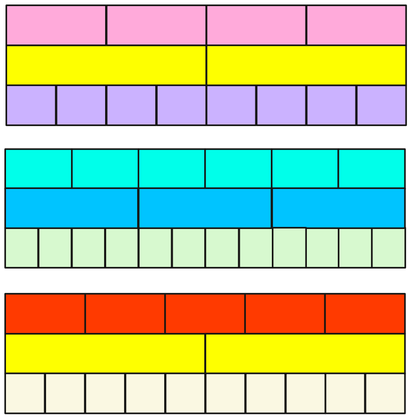
Fractions en faction

Ce texte explique, en la généralisant, la présentation des fractions faite dans le livre « numération de position sur l'abaque en couleurs » et ses annexes.

I - Fractions et nombres rationnels positifs

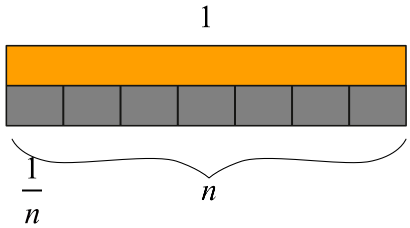
1 - Définitions et figurations



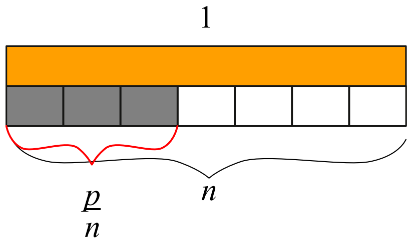
Les trois règles à rompus du livre sont construites sur un seul principe : partager une unité (figurée par une réglette orange) en n parties isométriques, n étant un nombre naturel quelconque.

La première partage l'orange en deux, quatre et huit parties ; la deuxième, en trois, six et douze parties ; la troisième, en deux, cinq et dix parties.

De manière générale, on partage la réglette orange (unité) en n réglettes de même longueur. Chaque réglette obtenue par ce découpage a une longueur notée : $\frac{1}{n}$



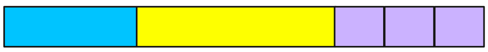
Un train de p réglettes de longueur $\frac{1}{n}$ a une longueur notée : $\frac{p}{n}$



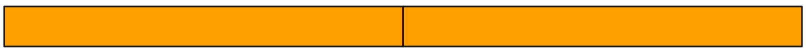
2 - Nombres rationnels positifs

Des réglettes provenant de divers partages peuvent se juxtaposer pour former des trains de réglettes. La longueur d'un train, mesurée par la réglette orange, s'appelle <u>nombre rationnel positif</u>.

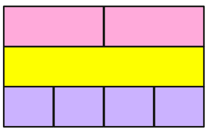
Voici le nombre rationnel : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$



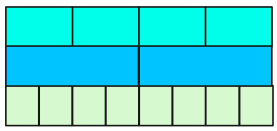
Un nombre entier est évidemment un rationnel :



En observant les règles à rompus, on voit des longueurs s'exprimant avec plusieurs fractions :

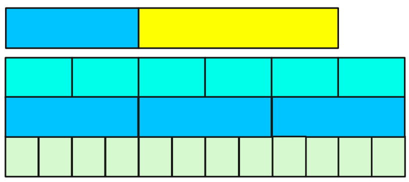


$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$



$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$

De même, on peut voir que, dans certains cas, la somme de deux fractions est une fraction.



$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

II - Partage d'un entier et de son inverse

1 - Partage en n de l'entier k

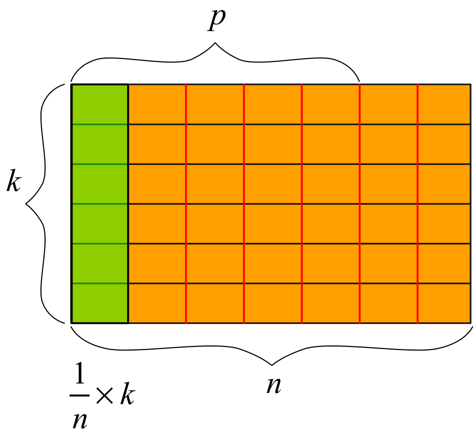
Par définition : $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ Mais $\frac{1}{3}\times 4$ est un autre problème. Il s'agit du partage en trois de la longueur 4. Toutes les fractions, jusqu'à présent, étaient vues comme fractions de l'unité.

La visualisation des fractions comme longueurs de réglettes de même hauteur permet de répondre à cette question, alors que la vision commune comme longueurs de segments ne le permet pas. Les k réglettes oranges composant le nombre k peuvent être empilées dans un rectangle.

On voit le nombre entier k comme un rectangle de réglettes oranges de hauteur k.

Il est partagé en n rectangles de base $\frac{1}{n}$ et hauteur k, chacun étant une pile de k réglettes $\frac{1}{n}$.

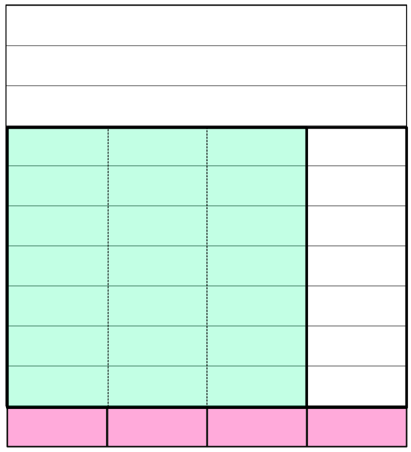
$$\frac{1}{n} \times k = \frac{k}{n}$$



On voit, sur le même dessin, que $\frac{p}{n} \times k$ forme un rectangle de réglettes $\frac{1}{n}$, de base p et hauteur k.

$$\frac{p}{n} \times k = \frac{p.k}{n}$$

Le tableau blanc de dix lignes de réglettes unité, plastifié, associé aux règles à rompus, permet de nombreuses visualisations de ce résultat.



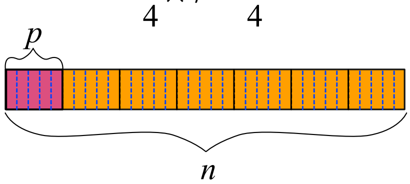
$$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$$

2 - Partage en p de $\frac{1}{n}$

De même, une unité orange est partagée en n. Le partage de la réglette rouge $\frac{1}{n}$ en p permet de voir : $\frac{1}{p} \times \frac{1}{n}$

Mais si on partage en p les n réglettes $\frac{1}{n}$, on voit que l'unité contient $n.p$ réglettes. Et de même si on partage en n les p réglettes $\frac{1}{p}$:

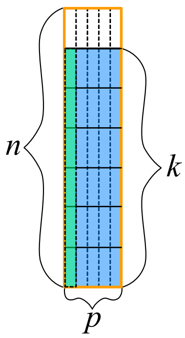
$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{p.n} \qquad \frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{p.n}$$



Si on avait partagé en p une pile de k réglettes $\frac{1}{n}$ (bleue), on aurait obtenu :

$$\frac{1}{p} \times \frac{k}{n} = \frac{k}{p.n}$$

III - Fractions décimales

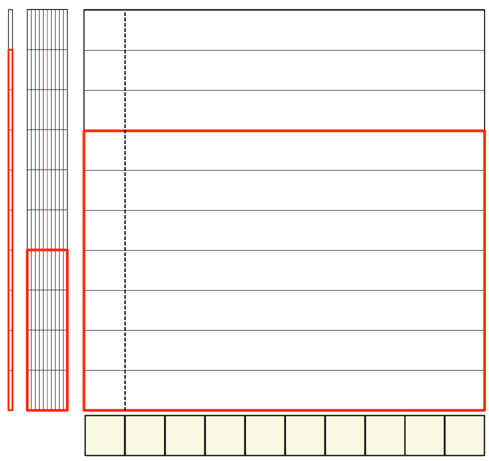


Les fractions décimales $\frac{k}{10}$, $\frac{k}{100}$, … ne sont singulières que parce qu'elles sont compatibles avec la numération de position de base dix.

Pour qu'elles s'intègrent à l'écriture des nombres naturels dans ce système et créent les nombres décimaux, il faut leur appliquer les résultats du paragraphe précédent, soit :

$$\frac{1}{10} \times k = \frac{k}{10} \qquad \frac{1}{10} \times \frac{k}{10} = \frac{k}{100}$$

Pour rendre plus simple la vision de ces fractions, le tableau blanc a été complété de colonnes de dixièmes et de centièmes.



Ci-contre on peut voir $\frac{1}{10} \times 7 = \frac{7}{10}$, $\frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{100}$ et $\frac{9}{100}$.

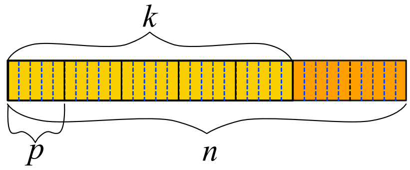
On peut lire aussi que $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ ou que $\frac{4}{10} + \frac{9}{100} = \frac{49}{100}$.

On peut imaginer que la colonne des centièmes soit aussi partagée en dix bandes verticales qui sont les millièmes, même si la finesse du dessin ne le permet pas.

$$\frac{9}{100} = \frac{90}{1000} \qquad \frac{1}{10} \times \frac{9}{100} = \frac{9}{1000} \qquad \frac{1}{100} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{1000}$$

IV - Conséquences

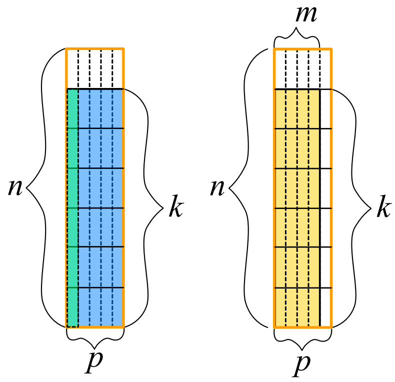
1 - Égalité



Le dessin ci-contre montre :

$$\frac{1}{n}=\frac{p}{p.n} \qquad\qquad \frac{k}{n}=\frac{p.k}{p.n}$$

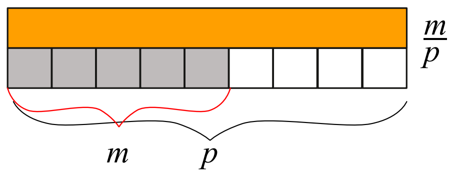
2 - Produit de fractions

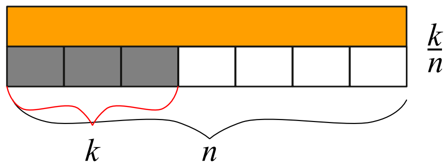


Le rectangle vert qui nous a permis de visualiser $\frac{1}{p}\times\frac{k}{n}$ à la page précédente peut se reproduire m fois et donner le rectangle jaune qui contient $k.m$ réglettes $\frac{1}{p.n}$.

$$\frac{m}{p}\times\frac{k}{n}=m\times\frac{1}{p}\times\frac{k}{n}=\frac{m.k}{p.n}$$

3 - Somme et différence de fractions





Dans les règles à rompus bleue et rouge, on voit qu'on peut voir les nombres rationnels $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$ comme les fractions :

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6} \qquad\qquad \frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

De façon générale, pour $\frac{m}{p}+\frac{k}{n}$, la relation $\frac{1}{n}\times\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{p.n}$ permet encore de partager la réglette $\frac{1}{p}$ en n et la réglette $\frac{1}{n}$ en p, pour obtenir les mêmes réglettes $\frac{1}{p.n}$ et affirmer que tout nombre rationnel positif s'exprime (et d'une infinité de façons) comme une fraction.

(Ce découpage en $n.p$ n'est pas toujours le plus simple, comme dans les deux exemples numériques ci-dessus, mais il nous assure que la somme de deux fractions est une fraction.)

4 - Ordre des fractions

Deux cas "évidents" : si $k < m$, alors $\frac{k}{n}<\frac{m}{n}$; si $n < p$, alors $\frac{k}{n}>\frac{k}{p}$

Dans le cas général, le recours au morcellement en réglettes $\frac{1}{p.n}$ permet d'ordonner $\frac{k}{n}$ et $\frac{m}{p}$.

V - Conclusions

- Tout le fonctionnement du calcul des fractions repose sur la représentation en surfaces plutôt qu'en longueurs (même si on ne les distingue que par leur longueur, vu que la hauteur est fixe), et sur les deux relations fondamentales qu'il s'agit de faire pratiquer sur des exemples numériques simples :

$$\frac{1}{n}\times k=\frac{k}{n} \qquad\qquad \frac{1}{p}\times\frac{k}{n}=\frac{k}{p.n}$$

- La commutativité et l'associativité de la multiplication ne sont en rien des évidences, pour une opération qui peut se dire "fois" ou "de" et être vue tantôt comme une reproduction de réglettes en train et tantôt comme un partage d'un train de réglettes. Elles sont des conclusions de cette étude, et non des prérequis.