IREM de Franche-Comté

Un pour dix, dix pour un !

Numération des nombres entiers et décimaux aux cycles 2 et 3 sur l'abaque en couleurs

Bernard Bettinelli

En collaboration avec le groupe « École primaire »

Myriam Borey-Demortier
Lionel Chambon
Ludivine Convercy
Jean-Marie Dornier
Philippe Le Borgne
Johan Prédine
Sylvain Roussey
Etienne Tufel

Sommaire

Préface

L'approche des quantités et la construction du nombre à l'école maternelle, la connaissance des nombres entiers et du calcul au cycle 2 et la connaissance des fractions et des nombres décimaux au cycle 3 sont des objectifs majeurs de l'école primaire.

La brochure de l'IREM de Franche-Comté « Un pour dix, dix pour un ! » propose aux enseignants des classes de cycle 2 et de cycle 3 des matériels et des activités pour aider leurs élèves dans ces constructions de connaissances.

Cette brochure se compose de deux parties : une pour le cycle 2, l'autre pour le cycle 3. Elles peuvent être lues de façon indépendante. Cependant, les collègues de l'école primaire ont tout intérêt à lire les deux parties afin de mieux comprendre et s'approprier la méthode proposée. Celle-ci s'appuie sur des manipulations des élèves leur permettant de se constituer des images mentales qu'ils pourront ensuite évoquer pour s'abstraire du support.

La partie cycle 2 se compose de 3 chapitres : « découverte des nombres », « numération de position » et « numération de position et opérations arithmétiques ».

La partie cycle 3 se compose de 8 chapitres : « présentation de l'abaque en couleurs », « opérations arithmétiques », « multiples », « fractions », « nombres décimaux », « pourcentages », « numérations anciennes » et « problèmes financiers ».

Dans chacun de ces chapitres, des situations d'apprentissages pour les élèves et leur mise en œuvre sous la forme de progression sont proposées aux enseignant(e)s.

Ces situations sont également accompagnées par de nombreuses ressources (supports, dés, planches de jeux de lotos, cartes numérales, ...) et celles-ci ont été adaptées en vue d'être utilisées en classe sur un T.B.I. à l'aide d'un logiciel comme Openboard ou OpenSankore. Le lecteur se référera à l'organigramme proposé en annexe pour trouver les ressources dont il aura besoin.

Cette brochure intéressera donc tout particulièrement les enseignant(e)s des classes des cycles 2 et 3 de l'école primaire, mais aussi des collègues de cycle 4 (notamment pour les chapitres « multiples », « fractions », « nombres décimaux », « pourcentages », et « problèmes financiers »).

Pour accompagner les élèves et les rendre actifs, de nombreux matériels et jeux sont présentés et utilisés tout au long de la progression envisagée : objets du quotidien, calculi[1], cubes « unité » et barres de « cinq », spirales de nombres, bandes nombres, tableaux de nombres, étiquettes numérales, carton de lotos, abaque en couleurs, …

Les élèves peuvent apprendre et agir en manipulant ces matériels dans les activités individuelles ou collectives proposées.

Ces jeux et matériels permettent ainsi une accumulation d'expériences qui, pour être disponibles par la suite, sont décrites dans l'action puis évoquées après avoir été conduites en vue de parvenir à la constitution d'images mentales.

En effet, l'un des choix forts de cette brochure, repose sur le fait que ce n'est pas la manipulation du matériel proposé qui constitue l'activité mathématique, mais les multiples questions qu'elle engendre.

Au fil de cette brochure, ce sont ces manipulations et ces anticipations en alternance qui vont permettre aux élèves de construire les nombres, de découvrir leurs propriétés, de « toucher du doigt » nos numérations écrite et orale et leurs caractéristiques, de rendre ces nombres et ces numérations « opératoires » en découvrant le calcul à l'aide des quatre opérations enseignées à l'école primaire (addition, soustraction, multiplication et division), de donner du sens aux règles qui fondent nos techniques de calculs (en ligne ou posées), de découvrir les fractions et les nombres décimaux.

1 Voir page 22

La lecture de cette brochure permettra aux enseignants et aux lecteurs curieux de découvrir quelques points importants à préciser :

- Les matériels proposés ont la particularité de pouvoir suivre les élèves de la classe de CP (ou même de GS) à la classe de CM2. Ainsi les enseignants peuvent accompagner leurs élèves avec le même matériel (abaque en couleurs) pour travailler avec les nombres entiers puis avec les nombres décimaux.

- Les matériels choisis (cubes « unité » et barres de « cinq ») sur l'abaque en couleurs renforcent le rôle et l'importance du « pivot à 5 » dans la construction des nombres (comme les cinq doigts d'une main dans l'histoire de l'humanité…), simplifient les manipulations et réduisent le rôle de la mémoire. La référence au « dix » vu comme un « cinq et cinq » (et réciproquement) est permanente dans la brochure. Cela se traduit notamment dans les procédures de calculs en ligne envisagées avec les élèves.

- Ces matériels doivent pouvoir être utilisés par tous les élèves d'une classe de l'école primaire. Ils sont donc faciles à créer pour les enseignant(e)s : abaques à photocopier et à plastifier prêts à l'emploi ; cubes et barres découpés dans une plaque de medium (mdf) dont une face a été peinte en noir. Le coût est donc peu important pour équiper tous les élèves d'une classe ou d'une école.

- Le lien entre l'addition et la multiplication est renforcé : le rôle joué par la duplication (action de doubler) y est pour beaucoup et des moments de la progression y sont consacrés au cycle 2 comme au cycle 3.

- Les opérations arithmétiques sont toutes illustrées à l'aide du matériel avant de parvenir avec les élèves à une forme symbolique en écriture chiffrée. Ainsi, les propriétés du calcul en ligne peuvent être illustrées. Mais ce sont aussi les techniques opératoires posées de toutes les opérations qui peuvent être progressivement mises en place à l'aide de ce matériel :

  - pour le cycle 2, les techniques posées de l'addition, de la soustraction (avec notamment des techniques nouvelles explicitement liées à l'abaque en couleurs) et de la multiplication,

  - pour le cycle 3 une technique posée de la division, basée sur la duplication, compréhensible par les élèves (disposition à l'anglo-saxonne).

- La simplicité de la multiplication par 10, 100, … repose sur une action de glissement des éléments représentant les nombres, commune pour les nombres entiers et décimaux. Et, par la suite, l'action inverse permettra de les diviser par 10, 100, …

- Le travail proposé aux collègues de cycle 3 pour l'enseignement des nombres décimaux se fait dans la continuité du travail proposé sur les nombres entiers grâce à l'abaque en couleurs.

- L'histoire des nombres est illustrée à travers de multiples références historiques (rôle des doigts de la main dans l'histoire des nombres, groupements récursifs, apparition des nombres décimaux en Occident, abaque à jonchets, histoires des numérations écrites (babylonienne, maya)).

- Pour les mises en commun à conduire au tableau avec la classe, deux solutions sont proposées : des bandes et carrés plats munis de bandes magnétiques adhérant au tableau ou une présentation sur T.B.I. à l'aide des logiciels Openboard ou OpenSankore avec une "banque de cubes et barres" fournie.

La brochure de l'IREM de Franche-Comté « Un pour dix, dix pour un ! » présente ainsi une proposition nouvelle fondée sur l'engagement des élèves (et des enseignant(e)s...) dans de véritables « expériences d'apprentissages » à l'aide de l'abaque en couleurs.

Cette brochure a pu être réalisée grâce à l'IREM de Franche-Comté et au travail de Bernard Bettinelli accompagné par une équipe de formateurs (enseignants chercheurs, enseignants du second degré, enseignants du premier degré). Les situations proposées ont été – pour beaucoup d'entre elles – testées et mises en œuvre dans les classes de l'école Pablo Picasso de Vesoul (de la GS au CM2). Que tous les collègues de cette école en soient remerciés ainsi que leurs élèves !

Le groupe « École Primaire » de l'IREM de Franche-Comté

Numération

Avec l'abaque en couleurs

au cycle 2

Nombres et histoire

Un des grands objectifs de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire consiste à donner aux élèves la connaissance des nombres. Celle-ci leur permet de dénombrer des collections, mais surtout d'agir sur les situations par le calcul. Car les nombres forment un univers avec ses lois qui sont celles de la logique qu'on ne maîtrise qu'en les comprenant.

L'histoire des nombres, comme nous le montrent les magnifiques ouvrages de Georges Ifrah[1], remonte à la nuit des temps. Les peuplades d'Australie ou des îles du Pacifique, qui ont gardé leur système ancien disposent parfois d'un ensemble de nombres fini et très limité.

La découverte la plus extraordinaire est celle d'un groupement récursif qui permet de considérer chaque groupe d'objets comme un nouvel objet qui pourra faire lui-même partie d'un nouveau groupe.

Et le fait que l'élaboration de systèmes aux quatre coins du monde ancien, sans les communications actuelles, s'est construite le plus souvent sur la base de groupes de dix objets, incite à penser que les premiers langages numériques ont été gestuels et que nos mains, avec leur facilité à montrer plus ou moins de doigts levés - le plus grand étant dix – durent se plier à une autre gestuelle pour continuer : montrer successivement les deux mains ouvertes pour désigner vingt, trente, … Les groupes de dix sont comptés comme des objets et le système s'ouvre à la capacité de représenter tous les nombres naturels.

Un autre groupe a été utilisé chez les peuples d'Amérique centrale (Aztèques, Mayas, …) mais aussi chez les Celtes : le groupe de vingt dont les réminiscences dans des nombres comme « quatre-vingt treize » compliquent l'apprentissage des nombres chez nos enfants. Mais n'est-ce pas une preuve supplémentaire que nos doigts ont été les porteurs des nombres ?

La gestuelle des nombres s'est prêtée à une représentation des cinquante premiers (environ). Pour représenter des nombres plus grands, les hommes ont inventé des écritures. Les Egyptiens, par exemple, marquaient d'un à neuf traits verticaux les nombres de 1 à 9. puis, avec des « U renversés », répétés jusqu'à neuf fois, les dizaines. De même, un dessin d'oreille représentait une centaine et un lotus, un millier. Ils firent des calculs savants avec cette écriture, lourde à manipuler.

Un grand pas fut franchi en Grèce, en inventant un symbole unique pour représenter un nombre, qui est par essence multiple. 1 fut α ; 2, β; 3, γ… 10 fut ί ; 20, κ ; 30, λ… Les écritures sont devenues courtes, mais ont rendu la pratique des calculs encore plus complexe. (Ne parlons pas des Latins, ce fut l'impasse complète !)

Le déclencheur d'une formidable découverte a été trouvé par les savants chinois qui ont eu l'idée de pratiquer leurs calculs sur un quadrillage sur lequel ils posaient des allumettes en ivoire, appelées jonchets, toutes identiques, mais qui prenaient la valeur 1, 10 ou 100 selon la case sur laquelle elles étaient posées. Et cela a produit des techniques efficaces. L'abaque à jonchets fut remplacé par le boulier, avec lequel nos techniques écrites européennes ne peuvent rivaliser.

1 L'histoire universelle des chiffres ; les nombres ou l'histoire d'une grande invention.

L'Inde, puis le monde arabe, ont transformé cet essai par l'écriture et inventé un système révolutionnaire : neuf symboles pour les nombres de un à neuf, et un point, qui grossira en zéro, pour représenter tous les nombres, aussi grands soient-ils !

Et nous, Européens, avons dû attendre que les Arabes conquérants envahissent l'Espagne pour comprendre le génie d'une telle écriture. Léonard de Pise, dit Fibonacci, grand voyageur, a écrit en 1202, un livre, le Liber abaci[4], dans lequel il démontre qu'avec les dix symboles que nous utilisons toujours, tous les nombres peuvent être écrits.

Ce fut l'explosion : les techniques écrites posées des différentes opérations, ainsi que d'autres aujourd'hui oubliées, furent rapidement créées. Et surtout, cette écriture permit au savant belge Simon Stevin d'inventer les nombres décimaux en 1580.

Pour essayer de permettre à tous les enfants de rentrer dans cette logique, j'ai conçu un outil sur lequel ils pourront s'appuyer dans cette quête et en découvrir progressivement les nombreux avantages. Le but de l'utilisation de cet outil – l'abaque en couleurs – est de porter la numération[3] de position, c'est-à-dire la représentation des nombres par des chiffres, les mêmes pour désigner des unités, dizaines, centaines, milliers, ...

J'aimerais mettre cet outil au service des enfants, afin qu'ils comprennent et maîtrisent leurs calculs par des manipulations conscientes qui se complexifieront avec le temps, mais sans jamais être remises en cause. D'autres méthodes peuvent donner, en apparence, des résultats plus rapides. Mais l'aversion d'une grande part de nos concitoyens pour les mathématiques, n'est-elle pas le reflet d'un apprentissage auquel ils se sont soumis, sans réelle compréhension ?

L'abaque en couleurs est un outil, c'est-à-dire un objet qu'on prend quand on en sent le besoin, puis qu'on abandonne quand on est capable de s'en passer… et qui va pouvoir servir pour un autre apprentissage. Parce que, s'il est adapté à l'enseignement qu'on souhaite transmettre, il doit pouvoir s'adapter à son évolution. S'il représente correctement les 100 premiers nombres, il sera toujours adapté pour les 10 000 premiers nombres, ou même les 1 000 000 000. Et quand viendra le temps de découverte des nombres décimaux, il sera encore là pour les intégrer comme une extension des nombres entiers.

Ce travail ne se substitue pas aux autres apprentissages numériques, mais permet de les adapter à tous les nombres. En particulier, ce qu'on nomme « sens des opérations » doit être introduit ainsi que leurs spécificités avant d'être exécutées sur l'abaque.

Par exemple, la multiplication est, par essence, addition répétée. La commutativité de cette opération n'est pas accessible dans sa définition (contrairement à l'addition) et elle se visualise par la mise en rectangle et par une double lecture par lignes ou par colonnes. Cette propriété n'est pas montrée ici, parce qu'elle fait partie de l'étude de la multiplication, mais exploitée car elle permet une grande économie dans l'apprentissage des tables de multiplication.

Une autre qualité des opérations qu'il convient de mettre en relief et d'exploiter très tôt, est la réversibilité qui permet de revenir au point de départ d'une action par une action associée : c'est ainsi qu'une addition se retourne en soustraction, et inversement ; que la duplication se retourne en partage en deux ; que la multiplication se retourne en fractionnement et que la multiplication par 10, atout majeur de la numération de position, se retourne en partage en 10.

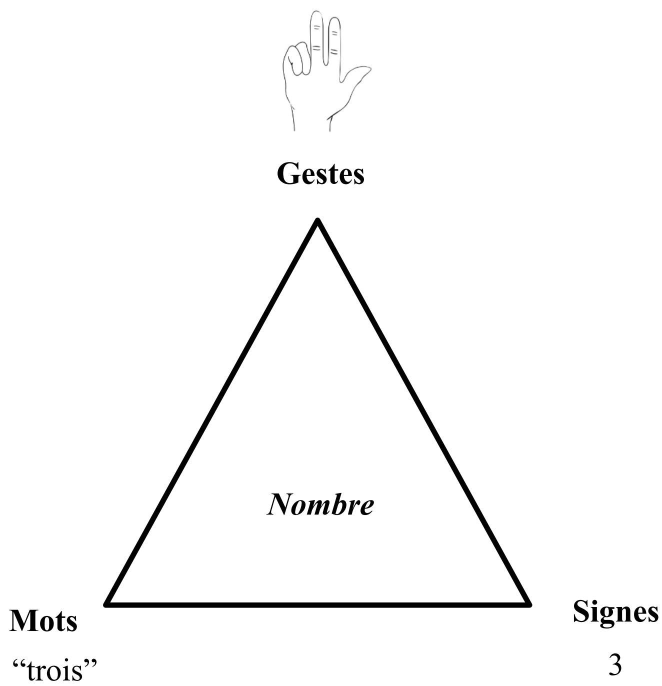
---

3 Chercher sur Internet : Fibonacci - maths-et-tiques

4 La numération n'est pas l'étude des nombres, mais celle des représentations des nombres, gestuelle, orale, écrite,

Découverte des nombres au cycle 2

Les nombres apparaissent aux enfants de maternelle sous trois formes : orale, gestuelle et écrite. Chacune donne une information sur le nombre, mais n’en est qu’un aspect.



Ce schéma essaie de traduire le fait que, lorsque la conscience du nombre est réalisée, chacun peut l’observer en totalité à partir d’un des trois points de vue. Le chemin à parcourir pour un enfant sera cette prise de conscience, qui se fonde sur quelques gestes que nos dix doigts peuvent effectuer, de quelques mots brefs qui traduisent ces gestes : “un”, “deux”, “trois”,…, “dix” et de dix symboles inventés en Inde, il y a 1500 ans : 1, 2, 3,…, 0.

La suite des noms des nombres

1 - Enumérer les noms (jusqu'à "cent")

Le premier apprentissage des nombres est la découverte de leurs noms oraux par la comptine. Il s'agit d'énoncer les noms dans leur ordre naturel et d'en retenir la suite de mémoire.

Cette comptine est le seul ensemble de mots de la langue qui s'énonce toujours dans le même ordre.Au début (jusqu'à "vingt") on ne perçoit pas de permanence et chacun doit se "payer" cette suite de mots arbitraires.

A partir de "vingt", tout change, le mot "vingt" se répète et s'associe aux neuf mots déjà connus : "un, deux, trois,…, neuf". Puis arrive un nouveau mot "trente". Et le phénomène se répète.

Autrement dit, il faut apprendre dix-neuf mots pour atteindre "dix-neuf", vingt pour arriver à "vingt-neuf", ..., Vingt-quatre pour "soixante-neuf". C'est de plus en plus économique.

Mais, en France, le système se dérègle après "soixante-neuf" car c'est la suite des dix-neuf premiers mots qu'il faut associer à "soixante" avant d'arriver à "quatre-vingt" et recommencer en lui associant cette grande suite.

Ce processus peut sembler économique puisque tous les mots utilisés de "soixante-et-un" à "quatre-vingt-dix-neuf" sont connus. Mais quelle complexité inutile !

Il est vrai que pour l'énumération orale, ceux qui proposent d'appeler "petite suite" la suite de mots "un, deux,…, neuf" et grande suite : "un, deux,…, dix-neuf" ont trouvé un truc pratique :

- après "vingt", "trente", "quarante" et "cinquante" on colle la petite suite
- après "soixante" et "quatre- vingt", on colle la grande suite.

J'avais proposé une autre approche :

Pour les nombres de 70 à 99, j'ai toujours proposé d'entendre "cinquante", seul régulier de la suite des dizaines, comme "cinq" **ante** et de faire inventer provisoirement "sept" **ante**, "huit" **ante** et "neuf" **ante** pour libérer au maximum les activités de lecture, d'écriture et de décomposition. (Toujours partir de cette grande partie compréhensible et maîtrisable par les enfants pour faire jouer les nombres, et garder pour plus tard les inévitables "scories" de langage.)

2 - Maîtriser la suite

Deux actions seront proposées sur la partie intégrée de la suite :

- Enumérer les mots à partir de l'un d'eux (surcompter)
- Enumérer les mots à rebours à partir de l'un d'eux (décompter)
- Compter les objets (dénombrer)

L'attribution d'un mot de la comptine à chaque objet d'un groupe demande de l'attention : ne pas en oublier, ne pas compter deux fois un objet.

Cette action est plus simple avec des objets manipulés, qu'on peut mettre de côté au fur et à mesure qu'on les compte, ce qui facilite leur énumération. Elle est plus complexe avec les objets dessinés par lesquels il faut faire passer une ligne imaginaire les croisant tous.

Le français, coutumier des imprécisions de langage, appelle "compter" aussi bien le fait d'énumérer les mots de la comptine que de dénombrer une collection.

La suite des écritures des nombres

Les jeux de société du type du jeu de l'oie sont très anciens et sont un moyen intéressant de faire voir l'écriture des nombres. Combinés avec des déplacements de pions, ils permettent d'égrener la comptine orale en associant les mots aux écritures. Plusieurs instruments sont utiles pour compléter cette approche, comme le "centimètre de couturière".

3 - Spirale des nombres : découverte des écritures

- A la manière du jeu de l'oie, on peut placer son pion sur une case donnée (oralement). Si on ne connaît pas l'écriture d'un nombre, on peut se référer à d'autres, qui sont connus et "surcompter" c'est-à-dire dire la suite à partir du nombre connu en déplaçant son pion.

C'est l'occasion d'apprendre à écrire les dix symboles qui permettront d'écrire tous les nombres.

Cette suite de symboles écrits est plus simple : régulière dès le départ.

- Neuf symboles (appelés chiffres) repèrent les nombres de 1 à 9 ; un symbole nouveau (0) est associé à 1 pour écrire "dix". Puis on retrouve les neuf chiffres associés à 1, puis 20. Et la progression suit cette règle jusqu'à 99, sans exception.

1 - Sauts de cases

- On peut placer son pion sur une case et le faire sauter de n cases, comme les « petits chevaux », mais vers l'avant ou vers l'arrière et dire le nom de la case d'arrivée.

- Et même traduire oralement ces mouvements : « 13 plus 4 égale 17 » ; « 17 moins 4 égale 13 ».

(On trouve des dés dans les magasins de jeux avec les nombres de 1 à 8, 1 à 12, 1 à 20 qui donnent l'occasion d'expérimenter ces sauts. On en trouve aussi avec des faces blanches sur lesquelles on peut placer des symboles, par exemple : +1, +2, +3, 0, -1, -2, qui font aléatoirement avancer ou reculer son pion.

On peut aussi se placer sur une case de nom donné et placer un drapeau sur une case à atteindre. Il faut alors compter les pas en avant ou en arrière jusqu'au drapeau.

2 - Sauts de puce

- On peut faire sauter son pion de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 et de 5 en 5 sur la spirale et énoncer les noms des nombres sur lesquels on saute :

2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 …   3 ; 6 ; 9 ; 12 …   4 ; 8 ; 12 ; 16 ...   5 ; 10 ; 15 ; 20 ...

Cette activité est à répéter pour que ces suites soient mémorisées petit à petit, car elles contiennent les résultats fondamentaux dont on se servira plus tard, et qu'on appelle les tables de multiplication.

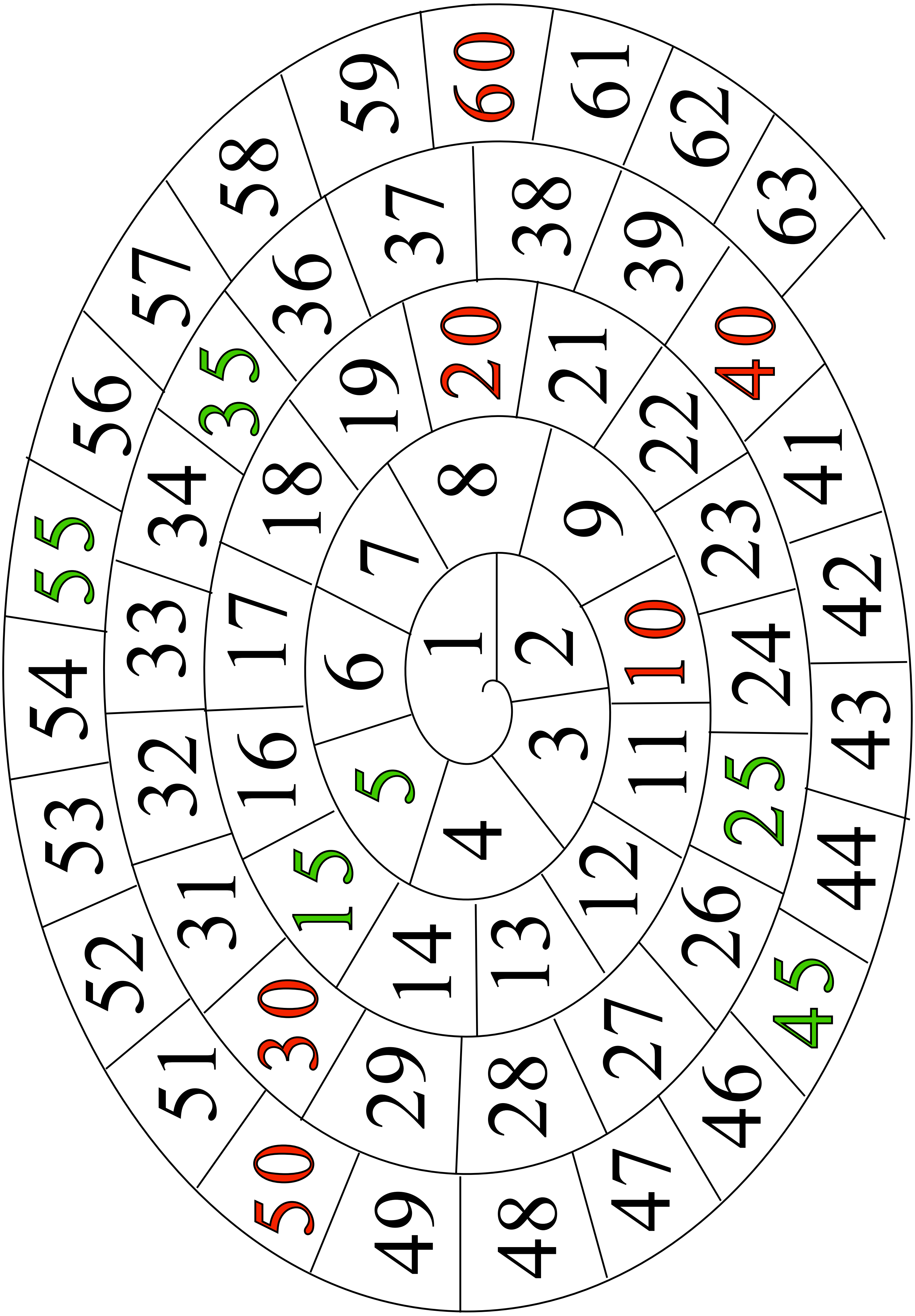
Le modèle de spirale proposé page 12 est inversé par rapport au jeu d'oie, car la suite des nombres est infinie et la spirale se déploie vers des nombres de plus en plus grands. Il est utile de faire colorer les multiples de 10 d'une couleur et les nombres se terminant par 5 d'une autre couleur.

4 - Bandes numériques verticales

Les bandes de la page 13 sont formées de dix cases et peuvent se coller par une languette pour former une bande de plus en plus longue.

Les exercices sont semblables à ceux de la spirale ; mais on peut agrandir progressivement la bande. La grande nouveauté est donnée par les sauts de 10 à 11, 20 à 21, ...

Sauter d'un nombre à un d'une autre bande va demander de passer par 10, 20, ...


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63

1	11	21	31	41
2	12	22	32	42
3	13	23	33	43
4	14	24	34	44
5	15	25	35	45
6	16	26	36	46
7	17	27	37	47
8	18	28	38	48
9	19	29	39	49
10	20	30	40	50

Doigts et nombres

Qui serait 10, sans nos doigts ?

Je ne connais pas d'autre raison au développement mondial du système décimal, de la nuit des temps à aujourd'hui, que le fait que nous avons dix doigts et que les nombres se transmettent très facilement par gestes, sans mots ni écritures.

Il est important d'exploiter cet outil numérique essentiel que sont nos dix doigts. Ils vont nous permettre au départ - et très souvent par la suite - de faire connaissance avec la famille des nombres de 0 à 10.

- Nous disposions de deux langages, l'un oral pour dire les nombres, l'autre écrit pour en garder la trace. Les doigts en offrent un troisième : gestuel.

1 - Triple langage pour les nombres jusqu'à 10

Passer d'une forme aux deux autres est naturel. En classe, la forme orale est plus difficile à maîtriser, car un enfant qui dit rapidement le nom d'un nombre empêche les autres de faire leur démarche. Demander de montrer sur les doigts un nombre écrit, se fait en silence à la manière de la méthode Lamartinière.

2 - Jouer avec les nombres jusqu'à 10

Le maître dit un nombre de "un" à "neuf" et les élèves le montrent. Il dit « plus un ». Les élèves lèvent un doigt et disent ou écrivent le nombre. Puis de même « plus deux » , « plus trois »…

- De même, le maître dit un nombre de "deux" à "dix" et dit « moins un ». Puis de même « moins deux » , « moins trois »… Et si tu pars de "trois" et agit « moins trois » ? On invente un curieux nombre : « zéro » ; curieux parce qu'il n'y a plus rien à compter !

- Le maître dit un nombre de "un" à "cinq" et les élèves le montrent. Il dit « deux fois » et les élèves copient en symétrie leur figure de doigts et disent ou écrivent le nombre obtenu.

« Pour montrer un nombre, je plie certains doigts. Si je montre "trois", je cache quel nombre ? »

45 façons de montrer "deux" (ou "huit"), 120 de montrer "trois" (ou "sept"). Toutes sont acceptables. On peut même chercher à en avoir tous des différentes !

3 - Jouer avec les nombres jusqu'à "cinquante-neuf"

Pour montrer "onze" ou "douze", il faut trouver une nouvelle gestuelle qui revient, en général, à montrer ses deux mains ouvertes, puis les refermer pour montrer "un" ou "deux" (ce que j'appelle « lancer un dix »).

- Les jeux du paragraphe précédent se poursuivent jusqu'à vingt.

- Le maître propose un nouveau jeu : il lance successivement plusieurs dix et demande aux enfants de dire le nombre montré. Inversement, le maître dit ou écrit un multiple de dix et demande aux enfants d'en montrer les gestes. C'est une nouvelle suite de mots qui apparaît : "dix", "vingt", "trente", "quarante", "cinquante".

- Pour montrer "vingt-et-un", les enfants doivent lancer deux "dix", puis montrer un doigt. Et de même jusqu'à "quarante".

- « Montrez "trente-deux". Et successivement "plus un", "plus deux", "moins un", "moins deux". »

Les enfants doivent prendre conscience que seuls les doigts levés bougent (les passages de retenues seront vus plus tard). Les lancers de "dix" ne changent pas.

- Une autre idée peut germer dans ce jeu : il suffit d'un copain qui compte les "dix" pour qu'à deux, les nombres soient montrés : l'un porte les "uns", l'autre les "dix".

- Et si, dans ce nouveau jeu, on dit : "plus dix" ou "moins dix" ?

Lecture et écriture des nombres

Le projet de ce chapitre est d'enseigner l'apprentissage de la lecture et de l'écriture chiffrées des nombres. Pour pouvoir lire un très grand nombre : 23 849 207, par exemple, il faut savoir lire les tranches de trois chiffres qui sont composées de centaines, dizaines et unités, et d'insérer les mots "mille", "millions", "milliards" dans les blancs. Ce qui signifie que la base de cet apprentissage est celle des séries de trois chiffres. L'ordre numérique n'a pas d'importance dans ce processus : les noms des centaines sont parfaitement réguliers et beaucoup plus simples que ceux des dizaines.

Suivre l'idée préconçue que les nombres à étudier au C. P. sont les nombres de 0 à 100 me paraît une erreur. L'activité suivante, basée sur les cartes des pages 16 et 17 est une activité de lecture. Son domaine naturel d'étude est l'ensemble des nombres de 1 à 999 et c'est ainsi qu'il faut l'envisager dès le C. P.

A l'aide de ces cartes, que j'appelle **cartes numérales**, les enfants doivent apprendre les noms écrits et oraux des 16 nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 200, et les repérer sur les cartes. Les éléments inconnus : 300, …, 900 sont faciles à deviner en les comparant avec 200. (Pour 100, l'usage veut, qu'en français, on dise "cent" et non "un cent", comme en anglais. Le maître doit donner cette convention.) Mettre d'emblée les centaines, dès le C. P. n'est pas compliquer la tâche, mais plutôt l'éclairer.

Les enfants peuvent alors former tous les nombres de 1 à 999 par superposition de 1, 2 ou 3 cartes de taille décroissante, la bande orange, à droite de chacune, servant de repère. Mais à cause du choix historique (catastrophique) fait en France pour les nombres de 70 à 99, ceux-ci seront traités séparément, et plus tard.

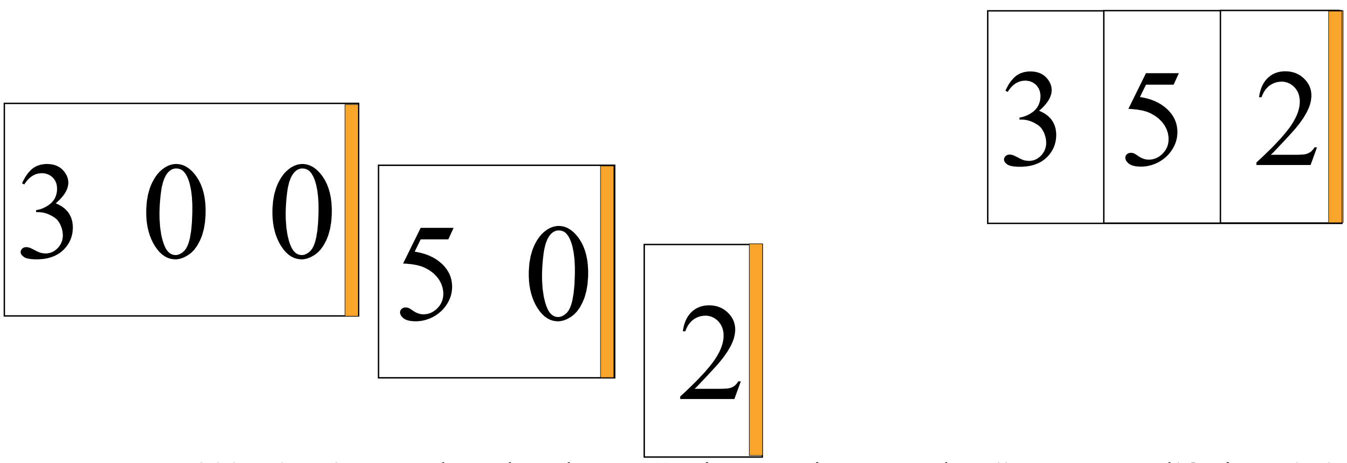
I - Nombres n'incluant pas "onze", ..., "seize" ; "soixante-dix", … , "soixante-dix-neuf" ; "quatre-vingt-dix", … , "quatre-vingt-dix-neuf" et leurs composés

La lecture et l'écriture de tous les nombres, exception faite des "onze", "douze", … "seize", "soixante-dix", "quatre- vingt-dix", … et de leurs composés, ne posent aucun problème.

1 – Faire explorer les 27 cartes des pages 16 et 17 en les séparant par largeur. Les enfants connaissent les noms des neuf cartes étroites : "un", "deux", … "neuf" et de certaines de la bande médiane. Ils devront apprendre les autres ("soixante-dix" et "quatre-vingt-dix" laissés de côté). Pour les bandes larges, il suffit de donner le nom de l'une d'elles (sauf "cent") pour faire deviner les autres.

2 - Le nom d'un nombre à trois chiffres (sans 0) est prononcé, par exemple « trois-cent-cinquante-deux ». Chacun extrait les trois cartes dont il a entendu le nom.

Faire repérer la bande orange à droite de chaque carte et superposer les cartes, de la plus large à la plus étroite, associant les repères oranges. Demander de lire cet assemblage.



Les cartes 300, 50 et 2, entendues dans le mot "trois-cent-cinquante-deux" composent l'écriture 352.

1	1 0	1 0 0
2	2 0	2 0 0
3	3 0	3 0 0
4	4 0	4 0 0
5	5 0	5 0 0

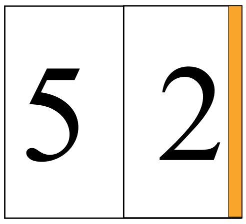
6	6 0	6 0 0
7	7 0	7 0 0
8	8 0	8 0 0
9	9 0	9 0 0

2 - Proposer aux enfants de composer, de même, n'importe quelle combinaison de trois et d'en lire et écrire le résultat.

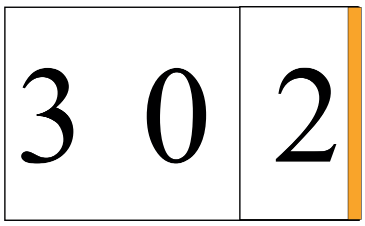
3 - Le maître **écrit** un nombre à trois chiffres (sans zéro) et fait choisir les trois cartes qui permettent d'en construire l'écriture par superposition.

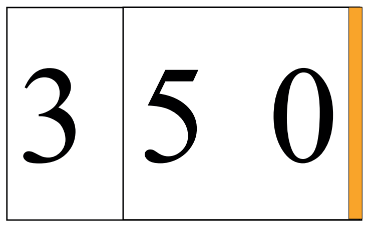
Faire étaler les trois cartes et énoncer, puis écrire une égalité du type : 352 = 300 + 50 + 2.

4 - Le maître **dit** le nom d'un nombre à deux chiffres, « cinquante-deux », et fait extraire les deux cartes dont on a entendu le nom. Le faire écrire.



5 - Le maître **dit** un nombre à trois chiffres avec un zéro (« trois-cent-deux », « trois-cent-cinquante » et fait choisir les deux cartes qui permettent d'en construire l'écriture. En les superposant, un zéro de la carte inférieure est resté visible et fait partie de l'écriture du nombre :





"Trois-cent-deux" : 300 + 2 = 302 "Trois-cent-cinquante" : 300 + 50 = 350

6 - Le maître **écrit** un nombre à trois chiffres avec un zéro et fait lire ce nombre, d'abord en le construisant avec les cartes, puis directement, lorsque cette construction est intégrée.

7 - Montrer sur les doigts les "cents", les "dix" ou les "uns" qui composent l'écriture.

On peut inventer une nouvelle écriture :

300 = 3x 100 50 = 5x 10 2 = 2x 1

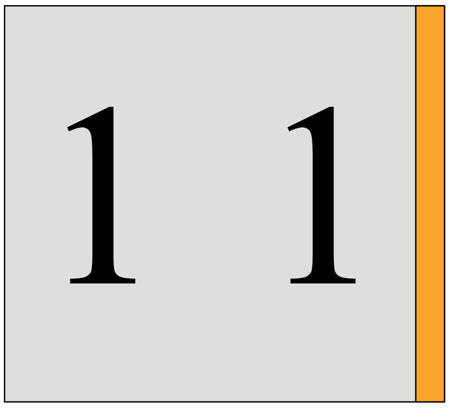
Je dis « trois fois », « cinq fois » ou « deux fois » et je colle volontairement une croix au nombre pour indiquer le nombre d'exemplaires du nombre qui suit en se détachant.

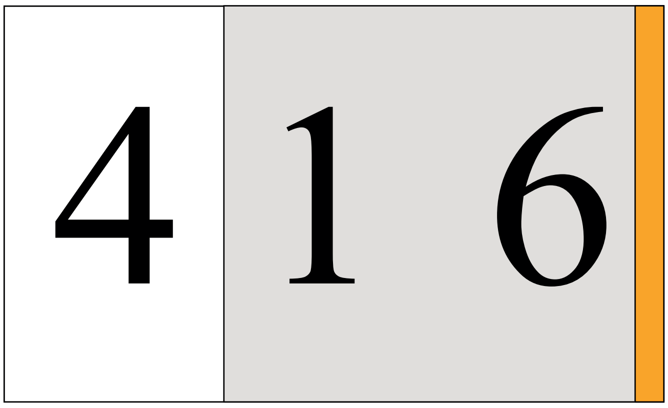
Remarque : Tous les outils présentés dans ce livre sont disponibles, répertoriés en annexe, pour être photocopiés et plastifiés et /ou utilisés sous Openboard ou OpenSankore.

II - Nombres "onze", ..., "seize" ; nombres incluant ces nombres (111, … ,116 ; 211, … 216 …)

Le français emploie les mots "onze", … , "seize" pour dire les nombres 10 + 1, … , 10+ 6 : un mot pour une composition de deux nombres ! Et ces mots sont inévitables, car ils interviennent très tôt dans la comptine numérique. Les cartes présentées ci-dessus décrivent ces nombres en superposant la carte 10 et les cartes 1, …, 6.

Pour aider à accepter cette difficulté de vocabulaire, six cartes spéciales, grises et de largeur double, portent l'écriture de ces nombres et se nomment "onze", … , "seize". Elles se composent avec les cartes des "cents". Quand les élèves auront compris qu'elles peuvent être remplacées par 10 + 1, …, 10 + 6, elles seront abandonnées car elles n'ont aucune fonctionnalité mathématique.





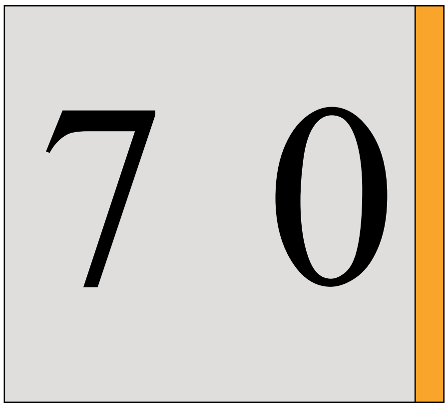
III - Nombres de “soixante-dix” à “Soixante-dix-neuf”, de “quatre-vingt-dix ” à “quatre-vingt-dix-neuf” ; nombres incluant ces nombres (170, … , 179 ; 190, … ,199 ; 270, …)

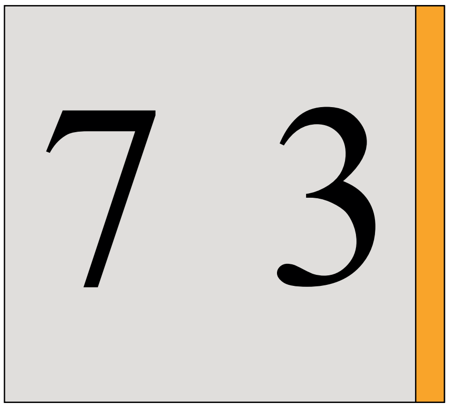
Cette difficulté de vocabulaire est est beaucoup plus gênante. On a plusieurs solutions :

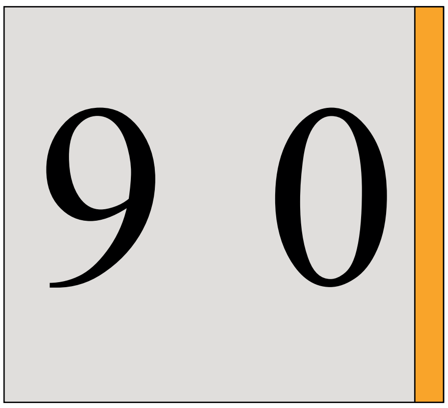
1 - Entendre “cinquante”, seul régulier de la suite des dizaines, comme “cinq” **ante** et de faire inventer provisoirement “sept” **ante**, “huit” **ante** et “neuf” **ante**. On peut alors faire composer et décomposer tout nombre jusqu’à 999 grâce à ce langage provisoire.

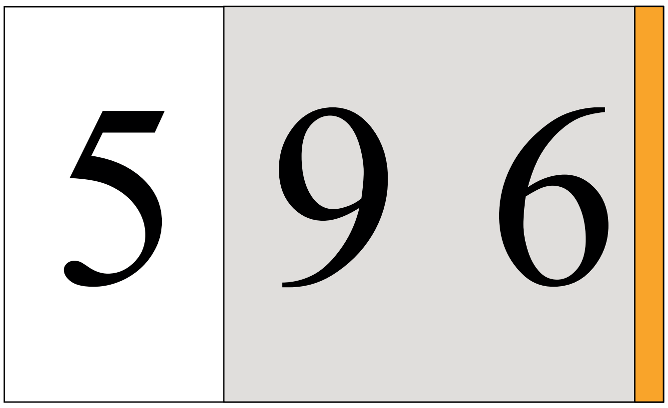
2 - Supprimer les cartes 70 et 90 du jeu, ce qui élimine, provisoirement 200 nombres. (Il en reste 800.) Les traiter, beaucoup plus tard, comme des singularités de notre culture, à admettre.

Pour cela, 20 autres cartes grises supplémentaires de largeur double :70, 71, …, 79, 90, 91, …, 99 viendront remplacer provisoirement les cartes blanches 70 et 90. Après avoir appris leur nom et les avoir associées aux cartes des “cents”, les élèves pourront reprendre les cartes blanches 70 et 90 et les composer avec les cartes blanches 1, 2, …, 9 pour comprendre que, par exemple : 73 = 70 + 3 ou 596 = 500 + 90 +6.









Sauter dans la suite des nombres

De nouvelles bandes numériques, horizontales avec nombres-repères de 5 en 5, plus proches de notre sens de l’écriture sont rangées en un tableau (le nombre de bandes horizontales est libre).

Chaque bande se termine sur un nom nouveau qui permet de deviner le nom des neuf suivants.

Le fait de placer un nombre par rapport au multiple de 5 précédent (ou suivant) sans qu’il soit écrit, donne toute son importance aux nombres pivots que sont les multiples de 5 et prépare à la représentation des “figures” de l’abaque.

- Les actions proposées avec la spirale ou les bandes chiffrées peuvent être reproduites sur ce tableau :

- On peut se référer à d’autres nombres, qui sont connus et “surcompter” c'est-à-dire dire la suite à partir du nombre connu en déplaçant son pion.

- On peut compter à rebours (décompter).

- On peut placer son pion sur une case nommée et le faire sauter de n cases, comme les « petits chevaux », vers l’avant ou vers l’arrière et donner le nom de la case d’arrivée, oralement ou par écrit.

C’est l’occasion d’apprendre à utiliser une notation écrite qui traduit ces mouvements :

13 + 4 = 17 17 – 4 = 13

Sauter d’une bande à la suivante prépare au calcul mental car le passage de la dizaine n’est plus automatique comme dans les bandes recollées.

- Les sauts qui franchissent les dizaines, dans un sens ou l’autre, sont à comprendre, exercer et intégrer :

19 + 4 = 23 23 – 4 = 19.

- De nombreux dés à jouer permettent d’agrémenter le jeu par l’intervention du hasard. En particulier, un couple de deux dés, l’un avec les nombres de 0 à 9, l’autre avec ceux de 10 en 10, de 0 à 90 (voir l’illustration, page 30).

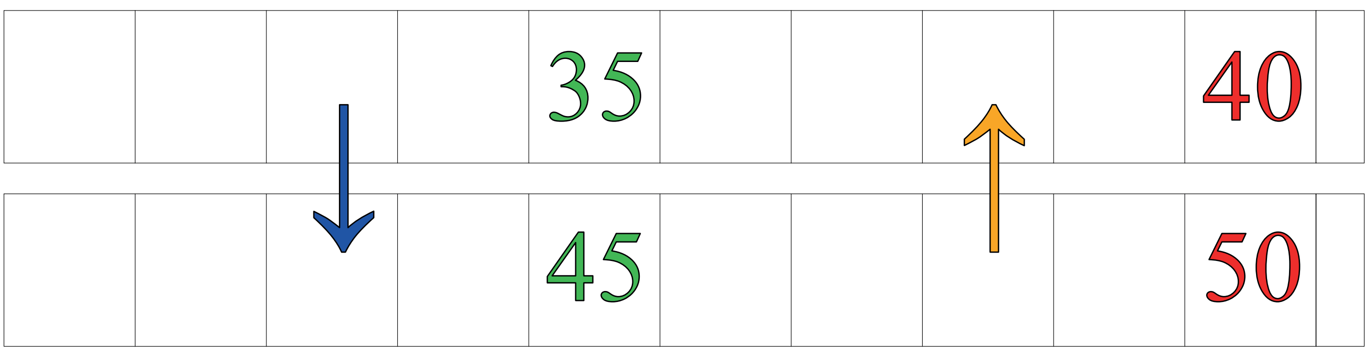
- On peut faire sauter son pion de 2 en 2 ; 3 en 3 ; 4 en 4 ; 5 en 5, physiquement ou mentalement.
2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 … 3 ; 6 ; 9 ; 12 … 4 ; 8 ; 12 ; 16… 5 ; 10 ; 15 ; 20…
et accompagner ces énumérations en dépliant successivement les doigts.

- Les sauts de 10 en 10 sont apparents et à intégrer en relation avec les doigts (représentant des “dix”).

- Les sauts de n en n sont une base pour l’apprentissage des tables de multiplication.

- La grande nouveauté de la présentation en tableau est la possibilité de sauter verticalement d’une bande à l’autre vers le bas ou le haut en comprenant que chaque saut traduit le fait d’ajouter ou retrancher 10.

Ajouter 23 à 14 revient à tracer un chemin partant de la case 14 et faisant (dans n’importe quel ordre) 2 sauts vers le bas et 3 vers la droite. Retrancher 23 à 37, 2 sauts vers le haut et 3 vers la gauche.



				5					10	
				15					20	
				25					30	
				35					40	
				45					50	
				55					60	
				65					70	
				75					80	
				85					90	
				95					100	

Calculi

Les recherches archéologiques de la ville de Suze, en Mésopotamie, ont permis de découvrir des objets d'argile en plusieurs exemplaires, puis des œufs en argile contenant ce type d'objets. Les archéologues ont compris que ces œufs étaient des représentants de nombres qu'il fallait casser, comme des tirelires, et que le fait de graver sur ces œufs leur contenu les a fait abandonner au profit de symboles qui furent notre première écriture. Ils ont appelé "calculi" ces petits objets.

Des objets informes, comme des cailloux, sont de bons représentants des nombres car ils gomment toute particularité des objets et n'en gardent que la quantité.

Sans vouloir vider les cimetières de leurs cailloux blancs - cependant idéaux pour cette représentation, on peut utiliser des haricots secs, pois chiches, glands ramassés en forêt ou pâtes en forme de coquillages. (Je les appellerai "cailloux" dans la suite.)

1 - Extraire le nombre d'un ensemble d'objets

Comme le faisait Jean Piaget pour repérer la conscience du nombre chez un enfant, on peut mettre un caillou dans une boîte pour chaque objet d'un ensemble et compter les cailloux pour parler du nombre d'objets de l'ensemble.

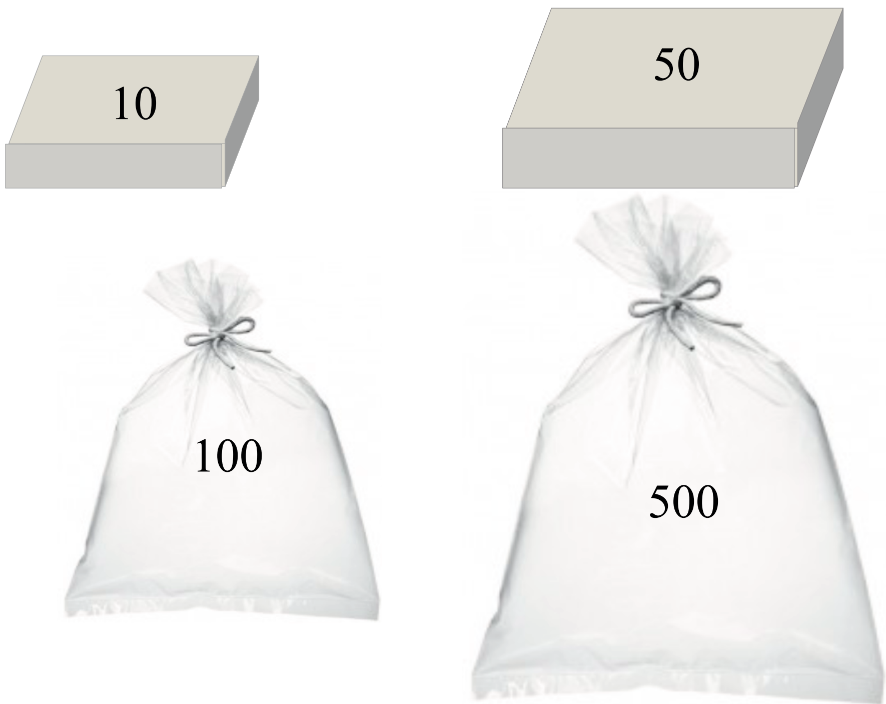
Agir sur ces cailloux permet d'agir virtuellement sur les objets.

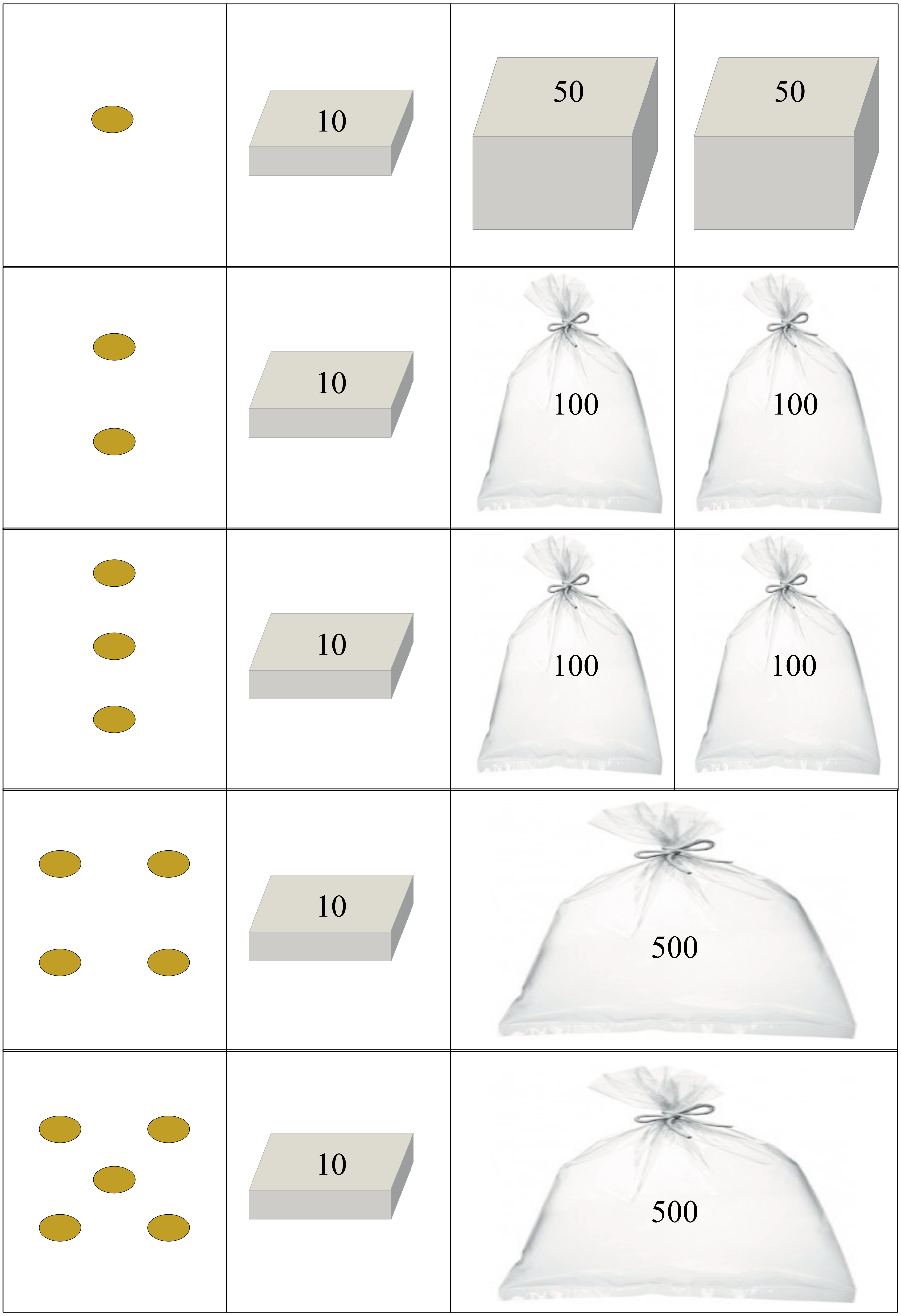
7 oiseaux sur un fil sont comptés par 7 cailloux dans la boîte. 3 oiseaux s'envolent. Sans les voir, ni voir ceux qui restent sur le fil, je peux les imaginer en ôtant 3 cailloux de la boîte.

On peut aussi comparer les nombres de deux ensembles en reprenant les cailloux du premier associés au second : s'il reste des cailloux, le premier ensemble a plus d'objets ; s'il en manque, il en a moins.

2 - Si les objets sont plus nombreux, pour éviter de compter, on peut ranger les cailloux dans des petites boîtes de 10, une étiquette sur la boîte. Puis, pour éviter encore de compter les boîtes de 10, quand le nombre grandira, une grande boîte de 50.

3 - De même, plus tard, les boîtes de 50 s'empileront et on pourra choisir de les mettre à deux dans un petit sac... Puis 5 petits sacs dans un grand sac.




10
50
50
10
100
100
10
100
100
10
500
10
500

Histoires à problème

Sur le modèle des « 100 problèmes du petit Poucet » de Lucienne Félix (épuisé), dont voici quelques extraits, page 25, chacun peut composer des petites « histoires à problème », résolubles avec les doigts, des objets ou avec le matériel.

Il est indispensable d'ancrer les nombres dans des situations pratiques compréhensibles, dès le début, avec de petits nombres. Les différentes situations opératoires y sont volontairement mélangées.

1 - Histoires

Partir d'histoires adaptées à l'âge des enfants, tirées de livres d'enfants, ou d'images permet de poser des questions où la réponse est visible.

Le mot qui traduit le mieux les questions numériques est : **combien**.

Un petit nombre vu dans une image, ou entendu dans une histoire répondra à : « combien ? ».

Les objets de cette observation numérique peuvent ensuite être cachés, entièrement ou partiellement et la même question fera appel à l'image mentale que les enfants se sont fabriquée.

Un autre type de question peut être introduit. Un ensemble ayant été vu, puis partiellement caché, la question : « combien sont cachés ? » obligera à mettre en relation l'ensemble vu dans sa totalité et la partie visible pour y répondre.

La situation peut partir d'un inventaire simple. Deux parties d'une image sont montrées successivement. Il faut deviner le tout.

2 - Inventions

L'imagination des enfants leur permet d'inventer des histoires avec la question « combien ? » à partir de leurs doigts levés ou baissés, de cailloux ou de cubes manipulés ou d'un dessin.

3 - Problèmes

Cette fois, ce sont des petites histoires à problème, comme celles du Petit Poucet, que les enfants auront à imaginer, reproduire en dessin ou par manipulations sur les doigts ou avec des objets (comme les cailloux), avant de répondre à « combien ? ».

4 - Gamme de nombres

Les nombres des problèmes sont ceux que les enfants connaissent. Et les outils de résolution, ceux qu'ils maîtrisent :

- Leurs dix doigts
- Les calculi
- Les bandes de nombres
- Les cartes numérales
- Et, bien sûr, dans les manipulations maîtrisées au fur et à mesure, les cubes et barres des pages suivantes, puis l'abaque en couleurs.

Dans tous les cas, le dessin représentant la situation chez les plus petits se transformera progressivement en écriture qui exprimera la solution du problème.

$7 + 1 = 8 \qquad 10 - 8 = 2$

19

LES FOURCHETTES

Sept personnes vont dîner.
Jean-Marie pose les fourchettes, 1 par personne et 1 au milieu de la table, pour le plat.

Dites combien il a mis de fourchettes sur la table.

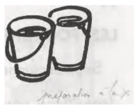
Jean-Marie avait sorti 10 fourchettes du tiroir.

Dites combien il a pris de fourchettes en trop.

Dessinez les 10 fourchettes prises par Jean-Marie. Indiquez celles qui sont en trop.

20

LES SEAUX D'EAU



Papa va chercher de l'eau au puits.
A chaque voyage il rapporte 2 seaux d'eau.
Il a fait 4 voyages.

Dites combien de seaux d'eau Papa a puisés.

Dessinez.

21

LES TARTELETTES

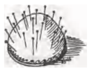
9 tartelettes étaient préparées sur un plat.
Il est venu 8 enfants qui en ont pris chacun une.

Dites combien il reste de tartelettes sur le plat.

Dessinez les tartelettes et indiquez celles qui ont été mangées.

22

LES ÉPINGLES DE LA COUTURIÈRE



Une couturière qui prépare un costume a 21 épingles sur une pelote.
Elle en prend 13 pour épingler un patron sur du tissu.

Dites combien il reste d'épingles sur la pelote.

Dessinez les épingles et entourez d'un trait celles qu'elle a employées.

23

BREBIS ET AGNEAUX

Germaine a 3 brebis qui ont chacune 2 agneaux.

Calculez combien elle a de bêtes dans son troupeau.

Dessinez les brebis et les agneaux.

24

LES BRIOCHES

Après le goûter il ne reste que 3 brioches sur la table.
La petite Marie-Rose en a mangé une et chacune de ses trois sœurs en a mangé 2.

Dites combien il y avait de brioches sur la table.

Dessinez.

25

LE VASE DE FLEURS

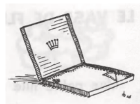
Une petite fille avait mis 9 pensées dans un vase. Le lendemain il y en a 2 de fanées. Elle les retire du vase. Le jour suivant, 3 autres pensées se sont fanées. Elle les retire aussi.

Dites combien il reste de pensées dans le vase.

Dessinez le vase de fleurs, le premier jour, le second jour, le troisième jour.

26

LES MOUCHOIRS BRODÉS



Des mouchoirs brodés sont vendus par boîtes de 6.
Une vendeuse en a vendu 4 boîtes

Calculez combien elle a vendu de mouchoirs.

Dessinez tous les mouchoirs. Entourez d'un trait les mouchoirs contenus dans chaque boîte.

27

LES RONDELLES DE POMMES

Grand'mère va faire sécher des pommes. Elle les coupe d'abord en rondelles. Une pomme donne 7 belles rondelles.
Grand'mère a déjà coupé 2 pommes.

Dites combien cela fait de rondelles.

Dessinez les rondelles.

28

LES BOUCHONS

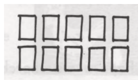
Julien fabrique des petits moutons avec des bouchons et des allumettes. Il lui faut un bouchon pour faire le corps du mouton et un bouchon pour faire la tête. Il voudrait fabriquer 9 moutons.

Dites combien il lui faudra de bouchons.

Dessinez les bouchons.

29

LES CARAMELS



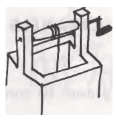
Il y avait 10 caramels dans une boîte.
Léo en mange 2.
Marc en mange 3 et Bébé en mange un seul.

Combien reste-t-il de caramels ?

Dessinez.

30

LE PUITS



Papa a été chercher 14 seaux d'eau au puits.

S'il rapporte 2 seaux à chaque lois qu'il y va dites combien de fois il a été au puits.

Dessinez.

31

LA POULE BLANCHE

Pendant un mois, la poule blanche a pondu : 6 œufs, la première semaine,
5 œufs, la deuxième semaine,
4 œufs, la troisième semaine,
3 œufs, la quatrième semaine.

Dites combien la poule blanche a pondu d'œufs pendant le mois.

Dessinez tous les œufs.

32

LA DÉCORATION DE LA TABLE

Pour décorer la table du repas Louise pose à chaque place 3 feuilles de chêne et 1 gland.
Il y a 6 places.

Dites combien elle utilisera de feuilles et combien de glands.

Dessinez les feuilles et les glands.

33

LES BARREAUX DE CHAISES

Victor dit :
« J'essuierai les barreaux de chaises. »
« Combien y en a-t-il ? » demande Henri.
« Il y en a 3 par chaise. » répond Victor.
Il y a 5 chaises, mais la cinquième a perdu un barreau.

Combien cela fait-il de barreaux à essuyer ?

Dessinez les barreaux des 5 chaises.

34

LES PANIERS DE FRAISES

Un petit garçon a cueilli un panier de fraises.
Sa grande sœur en a cueilli 2, sa maman 3 et son papa 4.

Dites combien ils ont cueilli de paniers de fraises en tout.

Dessinez les fraises.

35

LES TRÈFLES A TROIS FEUILLES

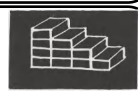
Jean-Jacques a disposé sur la table 6 trèfles à 3 feuilles.

Dites combien cela lait de petites feuilles de trèfle.

Dessinez les feuilles de trèfle.

36

UN PETIT ESCALIER



Jean s'est amusé a faire un petit escalier avec des briques ; il a mis :
1 brique pour la 1ère marche,
2 briques pour la 2ème marche,
3 briques pour la 3ème marche,
4 briques pour la 4ème marche,
il a assez de briques pour faire la 5ème marche.

Dites combien il a utilisé de briques.

Dessinez.

Calcul en ligne

Les paroles s'en vont, les écrits restent.

Les manipulations sont le véhicule des prises de conscience. Elles sont nécessaires, mais feront la place à des manipulations imaginées qui ne demandent plus l'action réelle. Elles laissent des traces dans le cerveau : les images mentales sur lesquelles il peut agir directement sans recours à la perception.

1 - Nombres écrits

Les spirales, bandes de nombres, cartes numérales se sont combinées pour donner du sens à l'écriture des nombres. C'est-à-dire au fait qu'une écriture représente un nombre dans la tête d'un enfant.

2 - Signes opératoires

Cela ne suffit pas à traduire une action sur les nombres et 3 symboles vont se greffer à ce langage :

$$+ \quad - \quad x$$

Ils doivent être présentés dès que la signification qu'ils portent est intégrée. Et de nombreuses situations leur ont ouvert la porte :

- Les doigts qui se lèvent ou se baissent permettent d'écrire des locutions numériques :

$$3 + 2 \quad 5 + 4 \quad 4 - 1 \quad 7 - 3 \quad 2x\,4 \quad 2x\,5$$

Un autre symbole permet de conclure, dont le sens est "s'écrit aussi" ou "a pour autre nom" et qui se dit "égal":

$$=$$

sous forme de phrases numériques simples :

$$3 + 2 = 5 \quad 5 + 4 = 9 \quad 4 - 1 = 3 \quad 7 - 3 = 4 \quad 2x\,4 = 8 \quad 2x\,5 = 10$$

Il n'est pas utile d'attendre des situations complexes pour cette introduction. Tous les autres outils vont garder la trace des actions sous forme d'écritures utilisant les mêmes symboles. Et ils vont naturellement les mêler : il est donc préférable de les introduire simultanément, permettant aux enfants de choisir celui qui convient à chaque situation simple.

3 - Expressions composées

Les symboles vont petit à petit s'associer pour composer des cheminements mentaux plus complexes.

Par exemple, avec les bandes horizontales : $27 + 18 = 27 + 10 + 8 = 37 + 8 = 40 + 5 = 45$

$$27 + 18 = 27 + 20 - 2 = 47 - 2 = 45$$

Ou avec les cartes numérales : $348 = 300 + 40 + 8 = 3x\,100 + 4x\,10 + 8$.