on valide en soulevant le couvercle. Le maître revient alors sur les trois collections en présence : le nombre de lits du dortoir et le fait qu'il y a aussi dix bébés, le nombre de bébés qui dorment encore et le nombre de bébés réveillés qui se trouvent dans la salle de jeu.

L'activité est reprise plusieurs fois en changeant le nombre de bébés enlevés du dortoir par le maître.

Il n'y a pas de systématisation mais le maître met en relation, chaque fois que possible, les trois nombres en jeu, soit en posant des questions, soit en le disant lui-même : dix bébés peuvent dormir dans le dortoir, cette fois-ci, 2 étaient encore dans leur lit et on a trouvé qu'il y en avait déjà 8 dans la salle de jeu, etc.

Phase 3 : la salle de jeu est seule visible

Le maître enlève le couvercle de la salle de jeu et le pose sur la boîte-dortoir pour la fermer.

« Attention maintenant vous allez voir combien sont réveillés mais le dortoir sera caché, il faudra trouver combien dorment encore. »

Les mains sous le couvercle il prend 3 bébés et les pose dans la salle de jeux. Le couvercle est maintenant sur le dortoir.

« Combien dorment encore ? »

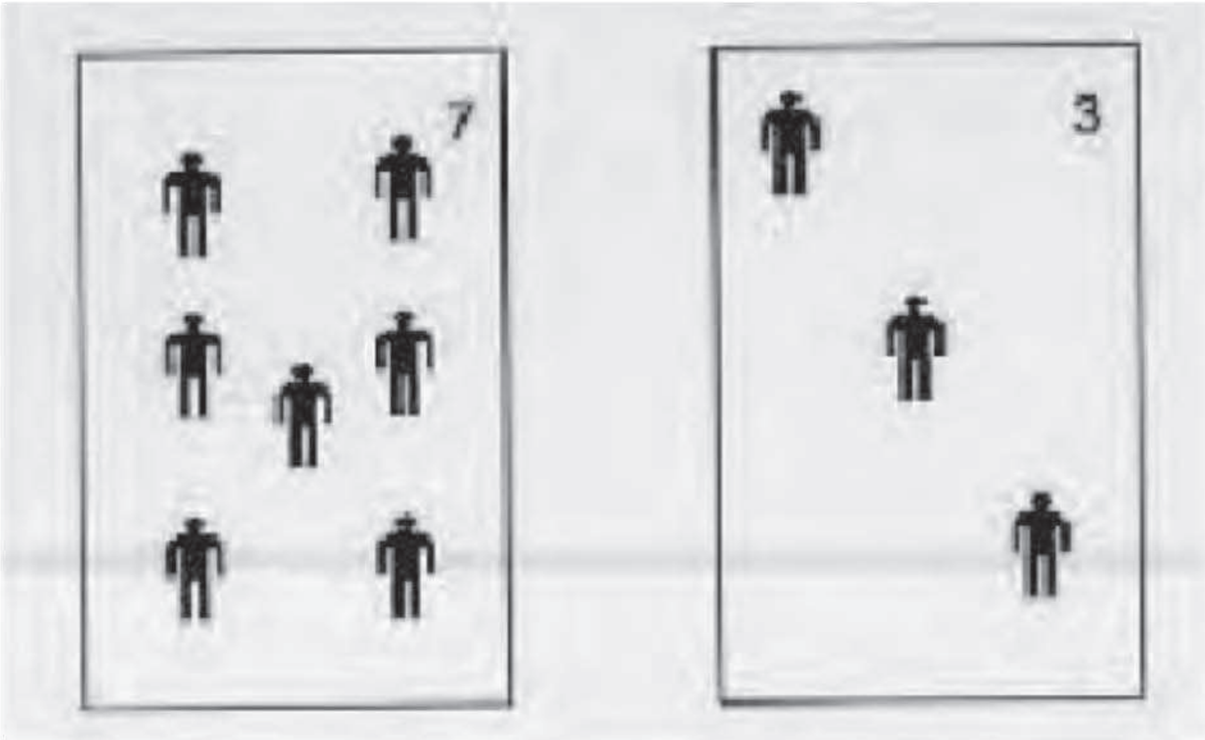
[…]

ANNEXE 3

Premier prolongement possible : les cartes des bébés

Matériel :

Des cartes plastifiées représentant des bébés et portant l'indication du nombre de ces bébés en écriture chiffrée).



Exemple : deux cartes de 9 bébés, deux de 8, deux de 7, deux de 6, trois de 5, trois de 4, quatre de 2, quatre de 1.

But du jeu :

Faire le maximum de plis totalisant 10 bébés. Celui qui gagne est celui qui a le plus grand nombre de cartes (et non de plis).

Nombre de joueurs : 4 à 6.

Règle du jeu :

4 cartes sont posées, face visible sur la table : c'est le « plateau ».

Un sabot est constitué du reste des cartes.

Chaque joueur, à son tour, prend d'abord une carte sur le dessus du sabot et essaie avec les cartes du plateau de constituer un pli de 10 bébés.

Si aucune combinaison n'est possible ou si l'enfant n'a pas trouvé, il pose sa carte avec les autres cartes du plateau.

On continue jusqu'à épuisement du sabot.

A la fin du jeu, chaque joueur compte le nombre de cartes qu'il a gagnées.

TROIS EXERCICES D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE LYON

Remarque :
L'exercice n°1 est inspiré de l'évaluation PISA 2012.

EXERCICE N°1

Le photographe animalier Jean Baptiste est parti en expédition sur l'île Stewart pendant un an. Il a pris de nombreuses photos de manchots et de leurs poussins. Il s'est particulièrement intéressé à l'évolution de la population de différentes colonies de manchots.

Les cinq questions que comporte cet exercice sont entièrement indépendantes les unes des autres.

Question 1

La carte ci-contre représente l'île Stewart au Sud de la Nouvelle Zélande, elle est reproduite en annexe.

En utilisant l'échelle de la carte, estimez la mesure de l'aire de l'ile Stewart en kilomètres carrés (km²). Expliquez succinctement votre démarche en laissant apparents vos tracés éventuels sur la carte en annexe 1.

Question 2

Habituellement, un couple de manchots pond deux œufs par an. Le poussin qui sort du plus gros des deux œufs est en général le seul à survivre. Chez les manchots Gorfous de cette région, le premier œuf pèse environ 78 g et le second environ 110 g.
De quel pourcentage environ le second œuf est-il plus lourd que le premier ?

Question 3

Jean Baptiste se demande comment pourrait évoluer une population de colonie de manchots Gorfous au cours des prochaines années. Pour cela, il modélise cette évolution en faisant les hypothèses suivantes :

- Au début de chaque année, la colonie comporte un nombre égal de mâles et de femelles qui forment des couples.
- Chaque couple de manchots élève un poussin par an.
- À la fin de l'année, 20 % de tous les manchots (adultes et poussins nés dans l'année) seront morts.
- Les manchots âgés d'un an (c'est-à-dire nés l'année précédente) élèveront eux aussi des poussins.

a) Au début de la première année, la colonie comporte 1 000 manchots Gorfous (500 couples). À la fin de la deuxième année, combien de manchots (adultes et poussins) y aura-t-il dans cette colonie ?

b) Pour calculer l'évolution de la colonie année après année, Jean Baptiste utilise un tableur.

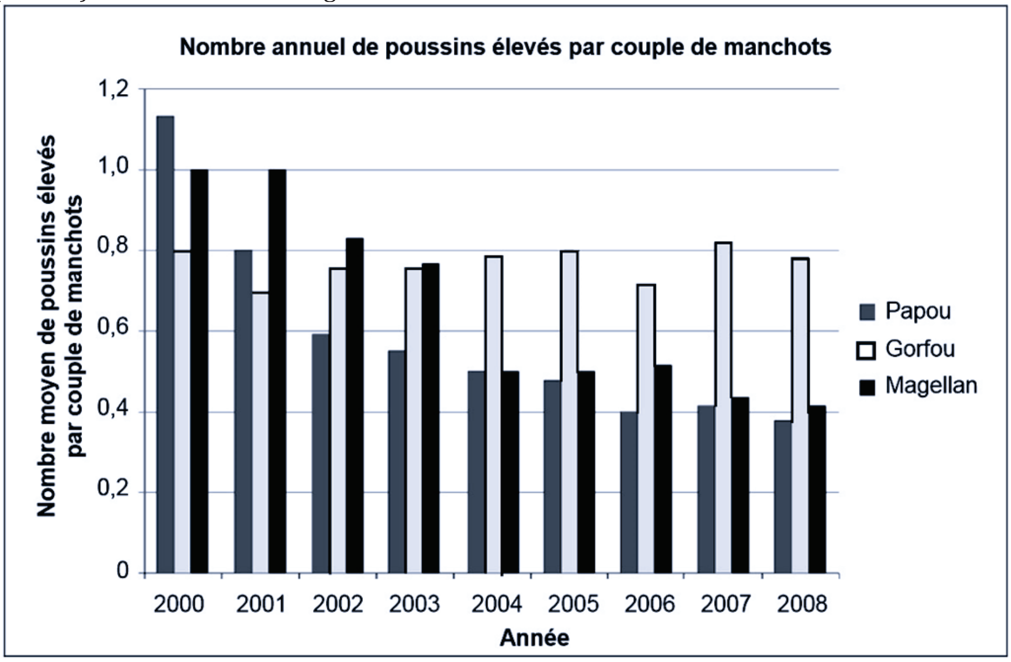
	A	B	C	D	E	F	G	H	…	M	N	O
1		Début d'année 01	Fin d'année 01	Fin d'année 02	Fin d'année 03	Fin d'année 04	Fin d'année 05	Fin d'année 06		Fin d'année 11	Fin d'année 12	Fin d'année 13
2	Nombre de manchots	1000										

Parmi les formules suivantes trouver celle(s) qui pourrai(en)t être entrée(s) dans la cellule C2 puis recopiée(s) vers la droite permettant ainsi de compléter correctement la ligne 2. Recopiez sur votre copie la (les)bonne(s) réponse(s).

Formule I **= B2 + B2/2 – 20%**	Formule II **= B2*1,5 – B2*0,2**	Formule III **= B2*1,5 *0,8**
Formule IV **= B$2*1,2**	Formule V **= (B2+ B2/2) *0,2**	Formule VI **= B2 + B2*20/100**

Question 4

En rentrant de son expédition, Jean Baptiste cherche sur Internet combien de poussins un couple de manchots élève en moyenne.
Il trouve le diagramme en bâtons ci-après pour trois types de manchots : le manchot Papou, le manchot sauteur (Gorfou) et le manchot de Magellan.



D'après le diagramme, les affirmations suivantes au sujet de ces trois types de manchots sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

Affirmation a :
En 2000, le nombre moyen de poussins élevés par couple de manchots était supérieur à 0,6.

Affirmation b :
En 2007, on sait qu'il y a environ deux fois plus de poussins manchots Gorfou que de poussins manchots Papou.

Affirmation c :
Le nombre moyen de poussins élevés par couple de manchots de Magellan a diminué entre 2001 et 2004

Question 5

Jean Baptiste découvre aussi sur internet que certains manchots peuvent nager à 36 km/h.
Le nageur recordman du monde nage 100 mètres en 46 secondes et 91 centièmes de secondes.
Quelle distance les manchots les plus rapides parcourent-ils en 46 secondes et 91 centièmes de secondes ?

EXERCICE N°2

Partie A

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. On considère un cercle sur lequel on place n points distincts. On cherche à dénombrer tous les segments qui joignent deux à deux les n points du cercle.

1) Montrer que ce nombre de segments est de 10 lorsque $n = 5$, de 15 lorsque $n = 6$ et de 55 lorsque $n = 11$.
2) À partir des exemples, formuler une conjecture qui permette de calculer le nombre de segments qui joignent *les n* points du cercle à partir de la donnée du nombre n de points à relier.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les configurations obtenues en reliant deux à deux n points distincts d'un cercle puis en coloriant chacun de ces segments à l'aide de l'une des deux couleurs dont on dispose :

la couleur « noire » codée ——— et la couleur « grise » codée - - - - .

Voici par exemple deux configurations obtenues à partir de 4 points distincts d'un cercle :

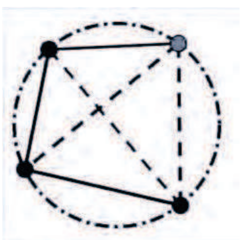


Figure 1

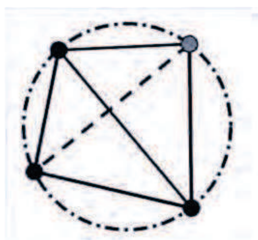


Figure 2

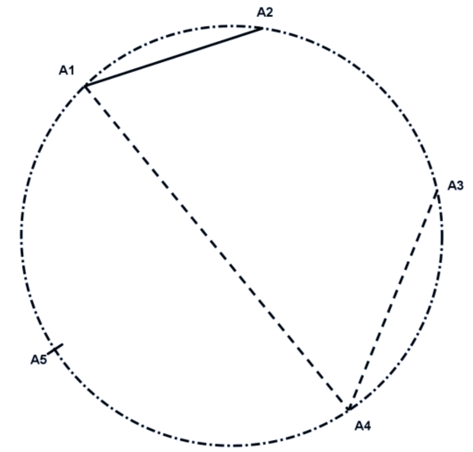
On s'intéresse aux triangles dont les sommets sont trois des n points placés initialement sur le cercle et l'on dira qu'un tel triangle est monochrome si ses trois côtés ont été coloriés de la même couleur (un triangle peut donc être monochrome noir ou monochrome gris).

Par ailleurs, parmi les configurations obtenues à partir de n points distincts du cercle, on distingue celles qui comportent au moins un triangle monochrome de celles qui n'en comportent aucun.
Ainsi :

- l'exemple de la figure 1 propose une configuration sans aucun triangle monochrome (chacun des quatre triangles à considérer possède au moins un côté noir et au moins un côté gris) ;
- l'exemple de la figure 2 propose une configuration comportant deux triangles monochromes (noirs) et deux triangles non monochromes.

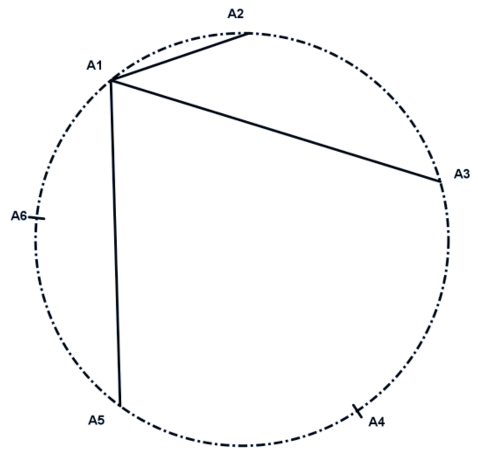
Le but de cette partie est de chercher s'il existe des configurations à 5 ou 6 points sans aucun triangle monochrome.

1) a) Complétez la configuration à 5 points suivante de façon à ce qu'elle ne comporte aucun triangle monochrome.



b) Y-a-t-il une solution unique à la question précédente ou bien au contraire y-a-t-il plusieurs possibilités de compléter la configuration de façon à ce qu'elle ne comporte aucun triangle monochrome ? Justifiez.

2) a) Est-il possible de compléter la configuration à 6 points suivante de façon à ce qu'elle ne comporte aucun triangle monochrome ? Justifiez.



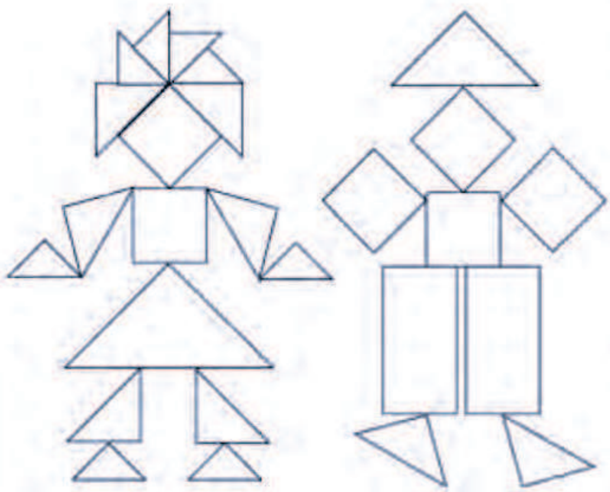
b) Existe-t-il des configurations à 6 points ne comportant aucun triangle monochrome ? Justifiez

EXERCICE N°3

Partie A

Un enseignant de CM2 propose à ses élèves le problème suivant, tiré du 15ème Rallye Mathématique Transalpin épreuve 1.

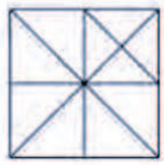
Coupe et découpe



En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur. Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

1) Décrivez deux procédures correctes permettant aux élèves de répondre au problème.
2) L'enseignant souhaite réutiliser cet exercice l'année suivante dans le cadre de son enseignement de mathématiques en CM2. Citez deux notions, de deux domaines différents des programmes du cycle 3, que cette activité peut permettre de travailler.
3) Proposez une procédure erronée amenant un élève à affirmer qu'Aldo a utilisé plus de carton pour la fillette que pour le garçon. Émettez une hypothèse permettant d'expliquer cette erreur.

Partie B

A propos des unités d'aire, l'enseignant propose l'exercice suivant :

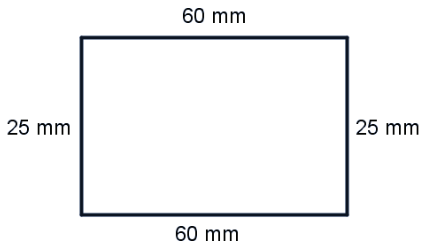
L'aire d'un carré de 1 cm de côté est le centimètre carré que l'on écrit 1 cm^2. Construire un rectangle ainsi qu'un triangle rectangle dont l'aire est de 3 cm^2.

1) Résolvez l'exercice et construisez également un triangle quelconque (non rectangle) qui réponde au problème.
2) Pour quelle raison mathématique l'enseignant ne propose-t-il pas aux élèves de construire un carré d'aire 3 cm^2 ?

Partie C

Plus tard dans l'année, après avoir introduit les formules de calcul d'aires du carré et du rectangle l'enseignant propose l'exercice d'application suivant :

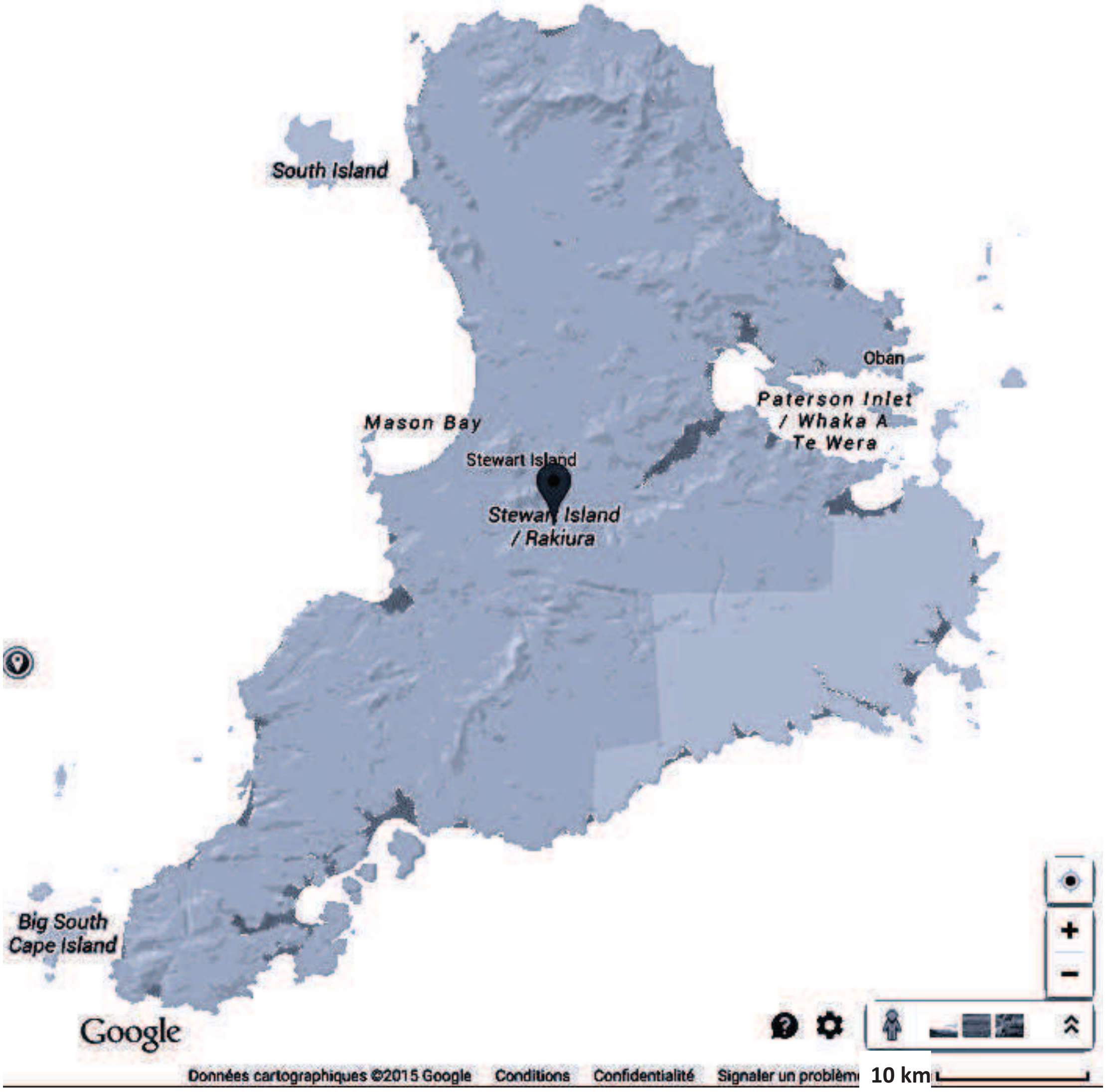
Calculer l'aire de ce rectangle en cm^2.



Analysez dans un tableau les productions des élèves ci-dessous en décrivant leurs procédures, les erreurs éventuelles et en émettant une hypothèse sur leur origine.

- Aurélie : $2 \times 60 = 120 + 25 = 145 + 25 = 170 = 17$ L'aire est égale à 17
- Bastien : $6 \times 2{,}5 \times 6 \times 2{,}5 = 225$ L'aire du rectangle est de 225 cm^2
- Célia : $25 \times 60 = 1500$ L'aire du rectangle est 150 cm^2
- Djamel : 6 cm^2 + 6 cm^2 + 6 moitiés de cm^2 = 15 cm^2

ANNEXE


South Island
Mason Bay
Stewart Island
Stewart Island
/ Rakiura
Oban
Paterson Inlet
/ Whaka A
Te Wera
Big South
Cape Island
Google
Données cartographiques ©2015 Google
Conditions
Confidentialité
Signaler un problème
10 km

TROIS EXERCICES D'APRÈS UN SUJET DE BESANÇON

EXERCICE N°1

L'événement sportif « WINGS FOR LIFE » est une course à pied unique en son genre.

- Cette course est planétaire : 32 pays participent sur 6 continents.
- Dans chaque pays, les concurrents partent le 4 mai à 10 heures (temps universel coordonné UTC), qu'il fasse jour ou nuit, que ce soit le printemps ou l'automne (selon l'hémisphère).
- 30 minutes après le départ, une voiture « catcher car » s'élance à 15 km/h à la poursuite des coureurs puis accélère selon les modalités indiquées dans le tableau ci-dessous. Dès qu'un concurrent est rattrapé par la voiture, il est mis hors course.
- Le vainqueur est le coureur qui parcourt le plus grand nombre de kilomètres (autrement dit, le vainqueur est le dernier coureur rattrapé par la voiture « catcher car »).

Tableau décrivant la feuille de route de la voiture « catcher car »

10 h 00 UTC	DÉPART DE LA COURSE
10 h 30 UTC	DÉPART DU CATCHER CAR – VITESSE 15 km/h
11 h 30 UTC	ACCÉLÉRATION – VITESSE : 16 km/h
12 h 30 UTC	ACCÉLÉRATION – VITESSE : 17 km/h
13 h 30 UTC	ACCÉLÉRATION –VITESSE : 20 km/h
15 h 30 UTC	ACCÉLÉRATION – VITESSE : 35 km/h jusqu'à ce que le dernier participant soit rattrapé.

Remarque :
On suppose que la voiture « catcher car » *passe instantanément de 0 à 15 km/h, puis de 15 km/h à 16 km/h, puis de 16 km/h à 17 km/h, puis de 17 km/h à 20 km/h et finalement de 20 km/h à 35 km/h.*

L'ensemble des fonds réunis par les frais d'inscriptions est reversé à une association en faveur de la recherche contre les lésions de la moelle épinière.

Partie A : étude de la course d'un coureur débutant

Un coureur s'élance à 6 km/h. On suppose qu'il conserve cette allure tout au long de la course.
On déclenche le chronomètre ($t = 0$) au départ de la course.

1) Après trois quarts d'heure de course :

a) Quelle est la distance (en km) parcourue par le coureur ?

b) Quelle est la distance (en km) parcourue par la voiture « catcher car » ?

c) La voiture « catcher car » a-t-elle rattrapé le coureur ?

2) Quelle est distance d (en km) parcourue par le coureur au bout d'une durée notée t (en heure) ?

3) Quelle est la distance D (en km) parcourue par la voiture « catcher car » au bout d'une durée notée t (en heure) inférieure à une heure depuis le départ de la course ?

4) Quelle est la durée de course du coureur (en minute) entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car » ?

5) Quelle est la distance (en km) parcourue par le coureur entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car » ?

Partie B : la course du vainqueur français 2014 (Thibaut Baronian) et du vainqueur mondial (Lemawork Ketema)

En 2014, Thibaut Baronian a couru pendant 4 heures et 4 minutes avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car ».

1) Quelle est la distance (en km) parcouru~~e~~ par Thibaut Baronian ? (donner la valeur exacte puis la valeur approchée au dixième près par défaut)

2) Thibaut Baronian a parcouru les 42 premiers kilomètres en 2 heures et 48 minutes.

a) Quelle est sa vitesse moyenne (en km/h) sur cette première partie de la course ?

b) Quelle est sa vitesse moyenne (en km/h) sur la seconde partie de sa course (après 42 km) ?

c) Quelle est sa vitesse moyenne (en km/h) sur l'ensemble de sa course ?

3) Le vainqueur mondial 2014 (Lemawork Ketema) a parcouru 78,58 km avant d'être rattrapé par la voiture « catcher car ». Quelle a été la durée de sa course en heure ? Convertir cette durée en heure et minute, arrondie à la minute près.

Partie C : un tableau pour préparer sa course.

Sur différents sites internet consacrés à cette course on trouve le tableau ci-dessous. Les colonnes « Durée » et « Distance » donnent les durées et distances réalisables sur la course « Wings For Life Run » si le coureur court à la vitesse constante indiquée dans la première colonne « vitesse » (donnée en km/h).

Course				c			c	Niveau	
Vitesse	Durée	Distance	Au Km	c	Vitesse record	Chrono 100 K	c	Niveau marathon	Niveau 100K
11	01:48:00	19,800	00:05:27		19,41	09:05:27		04:26:00	14:53:00
11,5	02:00:00	23,000	00:05:13		19,20	08:41:44		04:08:00	13:34:00
12	02:15:00	27,000	00:05:00		18,94	08:20:00		03:51:00	12:26:00
12,5	02:33:20	31,944	00:04:48		18,64	08:00:00		03:34:00	11:26:00
13	02:52:30	37,375	00:04:37		18,35	07:41:32		03:20:00	10:34:00
13,5	03:17:09	44,357	00:04:27		17,99	07:24:27		03:07:00	09:50:00
14	03:40:00	51,333	00:04:17		17,69	07:08:34		02:52:00	09:00:00
14,5	04:00:00	58,000	00:04:08		17,43	06:53:48		02:41:00	08:22:00
15	04:24:00	66,000	00:04:00		17,14	06:40:00		02:31:00	07:46:00
15,5	04:53:20	75,778	00:03:52		16,81	06:27:06		02:21:00	07:10:00
16	05:30:00	88,000	00:03:45		16,43	06:15:00		02:11:00	06:34:00
16,5	05:38:55	93,203	00:03:38		16,35	06:03:38		02:05:00	06:14:00
17	05:48:20	98,694	00:03:32		16,26	05:52:56		02:00:00	05:54:00

Dans la ligne correspondant à une vitesse constante de 11 km/h, expliquer comment la durée de course (01:48:00) a été trouvée.

EXERCICE N°2

Dans un magasin, on trouve des appareils photos numériques à tous les prix. 25 appareils sont proposés, et leurs prix s'étalent de 245 euros à 1 099 euros. On a regroupé ces prix par classes d'amplitude 100 euros ; les données obtenues ont été consignées dans une feuille de calcul d'un tableur dont une copie figure ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tranche de prix [a; b[	a	b	centre de la classe	effectif	effectifs cumulés croissants	fréquences	fréquences cumulées croissantes
2	[200; 300[	200	300	250	5	5	0,2	0,2
3	[300; 400[	300	400	350	5	10	0,2	0,4
4	[400; 500[	400	500	450	2	12	0,08	0,48
5	[500; 600[	500	600	550	2	14	0,08	0,56
6	[600; 700[	600	700	650	4	18	0,16	0,72
7	[700; 800[	700	800	750	3	21	0,12	0,84
8	[800; 900[	800	900	850	1	22	0,04	0,88
9	[900; 1000[	900	1000	950	1	23	0,04	0,92
10	[1000; 1100[	1000	1100	1050	2	25	0,08	1

1) Dans la cellule F2, on a entré 5. Quelle formule a-t-on pu ensuite écrire dans la cellule F3 pour que, une fois étirée vers le bas, cette formule ait permis de remplir la colonne F ?

2) On s'intéresse au remplissage de la colonne G. Parmi les formules suivantes, indiquer celle(s) qui, une fois inscrite(s) dans la cellule G2, a (ont) pu permettre, une fois étirée(s) vers le bas, de remplir la colonne G ?

= E2/(SOMME(E2 : E10))   = E2/(SOMME(E$2 : E$10)   = E2/F10   = E2/25

3) On s'intéresse à la série statistique des prix des appareils photos.
Donner la classe à laquelle appartient :

a) le premier quartile ;

b) la médiane ;

c) le troisième quartile.

4) La représentation en diagramme circulaire de cette série statistique est donnée ci-dessous, mais dans la légende, la correspondance entre les numéros des secteurs et les classes de la série statistique n'apparaît pas.

a) Expliquer comment on peut associer à chaque secteur la classe qu'il représente.

b) Calculer l'angle du secteur circulaire correspondant aux appareils photos dont le prix est compris entre 600 et 700 euros.

EXERCICE N°3

Un jour, dans un cours de mathématiques, on mesure la taille de tous les élèves. À l'issue de ces relevés, on obtient les indicateurs suivants :

- la taille moyenne de tous les garçons est 160 cm, celle des filles est 150 cm ;
- Aline est la plus grande des filles et mesure 180 cm ;
- Zénon est le plus petit des garçons et mesure 130 cm.

Deux élèves sont absents ce jour-là mais viennent en classe le jour suivant. On mesure alors leur taille et on recalcule les moyennes. Étonnamment, ni la taille moyenne des filles, ni celle de garçons n'ont changé.

1) Que peut-on affirmer à propos de la taille de ces deux élèves ?

2) Déterminer si les conclusions suivantes peuvent être tirées de ces informations (toutes les réponses devront être justifiées) :

a) Zénon est toujours le plus petit garçon.

b) Un des élèves est un garçon, l'autre est une fille.

c) Les deux élèves ont la même taille.

d) La taille moyenne de l'ensemble des élèves n'a pas changé.

EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

CORRIGÉS

VRAI-FAUX (ISSUS DE DIVERS SUJETS D'EXAMEN DES ESPE ET DU BREVET DES COLLÈGES)

1. Affirmation 1 :
La somme de deux nombres rationnels non décimaux est un rationnel non décimal.

L'affirmation est fausse, un contre-exemple suffit à le justifier : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

2. Au sein d'une entreprise, tous les salaires ont été augmentés de 3%.
Affirmation 2 :
L'écart entre le salaire le plus élevé et le salaire le moins élevé dans cette entreprise a aussi augmenté de 3%.

L'affirmation est vraie.
Soit S le salaire le plus élevé et s le salaire le moins élevé avant augmentation. L'écart entre ces salaires est (S – s). Après augmentation le salaire le plus élevé est 1,03×S et le salaire le moins élevé est 1,03×s. L'écart entre ces salaires est 1,03×(S – s). L'écart entre ces salaires a donc lui aussi augmenté de 3%.

3. Affirmation 3 :
Le nombre 3675 possède exactement 17 diviseurs distincts.

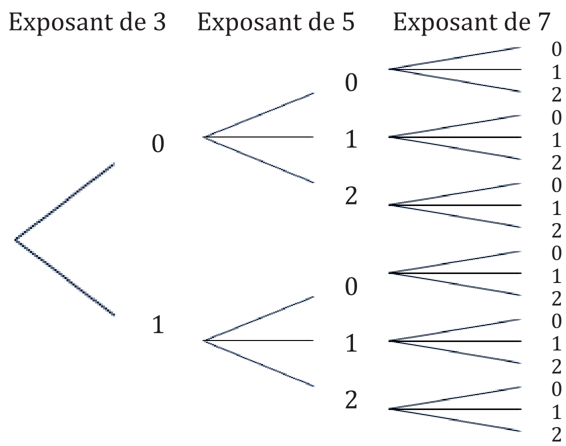
L'affirmation est fausse.

Méthode 1 :
$3675 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$. Il suffit alors d'énumérer tous les diviseurs possibles. La recherche exhaustive doit passer par une procédure permettant de ne pas en oublier. Par exemple, on peut s'organiser suivant le nombre de facteurs premiers utilisés parmi ceux de la décomposition, sans oublier que 1 est un diviseur de tout entier :
Zéro facteur : 1
Un facteur : 3 ; 5 ; 7
Deux facteurs : 3×5 ; 3×7 ; 5×7
Trois facteurs : $3 \times 5 \times 5$; $3 \times 5 \times 7$; $3 \times 7 \times 7$; $5 \times 5 \times 7$; $5 \times 7 \times 7$
Quatre facteurs : $3 \times 5 \times 5 \times 7$; $3 \times 5 \times 7 \times 7$; $5 \times 5 \times 7 \times 7$
Cinq facteurs : $3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$
Il y a donc 18 diviseurs distincts.

Méthode 2 :
$3675 = 3^1 \times 5^2 \times 7^2$
Un diviseur de 3675 a une décomposition de la forme $3^a \times 5^b \times 7^c$ avec a, b et c entiers inférieurs ou égaux aux exposants respectifs de 3, 5 et 7 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre 3675.

On a donc deux choix possibles pour a (0 ou 1), trois choix possibles pour b (0, 1 ou 2) et trois choix possibles pour c (0, 1 ou 2), soit au total $2 \times 3 \times 3 = 18$ choix possibles pour le triplet (a, b, c) – ce qui peut être illustré par l'arbre de choix ci-contre.

On a donc 18 diviseurs distincts pour le nombre 3675.



Remarque :
La méthode 2 ci-dessus est un cas particulier d'un résultat plus général qui peut s'énoncer ainsi : si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre est ${p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \ldots\ldots\ldots \times {p_n}^{a_n}$ *, alors son nombre de diviseurs est* $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \ldots\ldots\ldots \times (a_n + 1)$ *(on a* $a_i + 1$ *choix possibles pour l'exposant du facteur premier* p_i *: 0, 1, 2, ……,* p_i*).*

4. Affirmation 4 :
Quatre points distincts A, B, C et D sont sur un cercle de centre O. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

L'affirmation est fausse. Un contre-exemple par un dessin suffit.

Pour qu'un tel quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu. A, B, C et D étant sur un cercle, il faudrait qu'ils soient deux à deux diamétralement opposés et, ses diagonales étant de même longueur (le diamètre du cercle), ABCD serait alors un rectangle.

Pour exhiber un contre-exemple, il suffit de choisir quatre points non diamétralement opposés deux à deux.

5. Affirmation 5 :
Un satellite fait 95 fois le tour de la Terre en exactement 7 jours. La durée d'une rotation du satellite autour de la Terre (arrondie à la seconde) est égale à 1 h 46 min 6 s.

L'affirmation est vraie.
7 jours, c'est 7×24 h $= 168$ h, ou encore 168×3600 s $= 604800$ s.
Donc la durée d'une rotation est 604800 s $: 95$ soit environ 6366 s (arrondi à la seconde près).
$6366 = 1 \times 3600 + 2766$ donc 6366 s $= 1$ h $+ 2766$ s
$2766 = 46 \times 60 + 6$ donc $2766 = 46$ min $+ 6$ s
La durée d'une rotation du satellite autour de la Terre(arrondie à la seconde) est bien 1 h 46 min 6 s.

6. Affirmation 6 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4.

L'affirmation est vraie.

Méthode 1 :

Tout nombre entier dont l'écriture se termine par 2 est de la forme $10n + 2$, avec n entier naturel, nombre de dizaines de l'entier considéré ; d'où son carré :

$(10n + 2)^2 = (10n)^2 + 2 \times 10n \times 2 + 2^2 = 100n^2 + 40n + 4 = (10n^2 + 4n) \times 10 + 4$

On reconnaît l'écriture d'un nombre dont le chiffre des unités est 4 et dont le nombre de dizaines est $10n^2 + 4n$.

Méthode 2 :

D'après l'algorithme classique de la multiplication, le chiffre des unités du produit est le chiffre des unités du produit des chiffres des unités de chaque facteur.

	…………………	2
×	…………………	2
	(…)	4
	(…)	.
	(…)	.
		4

7. Affirmation 7 :
Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4, alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.

L'affirmation est fausse.

Un contre-exemple suffit pour le prouver. $14^2 = 196$ ne se termine pas par 16.

Remarque :
Si on peut affirmer que le chiffre des unités du résultat est toujours celui du produit des unités (voir question précédente), le chiffre des dizaines n'est que dans certains cas particuliers celui du produit des unités : il faut y ajouter les chiffres des unités des deux produits du chiffre des unités de l'un des nombres par le chiffre des dizaines de l'autre.

8. Le compteur de vitesse d'une voiture exagère de 10 %.

Affirmation 8 : Si le compteur indique 100 km/h, on roule en réalité à 90 km/h.

L'affirmation est fausse.
La vitesse lue sur le compteur est la vitesse réelle majorée de 10%, soit la vitesse réelle multipliée par 1,1.
Si on roule à 90 km/h, la vitesse lue sera 90 km/h + 90 km/h × $\frac{10}{100}$ = 90 km/h × 1,1 = 99 km/h.

Autre méthode :

On calcule la vitesse réelle en divisant la vitesse lue par 1,1. Si on divise 100 km/h par 1,1 on obtient environ 90,91 km/h et non 90 km/h.

9. On donne : 1 To (téraoctet) = 10^{12} octets et 1 Go (gigaoctet) = 10^9 octets. On partage un disque dur de 1,5 To en dossiers de 60 Go chacun.

Affirmation 9 :
Le nombre de dossiers obtenus est égal à 25.

L'affirmation est vraie.

$1 \text{ To} = \frac{10^{12}}{10^9} \text{ Go} = 10^3 \text{ Go}$

Le nombre de dossiers de 60 Go dans 1,5 To est donc :

$\frac{1{,}5 \times 10^3 \text{ Go}}{60 \text{ Go}} = \frac{1500}{60} = 25$

10. Affirmation 10 :
Pour n'importe quel nombre entier naturel n, $(n+1)^2 - (n-1)^2$ est un multiple de 4.

L'affirmation est vraie.

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 4n$

$4n$ est un multiple de quatre pour n'importe quelle valeur de n.

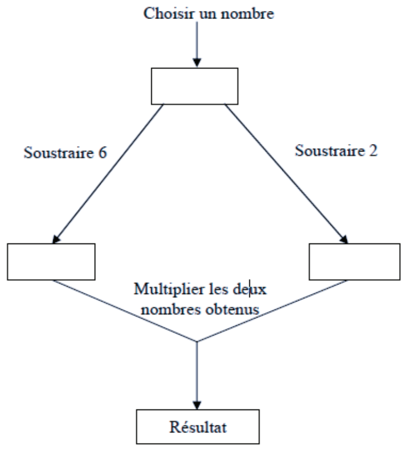
11. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Affirmation 11 :

La probabilité de n'obtenir ni un as ni un pique est de $\frac{20}{32}$.

L'affirmation est fausse.
Dans le jeu, il y a 8 piques et 4 as dont celui de pique, donc $8 + 4 - 1 = 11$ cartes qui sont soit des piques, soit des as.
Il y a donc 32 – 11 soit 21 cartes qui ne sont ni des piques, ni des as.
La probabilité de ne tirer ni un as ni un pique est $\frac{21}{32}$.

12. On considère le programme de calcul ci-dessous :



Affirmation 12a.
Le programme peut donner un résultat négatif.

L'affirmation est vraie.

Un exemple suffit à la justification. Si on choisit 4, le résultat est $(4-6)\times(4-2)=-2\times 2=-4$.

Remarque :
Le résultat est un produit, qui est négatif si l'un des facteurs est négatif, l'autre étant positif. Il faut donc choisir un nombre strictement compris entre 2 et 6.

Affirmation 12b.
Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres.

L'affirmation est vraie.
Le résultat étant un produit, il est nul si l'un des deux facteurs est nul. Il faut donc choisir 6 ou 2 pour que l'un des facteurs soit 0.

Autre justification :
Soit x le nombre choisi.
Le résultat est donné par l'équation : $(x-6)(x-2)$
On est amené à résoudre l'équation $(x-6)(x-2)=0$ soit $(x-6)=0$ ou $(x-2)=0$ c'est-à-dire $x=6$ ou $x=2$.

13. Dans un referendum local, 40% des femmes et 70% des hommes ont répondu « OUI », à la question posée. Sachant que l'électorat contient 65% de femmes et que l'on n'a comptabilisé aucun vote blanc ou nul :

Affirmation 13a :
Les hommes ayant voté « OUI » représentent environ un quart des électeurs.

L'affirmation est vraie.

Les hommes représentent 35% de l'électorat (100% – 65%).

Les hommes ayant répondu « OUI » représentent donc 70% × 35% soit 24,5% des électeurs.

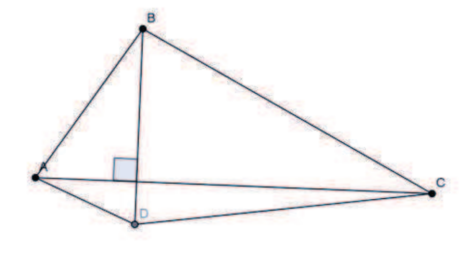
Affirmation 13b :
La majorité des votants a répondu « NON ».

L'affirmation est fausse.

Les femmes ayant répondu « OUI » représentent 40% × 65% soit 26% des électeurs. On a donc 26% + 24,5% soit 50,5% des électeurs qui ont répondu « OUI ». Par conséquent, 49,5% des électeurs a répondu « NON », ce qui ne constitue pas la majorité.

14. Affirmation 14 :
Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

L'affirmation est fausse.

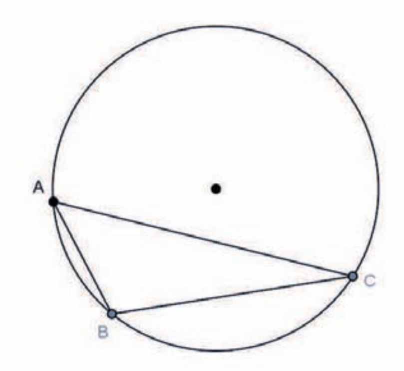


Voici un contre-exemple :

ABCD est un quadrilatère ; ses diagonales sont perpendiculaires ; ce n'est pas un losange car ses diagonales n'ont pas le même milieu (donc ce n'est pas un parallélogramme).

15. Affirmation 15 :
Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle.

L'affirmation est fausse.



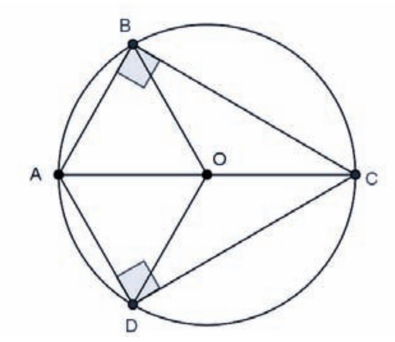
Voici un contre-exemple :

le triangle ABC est inscrit dans le cercle (A, B et C sont des points du cercle) ; il n'est pas rectangle car, s'il était rectangle, son cercle circonscrit aurait pour diamètre l'un de ses côtés, ce qui n'est pas le cas.

16. ABCD est un quadrilatère convexe tel que : $AB = AD = 1$, $BC = CD = \sqrt{3}$ et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont droits.

Affirmation 16a :
ABCD est inscriptible dans un cercle de rayon 1.

L'affirmation est vraie.



ABC est un triangle rectangle en B, il est donc inscrit dans un cercle de centre O, le milieu de [AC].

D'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$ donc $AC^2 = 4$ soit $AC = 2$.

O est le milieu de [AC] donc OA = OC = 1 donc B est sur le cercle de rayon 1. Avec le même raisonnement, on peut dire que D est sur le même cercle.

En conclusion, A, B, C et D sont sur le cercle de rayon 1.

Affirmation 16b :
L'angle $\widehat{A}$ vaut 120°.

L'affirmation est vraie.

D'après la question précédente, on a OB = OA = 1. Or AB = 1 par hypothèse, donc AB = OA = OB, on en conclut que le triangle AOB est équilatéral. On a $\widehat{BAO} = 60°$.

De même, le triangle OAD est équilatéral et $\widehat{OAD} = 60°$.

Ainsi $\widehat{BAD} = \widehat{BAO} + \widehat{OAD} = 60° + 60° = 120°$.

17. Les promenades sur la Seine

Selon l'Observatoire du tourisme fluvial en Ile de France, « la croisière-promenade en Ile-de-France a attiré, en 2013, 7,5 millions de passagers, enregistrant une légère baisse en terme de fréquentation de l'ordre de 1,8% par rapport à 2012 ».

Par ailleurs, un document de l'office du tourisme de Paris avance les données suivantes :

Palmarès de la fréquentation mondiale des musées en 2012

	Nombre de visiteurs	Musées	Villes
1	**9 660 609**	**Musée du Louvre**	**Paris**
2	6 115 881	Métropolitain Museum of Art	New-York
3	5 575 946	British Museum	Londres
4	5 304 710	Tate Modern	Londres
5	5 163 902	National Gallery	Londres
6	5 064 546	Vatican Muséums	Vatican
7	4 360 815	National Palace Museum	Taipei
8	4 200 000	National Gallery of Art	Washington DC
9	**3 800 000**	**Centre Pompidou**	**Paris**
10	**3 600 000**	**Musée d'Orsay**	**Paris**

Affirmation 17a :

En 2012, le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été inférieur au nombre d'entrées au Musée du Louvre, mais supérieur au nombre d'entrées au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis.

L'affirmation est vraie.

On calcule le nombre de passagers de la croisière en 2012 :

$7\,500\,000 : \left(1 - \frac{1{,}8}{100}\right) \approx \mathbf{7\,637\,475}$ arrondi à l'unité.

$7\,637\,475 < 9\,660\,609$

Le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été inférieur au nombre d'entrées au Musée du Louvre.

$3\,800\,000 + 3\,600\,000 = \mathbf{7\,400\,000}$

Au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis, il y a eu 7 400 000 visiteurs.

$7\,637\,475 > 7\,400\,000$

Le nombre de passagers de la croisière-promenade en Ile de France a été supérieur au nombre d'entrées au Centre Pompidou et au Musée d'Orsay réunis.

Une navette de transport sur la Seine indique que ses bateaux se déplacent à allure régulière, à 12 km/h. Elle propose un parcours entre la Tour Eiffel et le Jardin des Plantes dont la durée affichée est 50 minutes, et qui comporte trois escales intermédiaires.

On considère que la distance qui sépare les embarcadères de la Tour Eiffel et du Jardin des Plantes est 6 km.

Affirmation 17b :

Pendant ce trajet, la durée effective de déplacement est inférieure à la durée des escales.

L'affirmation est fausse.

Pour parcourir une distance de 6 km à une vitesse régulière de 12 km/h, il faut **30 min**. La durée du parcours étant de 50 min, la durée des trois escales est de 20 min. Ainsi la durée effective de déplacement est supérieure à la durée des escales.

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Arithmétique – Numération – Probabilités – Géométrie

EXERCICE 1 : rendez-vous de comètes (d'après un sujet de Toulouse)

1) a) 1606 année de rendez-vous

Le nombre d'années écoulées entre deux passages à proximité de la Terre d'une comète doit être un multiple de la période de l'orbite.

Pour la comète de Halley, ce doit être un multiple de 76. Or : $1986 - 1606 = 76 \times 5$.

Pour la comète de Olbers, ce doit être un multiple de 70. Or : $1956 - 1606 = 70 \times 5$.

Les deux comètes sont donc bien passées à proximité de la Terre **en 1606.**

1) b) Les deux comètes à nouveau proches de la Terre durant la même année

Pour déterminer le nombre d'années qui vont s'écouler jusqu'au prochain rendez-vous, on cherche le plus petit multiple commun à 70 et 76.

$70 = 2 \times 5 \times 7$ et $76 = 2 \times 2 \times 19$ donc $\text{PPCM}(70\ ;\ 76) = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 19 = 2660$

Il s'écoulera **2660 années** à partir de l'année 1606 pour que les deux comètes se retrouvent la même année, proches de la Terre.

1) c) Nombre de passages de la Comète de Halley

Sachant que $2660 = 76 \times 35$, on en déduit que la comète de Halley aura effectué **35 passages** à proximité de la Terre après celui de 1606.

2- Vérification à l'aide du tableur

a) Valeurs de la colonne B

Les nombres de la colonne B sont les multiples non nuls de 76.

b) Formule pour la cellule B3

On peut saisir en B3 : =B2+76 ou =B2+$B$2 ou =A3*76 ou =A3*$B$2.

c) Formule en C2

La formule =B2/D2 ne permettrait pas d'obtenir les bons résultats parce que D2 est une adresse relative. Cela signifie que, par copie sur la ligne suivante, on obtiendrait =B3/D3 ce qui conduirait à un message d'erreur puisque la cellule D3 est vide (le tableur considérerait donc que l'on effectue une division par 0).

C2 fx =B2/D2

	A	B	C	D	E
1		Halley		Olbers	
2	1	76	1,08571429	70	
3	2	152	#DIV/0!		
4	3	228	#DIV/0!		
5	4	304	#DIV/0!		
6	5	380	#DIV/0!		
7	6	456	#DIV/0!		

Il faudrait saisir la formule : = B2/70 ou =B2/D$2 ou =B2/$D$2

Remarque :
Le symbole $ précède une référence (ligne ou colonne) que l'on souhaite bloquer lors d'une copie.
$D$2 est une adresse absolue : elle reste invariante par copie aussi bien sur les lignes (dans la copie vers le bas) que sur les colonnes (dans la copie vers la droite). Comme ici on ne copie que vers le bas, D$2 suffit dans la formule demandée, le symbole $ bloquant la référence à la ligne 2 dans la copie vers le bas.

d) Utiliser cette feuille de calcul pour obtenir les résultats des questions 1-b) et 1-c)

Lorsqu'un nombre de la colonne C est entier, le nombre *N* de la colonne B sur la même ligne est d'une part un multiple de 76 (il est dans la colonne B) et d'autre part un multiple de 70 (car *N*/70, le nombre de la colonne C, est entier). Ce nombre *N* est donc un multiple commun de 70 et 76.
Comme on cherche le PPCM de 76 et 70, on retient donc dans la colonne C le premier nombre entier affiché, soit 38.

	A	B	C	D
1		Halley		Olbers
2	1	76	1,08571429	70
3	2	152	2,17142857	
4	3	228	3,25714286	
5	4	304	4,34285714	
6	5	380	5,42857143	
32	...	...	...	
33	32	2432	34,7428571	
34	33	2508	35,8285714	
35	34	2584	36,9142857	
36	35	2660	38	
37	36	2736	39,0857143	
38	37	2812	40,1714286	

On en déduit le nombre d'années écoulées avant que les deux comètes soient à nouveau proches de la Terre durant la même année soit **2660**, et le nombre de passages de la Comète de Halley effectués à proximité de la Terre après celui de 1606 soit **35.**

EXERCICE 2 : numération (d'après un sujet de Dijon)

1) Écriture en base sept du nombre qui s'écrit 2491 en base dix

Méthode 1 :

En effectuant des divisions euclidiennes successives de 2491 par 7, puis du dividende obtenu par 7 et ainsi de suite, on obtient :

2491 = 7 × 355 + **6** ;
355 = 7 × 50 + **5** ;
50 = 7 × 7 + **1** ;
7 = 7 × 1 + **0** ;
1 = 7 × 0+ **1.**

On trouve donc : **2491 =** $\overline{\mathbf{10156}}_{\mathbf{sept}}$**.**

Méthode 2 :

Les puissances successives du nombre 7 sont :

$$7^0 = 1 \quad 7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401$$

On peut alors décomposer le nombre 2491 suivant ces puissances successives de 7 :
2491 = 2401 + 90 = 2401 + 49 + 41 = 2401 + 49 + 5 × 7 + 6 = $\mathbf{1} \times 7^4 + \mathbf{0} \times 7^3 + \mathbf{1} \times 7^2 + \mathbf{5} \times 7 + \mathbf{6} \times 1$
D'où l'écriture en base sept : **2491 =** $\overline{\mathbf{10156}}_{\mathbf{sept}}$**.**

2) Écriture en base dix du nombre qui s'écrit $\overline{\mathbf{3645}}_{\mathbf{sept}}$ en base sept

On doit convertir en base dix le nombre qui s'écrit $\overline{3645}_{sept}$ en base sept. On considère alors la décomposition canonique de ce nombre selon les puissances de 7 et on effectue les calculs :
$\overline{\mathbf{3645}}_{\mathbf{sept}} = 3 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = 1029 + 294 + 28 + 5 = \mathbf{1356}$.

3) Calcul de $\overline{\mathbf{5012}}_{\mathbf{sept}} - \overline{\mathbf{3534}}_{\mathbf{sept}}$

Il faut effectuer, en la posant et sans passer par la base dix, l'opération suivante : $\overline{5012}_{sept} - \overline{3534}_{sept}$.
Pour faciliter les calculs, on on peut s'aider de la table d'addition en base 7 :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

L'opération posée est la suivante :

$$\begin{array}{rcccc} & 5 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & {}_{1}2 \\ - & 3_{1} & 5_{1} & 3_{1} & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}$$

On obtient donc $\overline{\mathbf{5012}}_{\mathbf{sept}} - \overline{\mathbf{3534}}_{\mathbf{sept}} = \overline{\mathbf{1145}}_{\mathbf{sept}}$.

EXERCICE 3 : probabilités (d'après un sujet de Draguignan)

1) Probabilité de tirer le numéro 49

Chaque carte a autant de chance d'être tirée que les autres : il y a donc équiprobabilité entre les évènements « Tirer une carte numérotée *i* » , pour i = 1, … , 100.
Donc p(« Tirer une carte numérotée 27 ») = 1/100 = 0,01.

La probabilité de cet événement est égale à 0,01.

2) Probabilité de tirer un multiple de 15 qui n'est pas un multiple de 3

Tout nombre multiple de 15 est multiple de 3 et de 5. Il n'existe donc aucun nombre multiple de 15 qui ne soit pas multiple de 3.

La probabilité de cet événement est égale à 0.

3) a) Probabilité de tirer un nombre pair

La situation étant équiprobable, il suffit de dénombrer les nombres pairs compris entre 1 et 100. Les nombres pairs sont 2, 4, … 98, 100, il y en a donc 100/2 = 50.
Alors : p(« *Tirer un nombre pair*») = $\frac{50}{100}$ = 0,5.

La probabilité de cet événement est égale à 0,5.

3) b) Probabilité d'obtenir un produit impair pour le produit des nombres de deux cartes tirées avec remise

Pour obtenir un produit impair, il faut et il suffit que les deux facteurs soient impairs.
Comme on remet dans le sac après le 1er tirage, les deux événements sont indépendants. Donc la probabilité de tirer une carte impaire étant de 0,5 (probabilité de l'événement contraire de « tirer une carte paire »), celle de tirer successivement deux cartes impaires est : 0,5 × 0,5 = 0,25.

La probabilité de cet événement est égale à 0,25.

4) a) Valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement « Tirer un multiple de *n* » est la plus petite

Tout nombre n compris entre 1 et 100 possède *au moins un* multiple compris entre 1 et 100 : lui-même ($n = n \times 1$). Ainsi l'événement E_n a une probabilité au moins égale à 0,01.

Pour que la probabilité de E_n soit la plus petite, elle doit être égale à 0,01. Pour cela, n ne doit avoir aucun multiple (non nul) différent de lui-même inférieur à 100.

C'est vrai si et seulement si $2 \times n > 100$ donc $n > 50$.

L'ensemble des valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement E_n est la plus petite est {51 ; 52 ; ... ; 100}.

4) b) Valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement « Tirer un multiple de *n* » est la plus grande

Il faut chercher le nombre qui a le plus de multiples inférieurs à 100 : c'est 1. Il possède alors 100 multiples et la probabilité de E_1 est alors égale à 1.

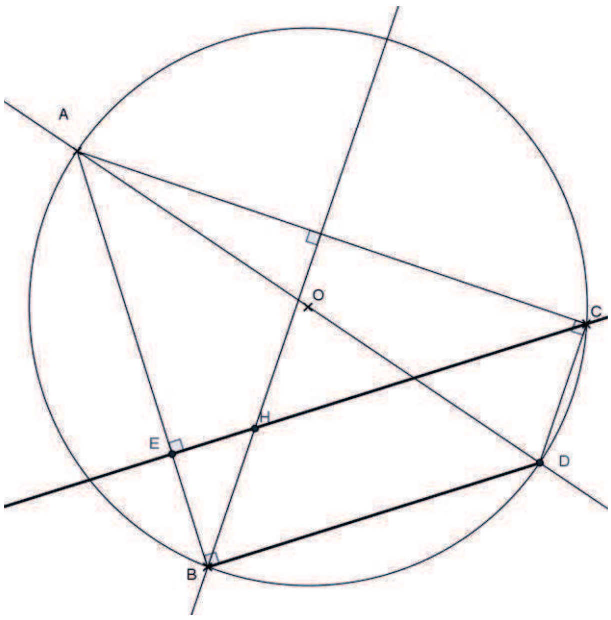
L'ensemble des valeurs de *n* pour lesquelles la probabilité de l'évènement E_n est la plus grande est {1}.

EXERCICE 4 : géométrie plane (d'après un sujet de Laval)

La figure donnée est à compléter au fur et à mesure mais nous avons fait le choix, ici à chaque question, d'illustrer avec des figures intermédiaires en ne montrant que les éléments utiles à la démonstration.

1) Nature des triangles ABD et ACD

ABD et ACD sont inscrits dans le demi-cercle de diamètre [AD], ils sont donc des **triangles rectangles respectivement en B et en C**.



2) (CE) hauteur du triangle ABC

Par construction, les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Puisque ABD est un triangle rectangle en D, les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires. Par conséquent, les droites (EC) et (AB) sont perpendiculaires (Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre).

Dans le triangle ABC, (CE) est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaires au côté opposé.

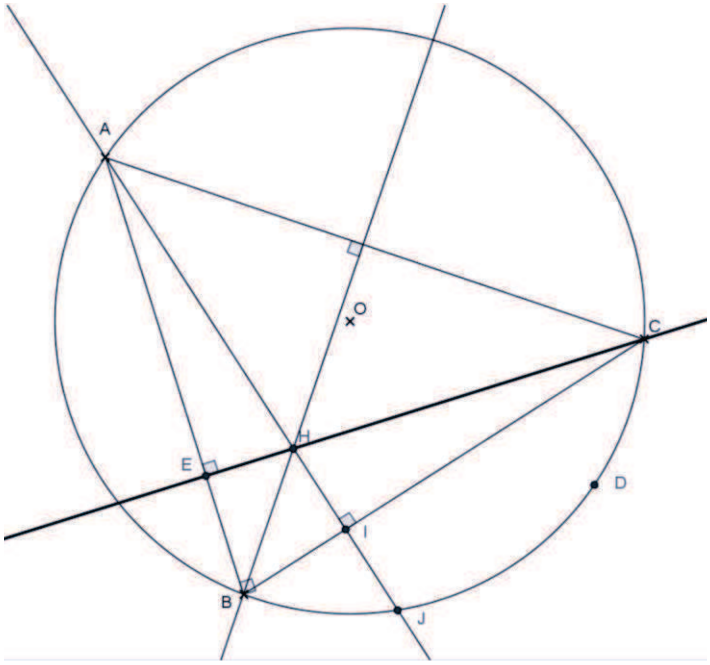
On en déduit que **(CE) est une hauteur du triangle ABC**.

3) a) (BH) est perpendiculaire à (AC)

Par construction, les points A, H, I et J sont alignés et la droite passant par A et J est perpendiculaire à (BC) : on peut alors déduire que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (BC) et qu'elle est donc une hauteur du triangle ABC.

Les droites (CE) et (AI) se coupent, par construction, en H : ce point est alors l'orthocentre du triangle ABC.

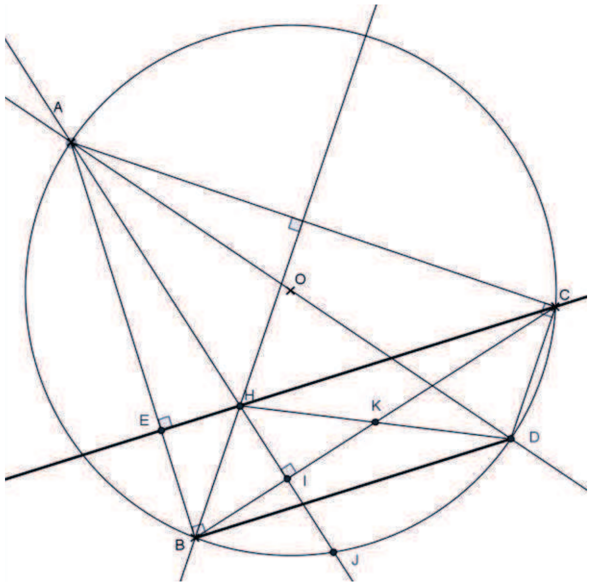
On conclut que **la droite (BH)** est la troisième hauteur du triangle ABC et qu'elle **est donc perpendiculaire à (AC)**.



3) b) BHCD est un parallélogramme

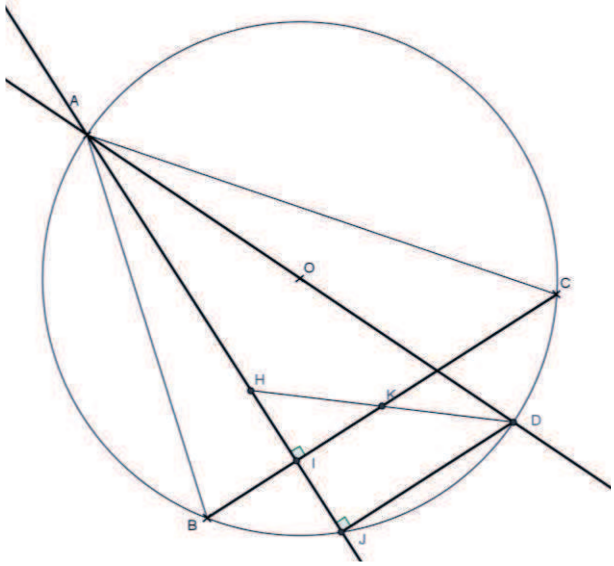
Par construction, (BD) et (CE) sont parallèles et H est sur (CE) ; on en déduit que les droites (BD) et (CH) sont parallèles.
On a prouvé que (BH) est perpendiculaire à (AC) et que ACD est un triangle rectangle en C, ce qui revient à dire que (CD) est perpendiculaire à (AC).
On peut déduire que les droites (BH) et (CD) sont parallèles car perpendiculaires à la même droite (AC).

On conclut que l**e quadrilatère BHCD est un parallélogramme** car ses côtés sont deux à deux parallèles.



4) K est milieu du segment [HD].

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Par construction, K est le point d'intersection des diagonales de BHCD, on en déduit alors que **K est le milieu du segment [HD]**.



5) a) Nature du triangle ADJ

J est, par construction, un point du cercle. ADJ est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AD], il est donc un **triangle rectangle en J**.

(CI) et (DJ) sont parallèles

Puisque le triangle ADJ est rectangle en J, les droites (DJ) et (AJ) sont perpendiculaires.
La droite (AI) est une hauteur du triangle ABC, le point I est sur [BC] et A, I et J sont alignés : la droite (CI) est donc perpendiculaire à la droite (AJ).

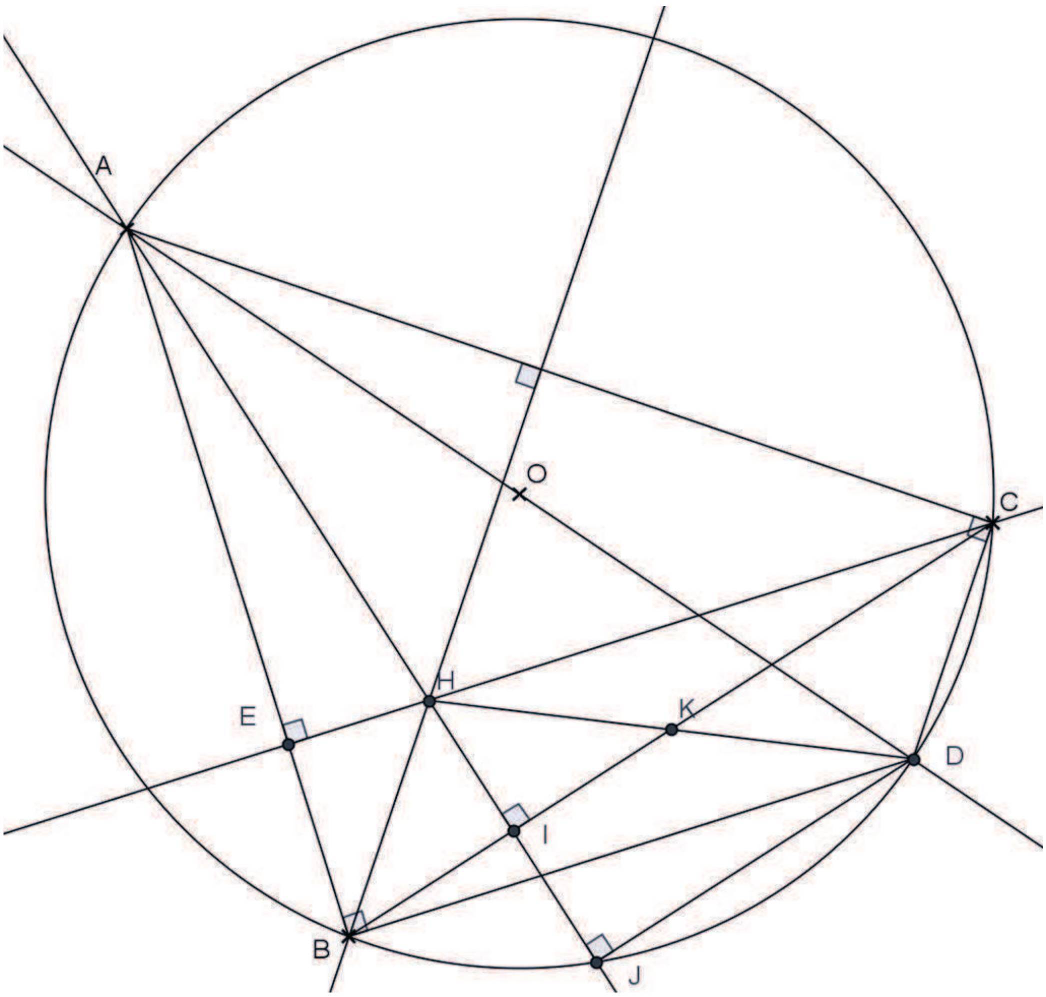
On peut conclure que **les droites (CI) et (DJ) sont parallèles** car perpendiculaires à la même droite (AJ).

5) b) I est le milieu de [HJ]

Dans le triangle HDJ, (IK) et (DJ) sont parallèles et K est le milieu de [HD].
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.

Donc **I est le milieu de [HJ]**.

Figure finale :



PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

Tipi à base hexagonale

1) Étude du sol du tipi – Plan de l'hexagone

a) $\widehat{AOB} = 60°$

Par régularité de l'hexagone, on a : $\widehat{\mathrm{AOB}} = \widehat{\mathrm{BOC}} = \ldots = \widehat{\mathrm{FOA}} = \frac{360°}{6} = 60°$

b) OAB triangle équilatéral

OAB est isocèle en O car OA et OB sont des rayons du cercle.

De plus $\widehat{\mathrm{AOB}} = 60°$ donc OAB est équilatéral.

c) Programme de construction

Remarque :

L'échelle choisie pour la représentation étant $\frac{1}{100}$, la longueur d'un côté de l'hexagone sera de 2 cm sur la représentation.

Programme 1 :

On trace un cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm.

On place un point A, sur ce cercle puis on trace le diamètre [AD] (ou bien : la droite (AO) coupe C_1 en D).

On trace les cercle C_2 et C_3 de centres respectifs A et D, et de diamètre commun OA (soit 2 cm).

C_2 coupe C_1 en B et F, C_3 coupe C_1 en C et E

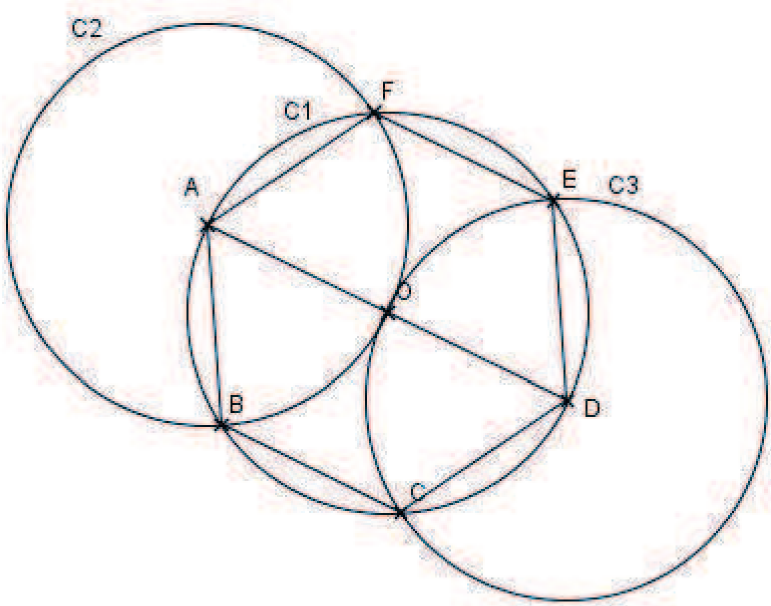
Remarque :
Il n'est pas attendu dans le programme de construction de préciser la position relative de ces points de sorte que A, B, C, D, E, F soient positionnés sur le cercle dans cet ordre.

Programme 2 :

On trace le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm.

On place le point A sur ce cercle puis on trace un arc de cercle de centre A et de rayon OA qui coupe C_1 en un point B.
Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon OA qui coupe C_1 en un point C différent de A.
On réitère cette construction jusqu'à obtenir le point F.

d) Figure



2) Estimation du volume du tipi.

a) (OI) est perpendiculaire à (AB)

I est le milieu de [AB] donc (OI) est la médiane issue de O.
Or le triangle OAB est équilatéral, donc isocèle en O, donc la médiane (OI) est aussi la hauteur issue de O dans le triangle OAB. Ainsi **(OI) est perpendiculaire à (AB).**

b) Longueur OI sur le plan.

Le triangle OIA est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore on a donc : $\mathrm{OI}^2 + \mathrm{AI}^2 = \mathrm{OA}^2$

OAB étant équilatéral de côté 2 cm et I étant milieu de [AB], on a OA = 2 cm et AI = 1 cm

donc $\mathrm{OI} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AI}^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

La longueur OI est égale à $\sqrt{3}$ cm soit **1,7 cm à 0,1 cm près**.

c) Aire du triangle OAB, aire H de l'hexagone ABCDEF sur le plan.

L'aire de OAB est :

$$\mathcal{A}(\mathrm{AOB}) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{OI}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

L'aire de OAB est $\sqrt{3}$ cm² soit **1,7 cm² à 0,1 cm² près.**

L'hexagone est constitué de six triangles isométriques au triangle OAB.

L'aire de l'hexagone est donc égale à $6\sqrt{3}$ cm² soit **10,4 cm² à 0,1 cm² près.**

d) Aire de l'hexagone en vraie grandeur

L'échelle étant de $\frac{1}{100}$, ce qui est exactement le rapport entre l'unité de longueur utilisée sur la représentation (le centimètre) et l'unité de longueur utilisée en vraie grandeur (le mètre), les mesures sur la représentation et les mesures en vraie grandeur sont égales.
Donc **l'aire en vraie grandeur est d'environ 10,4 m² à 0,1 m² près.**

e) Volume V de la pyramide

On a donc $V = \frac{1}{3} H \times \mathrm{OS} = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$

Le volume de la pyramide est égal à $12\sqrt{3}$ m³ soit **20,8 m³ à 0,1 m³ près**.

3) Parois latérales

a) Longueur SI

On se place dans le triangle SOI.
(SO) est perpendiculaire au plan du sol, donc perpendiculaire à toute droite du plan de l'hexagone passant par O et en particulier perpendiculaire à (OI). SOI est donc un triangle rectangle en O et d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{OI}^2 + \mathrm{OS}^2 = \mathrm{SI}^2$ d'où $\mathrm{SI} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 6^2} = \sqrt{39}$.

La longueur SI est égale à $\sqrt{39}$ m.

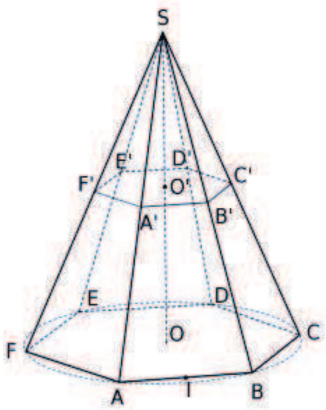
b) Aire du triangle SAB - Aire totale des faces triangulaires du tipi

Le triangle SAB étant isocèle en S, la médiane (SI) issue de S est aussi la hauteur relative au côté [AB].

$$\mathcal{A}(\mathrm{SAB}) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{2\sqrt{39}}{2} = \sqrt{39}$$

L'aire de SAB est égale à $\sqrt{39}$ m².
L'aire totale des faces triangulaires est donc $6\sqrt{39}$ m².

4) Création d'un toit à mi-hauteur



a) Longueur A'B'

A' et B' sont respectivement milieu de [SA] et [SB], d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle SAB, on a : $\mathrm{A'B'} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

La longueur A'B' est égale à 1 m

b) Aire H' de l'hexagone A'B'C'D'E'F' et volume V' de la petite pyramide SA'B'C'D'E'F'.

Méthode 1 : elle s'appuie sur les calculs précédents (du A.2).

On a comme dans le cas précédent $\widehat{\mathrm{A'O'B'}} = 60°$ et O'A'B' est équilatéral. On note I' le milieu de [A'B'] et donc $\mathrm{A'B'} = \frac{1}{2}$ m

On calcule comme au A.2 : $\mathrm{O'I'} = \sqrt{\mathrm{O'A'}^2 - \mathrm{A'I'}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

l'aire de O'A'B' est $\mathcal{A}(\mathrm{A'O'B'}) = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{\mathrm{O'A'} \times \mathrm{O'I'}}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (en m²)

d'où $H' = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

L'aire H' est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m².

$V' = \frac{1}{3} H' \times \mathrm{O'S} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Le volume V' est égal à $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m³.

Méthode 2 : la pyramide SA'B'C'D'E'F' s'obtient par une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de la pyramide SABCDEF.

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.

On obtient ainsi :

$$H' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times H = \frac{H}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V = \frac{V}{8} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

L'aire H' est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m² et le volume V' est égal à $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m³.

5) Fixation de la toile

a) Diviseurs de 200.

On effectue la décomposition en facteurs premiers de 200 :

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

Les diviseurs de 200 sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $2^p \times 5^q$ avec p et q entiers naturels tels que $p \leq 3$ et $q \leq 2$.

Pour les obtenir, on peut dresser le tableau suivant :

	5^0	5^1	5^2
2^0	1	5	25
2^1	2	10	50
2^2	4	20	100
2^3	8	40	200

Les douze diviseurs de 200 sont donc : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200.

Remarque :

On aurait aussi pu, au lieu de dresser le tableau, construire un arbre de choix.

a) Valeurs de L possibles

Sachant que L doit être un multiple de 5, on cherche dans la liste des diviseurs de 200 les multiples de 5. Il y en a 8 donc 8 valeurs possibles de L : **5, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200.**

b) Nombre total de piquets utilisés autour de l'hexagone

Méthode 1 :

Le contour de cet hexagone est une ligne fermée sur laquelle on va placer des piquets tous les 25 cm. Sur une ligne fermée, le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles.

Le périmètre total est de 1200 centimètres donc on a 1200/25 soit **48 piquets au total.**

Méthode 2 :

Un côté de l'hexagone peut être vu comme une ligne ouverte sur laquelle on va placer des piquets aux extrémités et tous les 25 cm. Dans cette configuration, on a un piquet de plus que d'intervalles.

L étant égal à 25 cm sur un côté de 200 cm, il y a 9 piquets $\left(\frac{200}{25} + 1\right)$

Il y a 6 cotés sur lesquels on a 9 piquets, mais on compte ainsi deux fois chaque piquet d'angle. Le nombre total de piquets est donc donné par : 6 × 9 – 6 = 54 – 6 soit **48 piquets.**

PROBLÈME DE RECHERCHE DE MAXIMUM D'UNE FONCTION D'APRÈS UN SUJET DE TOULOUSE

A) Première propriété

On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble de tous les couples de réels positifs a et b vérifiant la propriété (P) : « $a^2 + b^2 = 100$ ».

1) Justification du fait que si $(a; b)$ est un couple de solutions, alors a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 10

Méthode 1 :

Soit $(a ; b)$ un couple de solutions.
Supposons que l'un des nombres a ou b soit strictement supérieur à 10 (par exemple a). On aurait alors $a^2 > 100$ et donc, comme b^2est positif, on aurait $a^2 + b^2 > 100$, ce qui contredit le fait que $(a; b)$ est solution. Aucun des deux nombres a et b ne peut donc être strictement supérieur à 10.
Tous les couples de réels positifs a et b vérifiant la propriété (P) : « $a^2 + b^2 = 100$ » sont donc bien tels que a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 10.

Méthode 2 :

Quelles que soient les valeurs de a et de b, $0 \leq b^2$, $0 \leq a^2$, d'où $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$.
Par conséquent, si$(a ; b)$ est solution alors $a^2 + b^2 = 100$, et donc $a^2 \leq 100$ et $b^2 \leq 100$. a et b étant positifs et la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a alors $a \leq 10$ et $b \leq 10$.

2) Inventaire des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la propriété (P)

On peut donner à a toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 10 et, pour chacune de ces valeurs, calculer b tel que $b^2 = 100 - a^2$. $(a ; b)$ est alors un couple d'entiers solution si et seulement si b est entier.

Regrouper les calculs dans un tableau peut se révéler efficace pour ce genre de recherche.

On propose ci-dessous, à titre d'exemple, un tableau construit à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D
1	a	b²	b (sachant que b est positif)	couple (a;b) solution
2	0	100	10	(0;10)
3	1	99	9,949874371	pas de solution
4	2	96	9,797958971	pas de solution
5	3	91	9,539392014	pas de solution
6	4	84	9,16515139	pas de solution
7	5	75	8,660254038	pas de solution
8	6	64	8	(6;8)
9	7	51	7,141428429	pas de solution
10	8	36	6	(8;6)
11	9	19	4,358898944	pas de solution
12	10	0	0	(10;0)

et les formules à saisir :

	A	B	C	D
1	a	b²	b (sachant que b est positif)	couple (a;b) solution
2	0	=100-A2^2	=RACINE(B2)	(0;10)

On obtient alors les couples d'entiers vérifiant la propriété (P) : (0 ; 10) ; (6 ; 8) ; (8 ; 6) et (10 ; 0).

3) Recherche des valeurs de a, a réel positif, telles que le couple $(a\,;\,a)$ vérifie la propriété (P) (avec a donné sous la forme $p\sqrt{q}$, avec p et q entiers naturels, q le plus petit possible)

Le couple (a ; a) vérifie la propriété (P) si et seulement si a est solution de l'équation $2a^2 = 100$ soit $a^2 = 50$.

a étant positif, on trouve $a = \sqrt{50}$, soit $= \sqrt{2 \times 5^2}$, soit encore $\boldsymbol{a = 5\sqrt{2}}$.

B) Recherche d'une aire maximale

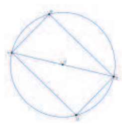
1) Mise en évidence d'un cercle (C) auxquels appartiennent tous les sommets B et D des rectangles ayant comme diagonale [AC]

Méthode 1 :

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et sont de même longueur donc ABCD est inscrit dans le cercle de centre de centre O, milieu de [AC], et de diamètre [AC]. Donc les points B et D appartiennent au cercle de diamètre [AC].

Méthode 2 :

Dans le rectangle ABCD, les triangles ABC et ADC sont rectangles respectivement en A et D. Or on sait qu'un triangle rectangle est inscrit dans le cercle qui a comme diamètre son hypoténuse. Le triangle ABC, rectangle en A, est donc inscrit dans le cercle de diamètre [AC], et il en est de même pour le triangle ADC. En conclusion, les points B et D appartiennent au cercle de diamètre [AC].



2) Aire du rectangle ABCD en fonction de AC et BH, où H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

Dans le rectangle ABCD, les triangles rectangles ABC et ACD sont *isométriques* (ou *superposables*) donc de même aire. L'aire du rectangle ABCD est donc égale au double de l'aire du triangle ABC.

L'aire de ABCD est donc égale à $2 \times \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BH}}{2}$ soit $\mathbf{AC \times BH}$.

3) Position à donner à B sur (C) pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximale. Nature du rectangle ABCD dans ce cas

Position des points B et D

On a vu dans les questions précédentes que quel que soit le rectangle ABCD dont la diagonale est [AC], l'aire du rectangle est égale à AC × BH, où H est le projeté orthogonal de B sur [AC].

[AC] étant fixé, l'aire de ABCD est donc maximale lorsque BH l'est la plus grande possible.

Or quelle que soit la position du point B sur le cercle du diamètre [AC], BH est toujours inférieure ou égale au rayon du cercle. Il suffit de considérer le triangle rectangle BOH rectangle en H : BH est toujours inférieure ou égale à la longueur OB de l'hypoténuse, qui est aussi un rayon du cercle).

De plus l'égalité entre BH et OB, rayon du cercle n'a lieu que lorsque H est confondu avec O.

B et D sont alors situés sur la perpendiculaire à (AC) passant par O.

B et D sont alors les points d'intersection B' et D' de la médiatrice de [AC] avec le cercle.

Nature du quadrilatère AB'CD'.

Les diagonales [AC] et [B'D'] de ce quadrilatère sont des diamètres du cercle, donc ont même milieu et même longueur. : AB'CD' est donc bien un rectangle.

De plus ces diagonales sont perpendiculaires (car (B'D') est la médiatrice du segment [AC]), donc **le quadrilatère AB'CD' est un carré.**

4) Preuve de la propriété : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est égale à 100 est maximal lorsque $a = b$ »

On considère l'ensemble des couples de nombres positifs (a ; b) tels que $a^2 + b^2 = 100$.
Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent d'affirmer que les rectangles de côté a cm et b cm avec $a^2 + b^2 = 100$ sont exactement les rectangles dont la diagonale a pour longueur 10 cm .

Chercher des nombres a et b tels que $a^2 + b^2 = 100$ et ab soit maximal revient donc à chercher un rectangle d'aire maximale parmi les rectangles dont la diagonale a pour longueur 10 cm.

D'après la question précédente, on sait qu'il suffit pour cela que le rectangle soit un carré, autrement dit que $a = b$.

5) Modification de l'énoncé de cette partie pour pouvoir énoncer la propriété : « Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est fixée est maximal lorsque $a = b$ » .

Soit c la somme des carrés considérée.
Dans la généralisation, c remplace le nombre 100 ; or 100 intervient dans les calculs qui précèdent comme le carré de la mesure (avec le cm comme unité de longueur) du segment [AC]. Pour généraliser on va donc prendre un segment [AC] de longueur a cm, avec c carré de la mesure a, soit $a = \sqrt{c}$.

L'énoncé devient : on considère un segment [AC] de longueur $\sqrt{c}$ cm et on s'intéresse aux rectangles ABCD dont [AC] est une diagonale.

En effet, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait dans les questions 2 et 3, on peut alors montrer que l'aire maximale que l'on peut obtenir pour un tel rectangle est atteinte quand ABCD est un carré.
Si on considère l'ensemble des couples de nombres positifs (a ; b) tels que $a^2 + b^2 = c$.
Le théorème de Pythagore et sa réciproque permettent d'affirmer que les rectangles de côté a cm et b cm avec $a^2 + b^2 = c$ sont exactement les rectangles dont la diagonale a pour longueur $\sqrt{c}$ cm .

Chercher des nombres a et b tels que $a^2 + b^2 = c$ et ab soit maximal revient donc à chercher un rectangle d'aire maximale parmi les rectangles dont la diagonale a pour longueur $\sqrt{c}$ cm.

D'après la question précédente, on sait qu'il suffit pour cela que le rectangle soit un carré, autrement dit que $a = b$.

Ce qui établit la propriété : **« Le produit de deux nombres a et b positifs dont la somme des carrés est égale à 100 est maximal lorsque $a = b$ ».**

C) Recherche d'un périmètre maximal

1) Expression de la mesure du périmètre de ABCD en fonction de x

Le périmètre du rectangle ABCD est égal à $2 \times (\mathrm{AB} + \mathrm{BC})$.
AB = x.
Dans le triangle ABC, rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 10^2$
d'où $\mathrm{BC}^2 = 10^2 - \mathrm{AB}^2 = 100 - x^2$
AB<10, donc $100 - x^2 \geq 0$ et donc $\mathrm{BC} = \sqrt{100 - x^2}$.
Quand AB = x, la mesure en cm du périmètre de ABCD est donc égale à $2 \times \left(x + \sqrt{100 - x^2}\right)$.

2) Identification de la courbe qui représente les variations du périmètre du rectangle ABCD en fonction de x.

Si on remplace x par 0 dans la formule établie à la question 1), on trouve la valeur 20.
Pour qu'une courbe représente les variations du périmètre du rectangle ABCD en fonction de x, il est nécessaire que l'image de 0 par la fonction représentée soit 20.
Or la lecture du graphique donné permet d'affirmer que l'image de 0 par la fonction représentée par (C1) est 20 alors que l'image de 0 par la fonction représentée par (C2) est 0
On en conclut que seule (C1) convient.

3) Détermination par lecture graphique d'un encadrement d'amplitude 1 de x tel que le périmètre de ABCD semble maximal

On cherche sur la courbe (C1) le point d'ordonnée maximale et on lit son abscisse.
En respectant l'amplitude imposée par le texte, **plusieurs réponses sont possibles, par exemple 6,5 < x < 7,5 ou 6,7 < x < 7,7.**

4) Formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B

Une des deux formules ci-dessous peut être saisie en B2 :

`=2*(A2+RACINE(100 – A2^2))` ou `=2*(A2+RACINE(100 – A2*A2))`

5) Détermination à l'aide du tableau de valeurs d'une valeur approchée au dixième près de la valeur de x permettant d'obtenir le périmètre maximal.

On peut lire : **$x \approx 7{,}1$ au dixième près**.

D) Dernier problème…

1) Étude d'une nouvelle configuration pour établir une nouvelle propriété

a) Égalité des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BCH}$, et égalité des rapports $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ et $\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$

Méthode 1 (avec trigonométrie)

Par définition de B, le triangle ABH est rectangle en H.
Par ailleurs, le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle qui a comme diamètre l'un de ses côtés : il est donc rectangle en B.
On en déduit que les angles $\widehat{\mathrm{ABH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}}$ sont chacun complémentaires de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Ils sont donc égaux (on peut aussi écrire $\widehat{\mathrm{ABH}} = 90° - \widehat{BAC}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}} = 90° - \widehat{\mathrm{BAC}}$).
Dans les triangles BHA et BHC tous deux rectangles en H, on a donc respectivement : $\tan\left(\widehat{\mathrm{ABH}}\right) = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ et $\tan\left(\widehat{\mathrm{BCH}}\right) = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$. Comme les angles $\widehat{\mathrm{ABH}}$ et $\widehat{\mathrm{BCH}}$ sont égaux, on obtient : $\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{BH}} = \frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{CH}}$.

Méthode 2 (sans trigonométrie, avec les triangles semblables).

On démontre comme dans la méthode 1 que les triangles BHA et CHB sont rectangles et qu'ils ont deux angles égaux $\widehat{\mathrm{ABH}} = \widehat{\mathrm{BCH}}$. Leurs troisièmes angles respectifs sont donc aussi égaux.

Les triangles BHA et CHB ont donc leurs trois angles deux à deux égaux : ils sont donc semblables, donc les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.
Le rapport de deux longueurs de l'un des triangles est donc égal au rapport des longueurs correspondantes du second, ce qui donne le résultat demandé.

b) Égalité $\mathbf{BH^2 = AH \times CH}$

De l'égalité de rapports $\frac{\text{AH}}{\text{BH}} = \frac{\text{BH}}{\text{CH}}$, on déduit directement que $\mathbf{BH^2 = AH \times CH}$.

Remarque :
Cette propriété est une propriété « classique » du triangle rectangle : « le carré de la hauteur issue de l'angle droit dans un triangle rectangle est égale au produit des distances du pied de la hauteur aux extrémités de l'hypoténuse ».

c) Preuve d'une nouvelle propriété : le produit de deux nombres positifs, dont la somme est fixée, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux

Soit s un nombre positif, fixé.
Soit x et y deux nombres positifs dont la somme est égale à s. On cherche les valeurs à leur donner pour que le produit xy soit maximal.

Soit [AC] un segment tel que AC = s cm.
Pour deux valeurs de x et y données telles que $x + y = s$, on construit le point H sur le segment [AC] tel que AH = x cm ; on a alors HC = y cm (car A, H et C sont alignés dans cet ordre donc HC = AC - CH).
On construit aussi le point B à partir de H comme décrit dans l'énoncé ci-dessus.

De l'égalité $\text{BH}^2 = \text{AH} \times \text{CH}$, on déduit que le produit $x \times y$ des deux nombres est égal à BH^2, et ceci quelle que soit la position de H sur [AC].

Chercher à rendre le produit xy maximal revient donc à chercher les positions à donner à H sur le segment [AC] pour que BH^2 soit maximal.

BH^2 est maximal si et seulement si BH l'est. Or comme vu plus haut, la longueur de la demi-corde [BH] est maximale si et seulement si [BH] est un rayon du demi-cercle de diamètre [AC], autrement dit si et seulement si H est en O et donc si et seulement si $x = y$.

Conclusion : le produit de deux nombres positifs dont la somme est fixée est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

2) Étude du produit de deux nombres dont la somme est fixée et égale à 10

a) Une expression du produit de deux nombres dont la somme est égale à 10, en fonction de l'un des deux nombres

$x + y = 10$, donc le deuxième nombre peut s'exprimer en fonction du premier : $y = 10 - x$.
Leur produit peut alors aussi s'exprimer en fonction du premier nombre : $p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

b) Une autre expression du produit des deux nombres

En développant $-(x - 5)^2 + 25$.
On obtient : $-(x - 5)^2 + 25 = -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -x^2 + 10 = p(x)$
d'où $p(x) = -(x - 5)^2 + 25$.

c) Recherche du maximum du produit de deux nombres dont la somme est 10. Retour sur une propriété

Pour tout nombre x, $(x - 5)^2 \geq 0$, donc $25 - (x - 5)^2$ est toujours inférieur ou égal à 25, et est maximal quand $(x - 5)^2$ est nul donc quand $x = 5$.
Pour $x = 5$, on obtient $p(5) = 25$.
p est donc maximal pour $x = 5$ et vaut alors 25.
On retrouve le résultat de la partie D)1) dans le cas où AC = 10.

EXERCICE DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS UN SUJET D'ALSACE

1) Niveau de la classe.

Cette situation relève du cycle 3, et plus précisément du CM2. On ne trouve pas explicitement cette compétence dans les programmes 2008. Les élèves sont amenés à tracer une figure à partir d'un programme de construction depuis le CM1. On s'accorde à dire que c'est en CM2 qu'ils peuvent élaborer eux-mêmes un texte prescriptif en vue de faire reproduire la figure par un autre groupe. Ce sera l'occasion de renforcer le regard porté sur une figure : reconnaître ses éléments simples et anticiper sa construction (choix des outils et de l'ordre de la construction).

Remarque :
Ici, les élèves doivent reconnaître le carré ABCD, le cercle centré en C, l'intersection E du cercle et de la diagonale [AC]. Les dimensions (côté du carré et rayon du cercle) devront être mesurées sur la figure témoin.

2) Analyse des productions.

Production 1 :

Erreurs

- Objets insuffisamment définis :
    - la position du sommet C du carré n'est pas précisée : « dans » le cercle permet de savoir que C appartient au disque délimité par le cercle tracé précédemment, et non pas qu'il en est le centre ; plus tard, lorsque le carré est nommé, la position spécifique du sommet C n'est pas évoquée;
    - « trace le segment du coin dans le cercle à l'autre coin » ne permet pas de savoir lequel des segments [CA], [CD] ou [CB] il faut tracer.
    - « trace un cercle de 3 cm » : la longueur fournie fait certainement référence de façon implicite au rayon du cercle. Il est probable qu'elle n'entraîne pas une erreur chez le récepteur.
- Définition d'objet erronée :
    - « Trace le segment du coin en bas à gauche jusque… » ne permet pas de tracer le segment [DE], sauf si, par le plus grand des hasards, le dessin tracé par les récepteurs du message est dans la même position sur la feuille que le modèle, et que l'on positionne la feuille de façon identique devant soi pour la regarder…

Hypothèses sur l'origine des erreurs :

- lacunes dans la maîtrise notionnelle des objets géométriques et de leurs caractéristiques ;
- difficulté à mobiliser un vocabulaire géométrique précis ;
- difficulté à exploiter la désignation des objets géométriques (les points ici) ;
- difficulté à se décentrer et à envisager des orientations différentes de celles des figures prototypiques.

Production 2 :

Erreurs

- Objets insuffisamment définis :

Le segment [CA] est qualifié de « trait entre A et C », sans explicitation du fait que ce trait doit être « droit » ; toute ligne (brisée, courbe, etc) d'extrémités A et C pourrait donc convenir… Idem pour le segment [DE].

Remarque :
La longueur du côté du carré est imprécise au mm près, mais au cycle 3, elle demeure tout à fait acceptable.

Hypothèse sur l'origine de l'erreur :

Ici encore, la difficulté à se décentrer, ainsi que la non connaissance du vocabulaire géométrique spécifique peuvent être évoqués.
L'emploi de ce terme « trait » renvoie probablement à une pratique de classe, « tracer un trait sous la date » par exemple. De fait, la distinction langage quotidien/langage mathématique a du mal à se faire.

EXERCICE SUR LES AIRES ISSU DE SUJETS PROPOSÉS À DRAGUIGNAN ET À LYON (D'APRÈS TOULOUSE 99)

1) Toutes les valeurs du couple (x ; y)

L'aire de ABCDEF est égale à l'aire du rectangle ABDE, soit $x \times (2y) = 2xy$. On recherche donc des couples de nombres entiers naturels (x ; y) tels que :

(I) $2xy = 96$
(II) $x > y$
(III) x et y entiers

La condition (I) est équivalente à (I') $xy = 48$.
Les conditions (I') et (III) amènent à rechercher les différentes décompositions de 48 en produits de deux entiers. Or : $48 = 48 \times 1 = 24 \times 2 = 16 \times 3 = 12 \times 4 = 8 \times 6$.
La condition (II) conduit aux **solutions suivantes : (48 ; 1) ; (24 ; 2) ; (16 ; 3) ; (12 ; 4) ; (8 ; 6).**

2) Couple (x ; y) tel que le périmètre du polygone ABCDEF soit 56 cm

On note p le périmètre de ABCDEF : p = AB + BC + CD + DE + EF + FE.
Puisque les quatre triangles ABF, CFB, EDF et CFD sont superposables :
AB = DE = x et AF = FE = BC = CD.
En outre, [AF] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont respectivement x et y.
D'après le théorème de Pythagore : BC = $\sqrt{x^2+y^2}$.
On en déduit l'expression de p en fonction de x et y : $p = 2x + 4\sqrt{x^2+y^2}$.
On recherche parmi les cinq couples précédents celui ou ceux pour lesquels $p = 56$.
Si (x ; y) = (48 ; 1), $p = 96 + 4\sqrt{2305}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (24 ; 2), $p = 48 + 4\sqrt{580}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (16 ; 3), $p = 32 + 4\sqrt{265}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (12 ; 4), $p = 24 + 4\sqrt{160}$ donc $p > 56$.
Si (x ; y) = (8 ; 6), $p = 16 + 4\sqrt{100}$ donc $p = 56$.

Il n'existe donc qu'un seul couple tel que le périmètre soit égal à 56 cm : (8 ; 6).

3) a) Argument en faveur d'un document ne respectant pas les dimensions indiquées sur les figures

En faisant ce choix, l'enseignant veut sans doute éviter que les élèves se servent de leur règle pour mesurer directement sur les figures. Il veut amener les élèves à développer un raisonnement basé sur les valeurs indiquées sur les figures.

3) b) Règle implicite utilisée par Alexia

La somme 3 + 5 + 4 correspond à la mesure du périmètre du triangle. Alexia fait probablement le raisonnement suivant : « *Il y a quatre triangles. Les quatre triangles sont identiques, ils ont donc chacun le même périmètre. Pour trouver le périmètre total, on multiplie le périmètre du triangle A par le nombre de triangles* ».
Alexia utilise implicitement la règle non-pertinente suivante : « *Le périmètre de la réunion de plusieurs surfaces est égal à la somme des périmètres de chacune des surfaces* ».

L'aire est une grandeur mesurable : dans une juxtaposition de plusieurs surfaces, l'aire totale est égale à la somme des aires des différentes surfaces (propriété d'additivité de l'aire). Le périmètre n'est pas une grandeur mesurable car dans la juxtaposition de surfaces, certains côtés sont confondus et ne sont plus comptabilisés dans le calcul du périmètre de figure obtenue par juxtaposition.

3) c) Production de Bastien

Avec sa règle graduée, Bastien mesure les longueurs sur le dessin où le triangle n'est pas réalisé en vraie grandeur. Pour le côté de 4 cm, il mesure 2,2 cm et, pour le côté de 6 cm, il mesure 3,4 cm.
La figure 1 est donc pour l'élève un rectangle de 2,2 cm par 3,4 cm. Il applique alors convenablement les formules de périmètre (*mise en jeu du demi-périmètre*) et d'aire d'un rectangle.
Pour la figure 2, le périmètre est convenablement calculé par la somme des longueurs des côtés de la figure (*définition du périmètre*).
Le raisonnement pour déterminer l'aire de la figure 2 est correct. Il montre une bonne compréhension de la notion d'aire : il imagine le déplacement et la réorganisation spatiale des triangles permettant de reconstituer le rectangle (*principe de conservation des aires*).
Pour réaliser les calculs, il s'est appuyé sur sa connaissance des nombres décimaux. Les calculs sont corrects.
Visiblement cet élève maitrise bien les notions d'aire et de périmètre. Cependant il n'exprime pas les mesures dans l'unité donnée : cm^2.

3) d) Deux interprétations possibles du calcul 6 × 4 = 24

1ère interprétation :

La figure 1 est un rectangle ; 6 × 4 peut être compris comme 6 cm×4 cm c'est-à-dire le produit de sa longueur par sa largeur, donc 24 est la mesure de son aire par l'application de la formule qui donne l'aire du rectangle.

2ème interprétation :

L'aire de la figure 1 est aussi 4 fois l'aire du triangle A (6 cm^2 indiqué dans l'énoncé), les triangles A, B, C et D étant identiques. Et donc l'aire de la figure 1 est égale à 4×6 cm^2.

3) e) La non-réponse en d) de Cyril

La figure 2 est complexe et l'élève ne connait pas de formule pour calculer son aire. Donc pour lui, l'aire s'obtient forcément par l'application d'une formule ou ne peut être calculée que pour un rectangle et un carré.
Ce qui permet de dire que la deuxième interprétation à la question précédente n'est pas la bonne Pour Cyril, car sinon il aurait su également calculer l'aire de la figure 2, comme assemblage de 4 triangles d'aire 6 cm^2. *Pour Cyril, calculer une aire, c'est appliquer une formule*.

EXERCICE SUR LA DIVISION EUCLIDIENNE ISSU D'UN SUJET PROPOSÉ À LA ROCHE SUR YON

Remarque préalable :
L'analyse approfondie des différentes procédures utilisées par les élèves est indispensable pour pouvoir répondre aux questions posées. La rédaction détaillée de cette analyse n'est pas demandée, mais nous l'explicitons ci-dessous pour la formation du candidat.

Élève A	L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit à gauche l'intégralité du répertoire multiplicatif de 38. Il surligne 38, divise 38 par 38. Il écrit 1 comme 1er chiffre du quotient. Il écrit le reste 0 sous 38 sans poser la soustraction. Il abaisse 742, en une fois ou chiffre par chiffre et écrit 0 comme 2ème chiffre du quotient (pas d'indice sur la chronologie effective). Il surligne 74, retranche à 742 le plus grand multiple de 38 (10 fois), pose la soustraction, écrit le reste 362. Au quotient il écrit 1 dans la colonne des dizaines. Au reste 362, il retranche 342 le plus grand multiple de 38 (9 fois). Il pose la soustraction et écrit le reste 20. Il écrit 9 au quotient. Il vérifie ensuite en posant la multiplication du diviseur par le quotient trouvé. Il n'ajoute pas le reste 20.
Élève B	L'élève écrit à gauche quelques lignes de la table de 38 et en particulier 10 fois 38 et 20 fois 38. Il retranche à 38742 le plus grand multiple possible de 38 par une puissance de 10, ici 38 000 et écrit 1000 dans la colonne quotient. Il pose la soustraction et écrit le reste (742). Il recherche parmi les multiples de 38 par une puissance de 10, le lus grand inférieur à 742 (les deux lignes de la table de 38 (38×10 et 38×20) le confirment) et il trouve 380. Il écrit 10 dans la colonne quotient, retranche 380 à 742 et il trouve 462. Il retranche à nouveau 380 en écrivant 10 dans la colonne quotient. Le reste est 82. Il retranche alors le plus grand multiple possible de 38, soit 76 et écrit 2 dans la colonne quotient. Le reste obtenu est 6. Il ajoute tous les nombres écrits dans la colonne quotient et obtient 1022.
Élève C	L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit à gauche les lignes de la table de 38 qui lui permettent de trouver les 2ème et 3ème chiffres du quotient. Il surligne 38, divise 38 par 38 et écrit 1 au quotient. Il abaisse 74 ou 7 puis 4, retranche à 74 le plus grand multiple de 38 (1 fois), sans poser la soustraction, mais en écrivant - 38 à côté de 74. Il écrit le reste 36. Il écrit 1 comme deuxième chiffre du quotient. Il abaisse 2 et retranche à 362 le plus grand multiple de 38 (9 fois), sans poser la soustraction mais en écrivant - 342 à côté de 362, il écrit le reste 20. Il écrit 9 comme troisième chiffre du quotient. Il écrit enfin 0 pour compléter le 4ème chiffre du quotient

1.) a) Division euclidienne de 87 655 par 38 « à votre manière »

On suppose que « votre manière » fait référence à la technique usuelle de la division enseignée en cycle 3 en France :

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 3 & 8 & & \\
\cline{7-10}
- & 7 & 6 & & & & 2 & 3 & 0 & 6 \\
\cline{2-3}
 & 1 & 1 & 6 & & & & & & \\
- & 1 & 1 & 4 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 2 & 5 & 5 & & & & \\
 & & - & 2 & 2 & 8 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 2 & 7 & & & & \\
\end{array}
$$

Remarque :
On peut ne pas poser les soustractions.

1) b) Division euclidienne de 87 655 par 38 à la manière de l'élève B

$38 \times 1 = 38$	$38 \times 100 = 3800$	$38 \times 1000 = 38000$
$38 \times 2 = 76$	$38 \times 200 = 7600$	$38 \times 2000 = 76000$
$38 \times 4 = 142$	$38 \times 300 = 11400$	$38 \times 3000 = 114000$
$38 \times 6 = 228$	$38 \times 400 = 14200$	
$38 \times 7 = 266$		

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 3 & 8 & & \\
\cline{7-10}
- & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-6}
 & 1 & 1 & 6 & 5 & 5 & & 3 & 0 & 0 \\
- & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & & & & 6 \\
\cline{2-6} \cline{8-10}
 & & & 2 & 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 6 \\
 & & - & 2 & 2 & 8 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & 2 & 7 & & & & \\
\end{array}
$$

2) Caractéristiques des deux techniques

Technique « usuelle » :

- On remarque que le nombre de dizaines de milliers (8) du dividende est inférieur au diviseur (38)
- On divise successivement par 38 le nombre de milliers du dividende (87), puis le nombre de centaines du reste obtenu (116), *etc*.
- Le quotient est obtenu chiffre après chiffre : chiffre des milliers, puis des centaines, *etc*.

Remarque :
Cette méthode s'appuie sur le partage successif des unités de numération.

Technique de l'élève B :

- Le dividende est toujours considéré dans sa globalité (nombre d'unités simples). On cherche des quotients intermédiaires successifs qui sont multiples de 1000, puis de 100, etc.
- Le quotient de la division est obtenu comme la somme de ces quotients intermédiaires.

Remarque :
Cette méthode s'appuie sur la recherche de « meilleurs multiples » du diviseur.

3) Erreurs éventuelles des productions d'élèves et hypothèses sur leurs origines

Élève A :

Pas d'erreur.

Élève B :

Résultat incorrect. La seule erreur est une erreur de retenue dans la soustraction posée 742 – 380. Il trouve 462 au lieu de 362.

Élève C :

Résultat incorrect. Le 2ème chiffre du quotient aurait dû être 0. L'élève a abaissé d'abord le 7 du dividende et comme 7 est plus petit que 38, il a alors abaissé le 4 et a poursuivi la division (par similarité avec la recherche du premier chiffre du quotient).
Il obtient le nombre 119 au quotient. Comme il avait auparavant prévu quatre chiffres pour le quotient (présence de quatre points), il complète ce nombre par un 0.

4) a) Procédure des élèves pour déterminer le nombre de points

Le nombre de points correspond au nombre de chiffres du quotient cherché.
Les élèves cherchent et surlignent le plus petit nombre supérieur au diviseur que l'on peut former avec les premiers chiffres du dividende (ici 38).
Ils peuvent alors compter : le groupement (« un ») et chacun des chiffres suivants du dividende (ici : « deux, trois, quatre »), ce qui leur donne le nombre de chiffres du quotient.

Justification mathématique de cette procédure.

Le rang de l'unité du plus petit nombre supérieur au diviseur que l'on peut former avec les premiers chiffres du dividende indique le rang du premier chiffre du quotient.
Ici 38742 = 38 milliers 742 unités, donc le premier chiffre du quotient est un chiffre des milliers qui sera suivi par trois autres chiffres. En effet, en divisant des milliers par un nombre plus petit, on obtient des milliers (au quotient); et il restera éventuellement des centaines, dizaines et unités à diviser, qui donneront à leur tour des centaines, dizaines et unités au quotient.

Remarque :
On peut aussi justifier cette technique par l'encadrement du dividende entre les multiples de 38 par les puissances de 10.
Ici, 38742 est compris entre 38×1000 et 38×10000 (strictement), donc le quotient est compris entre 1000 et 9999, il a donc 4 chiffres.

4) b) Intérêt pédagogique et limite à l'utilisation des points

L'intérêt de la recherche du nombre de chiffres du quotient est double :

- donner un ordre de grandeur du quotient (par exemple si on a quatre points on sait que le quotient est un nombre compris entre 1000 et 9999) ;
- permettre un certain contrôle du résultat : si l'élève trouve un nombre à trois chiffres alors qu'il avait écrit quatre points, cela peut l'amener à remettre en cause son résultat et reprendre l'algorithme.

La production de l'élève C témoigne d'une limite à l'utilisation de ces points : ils peuvent ne pas être suffisants pour une invalidation de la réponse obtenue par l'élève. En effet, l'élève C, après avoir trouvé un nombre à trois chiffres, place un 0 sur le dernier point pour obtenir le nombre de chiffres cherché.

EXERCICE SUR LA PROPORTIONNALITÉ D'APRÈS UN SUJET DE DIJON

Élève 1 :

L'élève a commencé par doubler les quantités d'ingrédients données et ainsi déterminer les quantités pour 8 coupes (recours implicite au coefficient de linéarité, k = 2).

L'élève doit se rendre compte qu'il ne répond pas à la question puisqu'il change alors de procédure, il explique d'ailleurs uniquement ce deuxième raisonnement. Dans la "logique" des doubles et des moitiés, l'élève pense sans doute qu'en connaissant les quantités pour 5 coupes, il peut les doubler pour connaitre les quantités pour 10 coupes.

À partir des quantités connues pour quatre coupes, il semble alors s'appuyer sur un modèle additif incorrect (est-ce que pour cet élève « augmenter c'est ajouter » ?). Il ajoute donc 1 œuf , 50 gr de chocolat et 5 gr de sucre sans expliquer ses choix. Si on peut comprendre la raison (fausse) qui le conduit à prendre un œuf de plus (on passe de 4 à 5 coupes, on ajoute donc 1 œuf), plus difficile à comprendre est le choix fait pour les deux autres ingrédients.

Pour finir, il double toutes les quantités établies pour 5 coupes afin de déterminer celles pour 10 coupes.

Cet élève ne commet aucune erreur de calcul. Sa procédure est partiellement correcte ; il semble faire appel à ses connaissances sur les doubles et les moitiés de nombres entiers naturels (calcul automatisé et réfléchi).

Élève 2 :

La procédure est bien décrite par l'élève dans la partie consacrée aux explications du raisonnement : il décompose 10 comme la somme de la moitié de 4 et du double de 4. Il calcule donc successivement les quantités d'ingrédients pour 2 coupes puis pour 8 coupes et les additionne. Le tableau présent dans la colonne de droite lui sert à synthétiser ses réponses mais pas à faire ses calculs (vraisemblablement, il les traite mentalement et se contente de reporter les résultats dans le tableau, sans doute au fur et à mesure).

Sa procédure mobilise implicitement les deux propriétés de la linéarité pour transférer aux autres grandeurs en jeu (« œufs », « chocolat » et « sucre ») les relations arithmétiques existant entre les valeurs prises par la grandeur « nombre de coupes » :

- multiplicative (diviser par 2 et multiplier par 2, il se sert sans doute de ses connaissances sur les moitiés et les doubles de nombres entiers naturels),
- puis additive (ajouter 2 et 8).

Élève 3 :

L'élève donne une explication sans doute sommaire mais suffisante pour analyser sa procédure. Il applique successivement deux fois la propriété multiplicative de la linéarité (diviser par 2 puis multiplier par 5 sur la grandeur « nombre de coupes » qu'il répète sur les trois autres grandeurs en jeu (œufs, chocolat et sucre).

Si la procédure est correcte, ses calculs sont partiellement corrects.
En effet, pour le calcul de la quantité de sucre (15×5), il a procédé par un calcul en ligne (5 fois 1 puis 5 fois 5) sans prendre en compte la retenue due à la valeur positionnelle des chiffres 1 et 5. Cette procédure erronée lui a sans doute servie aussi pour calculer 50×5 mais, dans ce cas, elle ne conduit pas à un résultat faux car il n'y a pas de retenue.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Numération au CE2 d'après un sujet de Poitiers

1) La réponse attendue

La réponse attendue est : 86 carnets. En effet comme $856 = 85 \times 10 + 6$ (ou $856 : 10 = 85{,}6$), il faut commander un carnet supplémentaire pour les 6 timbres restants (ou pour avoir un nombre entier de carnets).

2) Description et analyse de la procédure de l'élève

Procédure et connaissances :

L'élève a voulu représenter la situation, en schématisant les carnets de 10 timbres par 90 traits verticaux.
Il réalise des groupes de cent timbres en entourant 10 traits (10 carnets), sans doute pour s'assurer qu'il atteint bien les 856 timbres nécessaires. Il s'appuie sur un comptage de dix en dix pour la première centaine puis semble utiliser le fait que 10 carnets font 100 timbres. Il utilise un comptage de cent en cent pour dépasser le nombre de timbres (un paquet de cent supplémentaire).

Erreurs :

Après avoir correctement représenté la situation, l'élève semble avoir perdu la signification des symboles utilisés et confond les différentes unités : les timbres, les dizaines de timbres symbolisées par les traits, les centaines de timbres symbolisées par les paquets.
Il ne sait plus ce qui représente les carnets (les traits). Il semble qu'il cherche combien de paquets de 100 timbres il faut commander, ce qui l'amène à aller jusqu'à 900 (9 groupes de 100). Puis ce total de 900 est pris pour le nombre de carnets, et il indique le nombre de timbres (900) et non le nombre de carnets dans sa conclusion.

3) Une procédure plus rapide utilisable à ce niveau de la scolarité

Une procédure plus rapide utilisable à ce niveau de la scolarité et ne mettant en jeu que des connaissances liées à la numération (ne faisant pas intervenir le calcul) pourrait être :

Identifier le nombre de dizaines de 856 : il y a 85 dizaines.

Cela peut s'obtenir par lecture directe sur l'écriture chiffrée en isolant les chiffres des centaines et dizaines, ce qui se justifie par le fait que 856 = 8c 5d 6u et que 8c = 80d donc 856 = 85d 6u.

Ensuite il reste à ajouter 1 au nombre de dizaines pour tenir compte du carnet supplémentaire.

Cette procédure s'appuie sur les deux principes de notre système de numération :

- Principe de position : les unités simples s'écrivent au premier rang (à partir de la droite) de l'écriture chiffrée, les dizaines au deuxième rang, les centaines au troisième rang, etc.
- Principe décimal (ou relations entre unités) : 10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Introduction de l'aire au CM1 d'après un sujet de Lorraine

PARTIE A : analyse à partir d'extraits de Capmaths CM1

1) a) Les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A

Remarque :
Les procédures ne sont pas demandées, mais nous les présentons pour la formation du candidat.
On voit facilement que par superposition chacune des surfaces 2 et 6 peut recouvrir directement la surface A (et qu'il y a du papier en trop), alors que la surface 3 ne le peut pas.
Par découpage-recollement (mental ou effectif), chacune des surfaces 1 et 5 peut recouvrir la surface A.
En revanche, la surface 4 ne peut pas recouvrir la surface A (son aire est inférieure à celle de A) : on peut le vérifier par découpage-recollement effectif ou en utilisant les dimensions, avec ou sans calcul de l'aire.
Les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A sont les surfaces 1 ; 2 ; 5 ; 6.

1) b) Les deux procédures d'élèves attendues pour identifier les surfaces qui permettent de recouvrir la surface A

Procédure par superposition directe

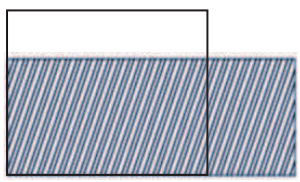
Cette procédure permet de constater que les surfaces 2 et 6 recouvrent la surface A et que la surface 3 est trop petite

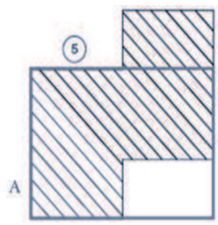
Procédure par découpage et recollement des morceaux

Cette procédure permet de constater que les surfaces 1 et 5 recouvrent la surface A et que la surface 4 est trop petite.

1) c) Causes d'erreurs possibles

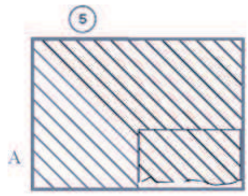
Les élèves peuvent ne pas penser aller au-delà d'une superposition : lorsqu'après superposition une surface ne peut être incluse dans l'autre, les élèves peuvent conclure de façon erronée en se focalisant sur l'aspect perceptif. Ils pourront dire par exemple que la surface 1 ou 5 ne permettent pas de recouvrir la surface A car « il reste du blanc ».





Les élèves peuvent avoir du mal à identifier les découpages adéquats nécessaires à un recouvrement total de la surface A. Par exemple la surface 1 doit être découpée deux fois. La réalisation d'un seul découpage peut conduire à une réponse erronée.

Les élèves peuvent être imprécis dans le découpage ou dans le recollement : une perte de papier lors du découpage et/ou une superposition lors du recollement peuvent laisser des espaces vides et amener à une conclusion erronée. Par exemple, l'élève peut ne pas réussir du premier coup son découpage et le rectifier en perdant une petite bande de papier. Il pourra dire alors que la surface 5 ne permet pas de recouvrir la surface A après découpage et recollement car « il reste du blanc ».



2) Représentations erronées de la notion d'aire

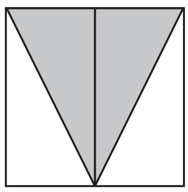
L'élève peut penser que les surfaces 1 et 5 n'ont pas la même aire :

- car elles n'ont pas la même forme : l'élève ne dissocie pas l'aire et la forme (« *deux surfaces de formes différentes ont nécessairement des aires différentes* »);
- car l'une est plus « étendue » que l'autre : il confond l'aire avec l'une des dimensions (la surface 5 est « plus haute », la surface 1 est « plus large ».

PARTIE B : analyse à partir d'un extrait de La tribu des maths CM1

1) Mesure des aires des différentes surfaces

La surface a est formée d'un carré d'aire 1 u et d'un demi-carré d'aire 0,5 u ; donc aire(a) = 1,5 u.
La surface b est formée d'un carré d'aire 1 u ; donc aire (b) = 1 u.
La surface c est un demi-rectangle d'aire 3 u ; donc aire(c) = 3/2 u = 1,5 u.
La surface d est formée de deux triangles superposables ; chacun a pour aire : (1 – 2/4) u = 1/2 u (voir figure ci-dessous)



Il est possible également de calculer l'aire d'un des triangles en utilisant la formule : $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.
Donc : aire(d) = 2 × 1/2 u = 1 u.
La surface e est un demi-carré d'aire 4 u ; donc aire(e) = 4/2 u = 2 u.

2) Ambiguïté de la consigne

Le critère de comparaison des surfaces n'est pas donné dans la consigne. Le rangement peut être alors fait selon l'aire des surfaces, ou leur périmètre, ou la dimension d'un côté, ...

Remarque :
Le terme « classer » est utilisé dans son sens courant puisqu'il est attendu que soient ordonnées les surfaces. En mathématiques, « classer » signifie « regrouper des objets ayant une même propriété » (par exemple : classer des objets selon leur couleur). Il ne réfère pas à une relation d'ordre. Le terme approprié dans cette consigne serait « ranger ».

3) Procédure attendue par les auteurs du manuel

La procédure attendue par les auteurs est l'utilisation de la mesure. En effet, d'une part, l'activité préparatoire a introduit la mesure des aires ; d'autre part, dans cette activité, les auteurs présentent l'unité d'aire choisie par Enzo.
Pour la détermination des mesures des aires, les élèves doivent recourir aux procédures décrites dans la question 1a :

- décomposition de la surface a en sous-figures (un carreau et un demi carreau) ;
- inclusion de la surface c dans une sur-figure (un rectangle formé de 3 carreaux).

Ils pourront alors conclure que les deux surfaces ont la même aire de mesure 1,5 u.

PARTIE C : comparaison des deux situations

1) Analyse comparée des deux activités d'introduction

Les activités étudiées dans ces deux manuels mettent en jeu le rangement des surfaces selon leur aire. La compétence concernée est donc la **comparaison des aires**.

Les types de procédures attendues diffèrent selon les manuels :

- dans l'Annexe 1 : découpage/recollement et superposition par manipulation effective (voir question A-1.b) ;
- dans l'Annexe 3 : décomposition en sous-figures et inclusions dans des sur-figures (mentalement), puis comptage de carreaux et calculs (voir question B-3).

Les propriétés de l'aire sous-jacentes à ces deux types de procédures :

- Annexe 1 : principe de conservation des aires.
  La figure obtenue après découpage/recollement (sans perte ni superposition) a la même aire que celle de départ.
- Annexe 3 : principe d'additivité des aires.
  L'aire d'une figure est égale à la somme des aires des sous-figures qui la composent.

2) Analyse comparée des deux activités d'introduction

Pour introduire la notion d'aire en CM1, l'entrée la plus adaptée est celle proposée par l'Annexe 1. En effet :

- La situation proposée dans l'Annexe 1 introduit la notion d'aire dans le domaine des grandeurs par des manipulations, indépendamment de la mesure. Cela permet de construire chez les élèves le sens de la grandeur *aire*.
- Dans l'Annexe 3, l'aire d'une surface est directement assimilée à sa mesure, ce qui peut conduire les élèves à penser que l'aire est un nombre, ce qui est inexact.

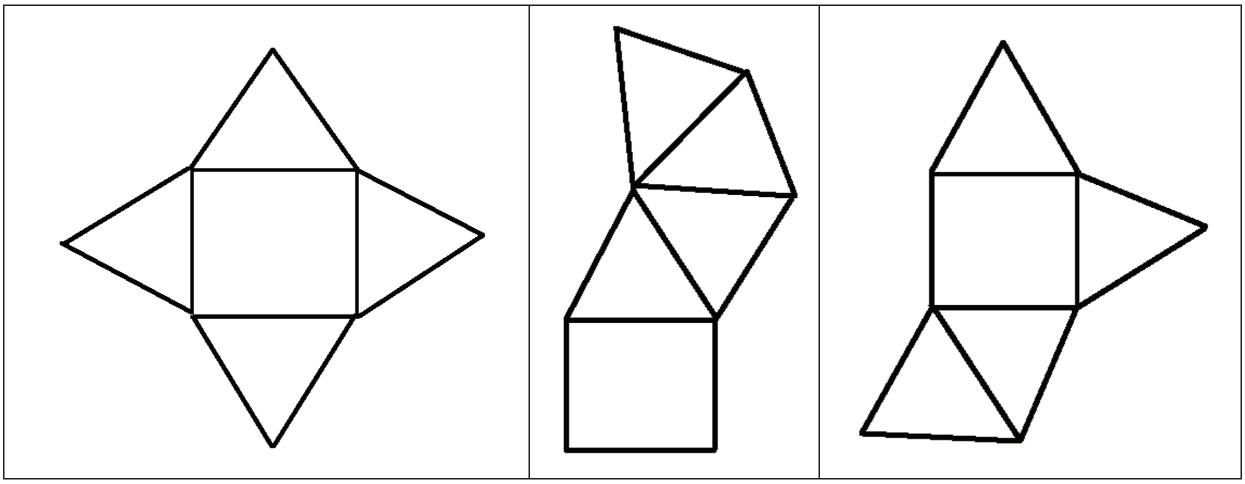
Remarque :
Ce choix est confirmé par les « Recommandations pour la mise en œuvre des programmes de l'école élémentaire » (BO 15 mai 2014) :
Grandeurs et mesures
Ce domaine d'apprentissage étant très souvent à l'origine de difficultés chez certains élèves, on peut prendre appui sur toutes les phases de manipulation (dont les comparaisons directes et indirectes) qui permettent de faire comprendre la notion de grandeur avant de faire appel à la mesure.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Solides au cycle 3 d'après un sujet de Paris

1) Compétences attendues

Le problème posé est un problème de reproduction de polyèdre. Les élèves doivent ici décrire la pyramide qui leur est donnée (nature des faces, nombre de faces). Ils sont donc amenés à utiliser en situation le mot face. (« Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet »)
Le fait d'étudier un polyèdre qui n'est pas mentionné dans les programmes du cycle 3 (ici une pyramide à base carrée) permet également de mettre en évidence des différences par rapport aux solides du programme (cube et pavé droit pour le CE2), et contribue donc, par contraste, à faire ressortir les propriétés de ces derniers (« Reconnaître, décrire nommer un cube, un pavé droit »)

2) a)Trois patrons différents possibles



2) b) Objectif de l'activité 2

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de patron d'un polyèdre. En effet elle permet de faire vivre le passage d'un polyèdre (3D) à l'un de ses patrons (2D) en mettant en évidence quelques propriétés : surface en un seul morceau dans laquelle on retrouve une et une seule fois chacune des faces du polyèdre. De plus, dès cette activité, les élèves peuvent constater que plusieurs patrons peuvent être obtenus à partir d'un même solide.

Remarque :
Dans l'activité 1, les élèves ont construit une pyramide en assemblant des faces séparées ; l'activité 2 permet de représenter la pyramide sous forme de patron, notion qui sera réinvestie dans l'activité 3 pour, à partir du patron, reconstruire le solide.

3) Construction d'un patron de la maquette

3) a) Dimensions de la maquette

L'échelle 1 : 700 signifie que pour passer des dimensions réelles à celles de la maquette, on les divise toutes par 700.

La hauteur sur la maquette sera **3 cm** (21 cm : 7 = 3 cm)
Les côtés de la base carrée auront pour longueur **5 cm** (35 cm : 7 = 5 cm.)

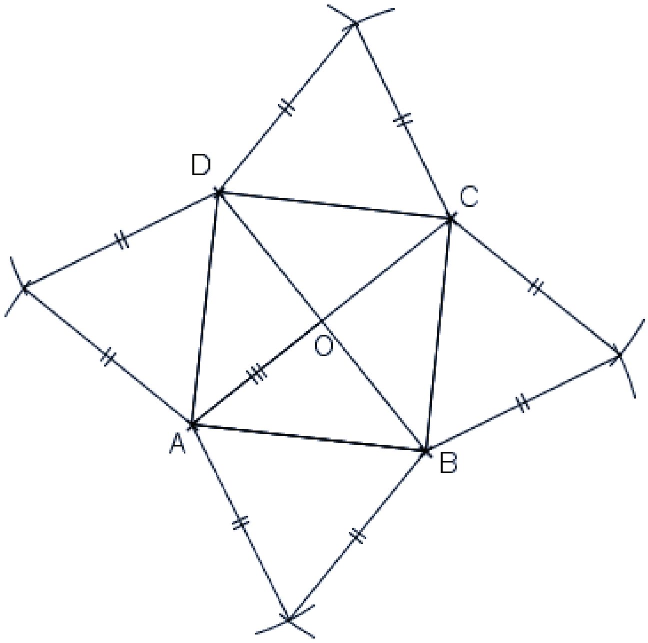
3) b) Construction

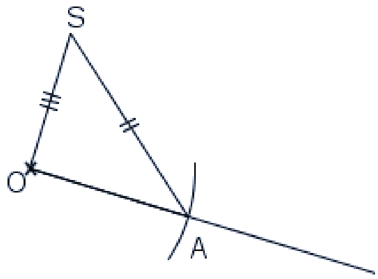
On trace le carré ABCD de côté 5 cm. On trace ses diagonales. Elles se coupent en O.

Le triangle SOA est rectangle en O ; pour le construire, on trace le segment [SO] tel que SO = 3 cm ; on trace la droite perpendiculaire à (SO) en O, et sur cette droite, on reporte à l'aide du compas, à partir de O, la longueur OA prélevée sur la construction précédente (demi-diagonale du carré).

Pour les triangles de la pyramide, ils sont isocèles en S : un côté mesure 5cm (c'est la longueur du côté du carré et les deux autres ont la même longueur que [SA], que l'on reporte grâce à la construction annexe).

Remarque :
Les figures ci-dessous ne respectent pas les dimensions réelles de la maquette.





ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Technique opératoire de la division d'après un sujet de Dijon

PARTIE A : comparaison des deux manuels

1) a) Nombre de chiffres du quotient de 123 456 789 par 654 321 en détaillant la méthode

D'après Euro Maths p. 54, il s'agit dans un premier temps d'encadrer le dividende par deux produits du diviseur par une puissance de 10 d'exposants consécutifs, c'est-à-dire ici de trouver n tel que :

$$654\,321 \times 10^{n} < 123\,456\,789 < 654\,321 \times 10^{n+1}$$

On a les inégalités suivantes :

$$65\,432\,100 < 123\,456\,789 < 654\,321\,000$$
$$654\,321 \times 100 < 123\,456\,789 < 654\,321 \times 1000$$

On en conclut que le quotient Q de la division euclidienne de 123 456 789 par 654 321 vérifie :
$100 < Q < 1000$; **l'écriture du quotient comporte donc 3 chiffres**.

1) b) Justification de l'affirmation d'Alice : « Alors il y aura seulement deux soustractions à effectuer ! »

Dans la division proposée en exemple dans le manuel, le quotient a 2 chiffres : c'est un nombre composé d'un chiffre des dizaines et d'un chiffre des unités. Deux soustractions seront donc nécessaires au maximum : une soustraction pour les dizaines et une autre pour les unités.

1) c) Lien entre le nombre de chiffres du quotient et le nombre de soustractions qu'il faudra effectuer dans la division posée

Le nombre de chiffres du quotient n'indique pas à coup sûr le nombre de soustractions qu'il faudra effectuer. En effet, si le quotient comporte le chiffre « 0 » à un certain rang, il n'y aura pas de soustraction dans ce rang-là.

Par exemple : 7395 divisé par 24.
$7395 = (24 \times 308) + 3$.
Dans cette division le quotient comporte trois chiffres, mais il suffit de deux soustractions pour le déterminer.

$$\begin{array}{r|l}
7395 & 24 \\ \cline{2-2}
-\,7200 & 300 \\ \cline{1-1}
195 & \\
-\,192 & \quad 8 \\ \cline{1-2}
3 & 308
\end{array}$$

2) Comparaison des parties « découverte » des deux manuels

Dans les deux manuels, la première étape consiste à rechercher le nombre de chiffres du quotient.
Comme $29 \times 100 < 7874 < 29 \times 1000$, on déduit que le quotient de cette division s'écrira avec 3 chiffres. La dernière étape, qui correspond à la vérification de l'égalité traduisant la division euclidienne, est également identique dans les deux manuels : $7874 = (29 \times 271) + 15$

Les étapes intermédiaires diffèrent suivant les manuels :

Dans Euros Maths :

29 × 1 = 29
29 × 2 = 58
29 × 3 = 87
29 × 4 = 116
29 × 5 = 145
29 × 6 = 175
29 × 7 = 203
29 × 8 = 232
29 × 9 = 261

```
  7874   | 29
         |------
 – 5800  | •••
 ------  | 2 0 0
  2074   |   7 0
 – 2030  |     1
 ------  |
    44   | 2 7 1
  – 29   |
  ----   |
    15   |
```

- Construction du répertoire des multiples du diviseur, ici 29.
- Recherche des centaines en s'appuyant sur le répertoire et calcul de la différence entre le dividende et le multiple choisi :
  29 × 200 = 5800
  7874 – 5800 = 2074
- Reprise de ces étapes pour trouver les dizaines, puis les unités du quotient :
  29 × 70 = 2030
  2074 – 2030 = 44

puis 29 × 1 = 29
44 – 29 = 15

- Somme des trois nombres obtenus au quotient : 200 + 70 + 1 = 271

Dans « Maths collection Thevenet » :

Aucun répertoire n'est construit : chacun des chiffres du quotient semble être trouvé par calcul mental. Le dividende est décomposé en centaines, dizaines et unités ; on s'intéresse successivement à chacun des rangs en commençant par le plus grand, pour obtenir chacun des chiffres du quotient (cdu).

```
   cdu
   7874  | 29
 – 58    |------
 -----   | cdu
   207   | 2 7 1
 – 203   |
 -----   |
     44  |
   – 29  |
   ----  |
     15  |
```

• Comme le quotient comporte 3 chiffres, on considère d'abord les centaines : il faut diviser 78 centaines par 29 :
En utilisant l'ordre de grandeur, on trouve que 29 × 2 est le multiple de 29 le plus proche et inférieur à 78
78 – (29 × 2) = 20

• Il reste 20 centaines, soit 200 dizaines. On ajoute les 7 dizaines de 7874 ; on obtient 207 dizaines que l'on divise par 29 :
En utilisant l'ordre de grandeur, on trouve que 29 × 7 est le multiple de 29 le plus proche et inférieur à 207
207 – (29 × 7) = 4

• Il reste 4 dizaines, soit 40 unités. On ajoute les 4 unités de 7874 ; on obtient 44 unités que l'on divise par 29 :
44 – (29 × 1) = 15

3) Analyse des difficultés sur deux des exercices proposés

3) a) Difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 6 d'« Euro Maths »

Cet exercice comporte des difficultés de différentes natures :

- Relativement au vocabulaire utilisé dans l'énoncé : certains termes comme « consommation » peuvent ne pas être connus des élèves, ou d'autres comme « environ » (dans les données) « approximativement » (dans la question) peuvent gêner les élèves. Il faut interpréter qu'on ne connaît pas la consommation exacte de l'avion. Le résultat de 1800 L est donc une approximation et on ne va faire le calcul qu'au litre près, sans considérer les dL ou les cL.

- Relativement à la résolution de problème, la présence de données chiffrées inutiles : « A380 » et « 900 km/h », peut être source d'erreurs.
- Relativement au contexte de l'énoncé, aux différentes grandeurs présentes, cela peut rendre difficile une représentation adaptée du problème.
- Relativement au choix de l'opération, l'élève peut ne pas reconnaitre un problème de division.
- Relativement aux nombres en présence, même si le diviseur 7 ne comporte qu'un chiffre, la présence de deux zéros dans le dividende peut conduire l'élève à oublier un « 0 » en effectuant la division.
- Relativement à l'interprétation des résultats obtenus (1800 = (7 × 257) + 1), comme le reste est 1, l'élève peut chercher à introduire ce reste dans sa réponse (soit en prolongeant la division avec un quotient décimal, soit en écrivant 257,1 L en reportant le reste après la virgule, considérant alors les chiffres écrits après la virgule comme des sous-multiples du litre…).

3) b) Difficultés ou erreurs potentielles des élèves pour l'exercice 8 de « Maths collection Thévenet »

- Relativement au vocabulaire utilisé dans l'énoncé : « bonbonne », « prix de revient »
- Relativement au contexte de l'énoncé, aux différentes grandeurs présentes et unités différentes pour une même grandeur, cela peut provoquer un oubli ou une erreur de conversion.
- Relativement au choix des opérations et à la succession des questions, l'élève peut ne pas reconnaitre un problème de division ou faire des erreurs dans le choix des nombres (utilisation possible du 1er résultat pour répondre à la 3ème question)
- Relativement aux nombres en présence et à l'interprétation des résultats obtenus : dans les deux premières divisions (2400 : 75 = 32 et 144 : 24 = 6), le reste est « 0 », tandis que la dernière division donne un quotient décimal correspondant à un prix (144 : 32 = 4,5, qui est à interpréter en 4,50 €). Remarquons que la réponse à la dernière question peut être obtenue par le produit du prix au litre par la capacité de la bouteille (6 €/L × 0,75 L = 4,50 €)

PARTIE B : « Maths Thévenet », pages 62 et 63

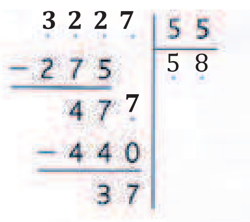
1) Analyse de l'exercice 3

1) a) Première division à trous de l'exercice 3

Dans cet exercice, il faut retrouver le dividende et le quotient.

La présence des soustractions permet de retrouver les multiples du diviseur utilisés pour compléter le quotient. La connaissance du diviseur, du quotient et du reste permet de reconstituer le dividende.

- 275 = 5 × 55 : le premier chiffre du quotient est donc 5.
- 440 = 8 × 55 : le deuxième chiffre du quotient est donc 8.
- Le quotient trouvé est 58 ;
- 55 × 58 + 37 = 3227, le dividende est **3227** ;
- Reste à reporter « 7 », chiffre des unités du dividende à droite du reste « 47 », pour compléter la division.



1) b) Compétences visées en matière de division dans l'exercice 3

L'exercice 3 est un exercice de calcul complexe ; les compétences visées sont la bonne compréhension de ce que représentent les calculs intermédiaires dans la division posée et l'égalité traduisant la division euclidienne. L'ordre de grandeur et l'utilisation à bon escient du calcul réfléchi sont aussi mobilisés dans cet exercice.

2) Analyse de l'exercice 10

2) a) Résolution du problème utilisant une mise en équation

Soit x le nombre de fléchettes lancées dans chaque partie de la cible. On a :
$10x + 5x + 2x = 187$
donc $17x = 187$ et $x = \frac{187}{17} = 11$.
Pierre a donc lancé 11 fléchettes dans le 10, 11 fléchettes dans le 5 et 11 fléchettes dans le 2.

Au total, il a lancé 33 fléchettes.

2) b) Résolution du problème comme pourrait le faire un élève de CM2

Un élève peut tenir compte de la contrainte « le nombre de fléchettes dans chacune des zones est le même » et tester différents nombres. Une fléchette dans la zone 10, une fléchette dans la zone 5 et une fléchette dans la zone 2 donnent un score de 17. Deux fléchettes donnent un score de 34… , 10 fléchettes donnent un score de 170 et donc 11 fléchettes donnent un score de 187. Pierre a lancé 11 + 11 + 11 = 33 fléchettes.

Remarque :
Un élève pourrait tenir compte de la contrainte « le score est 187 » et chercher à décomposer 187 en utilisant des sommes de produits par 10, 5 et 2 d'un même nombre. $187 = 18 \times 10 + 1 \times 5 + 1 \times 2$ *puis diminuer le premier nombre en répartissant différemment le score* : $187 = 15 \times 10 + 5 \times 5 + 6 \times 2$, *et enfin* $187 = 11 \times 10 + 11 \times 5 + 11 \times 2$. *Cette procédure est correcte mais beaucoup plus coûteuse. De plus, elle nécessite un plus grand contrôle des calculs effectués et de leur interprétation.*

2) c) Compétences visées en matière de division dans l'exercice 10

L'exercice 10 est un exercice complexe : un véritable problème de recherche pour lequel les élèves ne possèdent pas de procédure déjà étudiée.
Ce n'est pas vraiment un exercice d'application directe de la leçon : il y a deux contraintes à gérer, l'élève peut ne pas mobiliser la division car le diviseur est « à inventer ».
Plusieurs compétences sont visées : savoir organiser sa recherche, faire preuve d'initiative, gérer simultanément deux contraintes, argumenter, contrôler son résultat…

3) Un exercice qui relève de la division-partition et un exercice qui relève de la division-quotition

L'exercice 4 relève de la division-quotition car on connait la somme totale et le prix d'un disque, et on cherche le nombre de disques achetés (l'exercice 6 également).

L'exercice 5 relève de la division-partition car on connait le prix total et on cherche combien on paie chaque mois (l'exercice 7 également).

PARTIE C : « Euro maths » CM2, pages 54 et 55

***1*) Tableau complété.**

Dans cet exercice, puisqu'il s'agit de la division euclidienne, tous les nombres à trouver se situent dans l'ensemble des entiers naturels.

	Dividende	Diviseur	Quotient euclidien	Reste euclidien
Cas M	**5**	**8**	**0**	**5**
Cas A	**21 ; 22 ; 23**	**3**	**7**	**0 ; 1 : 2**
Cas T	**49**	**12 ; 11 ; 10**	**4**	**1 ; 5 ; 9**
Cas H	**Impossible**	**4**	**Impossible**	**4**
Cas S	**37**	**35 ; 5 ; 7**	**1 ; 7 ; 5**	**2**

Cas M :

Il s'agit de trouver q et r tels que $5 = (8 \times q) + r$ avec $r < 8$. Lorsque le diviseur est supérieur au dividende, le quotient de la division euclidienne est 0 et le reste est égal au dividende.

Cas A :

Il s'agit de trouver D et r tels que D = (3 × 7) + r avec r < 3. La condition sur r donne trois solutions possibles r = 0 et D = 21 ; r = 1 et D = 22 ; r = 2 et D = 23.

Cas T :

Il s'agit de trouver d et r tels que 49 = (4 × d) + r avec $r < d$. La plus grande valeur possible pour d est 12 (car 4 × 13 > 49) avec r = 1 qui satisfait à la condition 1 < 12. Nous avons aussi comme possibilités d = 11 avec r = 5 et d = 10 avec r = 9 qui satisfont à la condition $r < d$.
Il n'y a pas d'autre solution car si d = 9, on a r = 13 qui ne satisfait pas à la condition $r < d$.

Cas H :

Le diviseur et le reste proposés sont égaux, ce qui n'est pas le cas dans une division euclidienne.

Cas S :

Il s'agit de trouver d et q tels que 37 = (d × q) + 2 avec 2 < d. On a alors 37 – 2 = (d × q) soit 35 = (d × q). Or 35 = 7 × 5, donc 35 possède quatre diviseurs qui sont 1, 5, 7 et 35.
Les solutions possibles sont donc d = 5 avec q = 7 ; d = 7 avec q = 5 et d = 35 avec q = 1.

Remarque :
Certes, 1 est un diviseur de 35, mais il ne peut pas jouer le rôle de diviseur dans une division dont le reste est 2.

2) Différences entre cet exercice et l'exercice 4 du manuel

Dans l'exercice 4 du manuel, pour chaque ligne, trois des colonnes du tableau sont remplies et le reste est toujours donné. Ainsi, le nombre à trouver est toujours unique. Dans l'exercice ci-dessus, c'est essentiellement la contrainte sur le reste de la division euclidienne qui est à prendre en compte. Il y a aussi des cas impossibles à traiter.
Dans l'exercice 4, il s'agit essentiellement de mobiliser les liens entre les différents nombres intervenant dans la division euclidienne :

- Pour la première ligne, la donnée du reste est inutile si on pose la division 516 : 19 ; on s'aperçoit que le reste donné dans l'énoncé ne peut pas être 6 mais 3 (erreur dans l'énoncé ou réponse impossible ?). Si le reste était correct, l'élève peut aussi soustraire le reste au dividende et chercher le nombre qui complète 516 – 3 = 19 × ? pour trouver le quotient 27.
- Pour la deuxième ligne, le reste est 0 donc pour trouver le diviseur, il faut chercher le nombre qui complète 624 = ? × 13
- Pour la troisième ligne, retrouver le dividende amène à utiliser l'égalité traduisant la division euclidienne ? = 8 × 264 + 5

Les nombres donnés dans l'exercice 4 sont plus grands (nombres à 3 chiffres) que ceux donnés dans l'exercice de 6ème ce qui justifie probablement l'utilisation de la calculatrice par les élèves de CM2. De plus, il n'y a pas de quotient égal à « 0 » dans l'exercice 4.

PARTIE D : analyse de travaux d'élèves

	Procédure	**Erreur(s)**
Élève A	L'élève A commence par enlever le score correspondant successivement à une fléchette dans chaque zone. 186 – 10 = 176 ; 176 – 5 = 171 ; 171 – 2 = 170 en trois soustractions séparées, posées en colonne. Cette démarche très longue aurait pu aboutir. Mais comme il se rend compte que c'est très long, il enlève directement 17 dans l'opération qui est barrée et trouve fort justement 153. Il semble qu'il essaie ensuite de tracer un tableau pour aller plus vite. Il met 6 fléchettes dans chaque zone et confond ensuite le nombre de fléchettes et la valeur du score car 6 × 3 = 18 fléchettes, mais 10 + 5 + 2 = 17 points. Il pose l'opération à gauche pour calculer 10 + 5 + 2 et trouve 18 en ajoutant 1 en dessous. Il écrit le résultat de 18 fléchettes à gauche et le barre. Il tente ensuite une décomposition (qui est barrée) de 187 en : $\boxed{100}$ + $\boxed{80}$ + $\boxed{\text{IIIIII}}$ Puis il conclut (à gauche) : 10 fléchettes lancées, 50 fléchettes dans le 2 et 4 fléchettes, sans que l'on sache d'où vient ce résultat. *Remarque :* *N'ayant aucune indication sur l'ordre dans lequel les différents écrits de cet élève ont été produits, ce ne sont que des hypothèses qui sont formulées.*	Erreurs : - Confusion entre nombre de fléchettes lancées $\boxed{18}$ et nombre de points 17 pour 3 fléchettes - erreur dans l'addition de gauche avec ajout d'un « 1 » - conclusion sans lien avec les calculs écrits.
Élève B	L'élève B fait un schéma de la cible en mettant une fléchette (ici un point) dans chaque zone, puis, il constate que cela donne 17 points pour 3 fléchettes. Il tente alors une démarche par tâtonnement organisé : 17 × 5 = 80 : ce n'est pas assez 17 × 6 = 97 : ce n'est pas assez 17 × 7 = 119 : ce n'est pas assez 17 × 10 = 170 : ce n'est pas assez 17 × 11 = 187 : cela correspond au score demandé. Il conclut que Pierre a lancé 11 fléchettes, ce qui est exact pour chaque zone, puis réalise son erreur et écrit au-dessus 33 qui correspond au nombre total de fléchettes dans les trois zones.	Pas d'erreur
Élève C	L'élève C a souligné dans l'énoncé la contrainte « même nombre de fléchettes ». Il écrit une décomposition de 187 en 100 + 87. Il essaie ensuite de trouver 100 avec 5 fléchettes dans chaque zone (il y a 5 « 10 », puis 6 « 5 », puis 5 « 2 » sous la forme 2 × 5 = 10. Comme cela ne convient pas, il barre et essaie avec 6 fléchettes dans chaque zone et obtient un score de 102. Il tente alors de compléter 102 avec 85 car 102 + 85 = 187. Il trouve 5 fléchettes dans chaque zone et obtient un score de 85, peut-être en s'appuyant sur l'ordre de grandeur du calcul précédent (6 fléchettes). Comme il sait que 6 + 5 = 11. il déduit et vérifie qu'il faut 11 fléchettes dans chaque zone. Il écrit « 11 fléchettes de 10, 5, 2 », qu'il barre pour conclure correctement qu'il faut 33 fléchettes au total.	Pas d'erreur

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
Construction du nombre d'après un sujet de La Roche sur Yon

1) Objectifs généraux et niveau

Il s'agit d'amener l'enfant à fréquenter les nombres de 1 à 10 en travaillant sur toutes les décompositions de 10 en somme de deux termes et à mémoriser certains compléments à 10.
Cette situation peut relever du niveau Grande section de maternelle ou début de CP.
En GS, l'objectif ne peut être d'enseigner les compléments à dix, mais cette activité donne l'occasion de les fréquenter et d'en mémoriser certains. Le BO précise :"les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le CP qui installera le symbolisme et les techniques".
La compétence "Produire et reconnaitre des décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("tables d'addition")" figure dans les repère de progressivité du programme de CP.

2) Compétence préalable

Une compétence essentielle est que les élèves sachent dénombrer une quantité jusqu'à dix (par reconnaissance globale, par comptage...).

3) Rôle du maître

Le maître indique qu'il s'agit de bien repérer où sont les bébés, soit dans le dortoir, soit dans la salle de jeux. Il modifie la situation matérielle en choisissant le nombre de bébés à enlever à chaque fois. Il laisse les élèves formuler et justifier des réponses. Il valide par retour au matériel. Il conclut en revenant sur les 3 nombres en jeu qu'il met en relation (la somme des deux donne le troisième, 10). Il recommence plusieurs fois cette phase.

4) a) Nouvel obstacle

Dans la phase 2, la présence des lits permettait aux élèves de connaître le nombre d'élèves absents du dortoir en dénombrant les lits vides.
Dans la phase 3, le fait de cacher le dortoir introduit un nouvel obstacle : la procédure mise en oeuvre dans la phase 2 n'est plus possible car les lits vides ne sont plus visibles.
Le but du maître est d'amener les élèves à trouver le nombre d'enfants du dortoir à partir du nombre d'enfants dans la salle de jeux, c'est à dire déterminer son complément à dix.

4) b) Procédure sans matériel

Exemple de procédure sans matériel (peu probable au début de cette série d'activités) : l'enfant a déjà mémorisé plusieurs décompositions de dix, par exemple 5 et 5, 9 et 1 , 8 et 2...
Une autre possibilité : l'enfant utilise ses 10 doigts représentant les 10 lits. Les deux poings fermés, il lève autant de doigts que de bébés dans la salle de jeu, et compte ceux qui sont baissés. C'est la procédure qui est la plus couramment utilisée car la plus simple et la plus rapide à mettre en oeuvre une fois que l'enfant l'a découverte.

4) c) Deux procédures avec matériel

Supposons qu'il y ait 3 bébés dans la salle de jeux.

Procédure 1 :

L'élève prend dix cubes (ou autres objets) pour représenter les dix bébés, il isole trois cubes qui correspondent aux 3 bébés présents dans la salle de jeu et dénombre les cubes restants pour obtenir le nombre d'élèves absents dans la salle de jeu.

Procédure 2 :

L'élève représente la situation : le dortoir et ses dix lits et la salle de jeu. Il dessine 3 bébés dans la salle de jeu, barre les lits correspondants aux trois bébés et il dénombre les lits non barrés.

Variante :

L'élève dessine dix bébés, entoure ceux présents dans la salle de jeu puis il dénombre les autres bébés.

5) Trois variables didactiques

Première variable : le nombre de cartes pour faire dix.

Si on limite à deux le nombre de cartes pour faire un pli totalisant dix, , il s'agit d'un réinvestissement de la situation vécue précédemment. Les résultats mémorisés peuvent être efficaces, mais les bébés restent visibles.
Si on ne limite pas le nombre de cartes par pli, il faut s'adapter à la nouvelle consigne : les résultats mémorisés sont à réadapter…

Seconde variable : type de représentation du nombre.

Si les cartes ne comportent plus que des données chiffrées, l'élève ne peut plus systématiquement dénombrer les bébés, il doit anticiper les sommes.
On peut aussi citer l'organisation spatiale de la collection de bébés sur chaque carte qui va influer sur les procédures pour trouver le cardinal de la collection de bébés (perception visuelle globale ou dénombrement effectif)

Troisième variable : choix des nombres portés par les cartes.

Par exemple l'enseignant peut choisir de mettre seulement des cartes 5, 9, 1, 8 et 2 de sorte que les sommes soient plus faciles, ou au contraire se limiter aux deux sommes plus difficiles ("6 et 4" et "7 et 3" avec seulement une autre somme facile).

Remarque :
Les variables citées précédemment sont bien relatives à la situation proposée pour laquelle les objectifs ont été identifiés en 1)
*Si on cherche à présent à travailler plus largement les décompositions additives des nombres on peut agir sur la variable "**somme à atteindre**". La somme à atteindre n'est plus dix. Elle peut être inférieure à 10 en maternelle ou supérieure à 10 en CP (cf. Programmation CP "Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs ou égaux à 20).*

6) Autre activité

On peut travailler avec un album de littérature jeunesse comportant dix personnages ou objets dans des situations différentes (par exemple, 10 petites coccinelles dans le jardin avec 8 sur une branche...)
Des jeux de boîtes fermées où l'on ajoute ou enlève des cubes permettent également de renforcer l'apprentissage des décompositions additives de dix : l'enseignant met 7 cubes dans la boîte puis 3, la referme et demande combien elle en contient maintenant. Ou encore, il met 10 cubes et en ôte 7…

TROIS EXERCICES D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE LYON

Remarque : L'exercice n°1 est inspiré de l'évaluation PISA 2012.

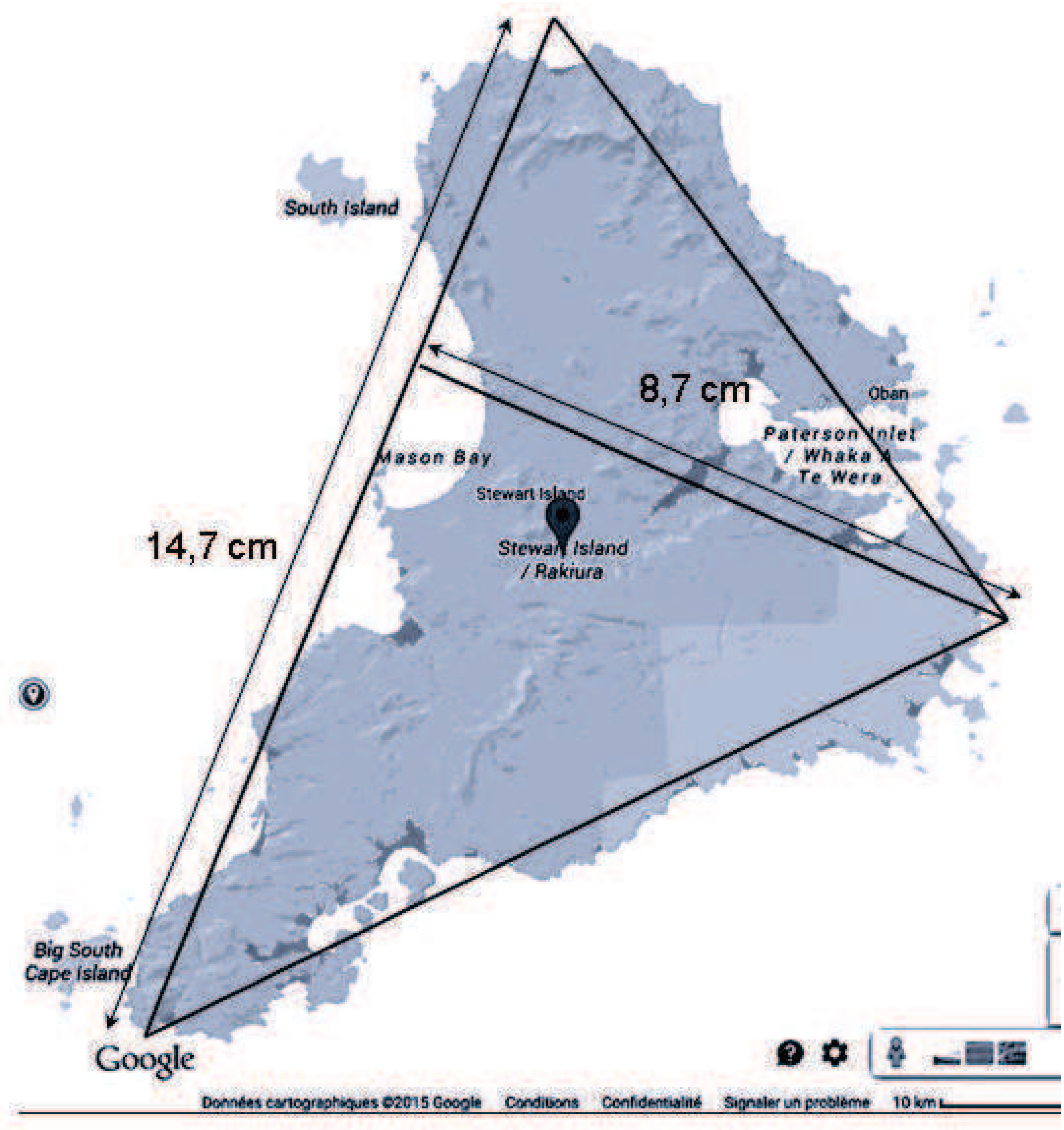
EXERCICE N°1

1) Estimation de l'aire de l'île Stewart

Différentes procédures sont possibles.

Procédure 1 : Remplacer l'île par une forme géométrique simple dont on sait calculer l'aire.

Ici l'on remarque que l'île à la forme d'un triangle (voir figure ci-dessous).



La procédure consiste en :

- Tracer un triangle approchant la forme de l'île et une de ses hauteurs.
- Mesurer la longueur de cette hauteur et de la base correspondante. Sur la figure ci-dessus, la longueur de la hauteur h est h = 8,7 cm et la longueur de la base correspondante b est b = 14,7 cm
- Calculer à l'aide de l'échelle (2 cm sur la carte correspondent à 10 km en réalité) les longueurs réelles. Sur la figure ci-dessus, les longueurs réelles, arrondies au km près, sont :

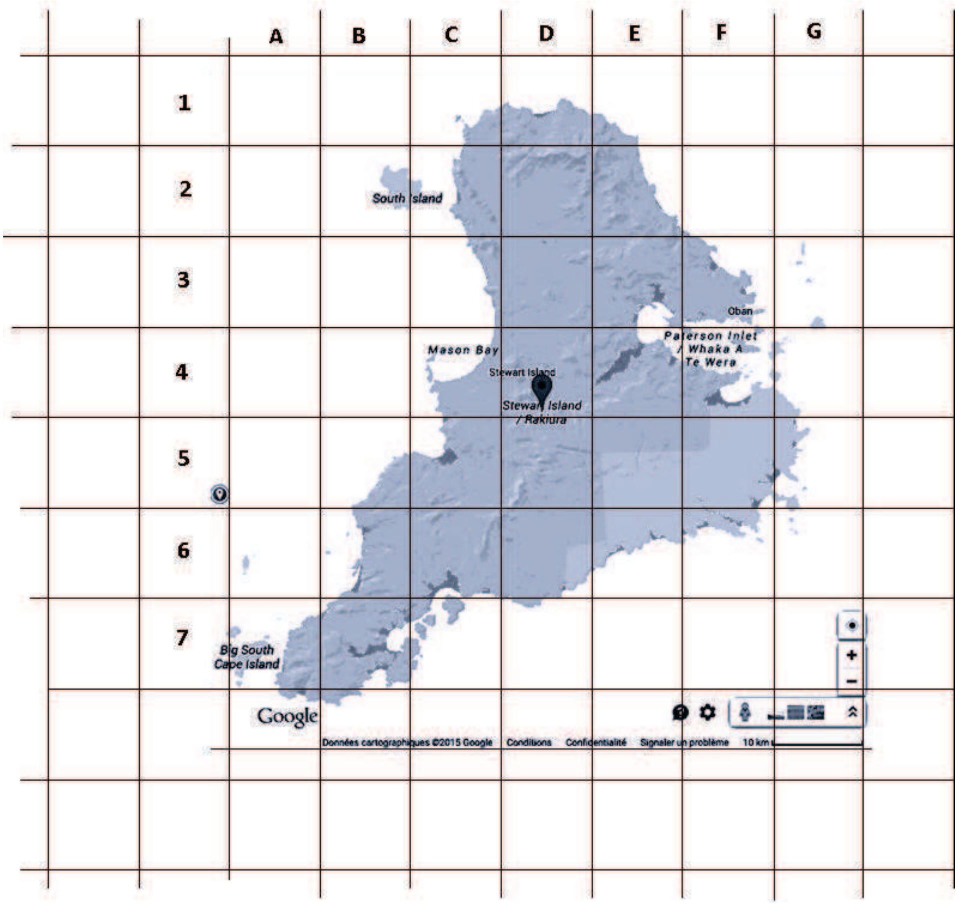
  $h = \frac{8,7}{2} \times 10 \text{ km} \approx 43,5 \text{ km}$ et $b = \frac{14,7}{2} \times 10 \text{ km} \approx 73,5 \text{ km}$
- Calculer, en km^2, l'aire du triangle à l'aide de la formule : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

  Sur la figure ci-dessus, on obtient : $A = \frac{1}{2} \times 73,5 \text{ km} \times 43,5 \text{ km} = 1598,625 \text{ km}^2$ que l'on arrondit à $A \approx 1600 \text{ km}^2$

Remarque :
On pouvait inverser les deux dernières étapes en calculant l'aire du triangle avant de calculer les dimensions réelles. On obtenait alors :

- *Calculer, en cm^2, l'aire du triangle rectangle à l'aide de la formule : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$. Dans l'exemple ci-dessous, on obtient : $A = \frac{1}{2} \times 14,7 \text{ cm} \times 8,7 \text{ cm} = 63,945 \text{ cm}^2$ arrondi à 64 cm^2*
- *Calculer à l'aide de l'échelle l'aire réelle : 2 cm sur la carte correspondent à 10 km en réalité, donc un carré de 2 cm de côté sur la carte correspond à un carré de côté 10 km en réalité. D'où un carré d'aire $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$ sur la carte correspond à un carré d'aire $10 \text{ km} \times 10 \text{ km} = 100 \text{ km}^2$ en réalité.*
  Dans l'exemple ci-dessous, l'estimation de l'aire réelle de l'île, arrondie au km^2 près, est égale à : $\frac{64}{4} \times 100 \text{ km}^2 = 1600 \text{ km}^2$.

Procédure 2 : Utiliser un quadrillage (Voir figure ci-dessous – La figure a été réduite)



La procédure consiste en :

- Réaliser un quadrillage à maille carrée suffisamment fin. Pour simplifier les relations on s'appuie sur l'échelle. Dans l'exemple ci-dessous, les carreaux du quadrillage ont pour longueur 2 cm sur la carte, soit 10 km en réalité. Faire des carreaux de 1 cm de côté sur la carte, soit 5 km en réalité, et d'aire 25 km^2 dans la réalité, permet d'avoir une estimation plus aisée à obtenir.
- Compter les carreaux pleins du quadrillage. Il y en a cinq : D2, D3, D4, D5 et E5.
- Par découpage-recollement, associer des carreaux incomplets pour obtenir un carreau plein (par exemple, A7 et B6) ou alors, estimer à l'aide d'une fraction simple ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$), l'aire des carreaux incomplets (aire de C5 = $\frac{3}{4}$ u avec u, l'aire d'un carreau ; aire de C1 = $\frac{1}{8}$ u).

On peut, par exemple, arriver à une aire de 17 u + $\frac{3}{8}$u, ce qui donne 1737,5 km^2

Remarque :
Pour information, l'île Stewart existe et a une superficie de 1746 km^2. Toute réponse comprise entre 1400 km^2 et 2000 km^2 est acceptable.

2) Calcul du pourcentage de variation de la masse entre le premier et le second œuf

Le coefficient multiplicateur permettant de passer de la masse du premier œuf à celle du second est donné par le rapport $\frac{110\,g}{78\,g} \approx 1{,}41$.
Il traduit le fait que **le second œuf est environ 41% plus lourd que le premier**.

3) a) Nombre de manchots dans la colonie à la fin de la deuxième année.

La première année, les 500 couples élèvent 500 poussins. La colonie compte alors 1500 individus dont 20% mourront dans l'année.
Il reste donc à la fin de la première année 80% de ces 1500 individus, soit $0{,}8 \times 1500 = 1200$ manchots (on pouvait aussi calculer 20% de 1500 ($\frac{20}{100} \times 1500 = 300$), soit 300 manchots à retirer des 1500 manchots).

Pour obtenir le nombre de manchots à la fin la seconde année, on reproduit le même raisonnement en partant de 1200 manchots, soit 600 couples. Ceux-ci élèvent 600 poussins. La colonie compte alors 1800 individus dont 20% mourront.

Il reste donc à la fin de la seconde année $0{,}8 \times 1800 = 1440$ manchots (résultat que l'on pouvait obtenir en calculant 20% de 1440 ($\frac{20}{100} \times 1800 = 360$), soit 360 manchots à retirer des 1800 manchots).

Remarque :
On pouvait aussi raisonner en remarquant que chaque année, ce sont les mêmes opérateurs qui agissent sur la population de manchots.
En partant en début d'année d'une population de x individus, on obtient successivement $\frac{1}{2}x$ ou 0,5 x couples, d'où autant de poussins. La population est alors de $\frac{3}{2}x$ soit 1,5 x adultes ou poussins, dont 20% mourront dans l'année. En fin d'année, la population est donc de 0,8×1,5 x=1,2 x, ce qui traduit une augmentation de la population de 20% chaque année.

3) b) Formules à entrer dans les cellules du tableur.

Le nombre contenu dans la cellule B2 correspond à la population de manchots en début d'année 01. Le nombre contenu dans la cellule C2 correspond à la population de manchots en fin d'année 01.
La formule à inscrire dans la cellule C2, puis à recopier vers la droite pour renseigner la ligne 2, doit permettre, à partir du nombre de manchots vivant à la fin d'une année, le calcul du nombre de manchots vivant à la fin de l'année suivante.

Formules correctes :

La formule III (= B2*1,5*0,8) est correcte. Elle reprend les deux étapes du calcul effectué dans la remarque ci-dessus ($0{,}8 \times 1{,}5\,x$).

La formule IV (= B$2*1,2) est correcte, même si le symbole $ est ici inutile (en recopiant vers la droite le numéro de ligne de toute façon ne changera pas). Cette formule reprend le résultat simplifié obtenu dans la remarque précédente (1,2 x).

La formule VI (= B2 + B2*20/100) est correcte. Elle s'appuie sur l'interprétation faite dans la remarque précédente : la population augmente de 20% chaque année. Le calcul est cependant effectué en deux temps : calcul des 20% d'augmentation, puis ajout au nombre d'individus vivants en début d'année.

Formules fausses :

La formule I (= B2 + B2/2 – 20%) est fausse. Pour traduire l'idée d'enlever 20%, l'écriture « -20% » devrait opérer multiplicativement sur la somme B2 + B2/2 correspondant au nombre total d'adultes et de poussins nés dans l'année. Pour devenir correcte, cette formule devrait être modifiée en = B2 + B2/2 – 20%*(B2 + B2/2).

La formule II (= B2*1,5 – B2*0,2) est fausse. Ecrite ainsi, elle correspond à considérer que seuls meurent 20% des adultes vivant en début d'année et aucun poussin. En effet l'opérateur « 0,2* » porte sur B2, population de début d'année. Pour devenir correcte, cette formule devrait être modifiée en = B2*1,5 – B2*1,5*0,2.

La formule V (= (B2+ B2/2) *0,2) est fausse. Elle conduit à évaluer le nombre de manchots morts au cours de l'année.

4) Vrai/Faux

Affirmation a

VRAI : en effet, en 2000, pour les trois espèces de manchots, le nombre moyen de poussins élevés par couple est supérieur à 0,8. Donc quelle que soit la répartition de ces espèces dans la population de manchots, la moyenne pondérée de ces trois nombres sera supérieure à 0,8 et donc à 0,6.

Affirmation b

FAUX : le diagramme permet d'affirmer que le nombre moyen de poussin élevé en 2007 par un couple de manchots Gorfou (environ 0,8) est le double du nombre moyen de poussin élevé par un couple de manchots Papou (environ 0,4). S'il y avait autant de couples de chaque espèce, l'affirmation serait vraie mais comme nous ne connaissons pas les effectifs de couples de chaque espèce, il est impossible de conclure positivement. Imaginons par exemple qu'il y ait deux fois plus de couples de manchots Papou que Gorfou, il y aurait alors eu en 2007 autant de poussins Papou que Gorfou.

Affirmation c

VRAI : en 2001, le nombre moyen de poussins élevés par un couple de manchots de Magellan était de 1. Il est d'environ 0,5 en 2004. Le nombre moyen de poussins élevés par un couple de manchots de Magellan a donc diminué.

5) Vitesse de nage

Les manchots les plus rapides nagent à la vitesse de 36 km/h soit 36000 m en 3600 secondes soit 10 m en 1 seconde c'est-à-dire 100 m en dix secondes.
Ils nagent donc 469,1 mètres en 46 secondes et 91 centièmes de seconde.

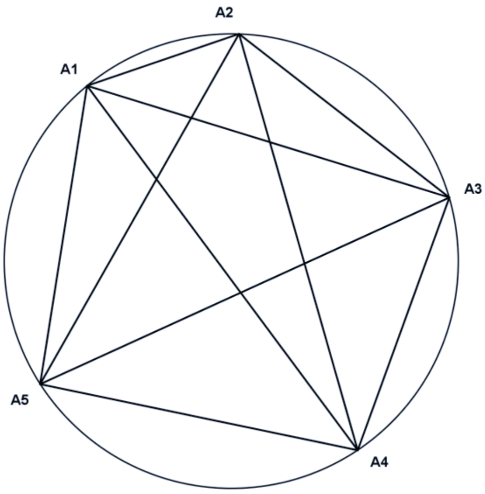
EXERCICE N°2

Partie A

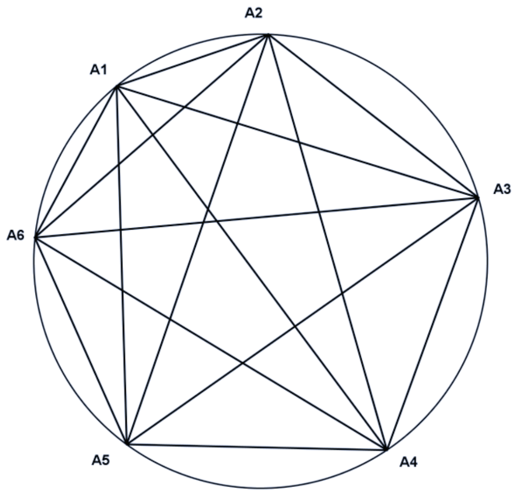
1) Nombres de segments joignant deux à deux, cinq, six ou onze points d'un cercle

Méthode 1 :

La position des points sur le cercle n'ayant pas d'importance, on peut faire un dessin et compter le nombre de segments tracés.



Pour n = 5, on obtient 10 segments



Pour n = 6, on obtient 15 segments

Remarque :

Lorsque le nombre de points augmente, les tracés et le comptage des segments deviennent délicats. On est amené à utiliser l'une des deux méthodes ci-dessous.

Méthode 2 :

Pour n = 5, chaque segment cherché correspond à un choix de deux points parmi les 5. On a 5 choix pour le premier point et 4 choix pour le deuxième ce qui donne 20 couples de points possibles. Mais chaque segment correspondant à deux couples (l'ordre des extrémités du segment n'a pas d'importance), il faut donc diviser ce nombre de couples par 2 pour obtenir le nombre de segments. Ainsi pour n = 5, on a 10 segments.

Méthode 3 :

Soit A1, A2, A3, A4 et A5, les 5 points choisis sur le cercle. On dénombre successivement, les segments dont une extrémité est A1, puis dont une extrémité est A2 et l'autre un point différent de A1, etc.

- Pour A1, on obtient 4 segments de seconde extrémité A2, A3, A4 et A5.
- Pour A2, on obtient 3 segments de seconde extrémité A3, A4 et A5 (le segment [A1A2] a déjà été pris en compte).
- Pour A3, on obtient 2 segments de seconde extrémité A4 et A5.
- Pour A4, on obtient 1 segment de seconde extrémité A5.

Pour n = 5, le nombre de segments est donc $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Par des raisonnements analogues on trouve :

Méthode 2 :

Pour n = 6, on a $6 \times \frac{5}{2} = 15$ segments.
Pour n = 11, on a $11 \times \frac{10}{2} = 55$ segments.

Méthode 3 :

Pour n = 6, on a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ segments.
Pour n = 11, on a $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ segments.

2) Généralisation

En généralisant la méthode 2, on a n choix pour le premier point et (n-1) choix pour le deuxième ce qui donne $n \times (n-1)$ couples de points possibles. Mais chaque segment correspondant à deux couples (l'ordre des extrémités du segment n'a pas d'importance), il faut donc diviser ce nombre de couples par 2 pour obtenir le nombre de segments. Ainsi pour n points, le nombre total de segments est $\frac{n\times(n-1)}{2}$.

En généralisant la méthode 3, on dénombre successivement :

- les segments dont une extrémité est A1 : il y en a (n-1) ;
- puis les segments dont une extrémité est A2 et l'autre un point différent de A1 : il y en a (n-2) ;
- etc.

Le nombre total de segments est donné par la somme S des n-1 premiers nombres entiers positifs :
S=(n-1) + (n-2) + … + 2 + 1

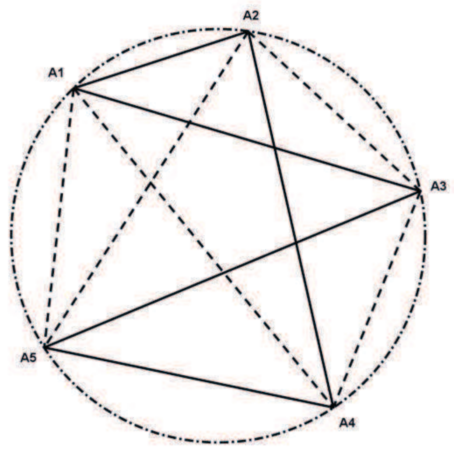
Remarque :
Les deux résultats sont bien égaux. Pour s'en convaincre, on peut écrire la somme S de deux façons différentes, puis additionner en colonne les termes deux à deux. On obtient (n-1) termes chacun égaux à n.

$$\begin{array}{rccccccc} S = & (n-1) & + & (n-2) & + \dots + & 2 & + & 1 \\ S = & 1 & + & 2 & + \dots + & (n-2) & + & (n-1) \\ \hline 2 \times S = & n & + & n & + \dots + & n & + & n \end{array}$$

D'où $2 \times S = n \times (n-1)$ *et* $S = \frac{n\times(n-1)}{2}$

Partie B

1) a) Configuration à 5 points complétée

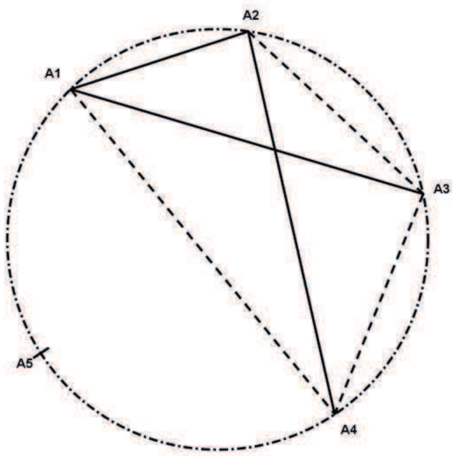


1) b) Unicité de la solution

La solution précédente est l'unique façon de compléter la configuration de façon à ce que n'apparaisse aucun triangle monochrome.
En partant de la situation initiale, on est obligé successivement :

- de colorier le segment [A1 A3] en noir (sans quoi le triangle A1 A3 A4 serait monochrome gris) ;
- de colorier le segment [A2 A3] en gris (sans quoi le triangle A1 A2 A3 serait monochrome noir) ;
- de colorier le segment [A2 A4] en noir (sans quoi le triangle A2 A3 A4 serait monochrome gris).

On obtient alors la configuration suivante :

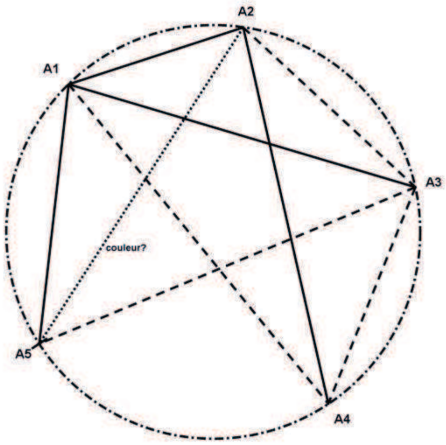


N'ayant aucune information sur les segments issus de A5, il faut alors choisir l'un d'entre eux et considérer deux cas, selon que ce segment est colorié en noir ou en gris.

Raisonnons par exemple sur le segment [A1 A5].

1er cas : le segment [A1 A5] est colorié en noir

On est alors obligé de colorier le segment [A5 A3] en gris (sans quoi le triangle A5 A1 A3 serait monochrome noir).
Mais alors, le segment [A5 A2] ne peut ni être colorié en noir (en raison du triangle A5 A1 A2) ni en gris (en raison du triangle A5 A3 A2).



Dans ce cas, il y a donc impossibilité à compléter le coloriage de la configuration sans faire apparaître de triangle monochrome.

2[nd] cas : le segment [A1 A5] est colorié en gris

On est alors obligé successivement :
- de colorier le segment [A5 A4] en noir (sans quoi le triangle A1 A5 A4 serait monochrome gris) ;
- de colorier le segment [A5 A2] en gris (sans quoi le triangle A5 A2 A4 serait monochrome noir) ;
- et pour finir, de colorier le segment [A5 A3] en noir (sans quoi le triangle A5 A2 A3 serait monochrome gris).

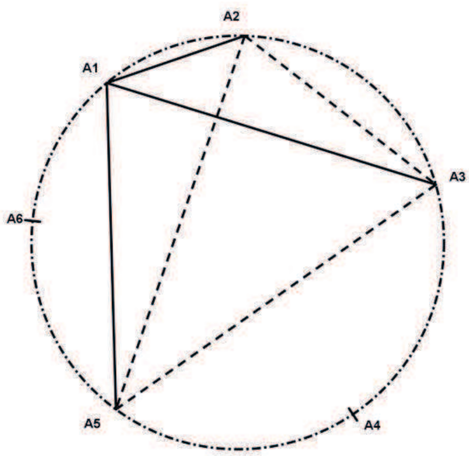
On retrouve la solution vue précédemment et il n'y a dans ce cas qu'une seule façon de compléter le coloriage de la configuration sans faire apparaître de triangle monochrome.

Au final, il n'y a bien qu'une seule façon de compléter la configuration précédente pour qu'elle ne comporte aucun triangle monochrome.

Remarque :
Les raisonnements seraient analogues si l'on avait choisi un autre segment issu de A5.

2) a) Possibilité ou non de compléter la configuration à 6 points

Il est impossible de compléter cette configuration sans faire apparaître de triangle monochrome. En effet pour éviter les triangles monochromes noirs, on est dans l'obligation de colorier les segments [A2 A3], [A5 A3] et [A2 A5] en gris. Mais on fait alors apparaître un triangle monochrome gris : le triangle A2 A3 A5.



2) b) Existence ou non d'une configuration à 6 points sans triangles monochromes

Non, il n'existe pas de configuration à 6 points ne comportant aucun triangle monochrome.

Le raisonnement vu à la question précédente se généralise et peut s'appliquer à toute configuration dans laquelle trois segments issus d'un même point sont coloriés de la même couleur, que celle-ci soit noire ou que celle-ci soit grise.
Dit autrement, on peut affirmer que dès qu'une configuration comporte trois segments issus d'un même point coloriés de la même couleur, il est impossible d'en compléter le coloriage sans faire apparaître un triangle monochrome.

Or dans une configuration à 6 points, il part 5 segments de chaque point.
Par exemple de A1, il part : [A1 A2], [A1 A3], [A1 A4], [A1 A5], [A1 A6].
Comme nous ne disposons que de deux couleurs, au moins trois d'entre eux sont coloriés de la même couleur. Le raisonnement précédent permet donc d'affirmer que toute configuration à 6 points comporte au moins un triangle monochrome.

Remarque :
On peut reformuler ce résultat en disant que pour colorier la configuration à 6 points sans faire apparaître de triangle monochrome, deux couleurs ne suffisent pas, mais que trois couleurs sont nécessaires. Des raisonnements analogues à ceux développés ici permettent de démontrer qu'avec trois couleurs, on peut colorier sans triangle monochrome les configurations comportant jusqu'à 16 points, mais que quatre couleurs sont nécessaires à partir 17 points.
Au-delà de ces valeurs, ce problème de coloration est complexe et reste en grande partie ouvert.

EXERCICE N°3

Partie A

1) Description de deux procédures

Procédure 1 : sans utiliser la mesure.
Les élèves peuvent procéder :

- En identifiant les pièces superposables entre les deux personnages. Par exemple les têtes, les bustes, etc.
- En mettant en correspondance des pièces ou ensemble de pièces, par découpage ou recollement. Par exemple, la jupe de la fillette peut être recouverte par le chapeau et les deux pieds du garçon, etc.

Pour conclure, il faut regarder si on a pu recouvrir la totalité d'un personnage sans utiliser toutes les pièces de l'autre.

Procédure 2 : en utilisant la mesure
La procédure consiste en :

- Choisir une unité de mesure.
- Paver (par le dessin ou mentalement) la figure à l'aide de cette unité d'aire.
- Compter le nombre de reports de l'unité d'aire.

Remarque :
Suivant l'unité de mesure choisie, la mesure peut être entière ou rationnelle.
Si l'unité de mesure u choisie est l'aire du plus petit triangle, on obtient :
Aire de la fillette = 36u et Aire du garçon = 40u.
Si l'unité de mesure u choisie est l'aire de la feuille de carton carrée, on a :
Aire de la fille = $2u + \frac{1}{4}u$ *et Aire du garçon =* $2u + \frac{1}{2}u$.

Aldo a donc utilisé plus de carton pour construire le personnage du garçon que pour celui de la fillette.

2) Deux notions travaillées à l'aide de cette activité

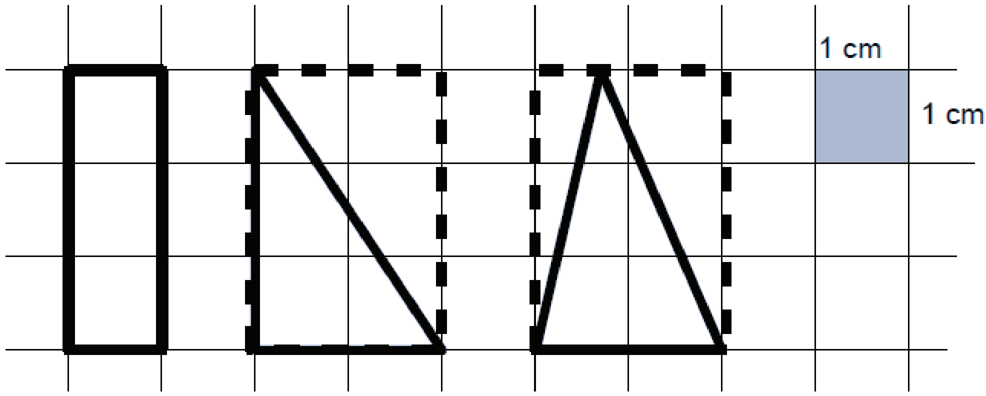
Dans le domaine « Grandeurs et mesure », cette activité permet de travailler la notion d'aire.
Dans le domaine « Nombres et calcul », elle peut permettre de travailler la notion de fraction, en particulier les fractions simples : un demi, un quart, …

3) Procédure erronée

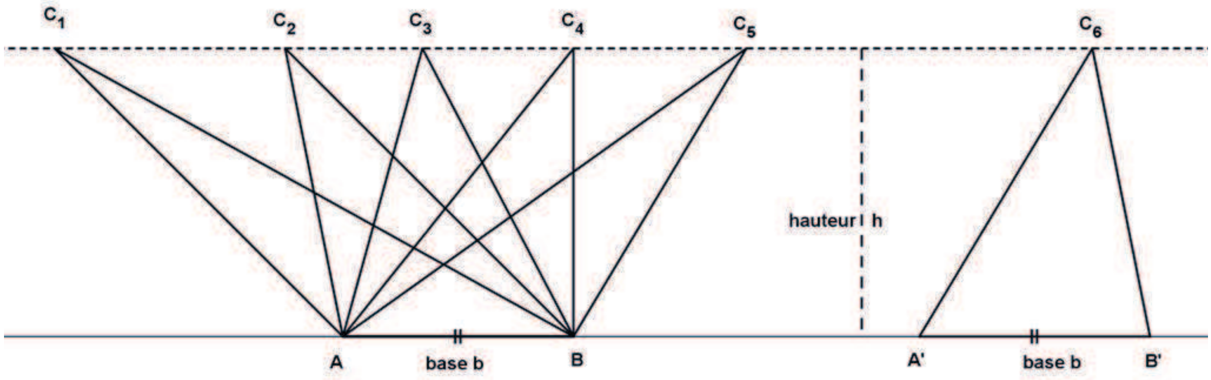
Une procédure erronée qu'un élève pourrait mettre en œuvre serait de compter et comparer les nombres de pièces nécessaires pour chacun des deux puzzles, 9 pièces pour le garçon, 17 pièces pour la fillette et en conclure qu'Aldo a utilisé plus de carton pour la fillette que pour le garçon.
Il peut avoir interprété « plus de carton », comme « plus de cartons », c'est-à-dire « plus de pièces de carton » et non comme « plus de feuilles carrées de carton ».

Partie B

1) Résolution de l'exercice



Remarques :
1) Un triangle rectangle est un demi-rectangle. Pour construire un triangle rectangle d'aire 3 cm² on pouvait s'appuyer sur tout rectangle d'aire 6 cm².
2) La formule du calcul de l'aire d'un triangle, $A = \frac{1}{2} b \times h$, montre que l'aire d'un triangle ne dépend que de sa base et de sa hauteur. En conséquence, lorsque des triangles ont même base et même hauteur, ils ont forcément même aire, sans pour autant avoir obligation d'être superposables.
Ainsi dans la figure ci-dessous les triangles ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4, ABC_5, $A'B'C_6$ ont tous même aire.



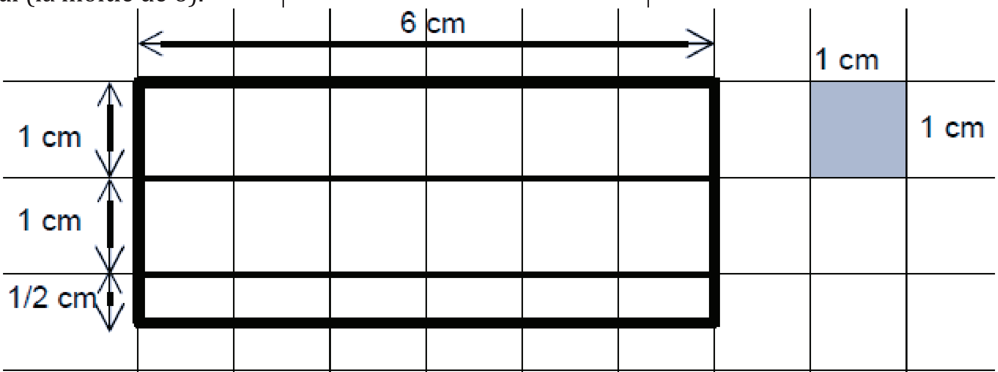
2) Construction d'un carré d'aire 3 cm²

Un carré de 3 cm² d'aire a des côtés de longueur $\sqrt{3}$ cm. Or $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
Un élève de CM2 ne peut pas construire à la règle graduée un carré d'aire 3 cm² : il est en effet impossible d'obtenir un côté de longueur $\sqrt{3}$ cm avec les graduations de la règle.
Il peut, au mieux, essayer de trouver un carré d'aire qui s'approche de 3 cm² en prenant pour longueur de côté soit 1,7 cm (mais c'est trop petit car $1{,}7^2 \approx 2{,}9$) soit 1,8 cm (mais c'est trop grand car $1{,}8^2 \approx 3{,}2$).
Le risque serait qu'il soit amené à croire qu'il est impossible de construire un carré d'aire 3 cm².

Partie C

	Procédure	Erreurs éventuelles	Hypothèses sur l'origine des erreurs
Aurélie Résultat faux	Elle calcule le périmètre du rectangle ($2L + l + l$) avec comme unité de longueur le mm. Elle convertit le résultat obtenu en cm (division par 10 mentale).	Confusion aire et périmètre ou entre la formule permettant de calculer le périmètre d'un rectangle et celle permettant de calculer l'aire d'un rectangle. Suites d'égalités fausses : il n'y a pas d'équivalence entre les deux côtés de l'égalité. Conversion des mm en cm et non pas des mm² en cm². Absence d'unité pour l'aire	Cette confusion peut être interprétée comme due au fait que périmètre et aire sont associés à une même surface. Par ailleurs, le périmètre et l'aire peuvent être obtenus par des formules auxquelles les élèves peuvent ne pas donner de sens. Le signe « = » semble être utilisé ici pour traduire le cheminement de pensée de l'élève. Le rapport de conversion entre les mm² et les cm² n'est pas un rapport égal à 10 comme dans les autres unités vues à l'école. Il est souvent difficile en CM2 de donner du sens à la relation 100 mm² = 1 cm². Il serait souhaitable que les élèves convertissent d'abord les longueurs des côtés du rectangle en cm avant d'appliquer la formule de calcul d'aire. Oubli
Bastien Résultat faux	Il commence par convertir les longueurs des côtés du rectangle en cm. Il cherche ensuite à appliquer une formule pour trouver l'aire du rectangle (formule appliquée : $L \times l \times L \times l$).	La formule de l'aire d'un rectangle est fausse.	Le calcul de l'aire est bien associé à une multiplication mais le fait de prendre en compte les longueurs des quatre côtés du rectangle peut avoir pour origine : - Penser que la formule du calcul de l'aire d'un rectangle est de la même forme que celle donnant le périmètre d'un rectangle et qu'il faut uniquement transformer le « + » en « × ». - Penser, par effet de contrat didactique, que toutes les données de l'énoncé doivent être utilisées pour produire la réponse.

Célia Résultat faux	Elle applique la bonne formule de calcul de l'aire d'un rectangle, en prenant les longueurs des côtés en mm. Elle convertit les mm² en cm² en divisant mentalement par 10.	Utilisation d'un rapport de conversion de 10 (et non de 100) entre les mm² en les cm².	Erreur courante (voir Aurélie). Par ailleurs, la similitude de notation entre les unités d'aire et les unités de longueur (cm et cm² ; mm et mm²) peut également expliquer cette erreur.
Djamel Résultat juste	Il commence par convertir les longueurs des côtés en cm. Il partage le rectangle en deux rectangles de 6 cm sur 1 cm et un rectangle de 6 cm sur 0,5 cm (voir figure ci-dessous) : On ne sait pas comment il obtient l'aire d'un rectangle de 6 cm sur 1 cm : pavage à l'aide de carrés de 1 cm de côté qui sont ensuite comptés ou alors calcul mental de l'aire en appliquant la formule 6 cm × 1 cm. Le pavage (voir figure ci-dessous) semble être privilégié au vu de son calcul pour obtenir l'aire du rectangle de 6 cm sur 0,5 cm. Pour obtenir que 6 moitiés de cm² font 3 cm², il a pu procéder soit par découpage-recollement mental (deux moitiés de cm² font 1 cm²) soit par calcul (la moitié de 6).		



TROIS EXERCICES D'APRÈS UN SUJET DE BESANÇON

EXERCICE N°1

Partie A : étude de la course d'un coureur débutant

1) Après trois quarts d'heure de course

a) Distance parcourue par le coureur après trois quarts d'heure de course

La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h. On peut calculer la distance parcourue en trois quarts d'heure de la manière suivante : $\frac{3}{4}\text{h} \times 6 \text{ km/h} = \mathbf{4,5\ km}$.

Autre méthode :

On peut aussi remarquer qu'en un quart d'heure, le coureur parcourt 1,5 km (4 fois moins que la distance qu'il parcourt en une heure), et en déduire qu'en trois quarts d'heure, il parcourt 3 × 1,5 km, soit **4,5 km**.

b) Distance parcourue par la voiture « catcher car » après trois quarts d'heure de course

La voiture « catcher car » part à 10 h 30, soit une demi-heure après le coureur. Après trois quarts d'heure de course, elle a donc roulé seulement pendant un quart d'heure.
Or l'énoncé indique que pendant le premier quart d'heure de son parcours, la voiture roule à 15 km/h : en un quart d'heure, elle parcourt donc $\frac{1}{4} \times 15$ km, soit 3,75 km.
Après trois quarts d'heure de course, la voiture a donc effectué 3,75 km.

c) Position de la voiture « catcher car » par rapport au coureur après trois quarts d'heure de course

3,75 km < 4,5 km,
donc **après trois quarts d'heure, la voiture « catcher car » n'a pas rattrapé le coureur.**

2) Expression de la distance d (en km) parcourue par le coureur débutant au bout d'une durée t (en heure)

Notons d la mesure de la distance parcourue par le coureur débutant, l'unité de longueur étant le km et t la durée de parcours correspondante, l'unité de durée étant l'heure.
La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h.
On a donc : $d \text{ km} = t \text{ h} \times 6 \text{ km/h}$ soit $\boldsymbol{d = 6\,t}$.

3) Expression de la distance D (en km) parcourue par la voiture au bout d'une durée t (en heure) inférieure à 1 h depuis le départ de la course.

Notons D la mesure de la distance parcourue par la voiture, l'unité de longueur étant le km et t la durée depuis le début de la course, l'unité de durée étant l'heure.

La durée est relevée à partir du départ de la course, c'est-à-dire que t est compris entre 0 et 10.

La voiture « catcher car » part à 10 h 30 donc, pour tout t compris entre 0 et 0,5, la distance parcourue est nulle (la voiture n'a pas encore démarré) : $D = 0$.

Pour toute durée de course comprise entre 0,5 heure et 1 heure, la voiture roule à 15 km/h pendant une durée égale à (t – 0,5) heure : elle parcourt donc une distance égale à 15 ($t - 0,5$) kilomètres.

Finalement, pendant la première heure de course, on peut écrire :

$$\boldsymbol{D} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si}\ \mathbf{0 \leq t \leq 0,5} \\ \mathbf{15\ (t - 0,5)} & \boldsymbol{si}\ \mathbf{0,5 \leq t < 1} \end{cases}$$

4) Durée de la course du coureur entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car »

Pour que la voiture « catcher car » ait rattrapé le coureur, il faut qu'elle ait démarré… donc la durée cherchée est supérieure à 0,5 heure.
D'après les questions 2 et 3, pendant la première heure de course, au bout de la durée t (en h) :

- la mesure en kilomètres de la distance parcourue par le coureur est $d = 6\,t$;
- la mesure en kilomètres de la distance parcourue par la voiture est $D = 15(t - 0{,}5)$.

Il suffit alors de résoudre l'équation $d = D$ pour déterminer la durée éventuelle au bout de laquelle la voiture et le coureur auront parcouru la même distance (condition vérifiée lorsque la voiture rattrape le coureur).
On résout donc l'équation : $6t = 15(t - 0{,}5)$ (avec $0{,}5 \leq t \leq 1$).
On obtient : $6t = 15t - 7{,}5$ ou encore $9t = 7{,}5$ soit $\mathrm{t} = \frac{7{,}5}{9} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.
$\frac{5}{6} < 1$ donc on est bien dans l'intervalle de validité de la formule établie dans la question 3).
Le coureur est donc rattrapé par la voiture « catcher car » au bout de $\mathbf{\frac{5}{6}}$ **h**,

Cette durée peut être exprimée en minutes : 1 h = 60 min,
donc $\frac{1}{6}$ h = $\frac{1}{6} \times 60$ min = 10 min et $\frac{5}{6}$ h = 5 × 10 min = 50 min.

Un participant qui court à 6 km/h est donc rattrapé par la voiture « catcher car » au bout de 50 minutes, soit à 10 h 50.

5) Distance parcourue par le coureur entre son départ et le moment où il est rattrapé par la voiture « catcher car » :

La vitesse du coureur, supposée constante, est 6 km/h : autrement dit, en une heure, il parcourt 6 km, et la distance qu'il parcourt est proportionnelle à la durée de son parcours.
La distance parcourue en $\frac{5}{6}$ h est donc égale à : $\frac{5}{6} \times 6$ km $=$ **5 km.**

Remarque :
On peut vérifier que la voiture a bien parcouru la même distance que le coureur au bout de 50 minutes de course ; en utilisant la formule établie dans la question 3, on obtient en effet :
$15 \times (\frac{5}{6} - 0{,}5) = 15 \times \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{6}\right) = 15 \times \frac{2}{6} = 5.$

Partie B : la course du vainqueur français 2014 (Thibaut Baronian) et du vainqueur mondial (Lemawork Ketema)

1) Distance parcourue par Thibaut Baronian

Thibaut Baronian a couru pendant 4 heures et 4 minutes avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car ». Pour déterminer la distance parcourue par le coureur, il suffit donc de trouver la distance parcourue par cette voiture au bout de cette durée.

La voiture ne roule pas pendant les 30 premières minutes de la course, donc elle a roulé pendant 3 heures 34 minutes.

On sait qu'à partir du moment où elle démarre, sa vitesse augmente selon les modalités indiquées dans le tableau :

- au cours de la première heure de son trajet, elle roule à la vitesse de 15 km/h donc elle parcourt 15 km ;
- au cours de la deuxième heure, elle roule à la vitesse de 16 km/h donc elle parcourt 16 km ;
- au cours de la troisième heure, elle roule à la vitesse de 17 km/h donc elle parcourt 17 km.
- au cours de la quatrième heure, elle roule pendant 34 minutes à la vitesse de 20 km/h. Or à cette vitesse, en une minute, elle parcourt $\frac{20}{60}$ km (puisque 1 h = 60 min) ; en 34 minutes, elle parcourt donc $34 \times \frac{20}{60}$ km $= \frac{34}{3}$ km.

Au total, en 3 heures et 34 minutes, la voiture « catcher car » a donc parcouru :
$15\text{ km} + 16\text{ km} + 17\text{ km} + \frac{34}{3}\text{ km} = \frac{178}{3}\text{ km} \approx 59{,}3$ km à 0,1 km près.

Par conséquent, avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car », Thibaut Baronian a lui aussi parcouru $\frac{178}{3}$ km ; la valeur approchée au dixième près par défaut de cette distance est 59,3 km.

2) Étude de la vitesse de Thibaut Baronian pendant sa course

a) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la première partie de la course

On sait qu'il a parcouru les 42 premiers kilomètres de sa course en 2 heures et 48 min.
Pour exprimer en heures la durée du parcours, on utilise la relation 1 h = 60 min, soit 1 min = $\frac{1}{60}$ h.
La durée de la première partie de course est 2 heures et 48 minutes,
soit $2\text{ h} + \frac{48}{60}\text{h} = 2\text{ h} + \frac{8}{10}\text{h} = 2{,}8$ h.
La distance parcourue pendant cette partie est 42 km.
La vitesse moyenne sur ce parcours est donc $\frac{42\text{ km}}{2{,}8\text{ h}} = 15$ km/h.

b) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la seconde partie de sa course (après 42 km)

Thibaut Baronian a couru $\frac{178}{3}$ km en 4 heures et 4 minutes et a parcouru les 42 premiers kilomètres en 2 heures et 48 minutes.

Pour calculer sa vitesse moyenne sur la deuxième partie de son parcours, il suffit de déterminer la durée de cette deuxième partie de course, et la distance parcourue pendant celle-ci.

- La durée de la seconde partie de sa course peut être calculée en déterminant le complément à ajouter à 2 heures et 48 minutes pour atteindre 4 heures et 4 minutes : ce complément est égal à 12 minutes (pour atteindre 3 heures) auxquelles on ajoute 1 heure et 4 minutes (pour atteindre 4 heures et 4 minutes) ; il est donc égal à 1 heure et 16 minutes.
  On peut exprimer cette durée en heures :

  1 h 16 min = $1\text{ h} + \frac{16}{60}\text{ h} = 1\text{ h} + \frac{8}{30}\text{ h} = \frac{38}{30}\text{h} = \frac{19}{15}$ h.
- La distance parcourue au cours de la seconde partie de sa course peut être calculée par différence entre la distance totale parcourue pendant la course, et la distance parcourue pendant la première partie : $\frac{178}{3}$ km – 42 km = $\frac{178}{3}$ km– $\frac{126}{3}$ km = $\frac{52}{3}$ km.

On en déduit la vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur la seconde partie de sa course :
$\frac{\frac{52}{3}\text{km}}{\frac{19}{15}\text{ h}} = \frac{52\times15}{3\times19}\text{km/h} = \frac{260}{19}\text{km/h} \approx 13{,}7$ km/h à 0,1 km/h près.
Sa vitesse moyenne au cours de la seconde partie de sa course a donc été environ $13,7$ km/h (à 0,1 km/h près).

c) Vitesse moyenne de Thibaut Baronian sur l'ensemble de sa course

Sur l'ensemble de sa course, il a parcouru $\frac{178}{3}$ km, en 4 heures et 4 minutes.

Cette durée, exprimée en heures, est égale à : $4\text{ h} + \frac{4}{60}\text{ h} = 4\text{ h} + \frac{1}{15}\text{ h} = \frac{61}{15}$ h.
La vitesse moyenne est donc :
$\frac{\frac{178}{3}\text{ km}}{\frac{61}{15}\text{ h}} = \frac{178 \times 15}{3 \times 61}\text{ km/h} = \frac{890}{61}\text{ km/h} \approx 14{,}6$ km/h à 0,1 km/h près.
Sa vitesse moyenne sur l'ensemble de sa course a donc été **environ $14,6$ km/h (à 0,1 km/h près).**

3) Durée de la course du vainqueur mondial 2014 (Lemawork Ketema)

Ce coureur a parcouru 78,58 km avant de se faire rattraper par la voiture « catcher car ». Pour répondre à la question, on détermine d'abord la durée mise par la voiture pour parcourir cette distance.
Pendant la première heure de son trajet, la voiture a parcouru 15 km.
Pendant la deuxième heure, elle a parcouru 16 km ; au bout de deux heures, elle a donc parcouru 15 km + 16 km depuis le départ, soit 31 km.
Pendant la troisième heure, elle a parcouru 17 km, soit 31 km + 17 km = 48 km depuis le départ.

Il lui restait alors 30,58 km à parcourir avant l'instant où elle a rattrapé Lemawork Ketema (car 78,58 km – 48 km = 30,58 km).
Or pendant la quatrième heure et la cinquième heure de son trajet, la voiture roule à 20 km/h. À cette vitesse, elle parcourt 40 km en deux heures : il lui a donc fallu moins de deux heures pour parcourir 30,58 km, et a donc rattrapé le coureur en moins de cinq heures de trajet.

Plus précisément, on peut calculer la durée qu'elle a mise pour parcourir 30,58 km à 20 km/h :
$\frac{30{,}58 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 1{,}529 \text{ h}$.
La durée du trajet de la voiture a donc été égale à 3 h + 1,529 h = 4,529 h.
On peut exprimer cette durée en heures et minutes : $\frac{529}{1000}\text{ h} = \frac{529}{1000} \times 60 \text{ min} = 31{,}74 \text{ min} \approx 32 \text{ min}$ à la minute près.
La durée du trajet de la voiture a donc été égale à environ 4 heures et 32 minutes.

Le coureur étant parti 30 minutes avant la voiture, l**a durée de la course du vainqueur mondial en 2014 a donc été environ de 5 heures et 2 minutes (à la minute près).**

Partie C : interprétation du tableau

Calcul de la durée de la course quand on adopte une vitesse constante de 11 km/h

Dans la ligne correspondant à une vitesse constante de 11 km/h, les colonnes « Durée » et « Distance » donnent les durées et distances réalisables sur la course « Wings For Life Run » avant d'être rattrapé par la voiture.

Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans la question A.2., à la vitesse de 11 km/h, la distance d parcourue par le coureur au bout de t heures de course est égale à $11t$.

La voiture démarre au bout de 30 minutes et roule à 15 km/h pendant la première heure de son trajet.

En une heure et 30 minutes de course, la voiture roule pendant une heure et parcourt 15 km tandis que le coureur parcourt $11 \times 1{,}5$ km, soit 16,5 km. La voiture ne rattrape donc pas le coureur.

Pendant la deuxième heure de son trajet, la voiture roule à 16 km/h. Par un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans la question A.4. , la distance qu'elle parcourt au bout de t heures (avec $1 \leq t \leq 2$) est donc égale, en kilomètres, à $15 + 16(t - 1{,}5)$.

Pendant cette même durée, la distance parcourue depuis le départ par le coureur est égale, en kilomètres, à $11t$.

La voiture rattrape donc le coureur lorsque $15 + 16(t - 1{,}5) = 11t$ (avec $1 \leq t \leq 2$).

On résout cette équation : $5t = 9$ donc $t = \frac{9}{5}$ (qui est bien compris entre 1 et 2).

La voiture rattrape donc le coureur au bout de $\frac{9}{5}$ h. Or un cinquième d'heure est égal à 12 minutes, donc 9 cinquièmes d'heure sont égaux à une heure et 4×12 min, soit 1 heure et 48 minutes. On retrouve bien la durée indiquée dans le tableau (01:48:00).

EXERCICE N°2

1) Calcul des effectifs cumulés (remplissage de la colonne F)

Dans la colonne F, on calcule les effectifs cumulés croissants de la série des prix regroupés en classes.
L'effectif associé aux classes [200 ; 300 [et [300 ; 400[réunies est égal à la somme des effectifs respectifs de ces deux classes. On peut donc entrer dans la cellule F3 la formule : $\boxed{\text{= F2 + E3}}$
Recopiée vers le bas, cette formule permettra de calculer les effectifs cumulés quelles que soient les classes considérées ; en effet, une fois que l'on a calculé les effectifs cumulés pour des classes consécutives, il suffit, pour prendre en compte une tranche supplémentaire dans le calcul des effectifs cumulés, d'ajouter aux effectifs cumulés déjà calculés, l'effectif associé à cette tranche supplémentaire.

2) Calcul des fréquences (remplissage de la colonne G)

On peut éliminer la formule $\boxed{\text{=E2/(SOMME(E2 : E10))}}$: entrée en G2, elle donne un résultat correct (fréquence des appareils photos dont les prix sont compris entre 200 € et 300 € parmi les appareils photos considérés), mais étirée vers la cellule G3, elle est transformée en $\boxed{\text{=E3/(SOMME(E3 : E11))}}$: l'effectif total des appareils photos n'est alors pas calculé correctement.

La formule $\boxed{\text{=E2/(SOMME(E\$2 : E\$10)}}$ est en revanche correcte : la présence du caractère $ permet de conserver la plage de cellules E2 : E10 pour le calcul de l'effectif total lorsque la formule est étirée vers le bas.

La formule $\boxed{\text{=F2/F10}}$ ne convient pas pour les mêmes raisons que la première formule (il suffirait de la transformer en $\boxed{\text{=F2/F\$10}}$ pour qu'elle convienne).

La formule $\boxed{\text{=E2/25*100}}$ convient pour la série de données considérée, mais ne résisterait pas à un changement d'effectif dans la colonne E.

Remarque :
On rappelle que quand on ajoute le caractère $ devant l'adresse d'une cellule, on parle de référence absolue, ce qui signifie que quel que soit l'étirement ou le copier coller, la formule de la cellule ne change pas. Sans $, on parle de référence relative, ce qui signifie que les indices des formules sont incrémentés du nombre de lignes et de colonnes lors du déplacement dans la feuille de calcul. Ainsi, par exemple, la formule « =E3+$F6 », après un copier coller de la cellule B7 à la cellule D10 (soit 2 colonnes lettres plus à droite et 3 lignes nombres plus bas), devient « =G6+$F9 ».

3) Indicateurs de position pour la série statistique considérée

Rappelons d'abord qu'il n'y a pas de consensus sur la définition de la médiane : selon les sources bibliographiques consultées ou les calculatrices ou les logiciels tableurs utilisés, on peut obtenir des réponses différentes pour la valeur de la médiane d'une série de données. Nous adoptons ici les définitions qui sont préconisées dans le document ressource pour l'enseignement des mathématiques *Organisation et gestion de données au Collège* (Eduscol, 2007) :

Médiane (empirique) : *la série des données est ordonnée par ordre croissant. Si la série est de taille impaire (2n+1), la médiane est la valeur du terme de rang n+1. Si la série est de taille paire (2n), la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et n+1.*

Premier quartile (empirique) : *c'est le plus petit élément q des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % des données sont inférieures ou égales à q.*

Troisième quartile (empirique) : *c'est le plus petit élément q' des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75 % des données sont inférieures ou égales à q'.*

a) Classe à laquelle le premier quartile appartient

Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes : on constate que l'on n'atteint pas 25 % des données rangées par ordre de prix croissant en ne considérant que la première classe, et qu'on dépasse ces 25 % en considérant les deux premières classes. **Le premier quartile appartient donc à la deuxième classe : il est compris entre 300 € et 400 €.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants. Il y a 25 données dans la série, et $\frac{25}{100} \times 25 = 6{,}25$. Le 1er quartile est donc la 7ème valeur de la série des prix rangés par ordre croissant. Or dans la colonne E, on lit que 5 prix sont strictement inférieurs à 300 € (première classe), et que 10 prix sont strictement inférieurs à 400 € (première et deuxième classes réunies). **Le 7ème prix (et donc le 1er quartile) appartient donc à cette deuxième tranche [300 ; 400[.**

b) Classe à laquelle la médiane appartient

Cette classe est appelée parfois « classe médiane ». Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes et chercher la première classe permettant d'atteindre 50 % des données : **on trouve la classe [500 ; 600[.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants et chercher la classe à laquelle la 13ème valeur de la série appartient (25 = 12 x 2 + 1, donc on considère la 13ème valeur de la série) : on constate que **cette valeur appartient à la classe [500 ; 600[.**

c) Classe à laquelle le troisième quartile appartient

Pour la déterminer, on peut s'appuyer sur la colonne donnant les fréquences cumulées croissantes : on cherche la première classe permettant d'englober plus de 75 % des données : on lit dans le tableau que **c'est la classe [700 ; 800[.**

Autre méthode :

On peut aussi s'appuyer sur la colonne des effectifs cumulés croissants. $\frac{75}{100} \times 25 = 18{,}75$. Le 3ème quartile est donc la 19ème valeur de la série des prix rangés par ordre croissant. Or dans la colonne E, on lit que 18 prix sont strictement inférieurs à 700 €, et que 21 prix sont strictement inférieurs à 800 €. **Le 18ème prix (et donc le 3ème quartile) appartient donc à la deuxième tranche [700 ; 800[.**

4) Représentation en diagramme circulaire

a) Association entre les classes et les secteurs qui les représentent dans le diagramme circulaire.

On peut ranger les angles des différents secteurs du graphique par ordre décroissant : pour cela, il suffit de découper ces différents secteurs et de les superposer, ou de les décalquer avant de faire une démarche similaire sur les gabarits ainsi obtenus, ou de les mesurer avec un rapporteur.
Une fois ce rangement fait, il suffit de mettre les secteurs ainsi rangés en correspondance avec les fréquences de chacune des classes également rangées par ordre décroissant.
En procédant ainsi, on obtient les rangements suivants, et les associations qui en découlent :

- Rangement des secteurs par angles au centre décroissant :

Numéros des secteurs	2 et 5	8	4	1, 6 et 7	3 et 9

- Rangement des classes par fréquences décroissantes :

Fréquences	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
Classes associées	[200; 300[[300; 400[	[600; 700[	[700; 800[	[400; 500[[500; 600[[1000; 1100[	[800; 900[[900; 1000[

- Association :

Classes	[200; 300[[300; 400[	[600; 700[	[700; 800[	[400; 500[[500; 600[[1000; 1100[	[800; 900[[900; 1000[
Numéro des secteurs	2 et 5	8	4	1, 6 et 7	3 et 9

b) Calcul de l'angle associé à la classe [600 ; 700[

On s'intéresse à la classe [600 ; 700[dans la série de données. D'après le tableau, la fréquence des éléments de cette classe par rapport à l'effectif total est égale à 0,16.
Or, dans un diagramme circulaire, les angles au centre des secteurs circulaires sont proportionnels aux effectifs représentés (et donc aux fréquences associées). L'angle du secteur circulaire représentant la classe [600 ; 700[est donc égal à $\frac{16}{100} \times 360°$, soit 57,6°.

EXERCICE N°3

1) Conclusions que l'on peut tirer du fait que ni la taille moyenne des garçons, ni la taille moyenne des filles n'ont changé après la prise en compte des deux élèves supplémentaires

Trois cas sont possibles.

Cas 1 : les deux élèves supplémentaires sont des filles

Dans ce cas, puisque la taille moyenne des filles est restée à 150 cm, **la taille moyenne des deux filles ajoutées au groupe est aussi égale à 150 cm** (autrement dit la somme des tailles de ces deux filles est égale à 2 × 150 cm).

En effet :

- la taille moyenne des filles en l'absence des deux élèves est égale à $\frac{S}{n}$ où S désigne la somme des tailles des filles en l'absence des deux élèves, et où n désigne le nombre de filles en l'absence des deux élèves. Cette moyenne est égale à 150 cm, donc $S = 150\ n$ cm.
- la taille moyenne des filles après le retour des deux élèves est égale à $\frac{S + t_1 + t_2}{n+2}$, où t_1 et t_2 désignent les tailles de ces deux élèves. Cette moyenne est aussi égale à 150 cm, donc $\frac{S + t_1 + t_2}{n+2} = 150$ cm, et donc $S + t_1 + t_2 = 150\ (n+2)$cm.
- Ainsi, en injectant la première expression de S dans cette dernière égalité, on obtient :
  $$150\ n \text{ cm} + t_1 + t_2 = 150\ (n+2) \text{ cm}$$
  d'où l'on déduit que : $t_1 + t_2 = 150 \text{ cm} \times 2$, et donc $\frac{t_1+t_2}{2} = 150$ cm.

Remarque :
On peut aussi utiliser la propriété suivante, qui permet d'exprimer la moyenne d'une série statistique en fonction des moyennes de deux sous-ensembles de cette série : si une série statistique est partagée en deux sous-groupes d'effectifs respectifs N_1 et N_2, et de moyennes respectives m_1 et m_2, alors la moyenne de la série complète est $\frac{N_1 m_1 + N_2 m_2}{N_1 + N_2}$.

Ici, on partage la série statistique des tailles des filles en deux sous-groupes :

- *le sous-groupe des tailles des filles en l'absence des deux élèves, d'effectif inconnu N, et de moyenne 150 cm ;*
- *le sous-groupe des deux élèves, d'effectif 2 et de moyenne inconnue m cm.*

La propriété rappelée ci-dessus permet d'exprimer la taille moyenne des filles après le retour des deux élèves de la manière suivante : $\frac{150N+2m}{N+2}$ cm. *Or on sait que cette taille moyenne est égale à 150 cm.*
On en déduit que : $\frac{150N+2m}{N+2} = 150$, *puis que* $150N + 2m = 150(N+2)$, *puis que* $2m = 300$. *Ainsi,* $m = 150$.
On retrouve alors la même conclusion que ci-dessus : dans ce premier cas, la taille moyenne des deux filles est égale à 150 cm.

Cas 2 : les deux élèves supplémentaires sont des garçons

Dans ce cas, par un raisonnement similaire à celui qui vient d'être fait, **la taille moyenne des deux garçons ajoutés au groupe est égale à 160 cm** (autrement dit la somme des tailles de ces deux garçons est égale à 2×160 cm).

Cas 3 : l'un des deux élèves supplémentaires est un garçon et l'autre élève est une fille

Dans ce cas, **la taille du garçon est 160 cm et la taille de la fille est 150 cm**. Justifions-le pour cette dernière (le raisonnement serait le même pour le garçon) :

- la taille moyenne des filles en l'absence de cette élève est égale à $\frac{S}{n}$ où S désigne la somme des tailles des filles en l'absence de cette élève, et où n désigne le nombre de filles en l'absence de cette élève. Cette moyenne est égale à 150 cm, donc $S = 150\ n$ cm.
- la taille moyenne des filles après le retour de cette élève est égale à $\frac{S+t_1}{n+1}$, où t_1 désigne la taille de cette élève. Cette moyenne est aussi égale à 150 cm , donc $S\ + t_1 = 150\ (n+1)$cm.
- Ainsi, en injectant la première expression de S dans cette dernière égalité, on obtient :
$$150\ n \text{ cm} + t_1 = 150\ (n+1) \text{ cm}$$
d'où l'on déduit que : $t_1 = 150$ cm.

Remarque :
La propriété rappelée en remarque lors du traitement du premier cas peut s'appliquer également ici. On partage la série statistique des tailles des filles en deux sous-groupes :

- *le sous-groupe des tailles des filles en l'absence de la fille supplémentaire, d'effectif inconnu N, et de moyenne 150 cm ;*
- *le sous-groupe constitué uniquement de cette élève, d'effectif 1 et dont la moyenne – inconnue – est égale à la taille de cette élève (notée t cm dans la suite).*

On peut exprimer la taille moyenne des filles après le retour de cette élève de la manière suivante : $\frac{150N+t}{N+1}$ cm.
Or on sait que cette taille moyenne est égale à 150 cm.
On en déduit que : $\frac{150N+t}{N+1} = 150$, *puis que* $150N + t = 150(N+1)$, *puis que* $t = 150$.
On retrouve alors la même conclusion que ci-dessus : dans ce troisième cas, la taille de la fille supplémentaire est égale à la moyenne de la taille des autres filles, soit 150 cm.

2) Étude de la validité des conclusions proposées

a) « Zénon est toujours le plus petit garçon.»

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

L'affirmation peut être vraie, par exemple dans le cas suivant : les deux élèves absents le premier jour sont des garçons, de taille respective 158 cm et 162 cm. La somme des tailles des deux élèves est donc égale à 320 cm, soit 2 x 160 cm : la moyenne des tailles des garçons est donc bien inchangée, et Zénon, du haut de ses 130 cm, est resté le plus petit des garçons.

Elle peut également être fausse, par exemple dans le cas suivant : les deux élèves absents le premier jour sont des garçons, de taille respective 128 cm et 192 cm. La somme des tailles des deux élèves est égale à 320 cm, soit 2 x 160 cm : la moyenne des tailles des garçons est donc bien inchangée, mais Zénon n'est plus le plus petit des garçons (128 cm < 130 cm).

b) « Un des élèves est un garçon, l'autre est une fille. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Il suffit de considérer l'un des deux autres cas ci-dessus (question 1) pour voir que l'affirmation peut être fausse. Elle pourrait cependant être vraie, dans le cas où les deux élèves absents le premier jour seraient un garçon de taille 160 cm et une fille de taille 150 cm (question 1).

c) « Les deux élèves ont la même taille. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Il suffit de considérer l'un des exemples donnés ci-dessus (questions 1 et 2.a)) pour voir que cette affirmation peut être fausse. Elle pourrait cependant être vraie, dans le cas où les deux élèves absents le premier jour seraient deux garçons de taille 160 cm ou deux filles de taille 150 cm.

d) « La taille moyenne de l'ensemble des élèves n'a pas changé. »

Rien ne permet de l'affirmer à partir des informations disponibles.

Considérons par exemple le cas d'une classe **avec le même nombre de filles que de garçons** (quand il n'y a aucun absent).

Si les deux élèves absents le premier jour sont un garçon de taille 160 cm et une fille de taille 150 cm, alors la taille moyenne de l'ensemble des élèves reste inchangée d'un jour à l'autre, et vaut 155 cm.

En revanche, si les deux élèves absents le premier jour sont deux garçons de taille 160 cm, alors après le retour des absents, la taille moyenne des élèves de la classe est 155 cm. Mais la veille, la classe comportait plus de filles que de garçons : la taille moyenne des élèves de la classe était alors plus proche de la taille moyenne des filles (150 cm) que de la taille moyenne des garçons (160 cm), et était strictement inférieure à 155 cm.