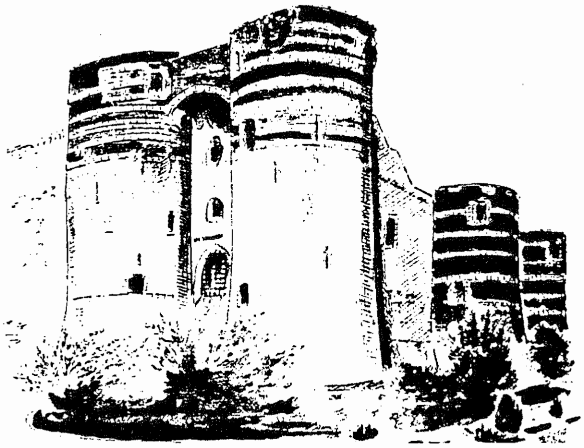
C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)



DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

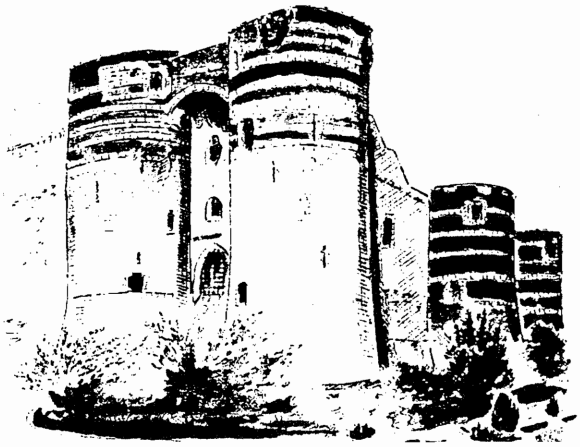
Tome IV

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage d'ANGERS, 27-31 mars 1995
(Stage de formation FCAH01CE de la Direction des Écoles)

Mise en page : Hervé Péault, centre d'ANGERS de l'IUFM des Pays de la Loire
Imprimé par l'IREM de PARIS VII - mars 1996

C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)



DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome IV

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage d'ANGERS, 27-31 mars 1995
(Stage de formation FCAH01CE de la Direction des Écoles)

Mise en page : Hervé Péault, centre d'ANGERS de l'IUFM des Pays de la Loire
Imprimé par l'IREM de PARIS VII - mars 1996

Vous pouvez vous procurer les brochures issues des précédents stages organisés par la **COPIRELEM** :

- ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques***

  Tome 1 : stage de Cahors - 1991. (55 F + frais de port)

  Tome 2 : stage de Pau - 1992. (55 F + frais de port)

  Tome 3 : stage de Colmar - 1993. (45 F + frais de port)

auprès de l'IREM de Paris 7 *(le tome 2 est aussi disponible auprès de l'IREM de Bordeaux).*

La **COPIRELEM** participe à la publication des annales des concours de recrutement des professeurs des écoles, en liaison avec les IREM de Bordeaux et Paris 7.

Vous pouvez vous procurer :

- ***Annales du concours CRPE 95***
  (110 F, port compris)
- ***"Thèmes mathématiques pour le recrutement des PE" (choix de sujets issus des concours externes 92, 93 et 94***
  (110 F, port compris)
- ***Annales des concours CRPE 92, 93, 94***

auprès de l'IREM de Bordeaux

et

- ***Annales du second concours interne de recrutement de PE 95***
  (50 F + frais de port)

auprès de l'IREM de Paris 7

IREM de Bordeaux
40, rue Lamartine
33 400 TALENCE
☏ 56.84.89.76
Fax 56.84.89.72

IREM de Paris 7
2, place Jussieu
75 251 PARIS Cedex 05
☏ (1).44.27.53.83
Fax (1).44.27.56.08

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le stage d'ANGERS (1995) est le quatrième stage que la COPIRELEM (Commission permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire) organise sur le thème ***"Élaboration de documents pour la formation des maîtres en didactique des mathématiques"***, après ceux de CAHORS (1991), PAU (1992) et COLMAR (1993).

Retenu dans le plan national de formation de la Direction des Écoles pour 1994-1995, ce stage s'est déroulé au centre IUFM d'ANGERS du 27 au 31 mars 1995.

De nouveaux textes officiels relatifs au concours de recrutement et à la formation des Professeurs des Écoles sont parus en 1994. Par ailleurs plusieurs IUFM adaptent leurs modalités de recrutement en première année à l'afflux massif de candidats. Cela a eu pour conséquence la mise en place de groupes de réflexion sur ces thèmes.

Cette brochure comporte donc, comme les précédentes, des articles sur des contenus mathématiques de formation, mais aussi des articles plus institutionnels : épreuve de mathématiques du concours de recrutement, tests de recrutement en première année, formation des nouveaux formateurs.

Ces thèmes ont contribué à l'élaboration du 22ème Colloque des professeurs de mathématiques intervenant dans la formation des professeurs des écoles, colloque qui s'est déroulé à DOUAI en mai 1995.

Il est indispensable de poursuivre cet effort de production de documents pour une formation en didactique des mathématiques des professeurs des écoles. Un nouveau stage est d'ailleurs prévu et se déroulera à RENNES en mars 1996.

COPIRELEM
IREM Paris 7
2, place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05

LISTE DES PARTICIPANTS, ANIMATEURS et CONFÉRENCIERS

Danièle	ARHEL	Centre IUFM	91	ÉTIOLLES
Christian	BARTH	Centre IUFM	07	PRIVAS
Élisabeth	BAUTIER	Université Paris 8	93	SAINT DENIS
Jeanne	BOLON	Centre IUFM	78	VERSAILLES
Renée	BOSC	Centre IUFM	75	PARIS
Nivôse	BOULEAU	Centre IUFM	97	FORT DE FRANCE
Joël	BRIAND	Centre IUFM	33	BORDEAUX
Denis	BUTLEN	Centre IUFM	77	MELUN
Ghislaine	CAILLETTE	Centre IUFM	28	CHARTRES
Henri	DELÈGUE	Centre IUFM	59	VILLENEUVE D'ASCQ
Jacqueline	EURIAT	Centre IUFM	88	ÉPINAL
Marie-Noëlle	ÉVEILLARD	Inspection départementale	94	VITRY SUR SEINE
Muriel	FÉNICHEL	Centre IUFM	93	LIVRY-GARGAN
Marie-Louise	GARREAU	Inspection départementale	69	BRON
Claudine	HERVIEU	Centre IUFM	14	CAEN
Catherine	HOUDEMENT	Centre IUFM	76	MONT ST AIGNAN
Marie-Louise	HUET	Centre IUFM	72	LE MANS
François	HUGUET	Centre IUFM	29	QUIMPER
Jean-Louis	IMBERT	Centre IUFM	65	TARBES
Guy	JULIEN	Centre IUFM	45	ORLEANS
Alain	KUZNIAK	Centre IUFM	27	EVREUX
Maryvonne	LE BERRE		69	LYON
Gaby	LE POCHE	Centre IUFM	35	RENNES
Alain	LEBON	Centre IUFM	97	ST DENIS DE LA RÉUNION
Raymond	LECOQ	Inspection départementale	42	ROANNE
Michel	MARBOT	Centre IUFM	85	LA ROCHE SUR YON
Gérard	OZAN	Centre IUFM	91	ÉTIOLLES
Marcelle	PAUVERT	Centre IUFM	93	LIVRY-GARGAN
Hervé	PÉAULT	Centre IUFM	49	ANGERS
Marie-Lise	PELTIER	Centre IUFM	76	MONT ST AIGNAN
Claude	RIMBAULT	Centre IUFM	22	SAINT BRIEUC
Aline	ROBERT	Université Paris 7	75	PARIS
Jean-Louis	SENDRAL	Centre IUFM	82	MONTAUBAN
Liliane	SOSSA	Centre IUFM	77	MELUN
Catherine	TAVEAU	Centre IUFM	93	LIVRY GARGAN
Gérard	TOURNIER	Centre IUFM	81	ALBI
Jean	VINCENT	Centre IUFM	51	CHALONS SUR MARNE

Principes et contenus de la formation initiale en mathématiques des futurs professeurs d'école

Texte élaboré et proposé par la COPIRELEM[1], en mars 1994.

PRINCIPES, OBJECTIFS ET MÉTHODES.

L'enseignement des mathématiques s'adresse à des étudiants ayant suivi des cursus universitaires variés, donc de niveaux scientifiques divers. Il s'intègre à une formation pluridisciplinaire nécessitée par la polyvalence du métier de professeur d'école.

Cet enseignement est donc résolument orienté vers la préparation professionnelle, ce qui implique à la fois un approfondissement de certaines des connaissances mathématiques que les professeurs d'école auront à enseigner et un corps de connaissances particulières, de nature plus didactique et épistémologique.

Les contenus s'appuient sur l'étude des concepts mathématiques permettant une bonne compréhension des notions à enseigner dans le premier degré, en rapport avec les situations d'apprentissage. Dans le cas où certains étudiants rencontrent des difficultés dans la maîtrise de ces savoirs, il convient de leur proposer un module complémentaire dit "de soutien" : celui-ci est centré sur les connaissances directement nécessaires au cours, et non sur le rattrapage d'un hypothétique niveau mathématique général minimum.

Ces concepts sont vus à travers des études de phénomènes d'enseignement, des approfondissements mathématiques, des analyses historiques et épistémologiques, éclairés par des outils de la didactique.

L'enseignement se structure autour d'activités telles que :

- résolution de problèmes,
- observations de classes et d'élèves, en situation de travail mathématique,
- exercices de préparation, de conduite et d'analyse de séances, en liaison avec des maîtres-formateurs,
- analyses de supports pédagogiques (manuels, fichiers, logiciels, didacticiels, jeux éducatifs, matériels, moyens audiovisuels, instruments d'évaluation,...),
- études de textes extraits de revues pédagogiques et de comptes rendus de recherches,
- analyses d'exercices et de réponses d'élèves,
- et bien sûr nombreux exercices mathématiques.

---

[1] COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement (et la formation à l'enseignement) élémentaire, responsable Denis BUTLEN. Adresse : I.R.E.M. de Paris 7, Université Denis Diderot, Tour 56/57, 3°étage, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 Tél :44 27 53 83 / 53 84 Télécopie : 44 27 56 08

CONTENUS DE FORMATION

La construction du nombre et des opérations arithmétiques

- Notions mathématiques, historiques, épistémologiques nécessaires à cet enseignement sur :
  - ◊ nombre entier et numération ;
  - ◊ structures additives ;
  - ◊ structures multiplicatives.
- Analyse et construction de situations d'apprentissage.
- Elaboration de procédures de calcul (calcul mental, algorithmes écrits des opérations arithmétiques, utilisation de la calculatrice) : analyse mathématique et didactique.

Fonctions numériques

- Fonctions linéaires, fonctions affines et quelques autres.
  Cas de la proportionnalité :
  - ◊ son enseignement à l'école : un exemple de transposition didactique ;
  - ◊ différents points de vue : fonctionnel, scalaire, graphique, géométrique (agrandissement, réduction, lien avec le théorème de Thalès).

Extension de la notion de nombre entier

- Connaissance des rationnels (et des décimaux). Insuffisance des rationnels : approche des réels, approximation des réels par les décimaux.
- Construction de situations d'approche des rationnels à l'école élémentaire.
- Exemple d'analyse épistémologique : la construction des décimaux à partir des rationnels ; conséquences possibles pour les choix d'enseignement à l'école.

Géométrie

- Connaissances géométriques de base : caractérisations et constructions de figures simples à la règle et au compas (et utilisation d'autres instruments : équerre, gabarit, rapporteur,...), théorèmes de Pythagore et de Thalès, quelques utilisations simples de transformations ponctuelles du plan (isométries et homothéties planes), étude de solides simples, sections et projections planes de solides simples.
- Analyse et construction de situations d'apprentissage portant sur :
  - ◊ la reproduction d'objets du plan ou de l'espace (avec divers matériels et contraintes),
  - ◊ la description d'objets (pour une utilisation fonctionnelle du vocabulaire),
  - ◊ la représentation d'un objet de l'espace sur un plan,
  - ◊ la construction d'objets du plan ou de l'espace (synthèse de la description et de la représentation).
- Rapports entre connaissances spatiales et savoirs géométriques.

Grandeur, mesure

- Aspects mathématiques, historiques, épistémologiques.
- Un exemple de construction d'une grandeur et de construction d'une mesure (aire, longueur, masse,..).
- Cas particulier du système métrique, unités légales et usuelles.

Raisonnement

Chaque fois qu'une notion mathématique s'y prête particulièrement, on aborde les questions de raisonnement : argumentation, preuve, démonstration.

Résolution de problèmes

A propos des thèmes précédents, les différents aspects de la résolution de problèmes sont mis en évidence :

- sa place dans la construction des mathématiques (point de vue épistémologique),
- son rôle dans la construction des connaissances (point de vue cognitif),
- ses fonctions dans l'enseignement (point de vue didactique et professionnel).

Utilisation d'outils de la didactique des mathématiques

A l'occasion de situations d'enseignement et à partir d'activités portant sur les thèmes définis ci-dessus, on utilise et explicite différents outils de la didactique des mathématiques afin d'aider les étudiants à :

- comprendre ce qui caractérise une situation de référence relative à une notion ou à une famille de notions,
- commencer une analyse a priori, identifier les cadres,
- reconnaître les variables d'une situation et parmi celles-ci les variables didactiques,
- différencier situations d'apprentissage et situations de contrôle,
- identifier différentes phases d'une situation d'apprentissage,
- analyser des procédures d'élèves et des types d'erreurs relativement à un savoir donné (la notion d'obstacle sera traitée à cette occasion).
- repérer certains phénomènes de contrat.

Références institutionnelles

Cette formation prend en compte les programmes du premier degré et du premier cycle des collèges, l'organisation des différents cycles de l'école, les compétences attendues à la fin de chaque cycle en mathématiques.

FINALITÉS DE LA FORMATION

Les finalités de la formation sont :

- rendre les étudiants capables
  - ◊ de construire des situations d'enseignement y compris sur des thèmes non traités en formation,
  - ◊ d'intégrer les mathématiques dans un projet global d'enseignement,
  - ◊ d'adapter leur enseignement aux différents publics d'élèves (secteurs citadin, rural, de banlieue,...),
  - ◊ d'analyser et de prendre en compte des difficultés des élèves et l'hétérogénéité des classes,
  - ◊ de développer une réflexion critique sur les pratiques professionnelles, les manuels scolaires et les documents pédagogiques.
- sensibiliser les étudiants à l'intérêt et l'efficacité du travail d'équipe,
- rendre les étudiants
  - ◊ curieux des publications récentes et des résultats de recherche,
  - ◊ aptes à modifier leurs pratiques en liaison avec les résultats de recherches,
  - ◊ sensibles à l'importance et à l'intérêt d'une formation continuée.

REMARQUES

♦ Une estimation horaire minimum de la formation en mathématiques des futurs professeurs d'école, raisonnable (mais pouvant être avantageusement dépassée), serait de 150 heures, réparties sur deux ans.

♦ Les contenus de formation précisés ci-dessus ne pourront sans doute pas être tous étudiés en formation initiale. Les choix sont à la charge de chaque I.U.F.M.

♦ La formation des enseignants nécessite, pour être efficace, une organisation en groupes d'effectifs limités.

♦ Si le nombre de candidats à la formation dépasse la capacité d'accueil de l'I.U.F.M., il est souhaitable de soumettre les étudiants à un test d'entrée portant sur des compétences disciplinaires.

♦ Afin d'assurer la cohérence de la formation, il est indispensable de mettre en place des dispositifs institutionnels favorisant la liaison entre les différents acteurs de la formation (enseignants-chercheurs, PIUFM, IMF,...). La constitution d'équipes de formation et de recherche pluri-catégorielles enrichit la réflexion et structure la formation.

Paris, 19 mars 1994

PARTIE 1

Construction du nombre et opérations arithmétiques

Nous présentons dans cette première partie deux documents relatifs à la formation des PE1 sur la division.

Le premier propose une activité permettant d'introduire le cours sur la division euclidienne à partir de l'analyse des réponses des étudiants à un problème de calendrier.

Le second est une nouvelle rédaction d'une progression sur la division déjà parue dans les Actes du colloque COPIRELEM de Rouen. Cette nouvelle rédaction comporte aussi un certain nombre de compléments et prend davantage en compte la préparation au concours.

Titre	A propos de la division euclidienne
Auteur	Jean-Louis IMBERT
Origine	Texte élaboré à la suite du stage à partir d'un document de D. ARHEL
Date	Juin 95
Type	Situation de formation en PE1.
Contenu	Compte rendu d'une activité de résolution de problème en PE1. Il s'agit d'un problème de calendrier pour lequel la division euclidienne est un outil adéquat.

A PROPOS DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

Ce texte propose une activité de formation en PE1 mettant en jeu la division euclidienne. Cette situation a été proposée à un groupe par Danielle ARHEL et le présent document rend compte de procédures utilisées par les étudiants.

LE PROBLÈME

Il s'agit de résoudre le problème suivant

> *Aujourd'hui nous sommes mercredi 15 mars 1995* (date de la mise en situation), *quelle sera la date dans 5000 jours ?*

OBJECTIFS

- donner (ou redonner) du sens à la division euclidienne.
- comparer et optimiser différentes procédures de résolution d'un problème.
- mettre en évidence l'existence de procédures non élaborées (artisanales) là où la division euclidienne intervient dans une procédure experte pour une situation non identifiée a priori comme pouvant relever de celle-ci.

ORGANISATION

Travail individuel suivi d'une première confrontation par groupes de deux ou trois.

Après un premier temps de recherche il s'avère nécessaire de préciser ce qu'est une année bissextile :

Une année est bissextile si son numéro est un multiple de 4.

Exception *: les années dont les numéros sont des multiples de 100, sans être multiples de 400, ne sont pas bissextiles.*

PROCÉDURES OBSERVÉES

La résolution a permis de mettre en évidence les stratégies différentes mobilisées pour la détermination du jour de la semaine comme pour la détermination de l'année, du mois puis du quantième du mois.

1) Détermination de l'année, du mois et du quantième du mois

Elle se fait :

a) à l'aide de procédures additives ou soustractives

Les étudiants ôtent d'abord 291 (nombre de jours nous séparant du 31 décembre 1995 (1er Janvier de l'année suivante) ; puis procèdent *soit par soustractions successives*

Ils soustraient 366 ou 365 au nombre total de jours à atteindre (5000) pour déterminer l'année demandée par comptage, lorsque le résultat est inférieur à 365. Il reste, après le dernier retrait : 326.

Le mois est obtenu par retrait de 31, 29 (2008 est une année bissextile), 31... jours à 326. Le jour est identifié par le nombre restant inférieur au nombre de jours du mois suivant. (21 novembre 2008)

soit par additions successives

Ils ajoutent 366, 365,...,en partant de 291. Le premier dépassement de 5000 (c'est-à-dire 5040) détermine le premier "31 décembre" qui ne sera pas atteint (le 31 décembre 2008). Le mois est déterminé par décompte de 31, puis 9.

b) à l'aide de procédures multiplicatives

Ces deux premières procédures ont été parfois combinées avec la multiplication (périodicité d'une année bissextile suivie de trois ans non bissextiles) concrétisées par trois retraits - respectivement ajouts- réitérés de 1461 .

c) à l'aide de la division euclidienne

La division de 5000 par 365 permet de déterminer l'année. Pour la détermination du mois les étudiants ne réutilisent pas toujours le reste. Certains ont calculé le nombre de jours restants en effectuant la soustraction 5000 - 365 x 13.

Un dénombrement est effectué, pour tenir compte des années bissextiles, avant d'être déduit (255 - 4).

Le quotient décimal 13,69 à la place du quotient entier a parfois été utilisé comme représentant 13 années, 6 mois et 9 jours...

2) La détermination du jour de la semaine

Elle a donné lieu à trois procédures :

a) dénombrement de décalages

D'une année à la suivante il y a 1 jour de décalage (2 si l'année qui suit est bissextile). 13 années dont 4 bissextiles représentent un décalage de 17 jours. La détermination du vendredi, 17 jours après un mardi, s'est rarement faite en utilisant directement le reste 3.

b) division euclidienne de 5000 par 7

Le reste 2 s'interprète alors : puisque nous sommes un mercredi nous serons, dans 5000 jours, le deuxième jour qui suit un mercredi, c'est-à-dire un vendredi.

c) utilisation du quotient décimal de 5000 par 7

Le quotient approché 714,28 représente alors 714 semaines et environ 28/100 (approximation de 2/7), mais l'interprétation des étudiants est généralement 2,8 jours qu'ils arrondissent selon les cas à 2 jours (ce qui donne une réponse juste malgré un raisonnement erroné) ou à 3 jours.

MISE EN COMMUN

Lors de la mise en commun des différentes procédures utilisées, la division apparaît localement comme une procédure économique dans ce contexte.

Une réflexion s'est engagée sur :

la division euclidienne

Elle a permis de revoir le statut des différents nombres dans une division euclidienne ainsi que la manière dont le quotient et le reste interviennent comme éléments répondant au problème posé. Le résultat d'une division euclidienne dans **N** est un couple de naturels alors que les opérations étudiées jusqu'à présent associent à un couple donné un seul nombre.

la différence entre quotient entier et quotient décimal.

Dans la division, l'écriture décimale obtenue n'est qu'une approximation du quotient et la virgule ne sépare pas des unités d'ordres différents. Le calcul effectué ne donne pas toujours une valeur du quotient mais seulement une approximation de celui-ci. Ceci nous a permis de revenir sur l'écriture décimale des heures (1,6 heure à traduire par 1 heure 36 minutes).

Cette synthèse de l'activité a donc permis de dégager les éléments de cours, concernant la division, qu'il était important de reprendre au niveau PE1.

Titre	La division en formation initiale
Auteurs	Hervé PÉAULT, Denis BUTLEN
Date	juin 1995
Type	Plan de cours P.E.
Contenu	Plan de cours reprenant très largement la progression proposée sur ce sujet par Hervé Péault dans les actes du colloque COPIRELEM de Rouen (1988). Cette nouvelle rédaction développe quelques points et propose divers ajouts prenant en compte la préparation éventuelle au concours de première année.

LA DIVISION EN FORMATION INITIALE

Ce plan de cours reprend et développe la progression proposée par Hervé Péault dans les actes du colloque COPIRELEM de Rouen [8]. Il essaie également de traiter ce thème dans la perspective de la préparation au concours de première année. Il reste que nombre des activités proposées peuvent s'adapter à d'autres contextes, tant de formation initiale que de formation continue.

Nous proposons une suite d'activités qui forment un tout mais il est rare que les durées de formation imparties puissent permettre de tout traiter intégralement. Des adaptations seront donc toujours nécessaires.

Certaines activités, notamment les deux premières, peuvent d'ailleurs être proposées dans d'autres contextes que celui de l'étude de la division.

Objectifs généraux

- Rappel de certains concepts mathématiques autour de la division, euclidienne ou non,
- Analyse des problèmes de division et des procédures de résolution,
- Étude de notions élémentaires de didactique,
- Apport d'éléments d'information permettant la construction et l'analyse de séquences à l'école élémentaire.

Première situation *"Concertum"*[1]

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour la résolution d'un problème.
- Donner du sens, à partir de l'analyse d'une activité, à des notions de didactique telles que dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation.

[1] Nous reprenons ici le titre ***Concertum*** donné à cette activité dans ***Jeux 2 : Jeux et activités numériques*** (Publication APMEP, 1984).

Il semble qu'elle soit connue depuis longtemps et attribuée à un professeur d'informatique, Michel LUCAS, qui l'utilisait dans le cadre de formations informatiques pour étudier les algorithmes correspondant aux stratégies retenues.

Suzy GAIRIN-CALVO et Joël BRIAND y ont aussi fait référence en formation d'instituteurs sous le nom ***Le compte est bon collectif*** dans les Actes du Colloque COPIRELEM d'Angers de mai 1987 (rapport du groupe A1, p. 70 sq.)

Certains éléments d'analyse proposés par Joël Briand ont d'ailleurs été repris ici.

Remarque

Cette situation peut aussi être utilisée facilement en dehors de l'étude de la division. L'intérêt qu'elle suscite généralement, l'engagement des participants, le travail d'équipe qu'elle nécessite, les débats qu'elle fait surgir, les rétroactions qu'elle provoque, ... en font une situation riche et intéressante comme point de départ à une réflexion plus générale sur les problèmes d'apprentissage.

Matériel

Pour chacun des participants : 10 cartons numérotés de 0 à 9 (et au-delà si on veut utiliser certains prolongements du jeu), de la taille de cartes à jouer (type bristol). Chacun tiendra ses cartons en main comme pour un jeu de cartes.

Au cours du jeu, chaque joueur sera amené à choisir un nombre de 0 à 9 et manifestera son choix en sélectionnant puis en montrant l'une de ses cartes. On peut adopter aussi un autre dispositif sans ce matériel : lorsqu'un joueur choisit un nombre, il l'écrit sur une feuille de papier et c'est la feuille qui sera montrée.

Organisation

Les étudiants sont par équipes de 3. Si le nombre de participants n'est pas un multiple de 3, on peut faire jouer un rôle par deux personnes à la fois, celles-ci effectuant les choix chacune leur tour. Il peut aussi être intéressant de confier à une ou deux personnes le rôle d'observateur des stratégies des différentes équipes.

Le choix préalable d'équipes de 3 nous a paru le plus intéressant pour la diversité des stratégies, mais on pourrait aussi commencer avec des équipes de 4, voire plus.

Présentation du jeu

Lorsque chaque joueur a bien ses cartes en main, le professeur donne la consigne suivante (éventuellement en la mimant pour faciliter la compréhension) :

> *Je vais vous proposer un nombre entier, que j'appellerai "nombre-cible". Chacun choisira un carton et un seul, et l'objectif de chaque équipe sera que les 3 cartons choisis par les différents membres de l'équipe aient pour somme le nombre-cible.*
>
> *Faisons un premier essai. Dans quelques instants je vais vous indiquer un nombre. Êtes-vous prêts ?*

Cette dernière question peut laisser penser qu'il faut être prêt tout de suite. On peut la remplacer par *"Indiquez-moi quand vous êtes prêts"* qui laisse entendre qu'il y a "quelque chose à préparer".

L'enjeu est ici de comprendre qu'il va falloir, dans chaque équipe, se concerter préalablement au jeu et que, sinon, le jeu est un jeu de hasard qui n'a pas d'intérêt. En ce sens, la façon de poser la question, le ton, l'attitude du professeur... vont déterminer fortement le comportement des étudiants.

Il arrive que, malgré un certain scepticisme, les joueurs se déclarent tout de suite prêts. Après un, voire plusieurs essais, évidemment infructueux, ils finissent par demander l'autorisation de se concerter au préalable.

Le plus souvent, deux questions sont posées d'emblée par les participants : *"Est-ce qu'on peut se concerter ?"*, question à laquelle il est évidemment répondu par l'affirmative, et *"Est-ce que le nombre-cible peut être n'importe quel nombre ?"*, question à laquelle il n'est pas nécessaire de répondre et qu'on peut retourner. Un court débat entre les participants convainc en général assez vite que les nombres-cibles ne peuvent être choisis que parmi les naturels de 0 à 27.

Phase 1

Le professeur propose quelques essais (diversifier le choix des nombres-cibles à la fois entre petits et grands nombres, ainsi qu'entre multiples et non multiples de 3). Lorsque chaque équipe montre ses cartons, il fait vérifier par les autres le résultat obtenu.

Il y a de temps en temps des erreurs, soit que la stratégie de l'équipe soit incorrecte, soit plus souvent que l'un des joueurs l'ait mal comprise. Il est fréquent que des équipes utilisent une stratégie valable pour tous les nombres sauf 26 (cf. analyse des procédures ci-après). Il est donc conseillé de ne proposer 26 comme nombre-cible qu'après plusieurs essais.

En cas de difficulté, le professeur informe que chaque équipe peut demander un temps mort pour une nouvelle concertation.

Cette phase s'arrête lorsque toutes les équipes commencent à fournir des choix corrects.

Phase 2

Le professeur donne la consigne suivante :

> *Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant la stratégie choisie, de la façon la plus claire possible, afin que d'autres soient capables de l'utiliser. Les messages rédigés seront ensuite échangés entre les équipes, et nous jouerons à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie indiquée sur le message reçu.*
>
> *Sur vos messages, il n'est pas nécessaire de réécrire la règle du jeu, tout le monde la connaît maintenant. Vous devez par contre indiquer clairement le rôle de chacun des membres de l'équipe. Attention : il ne s'agit pas de mettre les autres en difficulté. Au contraire, les messages doivent simplifier au maximum la tâche des récepteurs.*

Lorsque toutes les équipes ont terminé leur rédaction, chacune donne son message à une autre équipe. Chaque équipe est alors invitée à se concerter de façon à pouvoir jouer en utilisant la stratégie décrite sur le message reçu. Si certains messages sont jugés insuffisamment compréhensibles, il est possible de demander des éclaircissements aux rédacteurs, mais uniquement par écrit.

Quand tout le monde est prêt, on joue à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie décrite sur le message reçu. Lorsque les cartons sont levés, chaque équipe vérifie que les utilisateurs de sa stratégie l'ont correctement utilisée. Les éventuelles contestations entament la phase suivante.

Phase 3

Chaque équipe doit essayer de deviner et formuler la stratégie utilisée par les autres. Pour cela, ce n'est plus le professeur qui propose les nombres-cibles, mais les étudiants.

Chaque stratégie fait l'objet d'un débat où sont examinés sa pertinence, sa commodité d'utilisation, ainsi que la clarté des messages associés.

Comme amorce aux phases suivantes, le professeur propose de débattre les questions :

- *y a-t-il une stratégie meilleure que les autres ?*
- *quelles sont les qualités d'une bonne stratégie ?*

Phase 4

Cette phase, comme la suivante, a pour objectif de faire évoluer les stratégies en faisant associer la notion de "bonne" stratégie à celle de stratégie "généralisable". Cette association est parfois formulée naturellement par les étudiants, mais il peut aussi être nécessaire que le professeur la provoque.

Le même jeu est repris, mais avec cette fois des équipes de 4 (ou de 5, ou de 6, ou de 7, ... suivant le nombre de personnes du groupe), l'intervalle des nombres-cibles possibles variant en conséquence.

Phase 5

Cette phase se déroule toujours avec le même jeu et les mêmes groupes, mais cette fois on n'utilise que les cartons de 0 à 7 (on peut aussi utiliser des cartons de 0 à p avec $p > 9$).

A la fin, c'est tout le groupe d'étudiants qui forme une seule équipe et doit se concerter pour jouer, une première fois avec les cartons de 0 à 9, une seconde fois avec les cartons de 0 à 7.

A ce stade, c'est habituellement la procédure décrite en n° 1 ci-après qui est retenue. La dernière phase aura pour objectif de faire formuler cette procédure dans le cas le plus général.

Phase 6

Le professeur donne à chercher le problème suivant :

> *On dispose des cartons de 0 à p ; les joueurs sont par équipes de k joueurs ; le nombre choisi est n ; explicitez dans ce cas la stratégie que vous avez retenue dans la phase précédente.*

Ce travail s'avère parfois difficile et il peut d'ailleurs être différé à une prochaine séance pour laisser le temps d'une recherche individuelle. Il se terminera par une écriture précise sur le plan mathématique.

Prolongement
Analyse de l'activité

Invités à réagir sur cette activité, les étudiants posent parfois la question : *"peut-on la faire en classe avec les élèves, et à quel niveau ?".*

D'ailleurs, lorsqu'elle est proposée en formation continue, elle conduit souvent les maîtres de CM ou les professeurs de collège à souhaiter faire l'essai avec leur classe.

Ce souci de transposition ne fait pas partie des objectifs que nous avons retenus, mais il dénote un intérêt sur lequel il est possible de s'appuyer pour analyser l'activité :

> *Qu'est-ce qui vous paraît intéressant dans cette activité ? Du point de vue du fonctionnement intellectuel, comment caractériseriez-vous les différentes étapes ? Si on reprend depuis le départ avec pour objectif la connaissance et la compréhension de la formule élaborée à la fin, quels autres scénarios d'enseignement pourrait-on imaginer ?*

Ce questionnement (ou un autre...) peut être un point de départ pour permettre au professeur de pointer un certain nombre de notions didactiques, de façon plus ou moins développée selon le public.

1) On trouve dans cette activité **différents types de situations**, notamment

- des **situations d'action** : c'est en particulier le cas dans la première partie où il s'agit de se créer un modèle permettant de résoudre le problème posé. Ce modèle peut être remis en cause en fonction des rétroactions provoquées par les résultats obtenus en appliquant la stratégie retenue.
- des **situations de formulation** : à la fois au début où chaque membre de l'équipe doit faire comprendre son idée aux autres membres (il y a alors souvent mélange de formulations écrites et orales, les formulations orales dominant le plus souvent) puis dans la seconde phase où la pertinence de la formulation est l'objectif explicite.
- des **situations de validation et de recherche de preuve** : dès le début, il y a nécessité d'un débat dans l'équipe, pour faire admettre le bien-fondé d'une stratégie choisie, puis dans les phases suivantes lorsqu'il s'agira d'argumenter sur la pertinence des stratégies proposées, de prouver leur validité et leur performance.
- des **situations d'institutionnalisation** : d'une part lorsque s'opère un choix quant à une stratégie meilleure que les autres, savoir faire reconnu et réutilisable (avec cette réserve, ici, qu'il a peu de chance d'être réutilisé directement en-dehors de ce jeu), d'autre part lorsque le modèle de la division est identifié et reconnu pour construire une procédure experte ; cela suppose une nouvelle réorganisation des connaissances, enrichie du sens nouveau donné à la division. La division peut ici être resituée dans le cadre d'une dialectique outil-objet : ayant été étudiée antérieurement comme "objet" de savoir, elle est ici "outil" pour résoudre un problème, ce qui lui permet d'acquérir un sens nouveau et par là même d'être confortée comme "objet" de savoir.

2) Une réflexion sur les **variables didactiques** est par ailleurs intéressante. Ces variables sont ici essentiellement les nombres en jeu : quels choix ont été faits ? Peut-on imaginer que les procédures seraient différentes avec d'autres choix ? Par ailleurs le brusque changement de variable (par exemple lorsqu'on demande de jouer avec tout le groupe des étudiants) amène à abandonner les stratégies les moins performantes (**saut informationnel**)

3) On peut aussi analyser des phénomènes de **contrat didactique**. Au départ, si le professeur ne laisse pas entendre qu'il faut se concerter, les étudiants peuvent penser qu'ils doivent savoir répondre directement puis que ce n'est pas possible ou que c'est l'effet du hasard. Il leur faut rompre ce contrat implicite et comprendre que c'est à eux de trouver les clés qui leur permettront de résoudre ce problème. Ainsi s'opère la **dévolution** : les étudiants ne se sentent plus dans la situation de deviner ce qu'attend le professeur et d'essayer de répondre à ses attentes, mais veulent trouver eux-mêmes une solution. On le voit bien lors des écritures fournies : les étudiants ne se sentent pas obligés de fournir des écritures mathématiques standardisées, reconnues... ils cherchent seulement à se faire comprendre et vont en général à l'économie d'écriture, même les plus matheux (il s'agit là d'un point qui peut sensibiliser très fortement les étudiants au problème du statut de l'écrit mathématique dans la classe). La recherche de la stratégie et la recherche de l'écriture sont des **situations a-didactiques**, c'est-à-dire que l'étudiant se saisit du problème sans essayer de comprendre les intentions didactiques de celui qui l'a posé.

Dans les situations d'enseignement, la dévolution d'une situation a-didactique peut ne pas s'opérer, compromettant ainsi l'apprentissage : soit que les élèves ne cherchent qu'à repérer des indices permettant de deviner la bonne réponse qu'attend le maître, soit qu'ils mettent en place des stratégies de contournement pour s'assurer de répondre "juste". Un exemple nous en a été fourni par un maître d'une classe de SES qui avait proposé le jeu du *Concertum* à ses élèves. La première phase semblait bien fonctionner et les réussites étaient fréquentes. Lorsqu'il prit connaissance des messages, il eut la surprise de voir que, dans une large majorité, ils étaient rédigés dans des termes à peu près semblables du type *"il y en a un qui calcule et qui fait des signes aux autres pour qu'ils mettent leurs nombres"* ou, plus laconiquement : *"on triche, sans se faire voir..."* L'absence même de gêne, de la part des élèves qui fournissaient ces messages, montre bien à quel point le seul enjeu perçu par eux était celui de donner une réponse "juste".

Inventaire de quelques procédures

Appelons n le nombre-cible. Certaines procédures reviennent assez fréquemment lors de la première phase de jeu (nous nous situons ici dans le cas d'équipes de 3 joueurs avec des cartons de 0 à 9). Elles nécessitent l'identification de chaque joueur et de son rôle. Les désignations le plus souvent choisies sont A, B, C,... L'intérêt d'une numérotation avec les entiers, du type A1, A2, A3,... n'apparaît pas avec des équipes de 3 ou de faible effectif. Cette numérotation devient quasi indispensable avec tout le groupe.

1) Utilisation de la division par 9

C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient $n = 9q + r$. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.

Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes) :

- *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0*
- *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0*
- *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n - 18.*

Comme nous l'avons signalé, c'est la procédure qui, dans la plupart des cas, sera reconnue comme la plus facilement généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, il suffit de faire la division euclidienne de n par p, ce qui donne $n = pq + r$. Les q premiers joueurs jouent p, le joueur de rang $q + 1$ joue r et les autres jouent 0. Le nombre k n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres-cibles possibles.

La principale difficulté de cette généralisation vient ici de la nécessité de numéroter les joueurs et, pour chacun d'eux, de situer son numéro par rapport à q.

A la fin de la phase 5, il arrive que cette généralisation soit retenue sans référence à la division, par découpage d'intervalles : au joueur A on attribue l'intervalle de 0 à 9, au joueur B de 10 à 18, au joueur C de 19 à 27, etc. Le rôle de chacun est alors défini selon que le nombre-cible est avant, dans, ou après l'intervalle.

Dans ce cas, pour faire expliciter la démarche de division, le professeur peut aborder la phase 6 avec un exemple numérique sur de grands nombres et en proposant une numérotation des joueurs. On supposera par exemple qu'il y a 127 joueurs numérotés de 1 à 127 avec 845 comme nombre-cible. La question posée est : *chaque joueur connaît son numéro, quel calcul doit-il faire pour choisir son carton ?*

2) Utilisation de la division par 3

On divise n par 3, ce qui donne $n = 3q + r$.

Si $r = 0$, chaque joueur joue q ; si $r = 1$, deux joueurs jouent q et un autre $q + 1$; si $r = 2$, un joueur joue q et les deux autres $q + 1$.

Il arrive assez fréquemment, lorsque cette procédure est retenue, qu'un seul joueur soit chargé des "correctifs" et doive donc jouer $q + 1$ si $r = 1$, mais $q + 2$ si $r = 2$, les autres jouant tous deux q. Il est utile pour le professeur d'identifier cette forme car elle marche toujours, sauf pour $n = 26$.

Cette procédure est elle aussi généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, on fait la division euclidienne de n par k, ce qui donne $n = kq + r$. Les r premiers joueurs jouent $q + 1$ et les autres q. Le nombre p n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres possibles.

Là encore, la plus grande difficulté d'utiliser cette procédure généralisée vient de la nécessité de numéroter les joueurs.

3) Autres procédures

Diverses autres procédures peuvent apparaître, plus ou moins difficiles à généraliser. Par exemple

a) utilisation de la parité

- si $n \leq 18$

  ⇒ si n est pair, A et B jouent n/2, C joue 0

  ⇒ si n est impair, A et B jouent (n - 1)/2, C joue 1

- si $n > 18$

  ⇒ A et B jouent 9 et C complète

b) délimitation de tranches autonomes

La procédure ci-dessus peut être considérée comme un cas particulier de cette catégorie. Elle consiste à découper l'intervalle [0 , 27] en sous-intervalles et à définir une règle sur chacun de ces sous-intervalles, ces règles pouvant être sans rapport entre elles.

Très souvent, les intervalles choisis sont liés à la numération et on trouve fréquemment une règle pour les nombres inférieurs à 10, une autre pour les nombres de 10 à 20 et une troisième au-delà de 20.

c) Constitution d'une table

C'est encore un cas particulier du cas précédent. On envisage non seulement des intervalles, mais tous les nombres possibles et on définit le rôle de chaque joueur pour chacun d'eux. On pourrait imaginer des répartitions totalement arbitraires pour chaque nombre. En réalité les tables choisies sont souvent constituées entièrement ou partiellement à partir de l'une des deux premières procédures décrites. Mais celles-ci restent au départ implicites, l'explicitation pouvant se faire progressivement.

Remarque

Il n'est pas sans intérêt de mettre en relation, d'une part les deux premières procédures décrites, division par 9 (p dans le cas général) et division par 3 (k dans le cas général), et d'autre part l'analyse des situations de division proposée plus loin. L'exemple pourra être repris lors de cette étude.

On peut dire ainsi que

- la procédure de division par 9 correspond à une représentation en termes de **division-quotition** : chaque joueur choisit 9 (ou p) et le problème est de savoir pour un nombre-cible n donné, combien de joueurs devront intervenir :

1	9
?	n

1	p
?	n

- la procédure de division par 3 correspond à une représentation en termes de **division-partition** : 3 (ou k) joueurs cherchent à obtenir n à parts égales et il s'agit de savoir combien chacun doit jouer :

1	?
3	n

1	?
k	n

Dans les deux cas, la difficulté vient du fait qu'on n'utilise pas des réels ni même des décimaux, mais des entiers : il faut se situer dans le cadre de la division euclidienne et interpréter le reste éventuel en termes de jeu "décalé" pour l'un des joueurs.

Deuxième situation
"La course à 20"

Cette activité a été décrite et étudiée en détail par Guy Brousseau. Initialement, elle visait à introduire avec les élèves l'algorithme de la division : « *La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division.* »[2] .

Mais cette activité a aussi l'intérêt d'être une situation riche qu'on peut analyser dans le cadre de la théorie des situations[3]

Elle nous paraît intéressante à utiliser en formation. Outre ses liens avec la division, elle est l'occasion de revenir sur divers concepts de didactique.

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour définir une stratégie gagnante d'un jeu.
- Donner du sens, à partir de l'analyse de l'activité, à des notions de didactique, en particulier dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation, notions de situations didactiques et a-didactiques.

---

[2] Guy Brousseau, ***"Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen"*** dans ***"La mathématique à l'école élémentaire"*** (APMEP - 1972)

[3] voir ***"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire"***, cours de G. Brousseau, in "Actes de la première Université d'été des professeurs d'Ecole normale", Olivet, 1988 (publication de l'IREM de Bordeaux).

Le jeu

Deux adversaires A1 et A2 sont en présence. A1 commence et dit 1 ou dit 2 ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A1 ; A1 à son tour dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit 20 a gagné.

Exemple de partie
(avec gain pour le joueur A2) :

2 - ***3*** - 5 - ***6*** - 7 - ***9*** - 10 - ***11*** - 13 - ***15*** - 16 - ***17*** - 18 - ***20***

Ce jeu peut aussi être appelé *"course à 20 de pas 3"* en tant que cas particulier du cas plus général de la *"course à n de pas p"* :

Soient n et p deux naturels (n < p). Deux adversaires A1 et A2 sont en présence. A1 dit un naturel strictement inférieur à p ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par A1 ; A1 à son tour dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit n a gagné.

Ce dernier jeu peut lui-même être considéré comme cas particulier du jeu suivant :

Soient a_1, a_2, ... a_k, k entiers distincts et n un naturel. Deux adversaires sont en présence. A1 dit l'un des a_i ; A2 ajoute l'un des a_i au nombre dit par A1 ; A1 ajoute à son tour l'un des a_i au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dépasse n a perdu. (c'est-à-dire que celui qui dit n a gagné, mais n peut n'être pas atteint).

Tous ces jeux font partie de la catégorie des jeux de NIM. Ils se caractérisent par le fait que toute position possible du jeu est soit gagnante soit perdante avec le sens suivant :

- une position est **gagnante** si toute position suivante est une position perdante,
- une position est **perdante** s'il existe au moins une position gagnante parmi les positions suivantes.

A partir de la position gagnante définie par le but du jeu, une **analyse rétrograde** permet de déterminer de proche en proche les positions gagnantes et les positions perdantes.

Exemple, avec le cas de jeu le plus général et les valeurs suivantes :

n = **30** et k = 3 avec a_1 = **2**, a_2 = **3**, a_3 = **6**

- 30 est gagnant ainsi que 29 (ces positions obligent toutes deux l'adversaires à dépasser 30)
- 28 est perdant car la position gagnante 30 peut être atteinte (+2)
- 27 est perdant car une position gagnante peut être atteinte (+2 ou +3)
- 26 est perdant (accès à une position gagnante par +3)
- 25 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 24 est perdant (+6)
- 23 est perdant (+2 ou + 6)
- 22 est perdant (+3)
- 21 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 20 est gagnant pour la même raison
- 19 est perdant ainsi que 18, 17
- 16 est gagnant
- 15 est perdant ainsi que 14, 13,
- 12 est gagnant ainsi que 11
- 10 est perdant ainsi que 9, 8
- 7 est gagnant
- 6 est perdant ainsi que 5, 4
- 3 est gagnant ainsi que 2.

Finalement, les positions gagnantes sont :

2, 3, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25, 29, 30.

La stratégie gagnante consiste alors à jouer en premier et à commencer soit par 2 soit par 3, ce qui permettra de toujours conserver une position gagnante.

Si on prend maintenant n = 32, les positions gagnantes sont translatées et deviennent :

4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 31, 32.

La stratégie gagnante consiste alors à laisser l'adversaire jouer en premier, ce qui permettra d'obtenir ensuite à coup sûr une position gagnante.

Lorsque n est grand, cette analyse rétrograde est longue, d'où l'intérêt de rechercher une règle permettant d'établir en fonction de n et des a_i la liste des positions gagnantes.

A notre connaissance, une telle règle n'a jamais été formulée dans le cas du jeu le plus général. Par contre, et c'est ce qui fait l'intérêt de ce jeu ici, il est possible de formuler une règle dans le cas de *"la course à n de pas p"*.

Cette règle est la suivante :

soit r le reste de la division euclidienne de n par p + 1, les positions gagnantes sont de la forme r + k(p + 1).

En formation, on peut par exemple

- soit étudier d'abord le problème dans le cas le plus général avec un exemple numérique du type ci-dessus, de façon à faire découvrir aux étudiants le principe de l'analyse rétrograde puis étudier ensuite la course à n et établir une règle en lien avec la division ;
- soit étudier directement la course à 20 avant de généraliser à la course à n. C'est ce choix que nous décrivons ci-après.

Phase 1

Découverte de l'analyse rétrograde

Les étudiants sont répartis par groupes de 2 et sont invités à jouer jusqu'à la découverte d'une stratégie gagnante présentée comme hypothétique. Lorsque des groupes trouvent une telle stratégie, le professeur leur propose de rejouer avec changement de la case d'arrivée puis du pas, afin qu'ils généralisent leur stratégie. Pour les groupes les plus avancés, un changement des variables numériques (n et p plus grands) pourra conduire à la formuler en termes de division.

Commentaires

Après quelques parties dans lesquelles les étudiants jouent au hasard, le théorème *"17 est une position gagnante"* apparaît en général assez vite, d'abord implicitement puis explicitement. Lorsqu'on le leur demande, les étudiants n'ont pas trop de difficultés à argumenter cette proposition. Le passage à l'analyse rétrograde est beaucoup plus délicat. Il faut parfois inviter les étudiants à faire une partie en jouant à la course à 17 puis les faire jouer à nouveau à la course à 20 ; on peut recommencer en les faisant jouer à la course à 14... Certains ont beaucoup de mal à "remonter" entièrement la suite des nombres jusqu'à la position gagnante initiale. Une mise au point collective sur ce que sont des "positions gagnantes" et des "positions perdantes" est en général nécessaire.

Phase 2

Lien avec la division

Cette phase peut se dérouler collectivement sous forme d'échange sur les stratégies découvertes par les groupes. Il s'agira dans un premier temps d'institutionnaliser le principe de détermination des positions gagnantes et des positions perdantes. La consigne sera ensuite de chercher à trouver le plus vite possible la position gagnante initiale. L'augmentation des valeurs de n et p (par exemple course à 227 avec un pas de 23) oblige alors à optimiser les calculs des positions gagnantes, ce qui permettra d'institutionnaliser la règle de gain en lien avec la division.

Commentaires

Ce jeu a l'avantage de ne pas évoquer spontanément une situation de division. La première procédure efficace qui apparaît est celle des soustractions successives n - p - p - p... Il faut parfois quelque temps avant que les étudiants y voient le lien avec la division. C'est donc un moyen intéressant pour une réflexion sur le sens *"soustractions successives"* de la division.

Phase 3

Institutionnalisation didactique

Une réflexion sur les variables didactiques et là encore sur les différents types de situation pourra être menée par le professeur. Voir en particulier [3], page 104 et suivantes. Voir aussi les commentaires précédents à propos de la situation *"Concertum"*.

On peut discuter le choix d'introduire la division à l'école à partir de la course à 20. Il reste que l'activité est en soi une situation-problème intéressante à proposer à des élèves. A défaut de la réaliser effectivement, on pourra proposer aux étudiants de visionner, lorsqu'il est disponible, le film CNDP ***"Qui dira vingt ?"*** [9]. Ce sera l'occasion de repréciser les notions précédentes dans une situation de classe.

La division
Aspects mathématiques

I. - La division et les autres opérations

Objectif

Amener les étudiants à comprendre les particularités de la division par rapport aux autres opérations.

Phase 1

Le professeur distribue les exercices suivants :

a) additionner 4 et 7
b) additionner 47,5 et 6,003
c) soustraire 7 de 46
d) soustraire 28,45 de 102,068
e) multiplier 3 par 17
f) multiplier 5 par 0,56
g) multiplier 0 par 3,1
h) multiplier 3,1 par 0
i) diviser 65 par 5
j) diviser 35 par 16
k) diviser 42 par 0
l) diviser 370 par 28
m) diviser 650 par 101
n) diviser 426,23 par 1,12
o) diviser 4,7 par 6
p) diviser 65 par 1,01
q) diviser 1 par 7
r) diviser 0 par 0.

Il demande à chacun d'écrire sa réponse sur papier.

Phase 2

Mise en commun et confrontation des réponses données. Mise en évidence rapide du caractère non ambigu des réponses sur addition, soustraction et multiplication. Par contre, sur la division, dans de nombreux cas, il y a plusieurs réponses différentes. Il s'agit alors de déterminer celles qui sont mathématiquement justes. De plus, les notations utilisées par les étudiants sont variées ; une explicitation de chacune d'elles est alors faite.

Phase 3

Le professeur conclut provisoirement cette activité en rappelant ou en précisant brièvement certaines définitions, certains termes liés à la division euclidienne dans **N** et à la division dans **R**.

II. - Approfondissement mathématique

Il s'agit ici de revenir sur divers contenus mathématiques liés à la division euclidienne, à partir de la résolution d'exercices tirés en particulier des annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école [1] et de la brochure de la COPIRELEM : *"La division à l'école élémentaire"* [6].

Au moins cinq types d'exercices sont traités :

1. des exercices nécessitant de mobiliser la définition de la division euclidienne et en particulier de réfléchir sur la double inégalité vérifiée par le reste, par exemple :
   - *Dans une division, le diviseur est 83, le quotient est 403. Exprimez les dividendes possibles et les restes associés.*
   - *Le dividende est 8592, le quotient est 38. Trouvez un diviseur et un reste associé. Y a-t-il plusieurs solutions ? Si oui, exprimez toutes les solutions, si non, justifiez votre réponse.*
   - *Soient a, b, c trois naturels vérifiant :* $a > b$ *et* $c \neq 0$*. Le quotient de a par c est a' et le quotient de b par c est b'. Peut-on prévoir quels seront les quotients par c de* $a + b$, $a - b$ *et* $a.b$ *?*
2. des exercices posant des questions relatives à des techniques opératoires, par exemple :
   - *Soit le nombre 12345678910111213 à diviser par 117. Indiquez une méthode permettant de trouver le nombre de chiffres du quotient sans effectuer la division.*
   - *Le dividende est 5468902. Dans le cas particulier où le diviseur est 125, donnez une méthode de calcul rapide permettant d'obtenir le résultat sans effectuer la division.*
3. des exercices portant sur les notions de multiples et diviseurs et sur les critères de divisibilité, par exemple
   - *Par quel chiffre faut-il remplacer x et y pour que le nombre (écrit en base dix) 632xy soit divisible à la fois par 2, par 5 et par 9 ?*
   - *Vérifiez que le nombre 5757 est divisible par 101. Montrez que le nombre (écrit en base dix) xyxy est divisible par 101.*

- *A, B, C, D, E, F sont des nombres entiers naturels écrits ci-dessous en base dix (a désigne donc un chiffre) :*

  A = 10a4 B = 34a C = a4324
  D = a18 E = 314aa F = a353a

  Pour chacun des nombres A, B, C, D, E et F, remplacez le chiffre a par différentes valeurs, si cela est possible, de telle sorte que le nombre correspondant soit un multiple de 4. Justifiez vos réponses.

- *Énoncez une condition pour que le nombre qui s'écrit "mcdu" soit multiple de 4 (m, c, d, u désignant des chiffres). Démontrez le résultat énoncé.*

4. divers exercices prétextes à la résolution d'équations ou de systèmes d'équation, par exemple :

   - *le quotient de deux naturels est 6 et le reste 47. La somme des deux naturels et du reste est 591. Quels sont ces deux naturels ?*

5. des problèmes plus ouverts pouvant faire appel à la division :

   - *sachant que le 7 /12/ 92 est un lundi, par quel jour de la semaine a commencé l'année 1992 ? Quel jour le peuple français a-t-il pris la Bastille ?*[1]

Ce travail se termine par un exposé du professeur sur la division euclidienne dans **N** et **D** et sur la division dans **R** et **Q** (avec dans presque tous les cas nécessité de revenir auparavant sur les différents ensembles de nombres et sur les notions de valeur approchée d'un réel par un décimal à un ordre donné)

Cet exposé comporte notamment l'explicitation de divers termes : dividende, diviseur, quotient, reste, division euclidienne dans **N**, division exacte, multiples et diviseurs...

(1) Nous renvoyons le lecteur à l'article précédent : ***A propos de la division euclidienne***.

Procédures de calcul de divisions

Cette situation est inspirée d'un document de l'IFM de Grenoble [10].

Objectif

Analyse détaillée des procédures de calcul dans la résolution des problèmes de divisions. On se situe ici dans le cadre des naturels et de la division euclidienne.

Simulation de la situation *"Le Petit Poucet"*

> *Le Petit Poucet avec ses bottes de sept lieues fait des bonds de 28 km. Il doit parcourir 1155 km. Combien de pas va-t-il faire ?*

Première simulation

Les étudiants sont invités à résoudre ce problème avec la contrainte suivante : *pas le droit d'utiliser la division.*

Deuxième simulation

Le même problème est proposé en changeant les données numériques et avec la contrainte : *pas le droit d'utiliser ni division ni multiplication.*

Mise en commun

Elle consiste à inventorier et discuter les procédures utilisées.

Analyse de travaux d'élèves

analyse de protocoles

Le professeur distribue aux étudiants les protocoles présentés dans le document de l'IFM (et reproduits ici en annexe 1). Étude de ce document avec mise en commun et discussion sur les procédures utilisées.

analyse de procédures

On trouvera en annexe 2 un montage réalisé à partir de l'article de Robert NEYRET *"Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés"* paru dans Rencontres Pédagogiques n° 4 : *"Comment font-ils"* (publication INRP) [7]

Ce montage, précédé de la liste des problèmes de référence, est proposé aux étudiants avec la consigne de classer les différents types de procédures repérables.

Le professeur reprend alors, sous forme d'exposé, l'article de Robert Neyret, et synthétise une typologie des différentes procédures susceptibles d'être mobilisées par les élèves.

Travaux d'inter-cours

Les étudiants sont invités à :

- lire des documents concernant la division, à partir d'une bibliographie que chaque professeur pourra constituer. Les ouvrages de la collection ERMEL pour le CE et le CM et les numéros spéciaux de la revue Grand N peuvent être considérés comme d'intéressants documents de référence.
- commencer à consulter des manuels et à essayer d'analyser la façon dont est abordée la division.

Situations et problèmes de division

1. Contexte des situations de division

Le professeur distribue aux étudiants les problèmes suivants :

1. On dispose de 47 carreaux de faïence pour carreler un dessus de lavabo. On place 6 carreaux par rangée. Combien de rangées placera-t-on ?
2. On compte de 6 en 6 à reculons à partir de 47. Quel sera le dernier nombre énoncé ?
3. On dispose de casiers pouvant contenir chacun 6 cassettes. Combien en faudra-t-il au minimum pour placer 47 cassettes ?
4. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, combien de morceaux de 6 cm peut-on couper ?
5. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, on veut faire 6 morceaux de même longueur et avoir le minimum de chutes. Quelle sera la longueur de chaque morceau ?
6. On donne un sachet de 47 bonbons à un groupe de 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?
7. On partage le plus équitablement possible 47 billes entre 6 enfants . Combien chacun en aura-t-il ?
8. On partage équitablement 47 billes entre 6 enfants en en donnant le maximum. Combien de billes ne seront pas distribuées ?
9. On partage équitablement 47 francs entre 6 personnes. Combien donne-t-on à chacun ?
10. 47 grains de blé sont lancés à 6 poules. Combien chacune picore-t-elle de grains ?
11. Un employé touche une prime de 47 francs par jour de travail. Il travaille 6 heures par jour. De combien cette prime augmente-t-elle son salaire horaire ?
12. On doit répartir 47 litres de vin dans des bonbonnes de 6 litres. Combien de bonbonnes seront nécessaires ?
13. 6 personnes héritent ensemble d'un terrain de 47 hectares qu'elles décident de partager en 6 lots de même aire (au centiare près). Quelle sera l'aire de chaque lot ?
14. On multiplie un nombre par 6 ; on trouve 47. Quel est ce nombre ?
15. Sur une calculette affichant 8 chiffres, on frappe successivement :
    4 7 ÷ 6 =
    Qu'affiche la calculette ?

Questions posées :

Quels sont les énoncés relevant de la division de 47 par 6 ?

Quelle est la réponse dans chaque cas ?

Le "sens" de la division est-il le même chaque fois ?

Recherche puis mise en commun pour faire apparaître des difficultés spécifiques aux problèmes de division qui nécessitent, plus que pour les autres opérations, une interprétation des résultats.

(On pourra se référer à l'article de Marc BLANCHARD ***"Ça ne tombe pas juste"*** paru dans le n° 52 de la revue Grand N)

2. Division et proportionnalité simple

Objectifs

- Resituer les problèmes de division à l'intérieur des structures multiplicatives.
- Percevoir la différence entre division-quotition et division-partition et son incidence sur les procédures employées.

Déroulement

Les problèmes suivants sont proposés aux étudiants :

1. Céline a 240 timbres qui remplissent un album de 16 pages. Toutes les pages ont le même nombre de timbres. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?
2. Un nageur parcourt 2400 m dans une piscine. La longueur du bassin est de 50 m. Combien de longueurs de bassin le nageur doit-il parcourir ?
3. Au cours d'un voyage, une voiture a parcouru une distance de 1540 km à la vitesse moyenne de 80 km/h. Combien de temps a duré le voyage ?
4. Un satellite fait 75 fois le tour de la terre en 5475 minutes. En combien de temps fait-il le tour de la terre ?
5. Un tube de colle coûte 11 F. Un instituteur achète pour 495 F de tubes de colle. Combien de tubes de colle a-t-il achetés ?
6. La récolte d'un champ de pommes de terre est de 145,5 tonnes. Il a produit en moyenne 20 tonnes par hectare. Quelle est l'aire de ce champ ?
7. Une école commande des livres de mathématiques. Il faut payer en tout 2703 F pour les 53 livres commandés. Quel est le prix d'un livre de mathématiques ?
8. M. Dupont achète du tissu à 55 F le mètre. Il paie 192,50 F. Quelle longueur de tissu a-t-il acheté ?
9. En France, on consomme chaque année 9 222 000 000 kg de papier. La France a 58 000 000 d'habitants. Quelle est la consommation moyenne de papier par habitant chaque année ?
10. Un robinet met 350 secondes pour laisser échapper 3010 ml d'eau. Combien de millilitres d'eau perd-il en une seconde ?
11. Julie a une boîte de 520 perles. Elle fait des colliers de 20 perles. Combien peut-elle faire de colliers ?
12. Le marchand de fruits a acheté 75 cageots de pommes pour un poids total de 937,5 kg. Quel est le poids d'un cageot ?
13. Un diamant de 15 centimètres cube a une masse de 52,5 g. Quelle est la masse d'un centimètre cube de diamant ?
14. Dans la principauté de Monaco, il y a 18500 habitants au km^2. La population de Monaco est de 27750 habitants. Quelle est la superficie de la principauté ?

La consigne est la suivante :

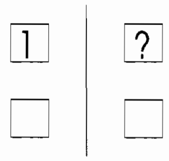
> *Voici 14 problèmes de division. Indépendamment du contexte, des grandeurs, des nombres ou de la syntaxe, classez ces problèmes en fonction du "sens" de la division auquel ils se réfèrent.*

Si les étudiants ont de la difficulté à effectuer ce classement, on pourra préciser ainsi la consigne :

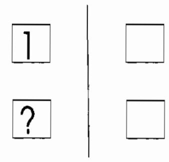
> *Vous pouvez en particulier essayer de rechercher une représentation schématique ou symbolique pour chaque problème et identifier ceux qui relèvent d'un même type de représentation.*

La mise en commun aura pour objectif de faire apparaître les deux sens de la division pour lesquels nous reprenons ici les représentations symboliques proposées par Gérard VERGNAUD :

- ***division-partition*** (ou *"recherche de la valeur d'une part"*)



- ***division-quotition*** (ou *"recherche du nombre de parts"*)



Cette présentation doit permettre de resituer la division dans l'ensemble des structures multiplicatives (pour lesquelles une étude plus générale est susceptible d'avoir précédé cette séquence).

Rappelons que G. Vergnaud distingue, dans les structures multiplicatives

- la proportionnalité simple
- le produit de mesures et la proportionnalité double.

La proportionnalité simple met en relation deux grandeurs et les problèmes qui en relèvent sont des problèmes à 4 termes, même si l'un d'eux (l'unité) est fréquemment présent mais n'apparaît souvent qu'à travers la désignation générale de l'une des variables ou par des termes tels que *"chaque", "chacun", "l'un"*...

Selon la présence ou non de l'unité et selon la place du terme cherché, on est en présence de 4 grandes catégories de problèmes. Outre les deux divisions évoquées ci-dessus, ces problèmes peuvent concerner

- ***la multiplication***

$\boxed{1}$	$\boxed{}$
$\boxed{}$	$\boxed{?}$

- ***la recherche de quatrième proportionnelle***

$\boxed{}$	$\boxed{}$
$\boxed{}$	$\boxed{?}$

Comme l'a bien montré G. Vergnaud, ces différentes catégories, et en particulier les deux divisions, pour ce qui nous intéresse ici, n'appellent pas toujours le même type de traitement.

♦ la division-partition repose essentiellement sur la reconnaissance d'un rapport scalaire.

Si 30 kg de pommes de terre coûtent 210 F, le prix d'un kilo s'obtient en appliquant la relation scalaire *"30 fois moins"*

30 fois moins	1 kg	?	30 fois moins
	30 kg	210 F	

♦ la division-quotition peut reposer

⇒ sur la reconnaissance d'un rapport scalaire qui n'est pas directement donné et qu'il faut calculer

... fois plus	1 kg	7 F	... fois plus
	?	210 F	

si 1 kg coûte 7 F, combien de kg peut-on obtenir avec 210 F ? se résout alors en recherchant *"combien de fois plus"* représente 210 F par rapport à 7 F

⇒ sur la recherche du coefficient de proportionnalité

si 1 kg coûte 7 F, on passe de la masse au prix en multipliant par 7 et du prix à la masse en divisant par 7. La différence, ici, est que ce 7 n'est plus un scalaire, un nombre sans dimension comme précédemment, c'est une nouvelle grandeur et une grandeur complexe puisqu'il s'agit d'une grandeur-quotient (7 F/kg). Une telle représentation du problème n'est pas simple pour les élèves et cela ne va pas de soi de systématiser le recours au coefficient de proportionnalité.

Les considérations qui précèdent peuvent aider à comprendre les raisons de l'utilisation de telle ou telle procédure dans les problèmes de division.

C'est ainsi (et on pourra le vérifier avec les procédures décrites dans l'annexe 2) que les problèmes de division-quotition ouvrent naturellement la voie aux soustractions (ou additions) successives : si 1 kg coûte 7 F, on peut trouver combien de kg correspondent à 210 F en soustrayant autant de fois que nécessaire 7 F. On soustrait des francs à des francs et ceci prend facilement du sens.

Les problèmes de division-partition, eux, ne peuvent se résoudre à l'aide de soustractions (ou d'additions) successives. Si 30 kg coûtent 210 F, on ne peut chercher le prix d'1 kg en soustrayant 30 de 210 autant de fois que nécessaire. Cela permettrait d'obtenir la réponse correcte mais au prix d'une perte de signification (soustraire 30 kg de 210 F !)... Par contre, les essais multiplicatifs prennent ici tout leur sens : dans 30 kg il y a 30 fois plus que dans un kilo, donc 210 F est égal à 30 fois le prix recherché, ce qui conduit à émettre des hypothèses sur ce prix.

La division dans les classes

Il s'agit d'une enquête qu'on peut réaliser en CE2 et/ou en CM1. Elle est reprise des travaux qui figurent dans le document de l'IFM déjà cité.

Chaque étudiant observe un groupe de 2 enfants selon les modalités décrites ci-après et qui sont travaillées préalablement lors d'une séance de préparation.

Les problèmes

- *Avec ses bottes de sept lieues, le Petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 kilomètres.*

  Il part d'Angers pour aller à Limoges. La distance entre ces deux villes est de 252 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?
- *Une autre fois, il va à Quimper. La distance est de 319 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?*
- *Voici un paquet de 89 allumettes.*

  Comment faire pour les partager entre 7 personnes de façon que chacune en ait autant ?

  Vous pouvez vous servir des allumettes pour répondre, mais ce n'est pas obligatoire.

Conditions d'observation

1. Les enfants sont par groupes de 2 ; un observateur est attaché à chaque groupe.
2. Les interventions éventuelles de l'observateur doivent être limitées aux cas suivants :
   - demander de recompter un calcul erroné
   - relire l'énoncé en cas de blocage
   - lorsque l'enfant a trouvé une solution, lui demander d'expliquer ce qu'il a fait et s'il est sûr du résultat trouvé.
3. Travail d'observation à réaliser :
   - ♦ rédiger une chronique de la séquence
   - ♦ pour chacun des deux enfants observés, rédiger une note de synthèse mettant en évidence :
     - les procédures utilisées
     - les erreurs liées aux procédures choisies
     - l'interprétation donnée au reste
     - la façon dont est présenté le résultat
     - le rôle du travail à deux

     et, pour le second problème :
     - la stabilité éventuelle des procédures
     - le rôle du matériel et la gestion du reste.
   - ♦ mise en commun sur la façon dont les enfants ont travaillé et les procédures qu'ils ont utilisées.

Travail d'inter-cours

Rédaction des chroniques d'observation. Celles-ci peuvent être synthétisées et remises aux maîtres des classes concernées.

Analyse de manuels

- Lecture et commentaires des instructions officielles
- Travail par groupes pour construire une progression sur la division au CM1 en s'aidant des manuels à disposition. La consigne est de repérer les différences de point de vue entre les manuels sur
  - ⇒ l'organisation de la progression
  - ⇒ le choix des situations de référence
  - ⇒ le degré de liberté laissé aux élèves dans le choix de procédures de résolution
  - ⇒ la différenciation division-partition et division-quotition
  - ⇒ les techniques de calcul proposées
  - ⇒ ...
- Mise en commun

Compléments sur les techniques de calcul

Les algorithmes de calcul des divisions

Il s'agit ici de présenter les différentes techniques de calcul en usage dans les classes.

Cette présentation pourra être complétée par diverses techniques historiquement utilisées. On pourra s'appuyer sur l'article de R. Neyret dans le n°17 de Grand N.

Analyse d'erreurs d'élèves

Le travail d'analyse d'erreurs d'élèves est particulièrement intéressant et on pourra s'appuyer sur des extraits des épreuves de concours de recrutement des PE [1].

Nous proposons ici un travail sur des erreurs survenant dans les calculs de divisions (voir annexe 3).

Les étudiants doivent analyser ces erreurs, faire des hypothèses sur les causes éventuelles de ces erreurs, expliciter les moyens de contrôle qui auraient pu être mis en oeuvre par ces élèves.

Le professeur conclut en essayant de présenter une typologie des erreurs de division, s'appuyant sur une liste organisée de leurs sources éventuelles :

- existence d'un zéro au quotient (en position finale ou intermédiaire)
- mauvaise évaluation du nombre de chiffres au quotient
- existence d'un reste (partiel ou final) supérieur au diviseur
- mauvaise évaluation de l'ordre du quotient ou d'un quotient partiel
- mauvaise perception due à une mauvaise disposition des calculs ou à une mauvaise lecture des chiffres du quotient
- surcharge de travail ou surcharge en mémoire
- mauvaise maîtrise des tables de multiplication
- mauvaise maîtrise de la règle des zéros
- retenue dans une soustraction ou dans une multiplication
- ...

Analyse du film *"Algorithme de la division"* [2]

Il existe encore des copies de ce film qu'on peut essayer de se procurer auprès du CNDP. Son contenu reste très intéressant pour un travail avec les étudiants.

Ceux-ci, lors du visionnement du film, doivent répondre aux questions suivantes(2) :

1. Résumez le déroulement de la première séquence filmée.
2. Le problème posé est *"combien de rangées de 21 carreaux peut-on faire avec 2664 carreaux"*.
   Exposez deux solutions trouvées par les enfants. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?
3. Dans la leçon suivante, on part de 588 654 801 carreaux. Expliquez pourquoi.
4. En quoi la troisième séance diffère-t-elle des deux premières ?

(2) Questionnaire élaboré par Suzy GAIRIN-CALVO et publié dans les actes du colloque COPIRELEM d'Angers (1987)

Bibliographie

[1] ***Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école*** - IREM de Bordeaux - COPIRELEM - 1992 - 1993 - 1994 - 1995

[2] ***Algorithme de la division*** - atelier de pédagogie - film RTS du CNDP - 1974

[3] cours de G. BROUSSEAU - Actes de la première université d'été des professeurs d'École Normale - Olivet - 1988

[4] D. BUTLEN , M. PEZARD - ***Une formation en didactique des mathématiques pour les instituteurs-maîtres-formateurs*** - Document n° 4 pour la formation - IREM de Paris VII - université de Paris VII

[5] S. GAIRIN-CALVO ***Compte rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N*** - Actes du XIVème colloque COPIRELEM d'Angers (1987)

[6] La ***division à l'école élémentaire*** - "Elem Math III" - COPIRELEM- APMEP - 1983

[7] R. NEYRET. - ***Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division, repérage de quelques difficultés*** in *"Comment font-ils"* - Rencontres pédagogiques n° 4 - INRP - 1984

[8] H. PÉAULT ***La division en formation initiale*** - Actes du colloque COPIRELEM - Rouen - 1988

[9] ***Qui dira vingt ?*** - atelier de pédagogie - film RTS du CNDP - 1973

[10] ***Situations-problèmes de division et procédures*** in *"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)"* - première partie - publication de l'I.F.M. de Grenoble - n°19 - avril 1987

Annexe 1

Extrait de ***"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques"***, publication de l'IFM de Grenoble, n° 19, avril 1987.

Cet extrait est tiré d'une annexe au chapitre *"Situations-problèmes de division et procédures"*. Il présente des protocoles de passation du problème du "Petit Poucet" *(Le Petit Poucet fait des bonds de 28 km avec ses bottes de sept lieues. Combien de pas fera-t-il pour se rendre d'une ville à une autre ?)*, le 12 octobre 1982.

Situation

Choisissez deux villes. Le Petit Poucet se déplace entre ces deux villes avec ses bottes de sept lieues. Trouvez le nombre de pas qu'il va faire pour se rendre d'une ville à l'autre.

Jérôme - Jean-François

Villes choisies
Rennes - Paris ; 351 km

Déroulement
Jean-François écrit

28 x 2 = 56
56 x 2 = 112
112 x 2 = 224
224 + 112 = 336
336 + 28 = 364
puis 351 - 336 = 15

Il se trompe dans le décompte des pas, trouve 23, calcule 28 x 23 = 644 et conclut :

23 fois 28, reste 15 km.

Jérôme additionne 28 :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 364
364 - 28 = 336
336 + 28 = 364
364 - 28 = 336
351 - 336 = 15

Il calcule 12 x 28 = 336 puis conclut :

il lui reste à faire 15 km.

Sylvie - Victor

Villes choisies
Lille - Grenoble ; 769 km.

Déroulement
Victor pose la division

$$769 \;\big|\; 28$$

Il évalue la grandeur du quotient 10 < q < 100 puis effectue

28 x 9 = 252
28 x 15 = 420
28 x 20 = 560
28 x 30 = 840
28 x 28 = 784
28 x 27 = 756
28 x 29 = 812

puis conclut

$$\begin{array}{r|l} 769 & 28 \\ \cline{2-2} -\,756 & 27 \\ \cline{1-1} 013 & \end{array}$$

Marie-Pierre et Marie-Françoise

Villes choisies
Grenoble - Marseille ; 277 km

Déroulement
Marie-Pierre dit qu'il faut faire une division et pose

$$277 \;\big|\; 28$$

Elle écrit

28 x 8 = 224
224 + 28 = 252
252 + 28 = 280

puis

$$\begin{array}{r|l} 227 & 28 \\ \cline{2-2} -\,252 & 9 \\ \cline{1-1} 025 & \end{array}$$

Marie-Françoise déclare ne pas savoir faire les divisions et cherche autre chose. Elle écrit

$$\begin{array}{r} 277 \\ \underline{-56} \\ 221 \\ \underline{-56} \\ 265 \\ \underline{-56} \\ 219 \\ \underline{-56} \\ 163 \\ \underline{-84} \\ 179 \\ \underline{-84} \\ 95 \\ \underline{-84} \\ 11 \end{array}$$

Elle compare avec le résultat de Marie-Pierre et constate une erreur :

$$\begin{array}{r} 163 \\ \underline{-84} \\ 79 \end{array}$$

Elle réécrit

$$\begin{array}{r} 277 \\ \underline{-84} \\ 193 \\ \underline{-84} \\ 109 \\ \underline{-84} \\ 25 \end{array}$$

Marie-Françoise conclut

Il a fait 0 pas et il lui reste 25 km.

Sébastien - Lucile

Villes choisies

Grenoble - Lyon ; 105 km

Déroulement

Lucile pose

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

puis fait les calculs suivants

105 + 28 = 133
105 x 28 = 2940

Ensuite elle écrit

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 5 \\ \hline 140 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times 3 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 102 \end{array}$$

ce qui lui permet d'écrire

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$$

Après, elle écrit encore

28 x 2 = 56
28 x 6 = 168

Sébastien pendant ce temps, après avoir fait le calcul 105 x 28 = 2940, écrit

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 196

que Lucile vérifie en faisant 28 x 7 = 196

Lucile réalise le calcul 105 x 7 = 735

Sébastien amorce une soustraction

105 - 28 = 77

puis écrit

28 + 28 + 28 + 28 + 28

Lucile lui dit *"tu n'as qu'à faire 28* x *5"* que Sébastien calcule : 28 x 5 = 140

Sébastien écrit 140 - 28 = 112

puis 112 - 28 = 184 (erreur de calcul)

puis

28 x 4 = 112
28 x 7 = ... de nouveau 28 x 4 = 112
28 x 6 = 168
168 - 28 = 140
140 - 28 = 118 (erreur de calcul)
118 - 28 = 90

Discussion sur le nombre de pas. Sébastien et Lucile récupèrent un calcul fait antérieurement : 28 x 3 = 84

Sébastien calcule

112 x 3 = 336
136 - 28 = 108
28 x 3 = 84

Lucile, après avoir reposé

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} 3 & 21 \end{array}$$

effectue les calculs

112 - 84 = 28
112 + 84 = 196

pendant que Sébastien calcule

84 x 28 = 1272 (erreur de calcul)

Perte de signification du problème pour l'un comme pour l'autre.

Annexe 2

Extrait de *Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés* (Robert NEYRET) in Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) « Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

Nous nous sommes proposés d'étudier la manière dont les enfants élaborent des procédures de résolution dans des problèmes de type scolaire, particulièrement de division.

Les problèmes posés ont été les suivants :

Problème 1 a

Avec ses bottes de sept lieues, le petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 *km*. Il part de Grenoble pour aller à Nice ; Grenoble-Nice : 224 *km*. Combien de pas va-t-il faire ?

Problème 1 b

Il part ensuite de Grenoble pour aller à Marseille (ou autres variantes au CM2) Grenoble - Marseille : 277 *km*.

Problème 2

On distribue aux enfants une pochette contenant un certain nombre d'allumettes : entre 200 et 300 (ce nombre étant inscrit sur un papier à l'intérieur de la pochette). On demande aux enfants de partager ces allumettes entre 7 personnes de façon que chacune d'elles en ait autant.

Problème 3

On range 273 œufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut on remplir ?

Problème 4

On partage équitablement 273 billes entre 14 enfants. Combien de billes donnera-t-on à chaque enfant ?

Problème 5

On achète 13 albums de Lucky Luke. On paye 273 F. Combien coûte un album ?

Ces problèmes sont posés à des élèves de CM1 et CM2 en début d'année scolaire avant tout travail spécifique sur la division.

Pour les deux premiers problèmes, les enfants travaillent par deux et peuvent travailler ensemble. Un observateur note tout ce qui se dit et se passe au niveau de deux enfants. Les seules interventions « autorisées » de l'observateur sont les suivantes :

- en cas d'erreur de calcul : *« Regarde : ici tu as fait une erreur de calcul »*.
- en cas de blocage de plus de 3 ou 4 minutes : *« Relisez l'énoncé »*.

Vous trouverez ci-après des travaux d'élèves extraits du document.

①

273 œufs / boîtes de 12 :
l'enfant fait les essais suivants :

$12 \times 100 = 1200$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 20 = 240$
$12 \times 15 = 180$
$12 \times 18 = 216$
$12 \times 25 = 300$
$12 \times 22 = 264$
$12 \times 23 = 276$

et conclut
« il y aura 23 boîtes
et il restera 3 œufs »

②

Le petit Poucet / distance 105 :

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 5 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 102 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Le petit Poucet va faire 4 pas

③

Le petit Poucet / distance 665 :

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 280 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 665 \\ -\ 280 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline -\ 84 & 3 \\ \hline 21 & \end{array}$$

Le petit Poucet fait 23 pas et il lui reste 21 *km*.

④

Le petit Poucet / distance 224 :
Essais de :

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times\ 28 \\ \hline 1048 \\ 263\ \ \\ \hline 3668 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 28 \\ \hline 248 \\ 62\ \ \\ \hline 868 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 28 \\ \hline 64 \\ 16\ \\ \hline 164 \end{array}$$

puis additionne :

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ \hline 248 \end{array}$$

enfin calcule :

$$\begin{array}{r} 248 \\ -\ 28 \\ \hline 220 \end{array}$$

interprété par 10 pas.
L'observateur fait rectifier l'erreur de calcul
$8 \times 28 = 224$.
L'enfant conclut par :
« Le petit Poucet va faire 8 pas ».

⑤

$$\begin{array}{r|l} 670 & 28 \\ \hline 110 & 23 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 \times 2 = 56 \\ 28 \times 3 = 84 \\ 28 \times 4 = 112 \\ 28 \times 5 = 140 \\ 28 \times 6 = \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1255 & 28 \\ \hline -\ 112 & \\ \hline 135 & \\ -\ 112 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \hline 118 & 34 \\ -\ 80 & \\ \hline 34 & \\ -\ 32 & \\ \hline 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \hline 118 & 34 \\ 6 & \end{array}$$

⑥

273 billes / 14 enfants :
Les essais successifs sont les suivants :

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 30 \\ \hline 420 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 25 \\ \hline 350 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 18 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 19 \\ \hline 266 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array}$$

avec la conclusion suivante :
« Ils auront 19 billes et certains en auront une en plus. »

⑦

273 œufs / boîtes de 12 :

$$\begin{array}{rrr} & 12 & 1 \\ + & 12 & 2 \\ + & 12 & 3 \\ + & 12 & 4 \\ + & 12 & 5 \\ + & 12 & 6 \\ + & 12 & 7 \\ + & 12 & 8 \\ + & 12 & 9 \\ + & 12 & 10 \\ + & 12 & 11 \\ + & 12 & 12 \\ + & 12 & 13 \\ + & 12 & 14 \\ + & 12 & 15 \\ + & 12 & 16 \\ + & 12 & 17 \\ + & 12 & 18 \\ \hline & 216 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & 216 & \\ + & 12 & 19 \\ + & 12 & 20 \\ \hline & 240 & \\ + & 12 & 21 \\ \hline & 252 & \\ + & 12 & 22 \\ \hline & 264 & \\ + & 12 & 23 \\ \hline & 276 & \end{array}$$

on peut remplir
23 boîtes

8

Le petit Poucet / distance 224 :

L'enfant pose

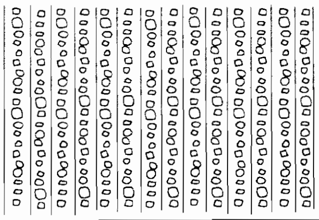
2 8				
+ 2 8	8 4	1 6 8	3 3 6	3 3 6
+ 2 8	+ 8 4	+ 1 6 8	- . . .	- 1 1 2
8 4	1 6 8	3 3 6	2 2 4	2 2 4

L'enfant conclut après une étape de réflexion : « Le petit Poucet devra faire 11 pas. »

9

Billes entre 14 enfants :

L'enfant compte de 1 en 1 jusqu'à 273.



10

Lucky Luke : 273 F / 13 albums

L'enfant écrit d'abord :

$13 \times 1 = 13$
$13 \times 2 = 26$
$13 \times 3 = 39$
$13 \times 4 = 52$
$13 \times 5 = 65$
$13 \times 6 = 78$

barre l'ensemble des calculs précédents et écrit :

$13 \times 10 = 130$
$13 \times 11 = 143$
$13 \times 12 = 156$
$13 \times 13 = 169$
$13 \times 14 = 182$
$13 \times 15 = 195$
$13 \times 16 = 208$
$13 \times 17 = 221$
$13 \times 18 = 234$
$13 \times 19 = 247$
$13 \times 20 = 260$
$13 \times 21 = 273$

L'album coûte 21 F.

11

Petit Poucet / distance 351 :

L'enfant calcule en écrivant à côté le nombre de pas.

2 8		5 6		1 1 2	
× 2	2 pas	× 2	4 pas	× 2	8 pas
5 6		1 1 2		2 2 4	

2 2 4		5 6	2 2 4
× 2	puis	+ 2 8	+ 1 1 2
4 6 4		8 4	3 3 6

Il fait $2 \times 2 \times 2 = 8$ pas
Il fait $2 \times 2 = 4$ pas
Il fait 12 pas
351 - 336 = 15 *km*, qu'il lui reste à parcourir.

12

Petit Poucet / distance 340 :

L'enfant pose 340 | 28

puis essaie $28 \times 7 = 196$
$28 \times 10 = 280$

et s'approche ensuite par des additions de 28 :
280 + 28 = 308 308 + 28 = 336
336 + 28 = 364, qui est barré ; et conclut : « il fera 12 pas et il restera 4 *km*. »

13

273 œufs / boîtes de 12 :

12	60	108	156	204	252
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
24	72	120	168	216	264
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
36	84	132	180	228	276
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
48	96	144	192	240	
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
60	108	156	204	252	

23 boîtes

14

Petit Poucet / distance 351 :

28	1	
+ 28	2	
+ 28	3	
+ 28	4	
+ 28	5	
+ 28	6	
+ 28	7	
+ 28	8	
+ 28	9	
+ 28	10	
+ 28	11	
+ 28	12	
+ 28	13	
364		

3 6 4
- 3 5 1
3 6 4
- 2 8
3 3 6
3 5 1
- 3 3 6
1 5

Il fait 12 pas et il reste 15 *km*.

15

Petit Poucet / distance 559 :

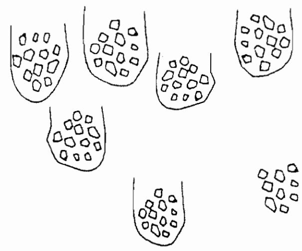
L'enfant effectue $28 \times 10 = 280$
puis $280 \times 9 = 560$
Ensuite il essaie : $28 \times 9 = 252$

	2 8 0		5 5 9
Calcule	+ 2 5 2	puis	- 5 3 2
	5 3 2		0 2 7

et conclut : « Petit Poucet fera 19 pas et 27 km à pied. »

16

273 œufs / boîtes de 12 :



L'enfant compte jusqu'à 273 en remplissant les boîtes

Annexe 3

Voici des travaux d'élèves de CM.

1) Vérifiez les opérations ci-dessous. Pour chaque opération inexacte, expliquez les erreurs.

2) Quels sont les moyens de contrôle à la disposition des élèves pour ce type de calcul ?

863	17	
-680	40	car 17×4 = 68
183		
-153	9	car 17×9 = 153
30	49	

3068	19	
-1900	100	car 19×1 = 19
1168		
-1140	60	car 19×6 = 114
28		
-28	2	car 19×2 = 28
0	162	

8203	27	
-8100	30	car 27× 3 - 81
103		
- 81	3	car 27× 3 - 81
22	33	

12095	38	
- 1140	300	car 38 × 3 = 114
00955		
- 760	20	car 38 × 2 = 76
295		
- 268	7	car 38 × 7 = 268
27	327	

6085	19
- 57	32
38	
- 38	
05	

983	17
- 850	56
133	
- 102	
31	

4317	21
0117	25
12	

3 lts   12 ampoules. jour 4 ampoules

12	
x 3	
36	4
8	26
28	
24	
4	

26 jours

PARTIE 2

Nombres décimaux

Cette partie est constituée

- d'un plan de cours possible sur les décimaux en formation de professeurs des écoles
- d'une reproduction d'un document ancien (LA DISME de Simon STEVIN)
- d'une étude de ce dernier document, d'un point de vue didactique. Cette étude est proposée pour une utilisation en formation PE et PLC2.

Titre	Décimaux en formation initiale
Auteur	collectif (à partir d'une proposition de Jeanne BOLON)
Date	mars 1995
Type	plan de cours P.E. élaboré au cours du stage d'Angers

DÉCIMAUX EN FORMATION INITIALE

Introduction

Un constat fait apparaître (cf. travaux en cours de M.L. Peltier) une présence très faible du thème décimaux-rationnels dans la partie pédagogique des sujets de concours externe des professeurs d'école. Pourtant :

1. c'est un thème présent dans les recherches psychologiques et didactiques depuis une vingtaine d'années ;
2. c'est un des enjeux de la continuité École-Collège.

Ce thème ne donne sans doute pas lieu, chez les formateurs, à un consensus sur son traitement didactique dans les classes. Il reste un thème délicat de la formation car il engage le formateur à faire des choix pour l'enseignement élémentaire avant que soient dégagées des tendances majoritaires d'enseignement. Jeanne Bolon[1] note même un manque de cohérence entre les finalités de l'enseignement des décimaux à l'école élémentaire et les notions et problèmes inscrits dans les programmes de 1985 ou 1995.

Notre groupe s'est attaché à composer une progression (relativement classique) pour les PE2, et ce à partir de cinq points :

premier point : sensibilisation des étudiants à la complexité de la notion (aspects mathématiques et sociaux des décimaux).

deuxième point : la vision des décimaux par l'institution (à travers les programmes et les cahiers d'évaluation).

troisième point : quelques éléments de psychologie et didactique éclairant l'étude des décimaux.

quatrième point : un exemple de traitement des décimaux par un manuel scolaire.

cinquième point : des éléments pour une progression au cycle III.

I. Sensibilisation des étudiants

Elle est essentiellement basée sur un état des lieux des connaissances mathématiques des étudiants sur les décimaux. Les décimaux sont abordés de deux points de vue :

- d'une part comme objets des mathématiciens
- d'autre part comme objets sociaux,

à partir d'une réflexion des étudiants sur des questions, par exemple de type suivant :

1. Quelles sont les différences entre un nombre entier, un nombre décimal et un nombre rationnel du point de vue des propriétés algébriques (opérations, ordre) ?
2. Citez des exemples de problèmes où les décimaux interviennent. Idem avec les rationnels.

Le formateur fait une synthèse et complète par des apports mathématiques.

[1] J. Bolon, 1995, "Les nombres décimaux à la charnière école-collège : une situation paradoxale" p. 97-108 in *Qu'est-ce qu'un programme d'enseignement ?* Hachette Education CNDP

II. L'attente institutionnelle sur les décimaux

Il nous semble important de spécifier la tâche d'enseignement dévolue aux maîtres sur les décimaux et les fractions, donc d'étudier des aspects de l'attente institutionnelle sur ces deux thèmes. Par exemple, une étude par groupe d'étudiants de procédures d'élèves sur des exercices liés aux décimaux (lues dans des cahiers d'évaluation 6ème déjà remplis) permet de dégager les erreurs les plus courantes, de risquer des hypothèse d'analyse.

Le formateur conclut cette étude par deux points :

1. un début de typologie des exercices d'évaluation :

   - calculs formels, rangement, intercalation, sans contextualisation ;

   - ordre de grandeur à propos de mesures de grandeurs d'objets usuels ;

   - problèmes faisant intervenir des francs et des centimes, des mètres et des centimètres, des grammes et kilogrammes : l'écriture y est normalisée (toujours le même nombre de chiffres après la virgule).

   Remarque

   On peut constater une évolution dans le type d'exercices proposés sur les décimaux depuis la création des évaluations de 6ème : diminution des exercices formels au bénéfice des problèmes faisant intervenir des grandeurs, apparition pour la première fois, en septembre 1994, d'un exercice d'approximation.

2. une mise en regard de l'étude faite et des scores des années précédentes ; un repérage des erreurs typiques et fréquentes : des évaluations A.P.M.E.P. et des travaux en cours de Robert Neyret, entre autres, montrent que ces erreurs perdurent au collège et chez les adultes.

III. Quelques éléments de psychologie et de didactique

Les nombres décimaux ont été beaucoup étudiés depuis les années 1970 par les didacticiens (travaux de G. Brousseau, C. Comiti, R. Douady, M.J. Perrin).

L'enseignement des décimaux est difficile :

- le champ conceptuel[2] est polymorphe (grandeur, mesure, rationnels, proportionnalité, division, numération)
- les décimaux fournissent d'une part une continuité des entiers par leur codage symbolique et l'extension des algorithmes opératoires mais d'autre part présentent des ruptures (notamment sur l'ordre et la densité)[3 4].

Les travaux des psychologues nous ont permis de comprendre en partie pourquoi certaines progressions pédagogiques sur les décimaux ne donnaient pas les résultats escomptés, certaines renforçant les obstacles à la construction de nouveaux nombres.

On a des éléments sur ce qu'il ne faut pas faire, mais que faire ?

IV. Des pratiques ont imprégné le milieu

La collection *Math et Calcul* (R.Eiller, Edition Hachette) a emporté la plus grande part du marché du manuel scolaire dans les années 1980. Elle semble donc pouvoir être considérée comme un témoin des pratiques dominantes d'enseignement ces années-là. Or l'analyse du manuel de CM1 (1987) montre que :

- la progression sur les décimaux est peu amorcée par la résolution de problèmes,
- les propriétés des décimaux sont montrées et appliquées, les élèves ne disposent pas d'instruments de contrôle,
- les règles sur les décimaux sont isolées les unes des autres.

Le fil conducteur de la progression semble être les propriétés mathématiques des décimaux. La progression est conduite en fonction du savoir mathématique de référence indépendamment du point de vue de l'élève.

Jeanne Bolon (février 1995) a étudié des ouvrages récents qui essaient de prendre en compte le point de vue de l'élève et les résultats des travaux psychologiques et didactiques. Cependant, aucun ne lui semble complètement satisfaisant[5].

---

[2] Pour la notion de champ conceptuel en particulier, voir G.Vergnaud, 1994, "Le rôle de l'enseignement à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel" in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[3] J. Bolon, 1992, : "L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire" in *Grand N* n° 52

[4] M.Tanner, 1993, "Le nombre décimal n'existe pas : théorie et applications" in *Grand N* n° 52

[5] J.Bolon, travaux en cours 1995

V. Quelques passages probablement obligés d'une progression sur les décimaux à l'école

Remarque préalable.

L'utilisation des décimaux "familiers" (mesure de masse, longueur...), dans le traitement des problèmes additifs et soustractifs, ne présente apparemment pas de difficultés, chaque fois qu'ils sont écrits avec le nombre de chiffres "habituel" (l'habitude sociale prend le pas sur la signification des décimales). Mais d'une part ces nombres à deux ou trois chiffres après la virgule ne sont pas les décimaux des mathématiciens; d'autre part, une analyse épistémologique des nombres non entiers nous fait supposer que les décimaux des mathématiciens ne peuvent probablement pas s'enseigner sans un minimum de présentation des rationnels.

Notre choix est donc d'une part de présenter les décimaux familiers à travers des problèmes, d'autre part d'introduire les décimaux des mathématiciens par les fractions dans les contextes privilégiés des longueurs et des aires (dans la continuité des travaux de G. Brousseau et de R. Douady).

Ce qui suit serait une solution de compromis entre toutes nos remarques précédentes et la contrainte de traiter des décimaux à l'école élémentaire, qui va dans le sens des programmes de 1995. En voici les grandes étapes de la progression au CM.

0. Dès le CE : calculs approchés dans **N** ; familiarisation avec la droite graduée par des entiers. Travail sur ordre, encadrement et calculs d'écarts associés

1. Introduction des fractions de type 1/n par partage d'unités de longueur et d'aire (cf. travaux de R. Douady et M.J. Perrin)

2. Extension du codage aux fractions p/n (p entier) par addition réitérée et multiplication associée :

   $p/n = 1/n + ... + 1/n = p \times 1/n = 1/n \times p$

3. Encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs, par exemple :

   $4 < 17/4 < 5$
   $17/4 = 16/4 + 1/4 = 4 + 1/4$
   $17/4 = 20/4 - 3/4 = 5 - 3/4$

   écriture d'une fraction sous forme "entier + rompu"

4. Passage de la fraction-mesure des longueurs à la fraction-abscisse sur la droite graduée. Le passage du nombre longueur-mesure au nombre-abscisse représente un changement de point de vue sur le nombre : c'est un point délicat mais essentiel de la progression dont la complexité est rarement prise en compte dans les progressions faites à l'école.

5. Reprise des activités précédentes sur les fractions décimales et exposé de la convention de la notation décimale

6. Parallèlement :

   - résolution de problèmes utilisant les décimaux familiers, avec ou sans calculatrice,

   - calcul réfléchi sur les fractions décimales et les nombres décimaux, ordre de grandeur.

VI. Quelques éléments de bibliographie (en direction des professeurs d'école, a fortiori des formateurs)

* BOLON J., 1993, ***L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire*** dans Grand N n° 52, I.R.E.M. de Grenoble.

* BOLON J., 1995, ***Les nombres décimaux à la charnière école-collège : une situation paradoxale*** p. 97-108 dans *Qu'est-ce qu'un programme d'enseignement*, Hachette Education CNDP

* BROUSSEAU G.,

  - 1980, ***Problèmes de l'enseignement des décimaux*** dans Recherches en didactique des mathématiques I.1

  - 1981, ***Problèmes de didactique des décimaux*** dans Recherches en didactique des mathématiques II.1, éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

* BROUSSEAU N. et G., 1987 ***L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire***, Brochure de l'IREM de Bordeaux I.

* COMITI C. NEYRET R., 1979, ***A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM*** dans Grand N n°18, I.R.E.M. de Grenoble.

* COQUAND M., 1981, ***Les décimaux*** dans Revue Grand N, Mathématiques pour le cycle moyen, numéro spécial.

* C.O.P.I.R.E.L.E.M., 1986, ***Nombres décimaux*** dans Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 2, brochure A.P.M.E.P.

* C.O.P.I.R.E.L.E.M., Pau 1993, ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques***, tome 2, pages 7 à 30 et pages 161 à 176, IREM de Bordeaux.

* DHOMBRES J., 1978, ***Nombre, mesure et continu***, CEDIC Nathan.

* DOUADY R., 1980, ***Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans)*** dans Recherches en didactique des mathématiques I.1.

* DOUADY R. PERRIN GLORIAN M.J., 1986, ***Nombres décimaux***, Brochure de l'IREM de Paris VII.

* DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M., 1993, ***Se former pour enseigner les mathématiques. 3. Numération, décimaux***, pages 65-117, Ed. A.Colin, Paris.

* ERMEL, 1980, ***Apprentissages Mathématiques à l'école élémentaire***, Cycle moyen, tome 2, pages 8 à 168, Ed Hatier, Paris.

* GRISVARD C.et LEONARD F.,

  -1981 ***Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs***, dans Bulletin de l'APMEP n° 327.

  -1983 ***Comparaison de nombres décimaux***, dans Bulletin de l'APMEP n° 340.

* Groupe Histoire et Epistémologie des mathématiques, 1979, ***Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la révolution***, Brochure de l'IREM de Rouen.

* HOUDEMENT C., PELTIER M.L., 1994, ***La machine à partager. Fractions et décimaux au cours moyen***. I.R.E.M. de Rouen.

* PERRIN M.J., 1986, ***Représentation des fractions et des décimaux chez des élèves de CM2 et du collège*** dans Petit x, n°10.

* PERRIN M.J., 1992, Chapitre ***A propos des nombres décimaux et rationnels*** pages 114 à 183, dans ***Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème***, Thèse de doctorat d'état, Paris VII.

* NEYRET R., 1979, ***Décimaux*** dans Grand N n° 17, I.R.E.M. de Grenoble.

* STEVIN 1585, ***La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes***, Reproduction de textes anciens. Cf. article ci-après.

* TANNER M., 1993, ***Le nombre décimal n'existe pas : théorie et applications*** dans Grand N n° 52.

Titre	LA DISME
Auteur	Simon STEVIN *(Bruges 1548 - La Haye 1620)*
Date	1582 pour l'édition originale en flamand sous le titre *DE THIENDE*. 1585 pour la traduction française par l'auteur sous le titre *LA DISME*.
Édition	A. GIRARD a publié en 1634 une édition française des oeuvres de STEVIN. C'est à partir de cette édition que Joël BRIAND et Hervé PÉAULT ont réalisé la fidèle transcription qui suit.

LA DISME

L'IREM de Paris VII a publié un fac-similé de l'édition française de 1634 due à A. Girard (extrait reproduit ci-dessous). J. Briand et H. Péault proposent ici une réécriture respectant scrupuleusement le texte original de cette édition française (orthographe, ponctuation, majuscules, accentuations,...) avec une présentation très voisine, mais dans une typographie moderne de façon à en faciliter la lecture. En annexe de l'article qui suit, on trouvera un glossaire précisant certains mots du texte.

L A
D I S M E,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, & maintenant convertie en François,
par SIMON STEVIN *de Bruges.*

AVX ASTROLOGVES, ARPENTEURS, MESVREVRS DE TAPISSERIE, GAVIEVRS, STEREOMETRIENS EN general, Maistres de monnoye, & à tous Marchans:

SIMON STEVIN *Salut.*

*Q*VELCUN *voyant la petitesse de ce livret, & la comparant à la grandeur de vous mes* Tres-honnorez Seigneurs ; *ausquels il est dedié, estimera peut estre nostre concept absurd; Mais s'il considere la Proportion, qui est, comme la petite quantité de cestui cy, à l'humaine imbecillité de ceux la, ainsi ses grandes utilitez, à leurs hauts & ingenieux entendemens, se trouvera avoir faict comparaison des termes extremes, lesquels ne la permettent en conversion de proportion quelconque. Soit doncques le troisiesme au quatriesme. Mais que sera ce proposé? d'aventure quelquelitez ; sans doubte il demonstre, ou qu'il n'y a en luy ny jugement, ny intelligence, de sçavoir discerner les choses simples des ingenieuses, ou qu'il soit envieux de la prosperité commune; mais quoy qu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de cestui cy, pour l'inutile calomnie de cestuy la. Or comme le marinier ayant d'aventure trouvé quelque Isle incognue, declare franchement au Roy toutes ses richesses, comme d'avoir beaux fruicts, precieux mineraux, plaisantes contrees, &c. sans que cela luy soit reputé pour philautie; ainsi nous parlerons icy librement de la Grande utilité de ceste invention, je di Grande, voire plus Grãde que je n'estime qu'aucun de vous autres attende, sans toutesfois me glorifier du mien.*

Veu doncques que la matiere de ceste DISME *(la cause duquel nom sera declarée par la suyvante premiere definition) est nombre, l'utilité des effects de laquelle, vous M*rs *est asés notoire par voz continuelles experiences, il ne sera point*

L A
D I S M E,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, et maintenant convertie en François, par SIMON STEVIN *de Bruges.*

AVX ASTROLOGVES, ARPENTEURS, MESVREVRS DE TAPISSERIE, GAVIEVRS, STEREOMETRIENS EN general, Maistres de monnoye, & à tous Marchans :

SIMON STEVIN *Salut.*

Q*velqu'un voyant la petitesse de ce livret et la comparant à la grandeur de vous mes* Tres honnorez Seigneurs ; *ausquels il est dedié, estimera peut estre nostre concept absurd ; Mais s'il considere la Proportion, qui est, comme la petite quantité de cestui cy, à l'humaine imbecillité de ceux la, ainsi ses grandes utilitez, à leur hauts et ingenieux entendemens, se trouvera avoir faict comparaison des termes extremes, lesquels ne la permettent en conversion de proportion quelconque. Soit doncques le troisiesme au quatriesme. Mais que sera ce proposé ? d'aventure quelque invention admirable ? non certes, mais chose si simple qu'elle ne merite quasi le nom d'invention, car, comme l'homme rustique, et lourd, trouve bien d'aventure quelque grand tresor, sans y avoir usé de science, tout ainsi le semblable est il advenu en cest affaire : Pourtant si quelcun me voulust estimer pour vanteur de mon entendement à cause de l'explication de ces utilitez ; sans doubte il demonstre, ou qu'il n'y a en luy ny jugement, ny intelligence, de sçavoir discerner les choses simples des ingenieuses, ou qu'il soit envieux de la prosperité commune ; mais quoy qu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de cestui cy, pour l'inutile calomnie de cestuy la. Or comme le marinier ayant d'aventure trouvé quelque Isle incognue, declare franchement au Roy toutes ses richesses, comme d'avoir beaux fruicts, precieux mineraux, plaisantes contrees, etc. sans que cela luy soit reputé pour philautie ; ainsi nous parlerons icy librement de la Grande utilité de ceste invention, je di Grande, voire plus Gráde que je n'estime qu'aucun de vous autres attende, sans toutesfois me glorifier du mien.*

Veu doncques que la matiere de ceste DISME *(la cause duquel nom sera declarée par la suyvante premiere definition) est nombre, l'utilité des effects de laquelle, vous M*^{rs} *est assés notoire par voz continuelles experiences, il ne sera point mestier d'en faire beaucoup de parolles ; Car s'il est Astrologue, il sçait que le monde est devenu par les computations Astronomiques (car elles enseignent au Pilote l'elevation de l'Equateur et du Pole, par le moyen de la table des declinations du Soleil, l'on descript par icelles la vraye longitude et latitude des lieux, etc.) un paradis, abondant en plusieurs lieux, de ce que toutesfois la terre n'y peut point produire. Mais comme le doux n'est jamais sans* *l'amer, le travail de telles computations ne luy sera point caché, à cause de labourieuses multiplications et divisions, qui procedent de la soixantiesme progression des Degrez, Minutes, Secondes, Tierces, etc. Mais s'il est Arpenteur, il sçaura le grand benefice que le monde reçoit de sa science, par laquelle s'evitent plusieurs difficultez et noises, qui s'eleveroyent journellement, à cause de l'incognue capacité des terres ; outre cela, il ne ignore pas (principalement celui auquel les affaires sont grandes) les ennuieuses multiplications qui procedent des Verges, Pieds, et souvent Doigts, l'un par l'autre, qui n'est pas seulement moleste, mais (combien toutesfois que le mesurer et autres choses precedentes fussent bien expediees) souvent cause d'erreur, tendant au grand dommage de l'un ou de l'autre. Aussi, à la ruine de la bonne renommée de l'Arpenteur : Et ainsi des Maistres des monnoyes, Marchans, et chascun au sien. Mais d'autant que ceux la sont plus dignes, et les voies pour y parvenir plus labourieuses, d'autant plus grande est ceste discouverte DISME, ostant toute ces difficultez ; Mais comment ? Elle enseigne (a fin de dire beaucoup en un mot) d'expedier facilement sans nóbres rompuz, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains : de sorte que les quatre principes d'Arithmetique que l'on appelle Ajouster, Soubstraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effect : Causant semblable facilité à ceux qui usent des gettons. Or si par tel moyen sera gaigné le precieux temps ; Si par tel moyen sera sauvé, ce qui se perderoit autrement ; Si par tel moyen sera osté labeur, noise, erreur, dommaige ; et autres accidens communement ajoincts à ceux-cy, je le mects volontiers à vostre jugement.*

Quant à ce que quelqu'un me pourroit dire, que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard ; Mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il avient souvent aux chercheurs de forts mouvemens, qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effect, ils ne vallent pas un festu : Nous luy respondons qu'il n'y a icy tel doubte, parce que l'experience s'en faict journellement en la chose mesme ; A sçavoir par divers experts Arpenteurs Hollandois ausquels nous l'avons declaré, lesquels (laissans ce qu'ils avoyent inventé chascun à sa maniere, pour amoindrir le travail de leurs computations) l'usent à leur grand contentement, et par tel fruict comme la Nature tesmoigne s'en devoir necessairement suivre : Le mesme aviendra à un chascun de vous autres mes Tres honnores Seig^{rs} qui feront comme eux. Vivez cependant en toute felicité.

ARGVMENT

La Disme a deux parties, Definitions, et Operation. En la premiere partie se declarera par la premiere Definition, quelle chose soit Disme ; Par la seconde, troisiesme et quatriesme, que signifie Commencement, Prime, Seconde, &c., & nombres de Disme.

En l'operation se declarera par quatre propositions, l'Addition, Soubstraction, Multiplication, & Division des nombres de Disme, Dequoy l'ordre se peut representer succinctement par telle table:

- *La disme a deux parties*
  - *Definitions, comme quelle chose soit*
    - *Disme*
    - *Commencement.*
    - *Prime, seconde, etc.*
    - *Nombre de Disme.*
  - *Operation de*
    - *L'addition*
    - *Soubstraction*
    - *Multiplication.*
    - *Division.*

A la fin du precedent sera encore appliqué une Appendice, declarant l'usage de la Disme par quelques exemples és choses.

LA PREMIERE PARTIE DE LA DISME DES definitions

DEFINITION I.

Disme est une espece d'Arithmetique, inventée par la Disiesme progression, consistente es characteres des ciffres, par lesquels se descript quelque nombre, et par laquelle l'on depesche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes.

EXPLICATION

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par characteres des cyffres en ceste sorte 1111, ausquels appert que chasque 1 est la dixiesme part de son prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chasque unité du 8, est la dixiesme de chasque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traicter, ayent des noms, & que ceste maniere de computation est trouvée par consideration de telle dixiesme ou disme progression, voire qu'elle consiste entierement en icelle, comme apparoistra cy apres, nous nommons ce traicté proprement & convenablement la DISME, par la mesme on peut operer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrans en nos affaires, comme sera demonstré au suyvant.

DEFINITION II

Tout nombre entier proposé se dict COMMENCEMENT, *son signe est tel* ⓪.

EXPLICATION

Par exemple quelque nombre proposé de trois cens soixante-quatre, nous le nommons trois cens soixante quatre COMMENCEMENS, les descrivant en ceste sorte 364⓪ et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ① ; chasque dixiesme partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ②. Et ainsi des autres chasque dixiesme partie, de l'unité de son signe precedent, tousiours en l'ordre un d'avantage.

EXPLICATION

Comme 3①7②5③9④, c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes ;* & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdicts nombres font $\frac{3}{10}\frac{7}{100}\frac{5}{1000}\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⓪9①3②7③ vallent $8\frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{7}{1000}$, ensemble $8\frac{937}{1000}$. Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi sçavoir que nous n'usons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté ⓪, n'excede jamais le 9. Par exemple, nous n'escrivons pas 7①12②, mais en leur lieu 8①2②, car ils vallent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la precedente seconde et troisiesme Definition se disent en general NOMBRES DE DISME.

Fin des Definitions.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPE-RATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

Explication du donné : Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27⓪8①4②7③, le deuxiesme 37⓪8①7②5③, le troisiesme 875⓪7①8②2③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme.

Construction. On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte :

			⓪	①	②	③
		2	7	8	4	7
		3	7	6	7	5
	8	7	5	7	8	2
	9	4	1	3	0	4

Donne somme (par le 1° probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941⓪3①0②4③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise.

Demonstration. Les 27⓪8①4②7③ donnez font (par la 3° definition) $27\frac{8}{10}\frac{4}{100}\frac{7}{1000}$, ensemble $27\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37⓪6①7②5③ vallent $37\frac{675}{1000}$, & les 875⓪7①8②4③ feront $875\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10° probleme de l'Arith.) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941⓪3①0②4③, c'est doncques la vraye Somme, ce qu'il falloit demonstrer.

Conclusion. Estant doncques donnez nombres de Disme à ajouster, nous avons trouvé leur Somme, ce qu'il falloit faire.

NOTA

Si aux nombres donnez defalloit quelque signe de leur naturel ordre, on emplira son lieu par le diffaillant. Soyent par exemple les nombres donnez 8⓪5①6②, & 5⓪7②, auquel dernier defaut le signe de l'ordre ①. L'on mettra en son lieu 0 ①, prennant alors comme pour nombre donné 5⓪0①7②, les ajoustant comme cy devant en ceste sorte :

	⓪	①	②
	8	5	6
	5	0	7
1	3	6	3

Cest avertissement servira aussi aux trois propositions suyvantes, la ou il faut tousiours emplir l'ordre des figures diffaillantes, comme nous avons faict en cest exemple.

PROPOSITION II, DE LA SOVBSTRACTION

Estant donné nombre de Disme duquel on soubstraict, & à soubstraire : Trouver leur Reste.

Explication du donné. Soit le nombre duquel on soubstraict 237⓪5①7②8③ & à soubstraire 59⓪7①4②9③.

Explication du requis. Il faut trouver leur reste.

Construction. On mettra les nombres donnez en ordre cóme cy joignant, soubstrayant selon la vulgaire maniere de soubstraction par nombres entiers, en ceste sorte :

		⓪	①	②	③
2	3	7	5	7	8
	5	9	7	3	9
1	7	7	8	2	9

Reste (par le 2° probleme de l'Arithmetique) 177829 qui sont (ce que denotent les signes par dessus les nombres) 177⓪8①2②9③ ; Ie di que les mesmes sont la reste requise.

Demonstration. Les 237⓪5①7②8③, font (par la 3° definition de ceste Disme) $237\frac{5}{10}, \frac{7}{100}, \frac{8}{1000}$, ensemble $237\frac{578}{1000}$ Et par mesme raison les 59⓪7①4②9③ vallent $59\frac{749}{1000}$, lesquelles soubstraicts de 237 $\frac{578}{1000}$, reste (par le 10° probleme de l'Arithmetique) 177 $\frac{829}{1000}$. Mais autant vallent lesdictes 177⓪8①2②9③, c'est doncques la vraye Reste ; ce qu'il falloit demonstrer.

Conclusion : Estant doncques donné nombre de Disme duquel on soubstraict, & à soubstraire, nous avons trouvé leur reste, ce qu'il falloit faire.

PROPOSITION III, DE LA MVLTIPLICATION

E*stant donné nombre de Disme à multiplier, et multiplicateur : trouver leur product.*

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⓪5①7②, & multiplicateur 89⓪4①6②

Explication du requis : il faut trouver leur product.

Construction : On mettra les nombres donnez en ordre comme cy joignant, multipliant selon la vulgaire maniere de multiplication par nombres entiers en ceste sorte :

					⓪	①	②
				3	2	5	7
				8	9	4	6
			1	9	5	4	2
		1	3	0	2	8	
	2	9	3	1	3		
2	6	0	5	6			
2	9	1	3	7	1	2	2
			⓪	①	②	③	④

Donne product (par le 3° probleme de l'Arithmetique) 29137122. Or, pour sçavoir que ce sont, on ajoustera les deux derniers signes donnez, l'un ②, & l'autre aussi ②, font ensemble ④, nous dirons donc que le signe du dernier charactere du product sera ④, lequel estant cogneu, tous les autres seront notoires, à cause de leur ordre continu ; De sorte que 2913⓪7①1②2③2④ sont le product requis.

Demonstration : Le nombre donné à multiplier 32⓪5①7② faict (comme appert par la 3° definition de ceste Disme) 32 $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{100}$, ensemble 32 $\frac{57}{100}$ & par mesme raison le multiplicateur 89⓪4①6②, vaut 89 $\frac{46}{100}$, par le mesme multiplié ledict 32 $\frac{57}{100}$, donne product (par le 12° probleme de l'Arithmetique) 2913 $\frac{7122}{10000}$; mais autant vaut aussi ledict product 2913⓪7①1②2③2④, c'est donc le vray product, ce qu'il nous falloit demonstrer. Mais pour dire maintenant la raison pourquoy ② multipliée par ②, donne product ④ (qui est la somme de leurs nombres), Item, pourquoy ④ par ⑤ donne product ⑨, & pourquoy ⓪ par ③ donne ③, &c. Prennons $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{100}$ (qui sont par la 3° definition de ceste Disme 2①3②) leur product est $\frac{6}{10000}$, qui vallent par ladicte troisiesme definition, 6③. Multipliant doncques ① par ②, le product est ③, à sçavoir un signe composé de la somme des nombres des signes donnez.

CONCLVSION

Estant doncques donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, nous avons trouvé leur Product, ce qu'il falloit faire.

NOTA

Si le dernier signe du nombre à multiplier fust inegal au dernier signe du multiplicateur ; par exemple, l'un 3④7⑤8⑥, l'autre 5①4②, l'on fera comme dessus, & la disposition des characteres de l'operation sera telle :

	④	⑤	⑥	
	3	7	8	
		5	4	②
	1	5	1	2
	8	9	0	
2	0	4	1	2
④	⑤	⑥	⑦	⑧

PROPOSITION IV DE LA DIVISION.

E*stant donné nombre de Disme à diviser et diviseur. Trouver leur Quotient.*

Explication du donné. Soit le nombre à diviser 3⓪4①4②3③5④2⑤, & le diviseur 9①6②.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur quotient.

Construction. On divisera les nombres donnez (omettant leurs signes) selon la vulgaire maniere de diviser par nombres entiers ainsi :

~~1~~
~~1~~ ~~8~~
~~5~~ ~~1~~ ~~6~~ ~~4~~
~~7~~ ~~6~~ ~~2~~ ~~7~~ ⓪ ① ② ③
~~3~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~3~~ ~~5~~ ~~2~~ (3 5 8 7
~~9~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~
~~9~~ ~~9~~ ~~9~~

Donne Quotient (par le 4° probleme de l'Arithmetique) 3587. Or, pour sçavoir que ce sont, le dernier signe du diviseur qui est ②, se soubstraira du dernier signe du nombre à diviser, qui est ⑤, reste ③, pour le signe du dernier charactere du Quotient, qui estant ainsi cogneu, tous les autres seront aussi manifestes, à cause de leur continu ordre, de sorte que 3⓪5①8②7③ sont le Quotient requis.

Demonstration : Le nombre donné à diviser 3⓪4①4②3③5④, faict (comme appert par la troisiesme definition de ceste Disme) $3\frac{4}{10}\frac{4}{100}\frac{3}{1000}\frac{5}{10000}\frac{2}{100000}$, ensemble $3\frac{44352}{100000}$, par lequel divisé lesdicts $3\frac{44352}{100000}$, donne quotient (par le 13° probleme de l'Arithmetique) $3\frac{537}{1000}$, mais autant vaut ledict Quotient 3⓪5①8②7③, c'est donc le vray quotient, ce qu'il falloit demonstrer.

Conclusion : Estant doncques donné nombre de Disme à diviser, & diviseur, nous avons trouvé leur Quotient, ce qu'il falloit faire.

NOTA 1 : Si les signes du diviseur fussent plus hauts que les signes du nombre à diviser, l'on mettra, joignant le nombre à diviser autant des 0 qu'on veut, ou autant qu'il sera mestier.

Par exemple, 7② sont à diviser par 4⑤, je mects pres le 7 quelques 0 ainsi 7000, les divisant comme dessus en ceste sorte :

~~3~~ ~~2~~
~~7~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ (1 7 5 0 ⓪
~~4~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~4~~

Donne quotient 1750⓪.

Il avient quelques fois que le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisees par 3②, en ceste sorte :

~~1~~ ~~1~~ ~~1~~ (1 ⓪ ① ②
~~4~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ 0 0 0 (1 3 3 3
~~3~~ ~~3~~ ~~3~~ ~~3~~

La ou il appert qu'il y en sortiront infinement des trois, restant tousiours $\frac{1}{3}$. En tel accident l'on peut approcher si pres, comme la chose le requiert, omettant le residu. Il est bien vray que 13⓪3①3$\frac{1}{3}$② ou 13⓪3①3②3$\frac{1}{3}$③, &c. seroit le parfaict requis, mais nostre intention est d'operer en ceste Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui se observe aux negoces des hommes, la ou on ne faict point compte de la milliesme partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent use par les principaux Geometriens & Arithmeticiens, en comptes de grande consequence : Comme Ptolemée & Iehan de Montroyal, n'ont pas descript leurs tables des arcs & chordes, ou des sinus, par l'extreme perfection (combien qu'il estoit possible de le faire par nombres multinomies) à cause que ceste imperfection (considerant la fin d'icelles tables) est plus utile que telle parfection.

NOTA 2. Les extractions de toutes especes de racines se peuvent aussi faire par ces nombres de Disme. Par exemple, pour extraire racine quarrée de 5②2③9④ l'on besoignera selon la vulgaire maniere d'extraction en ceste sorte :

~~1~~
~~5~~ ~~2~~ ~~9~~
2 3
~~4~~

Et la racine sera 2①3②, car la moitie du dernier signe des nombres donnez, est tousiours le dernier signe de la racine ; Pourtant, si le dernier signe donné fust un nombre imper, l'on y ajoustera son signe prochain suyvant, & sera alors de nombre per, puis on extraira la racine comme dessus.

Semblablement en l'extraction de racine cubique, le tiers du dernier signe donné, sera tousiours le signe de la racine, & ainsi de toutes autres especes de racines.

Fin de la Disme

APPENDICE.

PREFACE

P*vis que nous avons descript cy devant la Disme, nous viendrons maintenant à l'usage d'icelle, demonstrans par 6 Articles, comment tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes, se peuvent facilement expedier par icelle, commençant premierement (comme elles ont aussi esté premierement mises en oeuvre) aux computations d'Arpenterie comme s'ensuit.*

ARTICLE I, DES COMPVTA- TIONS DE L'ARPENTERIE.

L'on nommera la verge aussi *Commencement*, qui est 1⓪ la partissant en dix parties egales, desquelles chascune fera 1①, puis se partira chascune *Prime* autrefois en dix parties egales, desquelles chascune fera 1②, & si on requiert les divisions plus petites, on divisera chasque 1② autrefois en dix parties egales, & chascune vaudra 1③, procedant ainsi plus avant s'il fust besoing, mais quant à l'Arpenterie, les parties en *Secondes* sont assez petites, mais pour les choses qui requierent la mesure plus juste, comme toicts de plomb, Corps, &c., l'on y peut user des *Tierces*. Quant à ce que la plupart des Arpenteurs n'usent pas de verge ains une chaisne de trois, quatre ou cincq verges, signans sur le baston de leur croix rectangulaire, quelques cincq ou six pieds avec leurs doigts, le semblable se peut faire icy, car au lieu d'iceux cincq ou six pieds avec leurs doigts, l'on peut mettre six ou cincq *Primes* avec leurs *secondes*.

Cecy estant ainsi preparé, l'on usera en mesurant de ces parties, sans prendre egard aux pieds ou doigts que contient la verge selon la coustume du païs, & ce qui se debura Ajouster, Soubstraire, Multiplier ou Diviser selon ceste mesure se fera selon la doctrine des precedens exemples.

Par exemple, il faut ajouster quatre triangles, ou superfices de terre, desquelles la premiere 345⓪7①2②, La deuxiesme 872⓪5①3②, La troisiesme 615⓪4①8②, La quatriesme 956⓪8①6②, les mesmes ajoustez selon la maniere declarée à la premiere proposition de ceste Disme en ceste sorte :

			⓪	①	②
	3	4	5	7	2
	8	7	2	5	3
	6	1	5	4	8
	9	5	6	8	6
2	7	9	0	5	9

Leur somme sera 2790⓪ ou verges 5①9②, lesdictes verges parties selon la coustume, par autant qu'il y a des verges en un Arpent, on aura les arpens requis. Mais si l'on veut sçavoir combien de pieds & doigts font les 5①9② (ce que l'Arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux proprietaires, cóbien que la pluspart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds & doigts (qui sont marquez joignant les dixiesmes parties sur un autre costé de la verge) s'accordent aux mesmes.

Au second, estant à soubstraire 57⓪3①2② de 32⓪5①7②, l'on besoignera selon la seconde proposition de ceste Disme en ceste sorte :

	⓪	①	②
5	7	3	2
3	2	5	7
2	4	7	5

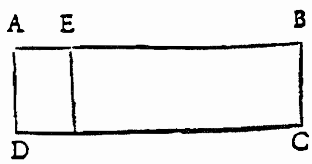
Et restent 24⓪ ou Verges 7①5②.

Au troisiesme, estant à multiplier (à cause des costez de quelque triangle ou quadrangle) 8⓪7①3②, par 7⓪5①4②, l'on fera selon la 3° proposition de ceste Disme en ceste sorte :

			⓪	①	②
			8	7	3
			7	5	4
		3	4	9	2
	4	3	6	5	
6	1	1	1		
6	5	8	2	4	2
	⓪	①	②	③	④

Et donnent produict ou superfice 65⓪8①, &c.

Au quatriesme, soit ABCD quelque quadrangle rectangle, duquel il faut couper 367⓪6①, & le costé AD fait 26⓪3① ; La demande est combien l'on mesurera depuis A vers B pour couper (j'entens par une ligne parallele avec AD) lesdictes 367⓪6①.



L'on partira 367⓪6① par 26⓪3① selon la quatriesme proposition de ceste Disme ainsi :

```
          2
        2 2
        7 6
      2 5 0 8
      4 6 3 1
  1 0 4 7 3 9         ⓪ ① ②
3 6 7 6 0 0 ( 1   3   9   7
2 6 3 3 3 3
  2 6 6 6
    2 2
```

Donne quotient pour la requise longueur de A vers B, laquelle soit AE, 13⓪9①7②.

Et si l'on veut, on pourra approcher plus pres (combien qu'il ne semble pas besoing) par la premiere note de ladicte quatriesme proposition. Les demóstrations de tous ces exemples sont faictes cy devant en leurs propositions.

ARTICLE II, DES COMPTES
DES MESVRES DE TAPISSERIE.

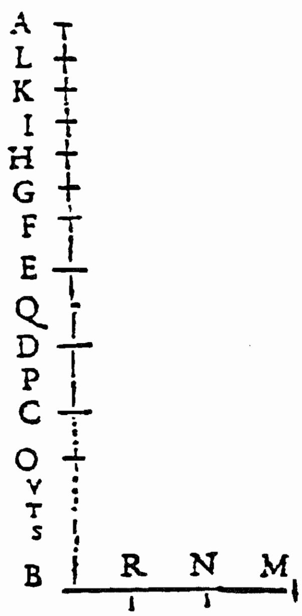
L'avlne du mesureur de tapisserie, luy sera 1⓪, laquelle il partira (sur quelque costé, la ou ne sont par les partitions selon l'ordonnance de la ville) comme est faict cy dessus de la verge de l'Arpenteur, à sçavoir en 10 parties egales, desquelles chascune sera 1①, puis chasque 1①, autrefois en dix parties egales, & chascune vaudra 1②, &c. Quant à leur usage, veu que les exemples accordent en tous avec ce qui en est dict au premiere Article de l'Arpenterie, elle sera par icelles assez notoire, de sorte qu'il n'est pas mestier d'en faire mention.

ARTICLE III, DES COMPTES
SERVANS A LA GAVIERIE
& aux mesures de tous tonneaux.

Vne Ame (qui faict en Anvers 100 pots) fera 1⓪, la mesme se divisera en profondeur & longueur en 10 parties egales (à sçavoir egales au respect du vin, non pas de la verge, de laquelle les parties de profondité sont inegales) & chasque partie fera 1① contenant 10 potz, puis chasque 1① en 10 parties egales, & chascune fera 1②, vallant 1 pot. Puis chasque 1② en dix parties egales, faisant chascune 1③.

Or estant ainsi partie la verge, & voulant trouver le contenu du Tonneau, on multipliera & besoignera comme au precedent premier article, qui estant assez manifeste, nous n'en dirons icy point d'avantage.

Mais veu que ceste dixiesme partition de la profondeur, n'est pas vulgaire, nous en declarerons cecy : Soit la verge AB une Ame, qui est 1⓪, divisée (selon la coustume) en poincts de profondeur comme ces dix C,D,E,F,G,H,I,K,L,A faisant chascune partie 1①, lesquelles il faut diviser autrefois en 10 en ceste sorte : L'on divisera premierement chasque 1① en deux, ainsi : L'on tirera la ligne BM, à droictangle sur AB, & egale à 1①BC, puis se trouvera (par la 13° proposition du 6° livre d'Euclide) la ligne moyenne proportionelle entre BM & la moitie qui soit BN & coupant BO, egale à BN, & si NO, fust alors egale à BC, l'opération est bonne : Puis se notera la longueur NC, de B vers A, comme BP, laquelle estant egalle à NC, l'operation est bonne: Semblablement la longueur DN, depuis B jusques à Q, & ainsi des autres. Il reste encore de partir chasque longueur comme BO, & OC, &c. en cinc, ainsi : L'on trouvera entre BM & sa dixiesme part, la ligne moyenne proportionelle qui soit BR, coupant BS, egale à BR ; Puis se notera la longueur SR, de B vers A, comme BT, & semblablement la longueur TR de B jusques à V, & ainsi des autres. Et semblablement se procedera pour diviser BS, & ST, &c. en ③. Ie di, que BS, & ST, & TV, &c. sont les desirees ②, ce qui se demonstre ainsi :



Parce que BN est ligne moienne proportionelle (par l'hypothese) entre BM & sa moitie ; le quarré de BN (par la 17° proposition du 6° livre d'Euclide) sera egale au rectangle de BM & sa moitie, mais iceluy rectangle est la moitie du .

quarré de BM, le quarré doncques de BN, est egal à la moitie du quarré de BM, mais BO est (par l'hypothese) egale à BN, & BC à BM, le quarré donc de BO, est egal à la moitie du quarré de BC. Et semblablement se demonstrera que le quarré de BS, est egal à la dixiesme part du quarré BM, parquoy, &c. Nous avons faict la demonstration briefve, parce que nous n'escrivons pas à Apprentifs, mais à Maistres.

ARTICLE IV, DES COMPTES
DE LA STEREOMETRIE EN GENERAL

Il est bien vray que la gaujerie que nous avons declaré cy devant est Stereometrie (c'est à dire science de mesurer les corps) mais considerant les diverses partitions de la verge de l'un & l'autre, aussi que cestuy-ci a telle difference de cestuy-la, comme genre à espece ; ils se peuvent distinguer par bonne raison, car toute Stereometrie n'est pas Gaujerie. Pour donc venir à la chose, le Stereometrien usera de la mesure de sa ville, comme verge ou aulne avec ses dixiesmes partitions descrites au premier & second article, l'usage de laquelle (semblable a ce qui en est dict au precedent) est telle : Posons qu'il y ait à mesurer quelque colomne quadranguliere, rectanguliere, de laquelle la longueur 3①2②, largeur 2①4③, hauteur 2⓪3①5③ ; La demande est combien il y a de matiere. L'on multipliera selon la doctrine de la 4° proposition de ce traicté, longueur par largeur, & leur produict autrefois par hauteur, en ceste sorte :

				①	②	
				3	2	
				2	4	
			1	2	8	
			6	4		
			7	6	8	①
			2	3	5	②
		3	8	4	0	
	2	3	0	4		
1	5	3	6			
1	8	0	4	8	0	
①	②	③	④	⑤	⑥	

Et donne le produict comme appert 1①8②4④8⑤.

NOTA. Quelcun ignorant (car c'est à cestuy-la que nous parlons icy) les fondamens de la Stereometrie, pourroit penser pourquoy l'on dict, que la grandeur de la colomne cy-dessus, n'est que de 1①, &c. veu qu'elle contient plus que 180 cubes, desquels la longueur de chasque costé est de 1① ; Il sçaura que le corps d'une verge n'est pas un corps de 10①, comme une verge en longueur, mais de 1000①, en respect dequoy 1① faict 100 cubes chascun de 1① ; Comme le semblable est assez notoire aux arpenteurs en superfice ; Car quand on dict 2 verges 3 pieds de terre, cela ne s'entend point 2 verges et 3 pieds quarrez mais de 2 verges & (comptant 12 pieds pour la verge) 36 pieds quarrez. Pourtant si la demande cy-dessus eust esté, de combien de cubes chascun de 1① fut la grandeur de ladicte colomne, l'on accommoderoit la solution conforme au requis, considerant que chasque 1① de ceux cy, faict 100① de ceux-la, & chasque 1② de ceux cy, 10① de ceux-la, &c. Ou autrement si la dixiesme part de la verge est la plus grande mesure que le Stereometrien se propose, il la peut nommer 1⓪, & puis comme dessus.

ARTICLE V, DES COMPV-
TATIONS ASTRONOMIQVES

Aians les anciens Astronomes parti le circle en 360 degrez ; ils voyoient que les computations Astronomiques d'icelles, avec leurs partitions, estoyent trop laborieuses, pourtant ils ont parti chasque degré en certaines parties, & les mesmes autrefois en autant, &c. à fin de pouvoir par ainsi tousiours operer par nombres entiers, en choississans la soixantiesme progression, parce que 60 est nombre mesurable par plusieurs mesures entieres, à sçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, mais si l'on peut croire l'experience (ce que nous disons par toute reverence de la venerable antiquité & esmeu avec l'utilite commune) certes la soixantiesme progression n'estoit pas la plus commode, au moins entre celles qui consistoyent potentiellement en la nature, ains la dixiesme qui est telle : Nous nommons les 360 degrez aussi *Commencemens*, les denotans ainsi 360⓪, & chascun degré ou 1⓪ se divisera en 10 parties egales, desquelles chascune fera 1①, puis chasque 1① en 10②, & ainsi des autres, comme le semblable est faict par plusieurs fois cy devant.

Or estant entendue ceste partition, nous pourrions descrire selon ce qui a esté promis, leur facile maniere de Aiouster, Soubstraire, Multiplier, & Diviser, mais veu qu'elles n'ont aucune difference des quatre propositions precedentes, tel recit ne feroit que perdre le temps, pourtant nous les laisserons servir pour exemple de cet article ; Y aioustant encore cecy ; que nous userons de ceste maniere de partition, en toutes les tables & comptes, se rencontrans en l'Astronomie, que nous esperons de divulger, en nostre vulgaire langue Germanique qui est la plus riche, la plus ornée, & la plus parfaicte langue de toutes langues, de la tres exquise singuliereté, de laquelle nous attendons de brief autre demonstration plus abondante, que Pierre & Iehan en ont faict en la BEWYSKONT ou DIALECTIQVE nagueres divulgée.

ARTICLE VI, DES COMPTES
DES MAISTRES DES MONNOIES,
Marchans & de tous estats en general.

Afin de dire en brief & en general, la somme & contenu de cest article, faut sçavoir qu'on partira toutes mesures, comme Longue, Humide, Seiche, Argent, &c. par la precedente dixiesme progression & chasque fameuse espece d'icelles se nommera *Commencement ;* comme Marc, *Commencement* des pois, par lesquels se poise l'or & l'argent ; Livre, *Commencement* des autres pois communs ; Livre de gros en Flandres, Livre Esterlain en Angleterre, Ducat en Hispaigne, &c. *Commencement* de monnoye ; Le plus haut signe du marc sera ④ car 1④ pesera environ la moitie d'un Es d'Anvers, la ③ lui suffira pour le plus haut signe de la Livre de gros, veu que telle 1③ faict moins que le quart d'un Es[1].

Les soubdivisions des pois pour peser toutes choses, seront (au lieu de demilivre, quart, demiquart, once, demionce, esterlin, grain, es, &c.) de chasque signe 5, 3, 2, 1, c'est à dire, qu'apres la livre ou 1⓪ suivera un pois de 5① (faisant ½ lb) puis de 3①, puis de 2①, puis de 1①, & semblables soubdivisions aura aussi la 1① & autres suivans.

Nous estimons aussi utile, que chasque soubdivision voire de quelle matiere fust son subject, soit nommé *Prime, Seconde, Tierce,* etc. & cela à cause qu'il nous est notoire que *Seconde* multipliée par *Tierce* donne produict *Quinte* (parce que 2 & 3 font 5 comme il est dict cy-dessus), Item que *Tierce*, divisée par *Seconde* donne quotient *Prime*, etc., ce qui ne se pourroit faire si proprement par autres noms ; Mais quant on les veut nommer par distinction des matieres (comme l'on dict demie aulne, demie livre, demie pinte, &c.) nous les pouvons nommer Prime de Marc, Seconde de Marc, Seconde de Livre, Seconde d'Aulne, &c.

Mais à fin d'en donner exemple, posons que 1 marc d'or vaut 36 lb 5①3②, la demande est combien monteront 8 marcs 3①5②4③ : L'on multipliera 3653 par 8354, donne produict par la 3° proposition qui est aussi la solution requise, 305 lb1①7②1③. quant aux 6④2⑤, elles ne sont icy de nulle estime.

Posons autrefois que 2 aulnes 3① coustent 3 lb 2①5②, La demande est combien cousteront 7 aulnes 5①3② : On multipliera selon la coustume, le dernier terme donné par le second, & le produict se divisera par le premier, c'est à dire, 753 par 325, faict 244725, qui divisé par 23 donne quotient & solution 10 lb 6①4②.

Nous pourrions donner autres exemples en toutes les vulgaires reigles d'Arithmetique, se rencontrans souvent es traffiques des hommes ; Comme la reigle de Compaignie, d'Interest, de Change, &c. demonstrans comment elles se peuvent toutes expedier par nombres entiers, aussi ceste facile operation par les gettons, mais veu qu'il est assez notoire par les precedens, nous n'en ferons point de mention.

Nous sçaurions aussi demonstrer plus amplement, par comparaison de facheux exemples en rompuz, la grande difference de facilité qu'il y a de ceux cy à ceux la, mais nous le passons outre à cause de briefveté.

Av dernier il nous faut encore dire de quelque difference qu'il y a de ce 6° article, aux 5 articles precedens, c'est que chascune personne peut exercer pour soy mesme la dixiesme partition desdicts precedents 5 articles, sans qu'il sera mestier d'en estre donné par le Magistrat quelque ordre general, mais cela pas ainsi en ce dernier, car ses exemples sont vulgaires

---

[1] *Interprétation du texte de référence, lequel se présente comme ci-dessous :*

de la Livre de gros,
e quart d'un ℥.
r peser toutes choses,

computations, qui se rencontrent à chasque moment, ausquels il seroit convenable, que la solution ainsi trouvée fust d'un chascun acceptée pour bonne & legitime. Pourtant considerant la tres grande utilité, ce seroit chose louable, si quelcuns, comme ceux qui en attendent la plus grande commodité, folicitoyent de la faire mettre en effect, à sçavoir que joignant les vulgaires partitions qu'il y a maintenant des Mesures, Pois, & Argent (demeurant chasque capitale mesure, Pois & Argent en tous lieux immuable) l'on ordonnast encore legitimement par les Superieurs, la susdicte dixiesme partition, à fin que chascun qui vouldroit la pourroit user.

Il avanceroit aussi la chose, si les valeurs d'argent, principalement de ce qui se forge de nouveau, fussent valuez sur quelques *Primes, Secondes, Tierces*, etc.

Mais tout si tout cecy ne fust pas mis en oeuvre, si tost comme nous le pourrions souhaiter, il nous contentera premierement, qu'il fera du bien à nos successeurs, car il est certain que si les hommes futurs, sont de telle nature comme ont esté les precedens, qu'ils ne seront pas tousiours negligens en leur si grand avantage.

Au second, ce n'est pas le plus abject sçavoir à un chascun en particulier, qu'il luy est notoire, comment les hommes se peuvent delivrer eux mesmes à toute heure qu'ils voudroyent, de tant & de si grands labeurs.

Au dernier, combien que l'effect de ce 6° article n'apparoistra point, peut estre, en quelques temps, toutesfois un chascun pourra exercer les cinc precedens, comme il est notoire, qu'aucuns des mesmes sont desia mis en oeuvre.

Fin de l'Appendice.

Titre	Étude de LA DISME de STEVIN de Bruges
Auteurs	Joël BRIAND, Jacqueline EURIAT, Marie Louise HUET, Raymond LECOQ, Marie-Lise PELTIER.
Origine	Texte élaboré au cours du stage
Date	Mars 1995
Type	Réexamen du texte de Simon STEVIN de Bruges *(LA DISME)* dans une perspective de formation
Résumé	Nous avons souhaité reprendre le texte de LA DISME en l'étudiant comme un document didactique. Son côté très contemporain en ce qu'il répond à une préoccupation sociale, la problématique posée, les procédés d'exposition, les rapports que ce texte révèle entre les savoirs savants et les pratiques sociales, nous intéressent. Nous faisons l'hypothèse que ce texte historique permettra de faire travailler aussi bien des professeurs d'école que des professeurs de mathématiques des lycées et collèges. Dans la suite de ce document, nous associons des questions et leurs réponses. Libre à tout formateur de réorganiser le questionnaire comme il lui conviendra.

Étude de *LA DISME* de STEVIN de Bruges

Introduction

Une question qui se pose en formation est celle de la construction de situations propices à l'acquisition et/ou à la ré-exploration personnelle de savoirs.

La construction de situations d'apprentissage est bien sûr une entrée que nous pratiquons quand cela est possible, mais il est d'autres approches qui méritent notre attention, en particulier l'approche historique.

L'utilisation d'un texte historique comme autre entrée en formation en mathématiques est pratiquée depuis pas mal d'années. Il s'agit le plus souvent de relire les auteurs anciens à l'aide du savoir actuel et de son organisation. Parce que l'étude de la genèse historique des savoirs peut éclairer la construction des savoirs chez un individu, cette approche est à la fois attrayante et utile. Toutefois, malgré la tentation qu'il y aurait à calquer ces deux genèses, les différences demeurent.

Le fait que la construction des nombres décimaux soit, historiquement, tantôt une réponse à des questions plutôt mathématiques, tantôt une réponse à des questions plutôt d'ordre socio-économique, a retenu notre attention.

Ainsi, dans cet article, après avoir repris brièvement quelques repères historiques concernant les décimaux, nous étudions le document "LA DISME" de STEVIN de Bruges, paru en 1585 en édition française.

Cette étude se présente sous forme d'un questionnaire, avec des indications de réponse à la suite de chaque question. En annexe 1, on trouvera une récapitulation de l'ensemble du questionnaire, pour faciliter l'utilisation en formation.

L'annexe 2 revient sur le problème d'extraction de racine carrée, l'annexe 3 propose un glossaire de quelques termes utilisés dans la DISME et l'annexe 4 donne quelques compléments.

REPÈRES HISTORIQUES CONCERNANT LES DÉCIMAUX

Quelque extraits de textes relatifs à la "découverte" de STEVIN

Histoire universelle des chiffres. Georges IFRAH (bouquins Laffont 1994)

1582 : le mathématicien néerlandais Simon STEVIN publie son *De Thiende* : c'est le premier ouvrage européen connu consacré à *la théorie générale des fractions décimales*. [ces fractions étaient certes connues bien avant lui : par les arabes, depuis le temps d'Al Uqlidisi [952] ; et en occident par Emmanuel Bonfils de Tarascon [1350], Regiomontanus [1463], Christophe Rudolff [1525], Elie Mizrachi [1535] et François Viète [1579]. Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi [première moitié du XVème], dont les travaux auront été ignorés en occident, personne en dehors de STEVIN, n'aura eu l'idée jusque là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers".

page 463, tome II.

Mathématiques et mathématiciens Pierre DEDRON, Jean ITARD (Magnard. 1972) *Les fractions.*

Les Hindous notaient les fractions comme nous, mais sans la barre horizontale. Les arabes eurent d'abord la même notation qu'eux, puis introduisirent la barre. Le calcul des fractions ordinaires de ces deux peuples était dans l'ensemble analogue au nôtre. [...]

Cependant ni les Hindous, ni les Arabes, ni les Occidentaux jusqu'à la fin du XVIème siècle ne se sont aperçu de l'intérêt qu'il y aurait à développer le système décimal de position dans les deux sens, comme les Babyloniens avaient développé leur système sexagésimal.

Ce retard provient essentiellement de la perfection même de la numération en base soixante. Adoptée à partir du IIème siècle avant notre ère par les astronomes grecs, conservée par les astronomes arabes [toutes les tables avaient été calculées dans cette base] elle fut utilisée dans les calculs astronomiques jusqu'au XVIIème siècle et est encore utilisée pour les angles et les temps.[...]

Viète, dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathematicum* de 1579, supplément du *Canon Mathématique*, déclare : « *En Mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines, et les progressions de même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant* ».

[...] La virgule dans la notation de Viète sépare les tranches de trois chiffres du nombre. La partie décimale est écrite en caractères un peu plus petits, et soulignée, le dénominateur 1000 restant sous-entendu. Un peu plus loin dans l'ouvrage, il sépare simplement la partie décimale de la partie entière par un trait vertical.

Le dernier pas est franchi par STEVIN, en 1582, dans *De Thiende*, ouvrage traduit en français par l'auteur en 1585 sous le titre *La DISME*.

Pages 289, 290

La rigueur et le calcul. Documents historiques et épistémologiques. Groupe inter IREM (Cédic.1982)

En général, les historiens des sciences attribuent à Al-Kasi l'invention des décimaux. dans son traité de mathématiques "*Miftah al-hisab*" [la clé de l'arithmétique 1427] qui rassemble l'ensemble des mathématiques élémentaires de son époque, il introduit en particulier les décimaux. On en trouve cependant des traces, en particulier de fractions décimales, chez Al-Uqlidisi.[...]

En Occident, quelques mathématiciens introduisent également les décimaux dans leurs calculs, souvent dans un but de simplification. Citons par exemple Emmanuel Bonfils [1340-1377], et deux siècles plus tard, François Viète dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathematicum* de 1579.

page 176

Le traité d'arithmétique de STEVIN dans lequel figure la *DISME* témoigne de connaissances des opérations sur les fractions ordinaires analogues aux nôtres (addition de fractions de même dénominateur, multiplication de fractions, réduction au même dénominateur, addition de fractions de dénominateurs quelconques).

Différentes conceptions historiques des décimaux
Guy BROUSSEAU. (IREM de BORDEAUX 1990)

a] Le décimal de l'antiquité sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires hiéroglyphiques des Égyptiens de - 2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de - 1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles on franchit divers obstacles...[passage à la forme 1/m, m naturel quelconque ; puis à n/m, n et m quelconques, etc.] Bien entendu, peu de ces propriétés sont reconnues même si elles sont utilisées. Je dirai - en empruntant ce terme à Y. CHEVALLARD [1981] - que le décimal est alors une notion protomathématique : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b] Al Huwarizmi [780-850], unifie le calcul des naturels avec celui des rapports géométriques, et introduit l'emploi de la numération de position décimale, et rend possible l'émergence du décimal outil d'appropriation, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux, etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec STEVIN [1585] d'authentiques applications.

Le décimal devient alors une notion paramathématique : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme objet d'étude. [Abd el Jaoud 1978]. Le décimal est montré dans son fonctionnement [préconstruit] et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. [L'écriture des fractions décimales dans l'oeuvre d'Al Aqlidisi est identique à la nôtre]. Pourtant le concept n'est pas repris par ses contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi [1427] le reconnaît comme une découverte mathématique. Le décimal n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition. les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution [par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1530 en produit une ébauche.]

c] C'est avec Simon STEVIN [1585] que le décimal accède au statut de notion mathématique. STEVIN introduit systématiquement les nombres géométriques et multinomiés [les fonctions polynômes], pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, les constitutions de tables. Leur rôle conceptuel reste plus caché. Pour STEVIN, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par des nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée.

Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissant et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives [Ovaert 1976]. Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait STEVIN ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

DEUX RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES HISTORIQUES

DIJKSTERHUIS E.J. « *SIMON STEVIN science in the Netherlands around 1600* ».. Ed. Martinus NIJHOFF / The HAGUE. 1970.

VAN BEMMEL : « *PATRIA BELGICA-encyclopédie nationale.* ».
Ed. Bruylant-Christophe. 1875.

QUESTIONNAIRE SUR LA DISME

QUESTIONS RELATIVES À L'INTRODUCTION

Dans le texte introductif intitulé

AVX ASTROLOGVES, ARPENTEURS, MESVREVRS DE TAPISSERIE, GAVIEVRS, STEREOMETRIENS EN general, Maistres de monnoye, & à tous marchans ,

pointez les étapes de l'argumentation de STEVIN et la nature de chacun des arguments.

Après une déclaration de modestie (vraie ou fausse) l'auteur argumente en se fondant sur les pratiques sociales :

"*Mais s'il est Arpenteur, il sçaura le grand benefice que le monde reçoit de sa science, par laquelle s'evitent plusieurs difficultéz et noises, qui s'eleveroyent journellement, à cause de l'incognue capacité des terres*"

Argument de simplicité :

"*Elle enseigne (a fin de dire beaucoup en un mot) d'expedier facilement sans nombres rompuz, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains : de sorte que les quatre principes d'Arithmetique que l'on appelle Ajouster, Soubstraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effect : Causant semblable facilité à ceux qui usent des gettons. Or si par tel moyen sera gaigné le precieux temps...*"

Il justifie l'utilité en se servant de l'usage qu'en font déjà les arpenteurs :

"*Quant à ce que quelqu'un me pourroit dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard : Mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il avient souvent aux chercheurs de forts mouvemens qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effect, ils ne vallent pas un festu. Nous luy respondons qu'il n'y a icy tel doubte, parce que l'experience s'en faict journellement en la chose mesme. A sçavoir par divers experts Arpenteurs Hollandois ausquels nous l'avons declaré, lesquels (laissans ce qu'ils avoyent inventé chascun à sa maniere, pour amoindrir le travail de leurs computations) l'usent à leur grand contentement..*

On peut introduire les décimaux pour plusieurs raisons. Quelle est la raison invoquée ici ?

Ce sont les décimaux comme système de notation rendant les opérations aisées entre rationnels décimaux. Ce ne sont pas les décimaux pour les approximations, du moins ici, mais on y reviendra plus en avant dans le document.

Recensez les savoirs de l'époque qui sont évoqués dans cette introduction. (Séparez pratiques sociales et savoirs des mathématiciens).

Il s'agit des opérations sur les fractions (les problèmes du livre d'Arithmétique). STEVIN y fait sans cesse allusion.

Mais pour son argumentation, STEVIN se réfère aux pratiques de calcul, plus familières, sur les fractions décimales.

STEVIN dévoile-t-il son *"invention"* dans l'introduction ?

Quelles sont ses préoccupations ?

Non, il montre son intérêt pour les affaires des hommes. Il expose les difficultés actuelles.

Il a pour souci de montrer que son invention s'adresse à tous et est crédible : elle s'adresse autant aux manieurs de jetons qu'aux comptables effectuant les calculs les plus élaborés, et des corporations comme celle des arpenteurs l'utilisent déjà *"à leur grand contentement"*.

A quoi correspond le paragraphe nommé *"Argument"* (à la fin de l'introduction) en termes actuels ?

Il s'agit du plan qui s'adresse aux mathématiciens. L'usage à destination des corporations est relégué en Appendice.

QUESTIONS RELATIVES A LA PREMIÈRE PARTIE

a) Quel est l'objet de la définition 1 et de l'explication qui la suit ?

b) Donnez en termes actuels le principe sur lequel s'appuie cette définition.

c) Comment s'y prend-t-il pour préparer le chiffre des dixièmes ?

a) C'est de présenter globalement la DISME comme un traité d'arithmétique qui va s'appuyer sur la numération décimale.

b) La définition s'appuie sur la numération en base dix.

c) Il fait relire un nombre selon l'ordre gauche-droite et non droite-gauche afin de préparer aux définitions 2, 3 et 4. (division et non groupement échange).

Comment s'y prend-t-il pour donner du sens au mot "dixième" ?

Il montre : il fait faire une relecture et remplace la lecture droite-gauche (dizaine) par une lecture gauche-droite (dixième).

a) La définition 3 montre que STEVIN se fonde sur un ensemble de savoirs commun aux "professionnels des calculs" de son époque. Quels sont ces savoirs ?

b) Faites une hypothèse sur la manière dont on écrivait, à cette époque, les nombres non entiers ?

c) Comment s'articule son invention à partir de ces savoirs ?

d) Il propose une écriture. Quelles sont les règles précises qu'il impose à ce moment de l'exposé ?

e) Réécrivez :
73 2745/10000
8 907/1000

Comparez à notre notation actuelle.

a) Il s'appuie sur les fractions. Dans celles-ci, il fonde véritablement les fractions décimales, organise leur décomposition pour décrire son partage en dix, même si celles-ci existaient déjà.

b) On écrivait les nombres non entiers comme : 8 937/1000

c) Il propose l'écriture en 8 9/10 3/100 7/1000, justifie sa présentation par une recomposition et non une décomposition. Le numérateur ne peut excéder 9.

d) Remarque : pour justifier une convention d'écriture, il faut partir des habitudes sociales (et non pas l'amener).

Il a besoin de l'addition des fractions pour justifier sa notation.

Remarque : l'écriture des nombres ne se sert pas de l'addition.

e) Les deux exercices visent à montrer que la question du zéro intercalaire n'est pas réglée.

A partir des définitions 1 et 4, précisez en quoi consiste finalement l'"Invention" ?

Cette invention est une convention d'écriture. Elle conduit à la création d'un nouvel ensemble des nombres nommé *"les nombres de Disme"*, strictement inclus dans l'ensemble des rationnels.

QUESTIONS RELATIVES A LA SECONDE PARTIE

Sur quelles pratiques de l'époque s'appuie STEVIN pour justifier sa façon de faire ?

STEVIN fait référence à une pratique de l'addition des rompus.

Quel est le rôle du nota de l'addition ?

Le résultat posé dans l'addition 1 conduit STEVIN à présenter le cas des nombres pour lesquels certains groupements sont absents et à préciser la notation.

a) L'exposé de la multiplication se fait en deux temps : le premier et le nota. Étudiez leur rôle respectif et explicitez le choix pédagogique.

b) A quel savoir actuel le nota vous fait-il penser ?

c) Comment la règle de découverte du nombre de chiffres après la virgule est-elle abordée ?

a) On fait le produit de deux nombres de même format, ce qui permet d'utiliser la démonstration classique avec retour aux rompus et au produit de rompus.

Dans le nota, il s'agit du produit de deux nombres qui n'ont pas le même format. Il explicite un nouveau procédé et adapte une nouvelle présentation. Dans le premier exemple, les unités de même rang sont en colonne. Dans le nota ce n'est plus le cas.

b) Le produit des puissances négatives de dix permet d'éclairer le nota.

c) Il effectue une démonstration à partir d'un nombre à 2 chiffres multiplié par un autre nombre à 2 chiffres après la virgule...

La division

Retrouvez, à partir de la présentation de 3,44352 divisé par 0,96 la façon dont une division est effectuée à l'époque.

Expliquez pourquoi STEVIN propose de *"mettre quelques 0 après le 7"* dans le NOTA 1

Il s'arrange toujours pour avoir un nombre plus grand afin que la soustraction des rangs donne toujours un nombre positif. Le contrôle ultérieur se fait.

a) A quel moment STEVIN aborde-t-il l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal ?

b) Quelle propriété de D aborde-t-il ?

c) Quelle convention d'écriture d'un rationnel écrit-il ?

d) Comment justifie-t-il l'insuffisance des écritures décimales ?

a) Dans l'extrait suivant :

> Il avient quelques fois que le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte : Là où il appert qu'il y en sortiront infinement des trois, restant tousiours $\frac{1}{3}$,

STEVIN met en évidence les limites de la DISME.

b) Il sait que l'approche de tels nombres est réalisable quelle que soit l'exigence de proximité :

> ...approcher si pres, comme la chose le requiert, omettant le residu.

Il signifie par là même la densité de **D** dans **Q**

c) Il propose une écriture "multinomiée"

> Il est bien vray que 13⓪3①3 $\frac{1}{3}$ ② ou 13⓪3①3②3 $\frac{1}{3}$ ③,etc. seroit le parfaict requis...

d) Il se fonde sur les exigences professionnelles de l'époque :

> ..., mais nostre intention est d'operer en ceste Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui se observe aux negoces des hommes, la ou on ne faict point compte de la milliesme partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Geometriens & Arith-

meticiens, en comptes de grande conséquence. Comme Ptolemée & Iehan de Montroyal, n'ont pas descript leurs tables des arcs et chordes, ou des sinus, par l'extreme parfection (combien qu'il estoit possible de le faire par nombres multinomies) à cause que ceste imparfection (considerant la fin d'icelles tables) est plus utile que telle parfection.

NOTA 2 : A propos de l'extraction des racines carrées

L'exemple choisi est l'extraction de la racine carrée de 0,0529.

De quelle manière STEVIN détermine le rang du dernier chiffre de la racine carrée ?

STEVIN utilise la propriété :

la racine carrée de 10^{-2n} *est* 10^{-n}

Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est pair, le rang du dernier chiffre de la racine est la moitié de ce rang

Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est impair, on se ramène au cas précédent en considérant le rang suivant.

(Voir étude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier dans la suite de ce document.)

Quel algorithme est ensuite proposé ?

L'algorithme d'extraction de la racine carrée pour les nombres entiers

QUESTIONS RELATIVES A L'APPENDICE

ARTICLE I
DES COMPUTATIONS DE L'ARPENTERIE

Citez une phrase du premier paragraphe qui semble montrer que le mot *verge* désigne ici une unité de longueur.

"... la plupart des arpenteurs n'usent pas de verge ains une chaisne de trois, quatre ou cincq verges"

Quels sont les instruments de mesure de longueur dont parle ici STEVIN ?

La chaîne de trois, quatre ou cinq verges, le bâton de la croix rectangulaire qui porte des pieds et des doigts, et la verge (sans doute règle d'une longueur d'une verge) qui porte des graduations en pieds et doigts (sous-multiples de la verge).

Quelles modifications STEVIN conseille-t-il aux arpenteurs concernant leurs instruments ? Dans quels buts ?

Graduer le bâton en Primes et Secondes au lieu de pieds et de doigts pour mesurer directement en verges, primes et secondes, et graduer la verge (règle) en pieds et doigts sur un autre côté, mais bien en face, pour montrer au client ce que représentent des primes et des secondes en pieds et doigts

Pourquoi diviser la verge en Primes et Secondes, plutôt qu'en pieds et doigts comme le voulait la coutume ?

Pour utiliser au maximum la numération décimale prolongée sur la gauche que STEVIN vient d'exposer : en effet on ne sera pas obligé de faire des opérations sur des nombres complexes, ce qui était la règle jusque là, ou de calculer sur des fractions

Dans le premier exemple numérique, STEVIN dit ajouter des superficies ; il trouve 2790, 59 verges ; le mot *verge* désigne donc ici une unité de superficie. Comment alors comprenez-vous la phrase :

"Mais si l'on veut sçavoir combien de pieds et de doigts font les 5①9② (ce que l'arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux proprietaires, combien que la pluspart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds & doigts (qui sont marquez joignant les dixiesmes parties sur un autre costé de la verge) s'accordent aux mesmes." ?

Comment l'arpenteur s'y prendra-t-il pour faire voir les 5 dixièmes 9 centièmes de verge superficielle ?

On peut penser qu'une verge superficielle est l'aire d'un carré de une verge linéaire sur une verge linéaire. Dans ce cas le dixième de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur un dixième de verge et cinq dixièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur cinq dixièmes de verge. On peut montrer la largeur de ce rectangle aux propriétaires sur la verge (règle), et on peut lire en face cette largeur en pieds.

De même 9 centièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur 9 centièmes de verge. Cette dimension pourra donc être montrée sur la verge, et en face l'équivalent en doigts.

Traduisez en langage moderne le problème donné au quatrième exemple. Pourquoi dit-il :

"bien qu'il ne semble pas besoing" ?

On a une parcelle rectangulaire ABCD, dont le côté AD mesure 26,1 verges. On veut enlever de cette parcelle un petit rectangle de côté AD et d'aire 367,6 verges. On demande la longueur de la deuxième dimension du petit rectangle.

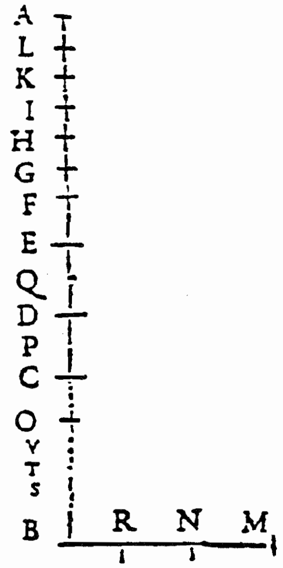
La verge linéaire servant à mesurer des terrains, elle doit être de l'ordre du mètre. Aller au-delà des centièmes de verge linéaire n'a donc pas de sens sur le terrain.

ARTICLE III

DES COMPTES SERVANS À LA GAVIERIE & aux mesures de tous tonneaux.

La figure présentée dans le document original est complexe à analyser. Ce qui suit n'est donc pas rédigé sous forme d'un questionnaire. Voici quelques pistes.

I. Rappels



L'unité est une âme, c'est-à-dire 100 pots.

La première subdivision en 10 donne une graduation irrégulière *« égale au respect du vin »*. Elle se fait *« selon la coutume »* et a sans doute un caractère expérimental. Cette irrégularité est liée à la forme du tonneau.

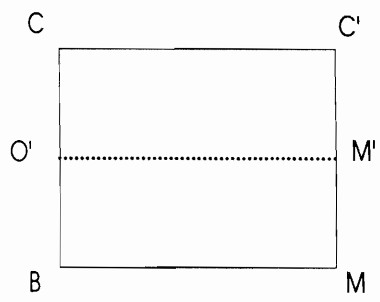
STEVIN propose d'obtenir les subdivisions suivantes par un procédé purement géométrique en deux étapes à chaque fois :

- d'abord, partage en 2 de chaque subdivision,
- ensuite, partage en 5 de chacune des deux parties obtenues.

Le tonneau n'étant pas un cylindre, STEVIN fonde sa méthode sur la moyenne proportionnelle. (Voir annexe).

II. Partage en 2 de [OC].

a) Si le tonneau était un cylindre, la graduation correspondant au partage en deux se trouverait au milieu de [BC].



b) Le tonneau n'est pas un cylindre.

On admet que [BO] correspond au côté d'un carré ayant même aire que le rectangle BO'M'M, ce que STEVIN énonce en disant :

« BO égale à BN, est la ligne moyenne proportionnelle entre BM et sa moitié ».

$$\frac{BM}{BN} = \frac{BN}{\frac{BM}{2}}$$

d'où $BN^2 = \dfrac{BM^2}{2}$ et $BN = BM\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

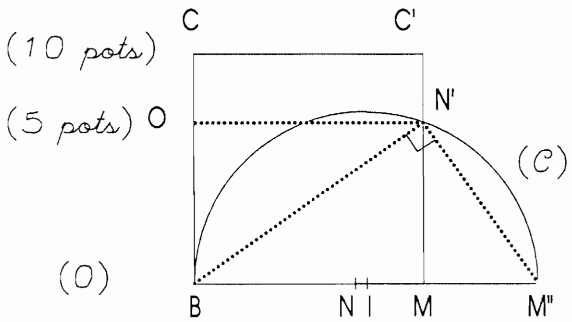
Méthode classique de recherche de la moyenne proportionnelle :

$MM'' = \dfrac{MB}{2}$; I milieu de BM''. ($\mathcal{C}$) demi-cercle de diamètre BM'' coupe [MC'] en N'.

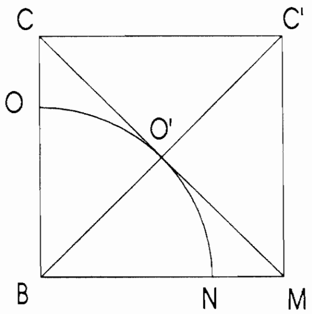
D'après les propriétés du triangle rectangle :

$MN'^2 = MB \times MM'' = MB \times \dfrac{MB}{2} = \dfrac{MB'}{2}$

soit $MN' = \dfrac{BM\sqrt{2}}{2}$



c) Autre méthode (par la diagonale du carré BMC'C).



$BC' = BM\sqrt{2}$

$BO' = \dfrac{BM\sqrt{2}}{2} = BN = BO$

d) Remarque : calcul de NO

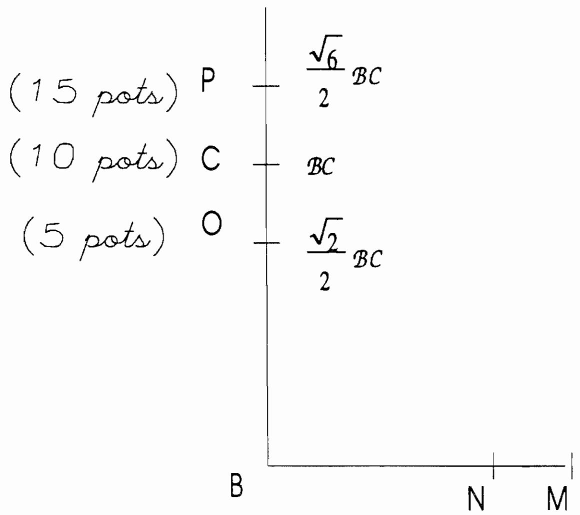
BNO triangle rectangle isocèle de sommet B

donc $NO = = BN\sqrt{2} = (\dfrac{BM\sqrt{2}}{2})\sqrt{2} = BM$

STEVIN conclut :

« ... et si NO suit alors égale à BC, l'opération est bonne. »

e) Début de la graduation :



BN donne BO correspondant à 5 pots.

NO donne BC correspondant à 10 pots.

NC donne BP correspondant à 15 pots.

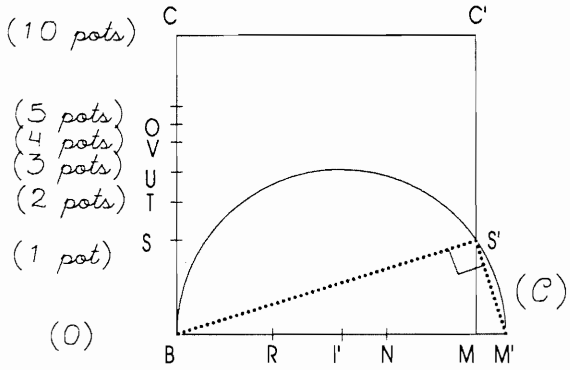
BD est fourni par l'expérience (20 pots).

ND donne BQ correspondant à 25 pots,

etc.

III. Partage en 5 de [BO] et [OC].

a) Méthode classique de recherche de la moyenne proportionnelle :



MM' = $\frac{BM}{10}$; I' milieu de [BM'] ; (C) demi cercle de diamètre [BM'] coupe [MC'] en S'.

D'après les propriétés du triangle rectangle :

MS'^{2} = MB x MM' = MB x $\frac{MB}{10} = \frac{MB^2}{10}$,

soit MS' = $\frac{MB\sqrt{10}}{10}$.

Remarques :

1. on a bien $\boxed{\frac{BM}{BR} = \frac{BR}{(\frac{BM}{10})}}$

2. BT = RS = $\sqrt{BR^2 + BS^2} = \frac{\sqrt{20}}{10}$BM

   BU = RT = $\sqrt{BR^2 + BT^2} = \frac{\sqrt{30}}{10}$BM

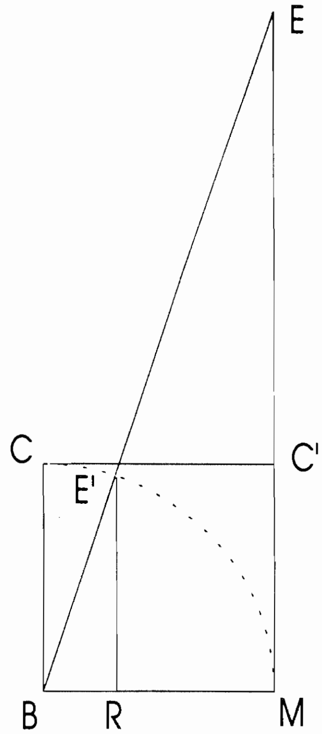
   BV = RU = $\sqrt{BR^2 + BU^2} = \frac{\sqrt{40}}{10}$BM

   BO = RV = $\sqrt{BR^2 + BV^2}$

   $= \frac{\sqrt{50}}{10}\text{BM} = 5\frac{\sqrt{2}}{10}\text{ BM} = \frac{BM\sqrt{2}}{2}$

   etc.

b) Autre méthode utilisant le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore :



Construire le triangle BME rectangle en M avec ME = 3 BM.

Placer E' sur [BE] tel que BE' = BM.

Abaisser la perpendiculaire E'R sur (BM)

BE = $\sqrt{BM^2 + 9BM^2} = BM\sqrt{10}$

$\frac{BE'}{BE} = \frac{BR}{BM}$ soit $\frac{BM}{BM\sqrt{10}} = \frac{BR}{BM}$

D'où $BR = \frac{BM\sqrt{10}}{10}$ et $BR^2 = \frac{BM^2}{10}$

soit : $\boxed{\frac{BM}{BR} = \frac{BR}{(\frac{BM}{10})}}$

ARTICLE IV
DES COMPTES DE LA STEREOMETRIE EN GENERAL

L'article IV, en relation avec l'article III, peut permettre d'aborder les liens entre le cas général et les cas particuliers

Pouvait-on se passer de l'article III et trouver les renseignements de résolutions des problèmes posés dans cet article à l'aide des conclusions du cas général de l'article IV ?

(on peut penser à l'analogie avec l'étude de la proportionnalité et l'étude des échelles et pourcentages à l'école élémentaire).

STEVIN situe les différences et liens entre cet article et le précédent, en précisant que la stéréométrie est plus générale que la gaujerie et qu'elle doit être étudiée séparément.

« gaujerie est stereometrie »,... « toute Stereometrie n'est pas Gaujerie »

STEVIN précise ensuite que le système de calcul proposé peut se faire à partir de l'unité de base en vigueur à l'endroit où l'on travaille (verge ou aulne de la ville) et propose un exemple. Le problème posé est le suivant :

« combien de matière dans une colonne quadriangulière rectangulière ? »

Exprimer le problème posé en langage actuel.

Calculer le volume d'un pavé de dimensions 0,32 x 0,24 x 2,35

L'article se termine par une explication supplémentaire destinée à ceux qui ne sont pas connaisseurs des règles de la stéréométrie et justifiant le résultat.

Présenter en langage actuel la convention exprimée dans la note.

Quelle aide est utilisée pour justifier la lecture du résultat ?

(on peut s'intéresser ici au rôle de la référence à des situations connues pour éclairer une nouvelle connaissance)

La verge en volume diffère de la verge en longueur : 1 verge correspond à 1000 cubes de côté 0,1 ; en conséquence de quoi 0,1 verge en volume correspond à 100 cubes de côté 0,1.

Pour développer ce fait, l'analogie est faite avec ce qui est connu pour les arpenteurs et le calcul de la superficie.

ARTICLE V
DES COMPUTATIONS ASTRONOMIQUES

Qu'est-ce qu'un *"nombre mesurable par mesures entières"* selon STEVIN ?

C'est l'ensemble des diviseurs de ce nombre.

Comment est justifié l'usage de la division en 360 degrés du cercle et le partage du degré en 60 ?

Le nombre 60 a de nombreux diviseurs entiers.

Pourquoi STEVIN ne présente t-il pas de calculs dans cette partie ?

Ici, il n'est pas proposé d'exemples de calculs à l'aide de la partition en dix, car ceux-ci ne diffèrent pas de ceux présentés dans la première partie. Il s'agit seulement de signaler que l'usage des nombres entiers sans rompus est possible en astronomie.

Quelles analogies et quelles différences faites vous entre la proposition de STEVIN et celle de la convention à la fin du XVIII° siècle ?

STEVIN conserve les 360° alors que la convention va instaurer le grade et les 400 grades du cercle. (Sans succès à long terme). Sur l'appendice on ne parle que des nombres "degrés décimaux" (à relier avec l'heure décimale).

ARTICLE VI

DES COMPTES DES MAISTRES DES MONNOIES, Marchans & de tous estats en general :

Préciser les situations où la règle présentée est applicable et comment il est prévu de prendre en compte les différentes unités de mesure en vigueur.

Tout d'abord, il est précisé que le contenu de cet article concerne n'importe quelle unité monétaire (l'unité de base utilisée sera celle en vigueur dans la ville où l'on se trouve) et que tout calcul se fera en utilisant la partition en 10 des unités de mesure utilisées par les marchands (unités de longueur, de capacités pour les liquides ou de capacités pour les matières sèches, unités de poids).

On choisit l'unité de commencement, en fonction de la valeur monétaire utilisée ; puis, on relie les différentes unités de la mesure que fait le marchand (ici le poids) et la place des chiffres et du signe associé dans l'écriture sans rompus ; c'est ainsi que pour les poids on crée des subdivisions de poids de 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1. permettant de peser en *prime de livre*, puis on divise à nouveau en dix pour peser en *seconde de livre*, etc..

Deux problèmes sont ensuite résolus comme démonstrations de l'usage de cette nouvelle façon de calculer :

Sachant que 1 marc d'or vaut 36,53 livres, combien valent 8,354 marcs ?
Si 2,3 aulnes coûtent 3,25 livres, que coûtent 7,53 aulnes ?

Que penser du nombre et du choix des exemples choisis par STEVIN ?

(on peut s'interroger ici du rôle des exemples (choix et nombre) pour dégager une règle générale.)

Étudier la démarche de résolution des problèmes posés (en particulier la façon de résoudre le problème de proportionnalité et la technique de construction de la règle de trois).

Selon STEVIN les deux exemples précédents suffisent à prouver que l'usage des nouveaux nombres et calculs est fort commode pour les marchands.

Conclusion

Dans la conclusion, STEVIN exprime la différence qui peut être établie entre l'article 6 et les autres : il s'agit de l'usage social : pour ce qui concerne la monnaie, il est nécessaire que la solution trouvée soit légitimée. C'est pourquoi il s'adresse aux autorités qui devraient permettre que l'usage de cette nouvelle partition des mesures s'ajoute à l'usage des partitions en vigueur.

La proposition sera utile aux successeurs qui ne négligeront pas toujours les avantages de cette nouvelle méthode.

Les hommes peuvent se transmettre entre eux ce nouveau savoir.

Si l'utilité du sixième article n'est pas reconnue, il est toutefois possible d'utiliser les cinq autres.

La conclusion peut apporter l'occasion d'une réflexion plus générale sur le métier d'enseignant :

> *Comment transmettre un savoir nouveau ?* ou *Comment modifier les habitudes ?*
>
> *Comment concilier anciennes habitudes et nouvelles techniques ?*
>
> *Comment légitimer un nouveau savoir ?*

QUESTIONS RELATIVES À LA DÉMONSTRATION CHEZ STEVIN

Quel objectif se propose STEVIN dans toute la seconde partie de la DISME ?

Il se propose de montrer que l'on peut opérer sur les nombres de Disme comme sur des entiers à quelques contraintes simples près, et que ce qu'on trouve en manoeuvrant ainsi correspond bien à ce qu'on aurait trouvé en utilisant des rompus.

Dans la seconde partie de la DISME, STEVIN pose quatre problèmes : lesquels ?

Étant donnés nombres de Disme à ajouter : Trouver leur somme.

Étant donnés nombres de Disme duquel on soustrait, et à soustraire : Trouver leur reste.

Étant donnés nombres de Disme à multiplier et multiplicateur : Trouver leur produit.

Étant donnés nombres de Disme à diviser et diviseur : Trouver leur quotient.

Pour résoudre ces problèmes, STEVIN annonce cinq étapes à chaque fois : explication du donné, explication du requis, construction, démonstration et conclusion.

a) Caractérisez d'une phrase chacune des trois premières étapes.

L'explication du donné consiste à présenter l'exemple numérique choisi.

L'explication du requis consiste à présenter ce qu'on cherche.

La construction consiste à présenter les actions simples à exécuter sur les nombres de Disme (actions que le lecteur n'a pas à faire : l'opération est présentée à côté).

b) Quel choix didactique STEVIN fait-il pour convaincre son lecteur de la validité de ce qu'il avance ?

Il choisit de montrer que cela fonctionne sur un exemple numérique compliqué. Il se contente de montrer l'équivalence des écritures dans des cas particuliers.

c) Pourquoi n'accepterait-on pas aujourd'hui de nommer "démonstration" sa démarche ? Quels noms pourrait-on utiliser pour la caractériser ?

Aujourd'hui, dans le monde des mathématiciens, on se méfie des particularités ; on se dit (et on a des contre-exemples nombreux pour justifier cela) qu'un procédé qui réussit sur un exemple ne réussit pas nécessairement dans tous les cas ; on exige donc des calculs plus généraux, par exemple au moyen de lettres. On parlerait plutôt dans ce cas-ci de l'illustration d'un mécanisme sur un exemple. Pour un public non spécialiste, cela peut représenter une preuve convaincante.

d) Quels arguments STEVIN donne-t-il pour étayer ses "démonstrations" ?

- ses propres définitions (références à la première partie de la Disme),
- des références aux "problèmes de l'Arithmétique" (sans doute un ouvrage connu).

e) Comment choisit-il ses exemples numériques ? Dans quel but ?

Il les choisit assez compliqués de manière à envisager sur un seul exemple tous les cas difficiles.

QUESTIONS DE SYNTHÈSE

Donner les grandes idées de l'introduction de la DISME. En quoi les arguments de STEVIN sont-ils habiles ?

La disme est une proposition toute simple, mais très utile.

La vie professionnelle est souvent compliquée par de laborieux calculs, dont la moindre erreur risque de porter préjudice à son auteur.

La disme enseigne "d'expédier facilement sans nombres rompus tous comptes", comme si on opérait sur des entiers. Donc temps gagné, et soucis ôtés.

La disme a déjà été expérimentée par des arpenteurs hollandais et ils en sont très contents.

Il s'adresse, non pas à des mathématiciens, mais à des gens pour lesquels sa proposition serait vraiment utile. Il insiste sur la simplicité de la Disme, son utilité, et pas du tout sur le fait qu'il faut bousculer toutes ses habitudes si on veut vraiment l'exploiter dans son métier. Il prévient justement toute réflexion à ce sujet en annonçant que des arpenteurs s'y sont déjà mis et en sont très contents.

STEVIN s'adresse à des publics divers. Différencie-t-il ses explications selon les publics ? Argumentez votre réponse.

Dans l'article III de l'appendice, il fait une démonstration qui manifestement s'appuie sur des connaissances de spécialistes en gaugerie ; et il dit "Nous avons fait la démonstration brève, parce que nous n'écrivons pas à Apprentis mais à Maîtres."

Dans le Nota de l'article IV, : il dit "Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, ..."

Dans le Nota de la proposition IV, on peut penser qu'il s'adresse à des mathématiciens quand il montre que certains nombres ne peuvent pas s'écrire en nombre de Disme, et aussitôt, il balaie ces nombres-là car dans les affaires des hommes, on n'a pas besoin d'une très grande précision.

Essayez, en quelques phrases, de préciser les objectifs de STEVIN et comment il s'y prend pour les atteindre.

Il veut être compris de tous. Il veut donner à tous l'envie d'essayer sa méthode. Il veut que les gens abandonnent les sous multiples en douzième ou en quart, pour adopter les dixièmes, centièmes. Il aimerait aussi convaincre les "décideurs" au sujet des mesures officielles.

Il multiplie les exemples pour faire comprendre ses définitions. Il se donne le mal de montrer comment on fera les quatre opérations, et même les racines carrées, toujours sur des exemples. Les petites difficultés sont vues dans les nota, sur des exemples.

Il prend soin de s'adresser séparément aux différents corps de métier, pour ne pas ennuyer les uns avec les problèmes des autres.

Et comme il sait que la force des habitudes est grande, il cherche à suggérer le moins de changements possibles : ainsi dans tous les corps de métier on gardera l'unité principale ; on ne changera que les sous multiples

Comment s'arrange-t-il pour que chacun puisse ne lire que ce dont il a besoin ?

Il fait des paragraphes différents pour les différents métiers.

STEVIN se rend compte que ses suggestions (dans l'appendice) vont bouleverser des habitudes. Comment s'y prend-il pour atténuer cet effet ?

Il indique des modifications minimes des instruments. Il insiste souvent sur le fait qu'on n'a pas besoin d'une très grande précision. Il donne des indications pour modifier les graduations non régulières de la gauge. Il aide à s'y retrouver pour les mesures d'aire ou de volume.

ANNEXE 1 - QUESTIONNNAIRE SUR *LA DISME*

QUESTIONS RELATIVES À L'INTRODUCTION

Dans le texte introductif intitulé

AVX ASTROLOGVES, ARPENTEURS, MESVREVRS DE TAPISSERIE, GAVIEVRS, STEREOMETRIENS EN general, Maistres de monnoye, & à tous marchans ,

pointez les étapes de l'argumentation de STEVIN et la nature de chacun des arguments.

On peut introduire les décimaux pour plusieurs raisons.
Quelle est la raison invoquée ici ?

Recensez les savoirs de l'époque qui sont évoqués dans cette introduction.
(Séparez pratiques sociales et savoirs des mathématiciens).

STEVIN dévoile-t-il son *"invention"* dans l'introduction ?
Quelles sont ses préoccupations ?

A quoi correspond le paragraphe nommé *"Argument"* (à la fin de l'introduction) en termes actuels ?

QUESTIONS RELATIVES A LA PREMIÈRE PARTIE

a) Quel est l'objet de la définition 1 et de l'explication qui la suit ?
b) Donnez en termes actuels le principe sur lequel s'appuie cette définition.
c) Comment s'y prend-t-il pour préparer le chiffre des dixièmes ?

Comment s'y prend-t-il pour donner du sens au mot "dixième" ?

a) La définition 3 montre que STEVIN se fonde sur un ensemble de savoirs commun aux "professionnels des calculs" de son époque. Quels sont ces savoirs ?
b) Faites une hypothèse sur la manière dont on écrivait, à cette époque, les nombres non entiers ?
c) Comment s'articule son invention à partir de ces savoirs ?
d) Il propose une écriture. Quelles sont les règles précises qu'il impose à ce moment de l'exposé ?
e) Réécrivez :
   73 2745/10000
   8 907/1000

   Comparez à notre notation actuelle.

A partir des définitions 1 et 4, précisez en quoi consiste finalement l'"Invention" ?

QUESTIONS RELATIVES A LA SECONDE PARTIE

Sur quelles pratiques de l'époque s'appuie STEVIN pour justifier sa façon de faire ?

Quel est le rôle du nota de l'addition ?

a) L'exposé de la multiplication se fait en deux temps : le premier et le nota. Étudiez leur rôle respectif et explicitez le choix pédagogique.
b) A quel savoir actuel le nota vous fait-il penser ?
c) Comment la règle de découverte du nombre de chiffres après la virgule est-elle abordée ?

La division

Retrouvez, à partir de la présentation de 3,44352 divisé par 0,96 la façon dont une division est effectuée à l'époque.

Expliquez pourquoi STEVIN propose de *"mettre quelques 0 après le 7"* dans le NOTA 1

a) A quel moment STEVIN aborde-t-il l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal ?
b) Quelle propriété de **D** aborde-t-il ?
c) Quelle convention d'écriture d'un rationnel écrit-il ?
d) Comment justifie-t-il l'insuffisance des écritures décimales ?

NOTA 2 : A propos de l'extraction des racines carrées

L'exemple choisi est l'extraction de la racine carrée de 0,0529.
De quelle manière STEVIN détermine le rang du dernier chiffre de la racine carrée ?

Quel algorithme est ensuite proposé ?

QUESTIONS RELATIVES A L'APPENDICE

ARTICLE I DES COMPUTATIONS DE L'ARPENTERIE

Citez une phrase du premier paragraphe qui semble montrer que le mot *verge* désigne ici une unité de longueur.

Quels sont les instruments de mesure de longueur dont parle ici STEVIN ?

Quelles modifications STEVIN conseille-t-il aux arpenteurs concernant leurs instruments ? Dans quels buts ?

Pourquoi diviser la verge en Primes et Secondes, plutôt qu'en pieds et doigts comme le voulait la coutume ?

Dans le premier exemple numérique, STEVIN dit ajouter des superficies ; il trouve 2790, 59 verges ; le mot *verge* désigne donc ici une unité de superficie. Comment alors comprenez-vous la phrase :

"Mais si l'on veut sçavoir combien de pieds et de doigts font les 5①9② (ce que l'arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux proprietaires, combien que la pluspart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds & doigts (qui sont marquez joignant les dixiesmes parties sur un autre costé de la verge) s'accordent aux mesmes." ?

Comment l'arpenteur s'y prendra-t-il pour faire voir les 5 dixièmes 9 centièmes de verge superficielle ?

Traduisez en langage moderne le problème donné au quatrième exemple.

Pourquoi dit-il : "bien qu'il ne semble pas besoing" ?

ARTICLE IV DES COMPTES DE LA STEREOMETRIE EN GENERAL

Pouvait-on se passer de l'article III et trouver les renseignements de résolutions des problèmes posés dans cet article à l'aide des conclusions du cas général de l'article IV ?

(on peut penser à l'analogie avec l'étude de la proportionnalité et l'étude des échelles et pourcentages à l'école élémentaire).

STEVIN précise ensuite que le système de calcul proposé peut se faire à partir de l'unité de base en vigueur à l'endroit où l'on travaille (verge ou aulne de la ville) et propose un exemple. Le problème posé est le suivant :

« combien de matière dans une colonne quadriangulière rectangulière ? »

Exprimer le problème posé en langage actuel.

L'article se termine par une explication supplémentaire destinée à ceux qui ne sont pas connaisseurs des règles de la stéréométrie et justifiant le résultat.

Présenter en langage actuel la convention exprimée dans la note.

Quelle aide est utilisée pour justifier la lecture du résultat ?

(on peut s'intéresser ici au rôle de la référence à des situations connues pour éclairer une nouvelle connaissance)

ARTICLE V DES COMPUTATIONS ASTRONOMIQUES

Qu'est-ce qu'un *"nombre mesurable par mesures entières"* selon STEVIN ?

Comment est justifié l'usage de la division en 360 degrés du cercle et le partage du degré en 60 ?

Pourquoi STEVIN ne présente t-il pas de calculs dans cette partie ?

Quelles analogies et quelles différences faites vous entre la proposition de STEVIN et celle de la convention à la fin du XVIII° siècle ?

ARTICLE VI DES COMPTES DES MAISTRES DES MONNOIES, Marchans & de tous estats en general :

Préciser les situations où la règle présentée est applicable et comment il est prévu de prendre en compte les différentes unités de mesure en vigueur.

Deux problèmes sont ensuite résolus comme démonstrations de l'usage de cette nouvelle façon de calculer :
Sachant que 1 marc d'or vaut 36,53 livres, combien valent 8,354 marcs ?
Si 2,3 aulnes coûtent 3,25 livres, que coûtent 7,53 aulnes ?
Que penser du nombre et du choix des exemples choisis par STEVIN ?
(on peut s'interroger ici du rôle des exemples (choix et nombre) pour dégager une règle générale.)
Étudier la démarche de résolution des problèmes posés (en particulier la façon de résoudre le problème de proportionnalité et la technique de construction de la règle de trois).

QUESTIONS RELATIVES À LA DÉMONSTRATION CHEZ STEVIN

Quel objectif se propose STEVIN dans toute la seconde partie de la DISME ?

Dans la seconde partie de la DISME, STEVIN pose quatre problèmes : lesquels ?

Pour résoudre ces problèmes, STEVIN annonce cinq étapes à chaque fois : explication du donné, explication du requis, construction, démonstration et conclusion.

a) Caractérisez d'une phrase chacune des trois premières étapes.
b) Quel choix didactique STEVIN fait-il pour convaincre son lecteur de la validité de ce qu'il avance ?
c) Pourquoi n'accepterait-on pas aujourd'hui de nommer "démonstration" sa démarche ? Quels noms pourrait-on utiliser pour la caractériser ?
d) Quels arguments STEVIN donne-t-il pour étayer ses "démonstrations" ?
e) Comment choisit-il ses exemples numériques ? Dans quel but ?

QUESTIONS DE SYNTHÈSE

Donner les grandes idées de l'introduction de la DISME. En quoi les arguments de STEVIN sont-ils habiles ?

STEVIN s'adresse à des publics divers.
Différencie-t-il ses explications selon les publics ? Argumentez votre réponse.

Essayez, en quelques phrases, de préciser les objectifs de STEVIN et comment il s'y prend pour les atteindre.

Comment s'arrange-t-il pour que chacun puisse ne lire que ce dont il a besoin ?

STEVIN se rend compte que ses suggestions (dans l'appendice) vont bouleverser des habitudes. Comment s'y prend-il pour atténuer cet effet ?

ANNEXE 2
Étude de l'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un entier

A la fin de la seconde partie de la Disme, Stevin signale en note l'intérêt de sa méthode pour l'extraction des racines carrées.

Il ne développe pas l'algorithme, mais il peut être intéressant d'étudier l'évolution des algorithmes d'extraction de racines carrées.

C'est pourquoi nous vous proposons un exemple, à partir de la reproduction d'un texte ancien (probablement du 18ème siècle, mais la référence de ce document n'a pu être retrouvée...)

Disposition ancienne

216

INSTRUCTION.

La *Racine quarrée* eſt fort peu différente de la Diviſion ; il faut ſeulement ſavoir la Table de multiplication quarrée qui eſt ici à côté.

Suppoſez qu'il fallût extraire la racine du nombre 119029, poſez ledit nombre comme ſi vous le vouliez diviſer ; mais il faut faire une ſéparation de deux en deux figures en reculant, & venant de droite à gauche, ainſi que vous voyez que j'ai fait à ces trois Exemples, quoiqu'il ne faille qu'une ſeule Regle.

Il faut commencer votre Regle à gauche, diſant la racine de 11 eſt 3. Poſez ce 3 en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 11 *pour ſervir de diviſeur.* Diſant 3 fois 3 ſont 9, de 11 reſte 2 qu'il faut poſer ſur 11 en coupant ledit 11.

Voyez le premier Exemple.

Cela fait, doublez le 3 du produit & ce double 6 ſera la premiere figure de votre ſecond diviſeur que vous mettez ſous le 9, diſant en 29 combien de fois 6, il y eſt 4, qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 0 *pour ſervir de diviſeur*, ainſi ayant diviſé 290 par 64, reſtera 34 en haut.

Voyez le ſecond Exemple.

Enfin, Il faut toujours doubler le produit tel qu'il ſoit pour ſervir de diviſeur. Vous direz donc à 34 deux fois 4 ſont 8 qu'il faut poſer ſous le 2, & 2 fois 3 ſont 6 qu'il faut poſer ſous le 4 diviſeur précédent.

Après, dites en 34 combien de fois 6, il y eſt 5 fois qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine totale, & après le* 8 *pour ſervir au dernier diviſeur*, ainſi votre derniere diviſion étant faite, vous trouverez que 119029 auront pour racine 345.

La preuve ſe fait en multipliant les 345 de racine par 345, viennent en y ajoutant le 4 de reſte les 119029 dont on a extrait la racine quarrée.

DE

217

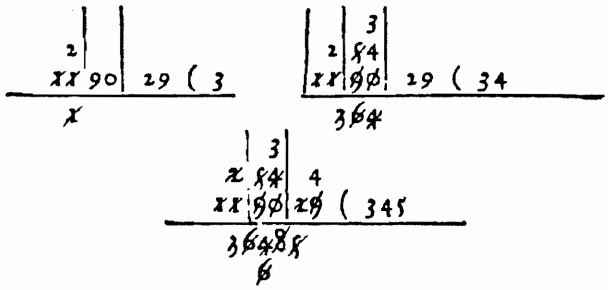
DE LA RACINE QUARRÉE.

Racine quarrée eſt un nombre, lequel étant multiplié par lui-même, produit ſon quarré juſte.

Preſque tous les Auteurs qui en ont traité forment la Table ſuivante d'une autre maniere ; mais celle-ci eſt la plus familiere & la plus facile, parce qu'elle eſt plus conforme au Livret de la Multiplication qui en eſt le fondement ; auſſi voyez au petit Livret, feuillet 40, *& au grand, feuillet* 43, *& vous trouverez la racine & ſon quarré à toutes les premieres lignes.*

Racine.		Quarrée.
1	*eſt la racine de*	1
2	*eſt la racine de*	4
3	*eſt la racine de*	9
4	*eſt la racine de*	16
5	*eſt la racine de*	25
6	*eſt la racine de*	36
7	*eſt la racine de*	49
8	*eſt la racine de*	64
9	*eſt la racine de*	81

EXEMPLES.



Maxime générale pour les reſtes, il faut mettre le haut pour le deſſus de la Fraction, & doubler le produit 345, mais y ajouter 1, & ſera le deſſous de la Fraction qui ſera $\frac{4}{691}$, qui n'eſt preſque rien.

T

Disposition actuelle

Nous prenons le même exemple que celui proposé dans le document reproduit en page précédente.

Considérons le nombre 119029. Il est compris entre 10^5 et 10^6, la partie entière de sa racine carrée est donc entre 100 et 1000, elle a trois chiffres et peut donc s'écrire 100c + 10d + u

On cherche donc à déterminer c, d, u tels que

$$\begin{aligned} 119029 &= (100c + 10d + u)^2 + \alpha \quad \text{avec } \alpha \text{ petit.} \\ &= 10000c^2 + 2 \times 100c \times 10d + 100d^2 + 2 \times 100c \times u + 2 \times 10d \times u + u^2 + \alpha \\ &= 10000c^2 + (2 \times 10 \times c + d) \times d \times 100 + [2 \times (100c + 10d) + u] \times u + \alpha \end{aligned}$$

L'algorithme consiste à retrancher progressivement les différents termes à 119029. Il est commode de séparer les chiffres par tranches de 2 à partir des unités. Le nombre de tranches indique le nombre de chiffres de la partie entière de la racine carrée. Les tranches sont "abaissées" successivement.

	11 90 29	345	on cherche c tel que c^2 soit juste inférieur à 11 ; c'est 3, on place 3.
on retire 90000	- 9 00 00		
	2 90 29	6• × • = ? • est donc 4 64 × 4 = 256	on cherche d (figuré par le point) tel que (2 × 10 × c + d) × d soit proche de 290, pour cela on double c (ici c=3 on trouve 6) et on cherche d, d est 4, on place 4 à côté du 3 sur la 1ère ligne.
on retire 25600	- 2 56 00		
	34 29	68• × • = ? • est donc 5 685 × 5 = 3425	on cherche u (figuré par le point) tel que [2 × (100c + 10d) + u] × u soit proche de 3429, pour cela on double 34 et on cherche u, u est 5, on place 5 en unité sur la 1ère ligne.
on retire 3425	- 34 25		
	4		α est égal à 4.

On peut donc conclure 119029 = 345^2 + 4

On peut facilement prolonger l'algorithme pour obtenir des approximations décimales...	1 1 9 0 2 9	345,0057...
	- 9	***3***
	2 9 0	
	- 2 5 6	6***4*** x ***4*** = 256
	3 4 2 9	
	- 3 4 2 5	68***5*** x ***5*** = 3425
	4 0 0	
	- 0	690***0*** x ***0*** = 0
	4 0 0 0 0	
Utiliser la méthode pour extraire la racine carré du nombre proposé par STEVIN (0,0529)	- 0	6900***0*** x ***0*** = 0
	4 0 0 0 0 0 0	
	- 3 4 5 0 0 2 5	69000***5*** x ***5*** = 3450025
	5 4 9 9 7 5 0 0	
	- 4 8 3 0 0 7 4 9	690010***7*** x ***7*** = 48300749
	6 6 9 6 7 5 1	
		etc

ANNEXE 3 - GLOSSAIRE de quelques termes de *LA DISME*

Un certain nombre de termes sont utilisés dans une orthographe différente de l'actuelle, sans que cela pose de réel problème de compréhension. On remarquera en particulier

- une utilisation beaucoup moins fréquente qu'actuellement des lettres accentuées ; certaines utilisations, d'ailleurs limitées, sont par contre aujourd'hui disparues, comme *á* pour *an*, *ó* pour *om*,...
- la présence de lettres aujourd'hui disparues, dont certaines ont justement été remplacées par l'accentuation de la voyelle précédente : *maistre* pour *maître* - *fust* pour *fûst* - *mesme* pour *même*, - *troisiesme* pour *troisième* - *estant*, *estre* pour *étant*, *être* - *nostre* pour *nôtre* - *coustume* pour *coutume* - *chasque*, *chascun* pour *chaque*, *chacun* - *cestuy* pour *celui* - *faict*, *dict* pour *fait*, *dit* - *ledicts*, *lesdictes* pour *ledit*, *lesdites* - *effect*, *fruict* pour *effet*, *fruit* - *produict* pour *produit* - *cinc* ou *cincq* pour *cinq* - *doubte* pour *doute* - *descript* pour *décrit* - *charactere* pour *caractère* - *chorde* pour *corde* - *sçavoir* pour *savoir* - *incognu* pour *inconnu* - *quarré* pour *carré* - *vray* pour *vrai* - *suyvant* pour *suivant* - *labourieuse* pour *laborieuse* - *donc* ou *doncques* pour *donc*, etc.
- des marques du pluriel qui s'obtiennent parfois par changement de la consonne terminale notamment lorsqu'il s'agit d'un t : *commencemens*, *marchans*, *entendemens*, *mouvemens*, *precedens*, *negligens*, ... parfois avec un z : *rompuz*, *degrez*, *donnez*, *costez*, *utilitez*,...
- l'indifférenciation fréquente du u et du v : *compvtations* ou *computations*,.. mais aussi du i et du j : *aiouster* ou *ajouster* pour *ajouter* - *tousiours* pour *toujours* - *desia* pour *déjà* -... ou des deux : *gaujerie* ou *gavierie*... ou du i et du y : *moyenne* ou *moienne* -... ou du s et du x : *dixiesme* ou *disiesme* pour *dixième* - *auxquels* ou *ausquels* - ...
- les formes verbales en oi ou oy : *falloit* pour *fallait* - *avoyent* pour *avaient* - *eleveroyent* pour *élèveraient* - *perderoit* pour *perdrait* - *apparoistra* pour *apparaîtra* - ...

Nous indiquons ci-après quelques termes qui peuvent être plus difficiles à identifier ou sont utilisés avec un sens différent du sens actuel.

AINS	mais
AME	unité de capacité pour les tonneaux
APPERT	apparaît, devient visible
ARPENT	ancienne mesure agraire divisée en 100 perches, variable selon les localités de 35 à 50 ares. Unité agraire (pour mesurer la "capacité" des terres), puis unité de longueur et de superficie.
AUNE	unité de longueur utilisée pour les tissus. Mesure de longueur, variable selon les localités (valant 1,188 m à Paris)
AUTREFOIS	très souvent utilisé dans ce texte, avec le sens de "une fois de plus" ou "de même"
AVIENT	advient
BRIEF	bref, sauf : "en brief" pour "en résumé" et "de brief" pour "bientôt"
CIFFRE	chiffre
CIRCLE	cercle
COLOMNE	colonne au sens de cylindre ou prisme ; une "colomne quadranguliere rectanguliere" est un pavé.
COMBIEN QUE	quoique
COMPUTATIONS	calculs (le terme computer est bien français !)
CORPS	volume
DEBURA	(ce qui se) devra

DEFAUT, DEFALLOIT, DIFAILLANT...	manque, manquait, manquant...
DEPECHER	contraire de empêcher, prendre au piège ; dépêcher, c'est libérer, l'idée de rapidité n'étant pas première ; ici, dépêcher les calculs, c'est les mener à bien, rapidement. On retrouve ce sens dans "La Dépêche du Midi", la dépêche d'Ems, une dépêche de l'AFP...
DESIA	déjà
ESMEU	(ému ?)
EXPEDIER	même idée que dépêcher, c'est dégager des entraves d'un piège, avec une idée de rapidité, le faire vite pour s'en débarrasser.
FESTU	chose de peu de valeur (cf fétu de paille)
GAUJEUR, GAVIEUR	celui qui jauge les tonneaux (on mesure la capacité au moyen d'une jauge)
GETTONS	jetons, qui servaient à faire des opérations sur table (le jeton ne prend sa valeur que par la place qu'il occupe sur la table ; cette table s'appelait "abaque" ; les gens qui calculaient avec des jetons, des "abacistes")
ICELUY, ICELLE	celui-ci, celle-ci
IMBECILLITE	faiblesse (sans nuance péjorative)
MESTIER	"avoir mestier de" pour "avoir besoin de" ; "estre de mestier" pour "être nécessaire"
MOLESTE	pénible, désagréable
MULTINOMIE	?
MULTITUDE	nombre de multitude des signes ?
NOISE	querelle, dispute
PAÏS	pays
PARTIR	partager
PIED	ancienne mesure de longueur (32,5 cm)
PHILAUTIE	complaisance pour soi-même, présomption
PROGRESSION	"dixième progression" correspond à la numération décimale de position ; cf. aussi "soixantième progression"
QUELQUE	sens de "quelconque" dans la phrase "je décris quelque nombre"
ROMPU	fraction de l'unité
SI	se construit avec un subjonctif quand la supposition est irréelle ou éventuelle : "si le signe fust inégal" pour "si le signe était inégal"
SIGNER	marquer
STEREOMETRIE	art de mesurer les volumes. Partie de la géométrie qui traite des solides
VERGE	unité de longueur et de superficie. Ancienne mesure agraire valant le quart d'un arpent.
VEU	vu

ANNEXE 4 - COMPLÉMENTS

Méthode classique de l'obtention de la moyenne proportionnelle

HB = a

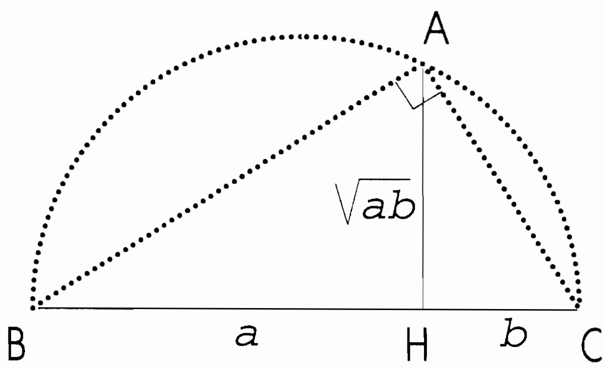
HC = b

HA = $\sqrt{ab}$

Propriété de la hauteur d'un triangle rectangle :

$HA^2 = HB \times HC$

Donc HA est moyenne proportionnelle entre HB et HC : $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HA}{HC}$



A propos des unités dont il est question dans la Disme

Mesures de tapisseries

l'aulne : 3 pieds 7 pouces 8 lignes (soit 1,118 m)

origine latine : *ulna* (avant-bras)

Mesures de tous tonneaux

l'âme : 100 pots

un pot : 2 pintes

une pinte : 2 chopines soit environ 0,93 litre

PARTIE 3

Géométrie

La géométrie préoccupe le groupe de manière évidente : quelle géométrie pour l'école ? quelle géométrie pour les PE ? ou plutôt, comment donner aux PE les moyens d'enseigner la géométrie de l'école élémentaire ?

Le groupe s'est donc partagé en deux sous groupes :

- l'un a fait porter sa réflexion sur l'organisation cohérente d'un cours de géométrie pour les PE en formation, avec le souhait de les rendre capables d'organiser une progression en géométrie adaptée aux divers niveaux de l'école élémentaire.
- l'autre a travaillé autour de certaines activités exploitables en formation PE, éventuellement transférables à l'école élémentaire, en privilégiant ou en variant certaines entrées.

Le lecteur trouvera ainsi tout d'abord un article contenant des propositions et outils pour élaborer un cours pour les PE, conçu pour leur donner des éléments qui leur permettent de construire une progression en géométrie. (***L'enseignement de la géométrie en formation initiale***, A. KUZNIAK)

Il trouvera ensuite des activités exploitables en formation PE :

1. Différentes entrées autour de la construction de Kaléidocycles.
- Kaléidocycle et résolution de problèmes (***Le kaléidocycle***, F. HUGUET).
- Le kaléidocycle en partant de l'objet (***Des kaléidocycles***, G. OZAN).
- Kaléidocycle à partir du patron (***Différents types de kaléidocycles***, C. HERVIEU).

2. La construction d'une *"boite penchée"* (***La boîte penchée***, C. BARTH et C. RIMBAULT).
Il s'agit de la reprise de l'idée du film *"Des angles pas toujours droits"* pour un travail en direction des PE, qui privilégie l'entrée par la résolution problèmes.

3. Une activité de construction de solides dans la perspective de la construction de l'espace pour les acteurs (***Situation de communication à propos des polyèdres***, J. VINCENT).
Il s'agit d'une activité de communication qui met en jeu des polyèdres avec utilisation de matériels divers ; on y trouvera une analyse des contraintes imposées par ces matériels.

4. Tracés et pliages avec l'utilisation d'un repère, sur la feuille A3, lié aux bords de la dite feuille (***Autour du triangle,*** C. RIMBAULT).
Il s'agit de mettre l'accent sur la pratique géométrique et sur la différence entre connaissances "déclaratives" et connaissances "procédurales".

5. Représentation d'arcs de cercle (***La roue géante***, H. PÉAULT)
A partir d'un débat sur la représentation de morceaux de disque, l'activité permet d'aborder le problème des représentations spontanées et de la pertinence des dessins géométriques.

Titre L'enseignement de la géométrie en formation initiale

Auteur Alain KUZNIAK

Date avril 1995

Type aide à l'élaboration d'un cours en P.E.

Contenu Réflexion de synthèse sur l'enseignement de la géométrie aux PE ; réflexion initialisée par N. Bouleau, M. Fénichel, M. Pauvert et A. Kuzniak.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EN FORMATION INITIALE

Nous allons présenter ici quelques réflexions sur l'organisation et sur la structuration d'un enseignement de la géométrie aux étudiants PE.

Ces réflexions s'organisent en une présentation en thèmes qui fédèrent les objectifs d'un certain nombre d'activités que l'on peut trouver aisément dans les productions destinées aux formateurs d'enseignants.

Nous avons ainsi souhaité éviter la confusion fréquente entre le but d'une activité et son titre. En effet, plus que de savoir si l'on "fait" les polyèdres ou la boite du pâtissier, il importe de connaître les objectifs et la place de ces activités en formation des maîtres.

Il s'agit ici d'un premier état de la réflexion et l'angle choisi qui épouse un plan de cours à des PE devra par la suite être enrichi et revu par d'autres entrées que celle présentée ici et par une étude plus approfondie des activités de formation.

Voici notre plan :

1) Réflexions sur la géométrie.

a) Une géométrie pour les enfants ?
b) L'enseignement de la géométrie pour les PE.

2) Trois grands thèmes de structuration de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres.

a) Espaces de la géométrie.
b) Activités sur l'objet.
c) Les transformations géométriques. *(non traité ici).*

3) Aides pour que l'étudiant construise sa propre programmation de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

1. Réflexions sur la géométrie

a) Une géométrie pour les enfants ?

La géométrie expérimentale.

La géométrie de l'école élémentaire n'est pas celle du mathématicien pas plus que celle du lycéen. D'entrée, la géométrie élémentaire semble offrir divers visages et ce depuis longtemps contrairement au nombre.

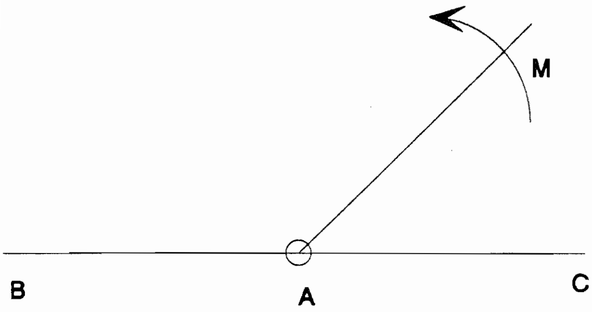
Faisons un détour par Gonseth[1] pour tenter de voir le lien entre ces géométries. Selon Gonseth, l'activité géométrique résulte dans le meilleur des cas d'une articulation harmonieuse entre "intuition", "expérience" et "déduction".

L'expérience dont il s'agit ici est proche de celle des physiciens, elle apporte la preuve quasi matérielle de l'existence de propriétés. Ainsi Gonseth cite-t-il la "démonstration" que fait Legendre du théorème suivant :

> *Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.*

Legendre base son raisonnement sur la figure matérialisable suivante :

[1]GONSETH F. (1926) 1974 Les fondements des mathématiques. Blanchard.



La droite AM d'abord couchée sur AC tourne autour du point A. L'angle MÂC d'abord petit devient grand contrairement à son angle adjacent MÂB qui devient petit pour atteindre 0. Ainsi l'angle MÂC d'abord plus petit que MÂB devient plus grand que cet angle : par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où ces deux angles seront égaux et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Je ne sais trop quel serait le destin d'un candidat au Capes présentant actuellement cette démonstration mais il serait certainement en dehors de l'éducation nationale et non à l'Académie des Sciences comme Legendre.

Rien ne correspond ici à la démonstration mathématique "suite de syllogismes enchaînés avec rigueur et continuité". Nous sommes dans le monde sensible et non dans l'abstrait et plus qu'à la raison et à la logique il est fait appel à l'expérience du monde sensible. On peut parler d'une "géométrie expérimentale".

Cette preuve dynamique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie "abstraite", mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.

Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage. Suivant la terminologie présentée par Lebesgue[2], il s'agira d'un pliage de deuxième espèce qui permet de partager un angle en deux parties égales.

Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au coeur d'une géométrie non déductive de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif que signale également J.F. Richard dans sa réflexion sur la résolution de problèmes.

[2]LEBESGUE H. (1950) 1987 Leçons sur les constructions géométriques. Editions Jacques Gabay.

Le rôle du point.

Un autre aspect important de la géométrie concerne l'unité de base qui fonde la géométrie élémentaire et plus particulièrement la nature et l'importance du point. Celui-ci peut être soit la notion de base de toute la géométrie axiomatique, soit l'aboutissement de toute la géométrie du monde sensible.

Dans cette deuxième perspective, nous retrouvons Legendre, toujours cité par Gonseth, qui définit ainsi sa géométrie à partir des volumes.

> *Tout corps occupe, dans l'espace indéfini, un lieu déterminé qu'on appelle volume.*
>
> *La surface d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.*
>
> *Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé ligne.*
>
> *Un point est un lieu où deux lignes se coupent.*

La notion de point n'est donc pas ici la notion la plus simple mais au contraire elle apparaît comme le résultat d'un détour qui est loin d'être évident. Notons aussi que la droite n'est pas définie dans cette approche du point. Le point devient l'aboutissement d'un cheminement complexe qui part du monde sensible pour parvenir au monde abstrait de la géométrie.

Il ne faut pas croire qu'une géométrie axiomatique conforme au modèle d'Hilbert n'est possible que basée sur le point et Whitehead a bâti une géométrie de ce type sur la notion élémentaire de volume.

Le point dans la géométrie de l'enfant (extrémité de segments ou intersection de lignes) n'est pas une notion première mais une notion construite qui suivra assez bien la genèse proposée par Legendre.

Conclusion

La géométrie élémentaire de l'enfant n'incorpore pas la dimension déductive et semble reposer sur l'intuition et l'expérience. Elle constitue le temps préparatoire de la construction de la géométrie chez l'individu apprenant.

Cette géométrie met en avant les formes et les volumes et conduit graduellement à la notion de point. Elle privilégie une approche constructive de l'espace et d'un certain nombre d'objets géométriques.

Il s'agit de développer des images et des représentations mentales grâce à de nombreuses expériences sur les objets Ce temps préparatoire sera suivi par l'approche de la géométrie déductive basée sur le point.

Un des enjeux de la formation sera d'articuler ces deux phases de façon harmonieuse. Or tout semble montrer (par exemple l'analyse fine d'exercices de l'évaluation de sixième faite par M. Fenichel et M. Pauvert) qu'il y a une rupture de contrat brutale dans le cursus scolaire entre ces deux conceptions.

b) Quel enseignement de géométrie pour les Professeurs d'école ?

Le futur professeur d'école, même s'il n'a pas toujours un passé mathématique glorieux ne se situe plus dans ce temps préliminaire de l'activité géométrique que nous avons défini plus haut. Il conçoit la géométrie comme l'étude déductive d'un certain nombre de propriétés d'ensembles de l'espace.

Cet espace est devenu global et homogène avec le point de vue d'un observateur extérieur. Il s'agit d'une géométrie ponctuelle où la déduction logique est reine et où le vu et l'expérimenté n'ont plus la primauté, du moins dans la forme standard de l'activité qu'est la démonstration.

Le formateur d'enseignants va devoir poursuivre au moins quatre objectifs différents :

1. amener l'étudiant à envisager l'existence de différentes formes de l'activité géométrique et notamment celle basée sur l'intuition et l'expérience.
2. développer sa connaissance et son expérience sur un certain nombre d'objets géométriques
3. redonner du sens à l'activité déductive.
4. l'aider à planifier et à organiser son enseignement de la géométrie.

Apprendre à enseigner la géométrie et apprendre la géométrie.

Dans les faits, on constate que les formateurs d'enseignants vont tenter simultanément de modifier la perception de la géométrie qu'ont les étudiants en tentant de leur apporter des connaissances sur les objets géométriques (polyèdres, figures planes) et ceci grâce à des situations d'enseignement proches de la pratique des classes élémentaires. Dans cette conception, les stratégies d'homologie sont privilégiées comme l'illustre de manière intéressante la situation de Jean Vincent sur les polyèdres.

Ces stratégies d'homologie s'appuient sur un modèle constructiviste conscient de la part du formateur. Elles sont bien définies par deux types de ressemblance :

◊ la ressemblance entre la démarche pédagogique prônée par le formateur et celle qu'il met en oeuvre pour enseigner à ses étudiants.

◊ la ressemblance entre les situations proposées aux étudiants et aux enfants.

Plusieurs choix sont possibles pour les situations proposées :

a) La situation de départ est la même pour les enfants et les futurs enseignants.

b) La situation présentée aux adultes est légèrement plus complexe mais aisément transférable.

c) La situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école élémentaire.

En fait, le choix de ces situations dépend de l'appréciation par le formateur des difficultés liées à la notion abordée. Nous avons étudié dans notre thèse[3] les deux hypothèses suivantes :

Une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.

Une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche pédagogique suivie.

Lorsqu'on souhaite faire quitter son statut d'élève à l'étudiant-professeur pour lui faire acquérir le regard de l'enseignant, on rencontre les stratégies basées sur la transposition.

Ces stratégies tentent de provoquer un recul par rapport à la pratique en transposant un savoir savant de type didactique. Les supports

[3]KUZNIAK A. 1994, Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Thèse, Université de Paris VII.

utilisés par le formateur peuvent être les analyses d'erreurs et les analyses de documents pédagogiques.

Une autre perspective plus ambitieuse et privilégiant la démarche pédagogique semble être celle de G. Le Poche qui tente une distanciation effective en revenant sur l'activité menée par le formateur auprès des étudiants grâce à un film qui a gardé la trace de cette activité. Cela donne une réalité plus importante à ce "pas de côté" qui doit faire basculer de l'étudiant au maître.

Redonner du sens à l'activité déductive en géométrie.

Un autre aspect important de la formation est celui du sens à donner à l'activité déductive et à la démonstration en géométrie.

La place du concours en fin de première année favorise un travail sur cette approche, mais il est fondamental de bien déterminer les thèmes prétextes à la démonstration ou à la preuve.

Ceux-ci ne doivent pas être définis en fonction de leur situation scolaire (troisième ou seconde) mais en fonction de leur coté exemplaire et intéressant pour la formation professionnelle des étudiants.

Plusieurs pistes nous semblent envisageables :

- problèmes de dénombrement
- problèmes dits de l'architecte ou du géomètre souvent liés à la mesure.
- problèmes liés à la recherche de lieux géométriques.
- problèmes dérivant de constructions qui amènent à se poser la question de la validité des observations faites (cercle des neuf points, points de concours surprenants).

Certains formateurs signalent une "résistance" des étudiants à cette approche basée sur les constructions et les pliages. Ce point mériterait une analyse et une confirmation.

2. Trois grands thèmes de structuration de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres

a) Espaces(s) de la géométrie élémentaire.

Cette partie nous semble problématique dans la mesure où règne une certaine confusion provoquée par les différentes approches de l'espace que peuvent faire philosophes, psychologues et mathématiciens. Les mêmes noms sont donnés à des notions totalement différentes.

Nous ne remettons bien sûr pas en cause cette approche pluraliste d'un thème par essence pluridisciplinaire, mais nous souhaitons seulement tenter de clarifier ce qui relève des mathématiques et nous astreindre à n'employer des termes mathématiques que dans leur acception mathématique la plus courante.

Nous pensons ici plus particulièrement aux espaces affines et projectifs. Cet effort de clarification et de précision nous semble important à la fois pour les formateurs d'enseignants et pour leurs étudiants.

Les ouvrages mathématiques à tendance didactique ou pédagogique comme le ERMEL introduisent rapidement plusieurs types d'espaces géométriques. Il s'agit principalement des espaces topologiques, projectifs, affines et euclidiens. On trouve aussi l'espace cartésien et l'espace des similitudes.

Cette présentation repose sur une construction axiomatique qui ne tient pas compte de la genèse historique plutôt inverse de ces notions. Cet ordre et le choix des termes semble plutôt se référer à Piaget et à une genèse psychologique de l'espace chez l'enfant.

Il est impossible dans le cadre de la formation des PE d'ignorer l'apport piagétien, mais cela ne doit pas nous conduire à nous tromper sur le sens mathématique des mots employés.

Or la pensée mathématique moderne sur la géométrie est fondamentalement imprégnée par le programme d'Erlangen défini en 1872 par F. Klein. Dans cette conception, la géométrie n'est plus l'étude d'un espace doué de certaines propriétés mais la donnée d'un groupe de bijections d'un ensemble substrat.

L'objet de la géométrie est l'étude de sous ensembles de E "au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe". Dans cette perspective, l'idée d'invariant est fondamentale.

En formation des maîtres, cette idée d'invariant nous semble importante à préserver et ceci d'autant plus qu'elle ne semble pas contradictoire avec les apports de la psychologie génétique.

Nous allons rapidement passer en revue les différents espaces géométriques qui mettent en jeu ces invariants.

Espace topologique.

L'épistémologie[4] de cet ensemble est intéressante pour le sujet qui nous occupe. D'abord, il faut noter que contrairement à l'espace euclidien, cet espace n'est pas vu par les mathématiciens comme un espace proprement géométrique.

Ensuite, la notion fondamentale, celle d'ouvert, renvoie à une tentative de définition de la localité mais indéterminée non liée à la notion de point. Cette définition est asymétrique : la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, par contre seule l'intersection d'une famille finie d'ouverts est encore un élément de la famille.

De ce fait au moins dans les espaces séparés, le point ne fait pas partie de la famille de base. La réflexion topologique n'a pas le point à sa base mais est bâtie sur la notion locale de voisinage. La globalité se définit par extension (réunion) de localités (les ouverts).

Les propriétés topologiques seront celles qui seront invariantes par les applications continues (applications qui préservent la localité). Il s'agit par exemple des notions d'extérieur et d'intérieur, de voisinage (par définition même), de connexité.

Espace projectif et espace affine.

Nous renvoyons à Berger ou à Frenkel pour des définitions précises et claires de ces espaces. Notons simplement :

- il s'agit d'espaces définis à partir d'espace vectoriel soit par opération d'un groupe (espace affine) soit par passage au quotient (espace projectif), donc d'espaces "algébrisés" pour permettre des opérations.
- les "définitions axiomatiques" propres (qui permettent de définir l'espace directement à partir des droites et des propriétés ensemblistes d'intersection) existent mais ne font plus partie de la géométrie élémentaire.
- dans la pratique usuelle élémentaire, l'espace projectif est surtout "vu" comme le complété projectif de l'espace affine qui évite les problèmes de parallélisme.
- il est en effet impossible de voir $P^2(R)$ dans l'espace R^3 autrement qu'avec des plongements avec singularités comme la surface de Boy.

Les notions fondamentales qui se dégagent ici sont celle d'alignements, de parallélisme et d'intersection de droite. Compte tenu des connaissances des étudiants, le risque est grand pour le formateur de pratiquer l'effet Jourdain.

Ainsi il parlera de propriétés affines là où légitimement l'étudiant ne voit que parallélisme. Que peut, en effet, représenter la notion d'espace affine ou d'espace projectif pour un étudiant polyvalent dont la dominante n'est pas les mathématiques ?

Espace euclidien ou métrique.

En fait, il s'agit d'espace affine euclidien c'est à dire d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien. La notion fondamentale est donc celle de produit scalaire qui permet de définir une distance sur l'espace affine associé qui devient ainsi un espace métrique.

L'existence d'un produit scalaire permet de donner du sens à l'orthogonalité et à la notion d'angle par le biais du groupe orthogonal. C'est aussi cet espace qui permettra de définir toutes les transformations géométriques élémentaires. Il s'agit d'une certaine manière de l'espace paradigmatique de toute géométrie.

Là encore, la transposition que doit opérer le formateur de professeurs d'école pour passer de ce savoir savant à un savoir à la fois accessible au niveau de ses étudiants et opératoire pour leur métier futur paraît rendre pratiquement inévitable l'effet Jourdain.

La référence théorique éclaire peu les étudiants et semble plutôt les doter d'un vernis langagier inutilement pédant. Cette transposition nous paraît impossible si l'on reste dans le domaine des mathématiques, par contre elle est possible mais délicate s'il s'agit d'attirer l'attention de l'étudiant sur quelques notions fondamentales et élémentaires des mathémati-

[4]SALANSKIS J.M. 1991 L'herméneutique formelle. L'infini, Le continu, L'espace. Editions du C.N.R.S.

ques qui aident à définir l'espace de la géométrie.

En conclusion, il paraît nécessaire de dégager les invariants fondamentaux de la géométrie que nous avons vus précédemment en évitant tout formalisme inutile mais en utilisant les termes académiques lorsque ceux-ci sont facilitateurs. Notamment pour aider à l'identification de certaines classes d'invariants topologiques ou métriques. Les aspects projectifs et affines nous semblent a priori nettement moins pertinents.

Dans la formation, cela conduit le formateur d'enseignants à une institutionnalisation forte sur ces notions et à une stratégie de type transpositif sans l'appui (du moins à notre connaissance) de situation fondamentale de formation qui pourrait préparer un apport relativement magistral.

Les points qui apparaissent fondamentaux à soulever pour les étudiants sont donc les suivants :

- invariants topologiques simples.
- alignements
- parallélisme
- orthogonalité et notion d'angle
- mesure

De l'avis des membres de notre groupe de travail, ces aspects qui font partie des espaces de la géométrie sont parfois négligés dans leur transmission pratique à des élèves. En effet, l'idéologie dominante qui privilégie un enseignement qui part du complexe fait négliger l'enseignement direct de ces invariants

La rupture continu-discret : importance des réseaux.

Nous serons très brefs sur cette opposition fondamentale. Nous avons rappelé que le point apparaissait comme l'aboutissement d'une construction de l'espace qui partait du volume. Cette construction est commune à l'enfant et à la genèse historique mathématique de ces notions. Elle est en contradiction avec la genèse axiomatique privilégiée aujourd'hui dans l'enseignement de la géométrie.

Comme l'affirme René Thom[5] (il en tente même une démonstration), le continu précède ontologiquement le discret. C'est à dire qu'il est plus facile de concevoir le discret à partir du continu que l'inverse. Ainsi la ligne brisée se conçoit comme un accident du continu alors qu'inversement un être discret ne peut accepter un accident continu sans être lui-même localement continu.

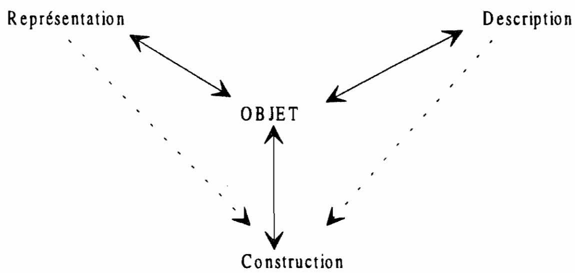
Cette conception intuitive permet de bâtir la notion de point comme accident du continu. Cette discrétisation nécessaire de l'espace va passer selon nous par l'usage et l'enseignement de réseaux de toutes sortes (le plus important mais non le seul étant celui à maille carrée). Le point apparaît alors lié simultanément aux notions de mailles et de noeuds du réseau.

Les réseaux vont également permettre le codage des déplacements et la représentation de l'idée de direction. Enfin, ils permettent un passage progressif du local au global en ne privilégiant aucune case du réseau.

Les formateurs utilisent les réseaux de toutes sortes en opposition aux supports vierges pour introduire la notion de variable didactique. La construction de figures sur différents supports met bien en évidence les différences d'apprentissages qui peuvent être liées à une même consigne lorsque certains paramètres de la situation varient. Les réseaux semblent surtout enseignés au Cycle II, mais leur usage et surtout leur construction au cycle III pourrait permettre de remédier à la carence d'activités sur le parallélisme et l'orthogonalité que nous avons pointée plus haut.

b) Activités sur l'objet.

On peut décrire l'ensemble du processus d'étude d'un objet tel qu'il est vu par les instructions officielles par le schéma suivant :



Un des buts essentiels de la formation est de permettre aux étudiants de structurer leur enseignement d'un certain nombre d'ensembles géométriques au travers de ce prisme. Les formateurs semblent d'ailleurs (hypothèse à confirmer) retenir cet aspect de la géométrie comme début de cours de géométrie et ceci souvent à l'aide d'activités sur les objets. Nous allons en voir différents aspects.

[5] THOM R 1992 "L'Antériorité Ontologique du Continu sur le Discret" in Salanskis et Sinaceur *Le labyrinthe du continu* p137 à 143.

Étude d'objets géométriques particuliers.

Différentes figures géométriques sont étudiées de manière approfondie en formation des maîtres. Il s'agit pour les formateurs de présenter les différents aspects de l'approche d'un objet géométrique à l'école élémentaire. Les activités porteront donc sur la représentation, la description et la construction de différentes figures :

- des activités de représentation à partir des gabarits du cube ou des vues de l'octaèdre.
- des activités de description tel le jeu du portrait.
- des activités de construction surtout de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Polydron ou le clone de Jovo), ou encore à partir de pliage ou de constructions papier (C. Rimbault).

Ces études visent à la fois un savoir mathématique et un savoir pédagogique. Pour mieux préciser la démarche pédagogique attendue, il est possible d'insister sur deux grands types d'activités pédagogiques fréquentes en géométrie : les activités d'émission/réception et les activités de classification de corpus.

Les activités d'émetteurs/récepteurs.

Il s'agit de mettre en oeuvre la description d'un objet pour le construire ou pour le reconnaître grâce à l'émission de messages écrits.

Un exemple de ces activités est celui proposé par Jeanne Bolon[6] sur les constructions de quadrilatères. Là encore l'activité d'émission-réception est mise en oeuvre avec les étudiants.

Ces activités sont également une source de travaux d'élèves pouvant être analysés en formation ou lors du concours.

La classification de corpus d'objets.

Il s'agit cette fois de faire redécouvrir (ou découvrir) les propriétés des figures géométriques qui permettent d'organiser la connaissance de ces figures.

L'approche privilégiée n'est pas axiomatique a priori mais opératoire sur des ensembles qu'elle permet d'organiser comme les solides ou les figures planes.

Un grand nombre de comptes rendus de telles activités de formation figurent dans les productions de la Copirelem. Sans doute parce que souvent ces activités sont traitées sur le mode de l'homologie, le problème de la trace écrite et de l'institutionnalisation en géométrie nous semble trop négligé. On peut simplement signaler les cartes d'identité ou les dictionnaires de géométrie.

3. Aides pour la programmation d'un cours de géométrie.

Pour conclure, nous allons aborder très rapidement un point qui nous paraît négligé du moins dans les propositions d'activités de formation produites par la Copirelem.

Il s'agit de la structuration globale de l'enseignement de la géométrie. En effet, l'objet principal de la formation des PE n'est pas ou pas seulement la transmission d'un savoir mathématique sur la géométrie. Il faut aussi aider les étudiants à mettre en place et à planifier leur propre enseignement de la géométrie.

Les stratégies d'homologie misent sur une sorte de transfert automatique par imitation de la formation à l'enseignement. Elles négligent les phénomènes de transposition opérés par les étudiants.

Selon nous, la réflexion sur la programmation de l'enseignement de cet objet complexe qu'est la géométrie doit permettre une distanciation réflexive. Trop souvent, cet aspect essentiel est laissé à l'initiative de l'étudiant qui s'en remet alors soit à la progression proposée par les manuels, soit aux propositions du *"Babin"* souvent confondues avec les instructions officielles.

Nous proposons ici notre propre approche de ce problème en formation.

Pour être clair, notre but n'est pas de transmettre le modèle d'une progression type mais de sensibiliser l'étudiant à la notion moins rigide de programmation par thèmes. La structuration proposée aux étudiants repose sur le plan du cours de géométrie qui leur a été dispensé penfant le module.

---

[6] Voir ***Géométrie, dictée de figures*** (PLOT n° 48). Exemple : *« Donner une consigne permettant à un groupe récepteur de construire un rectangle de 4 cm sur 3 cm. Le message ne devra pas comporter le terme* rectangle. »

L'activité proposée est une activité de synthèse effectuée en fin de module qui doit permettre aussi de familiariser les étudiants avec une certaine forme de vision de l'enseignement de la géométrie.

Les étudiants, répartis par groupes, doivent remplir une grille très succincte obtenue à partir de l'observation de la progression de différents manuels (trois par niveau du CP au CM2). Il s'agit de noter la place et l'importance réservées aux différents types d'activités géométriques dégagés dans le module de formation.

1) Activités portant sur l'espace et les différents invariants (nature de ces invariants et type de supports utilisés).
2) Activités centrées sur l'étude d'un objet particulier en précisant cet objet et le type d'approche retenue (description, représentation ...).
3) Activités sur les transformations géométriques.

Les étudiants doivent également observer les rôles respectifs du plan et de l'espace à trois dimensions, le rôle des constructions et des instruments de géométrie, l'idée du simple et du complexe.

Enfin, ils doivent retenir une activité qu'ils jugent intéressante ou problématique.

Cette activité ne consiste pas en une découverte de manuels qui sont déjà connus par les étudiants. La synthèse effectuée à l'issue de la séance permet d'insister sur l'idée d'une programmation globale de la géométrie sur l'école élémentaire et sur le côté non obligatoire des regroupements proposés par les manuels.

L'objectif de l'enseignant doit être de ne pas négliger certains aspects de la géométrie. Le choix des objets étudiés dépend du niveau des élèves et de leur passé, ceci afin d'éviter les bégaiements fréquents constatés à l'école (travaux sur le cube ou surtout reprise constante des mêmes activités sur la symétrie).

Plan d'un cours de géométrie aux PE

(A. Kuzniak)

	Activités proposées aux étudiants.
Introduction	
Rôle de la géométrie.	
1) Société, histoire des maths	
• mesure	
• période classique	*Le triangle de Pascal et les fractales*
• période contemporaine	
2) A l'école primaire	
I) Espaces de la géométrie	
1) Caractéristiques de l'espace en maths.	
2) Différents types d'espace de représentation pour l'enfant, classification par les invariants	
• "topologique"	*Les puzzles.*
• alignements	*Les marelles*
• parallélisme	*Etude du matériel Structuro*
• orthogonalité	
• mesure	
3) Importance des réseaux :	*Étude de travaux d'enfants.*
• notion de variable didactique.	
• discrétisation de l'espace.	
II) Activités sur les objets géométriques	
1) Reproduire, décrire, représenter et construire.	*Les kaléidocycles*
	L'octaèdre
2) Deux grands types de situations pédagogiques :	*Description de quadrilatères (J. Bolon).*
a) Les situations d'émission réception.	
b) Les situations de classification de corpus.	*Les polyèdres.*
III) Les relations entre objets : transformations géométriques	
1) Recherche d'invariants dans les transformations	*Transformations "conchoïdales" et "cissoïdales".*
• alignements.	
• angles	
• isométries	*Frises.*
2) Etude de la symétrie.	*Travaux à partir de la brochure Suivi Scientifique.*
IV) Aides pour mettre au point une structuration de progression en géométrie.	*Analyse de manuels*

Titre	Le Kaléidocycle
Auteur	François HUGUET (PIUFM Quimper)
Date	Mars 1993
Origine	Exploitation d'une idée proposée par Didier DAMEY professeur de technologie à Tahiti.
Type	Compte rendu d'activité en Formation Initiale.
Résumé	Dans le cadre d'activités géométriques cette situation tout d'abord vécue par des étudiants ou des maîtres a été proposée ensuite et exploitée par eux dans des classes de CM. Cette expérience ponctuelle permet d'illustrer l'intérêt d'une situation d'action portant sur la résolution d'un problème d'agencement et de construction de solide. La forme de travail proposée permet d'illustrer une certaine gestion de l'hétérogénéité.

LE KALÉIDOCYCLE

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes." (I.O.1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation plusieurs fois en Formation Initiale. Les étudiants doivent tout d'abord chercher à résoudre ce problème de construction de solide, puis après analyse des difficultés rencontrées nous essayons de concevoir ensemble une séquence d'une heure qu'ils pourront expérimenter au niveau d'un CM_1 ou d'un CM_2.

Certains étudiants pensent qu'il serait intéressant de montrer l'objet fini à réaliser afin de motiver davantage l'activité des enfants.

Tout en respectant leur liberté de choix des variables didactiques de la situation, j'essaie tout de même de les convaincre d'expérimenter aussi une démarche inductive permettant de confronter l'enfant à une suite d'obstacles qu'il devra franchir avec l'aide ou la collaboration de ses camarades.

Travail possible en Formation Initiale ou Continue

1. Faire vivre la situation en respectant la même démarche et organisation de travail :
    - Résolution d'une suite de problèmes de construction
    - Travail individuel puis par groupes de deux...
    - Phase de validation
2. Faire une analyse a priori des procédures et des difficultés des enfants de CM
    - Réfléchir au problème de l'auto-validation
    - Envisager des aides pour faciliter la compréhension et la réalisation pratique.
    - Prévoir un déroulement possible dans une classe de CM, si possible ne dépassant pas une heure.
3. Analyser le problème de construction d'un point de vue mathématique.
    - Voir l'incidence de la contrainte de départ :
      Base = Hauteur du triangle isocèle

- Retrouver la propriété "Côté de l'Hexagone = Rayon du cercle circonscrit".
- Éventuellement s'intéresser au problème du patron du Kaléidocycle.
- Faire découvrir qu'il existe d'autres modèles de Kaléidocycles. (Voir document annexe)

4. Faire une analyse de l'activité en relation avec les connaissances en jeu pour des enfants de CM.
   - Recenser les notions abordées, voir le vocabulaire utilisable.
   - S'intéresser aux techniques et savoir-faire mis en place.
   - Réfléchir à la "phase d'institutionnalisation"

Chronique d'une des séquences réalisées au CM

Matériel

- Des feuilles de papier Canson ou de carton fin mais rigide.
- Des règles, des doubles décimètres.
- Des ciseaux, des équerres et des rouleaux de scotch.

1ère Phase
Appropriation du 1er problème de construction en Grand Groupe

Consigne

Cette consigne est écrite au tableau :

> *Nous allons construire des triangles isocèles ABC dont la hauteur AH mesure 8 cm et le côté BC mesure 8 cm.*

Lecture et questions à propos des mots inconnus "isocèle" "hauteur".

Les explications fournies par le maître ne vont pas reposer sur des définitions !

Par exemple, il montre un grand triangle construit en carton, fait constater par pliage que deux côtés ont même longueur et dit : "ce triangle est isocèle".

2ème Phase
Construction individuelle

Consigne

> *Choisis les instruments nécessaires pour la construction. Réalise 2 triangles isocèles comme indiqué précédemment. Compare-les avec ceux construits par ton voisin.*

Une validation peut être rapidement effectuée par diverses procédures :

- Comparaison avec un modèle donné
- Mesurage
- Retournement.

Remarques à propos des difficultés constatées.

- Certains enfants construisent BC puis AH sans placer H au milieu de BC. Ils constatent alors que les triangles ainsi construits ne sont pas isocèles. Ce type d'erreur va favoriser la découverte de cette propriété caractéristique de tous les triangles isocèles !

- Nous avons constaté aussi que peu d'enfants utilisent le compas !

3ème Phase
Nouveau problème d'agencement
Travail par équipe de deux.

Consigne

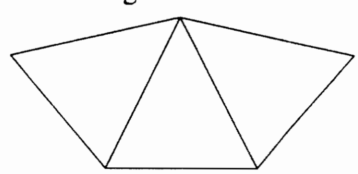
> *Avec 4 de vos triangles essayez de construire un solide ". bien fermé".* (Tétraèdre)

Remarques à propos des difficultés rencontrées.

• Le maître peut indiquer une technique pratique à deux pour l'assemblage à l'aide de scotch.

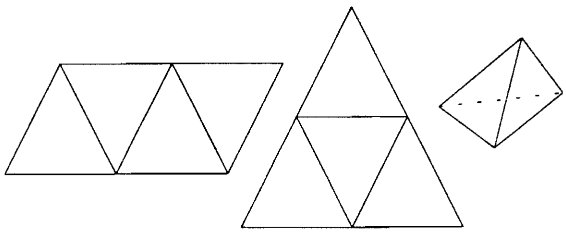
Par exemple l'un des enfants place et maintient tendu le scotch à l'envers contre la table, l'autre enfant peut alors aisément juxtaposer les côtés des triangles qu'il souhaite assembler.

• Certaines équipes essaient sans réfléchir d'assembler 3 triangles ainsi :



• Les enfants constatent alors que le 4ème triangle ne peut être placé pour "fermer" le solide !

• Certains enfants pensent alors à l'idée de "patron" et adoptent assez rapidement l'une des dispositions suivantes :



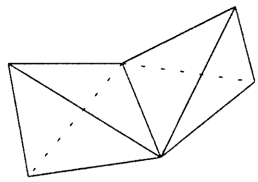
4ème Phase Assemblage des solides réalisés Travail "Inter-Equipes".

Consigne

Essayez d'assembler les solides en juxtaposant les arêtes de 8 cm.

Remarques à propos des réalisations.

• Les enfants vont constater qu'après avoir assemblé 6 tétraèdres "en chaîne", il est possible de former une sorte de couronne en reliant, comme précédemment par l'arête de 8 cm, le 6ème solide au 1er solide !



• Ce nouvel assemblage possède des propriétés curieuses :

Par un mouvement de rotation perpétuelle, les différentes faces vont apparaître les unes après les autres un peu comme dans un Kaléidoscope ! D'où son nom "Kaléidocycle" !

• Bien naturellement les groupes les plus rapides ont eu l'idée de colorier ou de décorer les différentes faces permettant ainsi de mieux mettre en valeur le phénomène.

• Beaucoup d'enfants ont reconstruit ensuite chez eux d'autres Kaléidocycles afin d'en avoir un personnellement.

5ème Phase Institutionnalisation

Après analyse des productions et des difficultés rencontrées, nous avons pu constater la bonne compréhension par l'ensemble de la classe de termes géométriques utilisés lors de cette séquence (par exemple : face, arête, sommet, triangle isocèle ...)

Il aurait été possible aussi d'institutionnaliser certains "savoir-faire" concernant les techniques d'assemblage, l'usage du compas ...

Conclusion

Ce type d'activité a évidemment l'inconvénient de son caractère trop ponctuel par rapport à la vie d'une classe.

Cependant, les étudiants qui ont réalisé cette expérience, l'ont jugée fort intéressante et ont apprécié plus particulièrement la démarche consistant à faire résoudre individuellement ou collectivement une suite de problèmes.

Lors des diverses expériences réalisées, les enfants sont toujours restés motivés, actifs et coopérants. Bien évidemment s'est posé le problème de l'hétérogénéité car tous les enfants ne sont pas capables de travailler au même rythme et avec le même soin.

L'intérêt de cette forme de travail a été de permettre aux plus lents de travailler à leur rythme tandis que les autres pouvaient :

- soit construire d'autres kaléidocycles en partant directement de patrons de tétraèdres

- soit dessiner des motifs sur les faces des solides permettant de faire apparaître par rotation huit dessins différents !

Mais nous avons pu voir également les difficultés de gestion et aussi les techniques permettant de passer du travail individuel au travail en équipes. (voir l'avantage et le rôle des consignes écrites ...)

Nous avons pu enfin constater le niveau d'habileté manuelle des enfants et réfléchir aux activités à mettre en place pour les faire progresser dans ce domaine.

Remarque d'ordre mathématique

La contrainte AH = BC imposée au départ de ce problème a en fait une grande utilité ! En effet, c'est grâce à elle que le Kaléidocycle peut "juste" pivoter sur lui même.

Cela peut également servir pour la validation de ce travail. Par exemple avec 6 tétraèdres réguliers cela ne marcherait pas !

Mais cette contrainte est-elle "large" ou "précise" ? A vous de le démontrer !

Titre	Différents types de kaléidocycles
Auteur	Claudine HERVIEU
Date	1992
Type	Compte rendu d'une activité réalisée en formation initiale
Contenu	Découverte de propriétés de figures et stratégies de construction à partir de patrons déformables.

DIFFÉRENTS TYPES DE KALÉIDOCYCLES

Bibliographie

Revue *Pentamino* (n° 6 et n° 8, année 1979 : *"La ronde des berlingots"*)

I. - Présentation de l'activité

A) Travail sur les patrons

Des patrons de solides déformables sont donnés en dimension réduite sur une feuille A4.

1) Dans un premier temps, il s'agit, uniquement par la perception visuelle, de les comparer (ressemblances, différences) et de faire des hypothèses sur les propriétés perçues en l'absence d'autres informations.
2) Dans un deuxième temps, où de nouvelles informations sont données, il s'agit d'affiner la perception visuelle, de rectifier le cas échéant et de compléter les hypothèses précédentes, afin de conclure sur les propriétés des figures et sur des stratégies de construction de ces patrons agrandis.

B) Kaléidocycles

Le travail porte sur des kaléidocycles de type hexagone, carré ou étoile pentagonale.

1) Réaliser des solides, à une taille convenable, avec un matériel adéquat ; utilisation liée à leur particularité (flexibilité).
2) Comprendre les contraintes mathématiques imposées pour la construction des 3 patrons.
3) Prévoir, éventuellement, des patrons d'autres types de kaléidocycles.

II. - Déroulement succinct

Organisation

Toujours par groupes de 3, sauf au moment des synthèses.

A) Travail sur les patrons

1) observation

matériel

Une feuille A4 par personne avec les figures n° 1, n° 2, n° 3

consigne 1

> *Analysez ces 3 figures, patrons de solides déformables, dont les languettes pour le collage sont les surfaces ayant des signes + ; écrivez les hypothèses sur les propriétés des figures, leurs ressemblances, leurs différences.*
>
> *Attention, il manque des informations.*

quelques formulations obtenues

"..nombre pair variable (par la suite appelé 2n) de bandes de 4 triangles de même taille (2n = 6 ou 8 ou 10) .. rectangles .. droites parallèles .. parallélogrammes .. hexagones réguliers .."

2) informations et agrandissement

a) informations

matériel

Le même que précédemment

consigne 2

Tous les petits triangles (sans signe +) de la figure n° 1 sont isocèles et isométriques, leurs bases ayant toutes la même direction (PS); il en est de même pour les figures n° 2 et n° 3. Enfin PQRS est un rectangle. Quelles conclusions en tirez-vous ?

Attention, il manque encore des informations.

quelques formulations obtenues

" .. on a bien des rectangles puisque toutes les bases de même longueur des triangles envisagés sont perpendiculaires à (PQ) .. losanges (4 côtés de même longueur) .. triangles isocèles mais aussi équilatéraux ! .. "

consigne 3

Dernière information : on pose PA = x et PB = y (longueurs en mm); les rapports y/x ont pour valeurs 1, $\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{5})/2$ respectivement pour les figures n° 1, n° 2, n° 3. Conclusions ?

formulations obtenues

" .. d'une figure à l'autre, triangles de formes différentes mais non équilatéraux .. et donc pas d'hexagones réguliers .. "

conclusion

Les propriétés minimales pour l'agrandissement sont perçues.

b) agrandissement

matériel

Feuille A3 par personne et outils.

consigne 4

Toujours par groupes de 3, contruire les 3 figures pour x = 40 (une seule sur un A3 dont les bords peuvent être astucieusement utilisés)

procédure la plus utilisée

Calculs de y à 1/10 près (40 ; 56,5 ; 64,7) puis construction d'un rectangle de dimensions 2nx sur 3y dans lequel on trace un quadrillage de mailles x sur y. On obtient aussi un quadrillage de mailles 2x sur y ; on trace les diagonales de ces dernières mailles. Il reste à bien délimiter le contour du patron et à gommer 2 lignes de construction.

Dans chaque groupe se fait à nouveau la comparaison des 3 figures avec des essais vains de superposition pour contrôler, d'une figure à l'autre, les différences de formes des petits triangles.

B) Travail sur les kaléidocycles

(hexagone, carré et étoile pentagonale)

1) réalisation
(si possible en temps libre)

matériel conseillé

Bristol fin (550 mm sur 600 mm) pour faire des bandes de largeur 3y

construction des patrons

Si x = 50 les valeurs approchées de y sont 50, 60, 70.

découpage

pliage

Plis (très bien faits) en crête pour toutes les bases y et en creux pour les côtés de même longueur des triangles isocèles (ainsi les lignes de construction seront cachées). Ceci permet d'obtenir une chaîne de 2n tétraèdres reliés par des arêtes de longueur y.

collage

Languettes (triangles avec signes +) sous les faces des tétraèdres; puis on ferme la chaîne avec les 2 autres languettes (situées à une extrêmité des patrons).

2) justification des choix

Il s'agit de justifier les choix des valeurs des rapports y/x en liaison avec les types hexagone, carré, étoile pentagonale.

a) rotation

L'utilisation de ces objets déformables par rotation fait apparaître une position particulière où tous les tétraèdres ont un sommet commun O, n arêtes de sommet O de longueur y sont dans un même plan (par exemple horizontal noté (P1)) et enfin n autres arêtes de longueur y sont verticales.

b) section par (P1)

consigne

Il s'agit d'étudier la section de chaque kaléidocycle par le plan (P1), plan qui est d'ailleurs un plan de symétrie, et de conclure sur y/x.

résultats

Dans chaque cas, la section est un polygone formé de 2n triangles d'angle 360°/2n en O, de côtés x, x, y.

c) étude détaillée

figure n° 4

La section est un hexagone régulier si x = y (6 triangles isocèles d'angle 60° en O, de côtés x, x, y).

figure n° 5

La section est un carré si $y = x\sqrt{2}$ (8 triangles isocèles d'angle 45° en O, de côtés x, x, y).

figure n° 6

La section est une étoile pentagonale (10 triangles isocèles d'angle 36° en O, de côtés x, x, y) ; on retrouve là la *divine proportion.* Cela nécessite une étude complémentaire (ci-dessous).

figure n° 7

Étude complémentaire sur ces triangles d'or et sur la "divine proportion":

I, J, L étant alignés, dans les triangles IJK et IKL on a :

$(y + x)/y = y/x = k$ ce qui donne $k * k - k = 1$
puis $4 (k * k) - 4k + 1 = 4 + 1$
d'où $(2k - 1) * (2k - 1) = 5$.

On trouve pour k le nombre d'or : $(1+\sqrt{5})/2$

3) autres kaléidocycles

Si 2n = 12, pour avoir un point O, la section par (P1) doit être formée de 12 triangles isocèles d'angles 30° en O, de côtés x, x, y (figure non faite) ; 3 triangles comme ceux-ci donnent un triangle équilatéral de côté y, de hauteur (3/2)x, ce qui donne $(3/2)x = (\sqrt{3}/2)x$ d'où $y/x = \sqrt{3}$.

Remarque : si $2n \geq 8$, on peut faire des anneaux de tétraèdres réguliers mais le point O ne peut exister.

FIGURES

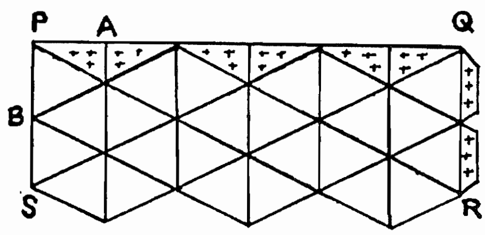


Figure n° 1

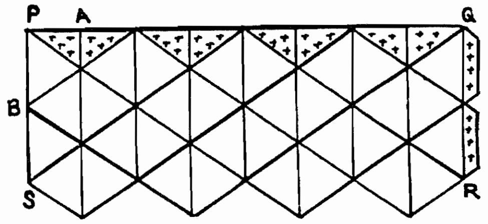


Figure n° 2

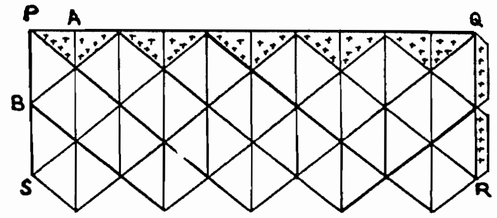


Figure n° 3

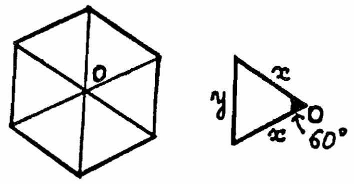


Figure n° 4

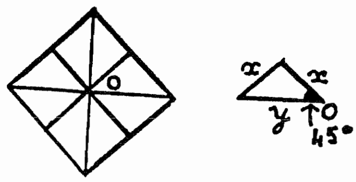


Figure n° 5

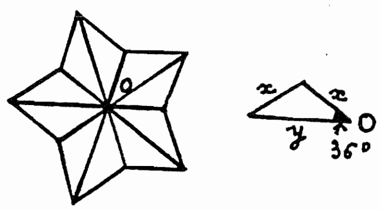


Figure n° 6

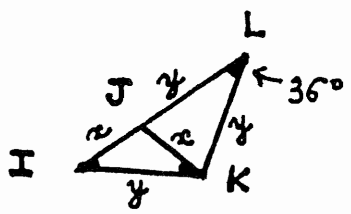


Figure n° 7

Titre	Des kaléidocycles
Auteur	Gérard OZAN
Date	Mai 1995
Origine	Reprise d'une idée d'Alain LEBRETON (PIUFM à Étiolles)
Type	Activité en formation initiale et continue
Contenu	Compte rendu d'une expérience de formation autour de la reproduction et de la description de patrons de kaléidocycles.

DES KALÉIDOCYCLES

Introduction

Un kaléidocycle est un anneau à trois dimensions, constitué de tétraèdres identiques dont les faces sont quatre triangles isométriques. La jonction au niveau des arêtes communes à deux tétraèdres voisins est souple et on peut le faire tourner indéfiniment sur son centre.

J'ai utilisé pour cette séance les patrons fournis avec le livre M.C. Escher, Kaléidocycles de Doris Schattschneider et Wallace Walker aux éditions Taschen Köln (1992).

Ces kaléidocycles présentent la particularité d'être composés de six ou huit tétraèdres à faces isocèles et leur trou central est presque réduit à un point. (voir figures 1 et 2)

Ils sont en outre décorés par des motifs périodiques adaptés de dessins d'Escher, ce qui leur donne un aspect esthétique qui plaît beaucoup et permet d'annoncer un travail ultérieur sur les pavages.

Contexte

J'ai utilisé cette situation en formation initiale avec des PE2 et en formation continue avec des instituteurs de cycle 3, dans des séances de 3 heures.

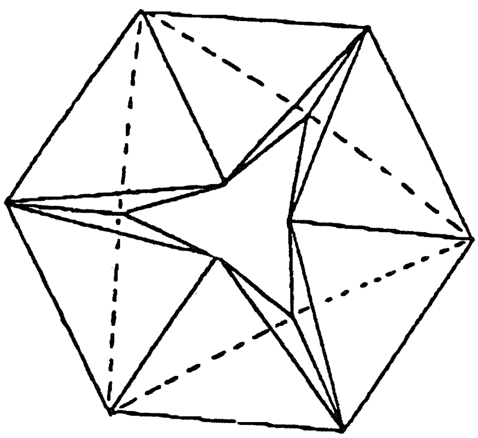


Figure 1

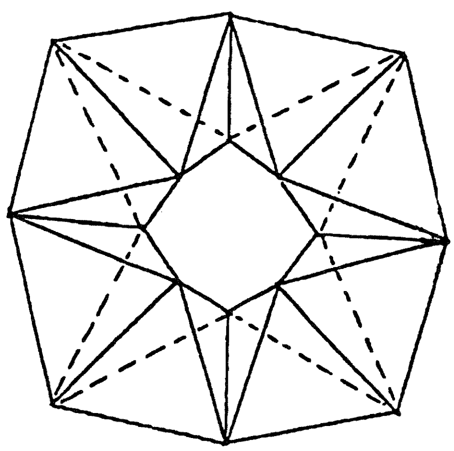


Figure 2

L'ACTIVITÉ

Objectifs

Aborder une démarche de reproduction d'un objet complexe mais motivant, posant de réels problèmes aux adultes en formation leur permettant de faire le point sur leurs savoirs et savoir-faire, puis de réfléchir à la mise en place d'une suite d'activités géométriques en classe :

- revenir sur leurs connaissances des solides,

- découvrir la variété des méthodes possibles.

Matériel

Un kaléidocycle par groupe de 4 ou 5 stagiaires, pouvant être manipulé sans l'endommager.

Double décimètre, équerre, compas, papier Canson, scotch, ciseaux, feuille format affiche.

Consignes

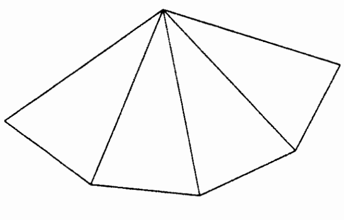
1. *Reproduisez et décrivez ce solide*
2. *Cherchez-en un patron.*

Déroulement

En général les stagiaires s'engagent rapidement dans une première analyse de l'objet (comptage des tétraèdres et des faces, mesure d'arêtes) puis tracent (au compas ou avec des gabarits), découpent et assemblent des figures planes (triangles quelquefois équilatéraux, losanges) puis essaient d'assembler leurs tétraèdres, pour vérifier enfin la bonne rotation de l'engin sur lui-même.

Certaines difficultés apparaissent :

- pour assembler des triangles, l'assemblage ne donnant pas toujours un tétraèdre,



- pour réunir les tétraèdres lorsque ne sont pas identifiées les deux arêtes opposées aux longueurs différentes des quatre autres,
- pour regrouper des losanges qui ne sont pas perçus "à cheval" sur deux tétraèdres,
- pour faire tourner le kaléidocycle constitué uniquement de triangles équilatéraux (figure 1) ou qui laisse un grand trou central (figure 2).

Certains groupes rédigent leur recherche au fur et à mesure de leur construction, mais les plus nombreux s'occupent de la description dans un deuxième temps.

Il arrive quelquefois que soient tracés directement des patrons de tétraèdres (un triangle central, les autres autour) ou encore un assemblage de triangles et de losanges donnant deux tétraèdres articulés... mais le plus souvent les PE2 ne démarrent la recherche du patron qu'après une première réalisation, comme l'ordre des consignes peut le laisser supposer. Par contre il est arrivé qu'un groupe de maîtres de cycle 3 s'obstine à chercher directement le patron pendant plus d'une heure avant d'accepter un premier objectif plus modeste : n'y a-t-il pas là un effet de leurs représentations ou de leurs habitudes ?

Mise en commun

Après 1 h 45 environ, quand chaque groupe peut présenter une description, nous affichons les différentes productions, expliquons les démarches, analysons les erreurs et les blocages observés pendant la recherche, puis en synthèse nous rédigeons collectivement une description ayant l'accord de tous et utilisant un vocabulaire minimum, mais précis.

Institutionnalisation mathématique

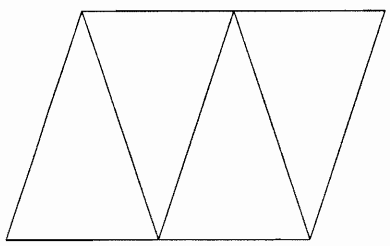
Les notions de polyèdre, sommet, arête, face, côté sont redéfinies, celles de tétraèdre et de pyramide sont distinguées. Le nombre et la disposition des faces autour des sommets permet une description claire.

Les propriétés des triangles isocèles et équilatéraux sont rappelées et mises en relation avec des méthodes de construction.

Différentes méthodes de traçage et de construction sont passées en revue : empreinte, piquetage, gabarit, calque, papier quadrillé, patrons partiels...

Fin de l'activité

Il s'agit de relancer ensuite la recherche du patron : soit en partant des différents patrons possibles du tétraèdre et des façons de les assembler, soit en retirant le scotch de certaines arêtes pour mettre à plat toutes les faces... Je suis souvent obligé d'aider les groupes pour obtenir un résultat. Puis je distribue un document où figurent plusieurs patrons de kaléidocycles, construits en juxtaposant des bandes de quatre triangles.



Conclusion

La synthèse sur les contenus géométriques ayant été faite précédemment, je réserve le dernier quart d'heure pour faire une analyse pédagogique et didactique :

- il s'agit bien d'une séance de mathématiques avec les aller-retour entre l'action et la réflexion ;
- rappel de la nature des activités géométriques en référence aux instructions complémentaires parues en 1986 à la suite des programmes de 1985... : après lecture des programmes de 1995, elles semblent encore d'actualité ;
- comment on peut mener une activité en classe au cycle 3 à partir du modèle qui vient effectivement d'être vécu : j'aime à présenter le kaléidocycle comme un des objets terminaux d'une progression de cycle dont certaines étapes pourraient être des polyèdres réguliers ou semi-réguliers ou étoilés, d'autres des boîtes de formes diverses ;
- tout cela permettant aux élèves de travailler l'articulation espace-plan avec des patrons pas toujours possibles, à partir d'instruments et de supports variés favorisant l'évolution de leurs procédures de construction et de dessin en lien avec la technologie et les arts plastiques ;
- enfin ce que peut être une analyse a priori (d'après les exemples de démarches et d'erreurs qui ont été précédemment analysées) et son utilité pour la préparation de classe.

Titre	La boîte penchée
Auteur	Christian BARTH, Claude RIMBAULT
Date	1995
Origine	Émission de TF1 *"Des angles pas toujours droits"* (1981)
Type	Proposition d'activité géométrique en formation des PE
Contenu	Mise en place d'une activité de résolution de problème à support géométrique. Mise en évidence d'un lien espace/plan, obtention de solides non réguliers peu habituels.

LA BOÎTE PENCHÉE

Le 15 octobre 1981, l'atelier de pédagogie *"Activités mathématiques"* proposait sur TF1 une séquence de classe filmée dans un CM2 sous le titre : *"Des angles pas toujours droits"*.

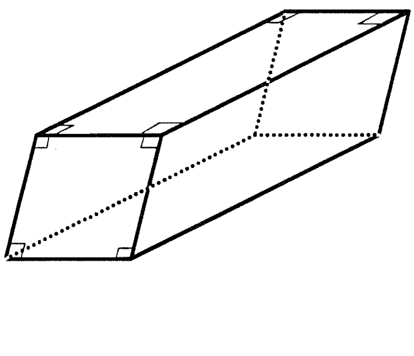
L'activité proposée ci-après en est une adaptation pour la formation des professeurs des écoles. Nous ne l'avons pas encore expérimentée. Elle pose le problème de l'imagination et de la construction d'un patron de solide où les angles ne sont pas tous des angles droits.

Cette activité peut être rapprochée de celle proposée par Marianne FRÉMIN dans le tome II (Actes du stage de Pau) et intitulée *"Pyramides bizarres"*.

Phase 1

On présente aux étudiants une boîte ayant la forme d'un prisme droit parallélogrammique. Elle comporte donc six faces : deux faces opposées sont des parallélogrammes, les quatre autres étant des rectangles, deux "petits" (5 cm sur 4 cm) et deux "grands" (8 cm sur 4 cm).

Cette boîte est posée bien à la vue de tous, une face rectangulaire en contact avec la table.



Consigne

Vous devez reproduire une boîte identique à celle qui est devant vous. Vous disposez d'une feuille A4 de bristol.

Vous pouvez venir voir la boîte de plus près mais vous n'avez pas le droit de la manipuler. Je tiens à votre disposition un solide en bois identique à la boîte pour vous permettre de valider votre production.

S'il vous manque des renseignements, je dispose de quelques informations que je peux vous communiquer. Vous devrez m'adresser vos éventuelles questions par écrit.

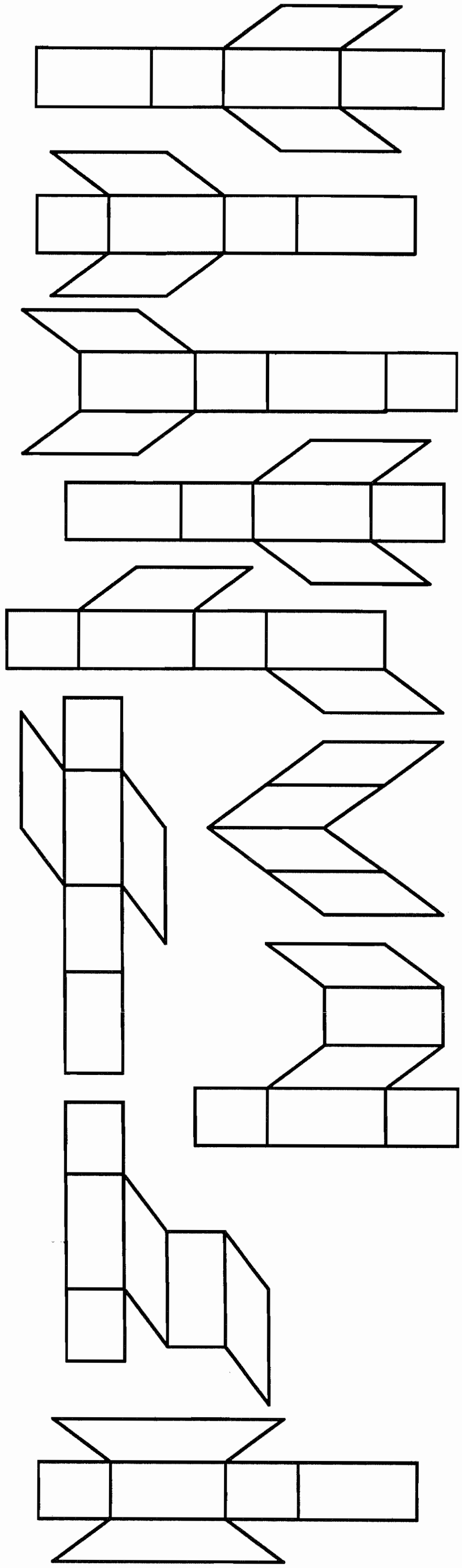
Remarques

Signalons quelques variables didactiques de cette situation :

- la position de la boîte modèle : il est possible de la présenter sur une face parallélogrammique, ce qui modifie sensiblement la représentation spontanée de l'objet,
- le choix de proposer du bristol demi-centimétré ou du carton simple,
- les informations complémentaires susceptibles d'être données ; exemples : les dimensions d'un grand rectangle, une dimension d'un petit rectangle, une hauteur d'un parallélogramme
- les formulations autorisées pour les questions : écrites uniquement, orales, par schémas...

Phase 2

Une feuille représentant les dix patrons ci-contre est distribuée.



Consigne

Cherchez les "bons" patrons et indiquez les éléments qui vous permettent de reconnaître les "mauvais" patrons.

Phase 3

Cette phase doit permettre de renforcer et généraliser le résultat obtenu à l'issue des deux phases précédentes.

On fournit aux étudiants une boîte parallélépipédique rectangulaire de 8 cm x 4 cm x 5 cm

Consigne

Réalisez le patron d'une boîte parallélépipédique de mêmes longueurs d'arêtes que le modèle, mais qui soit penchée "dans les deux sens".

Remarque

Nous faisons ici l'hypothèse que l'expression *"penchée dans les deux sens"* sera comprise par les étudiants. Probablement des gestes seront-ils nécessaires pour indiquer ce qui est entendu par là. L'idée est de donner une description qualitative de l'objet à obtenir. La réflexion permettant d'aboutir à la compréhension que les faces inférieure et supérieure doivent rester rectangulaires et que les autres faces sont des parallélogrammes égaux deux à deux est à la charge des étudiants.

Conclusion

Cette activité place les PE en situation de résolution de problème à support géométrique et permet une réflexion sur la construction de parallélogrammes dont on connaît les côtés. L'enseignant pourra alors amener un complément d'information sur les différentes constructions possibles de parallélogrammes selon les instruments dont on dispose et les contraintes de l'énoncé.

De plus, l'activité permet de constituer un stock de solides "irréguliers" utilisables avec de futurs élèves de l'école élémentaire, notamment pour des classements de polyèdres.

Titre	Situation de communication à propos de polyèdres.
Auteur	Jean Vincent (PIUFM Châlons sur Marne).
Type	Compte-rendu d'activités.
Résumé	Utilisation de situations de communication à propos de polyèdres pour amener les stagiaires à prendre conscience de la difficulté que peuvent éprouver les enfants à « construire l'espace » tout en leur fournissant des outils pour des activités menées en classe.

SITUATION DE COMMUNICATION À PROPOS DE POLYÈDRES

Introduction

J'ai utilisé à plusieurs reprises cette situation, tant en formation initiale que continue, mais je vais commencer par faire une ébauche des travaux menés à l'école élémentaire. En effet, l'activité décrite en est issue et donne lieu à description et discussion avec les stagiaires au cours de la séance. Sa genèse commence donc au primaire.

Ce travail est issu d'une étude menée en 1991 avec une P.E.M.F. (Ch. Vincent) en classe de CE2 et prolongée en classe de CM2 par moi-même.

L'objectif est de faire travailler les enfants de cycle III sur la géométrie dans son aspect spatial de telle manière qu'ils aient un problème à résoudre et que la résolution de ce problème les amène à progresser dans leur représentation de l'espace.

En nous inspirant de G. Brousseau qui décrit ce qui est pour lui la situation fondamentale de la géométrie comme le problème *« du charpentier qui doit préparer et tailler au sol des bois qui devront s'ajuster exactement dans l'espace à dix mètres du sol. Il faut qu'il ait une représentation et des techniques précises qui lui permettent d'anticiper le résultat de ses décisions mais, alors que les seuls "textes" que se transmettaient les maîtres charpentiers étaient des dessins, le modèle ici dans l'enseignement devra être explicité et faire l'objet d'une élucidation.* », nous avons mis en place au cycle III une progression de situations dont la dernière est celle qui est proposée aux PE2 et aux maîtres en FC.

Progression en primaire

La première activité proposée relative au thème est l'identification de solides. Chaque enfant a un solide dont il doit rédiger une description afin que d'autres puissent le reconnaître parmi un lot de solides. Cette première activité permet aux enfants de prendre conscience de la nécessité d'un vocabulaire commun.

L'activité suivante ressemble à la précédente mais on demande aux enfants de dessiner le solide à identifier. Le but principal est de repérer les représentations qu'ont les enfants du passage de l'espace au plan. Cela a permis de montrer que les enfants du CE2 n'ont pas ou peu l'envie de dessiner en perspective contrairement aux élèves de CM2 ou aux adultes.

L'activité suivante est basée sur « l'habillage » d'un polyèdre et a pour objectif de faire évoluer le champ des représentations que peuvent avoir les enfants des solides.

Les séances suivantes ont pour objectifs de faire découvrir aux enfants le matériel Plot (décrit ci-dessous) à travers des activités de communication entre élèves puis de communication par le maître d'une description de solide. Dans les deux cas, les enfants doivent élaborer un « bon de commande » faisant état du matériel dont ils pensent avoir besoin pour construire le solide, ce qui implique une représentation mentale des solides de plus en plus élaborée. Dans le premier cas, ils ont le solide sous les yeux, dans le second cas, ils n'ont qu'une description orale « un solide en forme de maison avec des faces carrées et quatre triangles pour faire le toit ».

Les deux séances suivantes sont à peu près similaires aux précédentes mais en utilisant cette fois le matériel Nathan (référence en annexe) qui oblige les enfants à une abstraction plus importante.

Les séances suivantes sont celles servant de support à l'activité avec les stagiaires.

L'activité en primaire

Matériel

- une trentaine de polyèdres « modèles » en carton dont la forme est généralement inconnue des enfants (et des adultes) et dont les faces sont des polygones réguliers, du triangle à l'hexagone (voir liste en annexe).
- des boîtes à chaussures permettant de cacher les solides.
- le matériel de construction Plot qui est composé de faces prédécoupées et d'élastiques qui permettent de les assembler. Chaque arête nécessite un élastique car les carrés doubles du matériel initial ne sont pas utilisés. La nature du matériel impose que le travail des enfants soit axé sur la nature des faces ainsi que sur le nombre d'arêtes.
- le matériel de construction Nathan comprenant des tiges et des sommets en plastique permettant d'assembler trois, quatre ou cinq tiges. Ce matériel oblige les enfants à dénombrer le nombre d'arêtes mais surtout à trouver l'organisation des sommets des solides, ce qui nécessite une conception plus élaborée de l'espace.

Des essais faits avec le matériel Polydron n'ont pas donné entière satisfaction à cause des problèmes de manipulation en fin de construction. Ce matériel pourrait toutefois être utilisé pour fabriquer les polyèdres « modèles ».

Objectif

Fournir une description d'un polyèdre permettant sa construction par une autre personne avec un matériel donné.

Organisation de la classe

Des groupes sont constitués de manière à ce que deux groupes de deux enfants forment une équipe de quatre qui travaillent ensemble et marquent un certain nombre de points selon que la construction est réussie en une ou plusieurs fois.

Les deux membres de chaque groupe sont simultanément émetteurs puis récepteurs. Les équipes sont constituées en fonction des résultats aux précédentes activités de manière à ce qu'elles soient les plus homogènes possible.

Activité

Le maître choisit les solides en fonction des groupes. Chacun d'entre eux dispose d'un solide en carton caché dans une boîte à chaussures et doit rédiger un message permettant à l'autre groupe de l'équipe de construire un solide semblable avec un matériel précisé à l'avance (Plot ou Nathan).

« *Vous devez préparer un message pour que l'autre partie de l'équipe puisse construire avec le matériel Plot (resp. Nathan) le solide que vous avez dans la boîte* ».

Cette activité se déroule en trois séances. A la fin de la première séance, l'équipe de quatre se réunit pour valider les constructions et échanger des points de vue sur descriptions écrites et dessins afin d'affiner sa stratégie. A la fin de la deuxième séance il y a, de plus, communication par quelques enfants de la méthode utilisée par le groupe. A la fin de la dernière séance, quelques modes de représentation sont institutionnalisés.

L'activité en formation

L'activité est similaire, mais un certain nombre de variables sont modifiées. Elle se déroule généralement sur trois heures et sert de motivation à une séance ultérieure dont le but est de commencer la fabrication des polyèdres nécessaires à l'activité.

La séance commence par une présentation rapide du matériel et de l'activité.

Les stagiaires sont séparés en deux groupes dans deux salles différentes. L'animateur joue le rôle de facteur pour les messages.

Les polyèdres les plus « simples » sont distribués en veillant à ce qu'il n'y en ait pas de similaires dans une même équipe.

Contrainte supplémentaire par rapport aux enfants : **les messages émis dans une salle ne doivent comporter que du texte tandis que ceux émis par l'autre salle ne doit comporter que des dessins.**

Il n'est pas non plus précisé, dans un premier temps, le matériel avec lequel l'autre partie de l'équipe aura à construire le solide décrit et, généralement, peu de stagiaires le demandent.

L'animateur n'intervient évidemment que pour faire respecter les consignes et répondre aux questions qui ne portent que sur la forme.

Lorsque les messages sont échangés, le matériel avec lequel ils devront réaliser leur polyèdre est précisé. Les stagiaires doivent alors faire une « commande » par écrit du matériel nécessaire et, lorsque l'animateur le leur a donné, essaient de réaliser la construction. Toute erreur entraînant un ajustement du besoin en matériel (en trop ou en moins) entraîne un pénalité pour l'équipe. Il en est de même lorsqu'il y a échec et/ou, qu'à la demande des récepteurs, le message doit être reporté aux émetteurs pour correction ou précision.

Lorsque les solides sont construits, il y a réunion des deux groupes de l'équipe et validation du résultat obtenu. Il y a discussion dans les groupes et généralement remise en cause d'un certain nombre de représentations.

L'activité est reprise en permutant les rôles (dessins, messages écrits). Les polyèdres distribués sont plus complexes. Les stagiaires demandent alors généralement avec quel matériel l'autre partie de l'équipe devra construire le solide. Malgré la discussion préalable, le nombre d'erreurs est souvent non négligeable.

Synthèse

Une discussion en grand groupe a lieu ensuite. Elle permet dans un premier temps aux stagiaires de s'exprimer sur ce qu'ils ont fait et sur les procédures utilisées, de comparer l'efficacité respective de différentes descriptions et représentations. Ils sont amenés à analyser d'un point de vue didactique l'activité qu'ils ont réalisée en mettant notamment l'accent sur les types de situation (action, formulation, validation), sur la notion de contrat didactique (ce qu'ils s'interdisent, les implicites...), sur le rôle de la phase de discussion entre les deux essais (conflit socio-cognitif, régulation, mise au point de connaissances, accord sur le vocabulaire...), sur le rôle de l'animateur, etc...

Dans un second temps, une description du travail qui a été réalisé en classe primaire est faite et il leur est présenté quelques travaux d'enfants de CE2. Ils doivent alors essayer d'analyser pourquoi certains solides qui peuvent paraître « difficiles » et avec lesquels ils ont souvent eu des problèmes comme le demi cuboctaèdre ont été traités très efficacement par les enfants (figure 1) alors que d'autres, comme le prisme à base triangulaire accolé à une pyramide à base carrée ont causé des échecs (figure 2). Les différentes représentations et leur efficacité en fonction du solide sont ainsi étudiées et montrent que souvent le patron (figure 3) constitue une bonne "solution".

La séance se termine généralement sur la nécessité d'apprendre à construire le matériel nécessaire à l'activité.

Observation de stratégies

Par rapport aux stratégies élaborées par les enfants, les adultes ont évidemment des comportements très différents avec toutefois quelques ressemblances.

- Le nombre d'échecs chez les adultes est suffisamment important pour justifier qu'ils fassent effectivement l'activité.
- Effet de contrat : les adultes essaient de donner des messages minimum contrairement aux enfants qui en émettent de très redondants. Le récepteur, dans ce dernier cas, peut choisir les représentations avec lesquelles il est le plus à l'aise, ce qui permet souvent de réussir avec un message partiellement inexact.
- Les adultes essaient fréquemment de faire un dessin en perspective de l'objet qui est souvent très difficilement lisible par le récepteur. Les enfants de CE2 n'ont généralement pas cette réaction car cet outil n'est pas disponible chez eux ; par contre, les enfants de CM2 l'ont beaucoup plus fréquemment.
- Certains (adultes comme enfants) utilisent une représentation proche du patron (parfois non connexe). Celle-ci est généralement très efficace avec le matériel Plot, mais peu avec le matériel Nathan car il est alors très difficile d'imaginer le nombre

d'arêtes et surtout le nombre et la nature des sommets.

- Bien que les enfants, et à un degré moindre les adultes, soient tentés de mesurer dans les activités géométriques, on constate ici peu de recours à la mesure, du fait que toutes les arêtes sont de même longueur.

  Les enfants ayant cette possibilité, c'est le dessin à la fois multiple et commenté qui est évidemment le plus efficace, surtout lorsqu'ils joignent la «commande». Les adultes sont d'ailleurs toujours tentés de mettre quelques mots sur leurs dessins ou de joindre quelques schémas à leurs textes. Là aussi il y a souvent un effet de contrat car les adultes « n'osent pas » joindre la commande sans me demander si c'est autorisé.

Conclusion

Cette animation reçoit généralement un accueil très favorable tant par les stagiaires de FC que par les PE2. En règle générale, elle motive le travail qui suit et qui consiste en la recherche des patrons et la construction des polyèdres présentés. Elle permet d'illustrer quelques notions de didactique vues par ailleurs et de présenter des activités en géométrie qui sont très différentes de celles habituellement pratiquées dans les classes de cycle III et présentées dans les manuels.

Elle oblige les stagiaires à remettre en cause leurs connaissances sur les représentations de l'espace et leurs efficacités respectives selon le contexte. Ils sont obligés de faire un effort pour passer de l'écrit ou du dessin à l'espace et réciproquement, pour se décentrer et décrire ce qu'ils voient en pensant à ceux qui vont recevoir le message.

Annexes

Liste des polyèdres utilisés

- Tétraèdre
- Octaèdre
- 2 tétraèdres accolés
- Cube + pyramide à base carrée (forme maison à toit 4 pentes)
- Pyramide à base carrée (et faces triangles équilatéraux)
- Prisme à base triangulaire (et faces carrées)
- Prisme à base pentagonale (et faces carrées)
- Prisme à base hexagonale (et faces carrées)
- Pyramide à base pentagonale (et faces triangles équilatéraux)
- Prisme à base triangulaire + 2 pyramides à bases triangulaires (forme navette)
- Prisme à base triangulaire + pyramide à base carrée
- Prisme à base triangulaire + tétraèdre (forme maison triangulaire)
- Demi cuboctaèdre
- Antiprisme à base carrée
- Antiprisme à base carrée + pyramide à base carrée
- Antiprisme à base carrée + 2 pyramides à bases carrées
- Antiprisme à base pentagonale
- Antiprisme à base hexagonale
- Dodécaèdre
- Deltaèdre à 10 faces
- Deltaèdre à 12 faces
- Deltaèdre à 14 faces
- Cube + 2 pyramides à bases carrées
- Octaèdre tronqué
- Tétraèdre tronqué

Matériel

Matériel PLOT Kit polyèdres n° 1 *(faces cartonnées assemblées à l'aide d'élastiques)* APMEP Orléans Tours BP 6759, 45067 Orléans cedex 2

Matériel NATHAN N50 "Des volumes à construire" *(tiges et rotules qui permettent d'obtenir les "squelettes des solides")*

Matériel POLYDRON

Travaux d'enfants de CE2

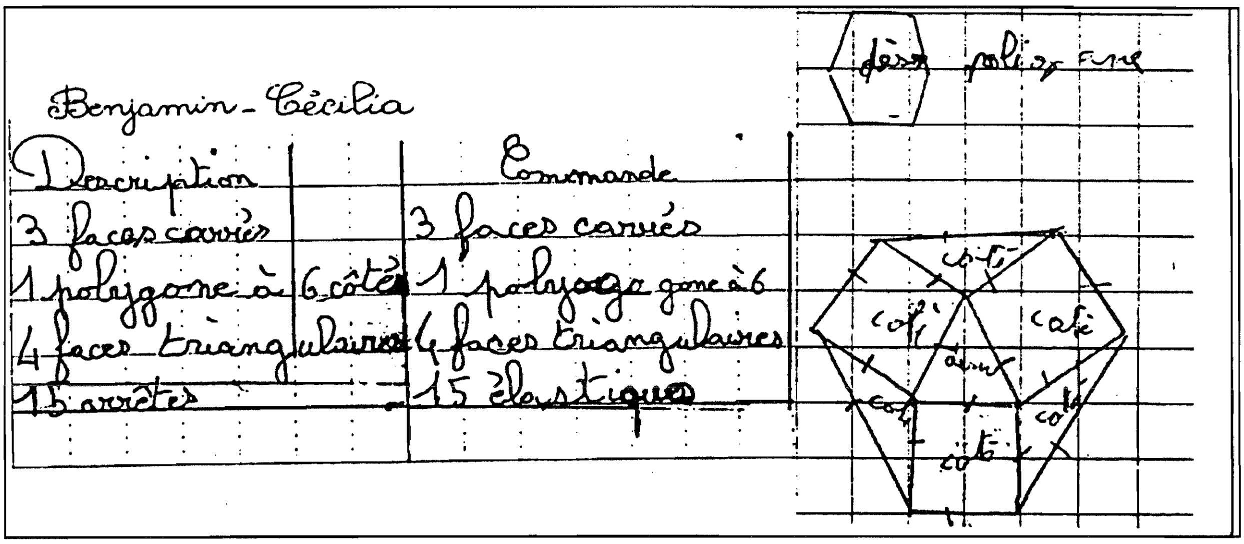


Figure 1

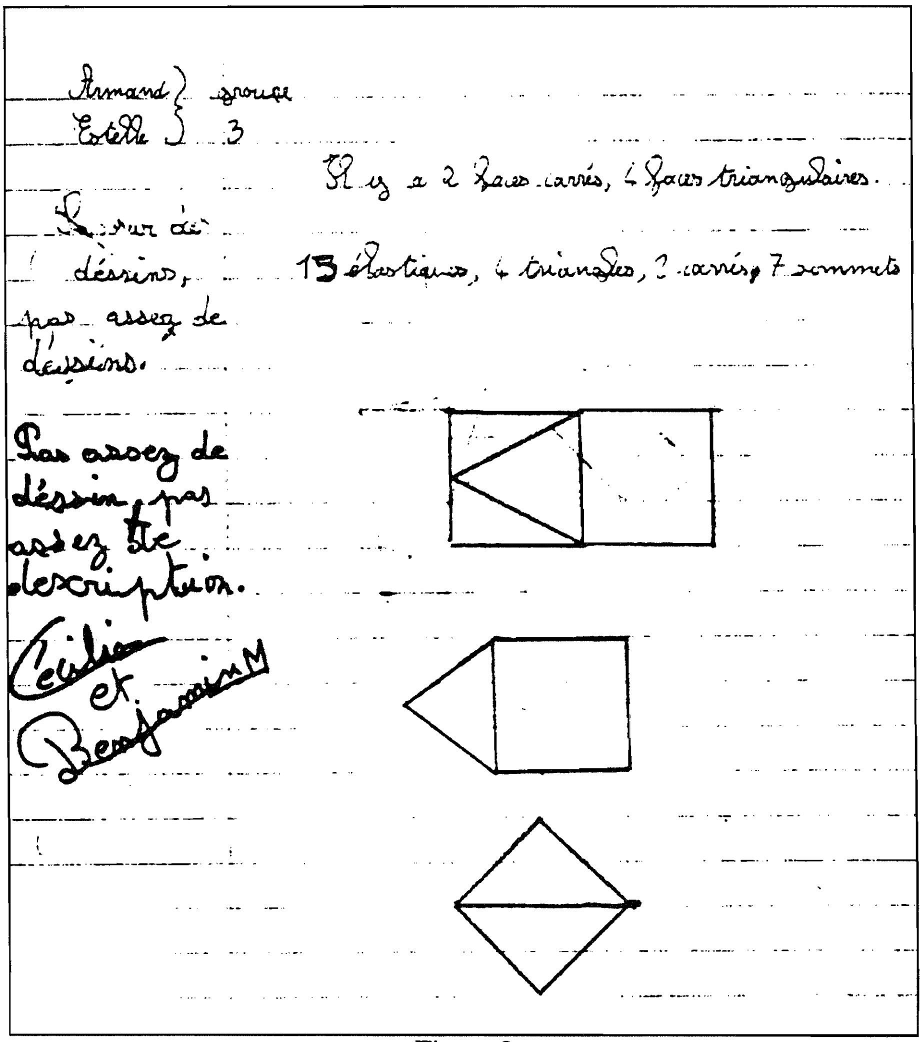


Figure 2

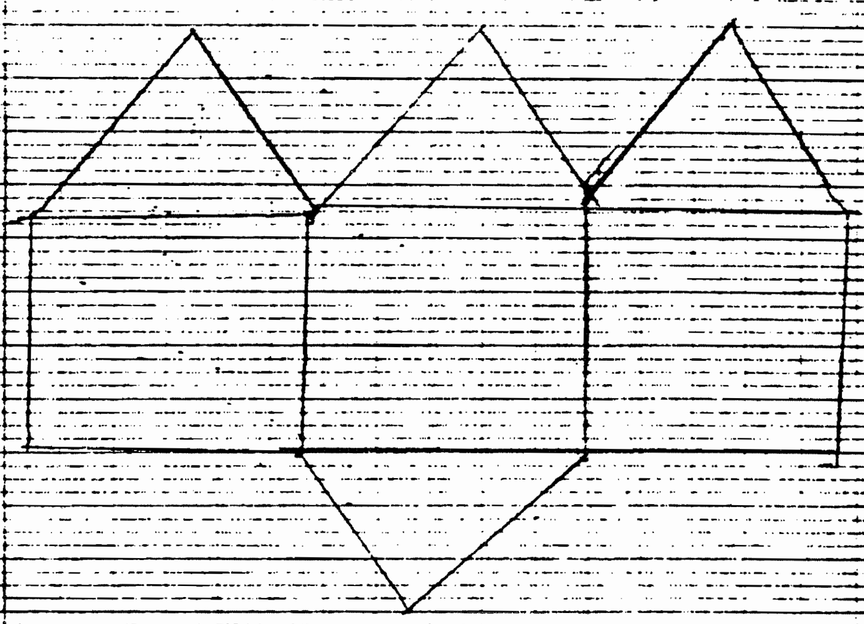
Camille - Sandrine 5 groupe	Il a 3 faces carrées et 4 faces triangulaires. Il a 7 sommet et 9 arrête. Tout les carrés touche les triangle.
	commande: Il faut 3 carrés et 4 triangles et 9 élastiques.
	
	~~Voici toutes les faces~~ ~~Il manque 2 élastiques~~ ~~Il reste une face carré et 2 faces triangulaires~~

Figure 3

Titre	Autour du triangle
Auteur	Claude RIMBAULT
Date	1995
Type	Activité pour la formation continue
Contenu	A partir d'une mise en situation des stagiaires mettant en jeu à la fois pliages et construction géométrique, recherche de quelques points remarquables du triangle. Sensibilisation aux différences entre connaissances déclaratives et connaissances procédurales.

AUTOUR DU TRIANGLE

AVERTISSEMENT

Cette séquence d'une durée de 3 heures est la 6ème d'un module de 24 heures de géométrie pour des maîtres de cycle 3 en formation continue et ne peut être considérée comme indépendante des autres séquences : les stagiaires auront à réinvestir des notions précédemment abordées (reproduction de figures, alignement, pliages, etc.). On y prépare aussi à la séquence n° 8 (recherche d'ensemble de points).

Les huit séquences du module sont les suivantes :

1. *Le ballon de football (situation-problème introductive au module).*
2. *Reproduction et description de figures.*
3. *Polygones et polyèdres usuels.*
4. *Frises et pavages.*
5. *Pliages.*
6. *Autour du triangle.*
7. *Agrandissement de figures.*
8. *Recherche d'ensembles de points.*

Les deux objectifs principaux de la séquence présentée ici sont :

- La maîtrise de certaines pratiques instrumentales.
- Une sensibilisation aux différences qui existent entre connaissances déclaratives et connaissances procédurales.

Le compte-rendu des 7 activités proposées distingue les questions et consignes de l'animateur, les réactions des stagiaires, les commentaires de l'animateur liés à ses analyses a priori et a posteriori.

ACTIVITÉ 1

Construction d'un triangle dans un repère lié à une feuille A3

ACTIVITÉ 2

Reproduction d'un triangle

ACTIVITÉ 3

Construction de trois hauteurs d'un triangle

ACTIVITÉ 4

Construction de trois médianes d'un triangle

ACTIVITÉ 5

Construction de trois bissectrices intérieures d'un triangle

ACTIVITÉ 6

Vérification de l'alignement (droite d'Euler).

ACTIVITÉ 7

Construction du cercle d'Euler

PRÉSENTATION

Le travail est individuel mais les stagiaires ont toute liberté de discuter avec leurs collègues. Les consignes sont orales et successives. Chaque activité se termine par un bilan collectif où sont explicitées et analysées les remarques, productions, difficultés rencontrées, procédures mises en oeuvre,...

Chaque stagiaire dispose de feuilles A3 (29,7 x 42), de feuilles de papier affiche de couleurs différentes, d'un triple décimètre, d'un compas à vis (pour pouvoir utiliser des crayons de couleurs différentes), d'une équerre (je fais utiliser ce que j'appelle "l'équerre de Saint-Brieuc" : sous-verre carré Kronenbourg aux coins bien arrondis ; les stagiaires sont parfois surpris, mais cela permet de revisiter de façon intéressante les notions de perpendicularité et d'angle droit).

Activité 1

Consigne

Sur une feuille de format A3, le petit côté est l'axe des abscisses, le grand côté est l'axe des ordonnées, donc, l'origine est le coin inférieur gauche de la feuille. Fixez votre feuille sur la table avec du ruban adhésif.

Placez les points A(9;33) B(9;12) et C(27;15), les coordonnées étant données en centimètres. Vous obtenez un triangle ABC. Tracez ses côtés.

Que pouvez-vous dire de ce triangle et du positionnement des points A, B et C sur la feuille ?

Réactions des stagiaires

Les mots abscisse et ordonnée sont connus.

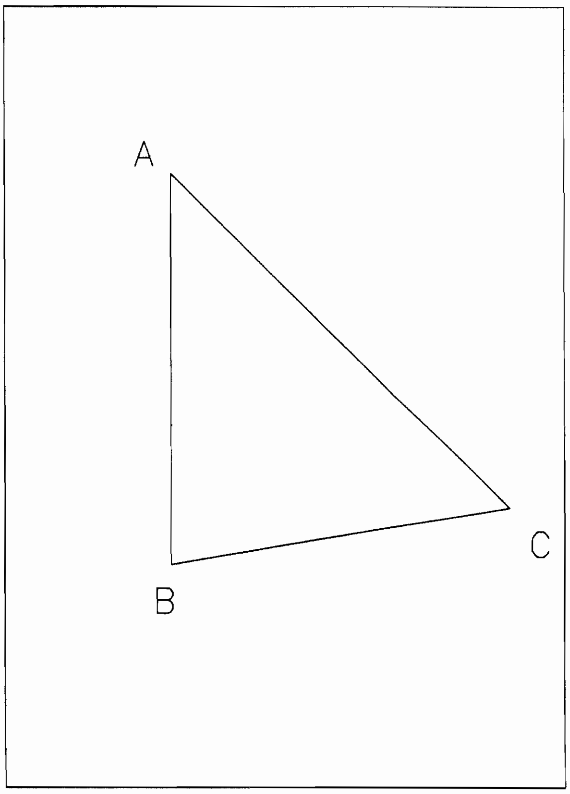
Le fait que les axes soient les bords de la feuille et ne soient pas tracés gêne quelques stagiaires (l'un deux a même renforcé les bords au crayon).

Tous prennent en compte le fait que la feuille est rectangulaire.

Ils placent les deux points d'abscisse 9 sur les bords inférieur et supérieur de la feuille. Mais ces deux points sont distants de 42 cm et ne peuvent être joints à l'aide du triple décimètre.

La procédure utilisée est la recherche d'un autre point d'abscisse 9. Ce point est obtenu soit en construisant une perpendiculaire au bord gauche de la feuille (à l'aide du compas ou de l'équerre), soit, plus rarement, en construisant au compas le quatrième sommet d'un rectangle dont un côté mesure 9 cm.

Les points A, B et C sont alors placés.



Commentaires

Quelques stagiaires ont tracé avec l'équerre deux ou trois perpendiculaires à l'axe des ordonnées et y ont placé les points situés à 9 cm de cet axe. Ils ont donc considéré la droite (AB) parallèle au bord gauche comme l'ensemble des points situés à 9 cm de l'axe des ordonnées. C'est, dans ce cas, une connaissance procédurale (par opposition à "Deux droites parallèles sont deux droites qui n'ont aucun point commun" qui exprime une connaissance déclarative).

Les stagiaires peuvent aisément remarquer, "à l'oeil", que le triangle n'est pas rectangle et n'éprouvent pas le besoin de le vérifier à l'équerre. La mesure des côtés permet de vérifier qu'il n'est pas isocèle. Le triangle ABC est qualifié de "quelconque" ou "scalène" par le professeur.

A propos du positionnement des points A, B et C sur la feuille, les stagiaires remarquent que la droite (AB) est parallèle au bord de la feuille.

Quelques-uns remarquent l'alignement des points A, C et du coin supérieur gauche de la feuille (les alignements ont été étudiés dans la séquence n° 2 : "reproduction de figures"). La question de la justification de cet alignement est soulignée par le professeur.

Personne n'a remarqué que le point A est à 9 cm du bord supérieur de la feuille (car 33 = 42 - 9) et donc que A est équidistant des deux côtés de l'angle supérieur gauche de la feuille. Il en est de même du point C puisque 42 - 27 = 15. A et C sont donc situés sur la bissectrice intérieure de cet angle (connaissance procédurale de la bissectrice). Cette preuve est faite ou induite par le professeur.

Enfin, à la demande du professeur, les stagiaires mesurent la distance de l'origine au point B ; on trouve bien sûr 15 cm. Cela peut leur permettre de reconnaître ici le positionnement du point B comme sommet d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 12 cm et 9 cm (triangle homothétique du triangle 3, 4, 5.

Cette question sera reprise dans la séquence n° 7 : *"agrandissement de figures"*.

Activité 2

Consigne

Découpez dans du papier affiche bleu, rouge, vert et jaune quatre triangles de la dimension du triangle ABC.

Réactions des stagiaires

Les stagiaires utilisent différentes méthodes (en référence à la séquence n° 2 : "reproduction de figures"), en particulier le piquetage des sommets, le compas pour reporter les longueurs des côtés, le gabarit dès qu'un triangle est découpé.

Commentaires

Cette activité permet à l'animateur d'évaluer les acquis et les réinvestissements du travail réalisé au cours de la séquence n° 2.

Activité 3

Consigne

Quelle définition connaissez-vous de la médiatrice d'un segment [AB] ?

Construisez les médiatrices des côtés du triangle ABC sur la grande feuille A3. Puis, par pliage uniquement, construisez les médiatrices du triangle bleu découpé. Que constatez-vous ?

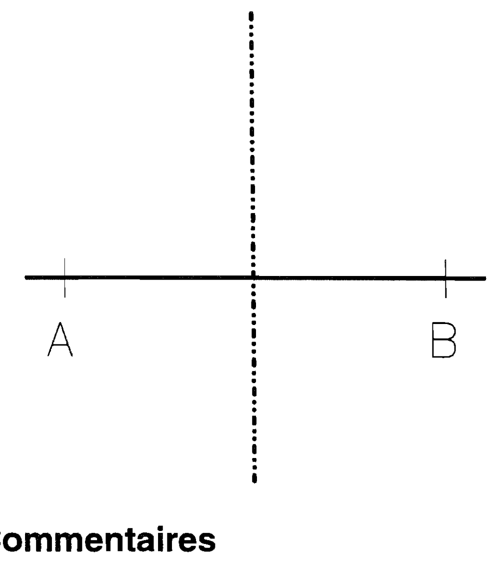
Vérifiez l'adéquation de votre construction avec la définition que vous avez donnée de la définition de la médiatrice d'un segment.

Réactions des stagiaires

La définition donnée par tous est : *"la médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire à ce segment [AB] en son milieu".*

Les constructions effectuées sur la feuille A3 sont les constructions classiques :

- à l'aide du compas on construit l'axe radical de deux cercles égaux centrés en A et B,
- par pliage, on amène le coin A sur le coin B et on marque le pli.



Commentaires

Pour trouver deux points de la médiatrice, quelques stagiaires affirment qu'on peut utiliser deux ouvertures de compas différentes (recherche de deux points équidistants des deux extrémités du segment [AB]).

Se pose alors la question de la relation entre la procédure de construction proposée et la définition donnée pour la médiatrice. Cette définition est dans ce cas uniquement déclarative.

Par contre, cette définition est bien procédurale lorsqu'on procède par pliage dans le triangle bleu : on amène A sur B pour déterminer le milieu de [AB] et, subsidiairement, le pli formé est la médiatrice de [AB] (on a partagé un angle plat en deux angles égaux donc droits) et c'est aussi l'axe de symétrie non trivial du segment [AB].

Le professeur fait vérifier, pour les deux constructions, que les trois médiatrices sont concourantes (certains l'avaient oublié) en un point O.

Il fait encore vérifier par superposition et piquage qu'on obtient bien la même position du point O dans les deux triangles).

Il fait constater aussi aux stagiaires que le point O est équidistant des trois sommets du triangle et est donc le centre d'un cercle ("cercle circonscrit") passant par ces trois sommets.

Il invite les stagiaires à tracer ce cercle sur la feuille A3.

Activité 4

Consigne

Quelle définition connaissez-vous du mot hauteur dans un triangle ABC ?

Construisez les hauteurs du triangle ABC sur la feuille A3 avec les instruments usuels. Puis, par pliage, construisez les hauteurs du triangle rouge découpé.

Que constatez-vous ? Vérifiez l'adéquation de votre construction avec la définition que vous avez donnée.

Réactions des stagiaires

Majoritairement, la définition donnée est : *"une hauteur d'un triangle est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé"*. Mais on trouve aussi : *"la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base !"*.

La première hauteur construite est toujours celle relative aux côtés BC, encore perçu comme "base" du triangle ABC.

Commentaires

Sur la feuille A3, les dimensions de l'équerre sont insuffisantes et ne permettent pas un tracé direct des hauteurs. Il faut alors utiliser le compas et la construction d'une médiatrice. La définition proposée n'est pas directement procédurale mais là encore déclarative. Par contre, cette définition est bien procédurale dans le cas du pliage du triangle rouge.

Là encore le professeur fait vérifier la concordance des deux constructions et la "concourance" des trois hauteurs en un point H appelé "orthocentre" du triangle ABC.

Activité 5

Consigne

Quelle définition connaissez-vous du mot médiane dans un triangle ABC ?

Tracez les trois médianes sur la feuille A3 et construisez les par pliage dans le triangle découpé vert.

Que constatez-vous ?"

Réactions des stagiaires

La définition donnée est : *"Segment de droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé"*.

Commentaires

Les deux constructions sont en adéquation avec la définition donnée.

Il est inutile, dans ce cas, de vérifier la concordance des deux constructions mais le professeur pourra faire vérifier que les trois médianes concourent en un point G, centre de gravité du triangle.

Il pourra aussi demander d'examiner la position relative de G sur chacune des médianes, en mesurant sur la feuille A3 et en utilisant un "guide-âne" sur le triangle découpé vert.

Il fera remarquer que les points O, G et H sont alignés (droite d'Euler).

Activité 6

Consigne

Quelle définition connaissez-vous de la bissectrice d'un angle?

Tracez les trois bissectrices (intérieures) des angles du triangle ABC sur la feuille A3 puis, par pliage, construisez celles du triangle découpé jaune.

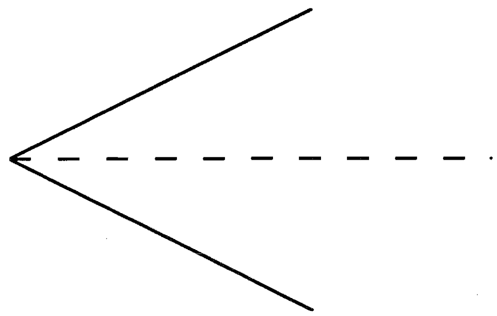
Que constatez-vous ?

Comparez les deux constructions.

Réactions des stagiaires

La définition la plus souvent citée est : *"la demi-droite issue du sommet d'un angle et divisant cet angle en deux parties égales".*

La construction attendue avec le compas a souvent été oubliée. Elle est alors rappelée par l'enseignant ou d'autres stagiaires



Elle n'est que rarement justifiée par les stagiaires

Commentaires

La construction par pliage est bien en adéquation avec la définition donnée (procédurale) : la bissectrice est perçue comme axe de symétrie de l'angle.

Le professeur fait vérifier la concordance des deux constructions et la "concourance" des bissectrices intérieures en un point I.

Il fait constater que ce point I est à égale distance des trois côtés du triangle et est donc le centre d'un cercle inscrit, tangent aux trois côtés (il aura, auparavant, fait vérifier que tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle). Le statut de cette nouvelle définition de la bissectrice est alors posé : est-elle déclarative ou procédurale ?

Activité 7

Consigne

Construisez les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux trois côtés du triangle. Que constatez-vous ?

Placez maintenant les milieux des segments joignant l'orthocentre H aux sommets du triangle ABC ; il existe un cercle passant par ces trois points, les trois milieux des côtés et les trois pieds des hauteurs. C'est le "cercle des 9 points" ou" cercle d'Euler". Construisez-le.

Que remarquez-vous ?"

Réactions des stagiaires

La méthode utilisée est celle dite du losange étudiée dans une séquence précédente, mais on peut trouver d'autre procédures de construction...

Les stagiaires constatent que les symétriques de H sont situés sur le cercle circonscrit au triangle.

Ils constatent aussi que le centre W du "cercle des 9 points" est situé sur la droite d'Euler.

Commentaires

Les positions relatives des points O, H, G et W sur la droite d'Euler n'ont pas été étudiées dans cette séquence.

Conclusion

Pour terminer, soulignons que cette séquence a été conduite en trois heures et que le rythme en a été soutenu. Mais il ne faut pas oublier qu'elle ne constitue qu'une partie d'un module de formation et qu'il existe donc des interactions entre les différentes séances.

Enfin, la qualité technique et artistique (couleurs, ...) du produit fini sur la feuille A3 (le triangle et tout ce qu'on a mis autour) est un élément à prendre en compte.

Titre	La roue géante
Auteur	Hervé PÉAULT
Date	1995
Type	Compte rendu d'activité en formation PE1
Origine	Suggestion d'André MYX... Selon ce dernier, le problème de référence est dû à Seymour PAPERT.
Contenu	Le problème de la représentation d'un "petit" morceau d'arc de cercle à l'intérieur d'un carré est l'occasion d'un débat autour des représentations proposées et de quelques réflexions sur la géométrie du cercle.

LA ROUE GÉANTE

Cette activité a été réalisée avec un groupe de PE1 dans le cadre d'un module d'approfondissement sur le thème du "débat mathématique".

C'est donc la partie concernant la discussion sur les productions des différents groupes qui a été la plus développée.

L'activité s'est déroulée de la façon suivante :

- Énoncé oral du problème suivi d'une recherche individuelle de quelques minutes.
- Regroupement des étudiants par groupes de 3 avec l'objectif de se mettre d'accord et de rédiger une affiche commune.
- Présentation des affiches et débat sur les solutions proposées.
- Synthèse.

Matériel

- Les instruments géométriques habituels à la disposition de chaque étudiant.
- Du papier format affiche est à la disposition des groupes.

Le Problème

Il a été énoncé oralement en même temps que la consigne à partir de la lecture du texte suivant :

Imaginez une surface plane sur laquelle est construit un grand mur. A la base de ce mur a été pratiquée une ouverture ayant la forme d'un carré de 1 mètre de côté. Le bas de cette ouverture est donc au niveau du sol. Derrière le mur, une roue immense (500 m de diamètre) se déplace lentement en longeant le mur.

Vous êtes face à l'ouverture pratiquée dans le mur et vous allez bientôt y voir un morceau de la roue au moment où elle va passer avant de disparaître. Vous voyez la roue arriver de votre gauche et disparaître sur votre droite.

Votre problème va être de représenter le mieux possible le passage de la roue derrière l'ouverture. Cette représentation se fera selon les modalités suivantes :

Vous allez devoir tracer 5 carrés identiques représentant l'ouverture en 5 instants différents pendant le passage de la roue. Vous y dessinerez chaque fois la partie visible de la roue.

La succession des 5 dessins sera la plus évocatrice possible du mouvement de la roue, permettant d'imaginer au mieux les instants intermédiaires non représentés. Chaque dessin sera le plus précis possible.

Faites ce travail individuellement pendant quelques minutes puis vous vous regrouperez par équipes de 3. Dans chaque équipe vous analyserez et discuterez vos proposi-

tions et vous devrez vous mettre d'accord sur une proposition commune que vous transcrirez sur une affiche.

Celle-ci ne comportera que la succession des 5 dessins, sans texte explicatif. Vous prendrez soin cependant de conserver des éléments complémentaires (textes ou dessins) qui vous serviront ensuite pour justifier vos choix au cours du débat.

Lorsque chaque groupe aura terminé, nous exposerons les affiches et nous entamerons un débat sur la pertinence des différentes propositions.

Remarques

• L'expression *"chaque dessin sera le plus précis possible"* a été utilisée pour que les étudiants comprennent qu'ils peuvent aller plus loin que la simple recherche de l'allure générale d'une courbe. Volontairement, il n'est pas indiqué qu'il faut faire des calculs. La découverte de la pertinence de tels calculs est ici un des éléments de la dévolution du problème.

• Certains étudiants passent beaucoup de temps à une construction minutieuse des 5 carrés. On pourrait penser que, ce tracé n'étant pas ici fondamental, il est plus simple de leur donner des affiches avec les carrés prédessinés. Il me semble cependant qu'une telle option écarterait certaines procédures dans lesquelles la taille des carrés ainsi que leur position relative les uns par rapport aux autres peuvent jouer un rôle.

Premières recherches

Aucune demande de précision n'ayant été formulée, les étudiants se sont aussitôt mis au travail.

Deux questions sont venues au bout de quelques instants :

- *la roue est-elle pleine ou creuse ?*
- *est-ce une roue à rayons, type roue de bicyclette ?*

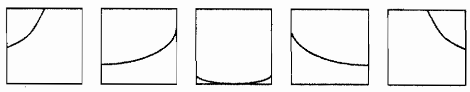
Dans chaque cas j'ai répondu que je ne "savais" pas et qu'il était possible de prendre l'une ou l'autre option. Deux étudiantes sont restées perplexes et longtemps bloquées, et ont eu quelque mal à sortir de leur interprétation du problème dans laquelle la question de la représentation d'un arc de cercle disparaissait devant celle de la représentation des rayons.

La recherche individuelle a été courte, les étudiants commençant très vite à échanger et à se regrouper.

Hormis quelques rares étudiants soucieux de trouver d'emblée une représentation performante, l'évolution des représentations a été marquée par trois grands étapes, plus ou moins rapidement franchies selon les cas :

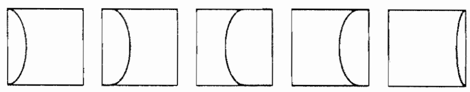
1) Recherche de l'allure générale de l'arc de cercle, avec prise en compte de problèmes d'orientation plutôt que de problèmes de dimension.
2) Recherche prenant en compte les ordres de grandeur et aboutissant à un questionnement sur le type de courbure.
3) Recherche de précision et prise de conscience de l'utilité de calculs. Tous les groupes n'en sont pas arrivés là, certains n'étant pas en mesure de conduire seuls les calculs nécessaires.

Parmi les premières représentations spontanées, beaucoup ont été du type suivant (avec des variantes sur la courbure et la position de l'arc dans la fenêtre) :



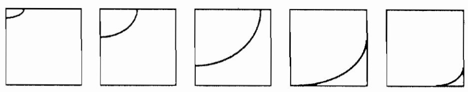
L'idée d'une symétrie par rapport au dessin central n'a cependant pas été générale. Toutefois, beaucoup ont considéré d'emblée que l'un des dessins devait être "presque plein".

Ce n'est pas le cas dans la production suivante :

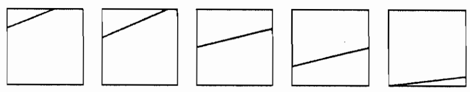


Plusieurs n'ont perçu que le mouvement correspondant à "l'entrée" de la roue,

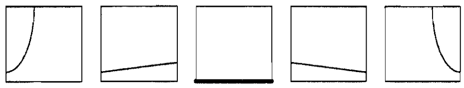
qu'ils représentent la roue à l'aide d'arcs de cercle :



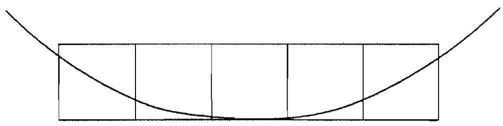
ou de segments :



Cette idée qu'il faut en fait utiliser des segments germe dans certains groupes. Curieusement, des étudiants affirment qu'il faut dessiner des segments et continuent cependant à utiliser des arcs, ou à mélanger les deux avec des représentations du type cidessous :

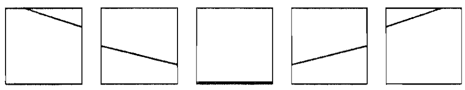


Une procédure apparaît plusieurs fois ; elle consiste à représenter les 5 carrés côte à côte et à dessiner l'arc d'un même cercle traversant ces 5 carrés.



La suite des 5 carrés est alors considérée comme une représentation correcte. Dans l'un des groupes, un étudiant remarquera au bout de quelque temps qu'une telle disposition correspond en fait à un ordre inversé des dessins.

Il est vraisemblable que certains aient mentalement eu recours à cette procédure car ils produisent une représentation du type suivant :



Lorsque les étudiants commencent à se faire une idée de l'allure générale, le problème de la pertinence de l'ordre de grandeur se fait jour peu à peu et beaucoup cherchent des correspondances du type *"quelle doit être la taille du carré si on prend pour la roue la taille d'un pamplemousse ?"*

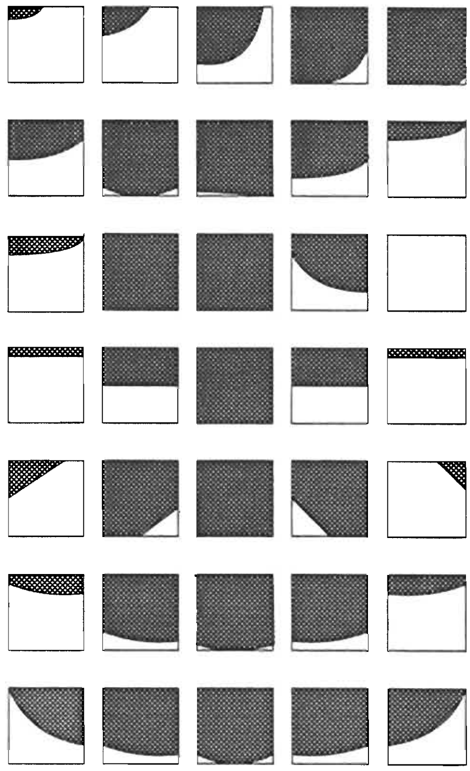
D'autres partent d'un carré qu'ils se fixent et essaient de calculer le diamètre de la roue. Ceci conduit à improviser des compas à l'aide d'instruments "du bord" (ficelles...). Souvent les dimensions retenues font sortir les tracés de la feuille, sans parler de ceux qui se trompent dans leurs calculs et réduisent 10 ou 100 fois plus qu'il ne convient...

En dehors des calculs nécessaires pour une réduction de l'ensemble respectant les proportions, peu d'étudiants entament des calculs permettant d'obtenir des informations plus précises sur l'orientation et la courbure de l'arc de cercle.

Je ne suis pas intervenu au cours de ce travail de recherche.

Débat sur les productions

Voici une reproduction de quelques-unes des affiches produites :



...

Après un premier temps, dans lequel les étudiants étaient invités à commenter les affiches des autres groupes et où de nombreux échanges croisés ont amené certains groupes à se défendre ou à reconnaître des erreurs, j'ai proposé que nous débattions collectivement autour de 3 points :

1. *Parmi ces représentations, quelles sont celles qui donnent une idée juste du **mouvement** de la roue ? Y a-t-il des contre-sens manifestes ?*
2. *Certains ont représenté des arcs de cercle bien "courbés", d'autres des segments. Quelle **courbure** correspond le mieux à ce que voit réellement l'observateur ?*
3. *Qu'il s'agisse de courbes ou de segments, les **inclinaisons** sont différentes. Peut-on donner des indications précises concernant ces inclinaisons ?*

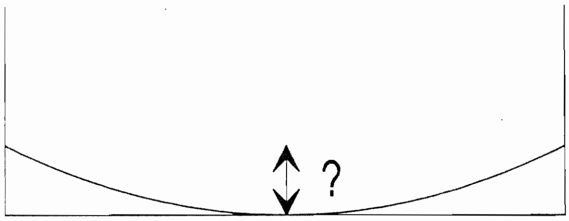
La première question a donné lieu à un intéressant débat "qualitatif" en ce sens que les arguments à utiliser ne sont pas de l'ordre du calcul. L'un des arguments déterminants a été fourni par une simulation ("grand" disque qu'on fait passer derrière une ouverture carrée pratiquée dans une feuille). Certains groupes avaient déjà eu recours à une telle simulation au cours de la phase de recherche.

Pour les deux autres questions, j'ai demandé que les affirmations soient argumentées et démontrées. Certains ont affirmé d'emblée qu'il fallait faire des calculs et se sont lancés dans la présentation de calculs d'autant plus difficiles à comprendre par les autres que n'était pas explicité clairement l'objet de la recherche.

Dans un premier temps j'ai donc orienté le débat sur la question de la transformation du problème de détermination de la courbure en un problème "calculable". Chaque groupe a été invité à formuler "ce qu'on pouvait calculer" pour obtenir une information exploitable sur la courbure, étant entendu qu'on ne commencerait à chercher que lorsque tout le monde serait d'accord sur ce qui devait faire l'objet de la recherche.

Ce travail a conduit à un accord sur le problème suivant, reformulé ici :

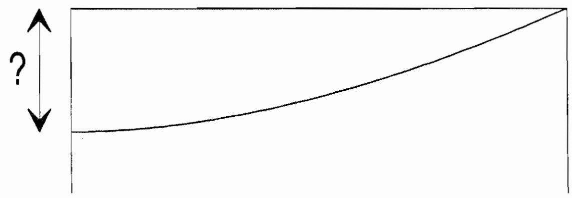
Lorsque le centre de la roue passe au-dessus du milieu de la base du carré quelle est la "flèche" ?



J'ai par ailleurs demandé que soit formulé de la même façon le second problème, indépendamment de la réponse à ce premier.

Plusieurs propositions étaient possibles et, après discussion, nous avons retenu la suivante :

Lorsque la roue touche le coin supérieur droit de l'ouverture, à quelle distance du coin supérieur gauche se trouve le point le plus bas de la roue ?



Lors de l'exposé des premiers calculs par un groupe, la méthode choisie utilisait l'équation du cercle dans un repère centré au centre de la roue. Ce recours à l'équation du cercle étant particulièrement dissuasif pour bon nombre des autres étudiants, j'ai suggéré d'utiliser une figure où seraient représentés les rayons aboutissant aux extrémités des arcs tracés, ainsi qu'un rayon vertical.

Ces indications n'ont pas toujours suffi et j'ai dû inciter plusieurs groupes d'une part à recourir au théorème de Pythagore qui avait fait l'objet d'un travail quelque temps auparavant, d'autre part à ne pas hésiter à utiliser les calculettes.

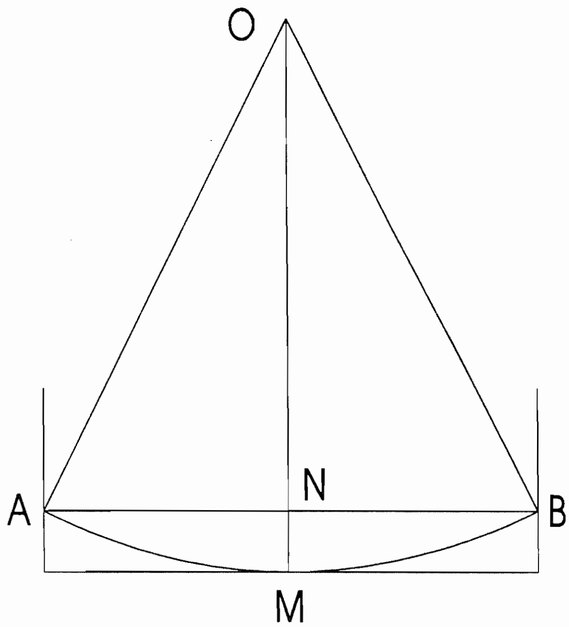
Si le premier problème a pu être résolu assez facilement par une majorité, le second problème a conduit à plusieurs blocages dus à un mauvais positionnement du centre de la roue (placé à l'aplomb du côté gauche du carré...)

Lors de la mise en commun, plusieurs ont su exposer leurs calculs de façon convaincante.

Pour terminer la séance, j'ai repris une synthèse de ce travail.

Synthèse

Premier problème



OA = OB = OM = 250 m

AN = NB = 0,5 m

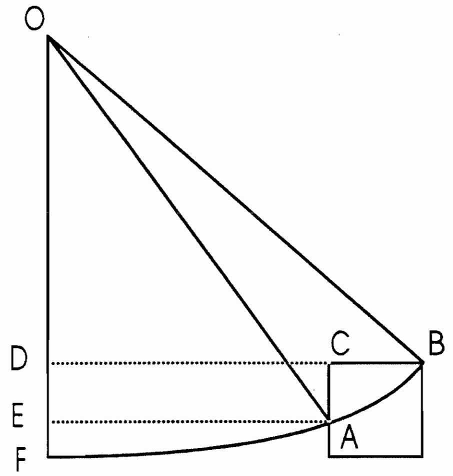
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OAN permet de déterminer ON et donc NM.

Le calcul montre que NM est inférieur à 1 millimètre. Il est donc légitime d'assimiler l'arc à un segment.

Le plus grand arc susceptible d'être contenu dans l'ouverture passerait par deux extrémités d'une diagonale. Il serait du même ordre de grandeur.

On peut donc considérer qu'il est légitime de représenter tout morceau du bord de la roue passant dans l'ouverture, par un segment.

Second problème



OF = OA = OB = 250 m

CB = 1 m

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ODB permet de déterminer DB et donc DC et donc EA.

Le théorème de Pythagore appliqué à nouveau au triangle OEA permet de déterminer OE, pour lequel on trouve (avec une bonne calculette... ; attention aux erreurs cumulées) une valeur comprise entre 249,08 et 249,09.

Le point A est donc situé à un peu moins de 9 centimètres au-dessous de C, ce qui reste perceptible à l'oeil nu.

Pour avoir une position intermédiaire, on peut refaire le même calcul avec par exemple le point B' situé au-dessous de B au milieu du côté du carré. Le point A' correspondant est alors décalé vers le bas d'un peu plus de 6 cm.

Ceci permet de donner une représentation "précise" correspondant à la consigne.

Prolongement

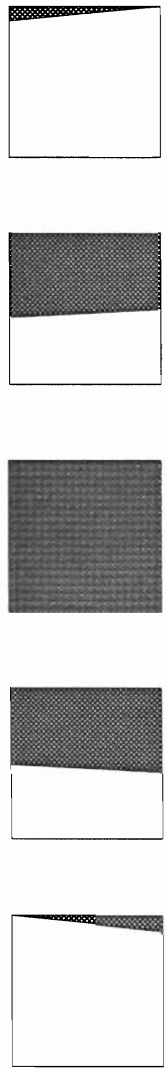
Certains étudiants (4ème figure des productions des groupes) avaient fait l'hypothèse que les arcs de cercle étaient perceptibles à l'oeil nu comme des segments horizontaux.

J'ai donc proposé le problème suivant en prolongement :

En considérant qu'à partir d'un décalage de moins de 1 cm sur 1 m un segment est perçu à l'oeil nu comme horizontal, quel devrait être le diamètre de la roue pour que son passage corresponde à la représentation du 4ème groupe (rideau qui se baisse et se relève) ?

Conclusion

La roue apparaît dans l'ouverture de la manière suivante :



Compte tenu de l'optique du module dans lequel s'inscrivait cette activité, elle m'apparaissait surtout intéressante pour les débats qu'elle pouvait susciter.

Sur le plan mathématique, mon idée initiale était en fait d'aborder la notion de ***tangente***. L'orientation du travail m'a conduit à faire plutôt référence au théorème de Pythagore.

Certains lecteurs auront peut-être d'autres idées...

PARTIE 4

Grandeurs et mesure

Le domaine des grandeurs et de la mesure constitue, à l'école primaire, un sujet important et délicat.

Quels dispositifs de formation prévoir en formation des PE1 ?

Deux approches concernant les aires sont ici proposées :

- Une première est centrée sur la mesure par commensuration et utilisation de rationnels

  Enseignement et apprentissage en PE1, G. LE POCHE

  Cet article, tout en développant une activité sur les mesures rationnelles d'aire, propose une démarche pédagogique s'appuyant sur une conception constructiviste de l'apprentissage. Outils et principes pourront être réinvestis de manière pertinente dans d'autres situations.

- Une deuxième vise les différenciation grandeur-mesure et aire-périmètre

  Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1, M. LE BERRE et C. TAVEAU

  Cet article présente une réalisation effective d'activités qui permettent de distinguer les divers concepts en jeu dans ce domaine (surfaces, aires, longueurs, périmètres, mesures,...)

Titre	Enseignement et apprentissage en PE1.
Auteur	Gaby LE POCHE
Date	décembre 1994
Thème	Enseignement et apprentissage en PE1, mesures d'aires et rationnels.
Contenu	Document de formation à destination de formateurs de Professeurs d'Écoles. L'objectif principal est de mettre en évidence la possibilité d'intégrer, dès la première année, les aspects de formation générale, formation mathématique et formation en didactique. Il se présente à la fois comme proposition de travail et comme compte rendu de séance.
Remarque	L'IUFM de Rennes a réalisé un document vidéo de 50 minutes résumant la séance de deux heures.

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE EN PE1

Introduction

Contexte

La séance de formation s'est déroulée au cours du premier trimestre de première année, après 4 à 6 heures d'interventions avec le même formateur sur les aspects notionnels de la numération.

Les étudiants ont donc déjà eu l'occasion de se familiariser avec la conception de l'apprentissage qui sera développée et analysée au cours de cette séance.

Objectifs

objectifs mathématiques

- Déterminer une mesure par commensuration.
- Réinvestir les rationnels dans un contexte de mesure d'aires.

objectifs didactiques

Les situations illustrent les notions d'appropriation et de dévolution des tâches, de contrat didactique, de validation et de preuve.

objectifs méthodologiques

La séance met en évidence une certaine conception de l'apprentissage et développe une méthodologie, transférable, du travail par groupes.

L'accent est mis sur des techniques de gestion des différences de rapidité entre les groupes.

Structure pédagogique

Les trente étudiants sont répartis en dix groupes de trois personnes constitués par affinité.

Matériel

Deux rétroprojecteurs et deux tableaux de papier (paper-board) destinés à séparer très nettement les activités d'ordre méthodologique de celles d'ordre mathématique.

PHASE 1

Présentation des objectifs et des tâches associées

L'objectif d'ordre méthodologique

Familiarisation, en situation vécue, à une méthodologie conforme à une certaine conception de l'apprentissage.

(conception à laquelle adhère le formateur).

Il est écrit par un étudiant, sous la dictée de l'enseignant, sur l'un des tableaux de papier (il restera présent pendant toute la durée de la séance). Les tâches correspondantes ne sont pas précisées.

La tâche d'ordre mathématique

Mesurer des aires

Elle est écrite de la même façon sur l'autre tableau de papier mais, cette fois, ce sont les objectifs associés qui ne sont pas portés à la connaissance des étudiants.

PHASE 2

Appropriation de la tâche d'ordre mathématique

SITUATION S1 : *"la clé à molette"*

(voir annexe 1)

Matériel

- Une fiche par étudiant.

  La même fiche est également placée sur le rétroprojecteur (côté réservé aux mathématiques)
- Un grand tableau mural sur lequel un représentant par groupe viendra écrire sa proposition de résultat (un numéro de référence a préalablement été attribué à chaque groupe).
- Crayons, calque, ciseaux et compas à disposition

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

Il s'agit de calculer la mesure de l'aire de la surface S1 en prenant U1 comme unité.

Lorsque les trois personnes du groupe se seront mises d'accord, un représentant viendra écrire le résultat commun sur le tableau préparé à cet effet.

Comme prévu, le tableau se remplit rapidement du résultat 8, commun à tous les groupes.

Le professeur fait remarquer que tous les groupes ont produit un résultat, qu'il n'y a pas de divergences, mais que ce résultat reste sous la responsabilité des étudiants et qu'il ne saurait en aucun cas être cautionné par lui.

PHASE 3

3.1 Conceptions de l'apprentissage

1) Présentation rapide de trois conceptions de l'apprentissage avec le statut de l'erreur qui leur correspond

- la "tête vide"
- les "petites marches"
- le "constructivisme"

Matériel : un transparent *(annexe 7)*

2) Un lecteur, désigné, lit les phrases pointées par l'enseignant. Éventuellement, celui-ci les explicite. L'enseignant précise aux étudiants qu'il va tenter de mettre en oeuvre une conception de séance s'appuyant sur le "constructivisme" et qu'ils devraient donc rencontrer un ou des obstacles qui pourraient, éventuellement, les déstabiliser provisoirement pour une accommodation future à un niveau supérieur.

3.2 Grille d'analyse

Le professeur présente une "mini-grille" d'analyse d'une situation d'apprentissage.

Matériel : un transparent *(annexe 8)*

Le seul point développé est le type de validation recherché. Un lecteur désigné lit les phrases pointées par l'enseignant, celui-ci les explicite.

3.3 Le rôle de l'enseignant

Présentation d'un transparent qui définit le rôle de l'enseignant au cours d'une situation d'apprentissage.

Matériel : un transparent *(annexe 9)*

L'essentiel consiste à développer la notion de contrat. Il est ici explicitement passé entre l'étudiant et l'enseignant : chacun connait le rôle de l'autre.

Le transparent restera projeté durant toute la durée des recherches et l'enseignant pourra y faire référence.

PHASE 4

Appropriation de la tâche d'ordre mathématique (suite)

SITUATION S2 : *"la cocotte"*

(voir annexe 2)

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

> *Calculez la mesure de l'aire de la surface S2 en prenant U2 comme unité.*
>
> *Après accord dans le groupe, un délégué écrira le résultat dans le tableau préparé à cet effet.*

Cette fois, et cela avait été prévu, les propositions s'étalent dans le temps et l'enseignant gère cette différence de rythme en proposant aux plus rapides une situation S3 : "le sphinx" *(annexe 3)*. Le transparent "cocotte" reste cependant projeté durant toute la durée de cette phase.

Après cinq minutes, le dernier groupe écrit son résultat : 16. Celui-ci est encore commun à toute la classe. L'enseignant réitère alors les remarques déjà formulées au cours de la deuxième phase sur l'absence de caution de sa part quant aux résultats trouvés par les groupes.

Remarque : pour cette activité, on peut déjà constater que les procédures se différencient.

PHASE 5

Création d'un obstacle

L'objectif de cette phase est de créer un obstacle qui oblige les échanges au sein de chaque groupe et entre les groupes, obstacle qui qui exige la justification des procédures.

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

5.1 Première étape : les rationnels

Cette première étape vise une "réactivation" des connaissances mathématiques sur les rationnels.

La comparaison des unités U1 et U2 sert de prétexte à l'introduction du rationnel 1/4 : U2 = 1/4 x U1.

Puis, le maître soumet au groupe classe, sous la forme d'un transparent, des exercices issus de la brochure "La machine à partager" de l'I.R.E.M de Rouen et présentés sous forme de Q.C.M *(annexe 6)*.

Quelques difficultés surgiront, mais seront rapidement résolues.

5.2 Deuxième étape : l'obstacle

SITUATION S4 "le puzzle"

(voir annexe 4)

Déroulement prévu

- Analyse a priori des procédures

La situation est construite de telle sorte, qu'à vue d'oeil ou même par découpage, les étudiants proposent les résultats suivants :

C = 1/2 x U4

B = 3/2 x U4

D = (1 + 1/4) x U4

E = 1 x U4

A = 1/4 x U4

et ceci malgré la précision, donnée plus tardivement par l'enseignant, que le côté du carré de base est égal à 3 fois chaque côté de l'angle droit du triangle rectangle A.

- On espère alors que l'un des groupes d'étudiants proposera de sommer les mesures des aires pour trouver 4,5.

Cela devrait permettre de rejeter les propositions précédentes sans trop de difficultés, car $mes_{U4}(A + B + C + D + E) = 4$.

- Dans tous les cas, l'enseignant soumettra à la réflexion des élèves "l'unité manquante" (puzzle de FIBONACCI, nombres : 64 et 65, cf. annexe 5).

Les explications provisoires suivantes, en référence avec S4, seront alors fournies par le professeur :

- *en déplaçant les pièces d'un puzzle, celles-ci diminuent.*

ou

- *la formule donnant l'aire d'un rectangle, apprise à l'école, est fausse.*

ou

- *les calculs sur la somme de rationnels sont erronés.*

Cette mise en scène a plusieurs objectifs :

⇒ inciter les étudiants à calculer, si cela n'a pas été fait, la somme des mesures trouvées.

⇒ rendre les affirmations de l'enseignant susceptibles de critiques et développer alors la notion de preuve.

⇒ mettre les étudiants devant leur responsabilité d'invalider eux-mêmes leur proposition de solution.

⇒ gérer la différence de rapidité, en proposant aux groupes ayant terminé leur travail (y compris la préparation de l'exposé de leur méthode sur tableau de papier grand format) la résolution de "l'énigme de l'unité manquante". Le choix des nombres est différent de celui qui a été proposé au rétroprojecteur, ce qui rend la tâche d'autant plus difficile.

- Si la solution à la situation S4 tarde à venir dans certains groupes, l'enseignant imposera un brassage des groupes n'ayant rien découvert, puis, après un échange, un retour à la composition initiale.

Déroulement réel

Consignes

> *Il s'agit de calculer la mesure des aires associées aux surfaces A, B, C, D, E en prenant U4 comme unité.*
>
> *Lorsque les trois personnes du groupe se seront mises d'accord, un délégué viendra écrire les résultats du groupe dans le tableau préparé à cet effet.*

La dernière consigne :

> *Préparer sur papier grand format l'exposé de la procédure, face au grand groupe.*

est passée groupe après groupe en fonction de l'état d'avancement des travaux.

Il est également précisé que lors de l'exposé, c'est l'enseignant qui désignera l'intervenant, les deux autres lui servant d'assesseurs.

Chronique

Sept groupes sur les dix proposent la solution erronée, les autres ne proposent rien.

Les trois groupes n'ayant rien proposé sont successivement interrogés :

- un étudiant du premier constate, à vue d'oeil, que la demi-diagonale de U4 n'a pas pour mesure celle du côté de l'angle droit de A : il manque 2 mm.
- dans le second, les remarques sont similaires, l'étude ayant porté sur D et U4.
- un étudiant du troisième groupe propose de sommer les mesures des surfaces : on trouve 4,5.

Malgré cela, sans doute du au fait que l'enseignant introduise alors "l'unité manquante", le retrait, par les étudiants, de leurs propositions erronées est loin d'être immédiat.

Après une longue réflexion, sept groupes sur dix ont la solution :

A = 2/9 x U4
B = 4/3 x U4
C = 4/9 x U4
D = 10/9 x U4
E = 8/9 x U4

Remarque : les trois groupes n'ayant pas produit de solution sont les premiers à la découvrir...

Le brassage s'impose pour les trois groupes plus lents. L'échange dure 3 minutes, le retour à la composition initiale provoque la production de la solution. Celle-ci a été découverte par l'un des groupes recomposés.

L'affichage des procédures sur tableau de papier permet de constater leur extrême diversité (voir annexe 11).

PHASE 6

Retour sur la méthodologie

Objectif

Institutionnalisation locale de quelques notions méthodologiques et didactiques.

Matériel

Divers transparents.

Méthode

Questionnement collectif du groupe-classe.

Déroulement

6.1. Le rôle de l'adulte

On étudie ici le rôle de l'adulte au cours des situations d'apprentissage (transparent : *annexe 9*)

Est abordée la notion "d'histoire de la classe".

6.2. La mini-grille

La "mini-grille" d'analyse d'une situation d'apprentissage (transparent : *annexe 8*)

La séance est analysée en fonction des quatre points du document :

- la gestion du temps scolaire
- le degré de liberté de l'élève
- le rôle de l'erreur
- la validation

Les étudiants constatent que les critères d'efficacité pointés dans cette fiche ont été respectés.

6.3. La situation-problème

Il s'agit de la situation-problème d'apprentissage (transparent : *annexe 10*)

Les étapes sont les suivantes :

- L'enseignant développe, à travers le rôle des situations S1 et S2, la notion d'appropriation des tâches.

  Est abordée la fonction spécifique de la situation S3.
- La situation S4 permet de revenir sur la notion d'obstacle qui a été fortement ressentie (transparent : *annexe 7*).
- Le besoin éventuel d'une évaluation individuelle est évoqué.

6.4. Débat

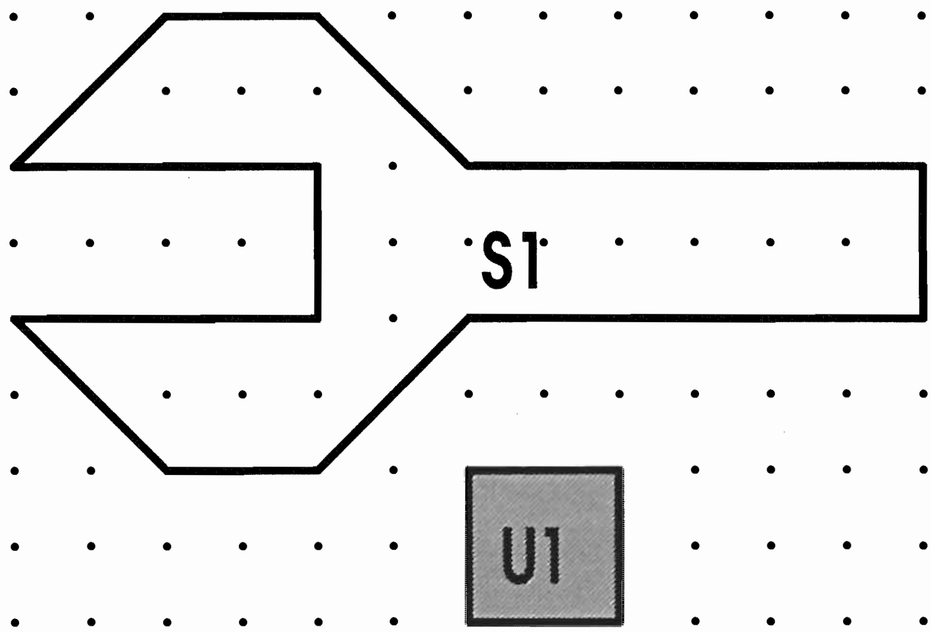
La séance se termine par une phase au cours de laquelle les étudiants se posent de nombreuses questions et amorcent spontanément des discussions.

Les interrogations sont parfois relayées par le formateur au niveau de toute la classe :

- sur la constitution des groupes : homogènes ou hétérogènes ?,
- sur l'évaluation de type diagnostic,
- sur la gestion des différents rythmes de travail,
- sur le rôle affectif de l'enseignant,
- ....

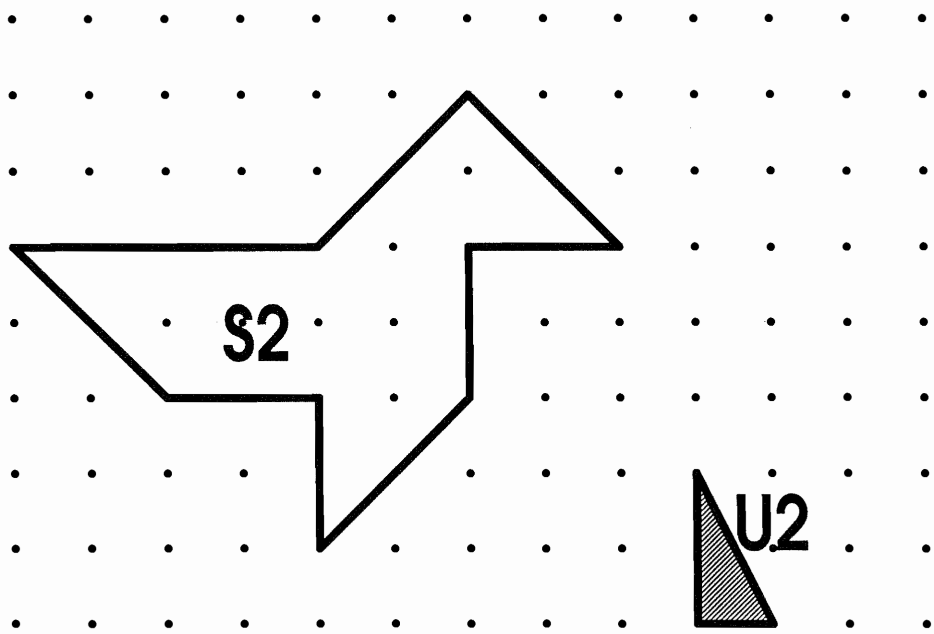
Annexe 1

La clé à molette



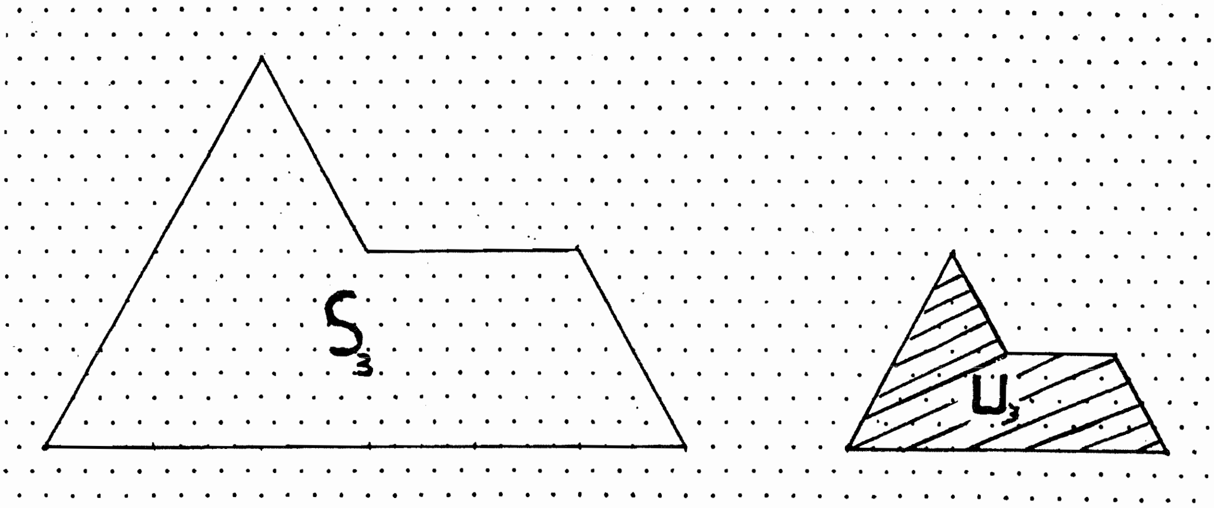
Annexe 2

La cocotte



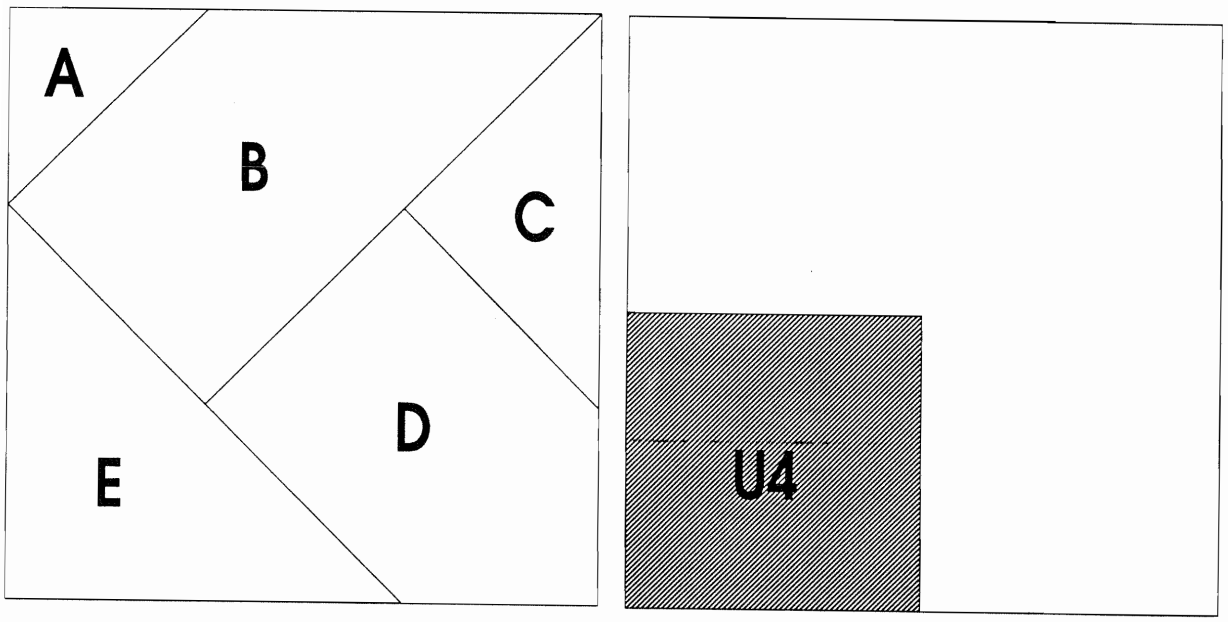
Annexe 3

Le Sphinx

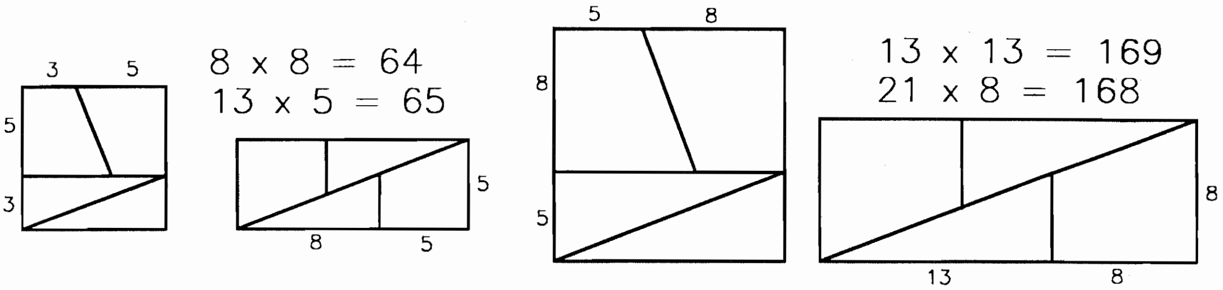


Annexe 4

Le puzzle



Annexe 5

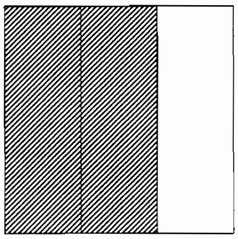
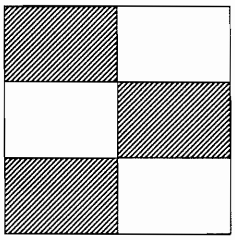
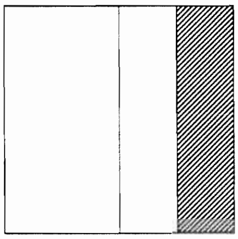
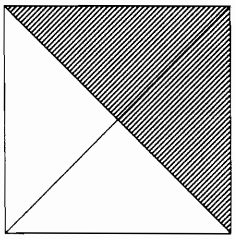
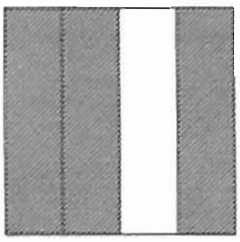
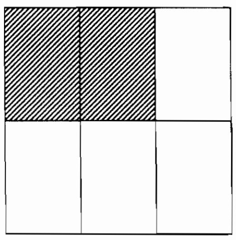
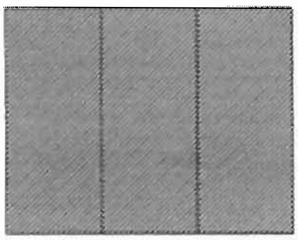
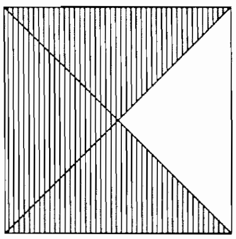


Annexe 6

(extrait de *"La machine à partager"*, publication de l'IREM de Rouen)

Voici la surface étalon. L'aire hachurée est 1.
A toi d'entourer les "bonnes fractions" qui indiquent l'aire hachurée.

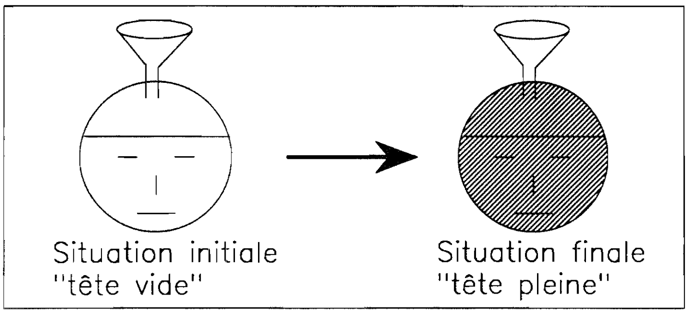
Attention aux pièges !

 *(a* $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$	 *(b* $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{4}$
 *(c* $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$	 *(d* $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$
 *(e* $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$	 *(f* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$
 *(g* $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{3}$	 *(h* $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

Annexe 7

CONCEPTIONS DE L'APPRENTISSAGE — **STATUTS DE L'ERREUR**

CONCEPTION DE LA TÊTE VIDE



limite : entre le sens du message communiqué et le sens que l'élève lui donne il y a une <u>énorme</u> différence.

L'ERREUR EST RÉVÉLATRICE D'UN DYSFONCTIONNEMENT.

ELLE EST SYNONYME <u>D'ÉCHEC</u> (POUR L'ÉLÈVE ET POUR LE PROFESSEUR)

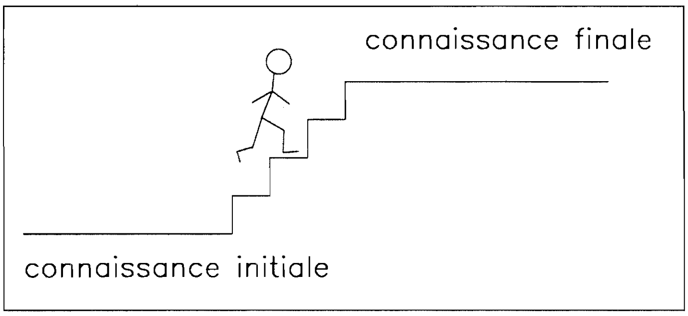
IL FAUT SUPPRIMER L'ERREUR A TOUT PRIX.

ON RÉEXPLIQUE.

SI L'ÉLÈVE FAIT TROP D'ERREURS, IL REDOUBLE.

AINSI IL AURA DE NOUVELLES RÉEXPLICATIONS

CONCEPTION DES PETITES MARCHES

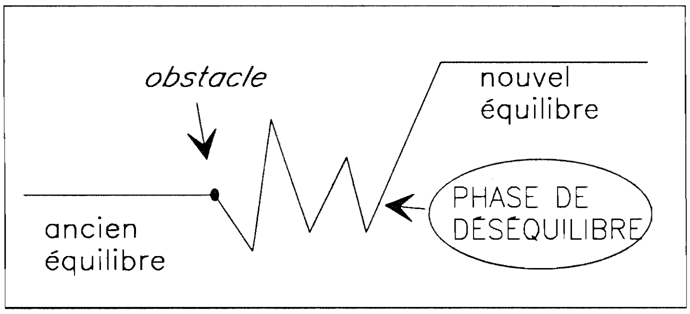


exemple : enseignement programmé (EAO, dérivé de la PAO)
limite : savoir faire les tâches intermédiaires ne signifie pas savoir faire <u>l'intégralité</u> de la tâche

DANS CETTE CONCEPTION, L'ERREUR DOIT ÊTRE ÉVITÉE ET SI ELLE SE PRODUIT, LES CONNAISSANCES DE L'ÉLÈVE NE SONT PAS REMISES EN CAUSE, MAIS C'EST LA PROGRESSION PROPOSÉE QUI NE CONVIENT PAS :

<u>LA MARCHE EST TROP HAUTE</u>.

LE CONSTRUCTIVISME



1) C'est en agissant qu'on apprend
2) L'élève est au centre de l'action pédagogique
3) Il faut qu'il y ait remise en cause des connaissances antérieures pour qu'il y ait progrès
4) Il est souvent indispensable de provoquer des conflits socio-cognitifs.

L'ERREUR N'EST PLUS <u>UNE FAUTE</u>.

QUAND UN ÉLÈVE APPREND, IL EST <u>NORMAL</u> QU'IL FASSE DES ERREURS.

S'IL NE FAIT PAS D'ERREUR, <u>IL N'APPREND PAS, IL SAIT DÉJÀ</u>.

L'ERREUR EST UN <u>MOYEN</u> POUR L'ENSEIGNANT DE MIEUX CONNAÎTRE <u>LES CONCEPTIONS INITIALES</u> DES ÉLÈVES.

L'ENSEIGNANT DOIT CONVAINCRE L'ÉLÈVE QUE <u>SES ERREURS L'INTÉRESSENT</u>.

Annexe 8

PRINCIPAUX INDICATEURS D'EFFICACITÉ D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE

(pour une première analyse rapide en cours de réalisation)

1. La gestion du temps scolaire

- temps d'intervention du maître (temps d'enseignement) : il devrait diminuer.
- **temps de recherche** de l'élève (temps d'apprentissage) : il devrait **augmenter**

2. Le degré de liberté de l'élève

- **l'enfant met-il en oeuvre ses propres procédures** ou se contente-t-il de suivre mécaniquement les procédures suggérées par le maître ?

  Il devrait y avoir davantage de procédures différenciées de la part des élèves.

3. Le rôle de l'erreur

- le maître permet-il son expression ou la sanctionne-t-elle ?

  Les **erreurs** devraient être **considérées positivement** par le maître (comme le reflet des représentations des élèves).

4. La validation

- le fait de l'enseignant ou une **rétroaction** de l'élève ?

  On devrait constater que la situation proposée est autovalidante ou que les procédures des enfants sont validées au cours d'une interaction entre pairs ou d'un débat scientifique entre différents groupes.

La validation ne devrait jamais être le fait de l'enseignant.

Annexe 9

RÔLE DE L'ADULTE AU COURS DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Au cours d'une séance

- Il peut ***rappeler*** aux enfants la ***tâche*** à accomplir
- Il peut leur ***montrer*** ce qu'ils ***savent déjà faire*** en réactivant, au besoin, leurs ***connaissances de niveau inférieur*** (connaissances mobilisables).
- Il peut dispenser des ***encouragements*** (rôle affectif).
- Il peut les ***aider*** à s'organiser, à ***organiser*** leurs recherches, à bien les présenter...
- Lorsque les opinions sont divergentes, il peut ***provoquer un débat*** et il doit alors l'animer.
- etc.

En début de séance

- Il doit rappeler ou faire ***rappeler le contenu de la séance précédente***.

En fin de séance

- Toute séance devrait se terminer par un retour rapide sur ce qui a été vécu et sur ***l'état des travaux en cours***, travaux qui vont éventuellement se poursuivre au cours d'une séance suivante *("histoire de la classe")*

Annexe 10

La situation-problème d'apprentissage (séquence d'apprentissage)

Construction de la situation d'apprentissage

- un objectif obstacle
- face à cet obstacle
  - ⇒ quelles sont les procédures initiales (P.I.) observées ?
    Évaluation diagnostic
  - ⇒ quelles sont les procédures finales (P.F.) caractéristiques du franchissement de l'obstacle (champ conceptuel) ? Le but à atteindre est d'obtenir la production des P.F. par l'apprenant.
  - ⇒ si P.I. = P.F. l'apprentissage a déjà eu lieu.
- une situation avec des variables de la situation : il faut repérer les variables didactiques (celles qui auront une influence sur les procédures des élèves) au cours d'une analyse a priori.

  Leurs modifications obligeront l'élève à passer de P.I. à P.F.

Différentes étapes

Remarque : une étape n'est pas une séance scolaire, une séquence d'apprentissage peut être constituée de plusieurs séances.

1. Appropriation

- la tâche doit être réussie avec les P.I. (connaissances anciennes de niveau inférieur)
- cela permettra à l'élève de bien intégrer la tâche à réaliser. Il est souhaitable que celle-ci soit auto-validante. On est ici au stade de la compréhension des consignes de travail.

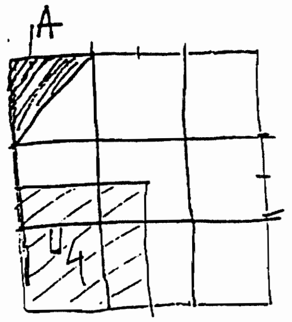
2. Apprentissage

- fixation des contraintes (les changements de valeur de certaines variables didactiques). Elles devraient obliger l'apprenant à ne plus utiliser ses P.I. (inopérantes maintenant) pour inventer les P.F.

3. Évaluation

- avec un dispositif semblable, mais un travail individuel : il faut pouvoir constater que dès la fixation des contraintes l'enfant utilise les P.F.

Annexe 11 (Travaux des groupes d'étudiants)



Aire totale = 4 U_4

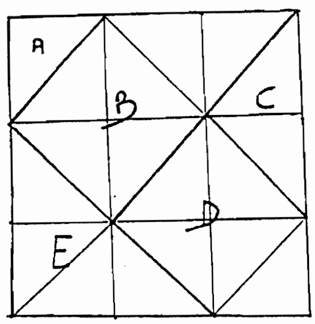
$A = \frac{1}{18} \times 4\,U_4 = \boxed{\frac{2}{9}}$ de U_4

$B = 6A \Rightarrow 6 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \boxed{\frac{4}{3}}$ de U_4

$C = 2A \Rightarrow 2 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$ de U_4

$D = 5A \Rightarrow 5 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{10}{9}}$ de U_4

$E = 4A \Rightarrow 4 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$ de U_4



$\begin{cases} \mathcal{A} = 4\,U_4 \\ \mathcal{A} = 18\,A \end{cases}$

donc $18\,A = 4\,U_4$

$\Longleftrightarrow A = \frac{4}{18}\,U_4 = \frac{2}{9}\,U_4$

On voit que • $B = 6\,A$ donc

$B = 6 \times \frac{2}{9}\,U_4 = \frac{4}{3}\,U_4$

De même • $C = 2\,A \Rightarrow C = \frac{4}{9}\,U_4$

• $D = 5A \Rightarrow D = \frac{10}{9}\,U_4$

• $E = 4\,A \Rightarrow E = \frac{8}{9}\,U_4$

$U_4 = 18\,a \longrightarrow a = \frac{U_4}{18}$

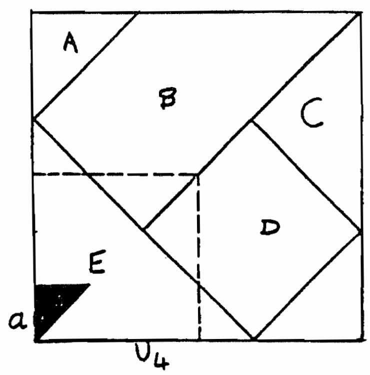
$A = 4\,a = \frac{4U_4}{18} = \frac{2}{9}\,U_4$

$B = 24\,a = \frac{24}{18}\,U_4 = \frac{12}{9}\,U_4$

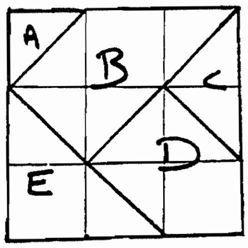
$C = 8\,a = \frac{8}{18}\,U_4 = \frac{4}{9}\,U_4$

$D = 20\,a = \frac{20}{18}\,U_4 = \frac{10}{9}\,U_4$

$E = 16\,a = \frac{16}{18}\,U_4 = \frac{8}{9}\,U_4$



Ⓘ Intérioriser l'unité.



- CHANGEMENT D'UNITÉ.

UNITÉ $= A = \frac{1}{18}$ (U) OR GRAND CARRÉ (U) $= 4\,u_4$

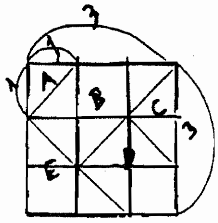
$\Rightarrow A = \frac{1}{18} \times 4u_4 = \frac{2}{9}$

$B = 6 u_4 = \frac{4}{3}$

$C = 2 u_4 = \frac{4}{9}$

$D = 5 \times \frac{1}{18} \times 4\,u_4 = \frac{20}{18}\,u_4 = \frac{10}{9}\,u_4$

$E = 4 \times \frac{1}{18} \times 4\,u_4 = \frac{16}{18}\,u_4 = \frac{8}{9}\,u_4$



- Carré divisé en 9 carreaux unitaires

$A = \frac{1}{2}$; $B = 3$

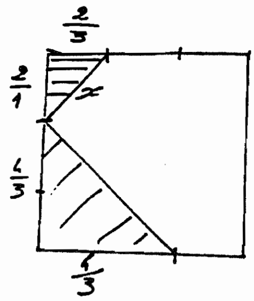
$C = 1$; $D = \frac{5}{2}$

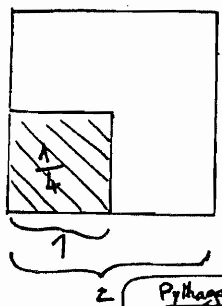
$E = 2$.

OR $u_4 = \frac{1}{4}$ du carré

donc si $\frac{1}{9}$ aire $\rightarrow \frac{1}{4}$ aire

$1 \rightarrow \underbrace{\frac{4}{9}\,u_4}_{\text{facteur de proportionnalité}}$





Pythagore

$x^2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2$

$x^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$A = (\frac{2}{3})^2 : 2 = \boxed{\frac{2}{9}\,u_4}$

$B = (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 : 2 = \frac{12}{9} = \boxed{\frac{4}{3}\,u_4}$

$C = (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 : 2 = \boxed{\frac{4}{9}\,u_4}$

$E = 2C = \boxed{\frac{8}{9}\,u_4}$

$D = (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 + (\frac{2}{3}) : 2 = \boxed{\frac{10}{9}\,u_4}$

1er $A + B + C + D + E = 4 U_4$

2e On exprime tout en fonction de C à l'aide du compas :

$B = 3C \qquad A = \frac{C}{2}$

$E = 2C \qquad D = 2C + A = 5/2\ C$

d'où $A + B + C + D + E = 9C$

$$9C = 4 U_4$$

$\to C = \frac{4}{9} U_4$

$\to B = 12/9\ U_4 = \frac{4}{3} U_4$

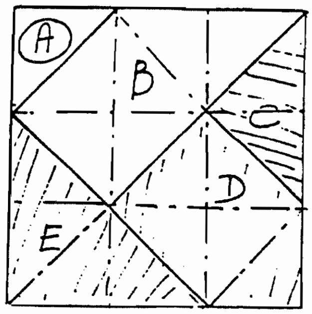
$\to E = 8/9\ U_4$

$\to A = 2/9\ U_4$

$\to D = 10/9\ U_4$

$4/9 + 4/3 + 8/9 + 2/9 + 10/9 = \frac{36}{9} = 4 U_4$

$A + B + C + D + E = 4 U_4$



Soit $A = \frac{1}{18}$ du grand carré

or le grand carré $= 4 U_4$

donc $A = \frac{1}{18}\ 4U_4 = \boxed{\frac{2}{9} U_4}$

Soit $B = 6A \Longrightarrow B = \frac{12}{9} U_4 = \boxed{\frac{4}{3} U_4}$

Soit $C = 2A \longrightarrow \boxed{C = \frac{4}{9} U_4}$

Soit $D = 5A \longrightarrow \boxed{D = \frac{10}{9} U_4}$

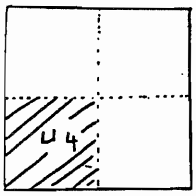
Soit $E = 4A \Longrightarrow \boxed{E = \frac{8}{9} U_4}$

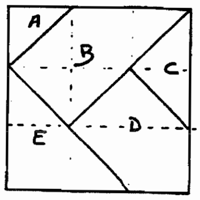
Soit $A + B + C + D + E = 4 U_4$

$\left(\frac{2}{9} + \frac{12}{9} + \frac{4}{9} + \frac{10}{9} + \frac{8}{9}\right) U_4 = 4 U_4$

$\frac{36}{9} U_4 = 4 U_4$

1 2





1°) Constat (après manipulation) les 2 figures ont la même aire

2°) On appelle a l'aire de la figure 1

$a = 4 U_4$

3°) On appelle a' l'aire de la figure 2

et donc $a' = a = 4 u_4$

4°) il s'agit de trouver une unité qui permette d'exprimer a'

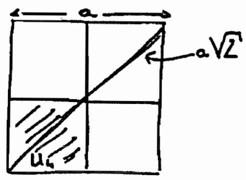
5°) On choisit A sur la figure 2 comme mesure : $A = \frac{1}{18} a'$

6°) On revient à l'égalité

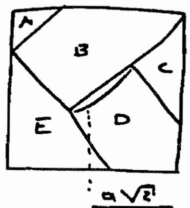
$a' = a = 4 U_4$ qui

permet d'écrire les surfaces des figures en fonction de U_4

$A = \frac{1}{18} a' = \frac{1}{18} 4 U_4 = \frac{2}{9} U_4$



$a^2 = 4 u_4$



$\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D : 1 carré de $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ de côté plus $\frac{1}{4}$ de ce même carré

Aire de ce carré

$\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{9} = \frac{8}{9} u_4$

$\underline{D} = \frac{8}{9} u_4 + \frac{2}{9} u_4 = \frac{10}{9} u_4$

$\underline{A} = \frac{1}{5} D = \frac{2}{9} u_4$

$\underline{E} = 4A = \frac{8}{9} u_4$

$\underline{C} = \frac{1}{2} E = \frac{4}{9} u_4$

$\underline{B} = 3C = \frac{12}{9} u_4 = \frac{4}{3} u_4$

Titre	Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1
Auteurs	Élaboration collective de l'atelier *"Grandeurs et mesure"* du stage d'Angers. Rédaction : Maryvonne LE BERRE, Catherine TAVEAU.
Date	Mars 1995
Type	Activités pour la formation initiale (PE1)
Contenu	Ce texte décrit deux séquences de formation de trois heures conçues pour des étudiants de PE1 sur le thème *"aires et périmètres"*.

UNE APPROCHE MINIMALE DE LA NOTION DE GRANDEUR EN PE1

Ce texte décrit deux séquences de formation de trois heures conçues pour des étudiants de PE1 sur le thème “aires et périmètres”. Le dispositif complet est le suivant :

- Un test diagnostique (30 minutes) utilisé pour constituer les groupes de travail de la première séance.
- Une première séquence de trois heures sur la notion d'aire.
- Une deuxième séquence de trois heures pour différencier aire-périmètre et une synthèse générale.
- Plus tard dans l'année, test final et analyse avec les étudiants de la démarche suivie.

Objectifs notionnels

Appréhender les notions de longueur et d'aire en tant que grandeurs mesurables, sur lesquelles on peut définir des opérations (comparaison, addition, multiplication par un scalaire), avant tout passage à la mesure.

Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants ont, sur le sujet, des connaissances et représentations tronquées, par exemple considèrent qu'il s'agit essentiellement pour eux, comme pour leurs futurs élèves, de connaître et d'appliquer des formules.

La plupart n'ont jamais entendu parler de "grandeurs". Or, nous estimons que, sous le chapeau "mesure", dans le libellé des nouveaux programmes, les PE devraient reconnaître qu'il s'agit de “grandeurs et mesure de ces grandeurs". Ils devraient savoir ce qu'on entend par exemple par "dissocier grandeur et forme, grandeur et nombre".

Objectifs didactiques

- Entraînement à l'analyse a priori ;
- Reconnaissance sur des exemples de la notion de variable didactique ;
- Notion de “théorème-élève”.

En cohérence avec la priorité donnée aux objectifs notionnels, les étudiants sont placés en situation d'élèves durant la plus grande partie des deux séances. Cependant, le dispositif lui-même est conçu pour permettre une transposition, ce qui suppose de prendre du temps, durant les séances, et/ou lors d'un rappel, pour expliciter et analyser certains choix, en particulier :

* repérage des connaissances et représentations initiales des étudiants ;
* travail différencié sur un même problème en jouant sur les variables de la tâche ;
* appui sur la mise en commun et le débat entre pairs.

1. Le test

(voir fiches 1 à 3, en annexe)

Fiche 1

Elle a pour unique fonction de permettre de lever les ambiguïtés éventuelles sur les termes employés.

Fiche 2

Elle vise à repérer différents niveaux de connaissance à propos de l'aire du triangle.

Inventaire des procédures prévues

- Blocage (il n'y a pas de hauteur pour le triangle B) et non-réponse.
- Jugement à vue : *"A est plus grand"*.
- Mesurage des bases et hauteurs "prototypiques" et calcul. Même sans erreur de calcul, les réponses pourront être : aires *égales*, *presque égales*, ou *inégales*.
- Mesurage et calcul en prenant la largeur de la bande comme hauteur pour les deux triangles.
- Raisonnement du type *"même base et même hauteur pour les deux triangles"*.
- Utilisation de surfaces intermédiaires (parallélogrammes, rectangles,...).
- Découpage d'un triangle pour le comparer à l'autre.

Fiche 3

Tirée d'une évaluation nationale à l'entrée en sixième, elle sert à la détection éventuelle d'un théorème-élève très persistant.

Inventaire des procédures prévues

Pour l'aire :

- comptage des carreaux.

Pour le périmètre :

- jugement à vue (donc sur l'aire).
- mise en oeuvre du théorème-élève : *"si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand"*.
- comptage des "carreaux du bord".
- comptage des côtés des carreaux du bord.
- mesurage et calcul.
- décomposition des deux périmètres en deux parties : une "frontière commune" et deux parties de même longueur.

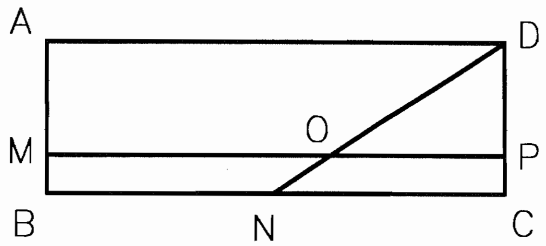
2. Première séance

Comparaison d'aires

Cette première séance a pour objectif la distinction entre surface, aire, mesure de l'aire, objectif qui peut être annoncé dès le départ.

Elle doit faire émerger des procédures de comparaison d'aires ne faisant pas appel à la mesure, d'autres faisant intervenir la mesure soit d'un point de vue unidimensionnel, soit d'un point de vue bidimensionnel.

Un problème



MB est égale au quart de AB, N est le milieu de [BC]. Les surfaces MBNO et ODP ont-elles la même aire ?

Analyse a priori des procédures de résolution

1°) Raisonnement par différence

Pour démontrer l'égalité des aires, il suffit de démontrer celle des aires du rectangle MBCP et du triangle NCD.

Celle-ci peut être obtenue de différentes façons :

<u>Algébriquement</u> : en appelant a et b les mesures des côtés du rectangle ABCD, on obtient facilement qu'elles sont toutes deux égales à ab/4.

<u>Géométriquement</u> : le rectangle est pavable par quatre rectangles superposables à MBCP, et par quatre triangles superposables à NCD.

<u>Numériquement</u> : si l'énoncé ne donne aucune information sur les longueurs, cela suppose un mesurage, donc en principe une incertitude. En fait il peut y avoir deux démarches assez différentes :

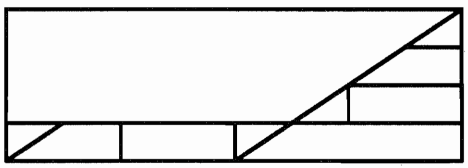
1) mesurage des données "utiles au calcul", longueur et largeur du rectangle, base et hauteur du triangle, sans tenir compte des contraintes de l'énoncé.

2) prise en compte des contraintes de l'énoncé soit pour guider, soit pour corriger le mesurage. Par exemple, on peut mesurer AB et en déduire BM, ou mesurer les deux en "s'arrangeant" pour que l'un soit quatre fois l'autre, et c'est un arrangement qui peut rester implicite. La prise en compte explicite des relations entre longueurs rapproche la procédure numérique de la procédure algébrique, bien qu'elle ne porte pas sur le même objet.

2°) Comparaison directe

__Algébriquement__ : cela suppose de déterminer les longueurs MO et OP (respectivement 5a/8 et 3a/8) en utilisant le théorème de Thalès ou une relation de similitude, par exemple, puis de conduire un calcul algébrique relativement lourd pour des PE (on trouve 9ab/64).

__Géométriquement__ : pavage des deux surfaces avec une unité commune. Découpage d'une surface pour paver l'autre, par exemple :



__Numériquement__ : après mesurage. Si les mesures sont des nombres entiers, l'incertitude liée au mesurage risque évidemment d'être complètement évacuée.

Composition des groupes et choix des énoncés

L'hétérogénéité des étudiants peut être maximale devant un tel problème. Il nous semble capital que chacun puisse travailler à son niveau. La fiche 2 du test (comparaison des aires de deux triangles) permet de prévoir au moins deux types de difficultés :

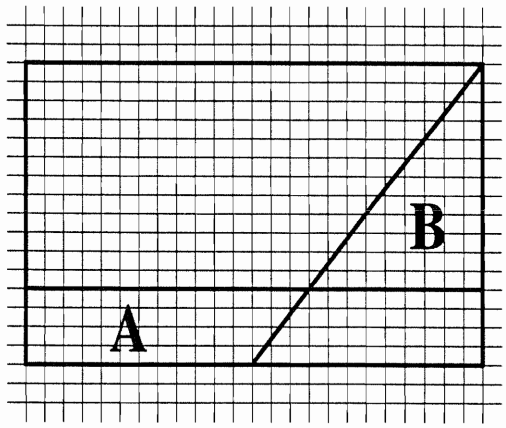
1. blocage, hésitation à "bricoler", en l'absence de connaissances suffisamment sûres.
2. recours systématique au mesurage de longueurs, et calcul, sans analyse de la figure.

Il nous parait judicieux de constituer des groupes "homogènes" par rapport à ces comportements prévus, en proposant des versions différentes du problème.

1ère version

Pour ceux qui ont produit des réponses erronées ou n'ont pas répondu à la fiche 2, il paraît important dans un premier temps de faciliter la mobilisation des procédures par découpage-recollement ou pavage, d'où le choix d'un support quadrillé, et de valeurs "sympathiques" pour a, b et a/b.

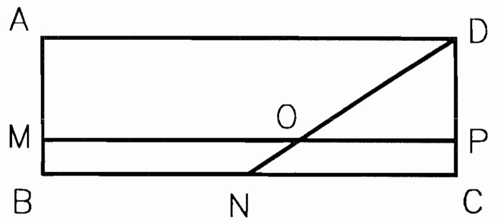
Le papier quadrillé permet également de communiquer graphiquement les données.



Les aires des surfaces A et B sont-elles égales ?

2ème version

Pour ceux qui privilégient mesurage des longueurs et calcul, le choix vise à disqualifier (relativement) cette méthode, au profit de méthodes géométriques, d'où le choix du papier blanc avec des mesures en cm peu commodes.

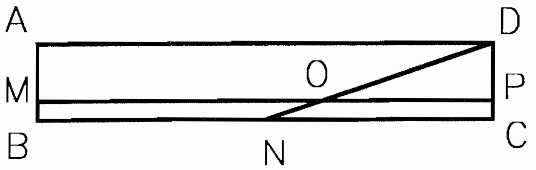


AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

3ème version

Restent ceux qui ont répondu de façon satisfaisante au test en utilisant une des procédures suivantes : *"même hauteur, même base", "utilisation de surfaces intermédiaires", "découpage d'un triangle et comparaison à l'autre"*.

L'objectif principal est de faire émerger la diversité des procédures et de voir que ce problème peut se résoudre à différents niveaux. Il n'est pas certain, cependant que le raisonnement par différence apparaisse. On a opté pour un rectangle très allongé, une forme peu commode, dont on espère que cela favorise une discussion sur la validité du pavage.



AB = 4MB; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire?

Consigne

Tous les groupes ont la même consigne :

1. *Répondre à la question.*
2. *Chercher tous les moyens possibles pour répondre à la question.*
3. *Comment un élève de cycle 3 pourrait-il procéder pour répondre à la question ? (en modifiant au besoin certaines dimensions ou le support papier...).*

La question 2 et surtout la question 3 amènent à discuter les contraintes liées à certains choix des variables. Elles permettent aussi de gérer l'hétérogénéité du groupe (pour le niveau comme pour la vitesse de travail) tout en préparant le travail commun.

Déroulement de la séance

1) Constitution des groupes et distribution des fiches de travail . La consigne commune est écrite au tableau. Les étudiants sont avertis qu'au bout d'une heure, chaque groupe devra avoir rédigé une affiche résumant les procédures de résolution identifiées (réponse à la question 2 de la consigne).

2) Mise en commun

- inventaire et analyse des procédures de résolution. Traitement des erreurs éventuelles.
- Quelles sont, parmi les procédures proposées, celles qui utilisent, implicitement ou non, une mesure ? celles qui utilisent la mesure de longueurs ?
- Ébauche de classification et de hiérarchisation des procédures.
- Identification des valeurs des variables pour chaque figure et de leurs effets.

3) Travail, individuel ou par groupes, sur des exercices de renforcement (annexe 2).

3. Deuxième séance

Différenciation aire/périmètre. Synthèse sur la notion de grandeur géométrique. Approche des problèmes d'enseignement

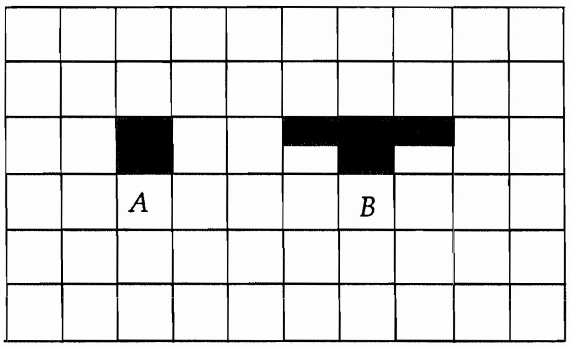
La deuxième séance doit permettre d'aborder la notion plus générale de grandeur, et d'en montrer la pertinence pour l'enseignement. Il s'agit tout d'abord de préciser les relations entre aire et périmètre, deux grandeurs différentes pour une même surface, et de rectifier une erreur courante, qui a pu apparaître lors du test initial. Ce dernier objectif ne peut évidemment être annoncé.

I. - Différenciation aire - périmètre

Le problème

On voudrait trouver une surface dont l'aire est plus petite que celle de A et dont le périmètre est plus grand que celui de B.

Est-ce possible ?



Phase 1
Pari initial, puis travail en groupes homogènes.

Le problème est écrit au tableau. Les étudiants ont cinq minutes pour comprendre la consigne et se prononcer, sans rien écrire.

Ils sont invités à donner leur réponse spontanément. Le formateur fait l'appel des réponses et les comptabilise : *c'est possible, c'est impossible*, autre réponse,... en faisant expliciter la position de ceux qui se placent dans la troisième catégorie *(je ne peux pas savoir sans essayer, ça dépend de la figure, je n'ai aucune idée, etc.).*

Les étudiants se regroupent alors suivant leur réponse, et la consigne suivante est donnée :

1) **Réponse** : *C'est possible*

   Consigne : *Justifiez. Pouvez-vous modifier une figure, ou les deux, de façon que la réponse soit : "c'est impossible" ?*

2) **Réponse** : *C'est impossible*

   Consigne : *Justifiez. Pouvez-vous modifier une figure, ou les deux, de façon que la réponse soit : "c'est possible" ?*

3) **Réponse** : *Je ne sais pas*

   Consigne : *Pouvez-vous modifier une figure, ou les deux, de façon que :*
   1°) la réponse soit : "c'est possible" ?
   2°) la réponse soit : "c'est impossible"?

Si certains groupes n'arrivent pas à la conclusion *"c'est toujours possible théoriquement"*, on intercale la phase 1bis.

Phase 1bis
Travail en groupes hétérogènes

(on mixe rapidement les groupes précédents).

Consigne

Il s'agit de savoir si le problème posé a ou non une solution, d'abord pour les figures données, puis plus généralement dans tous les cas de figure.

Vous devez vous mettre d'accord sur une réponse commune.

Remarques

- En posant la question du "toujours possible", on se situe implicitement dans une théorie générale qui va nécessiter d'envisager des figures idéales, des cas limites, et l'emploi du raisonnement déductif. Cette question peut rester ouverte, mais son statut de question théorique doit être pointé.
- Un certain nombre de procédures (pavage, découpage de surfaces) développées, et même encouragées, dans la première séquence, montrent ici leurs limites. Les moyens de validation changent en même temps que le statut de la question. C'est également à noter.
- Cette question très ouverte permet de relancer ou maintenir la recherche de chacun, en évitant que les uns ne convainquent trop vite les autres.

Phase 2
Conclusion

Un seul exemple suffisant à invalider la réponse *"c'est impossible "*, la phase 1bis a, s'il en était encore besoin, fait disparaître cette réponse. Il peut être utile de revenir dans un premier temps sur les réponses spontanées et sur les raisons qui ont fait changer d'avis.

L'objectif de l'activité est ensuite énoncé. Il s'agissait de pointer l'existence d'un "théorème-élève" résistant, et de le démonter :

> ***Contrairement à une "intuition" très répandue, aire et périmètre d'une surface ne varient pas toujours dans le même sens.***

On peut alors entamer une discussion puis apporter des éléments d'analyse didactique sur l'origine de cette erreur en s'appuyant sur les travaux de M. J. Perrin.

II. - Synthèse sur les notions mathématiques abordées

Elle porte sur les points suivants :

- Notion de grandeur, grandeur mesurable ;
- La mesure d'une grandeur suppose le choix d'une unité ou plutôt d'un système d'unités ;
- La mesure d'aires comme produit de mesures de longueurs.

III. - Approche des problèmes d'enseignement

Certaines des hypothèses avancées par M. J. PERRIN dans sa thèse sont alors présentées et défendues :

"Les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique. Un certain nombre de difficultés bien connues des élèves sont liées au traitement des problèmes d'aire soit du point de vue des surfaces (considérées comme parties du plan), soit du point de vue des nombres, sans établir de relation entre ces points de vue. D'autre part, une identification trop précoce des grandeurs aux nombres semble favoriser l'amalgame entre les différentes grandeurs, en particulier aires et longueurs.... Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permettrait aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les cadres numérique et géométrique. "

Ces hypothèses conduisent à développer des activités permettant de dissocier les grandeurs d'une part des objets (segments, lignes brisées surfaces), d'autre part des nombres, avant d'aborder la mesure et les relations entre ces mesures.

L'exposé s'appuie sur des exemples d'activités et d'exercices (construire une figure de même périmètre qu'une figure donnée sans règle graduée...)

Variantes et prolongements possibles

- Faire analyser des erreurs d'élèves (on peut utiliser par exemple des évaluations début 6ème), avant d'introduire des éléments de l'analyse de M. J. Perrin.
- A partir de manuels scolaires et d'autres documents, chercher ou analyser des activités pour les élèves permettant de différencier aire et périmètre, ou de travailler sur aire ou longueur, sans utiliser la mesure.

Bibliographie

Brousseau G., ***Problèmes de mesurage en CM***, Grand N n° 50, 1991-1992.

Combier G., Philippon M. ***Aire et périmètre***, IREM Lyon, 1994 (Activités pour la sixième, accessible aux étudiants).

Douady R., M. J. Perrin ***Aires de surfaces planes***, petit x n° 6 et n° 8, 1984-1985, IREM de Grenoble.

Douady R., M. J. Perrin ***Aires de surfaces planes en CM et 6ème*** Grand N, n° 39-40, 1986.

Douady R., M. J. Perrin ***Mesures des longueurs et des aires*** brochure n° 48, IREM Paris VII.

Dubois C., M. Fénichel, M. Pauvert ***Se former pour enseigner les mathématiques***, A.Colin.

Galion thèmes, ***Démontrer avec des aires*** 1993, Lyon.

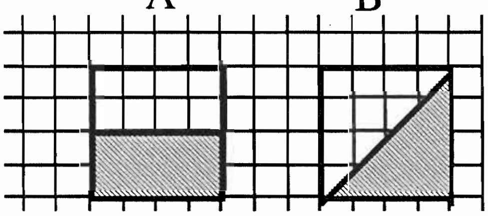
Rouche N. ***Le sens de la mesure*** Didier-Hatier.

Annexe 1 - Fiche 1

Pour chaque situation, entourez le numéro de la bonne réponse :

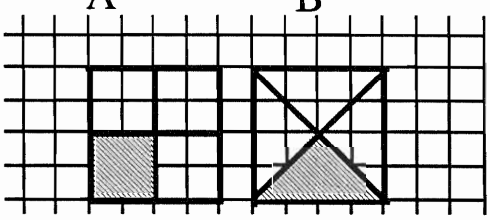
1. L'aire de la surface hachurée A est plus grande que celle de B
2. L'aire de la surface hachurée A est égale à celle de B
3. L'aire de la surface hachurée A est plus petite que celle de B

A B



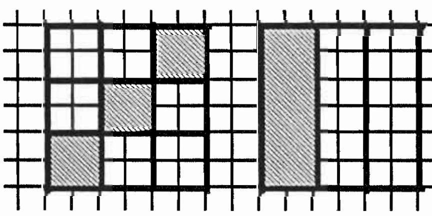
1 2 3

A B

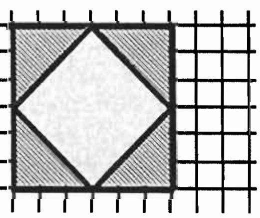


1 2 3

A B



1 2 3

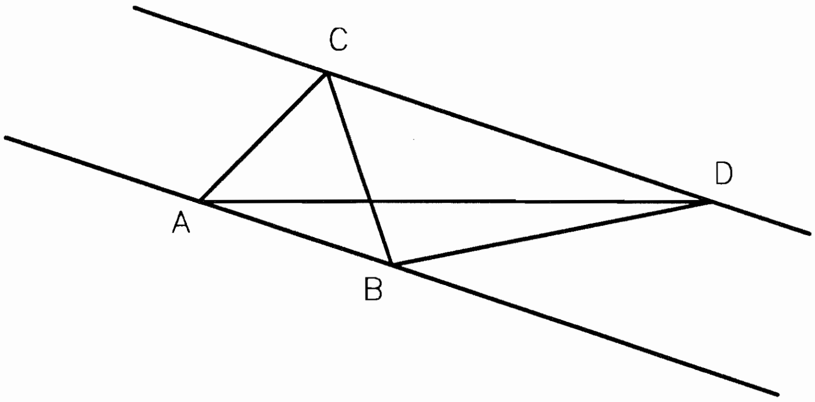


1 2 3

Surface A = surface hachurée

Surface B = surface pointillée

Annexe 1 - Fiche 2



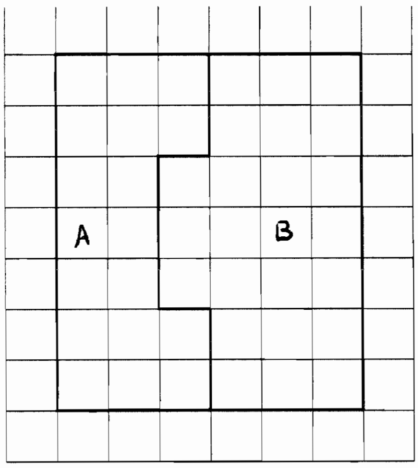
Les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

Entourez le numéro de la bonne réponse :

1. L'aire du triangle ABC est plus grande que celle du triangle ABD
2. L'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABD
3. L'aire du triangle ABC est plus petite que celle du triangle ABD

Expliquez rapidement comment vous avez procédé.

Annexe 1 - Fiche 3



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a) L'aire de la parcelle A est la plus grande — Les deux parcelles ont la même aire — L'aire de la parcelle B est la plus grande

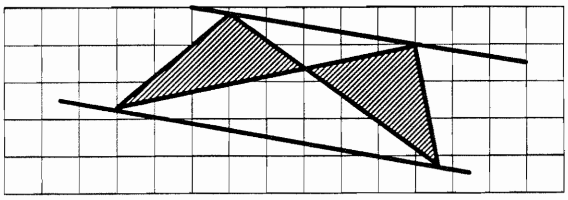
Explique ton choix :

b) Le périmètre de la parcelle A est le plus grand — Les deux parcelles ont le même périmètre — Le périmètre de la parcelle B est le plus grand

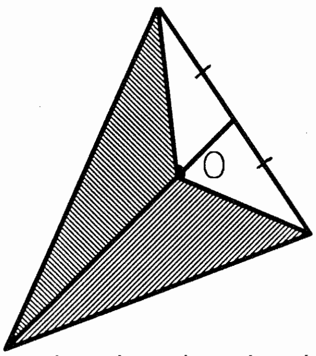
Explique ton choix :

Annexe 2

D'après *"Cinq sur cinq"* 6ème et 5ème Hachette, 1994-1995.

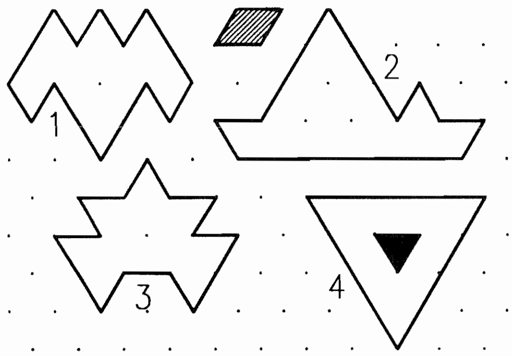


Comparer les aires des triangles hachurés



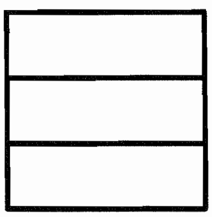
a) Comparer les aires des triangles hachurés. *(S'intéresser aux triangles non hachurés).*

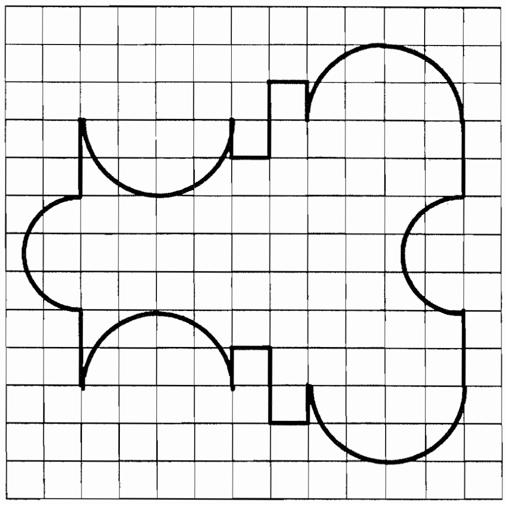
b) Où placer le point O de façon que le grand triangle soit partagé en quatre triangles de même aire?



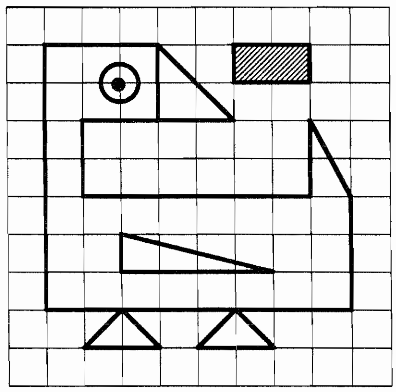
Déterminer l'aire de chacune des figures ci-dessus en prenant le losange hachuré comme unité d'aire.

On partage un carré en trois rectangles superposables. Quel est le périmètre du carré et de chaque rectangle si l'aire de chacun d'eux est égale à 12 cm^2?

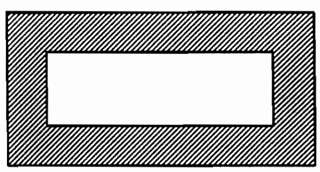




Construire un rectangle ayant la même aire que la figure ci-dessus. (Les arcs de cercle sont des demi-cercles.)



Jeu de l'oie : déterminer l'aire de l'"oie" en prenant le rectangle hachuré comme unité d'aire.



Calculer l'aire de la bande hachurée sachant qu'elle a 1 m de largeur et que le périmètre du grand rectangle est 26 m.

Partie 5

Sujets de concours pour le recrutement des P.E.

Le choix d'un tel thème lors du stage national d'Angers s'imposait à nous pour les raisons suivantes.

Les IUFM préparent les étudiants à passer un concours qui ouvre la porte à un métier. Les mathématiques de ce type de formation ont leur spécificité : elles ne peuvent pas se réduire à une mise à niveau sur les connaissances qui doivent être acquises en fin de collège et à des discours de pédagogie générale.

Pour les formateurs, anciens et nouveaux, une réflexion sur les sujets de concours est à la fois une fin (préparer des sujets) mais aussi un moyen de confronter leurs approches et de mieux expliciter la spécificité de leur travail de préparation.

Après un exposé relatif à la nature des sujets proposés aux concours externes ces dernières années, nous avons cherché à mieux cerner les objectifs de formation professionnelle des élèves de première année et à les traduire dans une épreuve de concours. La question alors posée est la suivante : ***comment articuler les deux volets, mathématique et didactique, de l'épreuve du concours ?***

Nous avons retravaillé à partir d'un texte proposé par Joël BRIAND. Ce texte est déjà un sujet élaboré au LADIST de Bordeaux dans le cadre d'un séminaire de travail portant sur ce thème de l'articulation. Ce texte est construit à partir d'un récit de séance de classe se déroulant à l'Ecole Jules Michelet.

Dans cette partie figurent successivement l'article de Marie-Lise PELTIER :

> ***Quelques éléments d'analyse des sujets de concours de recrutement des professeurs d'école***

et un article collectif qui résulte du travail du groupe au cours du stage :

> ***Analyse d'un sujet de concours***

On y trouvera le sujet original, les commentaires qu'il a suscités et le sujet modifié à la suite de la discussion.

Un grand merci à Marcelle PAUVERT pour le travail de transcription.

Titre	Quelques éléments d'analyse des sujets de concours de recrutement des professeurs d'école
Auteur	Marie-Lise PELTIER
Origine	Extrait de la thèse de l'auteur
Contenu	Présentation de constats consécutifs à l'étude des volets 1 et 2 des sujets de concours de 1992, 1993, 1994.

QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES SUJETS DE CONCOURS DE RECRUTEMENT DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

Suite à une étude[1] sur les sujets de concours proposés dans les différentes académies en 1992, 1993 et 1994, nous pouvons faire quelques constats sur :

- un éventuel consensus sur la définition des "mathématiques du professeur d'école",
- la nature des savoirs considérés comme savoirs professionnels,
- les rapports entre mathématiques et didactiques des mathématiques,
- les compétences attendues des candidats de manière majoritaire pour devenir professeur d'école.

Rappelons que le concours de recrutement de professeurs des écoles est régi par des textes officiels[2], et qu'un certain nombre de contraintes pèsent sur le système, de manière relativement différente d'une académie à l'autre, notamment la composition des

- commissions chargées de l'élaboration du sujet,
- commissions de choix de sujets,
- jurys de correction.

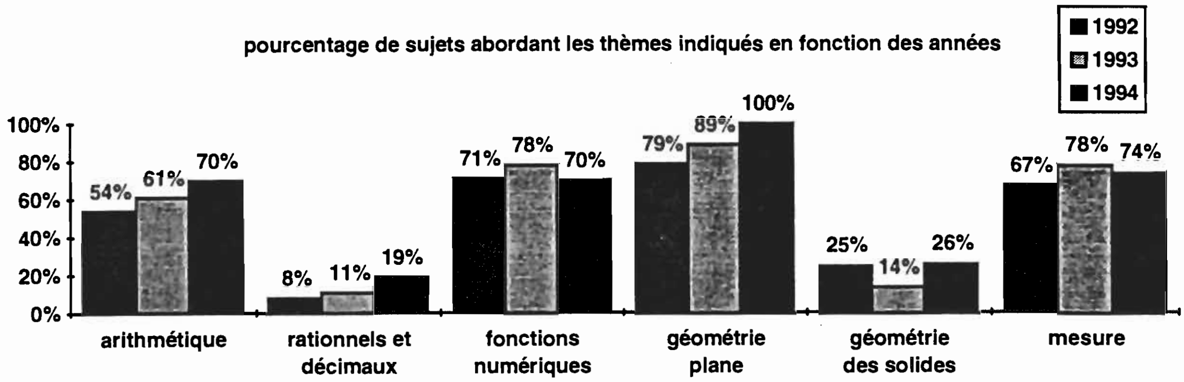
Les sujets sont donc souvent des compromis entre divers points de vue, mais il n'en reste pas moins qu'ils sont "une vitrine" de la formation des enseignants du premier degré et qu'ils ont une incidence non négligeable sur les formations ultérieures.

[1] ***La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : "entre conjoncture et éternité"*** *Thèse de Marie-Lise PELTIER, Paris décembre 95.*

[2] *Pour les trois années considérées, il s'agit du texte du B.O.E.N. du 30 janvier 1992.*

Constats concernant le volet disciplinaire

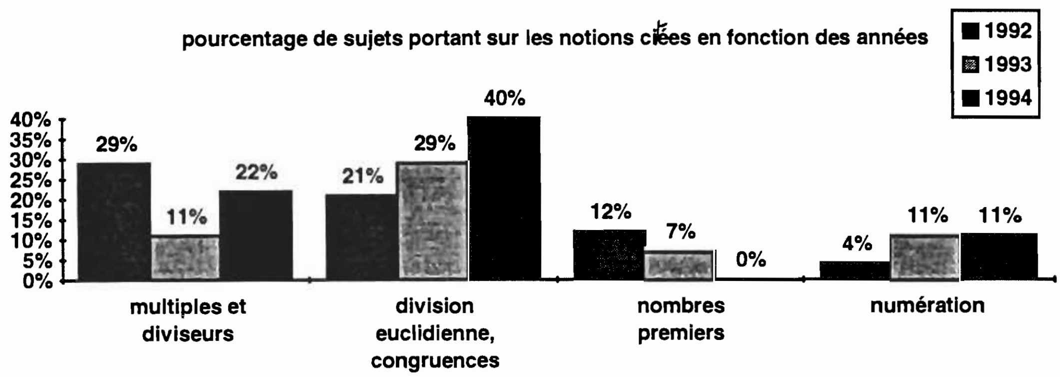
1- Thèmes mathématiques sur lesquels portent les exercices



Nous constatons une grande stabilité dans les choix faits par les auteurs de sujets sur les trois années concernées.

Précisons les questions abordées dans les différents thèmes ainsi définis.

Arithmétique



Nous notons une augmentation du nombre de sujets proposant des questions relatives à la division euclidienne, de même qu'une augmentation du nombre de problèmes du premier degré dans **N** (30 à 40 % des exercices nécessitent une mise en équation du problème), nous trouvons par ailleurs peu de problèmes de dénombrement.

Les candidats sont amenés à :

- utiliser des lettres pour désigner des nombres,
- mettre en équation un problème,
- résoudre des équations ou inéquations dans **N.**

  (Deux cas se présentent : ou bien il est possible de conduire la résolution dans **R**, et il suffit ensuite de s'interroger sur la validité des solutions trouvées, ou bien il s'agit d'équations ou inéquations conduisant à des indéterminations dans **R**, et dans ce cas, le candidat doit faire une étude exhaustive des différents cas en utilisant des propriétés arithmétiques).

Malgré la possibilité offerte par les textes officiels de ne pas scinder complètement le disciplinaire du pédagogique, les sujets ne demandent pas aux candidats de recul didactique dans la majorité des cas.

Rationnels et décimaux

Nous relevons très peu d'exercices spécifiquement centrés sur ce thème. Dans ces rares cas, il s'agit soit de questions de calcul numérique par exemple sur des fractions, soit des questions d'appartenance aux divers ensembles de nombres.

Fonctions numériques et proportionnalité

Beaucoup de sujets proposent des questions sur ce thème.

Nous pouvons les répartir en deux catégories :

- ceux pour lesquels la mise en évidence du modèle fonctionnel sous-jacent au problème "concret" qui est posé n'est pas explicitement demandée, il s'agit alors essentiellement d'exercices de simples calculs numériques ;
- ceux qui demandent aux candidats de proposer une modélisation fonctionnelle d'un problème. Les contextes sont alors souvent choisis dans la vie sociale (questions relatives à des tarifs divers, à des pourcentages d'augmentation et de réduction), ou encore, de plus en plus souvent, ce sont les problèmes de géométrie ou de mesure qui servent de support à l'étude de fonctions.

Les candidats sont alors amenés à repérer ce qui, dans la situation proposée, peut avoir le statut de variable et ce qui est fixé, à mettre en évidence les liens entre ces variables, éventuellement à repérer ce qui, dans certaines conditions, peut avoir le statut d'inconnue.

Même si plusieurs cadres de résolution sont envisagés dans le problème, le sujet ne conduit pas le candidat à mener une réflexion sur la pertinence des uns ou des autres ou sur l'intérêt d'en changer.

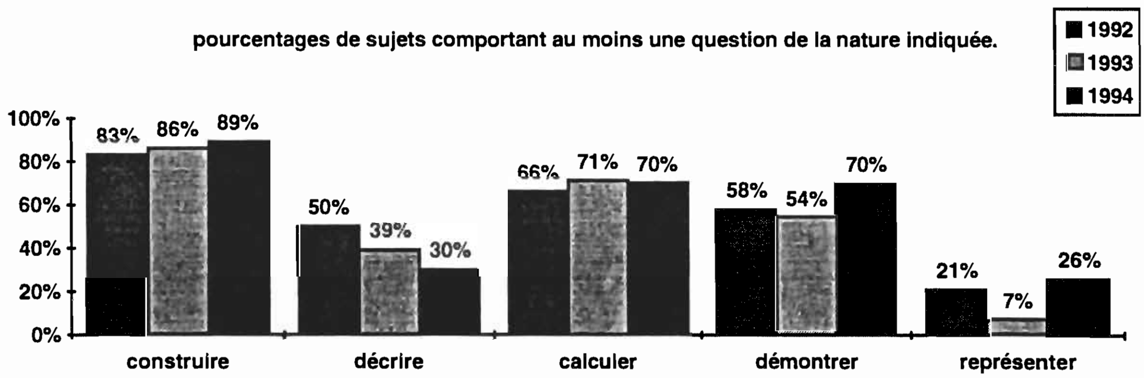
Les fonctions intervenant dans ces problèmes sont presque toujours des fonctions linéaires, affines ou affines par intervalles.

Aucun sujet, à une ou deux exceptions près, ne propose une étude de fonction décontextualisée.

Dans ces problèmes relatifs aux fonctions numériques, les mathématiques apparaissent sous leur aspect outil de modélisation du réel.

Géométrie

Dans un premier temps nous comptabilisons les sujets en fonction de la tâche qu'ils requièrent de la part des candidats.

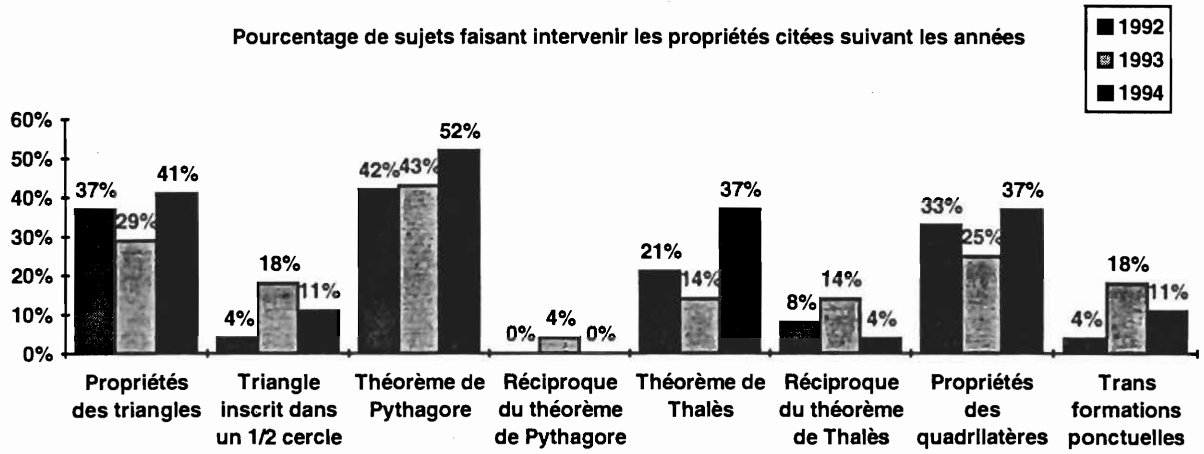


Malgré une certaine constance dans les choix, nous notons cependant quelques évolutions :

- les sujets donnent de moins en moins souvent des figures à reproduire, que ce soit à même échelle ou à échelle différente, mais de plus en plus souvent des figures à construire soit à partir d'un programme de construction, soit en respectant diverses contraintes, soit à partir de représentations en perspective cavalière (patrons ou sections) d'un solide.
- ils donnent également de moins en moins souvent des descriptions ou des programmes de construction à rédiger.

- davantage de sujets proposent quelques questions relatives à la géométrie dans l'espace : construction de patrons ou de sections, construction de vues, patrons à compléter.
- davantage de sujets proposent des exercices relativement traditionnels demandant aux candidats de faire de petites démonstrations déductives (proches d'exercices de quatrième ou troisième des collèges)

Les **théorèmes** concernés par les questions sont les suivants :



Ce sont essentiellement les théorèmes directs qui sont utilisés (sauf en ce qui concerne la reconnaissance de quadrilatères particuliers)

Nous notons :

- peu de recherche de conditions nécessaires et suffisantes,
- peu de recherche de contre-exemples,
- peu de cas où il s'agit de démontrer qu'une propriété n'est pas vérifiée.

En général il s'agit de démontrer une propriété qui est donnée dans la question, ou qui s'observe sur une figure.

Aucune question ne porte sur le statut de la démonstration, ou même simplement sur la mise en évidence de différents niveaux possibles de preuve.

Mesure

Les questions portent essentiellement sur les mesures de longueurs en utilisant des théorèmes de géométrie, essentiellement Théorème de Pythagore ou de Thalès.

Les questions relatives aux aires et aux volumes sont relativement proches de questions du Cours Moyen nécessitant essentiellement des applications de formules.

Le nombre de questions relatives aux angles est en légère augmentation.

Les questions relatives à la mesure conduisent à des mises en équations dans 20 à 25 % des cas chaque année, à des constructions de graphiques dans 10 % des cas.

Calcul algébrique

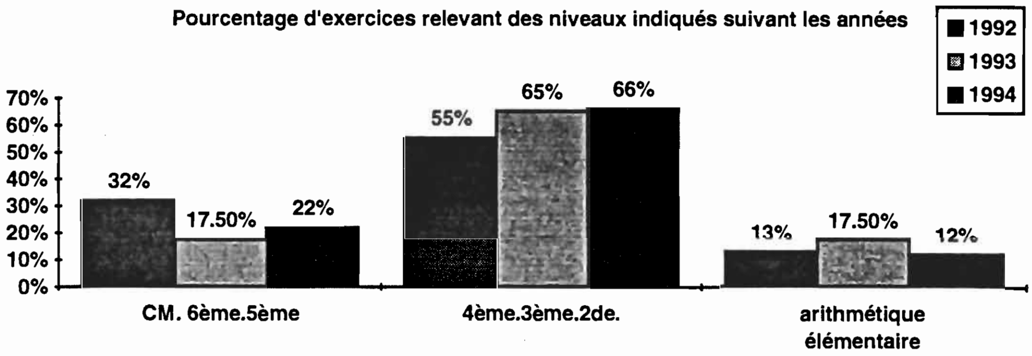
L'algèbre est utilisée simplement comme outil de résolution de problème.

2- Structure et barème de la partie dite disciplinaire

Dans la grande majorité des cas, les volets 1 des sujets sont constitués de trois exercices ou problèmes abordant en général trois thèmes mathématiques, décomposés en petites questions relativement très ciblées admettant des réponses relativement brèves (ce qui donne environ entre 8 et 12 questions par sujet). L'organisation de la recherche est très rarement à la charge du candidat.

Le "poids" moyen d'une question dans la note finale du candidat est d'environ 1,4.

3- Niveau des exercices proposés

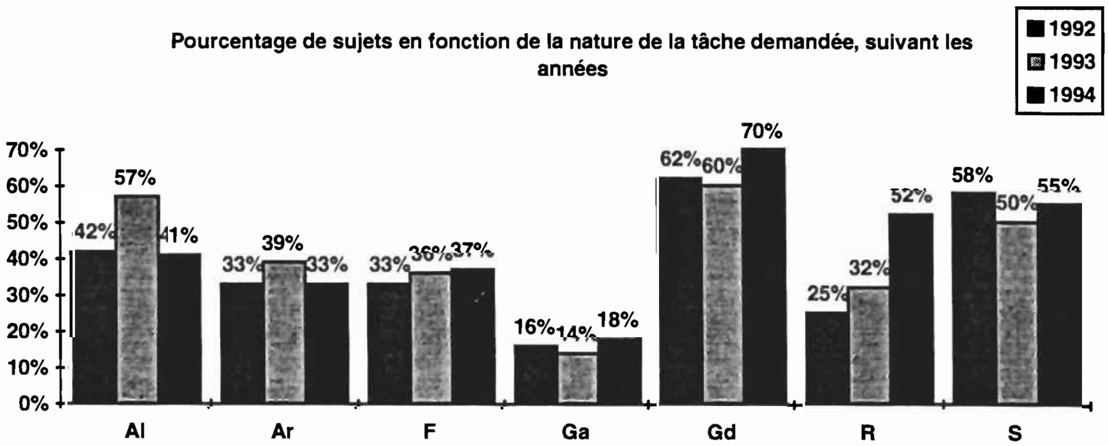


Les contenus mathématiques des exercices relèvent de manière majoritaire des programmes du collège.

4 - Analyse de la tâche du candidat

Pour analyser cette tâche, nous proposons sept catégories regroupant les exercices

- nécessitant une modélisation algébrique (Al),
- nécessitant une modélisation arithmétique (Ar),
- nécessitant une modélisation fonctionnelle (F),
- pouvant donner lieu à une recherche effective sans utilisation d'outils puissants (R),
- pour lesquels il est indispensable de mener une analyse fine d'une configuration (Ga),
- consistant à justifier des affirmations ou démontrer des propriétés (Gd),
- qui sont de simples applications (S).



Nous constatons :

- une baisse sensible du nombre de sujets proposant des exercices conduisant à la résolution d'équations ou d'inéquations au profit d'un accroissement de celui des sujets proposant des situations dans lesquelles le candidat peut faire preuve de ses capacités à réfléchir, à élaborer une démarche heuristique de même nature que celle qu'il aura à provoquer chez ses élèves ultérieurement.
- une augmentation sensible du nombre de sujets dans lesquels le candidat doit démontrer une ou plusieurs propriétés en géométrie. En ce sens, c'est le phénomène inverse de celui qui vient d'être signalé : en géométrie, les sujets se rapprochent de plus en plus des problèmes de géométrie "classiques" rencontrés dans les manuels de 4ème ou 3ème.

5 - Conclusion

Les contenus mathématiques sont ceux de la scolarité obligatoire (fin de collège). Mais les sujets ont cependant une certaine spécificité à deux niveaux :

- Au niveau du **type de questions** (peu fréquentes dans les exercices de collège)

  Donnons quelques exemples :

  - généraliser une propriété constatée sur plusieurs cas particuliers,
  - justifier des constats,
  - modéliser une situation,
  - mettre en évidence des liens entre plusieurs domaines mathématiques.

- Au niveau de la **nature des exercices proposés**

  - de nombreux exercices peuvent se résoudre de diverses manières ;
  - certains peuvent être résolus de manière très élémentaire sans utiliser d'outil mathématique puissant, mais nécessitent de bien savoir organiser une recherche.

Cependant nous notons plusieurs exercices relativement très traditionnels notamment en géométrie, et surtout l'absence de recul de nature didactique sur le statut des savoirs en jeu, celui de la démonstration, le rôle des changements de cadre, etc.

Constats concernant le volet pédagogique

Nous aborderons cette analyse par plusieurs entrées.

1- Les documents proposés pour l'étude

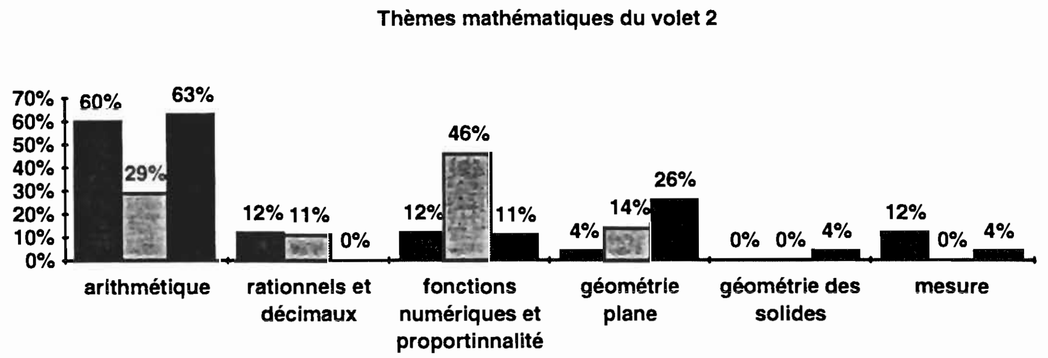
Ce sont massivement des énoncés de problèmes (entre 60 et 70 % des sujets) accompagnés (en moyenne 40 %) ou non (environ 15 %) de travaux d'enfants qui sont proposés aux candidats. Viennent ensuite les extraits de manuels. Quelques rares sujets proposent soit des scénarios soit des comptes rendus de séances.

Les documents sont très souvent relatifs au cycle 3 et ce choix va en augmentant :

	1992	1993	1994
cycle 1	4 %	4 %	0 %
cycle 2	33 %	14 %	14 %
cycle 3	71 %	86 %	92 %

Pourcentage de sujets proposant des documents du cycle indiqué.

2- Thèmes mathématiques abordés



Les choix sont donc variables, les auteurs de sujets semblent privilégier un thème qui n'a pas été abordé dans le premier volet, bien que le texte officiel indique : *"ce volet sera mis en relation avec le premier, chaque fois que cela est possible".*

3- Vocabulaire utilisé

De manière majoritaire les sujets utilisent un vocabulaire "grand public", sans nombreuses occurrences de termes spécifiques de la didactique. En 1992, deux sujets utilisent le terme ***variable didactique***. Un autre parle de ***cadre*** et de ***changement de cadre***, sans donner de définition. Trois sujets parlent de ***phases d'une situation*** avec des acceptions relativement différentes. Un sujet introduit la notion de ***"dialectique de l'action et celle de rétroaction".*** En 1993, nous rencontrons deux fois ***variable didactique*** et ***cadre,*** une fois ***institutionnalisation***, ***analyse a priori***, ***analyse a posteriori***. Nous faisons le même constat en 1994, année où cinq sujets parlent de ***variables didactiques***, quatre de ***phases d'une situation***, un de ***cadres***.

Les termes de pédagogie générale tels que ***procédure, stratégie, tâche, compétence, conception*** sont en revanche relativement souvent utilisés par les auteurs de sujets.

Pourquoi cette attitude de la part des auteurs ? Nous pouvons formuler plusieurs hypothèses :

- les auteurs de sujets souhaitent être compris de la totalité des candidats, qu'ils aient été en formation dans un IUFM ou non,
- les auteurs de sujets craignent de donner de la didactique des mathématiques une image négative en pensant qu'elle sera perçue comme une *"langue de bois"* pédante et inutile,
- les auteurs de sujets n'utilisent pas un vocabulaire didactique spécifique de peur de l'utiliser à mauvais escient et de ce fait de passer pour non compétents aux yeux de leurs collègues,
- les auteurs de sujets ne connaissent pas les termes usuels du vocabulaire didactique parce qu'ils ne sont pas intéressés à ce domaine de réflexion, soit par manque d'information soit par conviction.
- les auteurs de sujets pensent que les correcteurs risquent de ne pas être à l'aise avec ce vocabulaire.

4- Nature des questions

Nous avons regroupé les questions en fonction du point de vue qu'elles semblaient adopter ou voir adopter par les candidats : point de vue de l'enseignement ou point de vue de l'apprentissage, tourné du côté de l'analyse a priori ou tourné du côté de l'analyse a posteriori.

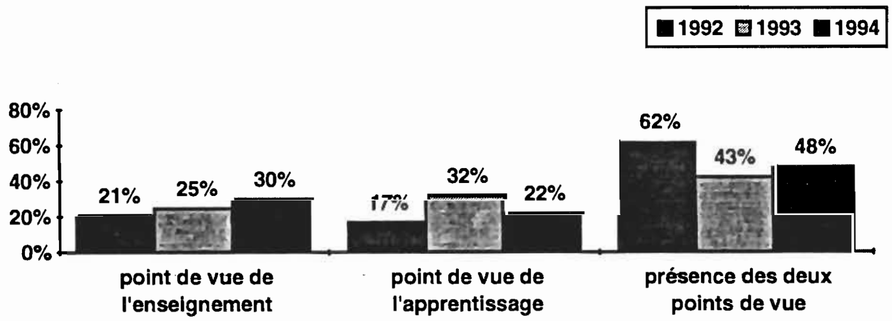
Analyse de la situation du point de vue de l'enseignement

	Les questions amènent à :	Pourcentage de sujets en 1992	1993	1994
Analyse a priori	• rechercher les notions mathématiques sous-jacentes à la situation ou au problème	21 %	25 %	18 %
	• rechercher les objectifs de la situation, ou du problème	29 %	39 %	43 %
	• identifier le niveau de classe dans lequel la situation ou le problème pourrait être donné	17 %	29 %	22 %
	• repérer ou analyser les choix didactiques du maître ou de l'auteur de manuel	8 %	14 %	18 %
	• placer le problème dans une progression, dans une typologie	25 %	4 %	21 %
	• repérer et analyser le rôle des différentes phases d'une situation	4 %	8 %	15 %
	• étudier les variables didactiques du problème, les mettre en regard des propriétés mathématiques visées	4 %	11 %	11 %
	• identifier différents cadres de résolution	4 %	4 %	4 %
	• formuler des consignes	4 %	14 %	15 %
	• prévoir ou étudier une institutionnalisation	12 %	11 %	11 %
	• prévoir des prolongements	8 %	14 %	21 %
	• prévoir ou justifier une organisation de classe	4 %		14 %
	• analyser les décisions prévues par le maître	0 %	8 %	8 %
Analyse a posteriori	• analyser les prises de décision du maître	0 %	11 %	8 %
	• analyser des résultats statistiques	4 %	4 %	14 %

Analyse de la situation du point de vue de l'apprentissage

	Les questions amènent à :	Pourcentage de sujets en 1992	1993	1994
analyse a priori	• identifier les compétences à mettre en oeuvre pour effectuer les tâches demandées dans la situation ou le problème	25 %	25 %	36 %
	• repérer des variables didactiques et étudier leur incidence sur les procédures des élèves	8 %	14 %	14 %
	• prévoir des aides pour différencier la tâche	4 %	4 %	0 %
	• rechercher a priori des procédures envisageables pour des élèves	16 %	50 %	46 %
	• rechercher a priori des erreurs envisageables	8 %	8 %	18 %
	• prévoir des modes de validation à la charge des élèves	4 %	4 %	7 %
analyse a posteriori	• analyser des procédures utilisées par des élèves	50 %	57 %	43 %
	• comparer des procédures effectives par rapport aux prévisions		4 %	0 %
	• analyser et interpréter des erreurs	33 %	43 %	25 %
	• rechercher les conceptions initiales des élèves	12 %	14 %	4 %
	• étudier les modes de validation utilisés	8 %	4 %	4 %
	• faire des propositions pour remédier aux difficultés de certains	4 %	14 %	18 %
	• analyser des résultats statistiques pour y repérer des conceptions erronées	0 %	11 %	0 %

Pourcentage de sujets adoptant le point de vue indiqué



De très nombreux sujets proposent donc aux candidats de commencer l'étude des documents fournis par une analyse globale recouvrant les questions de contenus mathématiques sous-jacents, d'adaptation à un niveau de classe, d'objectifs, ou de compétences visées, ceci quelle que soit l'année. Ces questions sont très classiques et correspondent à des compétences attendues de tout enseignant quel que soit le mode de pédagogie qu'il met en oeuvre, et même quelle que soit la discipline enseignée. Nous pourrions dire qu'il s'agit ici de savoir-faire fondamentaux et minima d'un futur professeur d'école.

Pour les auteurs de sujets, un des aspects fondamentaux du travail du maître est de prévoir ce que vont faire ses élèves sur une question donnée, puis de repérer dans leurs travaux les procédures qu'ils ont effectivement employées. Un certain nombre de sujets complètent cette étude par l'analyse et l'interprétation d'erreurs parfois assorties de propositions pour y remédier. Il s'agit là de réelles compétences professionnelles qu'il est intéressant d'évaluer, et surtout qui se prêtent relativement bien à une épreuve écrite.

Nous constatons par ailleurs que les éléments également à la charge du maître, comme la dévolution de la situation, la prévision des modes de validation par les élèves de leurs propositions, ou encore la prévision d'aides pour différencier la tâche de chacun en fonction de compétences présumées font moins fréquemment l'objet de questions.

Enfin, le rôle des interactions entre les élèves, la dimension sociale des apprentissages en milieu scolaire, sont des points qui n'émergent pas des questionnements proposés.

5- Conclusion

Le volet professionnel apparaît donc plutôt tourné vers la didactique des mathématiques que vers la pédagogie générale.

A partir des divers questionnements présents dans les sujets, la didactique des mathématiques apparaît comme un champ d'étude des processus d'apprentissages de savoirs ou savoir-faire mathématiques et des éléments à disposition de l'enseignant pour permettre et favoriser ces apprentissages. **Mais des domaines entiers de préoccupation des recherches en didactique sont absents des sujets.**

Titre	Analyse d'un sujet de concours
Auteurs	Marie-Lise PELTIER, Joël BRIAND, avec la participation des membres du groupe de travail.
Date	mars 1995
Origine	Élaboration d'un groupe de travail au cours du stage d'ANGERS
Contenu	On trouvera le sujet ayant servi de point de départ puis les commentaires des participants et l'analyse des réponses attendues de la part des candidats , avant la présentation du texte modifié.

ANALYSE D'UN SUJET DE CONCOURS

Pour permettre d'aborder la question, les animateurs proposent de travailler sur un sujet initial qui se démarque déjà des sujets habituels ; ceci afin de lancer rapidement une réflexion sur l'imbrication entre les aspects mathématiques et didactiques.

LE SUJET INITIAL

Ce sujet est inspiré de l'article de N. et G. Brousseau paru dans la revue ***Grand N*** (n° 50) et dont est issue cette séquence.

Un enseignant dispose devant les élèves (CM1 : 9/10 ans) un récipient vide (genre saladier), une balance Roberval et une série de poids. Il a préparé d'autre part un seau plein d'eau et un verre de petite contenance. Les élèves ont déjà utilisé la balance et la manipulent correctement.

1) Il présente le verre d'eau aux enfants, puis verse l'eau dans le saladier et demande : « Écrivez sur votre cahier le poids que vous pensez que nous allons trouver en pesant ce saladier contenant 1 verre d'eau ».

Il interroge quelques élèves sur leurs prévisions. Les élèves ont fait des estimations de 20 g à deux kilos.

L'enseignant invite un élève à effectuer la pesée. L'élève annonce 282 grammes. Les élèves notent cette valeur et commentent leurs prévisions.

Le maître demande : *« Qui a fait la meilleure prévision ? »*

1.1 Indiquez un moyen mathématique d'ordonner la valeur des estimations.

2) L'enseignant verse ostensiblement un second verre d'eau dans le saladier.

« Et maintenant, quel est le poids du saladier (avec les deux verres d'eau) ? Faites une nouvelle estimation et écrivez-la sur votre cahier. »

Certains élèves ont écrit "564 grammes".

2.1 Pourquoi ?

Le maître demande quelques anticipations mais refuse que les élèves les discutent.

2.2 Pourquoi ?

On effectue une nouvelle vérification : l'élève qui vient faire la pesée trouve 330 grammes. Les élèves qui avaient prévu 564 g estiment s'être trompés. La meilleure estimation est "400 grammes".

2.3 Les élèves pouvaient-ils "deviner juste" ?

3) L'enseignant verse un troisième verre d'eau dans le saladier et pose la question : « *Quel est le poids de ce saladier avec ses trois verres d'eau ?* »

Une dizaine d'élèves ont trouvé un même résultat, quelques autres ont multiplié par 3 le premier résultat...

3.1 Quelle estimation proposeriez-vous ? Justifiez votre réponse.

3.2 Pouvez-vous prévoir d'autres stratégies probables et les réponses qui leur correspondent ?

Un élève effectue une nouvelle pesée. Il trouve 384 grammes.

3.3 Comment expliquer l'écart avec votre estimation ?

Un élève, Bruno, avait exactement prévu ce poids, ce qui surprend et déçoit les autres...

3.4 Comment Bruno a-t-il procédé ?

Une discussion s'engage : Bruno explique qu'il avait remarqué que l'aiguille de la balance était plutôt à droite et il a ajouté quelques grammes... D'autres pensent qu'il est tombé juste par hasard, avec de la chance.

3.5 Quels problèmes rencontrent les élèves ? Quel problème rencontre alors le maître ?

4) L'enseignant verse un quatrième verre dans le saladier et repose la même question.

La lutte entre ceux qui calculent et l'expliquent et ceux qui pensent que l'on peut réussir en devinant reprend.

Beaucoup d'élèves qui n'avaient pas compris le raisonnement au "coup" précédent le comprennent mieux désormais.

4.1 Caractérisez une telle situation qui donne à l'élève plusieurs occasions de prendre des décisions et d'en apprécier la pertinence.

4.2 Justifiez cette phase

5) Prolongements (préparation du maître)

5.1 En fixant le poids du saladier, et le poids d'un verre d'eau, lui à 5 grammes près, donnez un encadrement du poids du saladier avec 10 verres d'eau.

5.2 Quels sont les savoirs mathématiques en jeu ? Rédigez un énoncé classique qui poserait aux élèves un problème équivalent mais dans un autre contexte.

COMPTE RENDU DE LA SÉANCE DE TRAVAIL

Ce style de sujet est peu proposé en situation de concours. Lors de la première lecture, il a surpris. Puis le groupe a joué le jeu et étudié ce questionnement. Voici le compte rendu des discussions qu'il a suscitées.

Questions initiales	Commentaires du groupe	Reformulation de la question	Réponse attendue des candidats
1.1 Indiquez un moyen mathématique d'ordonner la valeur des estimations.	Nous ne mettions pas les mêmes attentes sous cette question. S'agit-il d'un moyen applicable en classe ou personnel. ? Nous tranchons pour un savoir expert et proposons la reformulation suivante :	*1.1 En admettant provisoirement que 282 g soit une réponse exacte, quel moyen mathématique aurait le maître pour apprécier la valeur des estimations?*	La réponse attendue peut s'exprimer en terme de rangement des valeurs absolues des différences entre une estimation et 282 g.
2.1 Certains élèves ont écrit 564 grammes : Pourquoi ?			Ils ont doublé 282 g, poids du saladier avec le verre d'eau, sans tenir compte du poids du saladier qu'ils ont donc pris en compte deux fois. Ces élèves utilisent à mauvais escient un modèle linéaire : si le nombre de verre d'eau double, le poids total aussi.
2.2 Pourquoi le maître refuse-t-il que les élèves discutent ?			Il est trop tôt, les élèves ont encore à réfléchir. En tenant compte de la seconde vérification, chacun pourra apprécier sa procédure, la conserver ou la modifier puis l'éprouver à nouveau. Une discussion à ce niveau est prématurée, le maître n'est pas certain que tous se soient approprié le problème.[1]
	2.1 et 2.2 s'adressent à l'étudiant en tant que futur enseignant. Il doit y répondre dans cette optique. Il doit être capable d'analyser une erreur.		

[1]Nous observons que les étudiants ont souvent des difficultés à concevoir que les élèves puissent discuter entre eux , s'expliquer. D'autre part, quand ils admettent la nécessité de prendre en compte ces discussion, il leur est difficile de situer à quel moment il sera judicieux de la prendre en compte. Il est, en effet, difficile pour un débutant de contenir un groupe d'élèves qui ont envie de se convaincre mutuellement en utilisant des argument qui peuvent être plus ou moins raisonnables. Il faut pourtant les persuader de résister : c'est à ce prix que chaque élève sera concerné par la résolution du problème.

2.3 Les élèves pouvaient-ils deviner juste ?	Le choix de cette question a été débattu lors du travail de groupe : nous avons eu beaucoup de mal à situer le niveau de la réponse attendue. Certains ont parlé de calcul de probabilité... Nous décidons de la scinder en deux (voir 2-4 ci dessous).		les élèves ne pouvaient pas "deviner juste". En effet, ils ne disposent alors que d'un seul renseignement : le poids du saladier avec un verre d'eau est de 282 g
	La nouvelle question s'adresse à l'étudiant qui doit répondre ici avec ses propres connaissances mathématiques et essayer de faire surgir le modèle mathématique envisagé par le maître. Nous proposons alors de reformuler la question de la manière suivante :	*2.4 En admettant les résultats des pesées précédentes, trouvez la masse du saladier et la masse du verre d'eau.* *Quelle est la fonction numérique modélisant cette situation ?*	Si S est le poids du saladier et si v est le poids de l'eau contenue dans un verre : $S + v = 282$ g $S + 2v = 330$ g et donc $v = (330 - 282)$ g $= 48$ g L'étudiant peut effectuer des calculs algébriques ou arithmétiques à son niveau. Ici, on attend aussi que l'étudiant utilise les mathématiques comme une estimation du réel
"Quel est le poids de ce saladier avec ses trois verres d'eau ? " *3.1 Quelle estimation proposeriez-vous ? Justifiez votre réponse*	Cette question s'adresse à l'étudiant qui doit répondre avec ses propres connaissances mathématiques.		$S + 3v = 378$g.
3.2 Pouvez-vous prévoir des stratégies probables pour des élèves et les réponses qui leur correspondent ?	Cette question s'adresse à l'étudiant en tant que futur enseignant. Il s'agit ici de prévoir les stratégies possibles dans la classe.		Voici quelques stratégies : • réutilisation du modèle linéaire en dépit de l'erreur constatée précédemment • résultat calculé puis corrigé d'après des données perceptives • résultat donné au hasard Les stratégies proposées peuvent être avancées à l'aide d'exemples numériques.

Un élève effectue une nouvelle pesée : 384g. *3.3 Comment expliquez l'écart avec votre estimation ?*	Nous avons été perplexes sur la réponse attendue : certains ont dit que les balances électroniques donnent un résultat à 5 g près mais personne n'a su proposer un degré de précision pour une balance Roberval ! D'autres parmi nous ont dit qu'il s'agissait plus d'une séquence de physique, ce qui a permis de débattre sur le travail en mathématiques sur la mesure.		L'écart avec l'estimation est de 6 g. Le calcul est basé sur les hypothèses suivantes: • Le poids du saladier est toujours le même. • Le poids du verre d'eau est toujours le même. Or cette deuxième hypothèse est sans doute fausse, car la quantité d'eau est difficile à maintenir constante. La différence peut donc provenir de cela, et accessoirement, de la marge d'erreur liée à la balance.
Bruno avait exactement prévu ce poids. *3.4 Comment Bruno a-t-il procédé ?*	Nous avons préféré poser la question suivante qui suggère plus l'incertitude :	*Faites une hypothèse raisonnable sur la ou les façon(s) dont Bruno a pu aboutir à la réponse.*	Bruno a peut-être répondu au hasard ou encore il a peut-être effectué un calcul en utilisant l'écart entre deux pesées, la conservation de l'écart puis une rectification, mais il est difficile de dire à partir de quoi.
3.5 Quels problèmes rencontrent les élèves ?			Les élèves sont déroutés car le hasard fournit ici un meilleur résultat que le calcul, alors qu'ils sentent bien qu'il y a une méthode.
3.5 (Suite) Quel problème rencontre le maître ?			Le maître ne sait pas s'il doit ou non intervenir en remarquant des élèves qui régressent vers la devinette devant les résultats de leurs camarades. Il peut s'inquiéter et se demander si cette séquence expérimentale va être propice aux apprentissages. Prises de décisions envisageables : • Laisser s'installer une discussion entre les élèves s'appuyant d'avantage sur des perceptions et des points de vue que sur des faits qui ne s'accordent pas avec une démarche réfléchie. • Accepter que le modèle mathématique ne donne pas le bon résultat sur un aussi petit nombre de pesées, eu égard aux erreurs qui interviennent. Il peut être tenté d'intervenir pour *"dire ce qu'il est bon d'en penser !"*-

4.1 Caractérisez une telle situation qui donne à l'élève l'occasion de prendre des décisions et d'en mesurer la pertinence.	Nous avons préféré transformer légèrement cette question : Ce type de question nous a renvoyés à une réflexion concernant les choix que nous faisons quant à la formation de nos étudiants de première année : les étudiants doivent-ils donner la réponse en "termes savants" ? La réponse attendue est-elle *"situation a-didactique d'action"* ? Nous n'avons pu approfondir la discussion, faute de temps. Les notions mathématiques à enseigner lors de cette première année ne font pas l'unanimité (cf conclusion).	*Caractérisez une telle situation sur le plan didactique*	Réponse attendue par les concepteurs du sujet : *Une situation qui donne à l'élève plusieurs occasions de prendre des décisions et d'en apprécier la pertinence est une situation a-didactique d'action.* Les méthodes spontanées des élèves, ou modèles d'action, (par ex. multiplier par 2, par 3) sont remis en cause par les résultats et des tentatives nouvelles sont possibles puisque l'on peut reprendre la question en versant 4, 5, ... verres d'eau.
4.2 Justifiez cette phase	Nous avons transformé cette question en : Le but de cette question est de faire expliquer le choix des moments d'intervention du maître.	*Sur quels points le maître pourrait-il conclure ?*	Ici il s'agit de ne pas laisser les enfants dans l'incertitude. Le maître va faire formuler les stratégies et faire expliciter les difficultés rencontrées. Il va ainsi mettre en évidence le fait que le réel est toujours plus complexe que le modèle mathématique et que les mathématiques peuvent être utilisées comme un outil de maîtrise du réel. On peut constater que cet aspect capital des mathématiques est rarement abordé, tant avec les étudiants qu'avec les élèves.
5.1 En fixant le poids du saladier et le poids d'un verre d'eau, lui à 5 grammes près, donnez un encadrement du saladier avec 10 verres d'eau.			Si on suppose que le saladier pèse 230 g et que le contenu d'un verre d'eau pèse 50 g à 5 g près, soit entre 45 g et 55 g, le poids du saladier avec 10 verres d'esu sera compris entre (230 + 450) g et (230 + 780) g.
5.2. Quels sont les savoirs mathématiques en jeu ?.	Cette question a pour but de vérifier si les étudiants ont identifié les savoirs mathématiques en jeu dans la situation précédente.		Il s'agit des fonctions affines.

Rédigez un énoncé classique qui poserait aux élèves un problème équivalent mais dans un autre contexte "			Chez un loueur de voitures, le tarif est composé d'un forfait et d'une somme par journée de location. Un automobiliste a loué une voiture 2 jours. Il a payé A fancs. Un autre automobiliste a loué une voiture 4 jours. Il a payé B francs. Quelle est la valeur du forfait ? Quelle est la valeur de la somme journalière ?

Ce sujet permet donc de vérifier chez l'étudiant les compétences suivantes :

- repérer les savoirs mathématiques en jeu dans une réalité complexe : *propriété d'une fonction affine et notion de valeurs approchées*
- analyser les décisions du maître quant à la conduite de la séquence : *accorder ou non la parole aux élèves, gérer les conflits*
- étudier les réactions des élèves, l'évolution de leurs propositions et de leurs commentaires. Analyser les réussites et les erreurs.
- prendre du recul par rapport à une situation concrète et sa modélisation.

En fait, il s'agit d'abord, pour l'étudiant, de tenir un discours professionnel sur ce qui se passe dans la classe.

En guise de conclusion

Une telle analyse doit nous amener à pointer les savoirs didactiques à enseigner aux étudiants de première année et à mettre en évidence quelles sont les compétences que l'on cherche à évaluer à travers l'épreuve du concours .

On peut déjà dire que le choix d'un sujet du type de celui qui vient d'être analysé permettrait de prendre en compte de manière réelle les aspects concernant la professionnalisation. En particulier il permettrait de prendre parallèlement en compte, et de manière distincte, ce qui relève de l'enseignant et ce qui relève de l'élève.

Cet exercice de construction de sujet a permis de mettre en évidence la nécessité, lors de la préparation au concours, de conduire les étudiants à :

- réfléchir en termes didactiques à une situation d'enseignement pour mieux cerner les paramètres sur lesquels l'enseignant peut s'appuyer pour prendre des décisions,
- comprendre que les savoirs savants et les savoirs en construction chez l'élève ne suivent pas la même organisation,
- être capables
  - ⇒ d'adopter plusieurs points de vue à propos d'une notion,
  - ⇒ de repérer les conceptions initiales et déceler les modèles implicites et leur lien avec les mathématiques,
  - ⇒ d'organiser un enseignement en repérant chez les élèves les points de vue auxquels ils sont sensibles.

LE SUJET MODIFIÉ

Un enseignant dispose devant les élèves (CM1) un récipient vide (genre saladier), une balance Roberval et une série de poids. Il a préparé d'autre part un seau plein d'eau et un verre de petite contenance. Les élèves ont déjà utilisé la balance et la manipulent correctement.

1 - Il présente le verre plein d'eau aux enfants, puis verse l'eau dans le saladier et demande :

« Écrivez sur votre cahier le poids que vous pensez que nous allons trouver en pesant ce saladier contenant 1 verre d'eau »

Il interroge quelques élèves sur leurs prévisions : les élèves ont fait des estimations de 20 g à 2 kg

L'enseignant invite un élève à effectuer la pesée. L'élève annonce 282 g, les élèves notent cette valeur et commentent leurs prévisions.

Le maître demande : *« Qui a fait la meilleure prévision ? »*

1.1 Quelle est la fonction numérique dont le maître peut se servir comme modèle mathématique ?

Expliquez. Citez une propriété de ce type de fonction

1.2 En admettant provisoirement que 282 g soit une réponse exacte, quel moyen mathématique aurait le maître pour apprécier la valeur des estimations ?

2 - L'enseignant verse un second verre dans le saladier.

« Et maintenant, quel est le poids du saladier avec les deux verres d'eau ? Faites une nouvelle estimation, écrivez-la sur votre cahier »

Certains élèves ont écrit 564 g

2.1 Pourquoi ?

Le maître demande quelques anticipations mais refuse que les enfants discutent

2-2 Pourquoi ?

2.3 Les élèves peuvent-ils "deviner juste" ?

On effectue une nouvelle vérification. L'élève qui vient faire la pesée trouve 330 g. Les élèves qui avaient prévu 564 g estiment s'être trompés.

La meilleure estimation est 400 g

3 - L'enseignant verse un troisième verre d'eau dans le saladier et pose la question :

« Quel est le poids de ce saladier avec les trois verres d'eau ? »

3.1 De quels moyens mathématiques le maître dispose-t-il pour faire une estimation? Justifiez votre réponse

Une dizaine d'élèves ont trouvé un même résultat, quelques autres ont multiplié par 3 le premier résultat... Certains ont d'autres résultats.

3.2 Pouvez-vous prévoir les stratégies probables des élèves et les réponses qui leur correspondent ?

Un élève effectue une nouvelle pesée : il trouve 384 g.

3.3 Comment expliquer l'écart avec l'estimation du maître ?

Un élève, Bruno avait exactement prévu ce poids, ce qui surprend et déçoit les autres.

3.4 Faites une hypothèse raisonnable sur la ou les façons dont Bruno a pu aboutir à la réponse

Une discussion s'engage : Bruno s'explique : il a bien regardé l'aiguille de la balance. D'autres pensent qu'il est tombé juste par hasard, avec de la chance.

3.5 Quels problèmes rencontrent les élèves ?

3.6 Quels problèmes rencontre alors le maître ?

4 - L'enseignant verse un quatrième verre dans le saladier et repose la même question.

La lutte entre ceux qui calculent et l'expliquent et ceux qui pensent que l'on peut réussir en devinant reprend.

Des élèves qui n'avaient pas compris le raisonnement au "coup" précédent le comprennent mieux désormais.

4.1 Caractérisez une telle situation sur le plan didactique

L'enseignant termine la séance après avoir recensé les méthodes, il arbitre le débat.

4.2 Sur quels points le maître pourrait-il conclure ?

5 - Prolongements (préparation du maître)

5.1 En fixant le poids du saladier, et le poids d'un verre d'eau, lui à 5 g près, donnez un encadrement du poids du saladier avec 5 verres d'eau, avec 10 verres d'eau.

5.2 Quels sont les savoirs mathématiques en jeu ?

Rédigez un énoncé classique qui poserait aux élèves un problème équivalent, mais dans un autre contexte.

PARTIE 6

Les tests d'entrée à l'IUFM

Actuellement, le recrutement des étudiants de première année s'effectue selon deux modalités :

- rangement des dossiers sur des critères liés aux études, à l'expérience professionnelle,...
- rangement des candidats à l'aide d'un test d'entrée.

Nous présentons ici quelques éléments de réflexion portant sur l'élaboration et l'utilisation de tests de recrutement.

Titre	Tests en mathématiques à l'entrée de l'IUFM - Texte de cadrage
Auteur	Collectif
Date	Mars 1995
Origine	Document élaboré par un groupe de travail au cours du stage d'Angers
Contenu	Réflexion sur les contenus, la finalité, les choix et les conditions de faisabilité des tests d'entrée en première année de formation de professeur des écoles à l'IUFM.

TESTS EN MATHÉMATIQUES A L'ENTRÉE DE L'IUFM TEXTE DE CADRAGE

Ce texte a été élaboré par un petit groupe de réflexion réuni lors du stage d'Angers, n'ayant pas encore l'expérience de ces tests, mais s'appuyant sur des références ponctuelles de 93-94 et ayant une responsabilité de mise en place de tels tests avant la rentrée 95.

Le contexte actuel

Chacun a conscience qu'il s'agit là d'un sujet chaud et très délicat. Il faut se rappeler l'écho reçu dans la presse, et les grèves d'étudiants réclamant pour tous le droit d'entrer en première année d'IUFM (Rennes, mars 95).

Quelques constats

Aspect économique

La formation des PE1 coûte cher, si on tient à la qualité de la formation.

En particulier, lorsque des étudiants de PE1 obtiennent une note éliminatoire en français ou en maths, ils ne peuvent se présenter aux autres épreuves pour lesquelles ils ont reçu une formation, ce qui peut apparaître comme un gaspillage... Il peut alors sembler raisonnable d'effectuer une sélection préalable.

Aspect politique

La diminution du nombre des PE1 permet d'augmenter le pourcentage de réussite par site (lorsque le nombre de candidats est significativement supérieur au nombre de postes).

Il nous faut dénoncer à ce sujet l'injuste comparaison des résultats obtenus dans les divers IUFM et même entre les différents sites d'un IUFM.

Par ailleurs, la faiblesse ou plutôt l'absence de recrutement de formateurs dans les IUFM ne donne pas la possibilité d'encadrer un grand nombre d'étudiants.

Quelques arguments "pour" ces pré-tests

Cette procédure nous semble fournir des critères de sélection plus justes que le simple tri d'une multitude de dossiers.

Cet argument suppose, et c'est un devoir de l'administration, des moyens pour assurer l'équité des chances des candidats (équipes suffisantes pour assurer la surveillance, places numérotées,...)

Premiers constats et dérapages possibles

Nous avons étudié et apprécié l'analyse faite par Jean Baptiste Lagrange qu'on pourra lire ci-après.

L'examen des différents choix possibles concernant la nature de l'épreuve aussi bien que les conceptions et les modalités de passation nous ont conduits à entrevoir des "dérapages" possibles et à soulever des interrogations.

- Quel est le statut officiel de ce type d'épreuve ? Peut-il être remis en cause et par qui ?
- Verra-t-on se développer des formations parallèles ? (Ex : Université de Rennes II). Verra-t-on des préparations à ces "pré-tests" ?
- Y aura-t-il un programme ?

Voici par exemple un document issu de l'IUFM de Bretagne :

Les exercices porteront sur :

- *les nombres (entiers, décimaux, rationnels), la numération décimale (écriture des nombres et opérations) ;*
- *la proportionnalité et les pourcentages ;*
- *les mesures usuelles (de longueur, de surface, de volume, de masse) ;*
- *des éléments de géométrie élémentaire.*

Les capacités de réflexion et de logique seront évaluées.

Certains exercices pourront porter sur plusieurs thèmes.

Interrogations sur les enjeux. Eléments pour des décisions.

A propos des finalités de ces épreuves plusieurs possibilités peuvent être envisagées.

Choix 1

Pour éliminer les candidats aux connaissances insuffisantes ne leur permettant pas de suivre un enseignement à l'IUFM avec de réelles chances de succès au CRPE.

Choix 2

Pour sélectionner les candidats ayant le plus de chances d'être reçus au CRPE.

Choix 3

Pour se conformer à un "numerus clausus "administratif.

Où placer la barre ?

Antoine Bodin suggère de la placer a posteriori, dans un "creux statistique", pour une simple raison d'équité.

Nous avons essayé d'examiner les différents choix possibles concernant les conceptions de ces épreuves en mesurant les conséquences de ces choix.

Nos réflexions sont développées dans un article suivant intitulé : ***"Réflexion sur les tests"***.

Enfin, avant de chercher à répondre à la question *"QCM ou pas QCM et pourquoi ?"*, nous avons voulu mettre au clair nos idées sur ce qu'est un QCM.

(Voir l'extrait de l'article de D. Leclercq de l'Université de Liège.).

Titre	Analyse de tests d'entrée à l'IUFM
Auteur	Jean-Baptiste LAGRANGE
Date	1994
Origine	Rapport à Monsieur le Directeur de l'IUFM de Bretagne sur des tests en Mathématiques, en vue de contribuer à la sélection des candidats à la préparation au concours de Professeurs des Écoles. Ce rapport a été remis le 27 septembre 1994. Il est ici reproduit avec l'aimable autorisation de son auteur.
Contenu	Analyse des items issus de tests proposés par 6 IUFM. Cette analyse porte à la fois sur les compétences évaluées et sur la forme des items. L'auteur y dégage quelques tendances générales.

ANALYSE DE TESTS D'ENTRÉE A L'IUFM

Rapport à Monsieur le Directeur de l'IUFM de Bretagne sur des tests en Mathématiques en vue de contribuer à la sélection des candidats à la préparation au concours de Professeur des Écoles.

Monsieur le Directeur

Conformément à votre du lettre du 4 juillet, j'ai entrepris une analyse des tests élaborés par d'autres IUFM. Cette analyse porte sur la partie mathématique des épreuves issues de 6 IUFM, dont j'ai pu avoir connaissance à la date du 15 septembre. J'ai tenté une étude globale des items des tests disponibles, à partir de caractères que l'on peut retrouver d'un IUFM à l'autre, et en partant de deux questions :

- par rapport à une vue d'ensemble des **compétences** évaluées dans les items, comment se situe chaque IUFM ?
- concernant la **forme** des items (questions ouvertes, questions fermées...), quelles sont les options retenues par les IUFM ? Quels problèmes de mise en oeuvre de la sélection peuvent se poser dans chaque option ?

Après cette étude globale, et de façon à préparer un travail en commission, il m'a semblé intéressant de présenter et de discuter certains items représentatifs de tendances générales dans les tests.

Étude des tests disponibles

Compétences évaluées

Une analyse globale des items suppose de retenir des catégories assez larges. Il m'a semblé qu'on pouvait retenir une entrée par le **thème mathématique** dominant de la question posée, et une autre par le **niveau de compétence** que suppose la réussite à l'item.

Thèmes

J'ai retenu 5 grands thèmes qui structurent l'enseignement notionnel en PE1, et la partie notionnelle de l'épreuve de mathématique du concours. J'ai ajouté un thème "Logique" qui ne fait pas l'objet d'un enseignement particulier en PE1, ni d'épreuve particulière au concours. En effet, dans les tests étudiés, ce thème apparaît dominant dans d'assez nombreux items. Il sera ainsi possible d'examiner d'une part l'équilibre entre les différents thèmes "notionnels" , et d'autre part, l'équilibre entre "notionnel" et "logique".

Thèmes "notionnels"

- Proportionnalité, Fonctions numériques, Problèmes numériques : il s'agit d'items où les concepts et outils numériques prennent du sens par rapport à des situations.
- Géométrie : propriétés des figures, mise en oeuvre de transformations...
- Nombre : connaissance du nombre (entiers, décimaux, rationnels), numération
- Calcul : calculs sur les entiers et décimaux, connaissance des algorithmes...
- Mesure : calculs de longueurs, d'aires, de volumes; calculs avec des unités...

Thème "logique"

- Résolution de problèmes hors connaissance notionnelle
- Compréhension de texte
- Codage (d'arbre, de positions...)
- Reconnaissance de formes (hors figures géométriques)

Niveau

Il serait hasardeux de définir un niveau "pré-requis" en mathématique pour suivre l'enseignement en PE1. De même le niveau de l'épreuve du concours peut faire l'objet de débats sans fin. Cependant à la lecture d'un item donné, un formateur en mathématiques peut raisonnablement se dire: *"si un étudiant ne sait pas faire cela, ce sera un sérieux handicap pour la préparation au concours"*, ou *"je verrais bien cet item dans une question du concours"*. Me laissant guider par cette intuition, j'ai choisi de classer "Niveau pré-requis" (resp. "Niveau concours") un item sur lequel je porterais la première (resp. deuxième) appréciation. Le "Niveau Hors-champ" correspond aux items dont je ne vois pas la place dans les compétences en jeu pour l'épreuve de mathématiques du concours.

Tableau des résultats

	Aix-Marseille		Strasbourg		Clermont		Poitiers		Nantes		Besançon		Moyenne
Thème													
Prop. Pb num.	1	9 %	7	18 %	2	20 %	5	26 %	7	25 %	5	19 %	20 %
Géométrie	1	9 %	10	25 %	0	0 %	2	11 %	2	7 %	4	15 %	11 %
Nombre	0	0 %	7	18 %	0	0 %	1	5 %	7	25 %	5	19 %	11 %
Mécan. Opér.	0	0 %	7	18 %	4	40 %	4	21 %	4	14 %	4	15 %	18 %
Mesure	3	27 %	9	23 %	3	30 %	1	5 %	5	18 %	5	19 %	20 %
Logique..	6	55 %	0	0 %	1	10 %	6	32 %	3	11 %	3	12 %	20 %
Total	11	100 %	40	100 %	10	100 %	19	100 %	28	100 %	26	100 %	
Niveau													
Pré-requis	2	18 %	20	50 %	7	70 %	7	37 %	14	50 %	16	62 %	48 %
Concours	5	45 %	19	48 %	3	30 %	8	42 %	12	43 %	10	38 %	41 %
Hors Champ	4	36 %	1	3 %	0	0 %	4	21 %	2	7 %	0	0 %	11 %

Exploitation

Thème

La colonne "Moyenne" fait apparaître que deux thèmes sont nettement moins présents que les autres : il s'agit du thème "Nombre" et du thème "Géométrie". Au contraire, les thèmes "Mesure" et "Calcul" avoisinent tous les deux les 20% . Les auteurs des tests semblent ainsi se conformer à une certaine "tradition" de l'école élémentaire, en privilégiant les compétences en mesure et en calcul comme pré-requis à la préparation du concours PE. Une autre explication serait qu'il est plus facile, sur ces thèmes, de produire des items qui ne mettent pas en jeu des connaissances spécialisées.

Le thème "Proportionnalité, Fonctions numériques, Problèmes numériques" atteint aussi les 20 %, mais il s'agit d'une catégorie plus large que les précédentes.

Le thème "Logique" atteint aussi les 20 %, mais on verra qu'il y a des différences très significatives d'un IUFM à l'autre.

Niveaux

Le niveau "Hors Champ" présente une moyenne assez importante. Il s'agit le plus souvent d'items "logiques" qui, à mon sens, peuvent avoir une validité du point de vue du bagage intellectuel d'un futur professeur, mais ne trouvent pas directement à s'employer dans la préparation de l'épreuve du concours telle que nous la connaissons. On pourra examiner à titre d'exemple la numérotation des noeuds d'un arbre binaire (Ex. 7, Aix Marseille - Annexe page 3). Il s'agit d'une connaissance d'informatique qui pourrait parfaitement faire partie de la culture scientifique commune. Qu'on le regrette ou non, il me semble qu'un candidat peut réussir l'épreuve du concours sans cette connaissance.

Parmi les autres items, le niveau "pré-requis" domine légèrement le niveau "concours". On peut penser que les IUFM, en posant des items de niveau "concours" ont pris en compte le fait qu'on ne peut prétendre "couvrir" pendant l'année de PE1 tout le champ de l'épreuve du concours. Ainsi des candidats ayant déjà "le niveau" dans certains domaines sont mieux placés pour la préparation. Il n'en reste pas moins que l'équilibre entre ces deux niveaux est un point important du débat, si l'on ne veut pas que le test soit un "pré-concours".

Options des IUFM

Parmi les 6 IUFM étudiées, on peut distinguer trois groupes :

- Strasbourg, Nantes et Besançon présentent une répartition assez équilibrée des thèmes notionnels (avec un "trou" en géométrie pour Nantes), et peu voire pas d'items "logiques". Ils présentent une répartition "Niveau pré-requis"/ "Niveau concours" du même ordre que la moyenne. L'option est donc plutôt "notionnelle", avec une sélectivité moyenne.
- Aix-Marseille et Poitiers ont un fort taux d'items "logiques", et de "Niveau Hors-Champ"; le "Niveau Concours" y domine le "Niveau pré-requis". Le test risque de sélectionner fortement sur un certain type de capacités intellectuelles.
- Clermont se distingue par un fort taux pour les thèmes "calcul" et "mesure", et un taux assez faible de niveau "concours". Cet IUFM paraît donc privilégier des pré-requis à la préparation du concours, en terme de compétences de base dans ces thèmes traditionnellement attachés à l'école élémentaire.

La forme des items

Les 6 IUFM proposent des items sous forme d'énoncés courts, indépendants entre eux. Cependant, les IUFM diffèrent sur le nombre d'items et sur la forme de la réponse attendue :

- Les 28 items de Nantes, et les 26 items de Besançon sont "à choix multiples" (4 à 5 choix proposés pour chaque item). Nantes précise à titre de barème que tous les items ont le même poids. Besançon donne un barème explicite (2 à 6 points par item).
- Les 40 items de Strasbourg et les 19 items de Poitiers sont "fermés" en ce sens qu'à chaque item, une seule réponse peut être considérée comme correcte. Strasbourg permet un codage par comparaison directe à la réponse correcte. Pour deux items de Poitiers (9 et 10), il me semble que l'intervention d'un expert peut être requise pour la validation des réponses (justification et tracé à main levé). Les deux tests donnent un barème explicite.
- Les 10 items de Clermont et les 11 items d'Aix sont "fermés" au sens donné ci-dessus, mais pour plus de la moitié des items, il est demandé de "justifier" ou d'"expliciter" la démarche suivie. On ne

peut savoir s'il s'agit d'évaluer, au delà de la conformité à la réponse attendue, la démarche en elle-même, les capacités à exposer cette démarche, ou plus simplement de déceler une réponse juste obtenue par hasard, ou par tricherie. Il est clair cependant que l'évaluation de ces items "à explications" demande l'intervention d'un expert, et pas seulement un codage. Clermont annonce une "note éliminatoire", mais ne donne pas de barème ; Aix n'annonce pas de barème.

Je me propose de discuter tout d'abord la forme des énoncés, puis la forme de réponse attendue.

On désigne généralement par test un ensemble de questions courtes, indépendantes entre elles, chacune d'entre elles visant à évaluer une compétence précise. Dans l'enseignement des mathématiques, la forme "test" est principalement adoptée en début d'apprentissage, au moment de faire un inventaire préalable de connaissances. L'établissement du diagnostic est rapide, voire automatique. On ne cherche pas à porter un jugement exhaustif sur chaque individu, ni à atteindre une totale égalité, mais à adapter l'enseignement au public, au besoin en le différenciant. Le jugement porté n'est en aucun cas définitif. Un exemple est le dispositif d'évaluation CE2-6ème-Seconde.

Au contraire, l'évaluation terminale des compétences (Baccalauréat, Concours P.E...) est conçue généralement sous la forme d'un ou plusieurs problèmes à résoudre, dont les énoncés sont pensés en relation avec les contenus et les compétences visés. Le diagnostic porté, à partir des réponses au problème, requiert l'intervention d'un ou plusieurs experts, spécialistes de l'enseignement des notions en jeu.

La maîtrise des savoirs mathématiques s'apprécie dans leur interaction, au sein de situations suffisamment complexes. Ce n'est donc pas sans raisons que la forme "problème" s'impose quand il s'agit d'évaluer en profondeur des compétences en mathématiques et de tenter de réaliser l'égalité entre candidats. La sélection de candidats, préalable à une formation, s'apparente davantage à cette évaluation en profondeur, qu'à un inventaire nécessairement superficiel.

Il est clair, cependant, que le nombre de candidats rend inévitable la recherche d'un compromis. La forme problème est en effet incompatible avec un traitement automatisé. Les IUFM étudiés se situent de façon variée par rapport à ce compromis. Considérons deux choix extrêmes :

- Clermont propose seulement 6 questions (10 items en tout). Chacune de ces questions demande une part de réflexion importante, le choix et la mise en oeuvre de notions et d'outils; c'est en fait un petit problème.
- Nantes propose 28 items à choix multiples, chacun d'entre eux étant ciblé sur une compétence précise.

En contrepartie d'une forme proche du "problème", Clermont rend obligatoire un recours important à l'expert. En effet, le problème peut être bien compris, la démarche correctement menée, même si le résultat final est faux. Cet IUFM demande d'ailleurs une "justification" pour chacun des problèmes. Sous réserve de vérification, il me semble qu'un correcteur devrait pouvoir évaluer entre 5 et 10 copies à l'heure (1 à 2 mn par question).

Au contraire, le QCM de Nantes peut être codé directement par un non spécialiste. Mais il faut apprécier si l'émiettement des compétences ne laisse pas de côté des qualités importantes en mathématiques (synthèse, rédaction, choix des outils..). Rappelons également à propos de QCM, que les facteurs "copiage" et "hasard" ne sont pas à négliger. En présence d'un nombre important de candidats, les conditions matérielles ne permettent pas toujours un isolement satisfaisant. Il serait dommage que la sélection favorise un certain type de "débrouillardise". D'autre part, la probabilité d'obtenir un score honorable en répondant au hasard à une majorité de questions, n'est pas négligeable, si le nombre de questions est faible. Il serait là aussi dommage de transformer la sélection en jeu de hasard. A titre d'illustration, considérons un QCM à 28 questions, proposant chacune 4 choix. Considérons des candidats sachant répondre respectivement à 4, 5, 6, 7, 8 questions, et répondant au hasard aux autres questions. Le tableau ci-dessous donne pour chacun la probabilité qu'il réponde correctement à la moitié des questions.

Nombre de questions auxquelles le candidat sait répondre	4	5	6	7	8
Probabilité d'avoir la moyenne au test	5 %	10 %	16 %	26 %	38 %

Étude de certains items

La connaissance des mécanismes opératoires

Clermont choisit une méthode d'évaluation simple : elle interdit l'usage des calculatrices et demande, dans chacun des problèmes, une opération sur des nombres à 3 ou 4 chiffres.

Strasbourg et Nantes interdisent de même la calculatrice, mais ne proposent pas d'items purement calculatoires. Le choix de Clermont paraît le plus cohérent, mais les choix des trois IUFM posent un problème de fond. Il est utile qu'un futur P.E. sache utiliser une calculatrice à bon escient, et on peut penser important que cette aptitude ne soit pas évacuée du test.

Poitiers, Aix-Marseille et Besançon proposent une ou deux "opérations à trou". Il est intéressant d'examiner ces items, car ils présentent des difficultés différenciées :

- Pour réussir la soustraction de Poitiers (page 16), il faut maîtriser parfaitement le mécanisme de retenue, et/ou avoir compris la soustraction comme une addition entre le second terme et le résultat. La connaissance est déjà supérieure à la simple exécution correcte de l'opération.
- La multiplication dans le même item, en plus de connaissances explicites sur l'algorithme, requiert des capacités stratégiques: il faut être capable de faire une hypothèse sur un chiffre inconnu, d'en tirer les conséquences sur les autres chiffres, et de rejeter l'hypothèse si l'on aboutit à une impasse.
- La multiplication d'Aix-Marseille (page 2), est plus "directe".
- La forme QCM de Besançon (soustraction page 32, et multiplication page 33) peut conduire un candidat astucieux à transformer l'exercice en simple vérification.

Remarquons que Aix-Marseille et Besançon proposent la même multiplication à trou. Ceci peut être constaté sur d'autres items. Est-ce la preuve d'une certaine pauvreté dans le stock des tests existants ? Certains candidats ne seront-ils pas conduits à se préparer en fonction de ce stock, qui sera vite public ?

La capacité à exploiter une représentation plane de l'espace

Il est certainement utile qu'un P.E. ait une bonne vision de l'espace, et une maîtrise de ses représentations. On peut penser que l'année de PE1 ne suffira pas à combler un handicap dans ce domaine. Néanmoins, il me semble que, dans certains items des IUFM visant à vérifier cette capacité, les difficultés peuvent être importantes :

- Aix-Marseille propose le codage de patrons d'un cube. Sans le support d'une représentation en perspective, il faut imaginer les relations de voisinage entre faces, et les orientations relatives.
- La reconnaissance des patrons d'un tronc de pyramide (Poitiers page 19) paraît plus abordable. Par contre, le dénombrement d'un empilement de cubes en perspective demande un effort intense de représentation mentale de cet empilement sous différentes vues.
- La reconnaissance du patron d'un cône (Nantes page 26) me semble demander des connaissances en géométrie dans l'espace qui dépassent le niveau P.E. : savoir que "refermer" le triangle du choix "B" ne peut conduire à former un cercle de base pour des questions de distance.
- Il en est de même des propriétés des figures planes dans un cube, demandées à partir d'une représentation en perspective (Strasbourg, page 9).

La connaissance des nombres décimaux

A Poitiers (page 16) et à Besançon (page 33) on trouve deux items de forme QCM, très semblables, relatifs au nombre de décimaux compris entre deux décimaux consécutifs donnés, ayant deux chiffres à droite de la virgule. Ce type d'item est couramment posé au cours moyen et à l'entrée en sixième, pour déceler chez des élèves apprenant les décimaux, une conception "discrète" des décimaux. On peut donc y voir une tentative d'évaluer chez les candidats P.E.1 une connaissance pré-requise. Je m'interroge pourtant sur la validité de cette évaluation hors contexte d'apprentissage. Une bonne réponse témoigne-t-elle nécessairement d'une connaissance non superficielle des décimaux ? Une réponse erronée prouve-t-elle davantage qu'un oubli du vocabulaire ?

Conclusions

Dans le contexte actuel de forte concurrence, on ne peut qu'être d'accord avec la volonté de sélectionner de façon rigoureuse les candidats PE1, et il est certain que l'examen du "passé universitaire" des candidats n'est pas suffisamment prédictif pour notre discipline. En ce sens, une épreuve en mathématiques constituerait un progrès, dans la mesure où l'on serait raisonnablement confiant dans sa pertinence.

Pour l'étude que vous m'avez demandée, j'ai retenu trois entrées, le contenu, le niveau et la forme des tests.

- Concernant le **contenu des tests** , deux travers peuvent être aperçus :
  - l'un consisterait à donner une importance excessive à des items de nature logique, hors du contexte mathématique de l'enseignement en PE ;
  - dans l'autre, des champs comme la mesure et les mécanismes opératoires, domineraient de façon excessive les autres champs mathématiques.

  Il semble donc raisonnable de retenir, dans les compétences évaluées, une répartition équilibrée des thèmes notionnels et logique.
- La sélection ne doit pas être un "préconcours". Cependant, on doit aussi prendre en compte l'impossibilité de couvrir pendant l'année de PE1 tout le champ des mathématiques du concours. Un bonne sélection devra donc comporter à la fois des items de **niveau "pré-requis"**, et des items de **niveau "concours"**, au sens où nous les avons définis plus haut. Une répartition où le premier niveau dominerait légèrement semble la plus raisonnable.
- La question de la **forme des tests** est la plus délicate.

  Le QCM paraît à première vue la forme la mieux adaptée à une épreuve qui doit rester légère, pour le candidat qui la subit, comme pour l'institution qui la met en oeuvre. Cependant, j'ai rappelé ci-dessus le risque de non-fiabilité qui peut résulter de ce choix : émiettement des connaissances, rôle du copiage et du hasard. Par ailleurs, le coût du codage des réponses n'est pas à négliger, même si celui-ci est confié à des opérateurs de saisie non spécialistes.

  On peut y opposer la forme "série de problèmes courts". Diverses modalités pourraient permettre d'alléger sa correction. Des réponses "fermées" pourraient être retenues dans un premier temps, pour les candidats sur lesquels elle ne laissent pas de doute. Les "explications, justifications, démarches", seraient prises en compte pour les autres. L'appréciation des réponses ne serait pas nécessairement confiée exclusivement à des spécialistes de l'enseignement des mathématiques. Ces correcteurs "intelligents" pourraient faire l'entrée en machine, avec une meilleure fiabilité que des opérateurs de saisie.

Je pense qu'en tant qu'enseignants de mathématiques, nous avons les moyens d'apprécier la pertinence et la fiabilité de problèmes courts. Au contraire, le choix de la forme QCM ne devrait pas être retenu sans une étude très sérieuse sur ces deux points.

Sur un plan plus général, je voudrais souligner que les quelques idées présentées ici ne sont qu'un point de départ pour un travail ultérieur, qui, comme l'a souligné le département de mathématiques, ne pourra se faire sans moyens.

Rennes, le 27 septembre 1994

J.B. LAGRANGE

PRAG de Mathématiques
IUFM de Bretagne

Titre	Réflexion sur les tests
Auteur	Collectif
Date	Mars 1995
Origine	Document élaboré par un groupe de travail au cours du stage d'Angers
Contenu	Propositions concernant la conception et les modalités des tests, leur finalité ainsi que leurs conditions de faisabilité.

RÉFLEXION SUR LES TESTS

I - Conceptions et modalités

Après l'étude du document de J. B. Lagrange, et l'examen de plusieurs sujets proposés l'an passé, nous avons tenté de clarifier les différents choix possibles concernant ces épreuves.

1er choix (correction)

QCM

- soit correction automatique,
- soit correction par des "experts".

Pas QCM

- une correction par des "experts" est nécessaire afin de limiter les difficultés d'interprétation des résultats.

2ème choix (réponses correctes)

QCM

- soit 1 seule réponse juste par item,
- soit plusieurs réponses justes par item.

Cette 2ème proposition nous semble mieux adaptée pour évaluer avec plus de finesse le niveau des étudiants.
Le travail informatique de traitement des données peut être résolu aisément comme le montre l'expérience de Bordeaux en 94.

3ème choix (mode de sélection)

- Soit ces tests apportent un "plus" pour le tri des dossiers
- Soit ils ne servent qu'à présélectionner des dossiers (avec "remise à zéro" avant un second tri)

4ème choix (poids des items)

- poids des items identique pour tous
- ou poids différents

Cette deuxième possibilité nous semble préférable mais soulève d'autres questions concernant la gestion du temps de passation.

5ème choix (gestion du temps)

- soit favoriser les esprits "lents" en prévoyant un large temps de réflexion
- soit au contraire rendre pratiquement impossible le traitement de tous les items afin d'obliger le candidat à trier les questions à traiter en fonction de ses possibilités et du barème ou d'un degré de difficulté annoncé.

6ème choix (traitement des résultats)

Différencier les réponses fausses des non réponses. Par exemple,

- pour les réponses erronées, prévoir des points négatifs (soit un nombre fixe, soit le poids réservé à l'item)
- en cas de plusieurs réponses justes à un item, attribuer une partie des points lorsque les réponses sont incomplètes

7ème choix (barème)

- soit le barème est annoncé clairement aux étudiants
- soit il est absent du document

8ème choix (liens avec les autres disciplines)

- soit les tests de maths sont traités indépendamment des tests d'autres disciplines
- soit ils sont jumelés avec les tests d'autres disciplines (Exemple : Math, Français, Culture générale)

9ème choix (note éliminatoire)

Faut-il imposer ou non une note éliminatoire par discipline ?

10ème choix (la "barre")

- soit placer la "barre" très haut pour sélectionner
- soit la fixer en fonction d'un niveau de connaissances jugé "minimum"

II - Finalités des tests : "Que veut-on tester ?"

Pour faire avancer notre réflexion sur le contenu possible de ces tests, nous avons pu profiter de celle de Joël Briand qui repose sur deux années d'expérience en tant que responsable de "A à Z" de la conception de telles épreuves à l'IUFM de Bordeaux.

Une alternative apparaît :

- Faut-il un programme cadré et officiel qui donne aux étudiants la possibilité de se préparer ? (Voir le document de Rennes)
- Faut-il, au contraire, chercher à mettre en évidence un manque ou une absence de culture mathématique ?

Cette dernière hypothèse nous a poussés à réfléchir à la question : comment débusquer certaines lacunes ou conceptions erronées ?

Exemples :

"Le produit de deux nombres est-il toujours supérieur à chacun des deux termes du produit ?"

"Tout nombre est-il inférieur à son carré ?"

Mais alors se pose un problème de formulation sous forme de QCM ! Exemple :

"3 x est toujours supérieur à x"

⇒ Cette proposition est vraie pour N
⇒ Cette proposition est vraie pour Z
⇒ Cette proposition est toujours vraie
⇒ Cette proposition est toujours fausse

En Algèbre il nous semblerait intéressant aussi de tester :

- La compréhension des écritures littérales
- Les confusions entre "équation et égalité"

Autres idées importantes :

◊ Tester la cohérence entre "écritures algébriques et représentations graphiques"

◊ Tester la cohérence entre "écritures algébriques et résultats numériques"

◊ Tester la capacité à lire un texte par exemple en géométrie en proposant un "test de closure" ou en demandant de réorganiser un énoncé de problème.

◊ Tester l'aptitude à la démonstration par exemple en partant d'une propriété constatée dans un cas particulier de figure et en demandant si la propriété est conservée dans le cas général.

III - Conditions de faisabilité

La solution bordelaise semble intéressante à mentionner.

Tout d'abord ne pas se limiter à des QCM avec une seule réponse juste

Sur le plan pratique, proposer par exemple pour chaque item 5 cases réponses possibles qu'il suffit de cocher et en dessous une deuxième ligne comportant 5 cases "repentirs" permettant au candidat de corriger certaines réponses après relecture.

La position des bordelais semble évoluer vers des tests avec des items "barèmés" de façon progressive mais avec une contrainte de temps qui impose aux candidats un choix des items à traiter.

Cette évolution semble aller de pair avec l'idée de rendre cette épreuve très sélective pour parvenir à un nombre très limité de dossiers à examiner.

Le traitement des données est confiée à une entreprise spécialisée qui transmet à l'IUFM un produit exploitable pour une correction automatique.

Il nous semble important de souligner aussi que la responsabilité de l'opération est confiée de A à Z à un responsable entouré d'une petite équipe et que ce travail pour être mené à bon terme nécessite de l'investissement du temps et donc des moyens en heures et en matériels.

Ceci est actuellement pris en compte à Bordeaux, qu'on se le dise !

IV- Conclusion provisoire liée au contexte actuel

Nous avons bien pris conscience de la complexité de ce système de présélection. Nous manquons de recul et regrettons d'avoir à traiter ce sujet épineux dans l'urgence.

Cependant nous pensons que dans le contexte actuel ce système est moins injuste que le simple tri des dossiers. C'est pourquoi nous tenons à améliorer notre réflexion à la lumière des expériences de cette année.

Nous souhaitons aussi solliciter l'avis du plus grand nombre et attendons vos réactions à propos de cette première analyse.

PARTIE 7

Intégration des nouveaux formateurs

A chaque rentrée, les IUFM recrutent de nouveaux formateurs. Aucune modalité n'est prévue en vue de leur adaptation à leur nouvelle fonction.

Un article propose des pistes pour la détermination de ce qui pourrait devenir un minimum en formation.

Cet article est suivi d'une bibliographie (non exhaustive) donnant quelques repères pour ces collègues.

Titre	Formation des nouveaux formateurs - Éléments de réflexion
Auteur	Collectif
Date	Mai 1995
Origine	Document rédigé au cours du stage d'Angers (mars 95) et revu lors du colloque de Douai (mai 95)
Contenu	Exposé de problèmes posés par la formation des nouveaux formateurs intervenant dans le premier degré. Proposition de mise en place d'une structure et de stratégies permettant d'assurer cette formation

FORMATION DES NOUVEAUX FORMATEURS ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION

Lors du stage d'Angers (mars 1995), un groupe s'est penché sur le problème de la formation des nouveaux formateurs. Il a soulevé quelques problèmes et amorcé une réflexion qui a été poursuivie lors du colloque de Douai (mai 1995). C'est donc l'ensemble de la réflexion que nous livrons ici.

Rappelons que la formation et l'intégration de nouveaux formateurs est indispensable au maintien et à l'enrichissement de l'expérience professionnelle collective des formateurs intervenant dans le premier degré. Ce problème concerne donc l'ensemble du réseau.

Elle ne concerne que la formation des P.I.U.F.M. et celle des enseignants-chercheurs.

Un aperçu des divers problèmes rencontrés

- Certains I.U.F.M. recrutent des professeurs qui ne souhaitent pas s'investir dans la formation des professeurs d'école ; ils ne souhaitent donc pas non plus se former... C'est à l'équipe de mathématiques d'être vigilante sur le recrutement.

- Il semble encore nécessaire de séparer la formation des formateurs de professeurs d'école de celle des professeurs de lycée-collège : en effet les formateurs du premier degré restent des formateurs institutionnels (exerçant à temps complet) ; ce qui n'est pas le cas du second degré où l'optique qui prévaut est une liaison permanente terrain-formation pour le formateur : les formateurs continuent d'exercer une partie du temps en collège ou en lycée.

  De plus la formation du premier degré ne doit pas se limiter à une réflexion sur les mathématiques : elle doit inclure une réflexion sur la pluridisciplinarité et sur la liaison entre formation disciplinaire en I.U.F.M. et stages sur le terrain ;

- La formation actuelle des nouveaux formateurs de professeurs d'école se fonde sur le relationnel : un "nouveau" est souvent pris en charge par un collègue ; mais cette prise en charge relève souvent du tutorat. Ceci soulève de nombreuses questions.
  - Y-a-t-il formation s'il n'y a que reproduction ?
  - Comment le nouveau peut-il s'informer s'il est seul dans le centre ? si tous les "anciens" sont partis à la retraite ? s'il n'y a pas de réelle équipe d'accueil ?

Les principes qui ont été dégagés

1) La formation du nouveau formateur doit être incluse dans son service, soit à titre permanent (un temps reconnu pour veiller à sa formation personnelle), soit en alternance (stages de plusieurs jours de formation de formateurs)

2) La formation doit inclure :

- la possibilité pour le nouveau formateur de travailler avec un réseau d'I.M.F. qui lui permette de bénéficier d'un terrain d'observation et d'exercice de situations d'enseignement (observer, analyser, préparer, tester des situations d'enseignement avec la complicité d'un expert du terrain),
- une formation en didactique des mathématiques et dans les disciplines liées à l'enseignement des mathématiques à l'école et à la formation des enseignants (pédagogie, psychologie, sociologie, etc.) ; cette formation doit d'abord être personnelle[1], mais il serait souhaitable qu'elle devienne institutionnelle ;.
- la possibilité, en accord avec I.U.F.M. et surtout l'Inspection Académique du département, d'un stage en responsabilité comme professeur des écoles pendant au moins quinze jours dans une classe de l'école élémentaire pour apprécier plus justement les conditions d'exercice du professeur d'école[2],
- un vécu effectif de situations de formation[3], par exemple en assistant aux cours de ses pairs soit dans son centre, soit dans un autre, suivi de discussions et échanges avec le responsable de la situation de formation.

Pour éviter les méfaits d'une simple reproduction des pratiques vues, il est souhaitable que le nouveau formateur bénéficie de conseils du maximum de collègues. L'idéal serait qu'il soit intégré à une équipe de l'I.U.F.M. qui fonctionnerait déjà de manière autonome.

Mais il nous a semblé intéressant de réfléchir à une organisation nationale de la formation, à coût minimal et autonomie maximale : d'où l'idée d'un "Tour de France" du nouveau formateur.

Modalités possibles

* Certains I.U.F.M. se proposent pour accueillir (proposition d'heures de formation) un groupe de nouveaux formateurs pour deux (ou plus) jours de formation sur un thème déterminé.
* Un calendrier de stages est arrêté nationalement.
* Chaque I.U.F.M. ayant un nouveau formateur de mathématiques dans son équipe accepte de le libérer pour ce *"Tour de France"* (en diverses étapes) et de prendre en charge ses frais de mission. Il communique son nom à l'organisation qui coordonne cette formation.
* L'organisme coordonnateur peut être la COPIRELEM si ses nombreuses charges le lui permettent, soit un collectif de formateurs[4] qui bénéficient de crédits de réunion par la DESUP. Cette organisation demande pour chaque participant des frais d'inscription correspondant aux courriers et photocopies distribuées.

Avantages

* La formation est répartie sur plusieurs centres, ce qui limite les risques de reproduction des pratiques d'un unique conseiller.
* Les nouveaux formateurs se mettent en réseau, ce qui leur permet d'échanger sur les pratiques respectives.
* Les nouveaux formateurs, quelle que que soit la situation de leur centre, rencontrent des "anciens" et sont confrontés à diverses organisations d'I.U.F.M..
* Le coût de formation, à la charge de chaque I.U.F.M., est relativement minimal. Chaque I.U.F.M. engage des frais pour "ses" nouveaux.
* Les déplacements de formateurs de formateurs sont minimisés, ce qui rend ces derniers plus disponibles.

---

[1] Voir ci-après des éléments de bibliographie.

[2] Ce type de stage a fait partie intégrante du stage national de formation autrefois destiné aux professeurs d'école normale. Tous les bénéficiaires ont reconnu les avantages d'un tel séjour sur le terrain comme maître remplaçant.

[3] Pour la commodité du propos, on distinguera :

- situations de formation : des situations qui s'adressent à des professeurs des écoles à venir ou en exercice

- situations d'enseignement : des situations mathématiques en direction d'élèves de l'école élémentaire.

[4] A l'issue du colloque de Douai, certains formateurs se sont déclarés prêts à consacrer une partie de leur temps à une réflexion (moyennant des possibilités de se réunir) sur le vaste problème de la formation des "nouveaux".

Titre	Éléments de bibliographie pour les nouveaux formateurs
Auteur	Collectif
Date	Mai 1995
Origine	Document rédigé lors du stage d'Angers (mars 95) et du colloque de Douai (mai 95)
Contenu	Références d'ouvrages donnant des repères et des pistes dans différents domaines liés à la formation des enseignants.

ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE POUR LES NOUVEAUX FORMATEURS

Avertissement

Cette bibliographie a été établie collectivement lors du stage d'Angers (mars 1995) et du Colloque de Douai (mai 1995). Elle est bien sûr non exhaustive et a pour objectif de donner le plus rapidement possible "une ambiance" de formation.

Elle ne répertorie pas d'ouvrages de mathématiques, ni d'histoire des mathématiques, à proprement parler.

Elle donne des repères et des pistes dans six domaines étroitement liés à la formation des enseignants en mathématiques. Elle comprend :

1) des écrits directement prévus pour la formation
2) des livres donnant une vue d'ensemble sur les mathématiques de l'école élémentaire et les démarches actuellement préconisées
3) des éléments de didactique des mathématiques plus ou moins généraux, plus ou moins précis
4) quelques ouvrages de synthèse sur la formation d'adultes en général, enseignants de mathématiques ou non
5) quelques ouvrages sur les disciplines liées à la didactique (pédagogie, psychologie, sociologie, etc.)

Il n'existe pas d'ouvrage de vulgarisation sur l'enseignement des mathématiques à l'école. Or cet enseignement relève de divers domaines sur lesquels il est nécessaire de connaître certains éléments ; ces éléments ne peuvent pas non plus se trouver dans des ouvrages de vulgarisation.

D'où l'impossibilité a priori d'une lecture linéaire des divers ouvrages....; parlons plutôt d'une lecture que certains qualifieraient de spiralaire.....

1) Exemples de situations ou de cours pour la formation en math des PE

- ***Annales du concours externe CRPE*** avec corrigés (1992, 93, 94), I.R.E.M. de Bordeaux.

- ***Documents pour la formation en didactique des mathématiques des professeurs d'école***, COPIRELEM, 1992 (Cahors), 1993 (Pau), 1994 (Colmar) disponibles à l'I.R.E.M. de Paris VII (Cahors et Colmar) et à l'I.R.E.M. de Bordeaux (Pau).

- ***Se former pour enseigner les mathématiques***, M. Pauvert, etc. (Ed. A.Colin, 1993) quatre tomes :

  1 - Problèmes, Géométrie

  2 - Maternelle, Grandeurs et mesures

  3 - Numération, Décimaux

  4 - Opérations, Fonctions numériques

2) Aides pédagogiques et textes sur l'école élémentaire

- ***Instructions officielles et programmes*** (1978, 1985, 1995) et documents officiels d'accompagnement (1985, Géométrie).

- ***Contributions à l'enseignement mathématique contemporain. La proportionnalité et le calcul numérique.*** texte de la C.O.P.R.E.M., CRDP de Strasbourg.

- ***Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire***, par E.R.M.E.L. (Equipe de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire), Ed. Hatier.

  CE : 2 tomes (1979)
  CM : 3 tomes (1981-82)

- ***Apprentissages numériques GS** (1990), **CP** (1991), **CE1** (1993)*, trois tomes par ERMEL, Ed Hatier

- Revue ***Grand N*** de l'I.R.E.M. de Grenoble

- Livre du maître de la collection ***Atout Math***, Ed Hachette (1989 à 1993) pour la partie introductive.

- ***Aides pédagogiques de l'APMEP*** ; un tome pour le CE, et trois tomes pour le CM :

  Géométrie (1983),
  Situations-problèmes (1987),
  Décimaux (1986)

- Publications A.P.M.E.P. ***La multiplication*** (1976), ***La division*** (1977).

3) Pistes de didactique

Pour commencer sur la didactique des mathématiques

- M.Artigue, R.Douady (1983), ***De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle***, Cahier de didactique n°6 de l'I.R.E.M. de Paris VII.

- A.Robert (1988), ***Une introduction à la didactique des mathématiques***, Cahier de didactique n°50 de l'I.R.E.M. de Paris VII.

- M.Henry (1991), ***Cours de sensibilisation à la didactique des mathématiques***, IREM de Besançon.

D'un deuxième niveau

- Volume 7/2 (1986) de ***Recherche en didactique des mathématiques***, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble avec deux articles :

  ◊ ***"Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques"***, Guy Brousseau.

  ◊ ***"Jeux de cadre et dialectique outil-objet"***, Régine Douady.

- M. Artigue (1986), Article-conférence ***"Une introduction à la didactique ds mathématiques"***, dans *Actes des Colloques COPIRELEM de Guéret 1985 et Quimper 1986*, sur la comparaison entre théorie des situations et dialectique outil-objet.

- Y. Chevallard (1985), ***La transposition didactique***, Ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

- P.Jonnaert (1988), ***Conflits de savoir et didactique***, Ed de Boeck Université, Bruxelles

Sur la didactique des sciences

- S.Joshua, J.J.Dupin (1993), ***Introduction à la didactique des sciences et des mathé-matiques***, PUF.
- J.P.Astolfi, M.Develay (1993), ***La didactique des sciences***, PUF Que sais-je ?

4) Formation d'adultes

- D.Chevalier dir. (1991) ***Savoir faire et pouvoir transmettre***, Ed de la Maison des Sciences de l'Homme.
- Postic et de Ketele (1988), ***Observer les situations éducatives,*** Ed PUF ou Seuil.
- M.Develay (1994), ***Peut-on former les enseignants***, Ed E.S.F.
- F.V.Tochon (1993) ***L'enseignant expert***, Ed Nathan.
- P.Perrenoud (1994), ***Entre théorie et pratique***, Ed L'Harmattan.
- M.Altet (1994), ***La formation professionnelle des enseignants***, Ed PUF.

5) Un peu de pédagogie, psychologie, sociologie....

- J.P.Astolfi (1992), ***L'école pour apprendre***, Ed E.S.F.
- A.Weil-Barrais dir. (1993), ***L'homme cognitif***, Ed PUF.
- B.Charlot, E.Bautier, J.Y.Rochex (1992), ***Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs***, Ed A.Colin.

PARTIE 8

Conférences

Titre	Rapport entre mathématiques et didactique dans la formation professionnelle initiale (en mathématiques) des professeurs d'école
Auteur	Aline ROBERT (Université et IREM Paris VII)
Date	27 mars 1995
Origine	Conférence, lors du stage COPIRELEM d'Angers. Texte écrit fourni par l'auteur. (Toutefois, la bibliographie correspondant aux références indiquées dans le texte ne nous a pas été fournie).
Remarque	Cette conférence forme un tout cohérent avec celle de Denis BUTLEN reproduite plus loin.

RAPPORT ENTRE MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE INITIALE (EN MATHÉMATIQUES) DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

INTRODUCTION Conjoncture et éternité

Les formateurs des futurs professeurs d'école sont placés devant plusieurs difficultés nouvelles, notamment le choix des problèmes à poser au concours (CAPE) et le choix de la préparation à ce concours, étroitement lié au précédent (cf. M.L. Peltier). On voit bien que ces difficultés sont nouvelles dans la forme mais rejoignent les "problèmes éternels" des formateurs.

Grossièrement le choix actuel s'effectue en effet en termes de "dosage" entre questions strictement mathématiques et questions liées à l'enseignement des mathématiques : faut-il proposer au concours des problèmes que les PE n'auront pas à proposer à leurs élèves, mais qui révèlent une connaissance mathématique suffisante ? Faut-il au contraire leur proposer de s'attaquer à des simulations de situations de classe, mais sans élèves ?

Certes, dans les deux cas, les choix auront des conséquences peut-être différentes sur les formations. Mais dans tous les cas, beaucoup de formateurs s'accordent à penser que, de toutes façons, la seule formation théorique correspondante, même excellente (ce qui reste à définir), ne recouvre pas tout ce que l'on peut apporter aux futurs PE pour les aider à acquérir le plus vite possible un maximum de compétences professionnelles efficaces. Les dilemmes actuels recouvrent les vieux dilemmes : quel concours, quelle préparation au concours, quelle préparation supplémentaire ?

Les deux grandes difficultés récurrentes semblent en effet :

- le problème de la tenue (gestion) de la classe du débutant, quels que soient ses choix pédagogiques,
- le problème de l'adéquation aux différentes classes actuelles (optimisation des pratiques), adaptation permettant des apprentissages suffisants et notamment une meilleure transition avec le collège que ce qui se passe actuellement.

Il est relativement clair que les compétences sous-entendues pour mieux faire face à ces problèmes ne relèvent pas seulement des compétences que l'on peut théoriquement acquérir par la préparation au concours, aussi bonne soit-elle, et ceci sans tenir compte de phénomènes annexes plus importants, souvent soulignés par les formateurs, comme l'oubli complet de ce qui est appris dans le cadre d'une préparation à un concours une fois que l'on est sur le terrain.

Ce qui est posé par ces difficultés, réactualisées par le concours mais toujours présentes en formation professionnelle initiale, c'est l'acquisition individuelle de compétences pratiques, qui devront être mises en jeu par chaque enseignant, en vraie grandeur dans sa classe, et qui, de ce fait, seront toujours différentes, à la fois plus complexes et plus simples que tout ce qu'on pourra dire, que toutes les descriptions que l'on pourra faire.

Plus simples parce qu'elles résultent en partie de décisions instantanées, sans longues discussions préalables, économiques ; plus complexes parce que la réalité ne peut être saisie dans sa totalité, que tout discours sur la réalité fait ses choix, opère ses découpages...

Nous voici au coeur du problème, par-delà le strict concours : quelle formation professionnelle doit-on concevoir aujourd'hui pour agir sur les compétences pratiques des futurs enseignants ?

En particulier, la "didactique des mathématiques", liée aux contenus enseignés, liée à la gestion de la classe, ne serait-elle pas une bonne transition entre la théorie et la pratique pour les étudiants relativement peu scientifiques qui sont candidats au métier de PE.

Dans cet exposé, nous allons évoquer d'abord, en amont du problème précis du concours, un bilan des derniers travaux généraux sur ce thème : quels emprunts peut-on y faire, par-delà leur généralité (non liés au mathématiques) ? Comment poser plus précisément en formation ce rapport théorie/pratique ? Et quelle place réserver a priori à la didactique dans tout cela ?

Puis nous expliciterons ce qui nous semble constituer les hypothèses adoptées de fait par beaucoup de formateurs sur ce problème, même implicitement, et nous en déduirons comment la didactique pourrait effectivement intervenir en formation, mais en nuançant, en introduisant l'idée d'une didactique "professionnelle", spécifique (voir texte de la conférence de Denis Butlen).

Enfin, nous aborderons les questions liées aux modalités de la formation, compte tenu de la pluridisciplinarité des PE, et reviendrons alors au concours (voir texte de la conférence de Denis Butlen).

UN BILAN DES TRAVAUX SUR LA FORMATION ; DES QUESTIONS...

A) Survol organisé de travaux généraux sur la formation

Les grandes questions récurrentes qui sont abordées dans les écrits, extrêmement nombreux, présentés souvent donc indépendamment des contenus qu'auront à enseigner les futurs enseignants, voire même du niveau d'enseignement, portent sur

- en amont de la formation, les pratiques professionnelles et les compétences professionnelles des enseignants : à quoi former ? peut-on espérer faire changer des pratiques ?
- la nécessité de former à cette profession d'enseignant, par-delà les études strictement universitaires : quel sens peut avoir une formation (plus ou moins **théorique**) à la **pratique** ?
- les contenus d'une telle formation professionnelle et les modalités de cette formation : comment former ? peut-on s'inspirer des travaux connexes sur la formation des adultes, ou sur d'autres formations professionnelles ?
- les formateurs : qui sont-ils, quelle formation leur donner ?
- l'évaluation des formations
- les formations continues (que nous n'évoquerons pas du tout ici)

Nous éliminons ici, pour des raisons de place, les travaux plus sociologiques, pourtant très importants car ils permettent de saisir les identités larges de la profession et leurs évolutions, ainsi que les travaux historiques permettant d'appréhender les grandes évolutions qui ont eu lieu tant au niveau des institutions qu'à celui des différents recrutements par exemple.

De plus, plusieurs grandes phases ont traversé la littérature sur chaque sujet, lequel est plus ou moins développé suivant les moments. Nous ne présentons ici en fait que les grandes lignes qui se repèrent dans les travaux assez récents (depuis une dizaine d'années, et tout spécialement depuis la conception des IUFM). Un catalogue des travaux sur le sujet de 1970 à 1986 a été réalisé par Bourdoncle et al. (comprenant aussi les écrits sur la formation continue), et cela donne un livre de quelque deux cent pages, alors que chaque écrit y occupe quelques lignes...

La bibliographie jointe à ce travail n'est pas exhaustive : elle présente les ouvrages ou articles cités ou au moins consultés, les revues spécialisées sur ces questions et quelques colloques récents significatifs, essentiellement français ou francophones.

1) Les travaux sur les pratiques des enseignants, ou l'amont de la formation : quelles sont les compétences professionnelles des enseignants ?

Un certain nombre de travaux, plutôt analytiques, présentent des diagnostics de pratiques effectives. En fait depuis longtemps déjà, divers chercheurs comme Postic par exemple, avaient proposé des grilles d'analyse des comportements d'enseignants en classe. Il s'agit de repérer des caractéristiques des pratiques professionnelles, et de leurs variabilités, dans les rapports avec les élèves, la gestion des questions entre le maître et les élèves par exemple.

Parmi les travaux plus récents, Altet par exemple a présenté des grilles de divers comportements en classe attachés à plusieurs styles d'enseignants, qui sont mis en relation avec des effets très généraux sur les apprentissages.

L'hypothèse sur la formation, plus ou moins implicite dans ces travaux, est qu'une connaissance de ces grilles permet au futur enseignant de mieux se connaître et donc de s'améliorer à terme. C'est une sorte d'aide à la pratique réfléchie.

Une autre direction un peu plus récente définit les pratiques dans une perspective plus globale d'expertise : on considère l'enseignant expérimenté comme un expert, le futur enseignant comme un novice, et on cherche à saisir les compétences mises en oeuvre par le premier (cf. Tochon).

Un autre point de vue a été moins exploré, mais fait l'objet de quelques articles intéressants, c'est celui du changement éventuel de ces pratiques professionnelles chez les enseignants, et notamment des effets de la diffusion des produits des recherches sur les pratiques des enseignants qui pourraient être concernés (Crahay, Hubermann...). Il en ressort que le changement est très difficile, et que les recherches diffusent très mal.

Enfin, d'autres aspects plus théoriques doivent être cités ici, même si les auteurs ne relient pas directement leurs propos à la formation. Citons l'article de Mouvet (1989), qui tente de proposer un modèle d'analyse intégrant beaucoup plus fortement les pratiques des enseignants aux contraintes institutionnelles qu'ils subissent et à leurs histoires individuelles.

2) Faut-il former à la profession ? Pourquoi ?

Une des avant-dernières modes de la littérature spécialisée sur ces questions est celle de la professionnalisation du métier d'enseignant, importée du monde anglo-saxon (6) : profession signifie ici gestes professionnels répertoriés, qu'on peut enseigner, ou au moins qu'il faut montrer, voire expliciter.

La raison de cette insistance en France à une formation plus explicite semble tenir en partie à la plus grande difficulté à enseigner actuellement : classes beaucoup plus hétérogènes, même en seconde, classes difficiles, enfants moins concentrés, habitués au "zapping" à la télévision, au bruit, manque plus grand de motivation dû à la fois au chômage et à l'entrée à l'école d'enfants ayant des rapports au savoir variés (cf. Charlot et al. (1992))...

La professionnalisation aurait alors pour objectif de munir les futurs enseignants "d'outils" plus explicites qu'avant, pour improviser efficacement dans des contextes plus variés, plus difficiles.

Mais les premiers travaux de ce genre mettaient sous le mot de professionnalisation des grandes généralités, dictées par un certain bon sens, du type connaissance de la psychologie de l'enfant, des théories de l'apprentissage, des curricula, etc. sans aller regarder plus loin.

En revanche peu de travaux discutent justement de la notion plus précise de "besoins" en ce qui concernerait les compétences précises à transmettre (mis à part les travaux du premier type).

3) Comment former ?

Aujourd'hui, sans remettre en cause ces objectifs, ni l'idée même de formation professionnelle, on commence à préciser autrement les moyens de cette formation qui n'a pas vraiment réussi dans les pays engagés dans le type de programmes généraux évoqués ci-dessus (7). L'accent est donc mis sur la pratique comme devant être d'abord prise en compte, sur le lien à faire ensuite entre la théorie (pédagogique, didactique) et la pratique, auto-analysée par les enseignants apprentis : ce sont toutes les idées de "pratique réfléchie" qui sous-tendent les nouveaux projets de formation (à Genève par exemple un projet tout à fait nouveau de formation des instituteurs à l'université est proposé par Perrenoud et Cifali autour de cette idée centrale de pratique réfléchie (8)).

D'autres courants traversent les écrits : la formation par la recherche a eu beaucoup de succès pendant quelques années, même si une certaine réserve commence à apparaître (10).

Un certain nombre d'auteurs se sont demandés aussi si l'inspiration ne devait pas venir des formations professionnelles d'autres champs : la formation en alternance (cf. stages) a ainsi eu ses défenseurs (comme Chaix par exemple), les spécificités des formations d'adultes ont été très évoquées (11).

Enfin les formations utilisant des techniques spécialisées comme le micro-enseignement (classique sur le sujet, le livre de Altet et Berbaum est paru en 1982 !), la vidéo, ont également été étudiées.

Par exemple, il y a eu l'an dernier, à Lyon, un colloque inter-IUFM qui a largement tenu compte de plusieurs de ces tendances, en proposant de reprendre à la base le découpage actuel entre formations sur le terrain et formations "théoriques" et de le modifier, avec la création d'unités "verticales" partant de pratiques effectives, suivies de modules théoriques testés sur le terrain et ainsi de suite...

De façon générale, on retrouve dans les textes IUFM, comme on a pu trouver déjà dans le rapport Bancel, des traces de ces grandes idées qui traversent les sciences de l'éducation, aussi bien en France qu'à l'étranger et notamment en Belgique, au Canada et en Suisse.

4) Les formateurs

Le partenariat, c'est-à-dire l'idée d'une formation explicitement multi-pôles, est très développé dans les derniers écrits (cf. Zay).

Cependant le problème des formateurs a aussi fait couler beaucoup d'encre. Faut-il les former, et notamment par la recherche ? qui sont-ils ? que doivent-ils savoir ?

Il ne nous semble pas étonnant que rien de définitif n'apparaisse dans la mesure où des problèmes de fond ne sont toujours pas clairs, comme celui des contenus de formation.

5) Évaluations

Quelques évaluations commencent à être présentées, qui ne donnent pas toujours les mêmes conclusions que le désespérant article pionnier de Duru Minguat qui concluait à une moins grande performance des instituteurs formés dans le cadre des Écoles Normales que des autres, formés sur le tas (cf. document DEP de Bressoux).

Cependant tous ces travaux restent très partiels, et notamment parce que le problème de l'évaluation d'une formation est encore plus délicat que celui de l'évaluation d'un enseignement dont on connaît déjà la complexité redoutable, voire insurmontable.

Quant aux thèses sur la formation, je n'en citerai que quatre, celles que je connais sur le sujet, réalisées en France en didactique des mathématiques : il y a trois thèses portant sur des ingénieries en formation initiale d'instituteurs ou PE, une sur la proportionnalité (Pezard), une autre sur le projet global de formation en première année (Houdement), et la troisième sur la description d'un scénario de formation conforme à la théorie des situations (Portugais) ; et il y a un essai de description un peu théorique des situations de formation proposées aux PE (Kuzniak).

B) Questions cruciales ouvertes

a) Lien avec les contenus mathématiques

Ces travaux ne sont pas disciplinaires la plupart du temps, ni nécessairement liés a un niveau donné, primaire/lycée. Nous allons nous demander si cela n'en restreint pas souvent la portée effective.

1) Par-delà les champs disciplinaires

Si l'intérêt des généralités sur le sujet, que ce soit sur les effets espérés ou sur l'efficacité de "la recherche" pour y parvenir, est en effet assez facilement reconnu par beaucoup de formateurs, leur mise en pratique nous semble d'autant plus problématique que ces réflexions sont générales, et universelles : un grand problème de la formation professionnelle tient en effet à sa réalisation effective, à son déroulement en vraie grandeur, à son efficacité éventuelle.

Et chaque formation particulière, de celle des professeurs d'école à celle des enseignants de mathématiques, met en jeu ne serait-ce que des savoirs (disciplinaires) différents, même si toutes ont en commun les préoccupations liées à la pratique professionnelle.

D'où les deux questions suivantes :

- quels sont les points communs et les différences entre les pratiques professionnelles des enseignants de l'école primaire au lycée, et suivant les disciplines ? En particulier que gagne-t-on, du point de vue de la formation, à dégager les aspects communs des aspects plus strictement disciplinaires ?
- est-ce que les aspects professionnels généraux, le fait qu'on forme tous les étudiants concernés à enseigner un certain contenu à des élèves dans le même cadre scolaire, justifient de traiter de manière identique, au moins à certains moments, et dans les textes, toutes les formations professionnelles initiales à l'enseignement ?

Comme nous ne pouvons pas aborder ces questions de par notre propre spécificité, exclusivement mathématique, nous allons tenter de l'aborder juste sur notre domaine.

2) Le cas des mathématiques : quelles différences de pratiques selon le niveau de scolarité ? quelles conséquences possibles en formation ?

Quelles analogies y a-t-il dans l'enseignement des mathématiques à des enfants de l'école primaire, qui ont notamment le même maître toute la journée, et à des adolescents qui ne rencontrent leur professeur que quelques jours par semaine ? Dans quelles mesure ces analogies justifient-elles des formations communes, par-delà les différences de contenus par exemple ?

Nous ne prétendons pas répondre à ces questions ici, simplement nous voulons contribuer à ouvrir le débat en nous plaçant sur le seul terrain des contenus, sans évoquer les aspects plus psychologiques liés à l'âge ou plus institutionnels liés aux cadres scolaires imposés.

A priori les mathématiques ne sont pas les mêmes aux différents niveaux de scolarité, tout en relevant d'un même champ de savoir, et des travaux en cours montrent même qu'il existerait comme des "trous" dans les savoirs enseignés, que ce soit sous forme de savoirs non abordés, ou sous forme de différences brusques de conceptions entre les cycles par exemple (cf. Mercier, Salin, Bolon).

Les contraintes institutionnelles diffèrent fondamentalement entre l'école primaire et le secondaire, bien que le métier d'élève puisse être considéré comme proche dans tous les cas ; les situations précises à mettre en oeuvre (situations didactiques par exemple) ne relèvent pas toujours des mêmes "principes", même si on peut toujours chercher par exemple à faire le plus possible "construire leurs savoirs" par les élèves.

Cependant personne ne nie la réalité d'une (ou peut-être de quelques-unes ?) identité professionnelle des professeurs de mathématiques des lycées et collèges, les différences avec l'identité de professeur d'école étant plus classiques. Qu'en est-il ?

Donnons un exemple, en ce qui concerne les mathématiques, et dans le cas particulier d'une recherche de séquence introductive à une nouvelle notion. Nous pensons que les notions mathématiques de l'école primaire, du collège et du lycée ne relèvent pas toutes de la même épistémologie, et nous en déduisons que ces différences de nature des notions amènent en tout cas des différences importantes dans la conception des situations didactiques à mettre en oeuvre pour les présenter.

Ainsi, à l'école primaire, il y a beaucoup plus de concepts du type "extension" de concepts déjà introduits qu'au collège et surtout au lycée. Ceci nous a amené en particulier à travailler de manière spécifique sur des concepts d'une nature différente, qui apparaissent en quatrième (algèbre) et au lycée (géométrie vectorielle) et que nous avons appelés unificateurs, et formalisateurs (cf. Robert (1992)) : ces notions ont été introduites en mathématiques après que de nombreux problèmes pouvant les faire intervenir aient été résolus autrement, de manière diverse, et le recours aux concepts en question sert alors surtout à donner une même démonstration, économique, générale.

Puis ces notions permettent d'aborder de nouveaux problèmes bien plus difficiles, qu'on ne pouvait pas énoncer sans le recours à ce nouveau formalisme.

De ce fait, les problèmes à présenter aux élèves au moment de l'introduction de la notion ne sont donc pas du même type que ceux qu'on peut imaginer pour introduire un concept extension d'un autre.

Pour introduire la multiplication des décimaux, G. Brousseau ou R. Douady et M. J. Perrin ont conçu des séquences basées sur des problèmes qui prennent sens pour les élèves grâce à ce qu'ils savent de la multiplication des entiers notamment, et de ses liens avec la mesure de surfaces de figures simples, qui vont se généraliser sans changement à des mesures décimales de côtés. Il ne peut pas y avoir de problèmes analogues pour introduire, même sans le dire, les espaces de vecteurs, qui ne répondent pas à une problématique analogue.

Et il y a bien d'autres différences, de rythme notamment, qui ont été soulignées dans d'autres travaux.

Revenons donc à notre question : y a-t-il des conséquences de ces différences pour les enseignants ? Les pratiques professionnelles sont-elles affectées par ces différences de nature des notions mathématiques, et plus généralement par les différences entre les mathématiques enseignées à différents niveaux et les conditions de leur enseignement ? La formation professionnelle doit-elle du coup être plus différenciée ?

Il nous semble, mais ceci est entièrement idéologique, que ces différences liées aux mathématiques doivent être prises en compte dans les formations. Car nous pensons qu'**elles engagent dans des pratiques professionnelles effectivement différentes**, comme nous l'avons suggéré sur un cas très particulier, et que ceci est amplement **renforcé par les différences dans les conditions institutionnelles d'exercice de la profession**.

Nous en déduisons un certain scepticisme sur la portée des travaux encore plus généraux sur la formation. Mais tout ceci reste encore une fois idéologique. Revenons donc à la présentation de ces recherches.

b) De la théorie à la pratique

Qui dit professionnel dit pratique ; est-ce que la formation sous-entend la théorie ?

Côté pratique, nous mettons dans cet exposé le fait d'aller dans les classes, de voir des enseignants, de faire la classe soi-même.

Dans la "théorie" nous mettons des mathématiques, diverses connaissances sur l'enfant, les théories de l'apprentissage, diverses connaissances sur le système éducatif.

Apprend-on en regardant ? En enseignant soi-même ? Plusieurs observations ont déjà suggéré que c'est insuffisant, notamment lorsque les conditions d'enseignement dans lesquelles on est placé sont trop éloignées des conditions pratiquées.

D'autre part si l'on débute dans une classe de but en blanc, on aura tendance à reproduire ce qu'on a connu, du moins à prendre des positions qui s'y réfèrent, ce qui peut aussi être inadapté.

Mais peut-on transférer à sa propre pratique le fait d'avoir appris par exemple que les enfants doivent construire leurs connaissances, et qu'il est moins efficace de les leur exposer d'emblée ? Ou qu'il ne faut pas être trop "copain" avec eux ?

Certains auteurs évoquent une pratique de la théorie, à mettre en oeuvre pour faciliter les transferts de la théorie aux pratiques : par exemple au lieu de se contenter d'expliquer les hypothèses constructivistes, on fait suivre cet enseignement d'applications concrètes à l'apprentissage des décimaux, avec des exemples de séquences faites pour le CM, pour fixer les idées. Mais le futur professeur utilisera-t-il ces séquences l'an prochain ?

Plusieurs obstacles sont déjà connus, notamment :

- les difficultés d'expérimenter quelque chose de nouveau, qu'on n'a jamais vu fonctionner dans les classes,
- la gestion des inconnues qui vont obligatoirement arriver du fait de la classe ; tout ne peut pas être prévu dans le projet de séquence.

La pratique de la théorie rejoint-elle alors la pratique ? Faut-il aller dans les classes voir fonctionner les séquences ? Faut-il les expérimenter soi-même ? Mais on ne peut pas tout voir en un an, on ne peut adapter n'importe quelle séquence à n'importe quelle classe.

La théorie, dans ce schéma, servirait à généraliser à ce qu'on n'a pu voir ou faire soi-même. Mais faut-il commencer par la théorie ou commencer par la pratique ?

D'autre auteurs privilégient l'ordre inverse, et évoquent une théorie des pratiques, différente des théories précédentes, beaucoup plus liée aux contextes, aux situations et aux personnes en cause. Mais là encore se pose la question du transfert à d'autres situations : si tout n'est pas évoqué, aura-t-on suffisamment généralisé, suffisamment donné de moyens de repérer ce qui est en cause pour qu'un transfert soit possible, avec les adaptations nécessaires ?

Et puis, dernières questions et non des moindres : est-ce que toutes les compétences pratiques peuvent, doivent être rationalisées ? De manière provocatrice, y a-t-il des compétences pratiques qui s'acquièrent sans passer par la conscience, ou plus simplement sans passer par une explication ? Dans quelle mesure n'y a-t-il pas des recompositions à partir de certains seuils d'acquisitions ?

C) De la place a priori de la didactique des mathématiques : liée aux contenus, entre théorie et pratique

1) Un champ de recherches

Pour nous la didactique est à l'heure actuelle d'abord un champ de recherches. Il s'agit d'analyser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage d'un contenu mathématique donné, c'est-à-dire qu'il faut se donner les moyens de cette analyse, la réaliser, l'interpréter.

Cela signifie nettement que le chercheur adopte un découpage de la réalité à analyser susceptible de l'aider à repérer des indices pertinents pour la mise en évidence des rapports cherchés. S'il travaille dans une classe, il décidera de s'intéresser ou non aux histoires individuelles des élèves, aux origines sociales, aux représentations de l'enseignant, il se renseignera sur les activités d'un mois ou de deux jours, il relèvera des copies ou des cahiers, ou fera des enregistrements, ou filmera, etc. C'est dans le cadre qu'il aura privilégié qu'il pourra interpréter ses observations.

Or toute cette activité théorique n'intéresse pas l'enseignant, si ce n'est comme garantie abstraite de la validité du travail du chercheur. Cependant les résultats de ces recherches justement peuvent intéresser l'enseignant.

2) Quel outil pour les enseignants peuvent représenter les acquis en didactique des mathématiques ?

Il est difficile de distinguer dans une activité aussi complexe que celle d'enseignant ce qui relève de telles ou telles connaissances du sujet. On peut penser que des acquis en didactique des mathématiques peuvent avoir une influence sur les pratiques individuelles aux divers niveaux suivants :

*** en ce qui concerne la préparation des séances d'enseignement,** l'appropriation par l'enseignant de schémas d'organisation de situations didactiques particulières peut avoir des conséquences. Ou l'enseignant reprend à son compte certaines séquences proposées dans la littérature, ou il en adapte, ou il en met sur pied de nouvelles.

Cependant, sur la plupart des notions abordées au collège et au lycée de telles séquences n'existent pas : peut-on se contenter de quelques séances organisées d'une certaine manière ? Nous ne le pensons pas, ne serait-ce qu'à cause des difficultés à établir un nouveau contrat avec la classe.

Il faut alors nécessairement inventer, ou beaucoup adapter, et ceci sans points de repères sur les résultats partiels à atteindre. Il y a là une difficulté importante, qui se double de problèmes épineux de gestion locale du temps, surtout au collège : les cours y durent 55 minutes, il y a rarement deux heures d'affilée, et on peut perdre tout le bénéfice d'une heure si la séance d'institutionnalisation est trop loin de l'action des élèves.

Qui plus est, dans la plupart des cas, les séances disponibles ne couvrent pas tout l'enseignement d'une notion, elles sont souvent réservées à son introduction. Or une des questions permanentes de l'enseignant est liée au temps à passer sur chaque notion, au bon moment pour passer à autre chose.

De plus, même si une séquence "marche" bien, a déjà été testée plusieurs fois, il y a toujours des adaptations à faire pour suivre les élèves, et souvent le degré de liberté par rapport aux prescriptions est difficile à percevoir, même pour le chercheur !

Enfin, il peut y avoir des contradictions entre les nécessités d'évaluation routinière, exigées par l'institution, et le bon déroulement des activités organisées de manière à privilégier les apprentissages.

*** en ce qui concerne l'analyse de la classe,** la possibilité d'expliquer certaines réticences ou certains dysfonctionnements par la notion de contrat didactique, ou par un manque de dévolution aux élèves est certainement satisfaisante.

Cette analyse peut même conduire l'enseignant a établir un nouveau contrat, ou plutôt à mieux expliciter ses attentes, ou encore à plus s'effacer à certains moments, à se taire plus longtemps. Cela nécessite toutefois une certaine réflexion critique a posteriori sur le fonctionnement de sa propre classe, réflexion qui est loin d'être facile.

*** en ce qui concerne les apprentissages des élèves,** les choses sont beaucoup plus complexes encore.

Bien sûr les analyses d'erreurs classiques peuvent être transférées dans une classe, mais elles sont rares. De plus, souvent les analyses intéressantes ne sont pas locales, elles font intervenir des connaissances antérieures dont les modes d'acquisition sont inconnus de l'enseignant actuel. Elles sont longues à réaliser, et le travail quotidien de l'enseignant l'empêche d'analyser sous cet angle tous ses paquets de copies.

Qui plus est, les "remédiations" sont loin d'être immédiates, lorsqu'il y en a. Bien souvent les erreurs sont repérées, l'enseignant a même des hypothèses sur leurs origines, mais il n'arrive pas à les éliminer chez tous les élèves parce qu'il ne peut pas remonter aux sources, faute de temps, et compte tenu des autres élèves non concernés.

*** en ce qui concerne les discussions entre collègues** en revanche, nous avons pu constater qu'un certain vocabulaire commun, une certaine communauté d'analyses (découpages de la réalité) semblaient beaucoup favoriser les échanges, voire les expériences qu'il est plus facile de tenter à plusieurs.

En résumé, il nous apparaît que des acquis en didactique ne facilitent pas la tâche de l'enseignant : rendu plus exigeant, plus attentif, comprenant mieux les problèmes, il doit beaucoup plus travailler pour mettre au point des séances dont il sait ce qu'il doit mettre dedans mais qu'il doit adapter si ce n'est inventer. Il est sans doute moins naïf, moins facilement content, allant plus derrière les apparences et les illusions de la transparence. Il nous semble difficile d'attendre cela des débutants, pour lesquels les mathématiques enseignées ne sont même pas encore complètement disponibles !

3) Formation ?

Une présentation des notions de didactique des mathématiques par exemple, indépendamment de tout problème de motivation et de désir d'écoute d'un tel cours (hypothèse d'école dont on sait qu'elle est fausse...), ne suffirait pas à notre sens à préparer tous les futurs enseignants, même à la conception de leurs cours (cf. Colomb (1992)).

Plusieurs étapes intermédiaires manquent en effet, nécessairement, qu'un débutant aura du mal à combler : la contextualisation des organisations "théoriques" à faire pour chaque notion à enseigner, qui n'est évidemment pas présentée en "cours de didactique" puisque toutes les notions n'ont pas été étudiées en didactique ; le temps à passer sur la notion, qui n'est pas seulement introduite mais qui doit être développée, évaluée, reprise.. ; le choix des notions introduites de manière banale, et des autres ; la prise en compte des différences entre élèves qui est de plusieurs ordres : connaissances préalables de ces élèves, capacités cognitives selon les âges, etc.

De plus, il nous semble qu'il est difficile de donner du sens à certaines notions très liées à la réalité de la classe, comme le contrat didactique, sans en avoir de référent : il faut dépasser les illusions de la transparence, certes, mais est-ce possible avant d'avoir été confronté à cette transparence ?

Enfin un obstacle très important, qui renforce tout ce qui précède, tient pour nous au fait que les stagiaires ne verront presque jamais d'enseignants utiliser dans leur classe ce qu'on leur expose dans des présentations didactiques. Comment alors combler seul les étapes manquantes ? Comment repérer l'esprit et ne pas s'attacher à la lettre des séquences ? Comment acquérir une certaine assurance ? Il ne s'agit sans doute pas d'imiter complètement les enseignants tuteurs, mais enseigner autrement sans en avoir aucun modèle préalable nous semble illusoire pour la majorité des stagiaires.

A notre avis, les futurs enseignants ont surtout besoin d'acquérir une nouvelle disponibilité de leurs connaissances mathématiques, qui leur garantira l'assurance qui leur manque souvent terriblement même si cela ne se voit pas : ce n'est plus la disponibilité pour résoudre des problèmes non triviaux, c'est la disponibilité de leurs connaissances mathématiques pour s'adapter aux élèves, donc à la fois pour les entendre sur le plan mathématique et pour leur répondre.

Dans cette mesure, l'analyse de situations didactiques comme exemple d'organisation des connaissances peut être utile, mais pas dans le cadre d'un cours de didactique, comme élément participant à la formation pratique des stagiaires, parmi d'autres. Le temps des analyses théoriques complètes pourra venir plus tard.

Hypothèses sur la formation, conséquences sur la formation en didactique

Des hypothèses sur la formation qui semblent admises par tous les formateurs

Il est d'abord clair que les formateurs se placent dans une perspective de temps long, c'est-à-dire qu'ils espèrent influer sur leurs étudiants non seulement sur le moment mais aussi à long terme. D'aucuns supposent que certains éléments de formation ne prennent sens qu'avec le temps, ce qui n'est pas sûr, car comment entendre et retenir à bon escient quelque chose qui ne répond pas à une question que l'on se pose ?

Deux pôles apparaissent dans les objectifs d'action sur les pratiques : un premier pôle concerne les préparations de cours, un second vise à installer des repères un peu systématiques pour analyser le déroulement de la classe ou les comportements des élèves, repères qui devraient être à la disposition du professeur dans sa classe, pour percevoir certains phénomènes, et pour en déduire des décisions, même si c'est par pilotage automatique (ou peut-être surtout ?).

Plus précisément, la formation est considérée comme l'amorce d'un processus plus long, éventuellement relayé par la formation continue d'ailleurs, l'amorce d'une certaine attitude réflexive par rapport à l'exercice de la profession.

Qu'est-ce qui pourrait donc amorcer, et avoir une influence sur les pratiques, bien que transmis par un discours plus ou moins théorique, bien sûr éventuellement précédé ou doublé par des éléments pris sur le terrain ?

■ Par-delà la connaissance de leçons-types, ***une certaine connaissance de ce qui peut varier dans les choix mathématiques des enseignants*** au moment des préparations et pendant la classe, et, corrélativement, une certaine connaissance des choix possibles, avec leurs conséquences.

C'est ce qui permet en particulier à l'enseignant d'adapter des interventions selon les classes, notamment au niveau de ses préparations. C'est peut-être une condition (non suffisante) d'un changement de pratiques. Et ce créneau peut être partiellement occupé par des interventions didactiques.

■ ***Une certaine disponibilité aux élèves,*** la possibilité d'entendre les interventions mathématiques des élèves en sachant dégager les grandes tendances, sans être noyé par les diversités individuelles.

C'est une condition préalable à la possibilité d'adapter ses pratiques, mais qui semble plus difficile à acquérir, surtout hors du terrain. La disponibilité vis-à-vis des élèves demande une certaine aisance de l'enseignant qui peut très bien vouloir être disponible sans y parvenir.

Il s'agirait peut-être en formation de sensibiliser à la réalité de la classe, de familiariser avec les grands types d'erreurs sur un certain nombre de sujets par exemple (cf. analyses didactiques). Cela aiderait à distinguer le conjoncturel de l'essentiel, à lire les réactions des élèves, à évaluer l'action de l'enseignant.

■ ***Une certaine maîtrise relative des phénomènes scolaires plus globaux*** et une certaine conscience de cette maîtrise.

C'est ce qui permet par exemple à l'enseignant de ne pas subir le programme, les manuels et les élèves, d'avoir des marges de manoeuvre, d'en user. Il peut déceler certains choix implicites des manuels, ou les orientations réelles des programmes, il devine aussi les compromis. Là encore on conçoit que les outils didactiques peuvent contribuer à terme à cette maîtrise, une fois bien appropriés par le professeur. Une telle appropriation peut-elle être initiée en formation ?

■ ***Une certaine connaissance de ce qui est invisible en classe,*** de ce qui est caché, de ce qui ne relève pas du bon sens ou de l'écoute naïve.

Ceci nous semble difficile à faire sur le terrain, par définition même !

On reconnaît là par exemple ce qui concerne le contrat didactique, ou encore les perceptions différentielles que les enseignants peuvent avoir de leurs élèves, mais aussi ce que les didacticiens ont mis en évidence récemment sur certaines lacunes dans l'enseignement, signalant certains éléments qui ne sont pas enseignés tout en étant sollicités (cf. Berthelot-Salin, Briand, Mercier). Le passage de l'école au collège est très riche aussi en ruptures de conceptions et de contrats, dont la connaissance, ou plutôt la possibilité d'y avoir accès, est sans doute essentielle.

En résumé, dans l'hypothèse où des interventions théoriques peuvent être entendues et peuvent s'intégrer, être recomposées à des expériences sur le terrain, il apparaît, dans les objectifs des formateurs, des éléments qui pourraient être apportés par des interventions en didactique des mathématiques. De quelle didactique s'agit-il ? Comment intervenir ?

L'intervention de Denis BUTLEN essaie de donner quelques éléments de réponse à ces questions.

Titre	Vers une didactique professionnelle : l'exemple de la formation initiale en mathématique des professeurs d'école
Auteur	Denis BUTLEN (IUFM de Créteil et IREM de Paris VII)
Date	27 mars 1995
Origine	Conférence, lors du stage COPIRELEM d'Angers. Texte écrit fourni par l'auteur.
Remarque	Cette conférence forme un tout cohérent avec celle d'Aline ROBERT reproduite dans les pages précédentes.

VERS UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE : L'EXEMPLE DE LA FORMATION INITIALE EN MATHÉMATIQUE DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

A) MODALITÉS DE LA FORMATION : spécificités des futurs professeurs d'école et impact sur la formation

Les modalités de la formation définissent pour une grande part la formation dispensée

Le formateur doit tenir compte des contraintes de différentes natures qui vont marquer son intervention.

Je vais en développer quelques unes qui sont liées à la nature du public formé, aux caractéristiques du métier de professeur d'école et à certaines contraintes institutionnelles conjoncturelles ou plus durables.

1. La nature du public en formation

Malgré l'accroissement du nombre des étudiants qui semblent se destiner au métier de professeur des écoles, le public recruté est, dans l'ensemble, constitué d'étudiants d'origine non scientifique. Ils n'ont, pour beaucoup, plus fait de mathématiques depuis plusieurs années et gardent souvent de leurs études un souvenir négatif. Ils ne sont pas farouchement opposés aux mathématiques mais ils manifestent de grandes difficultés, des lacunes importantes, y compris sur les notions qu'ils vont enseigner.

Comme beaucoup d'élèves en difficulté, les futurs professeurs d'école n'ont pas des connaissances très fiables, bien organisées en réseau, prenant du sens dans plusieurs cadres.

La formation en mathématique doit impérativement tenir compte de cet état de fait.

Le formateur de mathématiques doit donc combler des lacunes et faire dépasser des obstacles, il doit pouvoir justifier son intervention en s'appuyant sur une analyse rationnelle de l'enseignement, par exemple sur des analyses de procédures et d'erreurs s'appuyant sur des régularités observées dans les recherches didactiques.

Le formateur de mathématiques doit réorganiser les connaissances minimales des étudiants en vue d'un enseignement à l'école élémentaire ; cela suppose que les stagiaires maîtrisent les contenus enseignés mais aussi qu'ils puissent comprendre les articulations existant entre ces différentes notions et leurs prolongements éventuels au niveau du collège.

Cela nécessite donc une mise en réseau de leurs connaissances.

Pour cela, des formateurs peuvent mettre en oeuvre des stratégies de formation organisées selon des schémas directement inspirés de théories didactiques (théories des situations ou dialectique outil-objet par exemple)

Mais surtout, le formateur doit ancrer son enseignement sur l'enseignement à l'école élémentaire. L'expérience professionnelle montre que nous ne pouvons pas trop souvent et trop longtemps faire faire aux étudiants des mathématiques pour elles-mêmes. C'est d'ailleurs une caractéristique frustrante de notre fonction, et dans une certaine mesure elle s'oppose à notre statut de professeur de mathématiques.

On peut signaler au moins trois causes expliquant cet état de fait.

Les étudiants ne sont pas prêts, du fait de leur passé conflictuel avec cette discipline, à faire "gratuitement" des mathématiques.

Ils n'acceptent de revenir et éventuellement de réviser leur conceptions sur les mathématiques que si les notions revues sont finalisées par un enseignement futur.

Les mathématiques ont pris une connotation très utilitaire qui n'est d'ailleurs pas totalement négative. Une réflexion sur les difficultés liées à l'enseignement d'une notion peut être un bon point de départ pour repenser cette notion, pour prendre conscience de ses conceptions erronées et les corriger.

On peut même penser qu'un futur enseignant, ayant rencontré des difficultés pour apprendre, est plus à même d'accepter de repenser les conditions dans lesquelles il a appris.

Il paraît d'autre part légitime d'axer un enseignement en formation professionnelle sur des problèmes d'enseignement des mathématiques et non sur les mathématiques elles-mêmes ou sur un changement de conceptions par rapport aux mathématiques. L'évolution des pratiques de formation des professeurs d'école normale semble montrer qu'un travail sur un changement de conceptions sur les mathématiques ne suffit pas à changer les pratiques des futurs maîtres.

2. Les caractéristiques du métier de professeur d'école

La polyvalence du métier ne peut être ignorée par le formateur.

Elle impose une durée de formation restreinte (autour de 150 heures), qui va conduire le formateur à optimiser son intervention. Il doit construire un discours intégrant différents points de vue : rappels théoriques sur les notions à enseigner mais aussi apport d'informations sur son enseignement (les résultats des recherches en didactique sont ici très utiles), présentation d'ingénieries...

Une impossible recherche d'équilibre ?

Les professeurs d'école doivent enseigner toutes les disciplines de l'école élémentaire et donc être formés pour le faire. Cela va peser sur l'organisation et surtout sur la cohérence de la formation. Celle-ci risque d'apparaître parcellisée, morcelée.

Les équipes de formateurs sont partagées entre deux logiques, entre deux conceptions contradictoires qui s'opposent sur la question du transfert des apprentissages en formation. Plutôt que "transfert", il est sans doute plus approprié de parler de recomposition, de recontextualisation de certains apprentissages professionnels marqués par des contenus disciplinaires. Dans la suite de cet exposé, j'emploierai le mot "transfert" dans ce sens.

La première logique refuse l'existence de "transferts" ou de recomposition entre différents apprentissages, que l'on se situe du côté de l'élève (contenus disciplinaires) ou du côté de l'enseignant (contenus professionnels). La formation des professeurs d'école peut alors être pensée comme constituée d'une juxtaposition de formations disciplinaires, cimentée par un enseignement généraliste de type psychopédagogique (connaissance de l'enfant, des théories de l'apprentissage et du système éducatif).

La seconde logique parie sur l'existence de "transferts" entre les différentes formations disciplinaires ; un enseignement généraliste permet alors au stagiaire de prendre des raccourcis, d'optimiser cette recomposition professionnelle. On peut penser par exemple, que le professeur d'école apprend des techniques de gestion de groupes en Éducation Physique qu'ils repensera afin de les réinvestir en mathématiques où cette forme de travail est incitée mais pas toujours suffisamment travaillée.

La question est loin d'être réglée. Tous les plans de formation essaient de trouver un compromis entre ces deux points de vue. Des textes institutionnels contradictoires incitent tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Ces compromis ne satisfont ni les formés, ni les formateurs.

La formation non disciplinaire des étudiants est généralement vécue par les étudiants comme trop générale, coupée de la réalité, trop théorique. Inversement, une réflexion transdisciplinaire sur les méthodes générales de gestion de classe, assurée en collaboration avec les IMF, ne répond pas toujours à leur demande explicite de recettes.

Il me semble nécessaire d'intégrer dans la formation mathématique des professeurs d'école des éléments leur permettant d'unifier les différents aspects de leur formation. Un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques peut apporter une contribution originale bien que très partielle. En effet, il devrait permettre de contextualiser certains éléments relatifs aux apprentissages généraux, en leur donnant du sens à travers l'enseignement d'un contenu précis et d'amorcer par là des processus de décontextualisation, de recontextualisation ou de recomposition.

Tout cela serait évidemment plus simple si l'on pouvait parier sur l'existence d'une didactique générale, indépendante des disciplines enseignées. Elle jouerait ce rôle de ciment. Nous ne pouvons pas raisonnablement prouver aujourd'hui son existence...

Dans tous les cas, ces questions nécessitent et justifient des recherches transdisciplinaires ou pluridisciplinaires sur les pratiques enseignantes.

3. La nature du concours : le résultat d'une nécessité et la source de contraintes incontournables

L'existence même d'un volet professionnel répond à certaines de ces contraintes et en définit de nouvelles.

Il est impossible de ne pas prendre en compte les conséquences d'un concours en fin de première année. Le texte du ministère renforçant l'aspect professionnel du concours a relancé le débat sur la place des mathématiques dans la formation. Si l'existence d'une épreuve professionnelle est un point d'accord entre les différents formateurs, les contenus et le poids de cette dernière semblent sujets à discussion...

La nature de l'épreuve détermine pour une grande part la nature de la formation de première année.

Voici quelques remarques sur ce point. La thèse de Marie- Lise Peltier [31] apporte des éléments de réponse plus précis et plus complets sur ces questions. Nous renvoyons le lecteur à ces travaux.[1]

Le volet mathématique

Une rapide analyse de 24 sujets de concours de 1987 (concours d'entrée en écoles normales) montre que les épreuves portent essentiellement sur des notions du collège ou du début du lycée et ne font pratiquement pas intervenir certaines notions traitées à l'école primaire ou au début du collège comme l'arithmétique sur les entiers ou les opérations arithmétiques élémentaires. Cela ne veut pas dire que ces notions ne sont jamais abordées dans les exercices proposées, mais elles ne font que rarement l'objet d'exercices spécifiques.

thèmes mathématiques	nombre de questions
algèbre de collège, mise en équation, résolution d'équation	7
géométrie de collège	43
fonctions linéaires et affines : recherche de l'équation, étude... proportionnalité autres fonctions : recherche de l'équation, étude	15
logique, ensemble	2
numération arithmétique, PPCM, PGCD	3 2
suites	6
nombres non entiers	7

Par contre, là encore, une analyse rapide - je vous renvoie une nouvelle fois pour plus de détail au travail très précis de Marie-Lise Peltier sur ce point - montre que de nouveaux thèmes mathématiques sont traités dans le premier volet de la nouvelle épreuve.

En se fiant à la classification établie dans les dernières annales publiées par l'IREM de Bordeaux, on voit que :

- en 1992, 11 sujets sur 27 comportent un exercice d'arithmétique (division, multiples) auxquels il faut ajouter 3 sujets comportant un exercice de numération (4 sujets sur numération et nombres décimaux, fractions)
- en 1993, 9 sujets sur 28 comportent un exercice d'arithmétique (division, multiples) auxquels il faut ajouter 6 sujets comportant un exercice de numération (10 sujets sur numération et nombres décimaux, fractions)

[1] voir aussi l'article de cette brochure qui traite des sujets de concours.

- en 1994, 12 sujets sur 27 comportent un exercice d'arithmétique (division, multiples) auxquels il faut ajouter 4 sujets comportant un exercice de numération (8 sujets sur numération et nombres décimaux, fractions)

Ces thèmes (arithmétique, opérations) font certes l'objet d'exercices de mathématiques mais posent de façon implicite des problèmes liés à l'enseignement élémentaire. Le but est alors de s'assurer que les étudiants maîtrisent suffisamment les contenus mathématiques à enseigner, mais aussi de savoir s'ils ont pris conscience de quelques questions (encadrement du dividende par un multiple du diviseur pour déterminer le nombre de chiffres du quotient dans une division entière par exemple).

Notons que le statut nouveau pris par l'arithmétique dans ces épreuves de concours s'explique aussi par un autre élément : dans leurs études secondaires, rien ne prépare les étudiants à résoudre aisément des exercices d'arithmétique, même simples. En effet ces sujets sont peu traités au collège et au lycée, il était donc difficile de les poser en début de première année.

Les épreuves du premier volet (partie mathématique) sont donc davantage ancrés sur l'enseignement à l'école élémentaire même si leur niveau de traitement relève dans la plupart des cas du collège.

La géométrie semble avoir un statut particulier : elle figure systématiquement (du moins pour la géométrie des figures planes y compris pour une large part Thalès et Pythagore) dans le volet mathématique, alors que son absence est fréquente dans le second volet (4 sur 27 en 1992, 5 sur 28 en 1993 et 6 sur 27 en 1994).

On peut expliquer ce statut particulier de la géométrie par une difficulté des formateurs à cerner les contenus à enseigner à l'école élémentaire et donc à se placer à ce niveau dans les sujets de concours. Cette difficulté est renforcée par le peu de résultats enregistrés en didactique des mathématiques sur le sujet.

À cela s'ajoute enfin le fait que les démonstrations géométriques placent tout de suite le niveau de difficulté à un niveau scolaire au moins égal à celui de la classe de 4ème. Les notions géométriques de l'école élémentaire étant trop simples, l'évaluation ne pourra se limiter à ce niveau.

L'existence du concours change-t-il le rapport aux mathématiques des étudiants, en particulier permet-il d'enregistrer des acquis dans les connaissances des étudiants ?

Je ne peux pas répondre de manière scientifique à ces questions, ces trois dernières années m'amènent à exposer quelques réflexions.

Tous les collègues semblent d'accord pour dire que les étudiants des IUFM sont davantage motivés pour apprendre des mathématiques en première année. Il existe même un bachotage.

Cette attitude se transmet-elle à la seconde année ?

On ne peut conclure positivement. L'attitude des étudiants de seconde année n'a pas fondamentalement changé. Ils acceptent toujours de faire des mathématiques mais finalisées professionnellement. Il est difficile de dire si l'adhésion est plus marquée qu'en école normale.

Les mathématiques de la première année servent-elles en seconde année ?

Là encore, rien n'est évident. Reprenons notre comparaison entre les exercices du volet mathématique de la nouvelle épreuve et les exercices de l'ancien concours. Si l'on regarde les exercices portant sur des thèmes semblables, ils ne sont pas toujours très différents. Les différences ne portent pas sur le niveau de mathématique exigé (notamment en géométrie) mais sur certains thèmes traités.

Les exigences de niveau mathématique semblent les mêmes en début et en fin de première année.

Il est peu probable que des évaluations identiques portant sur des enseignements identiques, produisent des effets différents. Si le rapport aux mathématiques des étudiants de seconde année a changé, cela n'est pas dû aux seuls exercices purement mathématiques.

De plus, il reste à tester ce qui est véritablement acquis lors de ce bachotage mathématique et ce qu'il en reste en seconde année.

On peut, par contre, faire l'hypothèse que l'habitude de résoudre des exercices mathématiques posant des problèmes d'enseignement initialisera une prise de conscience et fera évoluer les conceptions. Il faut sans doute chercher dans cette direction les causes d'éventuels changements d'attitude par rapport aux mathématiques.

Ces remarques m'amènent à conclure à la nécessité de maintenir, voire de renforcer, l'aspect professionnel de la première année, à travailler dans une optique de formation intégrée sanctionnée par des épreuves mélangeant mathématiques et traitement des aspects professionnels du métier.

Quel(s) but(s) spécifique(s) peut-on assigner à la première année de formation, à la seconde année ? Quels découpage peut-on envisager ? Quel sens prend, dans ce cadre, un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques ?

Je ne pense pas que l'on puisse et doive faire un choix très strict entre les thèmes mathématiques à traiter en première et en seconde année ; les contraintes de temps imposent un découpage qui peut être négocié localement (voir la thèse de Catherine Houdement [27]).

Les différences entre première et seconde année se situent à mon avis dans les exigences que l'on peut attendre des étudiants sur les connaissances mathématiques et sur les problèmes professionnels. C'est évidemment à ce stade qu'intervient un enseignement d'éléments de didactique.

La différence se situe dans le degré de disponibilité de ces connaissances pour les élèves. Il est plutôt local en première année, plutôt global, c'est-à-dire plus complet, en seconde année.

Les formateurs semblent assez d'accord sur la nature des épreuves professionnelles : amorce d'analyse a priori de séquences d'enseignement, analyse de procédures, d'erreurs ou de performances d'élèves. Le point de vue adopté en première année semble limiter les exigences à des analyses locales des phénomènes d'enseignement. La construction de progression, l'analyse de certaines notions plus générales comme le contrat didactique, quand elles sont explicitées dans les programmes de formation, relèvent plutôt des exigences de seconde année.

Un enseignement d'éléments de didactique ne doit et ne peut prendre de sens que dans ce cadre.

Comment intervient - il ?

Certaines théories didactiques (théorie des situations, dialectique outil - objet) peuvent servir de guide implicite en première année, plus explicite en seconde année, pour l'organisation d'un enseignement se fixant pour but une réorganisation en réseau des connaissances des étudiants, la stratégie du formateur relevant plutôt d'un schéma de type homologie (nous adoptons la classification des stratégies de formation de A. Kuzniak [28]).

Les exigences professionnelles de première année sont fixées par l'état actuel des épreuves du deuxième volet : analyse locale de phénomènes d'enseignement (analyse a priori et a posteriori de séquences, de productions et de performances d'élèves). Il s'agit donc d'organiser un enseignement professionnel le permettant. Cela impose, à mon avis, l'introduction d'un enseignement spécifique, dont le degré de formalisation reste à préciser, de quelques éléments de didactique des mathématiques, ces éléments ayant fait l'objet d'une transposition en vue d'un enseignement professionnel.

Une évaluation de type concours, avec une épreuve en temps limité, impose un type de sujet. La nécessité de proposer aux candidats un nombre réduit de documents à étudier et des raisons de docimologie amènent, de fait, à réduire les exigences du formateur.

À cela, s'ajoutent des raisons évidemment déontologiques, une évaluation portant sur des notions mises au point lors de recherches et présentées sans précautions, en particulier sans restituer les conditions de l'expérience, amènerait à une présentation appauvrie et dogmatique de ces dernières.

En seconde année, le formateur pourra poursuivre un effort d'explicitation de ses stratégies de formation, des choix qu'il a fait, et traiter de problèmes professionnels plus globaux : construction de progression, gestion de classe..., qui feront intervenir d'autre éléments de didactique (là encore transposés partiellement) : ingénieries, éléments de théories, contrat didactique...

Le formateur cherchera à transformer l'essai, tant au niveau des conceptions sur les mathématiques que sur leur enseignement. Cela doit toutefois, à mon avis, être initialisé en première année. Ainsi, la séparation souvent faite en géométrie (formation mathématique en première année, formation professionnelle en second année) ne me semble pas adaptée.

B) UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE

On ne peut pas confondre un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques en formation professionnelle et un enseignement de didactique ayant pour but d'initier à la recherche (DEA de didactique).

Si nous nous situons à un premier niveau, celui de l'enseignement des mathématiques à des élèves de l'école élémentaire, un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques ne prend de sens que dans une stratégie globale de formation basée sur le constat fondamental suivant : on ne peut pas enseigner les notions mathématiques de l'école élémentaire en adoptant une organisation ne prenant en compte que le seul point de vue mathématique ; il est indispensable de tenir compte des élèves et des modes de construction de leurs connaissances. Les conceptions des élèves relèvent d'une organisation spécifique, différente de l'organisation des savoirs savants, devant être explicitement prise en compte.

La prise de conscience de ces deux types de fonctionnement est indispensable et oriente toute la formation professionnelle. Un enseignement d'éléments de didactique va s'inscrire dans cette problématique. Il va de ce fait intervenir à plusieurs niveaux, avec des objectifs différents et un degré d'explicitation variant selon les thèmes et les années.

À un autre niveau, celui de l'enseignement des mathématiques aux PE, la didactique des mathématiques peut aider le formateur dans son action visant à réorganiser les connaissances des étudiants. Il peut par exemple construire son enseignement en s'inspirant de certaines théories didactiques comme la théories des situations ou la dialectique outil - objet et les jeux de cadres. Cependant ces théories restent souvent implicites, ne fonctionnent explicitement, du moins dans un premier temps, que pour le formateur, et interviennent essentiellement dans des activités d'homologie.

Il n'est pas impossible de penser que des explicitations ou des institutionnalisations locales puissent déboucher sur une présentation explicite de certains éléments de ces théories, par exemple en seconde année.

Ceci étant dit, compte tenu de ces deux niveaux,

Quels sont les concepts que l'on peut utiliser, aborder et expliciter dans un enseignement de formation professionnelle de professeur d'écoles ? Quelles transformations le formateur a-t-il fait subir à ces objets pour les présenter, afin notamment de s'en servir comme outil d'analyse dans son enseignement ?

Je prends immédiatement une précaution : la plus grande part des idées que j'ai avancées jusqu'à maintenant et que je vais développer par la suite ne sont pas encore des résultats de recherche, mais le résultat d'un effort de rationalisation de mon expérience professionnelle et de celle de mes collègues.

La recherche que je mène actuellement sur les gestes professionnels des professeurs confirmés et stagiaires, bien que s'appuyant sur certaines de ces hypothèses, n'est pas assez avancée pour me permettre de conclure de façon scientifique.

Quelles sont les notions didactiques pouvant faire l'objet d'une présentation explicite en formation professionnelle ?

Ce sujet a déjà été débattu lors de nos colloques et dans nos stages et a déjà fait l'objet de textes collectifs ou individuels d'une partie d'entre nous.

Il est nécessaire de distinguer différents types de résultats des recherches en didactique des mathématiques.

Les résultats portant sur les conceptions des élèves relatives à une notion donnée, sur leur genèse, sur certaines typologies de procédures ou d'erreurs, sur des degrés de performances enregistrées, plus généralement beaucoup de régularités (côté élève) mises en évidence dans les recherches, peuvent être présentées indifféremment, en première ou en seconde année, à condition bien sûr d'en préciser assez soigneusement les conditions d'obtention.

Il en est de même de certaines ingénieries qui peuvent faire l'objet de description dès la première année.

Par contre, il est nécessaire d'être plus prudent à propos de certains éléments de théories.

Je vous renvoie aux brochures de la COPIRELEM, actes des stages nationaux de ce type et actes des derniers colloques annuels de la commission, pour établir une liste de ces notions.

Je vais maintenant essayer d'apporter des éléments de réponse à la seconde question :

Quelles sont les transformations que le formateur fait subir à certaines notions de didactique en les intégrant dans son enseignement professionnel ?

Là encore, il me faut prendre beaucoup de précautions.

Une recherche en cours permettra sans doute de répondre à cette question. Je me contenterai ici de présenter certaines réflexions personnelles.

Le degré de formalisation, d'explicitation des mêmes notions est certainement très variable d'un formateur à l'autre†; il peut dépendre de la connaissance qu'il a de ces notions ou de l'équipe didactique dont il est le plus proche.

Enfin, pour un même formateur, en fonction du public, en fonction des moments et selon le sujet, des variations peuvent apparaître, en particulier pour des raisons de temps ou en fonction des négociations locales sur les programmes de concours.

J'ai quand même essayé de travailler cette question, à partir des textes que nous avons pu écrire dans le cadre de la COPIRELEM.

On ne peut s'empêcher de penser que les notions didactiques présentées lors de cet enseignement et dans ces textes le sont de façon particulière.

En général, il s'agit de présenter des outils d'analyse et/ou d'observation de certains phénomènes d'enseignement. Un autre objectif est de donner certains outils de lecture aux futurs professeurs leur permettant de prendre connaissance, de s'approprier certaines ingénieries, voire de les reproduire. Il peut aussi s'agir de comprendre certains enjeux du système éducatif ou certains choix de manuels. A. Robert à déjà traité de ce sujet dans sa conférence.

Ces objectifs amènent souvent le formateur à transposer certaines notions, à adapter certaines théories comme nous le verrons dans les exemples qui vont suivre.

On peut sans doute, comme le font les ergonomes, parler de didactique professionnelle.

En schématisant, on pourrait dire que cette didactique professionnelle est centrée sur les mises en actes, sur les gestions individuelles (côté du sujet-professeur) de situations précises.

En revanche la didactique des mathématiques, comme champ de recherche, s'intéresse aux rapports entre enseignement et apprentissage, ces études s'inscrivent dans un cadre systémique souvent représenté par le triangle didactique.

Cela donne un tout autre statut aux activités d'observation en formation professionnelle : elles occupent une place centrale dans un dispositif de genèse artificielle de la réflexivité sur la pratique alors qu'elles ne sont qu'essentiellement utilitaires dans le dispositif du chercheur.

Cela veut-il dire que les notions présentées sont déformées, réduites, tronquées voire très différentes de leur présentation dans un cours de DEA de didactique, par exemple ?

C'est peut-être aller trop loin, je répète que cela dépend beaucoup du formateur.

On peut quand même dire que le formateur privilégie certains aspects de la notion qui lui semblent plus appropriés pour éclairer une réflexion pédagogique.

De plus, cette présentation est très liée à la stratégie du formateur et aux formes de travail qu'il adopte ou privilégie. Par exemple, j'adopte une approche souvent situationniste (niveau enseignement aux PE) de certaines notions didactiques, cela me conduit à éliminer certains aspects de cette notion qui ne rentrent pas dans le cadre de cette présentation. Cela m'amène souvent à privilégier une présentation contextualisée et locale de ces éléments. Les institutionnalisations plus globales sont toujours plus difficiles à conduire et parfois supprimées, faute de temps.

Il ne s'agit pas ici de parler d'une didactique de terrain et d'une didactique de chercheurs mais de souligner les aspects professionnels développés lors d'une formation de professeur d'école.

Je vais essayer de préciser mon propos sur quelques exemples.

La notion de variables didactiques

Je vais essayer d'analyser ce que j'ai pu écrire sur ce sujet, en collaboration avec Monique Pezard, à partir de deux textes, l'un figurant dans les actes de Cahors [8] et l'autre dans le document n°4 de l'IREM de Paris VII sur la formation [12].

Je prends ce premier exemple pour une raison très simple, il est plus facile de commencer par se critiquer que de parler des travaux d'un tiers. Je précise que cette étude ne vise pas à présenter un quelconque modèle mais à continuer à essayer de rationaliser certaines pratiques. Il n'est pas question ici de formaliser des règles de transposition, nous n'en n'avons pas les moyens et dans tous les cas je n'en n'ai pas la prétention.

Nous proposons donc d'étudier dans ces textes les notions d'analyse a priori et de variables didactiques à partir de l'étude d'une fiche de préparation tronquée d'une séquence sur l'introduction des écritures multiplicatives au CE1. Cette fiche est le résultat d'une adaptation d'une séquence mise au point à l'école Michelet par l'équipe de Bordeaux et du travail que j'ai pu effectuer sur ce sujet dans ma thèse. C'est donc en fait le résultat d'un mélange d'analyse a priori et a posteriori.

Les étudiants ne disposent que d'extraits de cette fiche.

Nous nous proposons d'introduire la notion de variables didactiques dont nous donnons une définition dans le document n°4, inspirée directement d'un des premiers cahiers de didactique de l'IREM de Paris VII [19].

En fait, la définition que nous faisons effectivement fonctionner de la notion de variables didactiques est beaucoup plus limitée que celles que nous pouvons en donner lors des institutionnalisations. Elle porte essentiellement sur la taille et la nature des données numériques, sur les types de supports matériels, sur le temps, sur la forme de travail et sur les contraintes de la consigne.

Cette séquence a été reprise, dans un enseignement plus complet, par Pascale Masselot, dans son mémoire de DEA dont un résumé figure dans les actes de Colmar [10]. En fait, là encore, certains aspects de la notion de variables ne sont pas traités, alors qu'ils sont cités. Il s'agit en particulier de tout ce qui porte sur les répartitions des tâches, sur les variantes d'une situation...

La notion de cadres

Dans les exemples de situations que j'ai pu écrire sur ce sujet, en particulier en reprenant la situation précédente, dans les adaptations que j'ai pu faire des exemples proposés par d'autres, en particulier par Marie-Lise Peltier et par Catherine Houdement, je dois avouer que je privilégie surtout, en formation initiale l'aspect mathématique de la notion ; un cadre se réduisant, dans un premier temps, à une branche des mathématiques. Je donne une définition plus complète de l'objet, celle de Régine DOUADY dans son cahier de didactique [18] et dans son article dans "Repères" [20], mais je mets surtout l'accent sur le fonctionnement mathématique des connaissances et moins sur le côté cognitif du sujet.

Typologie des situations

Là encore, si j'essaie d'analyser comment je fais fonctionner la situation de Hervé Péault sur la division (actes du colloque de Rouen [5])[2], je privilégie un aspect des situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation.

En fait (y compris dans le texte initial d'Hervé) l'accent est mis sur la nature des tâches de l'élève ou de l'étudiant et moins par exemple sur l'étude des rétroactions de la situation.

2 Voir aussi l'article sur la division dans cette brochure.

On peut se demander si cela est seulement lié à la nature de la notion didactique étudiée. On peut penser que toute activité construite sur le modèle de l'homologie comporte forcément une partie où le formateur se contente d'évoquer certains aspects de la situation qui pourtant sont essentiels dans la construction des séquences pour les élèves de l'école élémentaire.

On peut expliquer ces réductions éventuelles de sens dans la présentation de certaines notions didactiques par plusieurs éléments.

Le plus important me semble lié à l'usage que le formateur veut en faire. Reprenons l'exemple des variables didactiques. S'il veut traiter de la préparation d'une séquence, le formateur va attirer l'attention de l'étudiant sur les choix a priori que l'enseignant doit faire. Il va donc présenter des situations prototypiques. Cela peut l'amener à privilégier par exemple certaines variables plutôt que d'autres, celles qui lui semblent les plus significatives, les plus exemplaires et celles dont les effets sont les plus faciles à mettre en évidence : les nombres dans une activité numérique ou la nature du support papier par exemple dans une activité de construction géométrique.

En vue d'une formation, cette réduction de sens est sans doute inévitable, pour des raisons de communication, de niveau de compréhension théorique (mathématique et autre) des interlocuteurs en présence, et des raisons d'efficacité. Le but n'est pas d'amener le professeur à construire des dispositifs expérimentaux fins lui permettant d'observer mais de lui fournir rapidement des outils relativement efficaces lui permettant de prévoir certaines réactions d'élèves, d'en privilégier certaines à l'avance.

De même, la connaissance théorique de certaines régularités, en particulier de certaines performances, erreurs et procédures d'élèves, liée à une prise de conscience même partielle et un peu schématique du rôle de certaines variables, peut l'amener, en cours de séquence, à prendre des décisions sur la base d'un mélange de prévisions et d'observation immédiate.

On peut penser (cf. Tochon [42]) qu'un enseignant expérimenté met en oeuvre des modules caricaturaux de gestion des variables et qu'il observe ses élèves à travers un filtre, l'amenant par exemple à faire abstraction de la personnalité de l'élève, de l'individu en question pour ne voir (provisoirement) que le prototype d'élèves. Pour observer ses élèves, l'enseignant doit faire abstraction des bruits parasites, il ne peut pas entrer dans le détail.

C'est évidemment une logique très différente de celle du chercheur qui doit mener des observations plus fines.

L'enseignant prend des indices lui permettant de retrouver, de reconstruire une "caricature" d'observations. Ces observations s'appuie sur son expérience professionnelle et/ou sur des "connaissances théoriques" concernant l'enfant, ses démarches possibles, ses erreurs prévisibles... C'est à ce niveau aussi qu'un enseignement d'éléments de didactique (notamment des régularités observées dans les recherches) peut aider le débutant qui ne peut bénéficier de cette expérience professionnelle. Le chercheur, lui, doit mettre en évidence des phénomènes nouveaux ; il ne peut donc se contenter d'une observation grossière.

Cet enseignement n'est pas sans poser des questions troublantes. Il risque de fonctionner comme alibi pour le formateur, le dispensant de préciser les conditions d'élaboration des résultats enseignés. Mais surtout il peut entraîner, chez le débutant, un automatisme d'étiquetage, réduisant la complexité des phénomènes d'enseignement, les caricaturant trop rapidement et trop grossièrement. Chacun sait que les automatismes et les caricatures, pour être efficaces, ne doivent pas être enseignés trop précocement. On ne peut s'empêcher ici de faire le parallèle avec les apprentissages des algorithmes opératoires, par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Actes de la première Université d'Été des P.E.N. - ***Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*** - Olivet - juillet 1988 - IREM de Bordeaux

[2] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Bombannes - 1979 - IREM de Bordeaux 1

[3] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Qimper - 1986 - IREM de Rennes

[4] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) d'Angers - 1987 - IREM de Nantes

[5] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Rouen - 1988 - IREM de Rouen

[6] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Bordeaux - 1987 - IREM de Bordeaux

[7] Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Paris - 1990 - IREM de Paris VII

[8] Actes du stage national de Cahors organisé par la COPIRELEM - 1991 - ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*** - tome 1 - IREM de Paris VII.

[9] Actes du stage national de Pau organisé par la COPIRELEM - 1993 - ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*** - tome 2 - IREM de Bordeaux.

[10] Actes du stage national de Colmar organisé par la COPIRELEM - 1994 - ***Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*** - tome 3 - IREM de Paris VII.

[11] BUTLEN D. Actes de la 6ème université d'été de didactique des mathématiques - Saint-Sauves d'Auvergne - août 1993 - ***Quelques remarques sur les activités d'observation dans la formation des professeurs d'école*** - contribution au thème 7 : ***l'observation de classes : outil de recherche, outil de formation***

[12] BUTLEN D. et PEZARD M. - Document de travail pour la formation des maîtres n°4 de l'IREM de Paris VII, ***Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs Instituteurs-Maîtres-Formateurs***

[13] BUTLEN D. et BOLON J. ***Quelle didactique en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, de professeurs de collèges et de lycées***, document de travail n°8 pour la formation des enseignants, IREM de Paris VII, université de Paris VII

[14] BUTLEN D. et PELTIER M. L. ***Enseigner la didactique des mathématiques en formation des professeurs d'école***, document de travail n°9 pour la formation des enseignants, IREM de Paris VII, université de Paris VII

[15] CHEVALLARD Y. (1992) ***L'observation didactique***, intervention à l'université d'automne de Fréjus des formateurs IUFM sud-est

[16] COLOMB J. ***Contribution à la formation des maîtres*** - 1992 - INRP - Paris

[17] DE KETELE J.M. et POSTIC M. - 1988 - ***Observer les situations éducatives*** - P.U.F - Paris

[18] DOUADY R. ***Jeux de cadres et dialectique outil-objet*** - Recherche en didactique des mathématiques n° 7 - 2 - La Pensée Sauvage.

[19] DOUADY R. ***De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle*** - cahier n°6 de didactique des mathématiques.

[20] DOUADY R., 1992, ***Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*** - Repères n°6, Editions Topiques.

[21]ERMEL/INRP - ***Apprentissages mathématiques*** - GS de maternelle

[22]ERMEL CM - ***Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*** INRP - éditions HATIER

[23]ERMEL CE - ***Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*** - INRP - HATIER

[24] ***Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré*** - Publications de l'IFM de Grenoble - numéro 19 - avril 1987

[25] GAIRIN-CALVO S. Contribution aux actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Angers - 1987 -

[26] HENRY M. 1991, ***Didactique des mathématiques, en vue de la formation des enseignants***, IREM de Besançon

[27] HOUDEMENT C., 1995, ***Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies,*** Thèse de doctorat, Université de Paris VII, IREM de Paris VII.

[28] KUZNIAK A. 1994, ***Études des stratégies de formation utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré***. Thèse de doctorat, Université de Paris VII, IREM de Paris VII.

[29] NEYRET R., 1995, ***Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des maîtres***, thèse de doctorat, université Joseph Fourier, Grenoble 1

[30] PÉAULT H. Contribution aux Actes du colloque des P.E.N. (Inter-IREM) de Rouen - 1988 - IREM de Haute Normandie

[31] PELTIER M.L., 1995, ***La formation professionnelle des professeurs d'école, entre conjonctures et réalité***, Thèse de doctorat, Université de Paris VII, IREM de Paris VII.

[32] PÉZARD M. ***A propos de l'enseignement de la proportionnalité*** - Cahier de didactique des mathématiques n°20 - IREM Paris VII

[33] PEZARD M. , Thèse de 3ème cycle de didactique des mathématiques : ***une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs*** - IREM de Paris VII.

[34] PORTUGAIS J, BRUN J - 1994 - ***De futurs instituteurs formés à la didactique des mathématiques, étude de cas*** - Vingt ans de Didactique des mathématiques en France - actes du colloque - La Pensée Sauvage

[35] PORTUGAIS J. ***Didactique des mathématiques et formation des enseignants, le cas des erreurs de calcul,*** thèse de doctorat n°195, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève, 11 novembre 1992

[36] ROBERT A. ***Une intervention en didactique des mathématiques à des élèves-instituteurs en 3ème année d'école normale (FP3)*** - cahier n°17 de didactique des mathématiques - IREM de Paris VII

[37] ROBERT A. ***Une introduction à la didactique des mathématiques*** - cahier n°50 de VII

[38] ROBERT A. Document de travail pour la formation des maîtres n°1 de l'IREM de Paris VII, ***formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne***

[39] ROBERT A. cahier n°51 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII, ***réflexions sur l'analyse de textes d'exercices des manuels*** - IREM de Paris VII

[40] ROBERT A., IUFM An 3, ***une réflexion sur la formation des PLC2, une analyse des modules communs de mathématiques de l'IUFM de Versailles,*** Document de travail n° 10 pour la formation des enseignants, IREM de Paris VII, université de Paris VII

[41] ROBERT A., ***Professeurs de mathématiques de collèges et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif,*** Document de travail n° 14 pour la formation des enseignants, IREM de Paris VII, université de Paris VII

[42] TOCHON F.V., 1993, ***L'enseignant expert***, Ed Nathan

Titre	Les élèves et le rapport au savoir
Auteur	Elisabeth BAUTIER L'auteur est professeur à l'Université de Paris 8. Elle est co-auteur, avec Bernard CHARLOT et Jean-Yves ROCHEX de ***"École et savoir dans les banlieues... et ailleurs"*** (Armand Colin, 1992), auteur de ***"Pratiques langagières et pratiques sociales"*** (L'Harmattan, 1995) et co-responsable avec Bernard Charlot de l'équipe ESCOL.
Date	30 mars 1995
Origine	Conférence-débat, lors du stage COPIRELEM d'Angers. Transcription, à partir de bande audio, par A. M. et H. PÉAULT. Texte revu par l'auteur.

LES ÉLÈVES ET LE RAPPORT AU SAVOIR

J'aborderai au cours de cette conférence les points suivants :

- la notion de rapport au savoir dans l'école
- le rapport entre le langage et le rapport au savoir, c'est-à-dire entre des pratiques langagières socialement construites et leur incidence sur le rapport au savoir
- les pratiques pédagogiques au regard du rapport au savoir.

INTRODUCTION : Poser le problème de l'échec scolaire en termes de rapport au savoir

Je voudrais d'abord expliquer l'origine de la problématique du rapport au savoir, préciser en quoi elle est intéressante ou pertinente, dire ce qui nous a amenés dans l'équipe à nous poser certaines questions.

Ce sont évidemment en premier lieu les difficultés d'apprentissage des élèves, de la maternelle à l'université. Certes, quand ils ont des difficultés d'apprentissage, les jeunes arrivent difficilement à l'université, mais avec la démocratisation ou plutôt la massification de l'enseignement, une grande partie de ce que l'on peut dire sur les élèves en difficultés peut aussi décrire les étudiants. Il est important aujourd'hui de faire la différence entre "cheminer de classe en classe", et "être dans les apprentissages". On peut cheminer dans le système scolaire sans être dans une dynamique d'apprentissage, mais en faisant à peu près correctement son métier d'élève..

La réflexion sur le rapport au savoir est venue du questionnement sur les élèves en difficultés. Depuis environ la fin des années 60 et a fortiori depuis la mise en place du collège unique, on ne peut plus faire l'impasse sur l'échec scolaire ou tout au moins sur la confrontation avec des élèves qui n'apprennent pas.

Il ne suffit pas de se dire que si les élèves sont en difficultés c'est que les enseignants sont mauvais, que leur formation ne va pas ou qu'on a affaire à des élèves qui ne savent pas s'investir dans l'école, qui sont paresseux ou qui viennent d'un certain milieu socio-culturel...

On ne peut pas davantage se dire que ce sont les modèles didactiques qui sont en cause. Prenons l'exemple de la didactique du français. Depuis les années 65, dans ce domaine, on est sans cesse en train de renouveler l'enseignement, par le biais des linguistiques, des approches cognitivistes ou sociolinguistiques... Mais que l'on renouvelle les cadres théoriques d'approche de la didactique du français ou pas, les difficultés des élèves sont toujours présentes.

Si malgré tous les changements le problème perdure, cela peut signifier que la question est mal posée ou qu'il pourrait être intéressant de la poser autrement et d'une façon plus globale. C'est ainsi que nous avons été amenés à nous poser la question : et si c'était le rapport au savoir, au langage et à l'école qui est en cause ?

Si le rapport au savoir et à l'école se construit "à côté" des disciplines, ce que les élèves font dans les disciplines semble néanmoins pouvoir manifester leur rapport au savoir, être un exemple spécifique du rapport plus général au savoir, au langage et à l'école. C'est sur ce domaine du rapport aux disciplines des "nouveaux lycéens" de seconde qu'avec Jean-Yves ROCHEX nous travaillons actuellement.

"Rapport à" et représentation

Une autre remarque un peu préliminaire concerne la question des représentations (sur laquelle j'ai travaillé avec Aline Robert). Les représentations se construisent et se manifestent dans et par le langage. On pose aux élèves des questions comme : *"A quoi te rends-tu compte que tu ne comprends pas ? "*, *"qu'est ce c'est pour toi faire des mathématiques ?"*. Ce qu'on obtient c'est du discours et on ne peut avoir accès aux représentations que par les discours. Mais, sous quelle forme et avec quelle influence existent les représentations, antérieurement au moment où on fait parler les élèves sur leurs représentations ? C'est une vraie question, au moins sur le plan méthodologique, dès lors que l'on fait référence aux représentations dans les démarches didactiques.

De plus, les représentations sont peut-être aussi construites essentiellement par et dans le langage. En effet, le langage c'est ce qui permet de penser (mais aussi de percevoir le monde par l'intermédiaire des catégories), c'est ce qui permet de raisonner, de construire des connaissances, en particulier les connaissances scolaires. Il peut être heuristique de penser que le langage n'est pas d'abord un instrument de communication ou d'expression, mais quelque chose qui permet de penser et de construire des savoirs, de se construire comme sujet aussi.

Dès lors, dans quel langage peut-on formuler les représentations ? Quand on interroge des élèves, ou plus largement les gens, sur leurs représentations de tel ou tel processus ou tel domaine, des formes de discours sont plus disponibles que d'autres. Par exemple, si je vous avais demandé : *"Pour vous, le langage, ça sert à quoi ?"*, ce qu'il y avait d'immédiatement disponible, c'est : *"ça sert à communiquer"*. Mais, si l'on n'utilise pas le "discours disponible" ou "dominant", c'est beaucoup plus difficile d'exprimer certaines représentations.

Prenons, par exemple, celles liées à l'activité de travail. Les enseignants savent dire des choses sur l'activité enseignante. Mais ce que l'on dit sur l'activité est parfois relativement éloigné de ce que l'on fait réellement et qui n'est pas facile à mettre en mots. Ainsi, dans le domaine de la didactique du français, par exemple, aujourd'hui on sollicite assez fréquemment un discours sur *"qu'est-ce que c'est qu'écrire, qu'est-ce que c'est que parler, qu'est-ce que c'est que construire un texte ?"*. Les élèves peuvent dire ce que c'est qu'écrire un texte ; ils peuvent tenir un discours méta-cognitif, métadiscursif sur l'écriture, mais sans que cela ait apparemment de rapport avec leur activité réelle d'écriture.

On a les deux cas. Il y a ceux qui peuvent dire, dès le cours élémentaire : *"là, ça manque de connecteurs"* ; ils ont appris en quelque sorte le "discours sur". Mais on ne peut pas être sûr qu'il y a un rapport entre cette capacité à dire, à décrire, à tenir un discours sur, à être dans le méta... et la capacité à se mettre dans l'activité correspondante. Inversement, on trouve des élèves très investis dans l'activité intellectuelle et à peu près incapables de dire quoi que ce soit de cette activité.

Le "rapport à" se manifeste moins par un discours que par une pratique sociale. Le "rapport à" est certes étudiable par l'intermédiaire du discours, mais il est aussi une pratique, une activité. D'autre part, le "rapport à" est lui-même une pratique sociale.

A côté du constat que l'on peut faire de la différence entre élèves dans le rapport au savoir et au langage, il est nécessaire de reposer la question des conséquences de ces différences sur les appropriations de savoir, différences qu'il est également possible de mettre en relation avec les valeurs et les rapports au monde qui, selon les élèves, se situent davantage dans l'ordre de la Raison ou davantage dans celui de l'expérience et des affects. Aujourd'hui, pour certains élèves, il n'y a que dans l'école qu'ils peuvent se trouver confrontés aux principes de la raison ou en situation de les apprendre.

Mais on retrouve là l'idée que toutes les pratiques culturelles, toutes les traditions culturelles, et aussi toutes les pratiques pédagogiques et toutes les pratiques langagières ne se valent pas, pour permettre à l'élève de se situer dans une logique de la raison ; parfois on se heurte à une différence trop grande entre un mode culturel traditionnel et un mode culturel de la raison.

C'est sur ces conceptions que viennent s'inscrire les descriptions de rapport au savoir et de rapport à l'école développées ici. Les recherches sur lesquelles elles se fondent, les données recueillies sont diverses : des entretiens, des travaux scolaires d'élèves, des prises de notes, des écrits sollicités par nous tels que les "bilans de savoir", des observations de classes. C'est sur l'analyse des bilans que reposent les remarques qui suivent.

Bilans de savoir : RAPPORT IDENTITAIRE ET RAPPORT ÉPISTÉMIQUE

C'est un "outil" spécifique que nous avons construit pour les recherches sur le rapport au savoir. Il est demandé aux élèves d'écrire ce qu'ils ont appris depuis qu'ils sont nés. L'analyse de ces "bilans de savoir" permet de distinguer deux types de rapport au savoir : le "rapport identitaire" et le "rapport épistémique". Mais si tout le monde a un rapport au savoir (quiconque, même en profond échec scolaire ou l'ayant été, ayant une expérience très difficile, a un rapport au savoir), c'est la nature même de ce rapport qui différencie les élèves.

Le rapport identitaire est un rapport qui est profondément lié à ce que la personne fait ou pense faire des savoirs ; pour la personne qui privilégie un rapport identitaire au savoir, le savoir est le plus souvent lié à l'expérience et aux situations dans lesquelles il fait sens.

Le rapport épistémique au savoir se construit dans des questions telles que *"savoir, c'est quoi ?"*, *"apprendre, c'est faire quoi ?"*. Il est lié à la construction du savoir comme objet. Un rapport épistémique au savoir s'instaure lorsque la personne, l'élève, donne du sens au savoir comme objet, indépendamment de l'utilité qu'il peut avoir dans la vie.

Les deux types de rapport au savoir peuvent co-exister ; cependant si tout le monde a un rapport identitaire au savoir, le rapport épistémique ne semble pas toujours présent, mobilisé, tandis que le rapport identitaire au savoir n'a pas l'air de suffire pour permettre à un élève d'être en réussite scolaire.

L'école suppose que les élèves ont un rapport épistémique au savoir déjà construit ; paradoxalement, les enseignants ont souvent des pratiques pédagogiques et des discours qui ne permettent pas de construire ce rapport épistémique ; ils ont un discours plus proche du rapport identitaire. Ainsi, il y a des élèves qui se situent dans un rapport "utilitaire" au savoir : *"je ne sais pas pourquoi j'apprends, je ne vois pas à quoi ça sert"*, et il n'est pas rare qu'à ces élèves qui sont souvent en difficultés, les enseignants répondent en disant qu'il faut apprendre des maths parce que c'est comme ça, et que quand on rend la monnaie au supermarché, ça sert à quelque chose. L'école ne facilite pas la tâche des élèves, ces discours très ambigus peuvent renforcer un rapport consumériste à l'école.

Processus d'imbrication et processus de distanciation

La nature du rapport au savoir privilégié par l'élève peut être mise en relation avec des processus qui sous-tendent la construction des savoirs. On peut distinguer des processus qui semblent rarement présents simultanément : les processus d'imbrication et de distanciation.

Il y a imbrication lorsque, pour l'élève, le savoir est lié à la situation dans laquelle il est appris, le savoir n'a de sens que s'il permet de résoudre les questions qui se posent dans l'ici-maintenant d'une situation.

On peut identifier ce processus chez les élèves en difficultés quand, interrogés sur ce qu'ils ont appris, ils évoquent tel ou tel cours ou morceau de cours. Quand on demande à telle élève de CP : *"qu'est-ce que c'est pour toi écrire ?"*, elle répond : *"c'est écrire la petite souris joue du tambour"* ; et si on lui demande si c'est tout, elle ajoute d'autres "exemples" d'énoncés écrits. Ces réponses sont entièrement liées à une activité scolaire précise et s'opposent à des réponses telles que : *"écrire c'est pour se parler quand on est loin"* ou *"écrire, eh bien c'est quand on apprend"*.

Certes quand on interroge un élève en début de CP, on pourrait se poser la question de la réalité de ce qu'il dit... Il semble non seulement que même les petits ne disent pas tous la même chose et que les différences sont stables, mais que l'analyse en termes de processus d'imbrication tient, puisque les énoncés sont récurrents et sont produits dans toutes les disciplines. Ainsi, quand la petite fille dit qu'écrire, c'est écrire *"la petite souris joue du tambour"*, elle dit aussi *"faire des maths c'est multiplier"*. C'est la "même" réponse partout, et, autre critère, elle n'arrive pas à apprendre à écrire ou à lire et en maths c'est aussi difficile. Par contre les élèves qui ont des réponses qui ne renvoient pas à des processus d'imbrication ont l'air d'avoir moins de problèmes d'apprentissage. C'est au moins une piste à creuser.

A la question du métier d'élève vient s'ajouter celle du statut des savoirs pour les élèves, en particulier, dans sa relation avec le rapport épistémique au savoir. Par exemple, lorsqu'un étudiant (qui est aussi enseignant) dit : *"Je ne suis pas d'accord avec Piaget parce que dans ma classe..."*, il ne voit pas d'inconvénient à opposer un témoignage à un savoir. On peut dire qu'il n'a sans doute pas construit un rapport épistémique au savoir ou qu'il privilégie le rapport identitaire, qu'en tout cas il considère que l'expérience quotidienne peut mettre en question une théorie. Le passage d'un type de rapport à l'autre n'est pas chose simple pour l'élève et il n'est pas simple non plus pour l'enseignant de l'aider (dans l'exemple présent, on peut dire qu'on ne peut s'opposer à Piaget qu'en se situant à l'intérieur du cadre de la psychologie du développement). De même, avec des élèves en primaire, ce n'est pas du tout facile d'expliquer ce que c'est qu'est un objet de savoir, une activité intellectuelle.

Le métier d'élève : confusion entre le travail et les conditions du travail

L'école, on l'a dit, suppose un rapport épistémique au savoir alors même que les élèves en difficultés vivent l'école sur le mode du "métier d'élève". Qu'est-ce qu'on appelle "métier d'élève" ? L'expression "métier d'élève" décrit les élèves qui s'attachent aux conditions du travail scolaire, à la face visible de l'activité et non pas au travail scolaire lui-même ou à l'activité intellectuelle. Les "conditions du travail scolaire" correspondent, entre autres, à ce que l'enseignant (ou les parents) dit (disent) de faire, par exemple être sage, répondre aux consignes au plus près de la réalisation de celles-ci, avoir toutes ses affaires, faire ses devoirs...

Quand on demande à des élèves ce que c'est pour eux être élève, ils décrivent tout ce qui est la partie visible de l'activité ; ils font plein de choses comme monter et descendre les escaliers, prendre un classeur.

Et quand on demande aux élèves de parler des enseignants, on a la même description, c'est-à-dire qu'un enseignant c'est quelqu'un qui ouvre son cartable, accroche son manteau, fait toutes sortes de choses,... mais il n'apparaît pas de verbe de cognition, ni l'existence d'une activité intellectuelle (par exemple *"on réfléchit"*). Il est vrai qu'on ne voit pas très souvent en classe les enseignants réfléchir et "chercher" et que rares sont ceux qui donnent assez de temps pour que les activités de réflexion, au delà de la réalisation des tâches scolaires soient effectives pour tous les élèves. C'est exceptionnel qu'un enseignant se mette en situation de montrer comment lui s'y prend quand il ne sait pas faire ; pourtant ce serait sans doute très formateur pour les élèves, en particulier pour ceux qui n'ont pas cette expérience du "faire" et "refaire" dans leur milieu familial. Une aide à la construction d'un rapport épistémique au savoir serait de voir l'enseignant tâtonner ; ce rapport à la construction des savoirs est nécessaire pour passer d'une logique d'exécution de la tâche à une logique d'apprentissage et d'élaboration de la connaissance. Or il n'est pas facile pour certains élèves de s'autoriser à "tâtonner".

Il y a sans doute quelque paradoxe pour certains à accepter que la construction du savoir passe par le tâtonnement alors qu'on demande un produit fini et que la correction est donnée par le produit fini ne montrant pas le tâtonnement.

Le passage d'une logique de la tâche à une logique d'apprentissage pour les élèves est d'autant plus difficile que les consignes des enseignants s'expriment souvent elles aussi sur le mode du "métier d'élève", du comportement, sur le mode plus opératoire qu'intellectuel. Pour faire passer un élève d'une logique de métier d'élève à une logique d'apprentissage et de travail cognitif, on n'a pas beaucoup de mots disponibles permettant de décrire ce domaine pourtant essentiel de l'activité scolaire. D'ailleurs, les deux discours sont tenus au sein même de l'école : *"mais tu ne travailles que pour les notes, c'est pour toi que tu dois travailler !"* et : *"si tu ne t'y mets pas, tu auras de* *mauvaises notes, tu n'auras pas la moyenne et tu vas redoubler".*

Lorsque les élèves sont sur les deux rapports au savoir, rapport épistémique et rapport identitaire, ils arrivent à négocier, avec eux-mêmes, avec l'institution. Mais en revanche, ceux qui sont de façon préférentielle dans le rapport identitaire ont beaucoup plus de difficultés à construire un rapport à l'école qui ne soit pas régi par les tâches scolaires et les notes qui apparaissent être au principe même de l'activité scolaire.

Les élèves qui privilégient le rapport identitaire au savoir sont aussi souvent ceux qui pensent que c'est l'enseignant qui leur apprend, et que pour être bon élève, il suffit justement d'avoir un bon enseignant. Cette question de l'apprentissage vécu en extériorité est importante parce que pour les élèves qui font vraiment leur métier d'élève avec une grande conviction, si cette mobilisation n'est pas suivie d'apprentissages, ils se trouvent non seulement dans une situation de rejet potentiel de l'école mais aussi dans une relation d'opacité avec le processus de construction d'eux-mêmes comme sujets de connaissances.

Cette démarche doit permettre de ne pas confondre difficultés d'apprentissage et désintérêt pour les savoirs ; on peut en effet observer que les élèves dits en difficultés sont tout à fait intéressés par les savoirs. Nos dernières recherches sur la classe de seconde met bien ce phénomène en évidence : les élèves des classes en difficultés des lycées en zone difficile ne peuvent être caractérisés par un manque de motivation ou d'intérêt, au contraire, la plupart d'entre eux voient dans les savoirs scolaires un très fort enjeu, enjeu à la fois identitaire (construction de la culture et de la personnalité) et cognitif. Les élèves de "banlieues" comme d'autres, trouvent de l'intérêt à travailler le XVIème siècle ou la physique, ou le commentaire composé...

Rapport au langage et apprentissage : l'activité d'écriture

Quelque chose de fondamental se passe à l'école autour de l'activité d'écriture (et dépasse largement le cours de français). Il s'agit de savoir se servir de l'écrit pour apprendre et pour se construire comme sujet apprenant. Je reprends ici les oppositions qu'a travaillées B. Lahire entre "être dans l'écrit" ou "être dans l'oral", entre "avoir un rapport écrit au monde" et "avoir un rapport oral au monde". On pourrait dire que les élèves qui privilégient leur rapport identitaire au savoir sont aussi ceux qui sont le plus souvent dans un rapport oral au monde. Le rapport épistémique se construit plus facilement dans l'écrit. Ce n'est pas le canal de production qui est pertinent : j'utilise mon appareil phonatoire en ce moment mais je suis dans une logique de l'écrit. Inversement, aujourd'hui, il y a des élèves (et pas seulement des élèves) qui écrivent, et néanmoins peuvent être dans un rapport oral au monde. Cette distinction entre rapport au monde oral et rapport au monde écrit permet de donner de l'intelligibilité aux différences entre les élèves en réussite et les élèves en échec.

Cette distinction ne correspond pas à l'opposition théorie/pratique, non plus qu'à celle concret/abstrait. Ou on pense que le savoir est dans les livres, ou on pense qu'il est chez le voisin ou qu'il est chez celui qui est comme soi. Et l'on retrouve ici l'importance des valeurs culturelles, des modes d'éducation dans l'élaboration du rapport au savoir. Pour apprendre, il faut être dans un rapport écrit au monde

Prenons l'écrit des élèves, plus précisément leurs bilans de savoir, les textes sont de deux types, exclusifs l'un de l'autre. Quand on demande aux élèves ce qu'ils ont appris, il y en a qui font une liste (grande ou petite) de savoirs (*"j'ai appris à faire des omelettes", "faire des doubles floches à mes lacets", "embrasser les filles"* ou *"voler dans les cartables"* ; et puis il y en a qui produisent un texte réflexif sur ce que sont les savoirs, sur ce qu'est apprendre (*"heureusement que j'ai des savoirs ailleurs qu'à l'école, mais heureusement que les Grecs ont construit des savoirs parce que sinon je ne serais pas ce que je suis..."*). On a là des textes complètement différents qui ne renvoient pas au même rapport au monde. La liste ici correspond à un rapport oral au savoir ; l'écriture ne modifie rien, on est finalement au plus près du réel de l'élève. On retrouve ce même rapport à l'écrit chez certains élèves pour lesquels faire une narration c'est décrire successivement les événements, c'est "dire au plus près" du réel de l'expérience.

Ceux qui produisent un texte réflexif font tout autre chose. Ils produisent quelque chose qui n'existe pas en dehors de cette activité. C'est la caractéristique fondamentale de l'écrit que sa capacité à produire de la connaissance, un objet qui n'a d'existence que dans l'écriture. Une démonstration n'a d'existence que dans l'écriture de la démonstration, alors que lorsqu'on dit *"je fais une omelette"* il y a l'activité de faire une omelette qui a un sens indépendamment de l'activité d'écrire.

Pour apprendre dans le cadre formel de l'école, un rapport écrit au monde est plus favorable et peut-être même nécessaire ; il est nécessaire de penser que le savoir c'est quelque chose qui peut se construire indépendamment des référents du monde réel, de l'expérience, que les objets mathématiques, par exemple, ont un sens et un intérêt en eux-mêmes, même s'ils sont élaborés dans le seul langage.

Travailler les rapports au savoir des élèves, c'est poser ce genre de questions. On s'aperçoit ainsi que selon le rapport au savoir que les élèves privilégient, ils sont plus ou moins à même de satisfaire aux apprentissages scolaires.

Pour conclure, analysons du point de vue du rapport aux savoirs et aux apprentissages, une tâche scolaire inhérente à l'appropriation des savoirs : refaire un travail.

L'école fonctionne sur un implicite : quand un travail effectué ne convient pas, l'enseignant dit de le recommencer. Refaire suppose de mobiliser un rapport épistémique au savoir, un rapport à l'apprentissage, un rapport à soi comme sujet. L'école en effet présuppose, dans ce qu'elle valorise, que l'élève soit un sujet, c'est-à-dire qu'il ait construit une identité de sujet, de sujet apprenant, de sujet connaissant, de sujet écrivant. Cette exigence n'est pas facile à satisfaire, en particulier chez les élèves dont les valeurs éducatives ne valorisent pas le sujet. En milieu populaire, la convivialité, la solidarité, le groupe, sont des valeurs beaucoup plus développées que l'autonomie, la construction de soi, l'initiative.

Refaire suppose donc qu'on pense que ce qu'on fait dans le cadre de la classe, c'est pour apprendre et non pas pour satisfaire un rituel scolaire ou pour avoir une note. Deuxièmement, pour corriger il faut penser que ce qu'on n'a pas su faire la première fois, on va savoir le faire ensuite. Or un trait souvent rencontré chez les élèves en difficultés, c'est un rapport "absolu" au savoir : on sait ou on ne sait pas et cela une fois pour toutes. Mais, quand on pense qu'on ne sait pas, que de toute manière le savoir c'est un produit et pas un processus, on n'envisage pas qu'on puisse savoir un peu les choses, mieux savoir aujourd'hui qu'hier et que si on ne les sait pas, on va revoir dans le livre. Pour cela, il faut sans doute se positionner comme étant un sujet "en train d'apprendre" et non en train de satisfaire à une consigne scolaire. On peut se dire aussi (et c'est particulièrement vrai en mathématiques et français) que pour refaire, il faut penser qu'on peut s'y prendre autrement.

DÉBAT

La segmentation du savoir

Vous citez beaucoup d'exemples d'observations d'activités. Est-ce que vous étiez présents dans les classes et quels types d'observations avez-vous pu faire ?

Nous nous efforçons d'être familiers des activités de classe. Une observation banale en relation avec ce que l'on vient de dire est celle qui correspond à la "segmentation" du savoir en petites unités. Plus les élèves sont en difficultés, plus les enseignants "segmentent". Cette attitude qui se veut simplificatrice et aidante est sans doute à référer à notre tradition culturelle qui suppose qu'on construit les savoirs en allant du simple au complexe, des petites unités aux grandes. Or ce n'est sans doute qu'en confrontant les élèves à la complexité de l'objet de savoir qu'on peut le mettre sur la voie des apprentissages intéressants, qu'on peut lui faire faire l'expérience de l'activité intellectuelle.

En didactique de la grammaire, par exemple, on peut demander aux élèves de trouver ou de construire 25 phrases, d'observer et de dire tout ce qu'ils analysent. Dans une deuxième étape, on leur dit de manipuler des éléments des phrases, de changer ce qui est à gauche du verbe ou ce qui est à droite et puis toujours d'observer et d'analyser. La plupart des élèves peuvent arriver à des conclusions, des classements, des analyses de fonctionnement parce qu'on leur a demandé de faire face à la complexité, à la totalité de l'objet.

Sans doute, la segmentation en petites unités permet à tout le monde d'y arriver. Plus on donne des petits bouts de tâche, plus les tâches sont faisables. Donc tout le monde est content, l'élève a une bonne note, l'enseignant donne une bonne note, il croit que l'élève a compris quelque chose. Mais on est dans la confusion sur l'identification de l'objet de la connaissance.

Aider les élèves à penser

Est-ce que vous avez observé aussi des activités où on donne aux élèves l'occasion de penser ? Est-ce que vous avez des instruments d'observation d'activités autres que des interrogations de l'élève qui vous permettent de mieux cerner son fonctionnement ?

Prenons un autre exemple : c'était en seconde, dans une classe de sciences économiques et sociales. L'enseignant utilise un logiciel. Il s'agissait d'un cours sur les politiques d'emploi. Il y a des éléments que l'élève peut faire varier : on peut renvoyer les immigrés chez eux, allonger la durée de la scolarité, diminuer le travail des femmes, accroître le travail précaire, etc... , tout ce dont on entend parler actuellement. Et la consigne c'était d'obtenir en 3 ans une diminution du nombre de chômeurs. Les élèves sont deux par deux et on les entend discuter.

Qu'est-ce qui se passe ? Il y a deux catégories d'élèves : il y a ceux qui réussissent parce qu'ils font mourir les gens, renvoient tous les immigrés chez eux, empêchent les femmes de travailler et allongent la scolarité ; et il y a les autres qui ont intégré la contrainte qui est de penser la solution en terme de politique sociale ; c'est-à-dire que la solution doit prendre en compte un minimum de réalisme.

En d'autres termes, il y a des élèves qui, en faisant la tâche apprennent que si on fait telle chose, ça a tel effet sur la vie des gens ; on les entend dire : *"non on ne peut pas faire réduire la durée du travail parce moi je n'ai pas envie d'arrêter de travailler à 40 ans"*, certains répondent : *"oh mais 40 ans c'est très loin, on sera vieux c'est normal d'arrêter de travailler"*. C'est aussi la connaissance du monde qui est constamment sollicitée. Quand on voit ces deux types d'élèves, on voit bien qu'ils ne sont pas du tout en train de faire la même chose, que le cours de sciences économiques et sociales n'a pas du tout le même effet, ni le même sens. Les premiers sont dans la tâche scolaire, dans l'exercice, les seconds utilisent la situation scolaire pour comprendre "le monde".

Les élèves qui s'en sortent sont sans doute ceux qui font circuler les savoirs scolaires et les savoirs non-scolaires, qui n'identifient pas les uns aux autres mais qui ont une sorte de contrôle de l'un par l'autre et qui se servent des uns pour comprendre les autres ; et dans les deux sens. Mais on voit bien qu'il y en a qui ne s'en préoccupent pas, ceux qui font systématiquement varier les quantités, les données (et ça, "malheureusement", l'informatique le permet) ; et puis ils voient ce que ça donne et ils disent *"ah ben non ça ne marche pas"*, alors ils prennent un autre ensemble de données, ils font pareil... Ils ne sont pas en train de penser, ils font des tentatives simplement grâce à l'ordinateur.

Les matériaux pédagogiques d'aujourd'hui peuvent "empêcher" les élèves d'être en activité de pensée. Le risque est grand d'enlever tout sens aux apprentissages quand on le réduit à "cocher des cases" ou compléter des énoncés, même si c'est pour aider les élèves en difficultés ; un objet de savoir n'est intéressant que quand il est complexe. S'il n'a pas à exercer sa pensée, l'élève aura du mal à construire un rapport épistémique au savoir.

Peut-on faire en sorte que les élèves pensent ?

Peut-on toujours faire en sorte que les élèves pensent ? Est-ce qu'on veut que tout le monde pense et ne faut-il vraiment fabriquer que des êtres qui pensent ? Vous êtes partie tout à l'heure du postulat qu'on prend du plaisir lorsqu'on pense.

J'ai exercé en collège pendant assez longtemps et j'avais une classe de CPPN. J'avais le groupe de 10 h à midi. De 10 h à 11 h je leur avais donné une activité mathématique bien connue. Ils avaient un petit cube avec des lettres sur les faces et il fallait remettre les lettres sur le patron ou tout du moins à partir de plusieurs patrons retrouver comment étaient les lettres sur le cube, enfin je ne sais plus si c'était l'une ou l'autre...

Je lutte désespérément en tant qu'enseignant pour qu'ils pensent. C'est-à-dire que j'interdis qu'on construise le cube.

Là, il y a la fille qui est devant qui se fait couper son anorak... 11 h : fatigué, exténué, je n'en pouvais plus. Je dis : "prenez une feuille, une paire de ciseaux, de la colle, vous coupez les cubes, vous faites tout ce que vous voulez". Ils n'ont jamais mis les lettres comme il faut, mais ils ont fait les cubes, ils ont posé les lettres.

Midi : impeccable ; j'ai pu boire l'apéritif tranquille. Je veux dire que j'ai abandonné de les faire penser...

L'école n'a sans doute pas pour seule fonction de transmettre des connaissances. La part de socialisation y est importante. Certes, jusqu'à la dernière décennie, on a pensé que c'étaient les savoirs qui étaient socialisants, que le lien social était construit dans le partage des savoirs, qu'on construisait des citoyens par les savoirs et en particulier par les savoirs scientifiques, parce qu'il était important que les gens maîtrisent des savoirs rationnels. Aujourd'hui on a en quelque sorte inversé les logiques : on pense qu'il faut socialiser avant d'aborder les savoirs. Pour l'enseignant, il y a maintenant du flou sur la légitimité des modes d'apprendre et des contenus d'apprentissage.

Pourtant, le niveau des élèves s'est élevé, et surtout on a modifié considérablement le type d'exigences. Par exemple savoir lire aujourd'hui ça ne veut plus dire la même chose que savoir lire il y a même seulement 30 ans. On n'est plus par exemple dans du savoir-outil mais dans un nouveau mode de penser et d'apprendre. On ne s'est cependant sans doute pas suffisamment posé la question de savoir comment, élevant le niveau des exigences, on forme les enseignants pour enseigner aux "nouveaux" élèves. Dès lors, on est plus souvent dans des problématiques d'accueil que dans des questions d'apprentissage, plus souvent dans une approche du collège unique et du lycée (et de l'université) en termes de massification que de démocratisation.

J'ai eu des élèves intelligents qui étaient éjectés très rapidement, des élèves intelligents et qui pensaient ; j'estime qu'ils pensaient, ces petits cinquièmes, mais ils se trouvaient éjectés pour des tas de raisons. Ils avaient peut-être un rapport cognitif au savoir et n'empêche qu'ils se sont barrés...

Il s'agit davantage d'un problème d'école, d'institution que d'un problème d'apprentissage. C'est important de faire la distinction.

Oui, tant que la société a quand même une certaine exigence par rapport à nous ; à savoir qu'on met les gamins comme sur le haut d'une échelle : il y a ceux qui passent et puis ceux qui ne passent pas et puis ainsi de suite. Et puis tant qu'on va devoir répondre à toutes les exigences est-ce qu'on est assez fort pour cela ?

Ce sont les enseignants eux-mêmes qui disent qu'ils ne peuvent pas et qui délégitiment les savoirs qu'ils enseignent. Le discours médiatique ambiant est également un discours qui délégitime les savoirs. C'est-à-dire qu'aujourd'hui, alors que l'école française repose sur une conception universaliste des savoirs, on en est à se demander *"de quoi les élèves (ces élèves là, d'ailleurs) ont-ils besoin ?"*, pas seulement besoin en termes de finalité professionnelle, mais on est en fait en train de se demander *"est-ce qu'il faut enseigner la même chose à tout le monde ?"*.

La mise en place des ZEP a permis une diversification des savoirs enseignés sur le territoire. Aujourd'hui il est difficile de dire que les savoirs sont les mêmes partout. Qu'est-ce que signifie pour un enseignant le terme "s'adapter" ? S'adapter, ça va de la pédagogie différenciée au fait d'en rabattre sur les exigences ; alors même que les exigences nationales, elles, ne cessent de s'élever. De ce point de vue, il est intéressant de se pencher sur la notion de projet, projet d'établissement, de zone. Le métier d'enseignant est aujourd'hui diversifié ; d'une certaine manière le recul de la centralisation rend les enseignants à la fois libres et responsables de ce qu'ils font. Aujourd'hui, chaque enseignant dans sa classe a la possibilité de décider de ce qu'il va faire ; quel est le projet de l'enseignant ? quel est le projet de l'école ?

Si on pense à ce que je disais tout à l'heure sur les rapports identitaire / épistémique au savoir, on est au coeur de la contradiction actuelle du système éducatif. C'est justement aux élèves chez qui l'on devrait construire un rapport épistémique, qu'on fait construire les projets qui finalisent les savoirs, qui éloignent d'une posture épistémique. Ce qui est préoccupant ici c'est que si on reprend les deux types de rapport au savoir, c'est aux élèves les plus en difficultés que l'on propose des activités et des formes de savoir qu'ils ont du mal à identifier comme tels. Quand on a un projet de zone auquel doivent participer les enseignants mais aussi d'autres partenaires, en général, c'est souvent l'élève tout seul qui a à faire le travail d'identification, de mise en relation des savoirs ; alors que justement ce sont ces élèves qui ont le plus de difficultés pour arriver à interpréter les situations scolaires. Plus il y a de partenariat, plus il y a d'activités diversifiées, plus l'élève aura du mal à construire, à hiérarchiser les savoirs à s'y repérer. Depuis quelques années l'école brouille les cartes.

Cette parcellisation que vous mentionnez, on l'a évoquée même pour les plans de formation de nos PE2. On voit bien que c'est le même système, c'est-à-dire que les modules sont devenus ridiculement tout petits et que la pléthore de modules fait que nos étudiants ne peuvent plus identifier et ne peuvent plus savoir ce qu'ils sont en train de construire.

Si on oppose, comme le fait Bernstein, pédagogie sérielle (centrée sur une discipline donnée) et pédagogie intégrée (centrée sur la circulation et la mise en relation des savoirs), cette dernière, censée aider les élèves à penser, correspond en fait à un type de culture particulier, la culture noble scolaire, la culture des milieux favorisés. Sans doute faut-il que l'élève puisse comprendre les relations entre les savoirs, mais ce qui est aussi urgent, c'est de l'aider à reconnaître les spécificités disciplinaires que ce soit dans les modes de pensée qui y sont développés ou dans les types d'activités cognitivo-langagières exigés : commenter, analyser, expliquer n'ont pas du tout le même sens en histoire, en mathématiques, en français.

A ce propos, allons plus loin dans les relations possibles entre rapport au savoir et rapport au langage. Les élèves qui privilégient le rapport identitaire au savoir sont aussi ceux qui tiennent, sur le savoir, du discours narratif. C'est-à-dire qu'interrogés sur leurs apprentissages, ils racontent la classe ou l'activité. Ils peuvent raconter le cours mais ne rien en avoir appris et ne pas avoir identifié les objets de savoir. Sans doute qu'en dehors de l'école les modèles narratifs sont les plus fréquents ; à la télévision, l'information est présentée sous forme narrative, par le film des événements. Certes, dans des sociétés traditionnelles, le récit est le mode de transmission des savoirs de la communauté, ce n'est pas le cas dans une société scolarisée comme la nôtre.

Une remarque encore sur le langage. Si on regarde des copies de narration d'élèves de BEP, on voit ainsi qu'ils savent à peu près bien raconter, mais quand on regarde ce qu'ils écrivent en histoire ou en sciences sociales, leurs discours sont faits d'énoncés déclaratifs juxtaposés. De telles productions ne permettent pas de savoir ce que les élèves comprennent des processus sociaux et historiques dont ils font état. Mais l'observation de leur manuel montre qu'il ne présente lui aussi que des énoncés constatifs juxtaposés.

Quand on prend le manuel d'histoire de la classe de seconde d'enseignement général, il présente des discours argumentatifs qui posent des thèses, des hypothèses sur les processus sociaux et historiques.

Par le biais des manuels, on construit un rapport au savoir socialement différencié. Les élèves de BEP n'ont pas accès au même type de savoirs ou plutôt de rapport au savoir. Dans le livre de BEP le savoir est présenté comme vrai, puisqu'on ne donne pas les moyens d'analyser sa construction, on n'indique pas le processus. On ne permet pas à l'élève de penser le processus de construction de connaissances.

Ces remarques soulèvent la question du rapport au savoir des enseignants. Un enseignant n'est à peu près jamais dans un processus de construction de connaissances. A sa décharge, ce n'est pas son rôle.

L'interprétation de la situation par les élèves : les "postures d'apprentissage"

Ce qui semble être fréquent chez des élèves privilégiant un rapport plutôt identitaire au savoir, c'est de considérer qu'il y a des moments où on apprend et des moments où on n'apprend pas. D'autres élèves au contraire sont la plupart du temps dans des postures d'apprentissage, c'est-à-dire qu'ils ont le rapport au savoir que suppose l'école : un questionnement sur le fonctionnement des choses etc... C'est ce qu'il faudrait que les élèves construisent, le fait que le monde puisse être objet de questionnement, alors qu'il est éventuellement objet d'angoisse ou objet d'évidence, ou objet de discours définitif.

Plus on est dans une pédagogie intégrée, plus on rend la vie des élèves difficile parce qu'ils ne savent plus identifier les objets et les moments d'apprentissage. Par exemple, il y a des petits qui identifient totalement travailler et écrire, et les activités diversifiées les troublent : *"on n'a pas travaillé aujourd'hui (parce qu'aujourd'hui on n'a pas écrit)"*. Mais on peut remarquer aussi qu'ils n'ont pas appris ; ils ne se sont pas mis en posture d'apprendre et de travailler, d'une certaine manière, ils étaient en situation d'attente : *"bon, quand est-ce qu'on va s'y mettre aujourd'hui ?"*.

Des élèves peuvent se trouver dans cette situation-là avec des pédagogies et des dispositifs innovants par exemple. Prenons l'exemple de l'aide aux devoirs : d'une certaine façon, ce qu'on appelle l'accompagnement scolaire aujourd'hui peut s'avérer moins positif si on se demande quelle incidence "l'école après l'école" a sur "l'école dans l'école". L'élève qui est dans une logique de tâches peut interpréter l'aide aux devoirs comme un moment supplémentaire d'apprentissage mais on ne change en rien sa posture. Les innovations ne sont démocratisantes qu'à condition que les gens partagent les valeurs et le rapport au savoir que l'innovation suppose.

C'est pour ça que les pédagogies actives par exemple, ou les pédagogies différenciées, non seulement sont difficiles à mettre en place par les enseignants, mais ne correspondent pas à ce que les élèves attendent de l'école, à leur rapport au savoir.

Les exemples que vous avez donnés jusque là ont plutôt montré qu'on ne changeait pas de posture, de rapport au savoir.

Non ! les exemples que j'ai donnés décrivent des rapports au savoir, aux apprentissages, au langage. C'est tout. Les recherches que nous menons permettent de comprendre ce qui est cause de difficultés. A certains moments, ce qu'il faut changer ou diversifier, c'est justement la posture des élèves, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une acculturation et non d'une acquisition technique.

Dans le domaine de l'apprentissage de l'écrit, la réponse didactique à la question de la mise en écriture, est une réponse technique. On sait décrire avec finesse ce que c'est qu'un texte et on sait le faire apprendre aux élèves (voir BAUTIER 1991). Mais cette réponse technique ne modifie pas le rapport à l'écrit de l'élève si on n'arrive pas l'aider à construire une identité de sujet écrivant ; il devient quelqu'un qui écrit en situation scolaire en répondant à la consigne, qui réalise des tâches, non qui écrit.

L'école peut certes arriver à faire croire à l'élève qu'en faisant son métier d'élève, il est quitte. Je ne dis pas que la réponse technique est sans intérêt, elle peut même servir de marchepied pour certains élèves, mais elle ne doit pas être confondue avec une véritable mise en activité des élèves.

Je veux savoir : est-ce que vous avez des trucs qui les font changer de posture ?

En français ce qui peut faire changer de posture c'est par exemple de faire écrire le plus souvent possible et surtout de faire travailler l'écriture (BAUTIER, Bucheton, 1995), mais pas par rapport à des normes scolaires. Refaire un texte, ce n'est pas l'améliorer au regard d'une norme, d'un modèle. Refaire un texte, c'est par exemple s'apercevoir qu'on élabore quelque chose ; que justement au lieu de décrire "à plat", on se met à penser. Ce qui fait d'ailleurs que le texte final peut être plus mauvais au regard des normes scolaires traditionnelles, il peut être en tout cas plus "mal fichu", mais il a permis de devenir sujet d'une pensée, d'une écriture, de se rendre compte que le travail de l'écrit était aussi un travail de la pensée et du monde.

Je pensais à l'évaluation ; elle n'est strictement plus possible parce que c'est l'évaluation de l'auteur lui-même.

Oui, mais cette remarque est valable pour tous types de production ; c'est pour ça que ce n'est pas par rapport aux normes de la discipline. Il est intéressant de distinguer ce qui relève de l'institution de ce qui relève de la pédagogie ou du projet éducatif. A l'école, l'élève a à négocier avec quantités de sujets de discours possibles. Il y a la parole de l'enseignant, le discours du manuel, le discours d'autres adultes, des copains, sa voix propre qui est déjà une voix d'élève, et une voix d'enfant, d'adolescent. On s'aperçoit ainsi qu'un élève est d'autant moins en difficultés qu'il a compris les enjeux de cette négociation, la place qu'il peut prendre dans ses productions.

Je voudrais réintervenir parce que j'ai beaucoup travaillé avec les classes de Perfectionnement ; en mathématiques, j'essaie justement de les faire écrire, mais j'ai remarqué, dans les 2 classes où j'ai travaillé longtemps, que c'était difficilement réinvesti en français... Je me demandais si ce n'est pas finalement dans chaque discipline que le problème se pose.

Sans doute. Je crois que oui, peut-être justement parce que, si la transversalité avait un sens et était à l'oeuvre dans les équipes enseignantes, l'élève n'aurait pas à le faire, lui, dans chaque discipline.

Et les didacticiens dans tout ça ?

Que peut apporter à votre avis le travail des didacticiens ?

Tout dépend ce que l'on appelle "didacticiens". On peut en effet distinguer plusieurs "acteurs" de la diffusion des savoirs, l'expert, le didacticien, le formateur, le chercheur... Pendant des années, on avait des savoirs savants que l'enseignement transformait en discipline et en savoirs enseignés. Les MAFPEN ont abouti à la création d'un corps de personnes qui n'étaient pas forcément sur une logique de transformation des savoirs savants, qui sont souvent des profs, des "super-profs". Ces "super-profs" ont construit des savoirs sur l'enseignement ; ils ont construit des démarches didactiques et un corps intermédiaire de savoir qui n'est pas le savoir savant, qui est un peu, et je veux le dire dans un sens noble, du bricolage... C'est du bricolage de savoir savant/savoir enseigné mais qui n'est pas la transformation de l'un en l'autre.

Les didacticiens constituent des "savoirs savants didactiques" qui peuvent être plus ou moins éloignés de la logique de l'enseignement. Ainsi, le didacticien de français est aujourd'hui très largement "cognitiviste" ; pourtant on n'a aucune preuve aujourd'hui que le courant cognitiviste donne de meilleurs résultats en classe. Il y a une certaine autonomie des savoirs didactiques par rapport au travail de l'enseignant qui dépasse largement l'enseignement-apprentissage d'une discipline.

Il y aurait beaucoup à dire des rapports de l'enseignant et du didacticien, de la manière dont le premier se saisit du travail du second.

La recherche que vous faites, vous, elle a des choses à dire sur ce qui se passe en classe ?

Oui, sans doute puisque nous travaillons aussi avec ce qui se passe dans la classe mais ça ne signifie nullement que nos recherches indiquent aux enseignants ce qu'ils ont à faire. La logique du chercheur n'est pas celle de l'enseignant ; mais l'intelligibilité que donnent les recherches peut orienter les pratiques des enseignants.

ANNEXE

Publications récentes

THÈSES DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La COPIRELEM a souhaité proposer un inventaire des thèses les plus récentes, thèses d'état, d'université ou de troisième cycle, concernant la didactique des mathématiques et pouvant servir de référence aux formateurs chargés de la formation des professeurs d'écoles ou de celle des professeurs de lycées et collèges.

L'entreprise ne s'avère pas aisée, faute d'une base de données exhaustive et fiable. La liste qui suit a été établie essentiellement à partir d'une consultation Minitel. Les difficultés de cette recherche font que cette liste de 48 thèses n'est certainement pas exhaustive.

Il est probable qu'il reste des oublis importants et nous invitons les lecteurs à signaler ceux qu'ils auront remarqués. Le cas échéant, nous pourrons ainsi compléter la liste lors d'une prochaine publication.

A l'exception de quelques-unes plus anciennes, nous nous sommes limités aux thèses les plus récentes (depuis le début des années 90 environ).

AUTEUR	TITRE	UNIVERSITÉ	DATE
ASSUEDE Teresa-Maria	Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Écologie de l'objet racine carrée et analyse du curriculum.	Grenoble 1	1992
BANWITTIYA Yeleko	L'ingénierie du sens en mathématiques : la division dans N, Q et D à l'école primaire.	Bordeaux 1	1993
BARRAT	Problème de didactique de la numération : essai et succès de la remathématisation.	Bordeaux 1	1995
BELLEMAIN Franck	Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-Géomètre.	Grenoble 1	1992
BERTE Annie	Observations dans les classes sur le développement de l'activité mathématiques des élèves.	Paris 7	1988
BOLA Amboka	Le sens dans le contrat didactique ; institutionnalisation d'un algorithme : application à la soustraction.	Bordeaux 1	1992
BOURCY Claude	Étude de la saisie des données dans les jeux pédagogiques.	Bordeaux 1	1992

AUTEUR	TITRE	UNIVERSITÉ	DATE
BRIAND Joël	L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique.	Bordeaux 1	1993
BROUSSEAU Guy	Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques et annexes : l'enseignement des décimaux dans la scolarité obligatoire, textes divers.	Bordeaux 1	1986
BUSNEL Daniel	Étude partielle de comportements d'élèves en situation de construction géométrique et de démonstration mathématique dans le cadre de la géométrie euclidienne plane au collège.	Paris 7	
BUTLEN Denis	Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire.	Paris 7	1985
DAMM Regina Flemming	Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.	Strasbourg 1	1992
DA ROCHA FALCOA Jorge	Représentation du problème, écriture de formules et guidage dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre.	Paris 5	1992
DOUADY Régine	Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.	Paris 7	1984
EL BOUAZZAOUI Habiba	Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions.	Bordeaux 1	1982
ESFAHANI Esmaeil	L'aspect sémantique des problèmes additifs.	Paris 7	1989
FAVRAT Jean-François	Une expérience sur l'enseignement des surfaces à l'école élémentaire.	Paris 7	1986
FREGONA Dilma	Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.	Bordeaux 1	1994

AUTEUR	TITRE	UNIVERSITÉ	DATE
GRENIER Denise	Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième.	Grenoble	1988
GUZMAN RETAMAL Ismenia	Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.	Strasbourg 1	1990
HANTOUCHE Antoine	Les problèmes posés par l'acquisition des nombres décimaux.	Paris EHESS	1984
HOUDEMENT Catherine	Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.	Paris 7	1995
JOSHUA SIRVENT Marie-Alberte	Les contraintes didactiques comme problème. Deux études de cas sur le système d'enseignement des mathématiques.	Marseille 1	1991
KOURKOULOS Michel	Modélisation mathématique des situations aboutissant à des équations du premier degré auprès des élèves de 15-16 ans.	Strasbourg 1	1990
KUZNIAK Alain	Étude de situations de formation en mathématiques utilisées pour la formation des maîtres du premier degré.	Paris 7	1994
LARHER Annie	Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve en mathématiques.	Rennes	1991
LARRERE Christiane	L'apprentissage des mathématiques par des enfants et adolescents infirmes moteurs cérébraux ayant d'importantes difficultés de langage.	Paris 5	1994
MAGALHAES DE FREITAS Jose Luiz	L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre : une étude des types de preuves produites par des élèves de collège et lycée.	Montpellier 2	1993
MARGOLINAS Claire	Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.	Grenoble	1989
MENSSOURI Denis	Essai de délimitation en terme de problématique des effets de contrat et de transposition.	Grenoble	1989

AUTEUR	TITRE	UNIVERSITÉ	DATE
MERCIER Alain	L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.	Bordeaux 1	1992
MOREIRA Mariano	Le traitement de la vérité mathématique à l'école.	Bordeaux 1	1992
NADOT Suzon	Représentations graphiques et études de fonctions. Les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère. Une approche par la programmation informatique d'un traceur de courbes.	Paris 5	1991
NEYRET Robert	Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : les nombres décimaux, rationnels, réels, dans les I.U.F.M.	Grenoble	1995
OLVERA MURILLO Marta	L'étude des fonctions dans le premier cycle de l'enseignement secondaire.	Paris 7	
ORUS-BAGUENA Pilar	Place de la logique spontanée des élèves dans le contrat didactique : rôle possible d'un enseignement en analyse typologique dans la scolarité.	Bordeaux 1	1992
PASTREPIERRE	Essai pour introduire le concept de didactique professionnelle. Rôle de la conceptualisation dans la conduite de machines automatisées.	Paris 5	1992
PELTIER Marie-Lise	La formation initiale en mathématiques des professeurs des écoles : entre conjoncture et éternité.	Paris 7	1995
PEREZ Jacques	Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'apprentissages scolaires : construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle.	Paris 5	1984
PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne	Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficultés au niveau CM - 6ème.	Paris 7	1992
PEZARD Monique	Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs.	Paris 7	1985

AUTEUR	TITRE	UNIVERSITÉ	DATE
PILLOT Janine	Informatique et premiers apprentissages à l'école maternelle.	Paris 5	1991
RAPEGNO Gérard	Recherche d'une méthode d'analyse des phrases d'une leçon en vue de la formation des enseignants.	Paris 7	
RATSIMBA-RAJOHN Harisson	Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions.	Rennes	1992
RAUSCHER	L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Cas de la géométrie en début de collège.	Strasbourg	1993
ROCHEX Jean-Yves	Entre activité et subjectivité : le sens de l'expérience scolaire.	Paris 8	1992
SALIN Marie-Hélène et BERTHELOT René	Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire.	Bordeaux 1	1992
TAVIGNOT Patricia	L'analyse du processus de transposition didactique. Exemple de la symétrie orthogonale au collège.	Paris 5	1991

La COPIRELEM vous signale un ouvrage récemment paru :

« Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques »

Joël Briand & Marie-Claude Chevalier.

240 pages Hatier-pédagogie 1995

Cet ouvrage se propose de montrer en quoi la didactique des mathématiques intéresse les enseignants et peut contribuer à leur formation professionnelle.

Il est avant tout destiné aux étudiants qui préparent les concours du CAPE (professeur des écoles) ou du CAPES mathématiques deuxième année, mais les formateurs y trouveront des références leur permettant de construire leurs cours.

A partir de situations concrètes empruntées au vécu de la classe et de nombreux exercices proposés au lecteur, les principaux concepts élaborés par les chercheurs en didactique sont découverts, définis et expliqués. On trouvera, en particulier des outils d'analyse concernant : les savoirs en jeu, le rôle et les décisions de l'enseignant, les réactions des élèves, leurs connaissances, leurs erreurs, le statut de l'écrit dans l'activité mathématique.

La dernière partie de l'ouvrage s'intéresse à la préparation proprement dite aux épreuves du concours de professeur des écoles. Elle propose l'analyse de productions d'élèves et des documents pédagogiques pour le maître ainsi que l'étude de sujets de concours et copies d'étudiants.