Nombres relatifs sur l’abaque en couleurs

Au cycle 3, l’abaque en couleurs a permis de lire, écrire et comprendre les nombres entiers dans leur ensemble, d’affiner des procédures de calcul mental ou en ligne et de mettre en place des techniques écrites pour les quatre opérations arithmétiques.

Ensuite, il a conduit à l’introduction des nombres décimaux et a permis un passage “naturel” des procédures et techniques à ce nouvel ensemble de nombres dont la numération de position a permis l’invention.

Les chapitres qui suivent proposent une invention des nombres entiers ou décimaux relatifs, sur le support de l’abaque permet avec un simple changement de point de vue, et qui traduisent les échanges financiers (crédit / débit) ou résultats de jeux (gain / perte) en terme de nombres.

La définition et la pratique des opérations sur les nombres entiers relatifs (addition, soustraction et multiplication) se réalisent naturellement sur l’abaque en couleurs en exploitant la distributivité, propriété fondamentale liant multiplication et addition et le rôle très particulier du nombre 0.

Une extension du tableau à double entrée que représente l’abaque va permettre une introduction du calcul littéral comme généralisation des processus développés depuis le cycle 2 pour vivre et comprendre la multiplication.

Nombres entiers relatifs

Situation 1 (collective)

1 - Une pièce de monnaie lancée indique si on gagne (face) ou si on perd (pile). Et un dé à 20 faces dit à chaque fois combien de points sont gagnés ou perdus.

Chaque personne d'un groupe lance la pièce et le dé et marque ses points (gagnés ou perdus). Les joueurs se rangent selon leur gain ou perte.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
perdu	gagné	perdu	perdu	gagné	gagné
7	13	16	2	8	3

Nous dirons que :

- Le résultat de A est **-7** ; celui de B est **13**.

Ce signe - est différent de celui de la soustraction. Il n'indique pas une opération, mais une perte et il se colle au nombre obtenu.

2 - Les joueurs lancent à nouveau pièce et dé. Les résultats sont faciles à inscrire dans ce tableau ainsi que le score final et le rangement des gains du moins au plus chanceux.

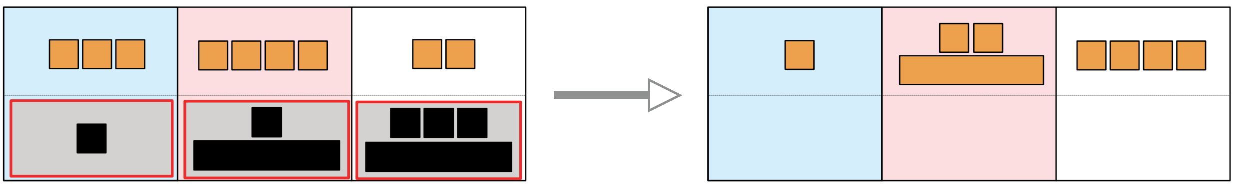
Joueurs	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Partie 1	-7	13	-16	-2	8	3
Partie 2	11	-8	-4	9	14	-15
Score						

Un gain est appelé **positif**. Une perte est appelée **négative**.

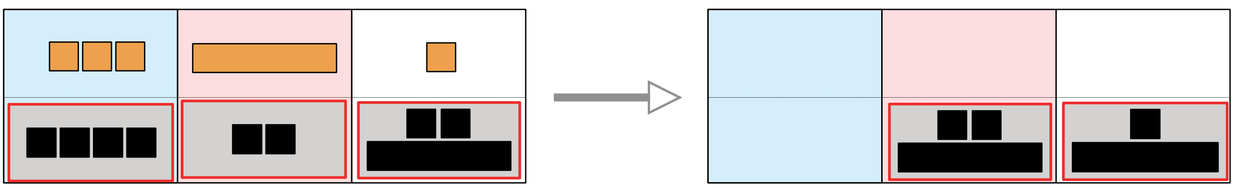
Situation 2 (collective)

1 - Je gagne 342 € et je dépense 168 € ». Je peux poser cette situation sur l'abaque en couleurs et faire les réductions comme ci-dessus. Les gains et dépenses (ou pertes) sont placés <u>dans l'abaque</u>.

Et, par décomposition d'un "cent" puis d'un "dix":

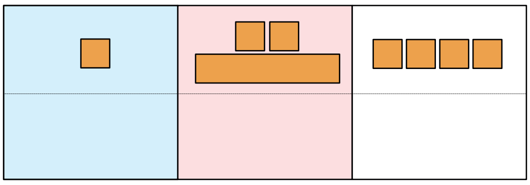


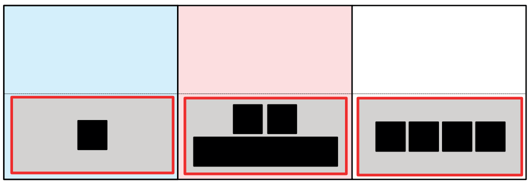
2 - Si, maintenant, je gagne 351 € et je dépense 427 €, je peux poser cette situation sur l'abaque en couleurs et faire les réductions comme d'habitude, en sachant que j'ai contracté une dette :



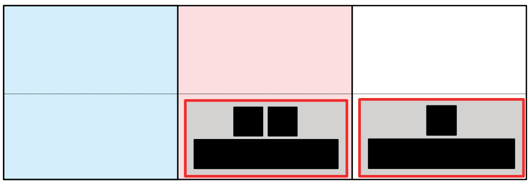
Et je peux dire que ma dette est de 76 € ou que le résultat de cette transaction est de -76 €.

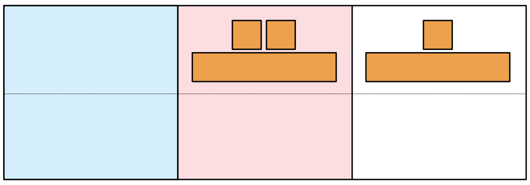
3 - Chaque nombre positif possède son image en négatif (comme une pellicule photo) :





Et chaque nombre négatif correspond à un nombre positif :





4 - L'ensemble des nombres positifs (ceux que nous connaissions) et des nombres négatifs (fantômes promus au rang de nombres) est **l'ensemble des nombres entiers relatifs**.

Chaque nombre positif a un “double” négatif, et chaque nombre négatif a un “double” positif . Ce nombre est son **opposé** :

L'opposé de 174 est -174; l'opposé de -76 est 76.

(L'ovale entourant un nombre négatif permet de mieux voir l'association signe/valeur, surtout quand celle-ci a plusieurs chiffres, mais n'est pas obligatoire.)

5 - Chaque nombre entier relatif peut se présenter sous des formes multiples. Par exemple, le nombre 174 se présente sous deux formes, ainsi que le nombre -76, dans le bas de la page 2. (Les flèches n'indiquent pas un changement de nombre, mais de présentation d'un même nombre.

On donne une forme nouvelle à un nombre relatif chaque fois qu'on place une nouvelle carte fantômes et autant de pièces sur l'abaque.

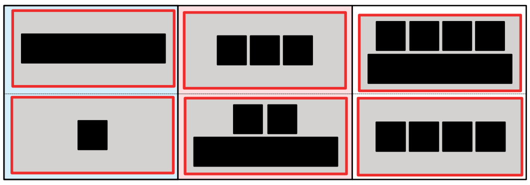
Parmi toutes les formes que peut revêtir un nombre relatif, il en existe une plus simple à lire car elle n'est formée :

• que de pièces beiges, s'il est positif,

• que de cartes fantômes, s'il est négatif.

Cette forme simple d'un nombre relatif s'appelle sa **forme réduite**.

6 - Les nombres négatifs étant maintenant des nombres à part entière, rien ne s'oppose à ce qu'ils occupent aussi le haut de l'abaque et qu'on puisse les réduire :



Cette réduction est en tous points semblable à une addition.

L'observation d'un thermomètre ne peut entraîner un déclic propre à inventer de nouveaux nombres, car les marques négatives ne sont que des repères statiques qui ne peuvent s'animer sous l'action des opérations.

Les fantômes, posés sur l'abaque au cycle 2 pour être des repères de nombres à ôter, sont devenus des nombres négatifs et vont prendre place dans les opérations.

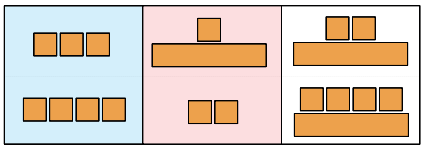
(Les nombres relatifs sont utilisés aussi dans les scores des championnats sportifs.)

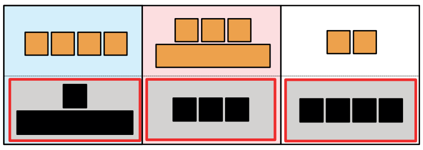
Addition et ordre des nombres entiers relatifs

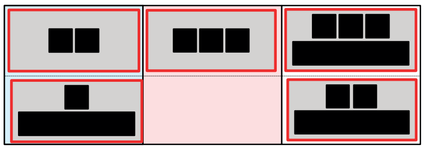
Situation 1 (collective)

« Comment peux-tu donner un sens à ces trois écritures, par la même manipulation :

367 + 429 482 + -634 -238 + -607 ? »







Peux-tu en déduire des règles pour l'addition des nombres entiers relatifs, comparée aux opérations sur les nombres naturels ?

Situation 2 (individuelle)

1 - « Effectue les opérations suivantes, d'abord sur l'abaque, puis en posant les carrés et rectangles sur l'abaque et en réalisant directement les calculs sur les écritures chiffrées. Lorsque ces démarches sont comprises, fais-les progressivement sans recours à l'abaque. »

207 + -528 1 425 + -182 -1056 + -756 -361 + 904

2 - « Donne-toi autant d'additions qu'il vous est nécessaire pour intégrer ces actions en lançant les trois dés D1, D10, D100 (voire D1000) et une pièce de monnaie pour chaque nombre : les trois dés donnent la valeur et la pièce le signe (face : positif ; pile : négatif).

3 - « Peux-tu prévoir, dans tous les cas, la couleur du résultat avant de commencer le calcul ? »

Situation 3 (individuelle)

Chaque nombre relatif a son image en miroir : son opposé, de même valeur mais de signe opposé. Et les paires de tels nombres ont une propriété remarquable :

239 + -239 = 0 -425 + 425 = 0

0 devient le nombre central essentiel de cette famille (et pourtant il exprime le "rien" !).

Situation 4 (individuelle)

À l'école élémentaire, nous avons donné un sens à :
3× 146 comme 146 + 146 + 146.
Peux-tu trouver un sens à : 3× -146 ? »

Situation 5 (individuelle)

1 - En te remémorant qu'un nombre relatif représente un gain ou une perte (soit d'argent, soit dans un jeu), ordonne les nombres suivants :

56 ; -63 ; 9 ; -31 ; 86 ; - 48

(Le signe < garde son sens dans cet environnement et se place entre les nombres.)

2 - Complète les deux colonnes des nombres se terminant par 5 et 0 du tableau à dix colonnes ci-contre.

Place les nombres ci-dessus dans le tableau.

				5					10
				15					20
				25					30
				35					40
				45					50
				55					60
				65					70
				75					80

Dans le rouge !

Situation 1 (collective)

- Problème : je possède 458,50 € sur mon compte. J'achète un smartphone à 219,90 €. Qu'ai-je sur mon compte, après cet achat ?

$$\boxed{458,50} \quad - \quad \boxed{219,90} \quad = \quad \boxed{238,60}$$

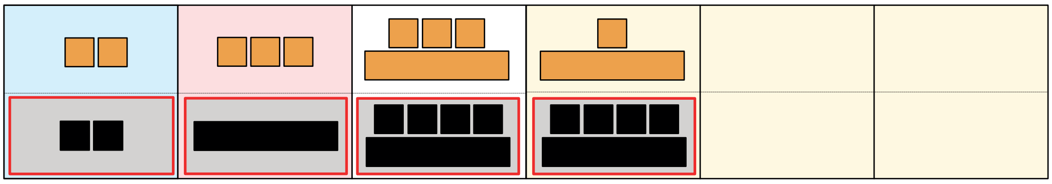
- Mais il arrive aussi qu'on ne fasse pas attention et qu'on dépense sans compter ! J'achète un disque dur à 259,90 €. Que fait la banque ?

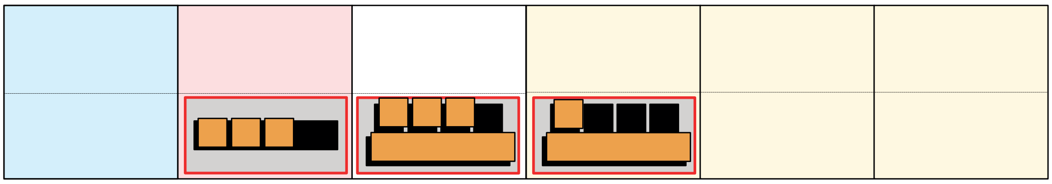
La banque traduit que le résultat est négatif et le compte est "dans le rouge".

$$\boxed{238,60} \quad - \quad \boxed{259,90} \quad = \quad \boxed{21,30}$$

Situation 2 (collective)

1 - Le problème se visualise sur l'abaque.





La banque traduit ce résultat négatif en disant que le compte est "dans le rouge" (et sur l'abaque, nous avons envie de dire qu'il est dans le noir !). Elle prête provisoirement l'argent qu'il faudra rembourser en apportant de l'argent sur le compte.

$$238,60 + -259,90 = -21,30$$

Les bandeaux ovales permettent de visualiser l'association du signe - et du nombre, lorsque celui-ci a plusieurs chiffres et de le séparer du signe opératoire +.

2 - Les problèmes financiers utilisent des nombres décimaux mais l'utilisation des deux couleurs est la même et il n'y a pas de difficulté nouvelle à définir des **nombres décimaux relatifs**.

L'addition s'effectue sur l'abaque selon les mêmes démarches. Et chaque nombre décimal possède un opposé (de la même manière qu'un entier).

Situation 3 (individuelle)

1 - Lorsque les écritures se compliqueront, les bandeaux ovales seront moins pratiques et n'existent pas sur les claviers d'ordinateur ou de calculatrice. Mais un double symbole extensible permet de les remplacer : les parenthèses, l'une ouvrante et l'autre fermante.

$$-2\,387,5 \quad = \quad (-2\,387,5)$$

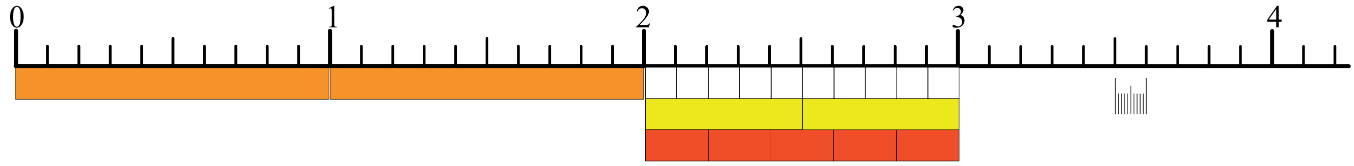
Transcris tes écritures avec ce nouveau symbole double.

2 - Peux-tu, sans faire aucun calcul, écrire l'opposé du nombre décimal relatif : 153,6 + (-78,3) ?

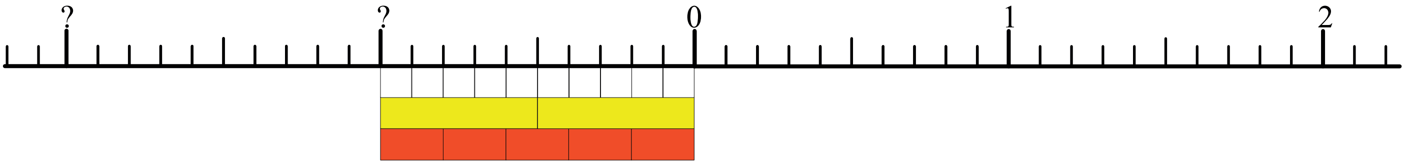
Nombres décimaux relatifs et graduations

Situation 1 (collective)

Page 113, les nombres décimaux ont permis de graduer une demi-droite à partir de son origine, à l'aide d'une unité de longueur et de ses subdivisions décimales.



« A l'aide des nombres relatifs, tu peux maintenant graduer une droite, à partir d'un point 0 et d'une unité de longueur. Place les marques entières négatives, puis la marque -0,1. »



Situation 2 (individuelle)

1 - « Place les marques : -0,3 ; -0,7 ; -1,6. »

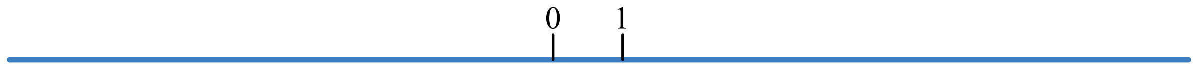
Comment sont-elles placées par rapport à leurs opposées ?

2 - L'unité choisie étant la réglette orange de 10 cm (du matériel Cuisenaire), place, en te servant du double-décimètre, les marques (-0,36) ; (-0,63) ; (-1,38) ; (-2,03).

Situation 3 (individuelle)

1 - Une droite étant tracée, un de ses points marqué du nombre 0 (appelé origine) et l'unité cm choisie, utilise ton double-décimètre pour placer, sur cette droite, les points de marques suivantes :

3,4 ; (-5,9) ; 6 ; (-8,8) ; 0,2 ; (-5,1).



2 - Où se placent les nombres positifs et les nombres négatifs sur cette droite ?

Situation 4 (collective)

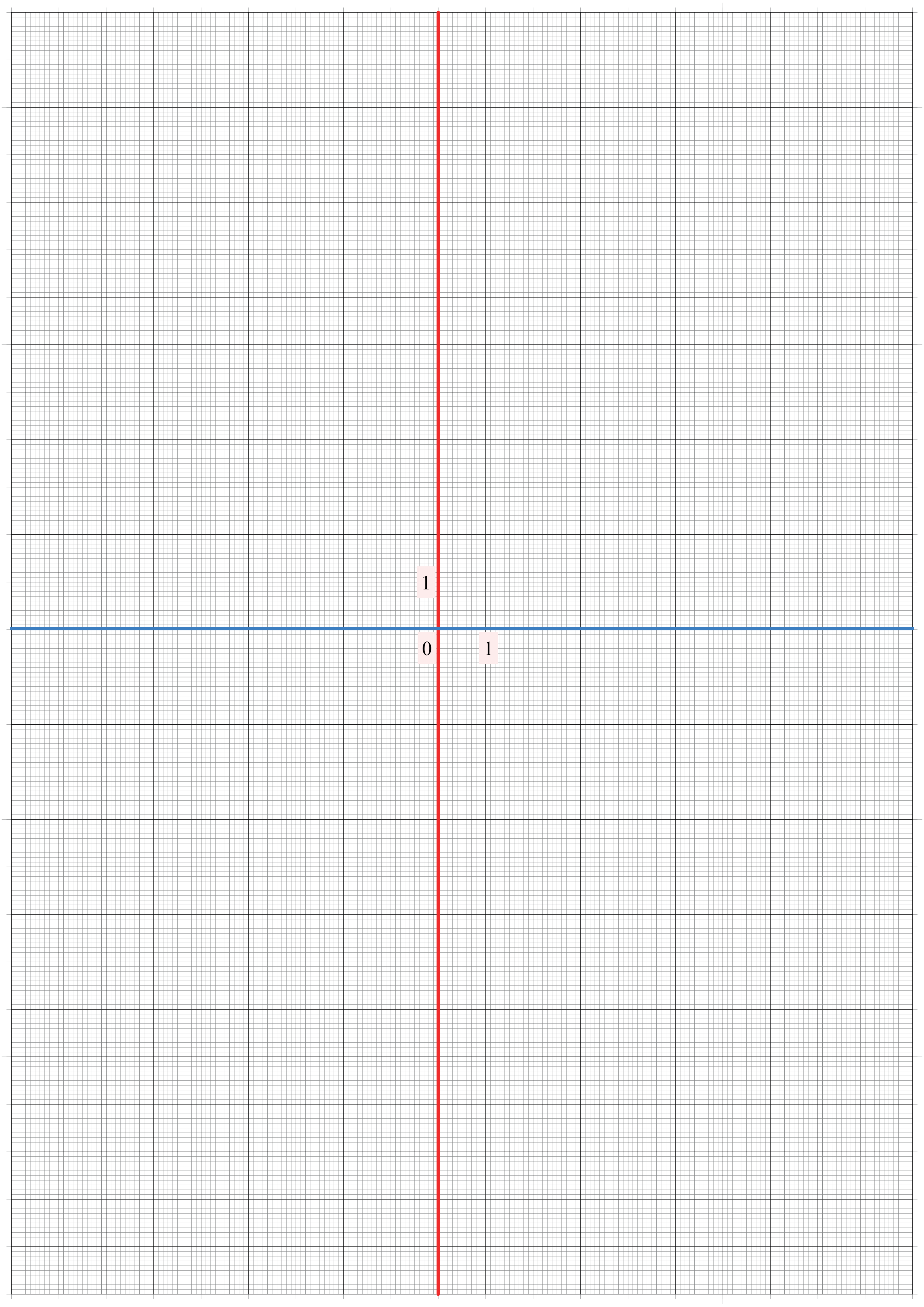
Sur un papier millimétré (voir page 7), deux droites sont tracées, l'une horizontale (bleue), l'autre verticale (rouge). En choisissant comme origine pour ces deux droites leur point d'intersection, et pour unité le cm, les lignes du quadrillage marquent une graduation de chacune.

1 - Prends un point d'intersection quelconque de deux lignes du quadrillage, l'une horizontale et l'autre verticale et suis ces deux lignes jusqu'aux droites colorées. Comment peux-tu repérer le point choisi à partir des deux droites graduées ?

Le nombre-repère sur la ligne bleue est **l'abscisse** du point ; et sur la ligne rouge, son **ordonnée**. Le couple de ces deux nombres constitue le couple de **coordonnées** du point.

2 - Place les points de coordonnées : (3 ; 4,5), (-6; 7,8), (-1,4 ; 8,3), (7,6 ; -6,7), (-4,8 ; -6,2)

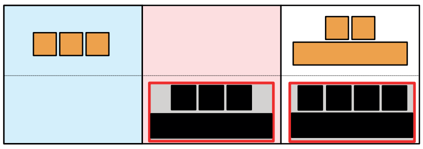
3 - Connaissant les signes de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point, peux-tu situer une région du plan où se trouve le point ?


1
0
1

Zéro : le rien qui change tout

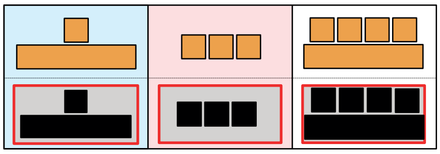
Situation 1 (collective)

1 - Au cycle 2, page 43, pour ôter les éléments d'un nombre (beige), nous avons inventé l'idée des fantômes attendant ces éléments. La même action s'exprime comme une addition avec les nombres relatifs.

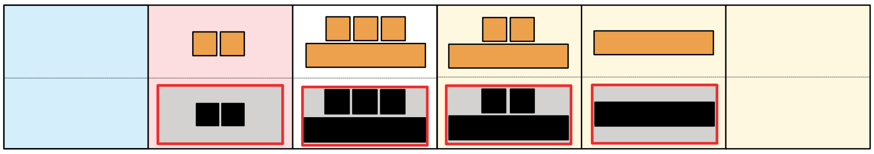


307 - 89 = 307 + (-89)

2 - Zéro peut se représenter d'une infinité de façons : il suffit de placer autant d'éléments noirs que de beiges sur l'abaque.

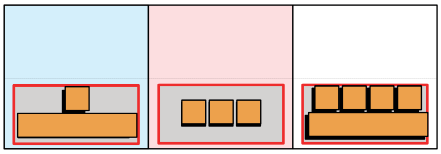


zéro



zéro

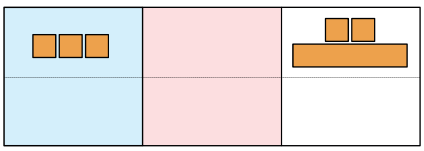
Autre façon de figurer zéro, sous l'habillage ci-dessus : chaque carte fantômes est couverte par les pièces correspondantes.



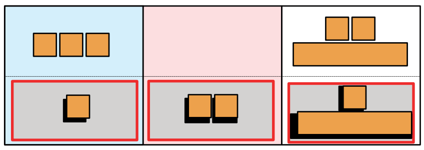
zéro

Situation 2 (collective)

1 - Comment soustraire, c'est-à-dire ôter, le nombre négatif (-126) de 307, alors que ce nombre (-126) n'est pas visible ? Il suffit de le faire apparaître (sans changer le nombre) :

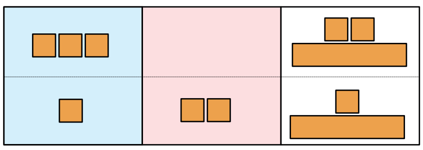


=



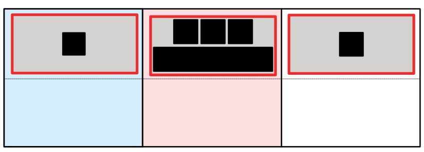
307

Et on peut ôter les fantômes représentant (-126).

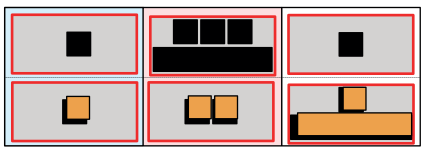


307 - (-126) = 307 + 126

2 - Comment soustraire, c'est-à-dire ôter, le nombre positif 126 de (-181), alors que ce nombre 126 n'est pas visible ? Il suffit de le faire apparaître (sans changer le nombre) :

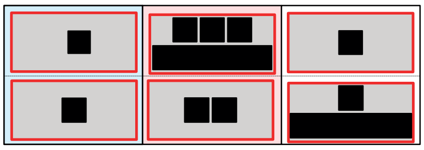


=



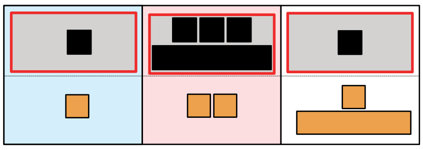
(-181)

… Et de l’ôter !



(-181) - 126 = (-181) + (-126)

3 - Comment soustraire, c’est-à-dire ôter, le nombre négatif (-126) de (-181), alors que ce nombre (-126) n’est pas visible ? Il suffit de le faire apparaître, comme à la page précédente, et de l’ôter :



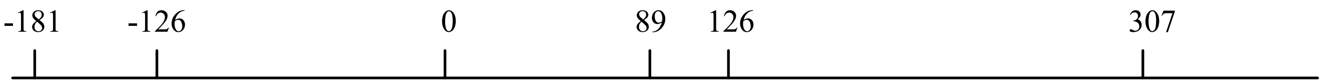
(-181) - (-126) = (-181) + 126

4 - De ces quatre exemples de soustractions, peux-tu extraire une règle générale remplaçant la soustraction des nombres relatifs par une addition ?

Situation 3 (individuelle)

Sur une demi-droite graduée, la différence de deux nombres naturels se voit comme la distance des deux marques les représentant.

Comment peux-tu voir la différence de deux nombres relatifs sur une droite graduée ?



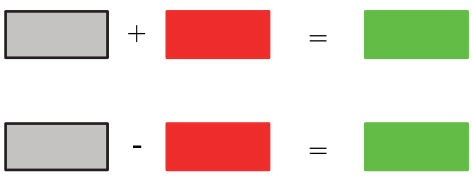
Situation 4 (collective)

Dans l’ensemble des nombres naturels, le problème suivant, où un nombre inconnu se cache dans la boîte grise, n’avait pas de solution :

$$\boxed{} + 17 = 14$$

Dans l’ensemble des nombres entiers relatifs, il a une solution unique, obtenue en ajoutant (-17) aux deux membres.

Plus généralement, tout problème d’un des deux types suivants, où les boîtes rouge et verte enferment des nombres relatifs connus et la boîte grise, un nombre inconnu, a une solution unique qu’on obtient en ajoutant de part et d’autre du signe = soit le contenu de la boîte rouge, soit son opposé.



Ainsi, on a pu prolonger l’addition et la soustraction des nombres naturels aux nombres relatifs, qu’ils soient entiers ou décimaux, sans en altérer les qualités. Et on a gagné une généralité et une simplicité dans la transformation des égalités.

(Ajouter le même nombre aux deux membres d’une égalité, c’est obtenir deux écritures d’un nouveau nombre, alors que “passer un nombre d’un membre à l’autre en changeant son signe”, est un “truc”.)

Situation 5 (individuelle)

$\boxed{x}$

Le dessin d’une boîte grise dans une écriture n’est pas pratique. Les mathématiciens, depuis le XVI$^{\text{ème}}$ siècle, ont eu l’idée de remplacer cette boîte par une lettre ; le choix de Descartes s’est porté sur les dernières lettres de l’alphabet pour représenter cette boîte grise et nous la nommons toujours *x*.

L'exemple de la situation 4 s'écrit :

$$x + 17 = 14$$

Écriture qui signifie : quel(s) nombre(s) peut(peuvent) se cacher dans la boîte grise x ? Cette écriture/question se nomme une **équation**, et un nombre de la boîte grise qui crée une égalité numérique est une **solution** de cette équation.

$x + 51 = 123$
$x + 93 = 49$
$x - 37 = 81$
$x - 56 = -29$
$x - 13 = -67$
$x - (-25) = 12$
$x + (-48) = -184$
$2.x = -76$
$2.x = 37$

Trouver **tous les nombres** solutions s'appelle : **résoudre l'équation**.

Peux-tu résoudre les équations suivantes, dans l'ensemble des nombres entiers relatifs ?

Les deux derniers exemples, assez proches des précédents, montrent qu'il ne faut pas se focaliser trop sur l'existence obligatoire d'une solution.

Situation 6 (collective)

$\boxed{x}$

$\boxed{y}$

1 - On peut aussi imaginer deux boîtes grises différentes entrant dans le jeu des écritures. Et, comme il y a deux nombres à trouver, les boîtes porteront les étiquettes x et y.

Deux informations seront fournies, donnant leur somme et leur différence :

$$x + y = 123 \quad \text{et} \quad x - y = 47$$

En trouvant un autre nom pour les nombres 123 + 47 et 123 - 47, découvre ces nombres.

2 - Que penses-tu de cet autre problème ?

$$x + y = 86 \quad \text{et} \quad x - y = 47$$

3 - Afin de rendre plus facile le traitement de cette double équation, qu'on appelle **système d'équations**, on place les informations sur deux lignes, reliées par une accolade :

$$\begin{cases} x + y = 123 \\ x - y = 47 \end{cases}$$

Une curieuse multiplication

Sur les nombres entiers et les nombres décimaux positifs, on peut se faire une image du produit de deux nombres comme l'aire d'un rectangle ayant ces nombres comme dimensions. Cela n'a plus de sens avec des nombres négatifs. Cependant, l'esprit scientifique nous pousse à étendre les actions, à condition :

- qu'elles prolongent celles que nous connaissons,

- qu'elles gardent les mêmes propriétés.

C'est ainsi que, pour la multiplication, nous avons besoin de reconnaître les propriétés essentielles, celles que nous voulons conserver.

- Dès le départ, page 55 pour calculer 12× 68 , nous avons décomposé l'action en : 10× 68 + 2× 68. Et, page 58, pour calculer 23× 68, en 20× 68 + 3× 68.

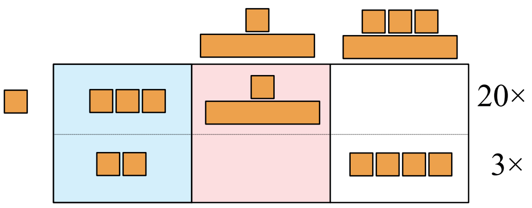
Cette qualité de la multiplication essentielle s'applique à tous les nombres. On peut la formaliser à l'aide de trois rectangles colorés sensés porter chacun un nombre au verso.

- Une autre qualité traduit la particularité du nombre 0 (toujours lui !) :

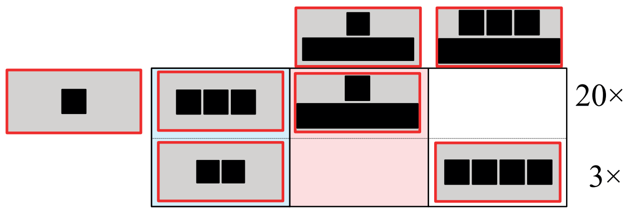
(Le calcul littéral permettra une expression plus simple de ces qualités.)

Situation 1 (collective)

1 - Le multiplicateur n est positif. Les fantômes se multiplient par n, comme les pièces beiges.

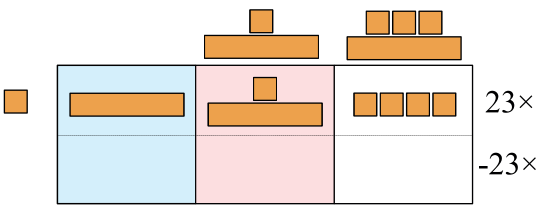


23× 68

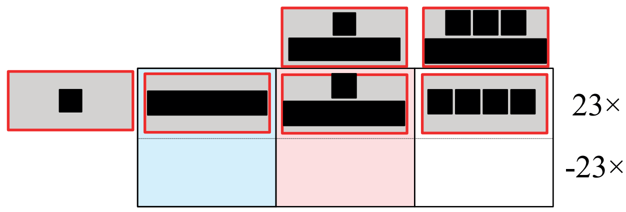


23× (-68)

2 - Le multiplicateur n est négatif. On obtient 0, en ajoutant le produit par n et par son opposé.



0× 68



0× (-68)

Le même calcul, effectué sur les nombres positifs, fournira les résultats quand tu auras découvert le rôle des signes. Rôle que tu peux rassembler dans un tableau donnant le signe du produit en connaissant le signe de chacun des facteurs et qu'on appelle règle des signes.

	+	-
+		
-		

Situation 2 (individuelle)

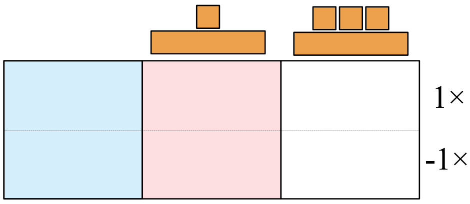
Peux-tu, sans faire de nouveau calcul et en lisant les illustrations ci-dessus, dire quels sont les nombres : 68× 23 ; 68× (-23) ; (-68)× 23 ; (-68)× (-23) ?

Peux-tu généraliser ce résultat à tous les produits de deux nombres entiers relatifs ?

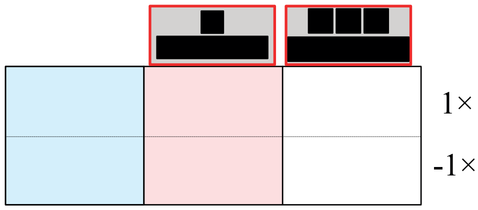
Peux-tu envisager, de même, d'inventer une multiplication des nombres décimaux relatifs ?

Situation 3 (individuelle)

1 - Peux-tu remplir les cases de cet abaque ?



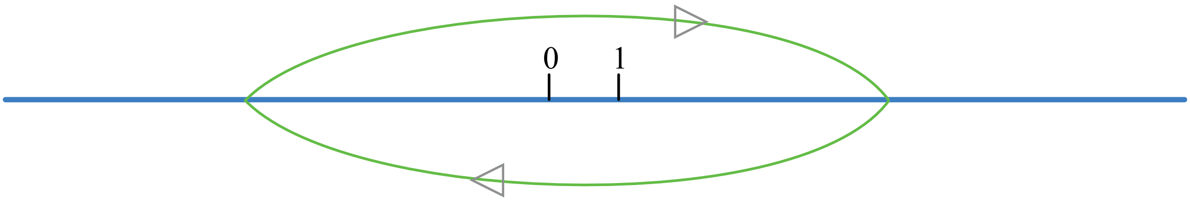
0× 68



0× (-68)

Quel sens, l'action (-1×) peut-elle prendre pour les nombres relatifs ?

2 - Sur une droite graduée par les nombres entiers ou décimaux relatifs, comment se traduit géométriquement l'action (-1×) ?



3 - Dans cette nouvelle équation, tu auras éventuellement besoin du nombre inconnu opposé à x. Il est naturel de le noter ($-x$).

$$29 - x = (-54)$$

(Tu peux ajouter x aux deux membres (même si tu ne le connais pas), ou écrire l'égalité vérifiée par l'opposé du nombre (-54), sous ses deux formes.)

<u>Remarque</u> : Il ne faut pas se laisser abuser par le signe - de l'écriture (-x) : si x est positif, (-x) est négatif ; mais si x est négatif, (-x) est positif.

Situation 4 (collective)

La multiplication des nombres entiers relatifs donne l'occasion de créer de nouvelles équations sur cet ensemble :

$x \times x = (-64)$
$x \times x = 39$
$x \times x = 81$

La première n'a pas de solution car le produit d'un nombre par lui-même est toujours positif. La deuxième n'a pas de solution parce que le nombre 39, bien que positif, n'est pas un "carré parfait".

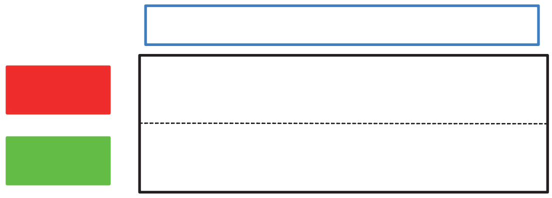
Et résoudre la troisième consiste à trouver <u>tous</u> les nombres dont le carré (produit du nombre par lui-même) est 81. Il y en a deux : 9 et (-9).

Calcul littéral

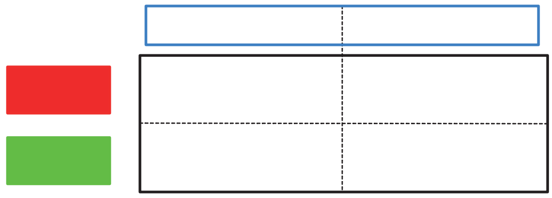
Situation 1

Les propriétés essentielles des opérations ne dépendent pas du choix des nombres sur lesquels elles agissent. En particulier, ce document exploite la propriété citée au chapitre précédent que je vais imager par un rectangle (qui rappelle l'abaque).

Quels que soient les nombres placés dans les boîtes rouge et verte et dans le cadre supérieur bleu, le rectangle en contient le produit. Et, si les nombres contenus dans les boîtes rouge et verte sont opposés, le rectangle contient 0.



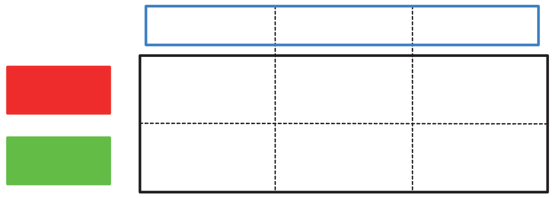
Si nous séparons le nombre supérieur en deux ou plusieurs parties, le produit se partage aussi.



« Placez des nombres entiers ou décimaux relatifs dans les en-têtes colorés et remplissez les rectangles. »

Situation 2

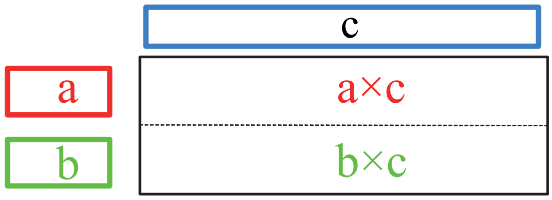
Ce fonctionnement étant le même quels que soient les nombres relatifs placés dans les boîtes en-têtes, vous pouvez l'appliquer sans connaître ces nombres.



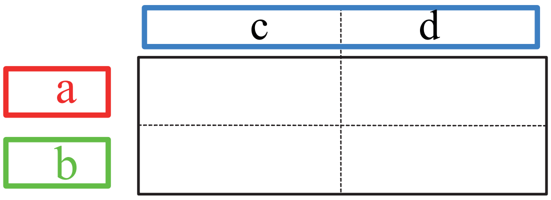
« Affichez un modèle collectif des tableaux. Donnez des nombres “ronds” (10, 20, 30, …, 100, 200, …) pour les en-têtes et chacun essaie de remplir les cases du rectangle. »

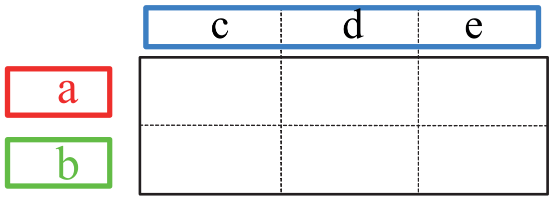
Situation 3

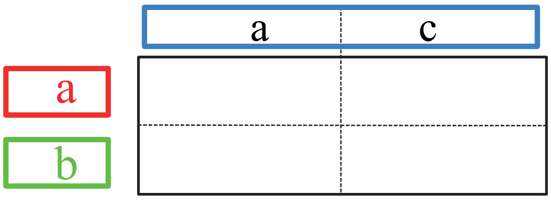
Au XVI[ème] siècle, François Viette eut l'idée géniale de traduire la propriété en remplaçant les nombres inconnus des boîtes par des lettres.

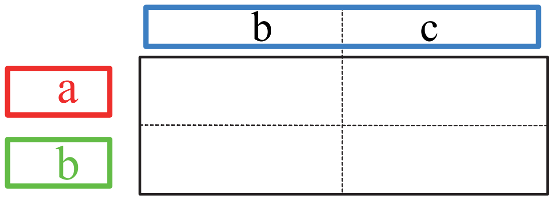


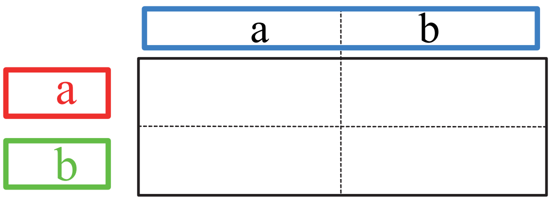
« Toutes les lettres étant des nombres (que vous ne connaissez pas), remplissez les rectangles ci-dessous. Puis, traduisez ces tableaux en lignes de calcul. »

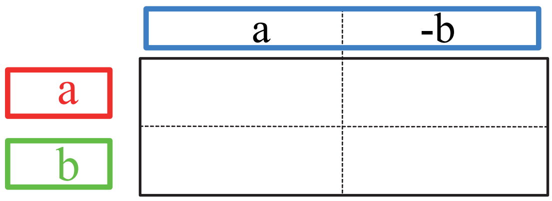












Situation 4

Certains nombres peuvent être connus et d’autres inconnus, donc remplacés par des lettres-nombres. Les tableaux se remplissent de la même manière.

	c	5
a		
2		

	c	-7
a		
4		

	c	-7
a		
4		

	a	3
a		
4		

	x	1
x		
-3		

	4	-x
x		
2		

« Inventez vos propres tableaux, remplissez-les et traduisez-les en ligne ! Et échangez-les collectivement. »

Situation 5

1 - Pour éviter les répétitions, on invente une nouvelle notation : $\mathbf{a \times a = a^2}$.

« Utilisez-la quand vous le souhaitez. »

2 - Pourquoi utilise-t-on parfois les lettres-nombres a, b, c, d et parfois x, y ?

Même si on peut prendre n’importe quelle lettre pour représenter un nombre, nous choisissons le début de l’alphabet pour des nombres qu’on peut choisir et x, y pour des nombres inconnus qu’il nous faut découvrir au travers des défis que sont les équations.

3 - Par la suite, la croix de multiplication est souvent remplacée par un point entre des lettres-nombres ou nombres et lettres-nombres (mais jamais entre deux nombres explicites).

$$a \times b = a.b$$

Mais si l ’un des facteurs est sous écriture numérique, il convient de le placer en premier :

$$a \times 3 = 3.a \qquad b \times (-4) = -4.b$$